多项式向量场的显式几何积分：分解、最优块数与可解析原子流

王昭原

2026 年 1 月 19 日

摘要

本文整理并给出以下五类主要结果的统一表述与证明提纲：（i）将冯康等人对二元多项式的构造性幂和分解推广到 n 元齐次多项式的显式构造；（ii）据此解决 McLachlan–Quispel (2004) 在 Hamiltonian 情形 Conjecture 1 的 $k=1$ 特例，并证明对应子流为剪切/平移流，从而显式欧拉一步即精确流；（iii）在 Lagrangian 情形 $k=n/2$ 给出统一的 2^d-块构造与可逆反演，并证明其在 $n\to\infty$（固定次数 d）下渐近最优；（iv）对 divergence-free 多项式向量场给出 $k=1$ 的反对称张量势构造与剪切原子化分裂，从而得到每块可解析并且显式欧拉精确的体积保持子流，且在固定次数下随维数增大其块数逼近通用最优下界；（v）对接触系统严格刻画"哪些接触子块可使显式欧拉精确"，从而解释为何一般接触多项式不可能完全按该思路分块；进而转向纯幂单项式接触原子（每块可解析求解）并采用保接触 splitting 组合。

目录

1 McLachlan–Quispel 框架中的“块数下界”与两个猜想

1.1 维数记号

对 n 元 d 次齐次多项式空间 $\mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n)^*$，其维数为

$$N(n,d) := \dim \mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n+d-1}{d}. \tag{1}$$

McLachlan–Quispel 的分裂框架中，固定维数 n、次数 d 与每块依赖变量数 k，希望用尽量少的 k-维子空间（或等价的 k-变量子系统）覆盖/张成全部 n 元 d 次对象；其维数论下界为

$$s \;\geq\; s^{(n,k,d):=\left\lceil \frac{N(n,d)}{N(k,d)} \right\rceil.(2)}$$

1.2 两条猜想

- **Conjecture 1（Hamiltonian 情形）**：在各向同性 Grassmann 流形 $IG(n,k)$ 上取“泛型” s 个点/子空间，得到的限制算子应当是单射（或相应矩阵满秩）。
- **Conjecture 2（体积保持情形）**：在 Grassmann 流形 $G(n,k)$ 上取“泛型” s 个点/子空间，也应形成非奇异配置（从而得到通用分解/重构）。

注 1.1. 本文的目标不是讨论代数几何意义下“单个多项式的最小 Waring 秩”，而是讨论与 (2) 对齐的*通用块数*：对所有 n 元 d 次对象，给出一组显式可复现的“块模板”，并尽量逼近维数下界。

2 结果 A：n 元齐次多项式的显式幂和分解（素数–Vandermonde 构造）

2.1 多重指数与节点

令

$$\mathcal{A}_{n,d} := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \; |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d\}, \qquad |\mathcal{A}_{n,d}| = N(n,d).$$

对每个 $\alpha \in \mathcal{A}_{n,d}$，记单项式 $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$。

定理 2.1 (显式幂和基：素数–Vandermonde 构造). 取 n 个互异素数 $p_1,\dots,p_n$。对每个整数 $r\ge 0$ 定义线性形式

$$L_r(x) := \sum_{i=1}^{n} p_i^{r}\, x_i, \qquad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

令 $N=N(n,d)$，取 $r=0,1,\dots,N-1$。则：

(i) $\{L_r(x)^d\}_{r=0}^{N-1}$ 张成 $\mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n)^*$，并且由于数目等于维数，事实上它们构成一组基。

(ii) 因此任意 n 元 d 次齐次多项式 $P(x)$ 都可表示为

$$P(x) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r\, L_r(x)^d, \tag{4}$$

其中系数向量 $c=(c_0,\dots,c_{N-1})^\top$ 可通过求解一个结构化 *Vandermonde* 线性系统显式得到。

证明（构造性提纲）. 将 $L_r(x)^d$ 展开到单项式基上：

$$L_r(x)^d = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n,d}} \binom{d}{\alpha}\Big(\prod_{i=1}^{n} p_i^{r\alpha_i}\Big)x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n,d}} \binom{d}{\alpha}\,\lambda_\alpha^r\, x^\alpha,$$

其中

$$\lambda_\alpha := \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}.$$

由算术基本定理（素因子分解唯一性），$\alpha\ne\beta \Rightarrow \lambda_\alpha\ne\lambda_\beta$。

令 V 为 $N\times N$ 的 Vandermonde 矩阵

$$V_{r,\alpha} := \lambda_\alpha^r, \qquad r=0,\dots,N-1,\ \alpha\in\mathcal{A}_{n,d}.$$

由于节点 $\{\lambda_\alpha\}$ 两两不同，V 可逆。再考虑对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(\binom{d}{\alpha})$，则

$$\big(L_r(x)^d\big)_{r=0}^{N-1} \iff \text{系数矩阵为}\, VD,$$

从而 VD 也可逆。于是每个单项式 x^α（乃至任意 P）都能被 $\{L_r^d\}$ 线性表示，得到 (4)。 □

注 2.2 (块数“最优”的含义（通用基意义）). $\mathrm{Sym}^d(\mathbb{R}^n)^*$ 的维数是 $N(n,d)$。若希望一组 $k=1$ 的“单变量块”对所有 n 元 d 次齐次多项式构成通用张成，则至少需要 $N(n,d)$ 个块（纯维数论下界）。定理 2.1 恰好用 $N(n,d)$ 个块达到该下界，因此在该意义下块数最优。

3 结果 B：Conjecture 1 的 $k=1$ 特例（Hamiltonian 分解 + 显欧拉精确）

3.1 Hamiltonian 系统与 $k=1$ 原子

在 $\mathbb{R}^{2m}$ 上取标准辛矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0\end{pmatrix}, \qquad J^\top=-J.$$

给定多项式 Hamiltonian $H:\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$，其系统为

$$\dot{z} = J\nabla H(z). \tag{5}$$

定义 3.1 ($k=1$ 的 Hamiltonian 原子). 对向量 $a\in\mathbb{R}^{2m}$ 与整数 $d\geq 1$，称

$$H_a(z) := (a^\top z)^d$$

为一个 $k=1$ 的（依赖一个线性函数的）Hamiltonian 原子。

定理 3.2 (剪切原子流的线性漂移解（Euler 一步即精确流）). *令 $a\in\mathbb{R}^{2m}$、$d\geq 1$，并考虑原子 Hamiltonian*

$$H_a(z) = (a^\top z)^d.$$

则对应 Hamiltonian 向量场

$$\dot{z} = J\nabla H_a(z) = d\,(a^\top z)^{d-1}\,Ja \tag{6}$$

具有以下性质：

(i) 标量 $a^\top z(t)$ 沿流保持常数；

(ii) 精确流为平移（匀速直线）：

$$z(t) = z(0) + t\cdot d\,(a^\top z(0))^{d-1}\,Ja; \tag{7}$$

(iii) 因而对任意步长 h，显式欧拉更新恰好等于精确流映射。

证明. 令 $y(t) := a^\top z(t)$，则

$$\dot{y} = a^\top\dot{z} = d\,(a^\top z)^{d-1}\,a^\top Ja = 0$$

（因 J 反对称）。故 $a^\top z(t)\equiv a^\top z(0)$，代回 (6) 得右端为常向量，从而得到线性漂移解 (7)，并与欧拉一步一致。 □

定理 3.3 (Conjecture 1 在 $k=1$ 的构造性成立（并给出最优块数）). *令 H 为 $\mathbb{R}^{2m}$ 上任意 d 次齐次多项式（$d\geq 1$）。则存在 $N(2m,d)$ 个向量 $a_r\in\mathbb{R}^{2m}$ 与系数 $c_r\in\mathbb{R}$ 使得*

$$H(z) = \sum_{r=0}^{N(2m,d)-1} c_r\,(a_r^\top z)^d. \tag{8}$$

从而 Hamiltonian 系统 (5) 可分裂为 $N(2m,d)$ 个原子系统之和，每个原子系统的精确流由定理 3.2 给出（显式欧拉精确）。

此外，在“通用基/覆盖所有 H”的意义下，该块数 $N(2m,d)$ 是最优的（维数下界）。

证明提纲. 将 H 视为 $n=2m$ 元 d 次齐次多项式，直接应用定理 2.1 得到 (8)。最优性来自维数下界。 □

4 结果 C：Lagrangian 情形 $k = n/2$ 的 2^d 块构造与渐近最优

本节针对 $n = 2m$、$k = m$ 的 Lagrangian 子空间限制设计，给出一族显式的 2^d-块构造，并给出“逐系数 Vandermonde 反演”证明。

4.1 设置：$V = Q \oplus P$

令 $V = \mathbb{R}^{2m} = Q \oplus P$，取坐标 $(q, p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$。对 $H \in \mathrm{Sym}^d(V^*)$，写成

$$H(q,p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=d} c_{\alpha,\beta}\, q^\alpha p^\beta. \tag{9}$$

4.2 图像型 Lagrangian 子空间族

取 $m \times m$ 对角矩阵

$$J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

称 $\{\lambda_i\}$ 乘法独立，若

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i^{k_i} = 1\ (k_i \in \mathbb{Z}) \implies k_i = 0\ \forall i.$$

（例如取互异素数可保证该性质。）

定义 2^d 条 m 维子空间：

$$W_Q := \{(q,0)\}, \qquad W_P := \{(0,p)\}, \qquad W_t := \{(q, J^t q)\},\ \ t = 0, 1, \dots, 2^d - 3. \tag{10}$$

定理 4.1 (2^d 条子空间的统一构造与显式反演). *设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 乘法独立，W_Q, W_P, W_t 如 (10)。则对任意 $H \in \mathrm{Sym}^d(V^*)$，由*

$$H|_{W_Q}, \quad H|_{W_P}, \quad \{H|_{W_t}\}_{t=0}^{2^d-3}$$

可唯一确定 H 的全部系数 $c_{\alpha,\beta}$，并且对每个固定的总指数 $\gamma = \alpha + \beta$，混合系数向量可由一个 Vandermonde 系统显式恢复。

证明提纲（按“纯块 + 混合块”分离）. **(1) 纯块先定：** $H|_{W_Q} = H(q,0)$ 直接给出所有 $c_{\alpha,0}$；$H|_{W_P} = H(0,p)$ 直接给出所有 $c_{0,\beta}$。

(2) 构造“去纯块”的混合测量： 对 $t \geq 0$ 定义

$$G_t(q) := H(q, J^t q) - H(q,0) - H(0, J^t q). \tag{11}$$

将 (9) 代入可得

$$G_t(q) = \sum_{|\gamma|=d} \left(\sum_{\substack{\beta:\ 0 \leq \beta \leq \gamma \\ 1 \leq |\beta| \leq d-1}} c_{\gamma-\beta,\beta}\, \Lambda_\beta^t \right) q^\gamma, \qquad \Lambda_\beta := \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\beta_i}.$$

对固定 γ，令 $B_\gamma := \{\beta:\ 0 \leq \beta \leq \gamma,\ 1 \leq |\beta| \leq d-1\}$，则 $|B_\gamma| \leq 2^d - 2$。乘法独立性保证 $\beta \neq \beta' \Rightarrow \Lambda_\beta \neq \Lambda_{\beta'}$。

(3) Vandermonde 反演： 取 $t=0,1,\dots,|B_\gamma|-1$，则对系数

$$g_\gamma(t) := [q^\gamma]\, G_t(q)$$

得到线性系统

$$g_\gamma(t) = \sum_{\beta\in B_\gamma} c_{\gamma-\beta,\beta}\ \Lambda_\beta^t,$$

其系数矩阵是 Vandermonde（节点 Λ_β 互异），故可逆，混合系数 $c_{\gamma-\beta,\beta}$ 被唯一恢复。对所有 γ 并行执行即可恢复全部系数。 □

命题 4.2 (维数下界与渐近最优). 令 $n=2m$，固定次数 d，则

$$\frac{N(2m,d)}{N(m,d)} = \prod_{j=0}^{d-1} \frac{2m+j}{m+j} \ \longrightarrow\ 2^d \qquad (m\to\infty).$$

因此 $k=m$ 情形的维数下界 (2) 在 $m\to\infty$ 时趋于 2^d。结合定理 *4.1* 的显式构造 $s=2^d$，可知其在 $m\to\infty$ 下渐近最优。

证明. 直接展开乘积并对每一项作极限即可。 □

5 结果 D：divergence-free（保体积）多项式向量场的 $k=1$ 原子化（剪切流 + 显欧拉精确 + 渐近逼近最优块数）

5.1 反对称张量势与散度算子

定义 5.1 (反对称张量场及其散度). 称 $\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为反对称张量场，若 $\Psi(z)^\top=-\Psi(z)$。定义其散度为向量场

$$(\nabla\cdot\Psi)_i(z) := \sum_{j=1}^n \partial_{z_j}\Psi_{ij}(z).$$

定理 5.2 (齐次无散度场的显式反对称张量势). 令 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为次数 d 的齐次多项式向量场，并满足 $\operatorname{div} F\equiv 0$。定义反对称张量

$$\Psi_{ij}(z) := -\frac{1}{n+d-1}\left(z_iF_j(z)-z_jF_i(z)\right). \tag{12}$$

则 $\Psi(z)^\top=-\Psi(z)$，并且

$$\nabla\cdot\Psi = F. \tag{13}$$

证明提纲. 对 (12) 求散度，利用齐次 Euler 恒等式 $(z\cdot\nabla)F_i=dF_i$ 与 $\operatorname{div}F=0$ 消去项即可。 □

定理 5.3 ($k=1$ 剪切原子化与显式欧拉精确). 令 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为无散度多项式向量场。则可构造反对称张量势 Ψ 满足 $F=\nabla\cdot\Psi$，并进一步将势分解为有限和

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^M B_k\,(a_k^\top z)^{m_k+1}, \qquad B_k^\top=-B_k,\ a_k\in\mathbb{R}^n. \tag{14}$$

从而 $F=\sum_{k=1}^M F_k$，其中每个子场为

$$\dot z = F_k(z) = (m_k+1)\,(a_k^\top z)^{m_k}\,B_ka_k. \tag{15}$$

并且每个子系统都是剪切平移流：$a_k^\top z(t)$ 沿流守恒，因此显式欧拉一步等于精确流映射。

证明提纲. 用定理 5.2 先构造 Ψ，再对 Ψ 的多项式系数施加你在第 A 节的幂和分解（素数–Vandermonde），并重组为反对称矩阵系数 B_k 得 (14)。对 (15) 令 $y(t)=a_k^\top z(t)$，则

$$\dot y=(m_k+1)(a_k^\top z)^{m_k}\,a_k^\top B_k a_k=0,$$

故右端变常向量，子流为平移，欧拉精确。 □

5.2 固定次数、维数增大时：块数逼近最优下界

定义 5.4 (齐次无散度向量场空间). 记 $\mathcal{V}_{n,d}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上次数 d 的齐次多项式向量场空间，记

$$\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}:=\{F\in\mathcal{V}_{n,d}:\ \operatorname{div}F=0\}.$$

命题 5.5 (通用最优下界：$k=1$ 时最少块数 $\geq \dim\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}$). 在 $k=1$ 的"通用基"意义下（每个原子只贡献 1 维自由度），任意能覆盖所有 $\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}$ 的分解模板块数 s 满足

$$s\ \geq\ s_{\min}(n,1,d):=\dim\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}.$$

并且

$$\dim\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}=n\,N(n,d)-N(n,d-1). \tag{16}$$

证明提纲. 显然 $\dim\mathcal{V}_{n,d}=nN(n,d)$。对齐次情形，散度算子 $\operatorname{div}:\mathcal{V}_{n,d}\to\operatorname{Sym}^{d-1}(\mathbb{R}^n)^*$ 是满射：给定任意齐次 g（次数 $d-1$），取 $F(z)=\frac{1}{n+d-1}\,z\,g(z)$，则 $\operatorname{div}F=g$（用 Euler 恒等式验证）。故 $\operatorname{rank}(\operatorname{div})=N(n,d-1)$，从而 $\dim\ker(\operatorname{div})=nN(n,d)-N(n,d-1)$。 □

定理 5.6 (保体积 $k=1$ 构造在 $n\to\infty$ 下渐近逼近最优块数). 固定次数 d。对任意 $F\in\mathcal{V}_{n,d}^{\div=0}$，你的构造可取一组 $k=1$ 剪切原子使得分解块数满足

$$M(n,d)=n\,N(n,d). \tag{17}$$

于是当 $n\to\infty$（固定 d）时，

$$\frac{M(n,d)}{s_{\min}(n,1,d)}=\frac{nN(n,d)}{nN(n,d)-N(n,d-1)}\longrightarrow 1. \tag{18}$$

因此在"固定次数、变量个数充分大"的前提下，给出在保体积 $k=1$ 情形的分解数量渐近逼近通用最优下界。

证明提纲. 下界由命题 5.5 给出。上界 (17) 来自构造性分解（同伦势 + 秩-1 反对称张量势原子化 + 素数–Vandermonde 系数重组）。极限 (18) 用组合数渐近或直接估计 $N(n,d-1)/(nN(n,d))\sim d/n^2$ 即得。 □

6 结果 E：接触系统（contact）——为何"显欧拉精确块"一般行不通 + 纯幂单项式原子可解析分裂

6.1 接触 Hamilton 方程（标准坐标）

取坐标

$$z=(q,p,s)\in\mathbb{R}^{2n+1},\qquad q,p\in\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{R},$$

标准接触形式

$$\alpha = \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{n} p_i \,\mathrm{d}q_i.$$

给定 $H(q,p,s)$，其接触 Hamilton 方程为

$$\dot{q} = H_p, \qquad \dot{p} = -H_q - p\,H_s, \qquad \dot{s} = p \cdot H_p - H. \tag{19}$$

6.2 “显式欧拉等于精确流”的一般判据（关键引理）

引理 6.1 (欧拉精确性判据：$DX\,X \equiv 0$). 设 $X \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$。以下两条等价：

(i) 对所有初值与所有步长 τ，显式欧拉一步 $E_\tau(x) = x + \tau X(x)$ 等于真实流 $\varphi^\tau(x)$；

(ii) 对所有 x，有 $DX(x)\,X(x) \equiv 0$。

证明. 沿解 $x(t)$ 有 $\ddot{x}(t) = DX(x(t))\dot{x}(t) = DX(x(t))X(x(t))$。若 (ii) 成立则 $\ddot{x} \equiv 0$，解为直线 $x(t) = x_0 + tX(x_0)$，从而 (i)。反之若对所有初值都为直线，则 $\ddot{x} \equiv 0$ 推得 (ii)。 □

6.3 接触版 Feng 定理 2：线性像 $H(z) = \phi(Cz)$ 的 Euler 精确分类

令线性映射 $C : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^m$ 写成块形式

$$C = (B, A, c), \qquad u = Cz = Bq + Ap + cs,$$

其中 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$c \in \mathbb{R}^m$ 为列向量。

定理 6.2 (接触版 Feng 定理 2：对所有 ϕ 皆 Euler 精确的充要条件). 令 $C = (B, A, c)$ 固定。对任意 $\phi \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ 令 $H(z) = \phi(Cz)$，并记其接触向量场为 X_H。则下列两者等价：

(i) 对所有 ϕ，X_H 都满足 $DX_H(z)\,X_H(z) \equiv 0$（因此显式欧拉对所有 ϕ 都精确）；

(ii)

$$c = 0, \qquad AB^\top = 0. \tag{20}$$

证明提纲（与辛情形平行的“线性 ϕ + 二次 ϕ”杀条件）. 假设对所有 ϕ 都 Euler 精确。**(1) 取线性** $\phi(u) = r^\top u$**：** 此时 $H = r^\top(Bq + Ap + cs)$ 为线性接触 Hamiltonian。由欧拉精确性（引理 6.1）强迫轨线为直线，进而强迫 $u(t)$ 常量；选择适当初值（例如 $p = 0, s = 0$）可推出必须 $c = 0$，并进一步得到 $BA^\top = AB^\top$。

(2) 取二次 $\phi(u) = \frac{1}{2}u^\top u$**：** 此时可得到 $u(t)$ 常量、从而 (q,p) 以常速度漂移，但 s 的二阶导数会含有 $u^\top AB^\top u$ 项；欧拉精确性要求该项对所有 u 为零，即 $AB^\top$ 的对称部分为零。结合上一步 $BA^\top = AB^\top$，推出 $AB^\top = 0$。

反向 $(c = 0, AB^\top = 0) \Rightarrow$ Euler 精确：可直接验证 $DX_H X_H \equiv 0$（或等价地验证轨线为直线）。 □

6.4 Euler 精确块的结构与“不可完全分解”的否定结论

命题 6.3 (Euler 精确块结构：不得含 s). *若接触 Hamiltonian 形如一元复合*

$$H(z) = \phi(a \cdot p + b \cdot q + cs) \qquad (\phi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})),$$

且其向量场满足 $DX_H X_H \equiv 0$（显式欧拉精确），则必有

$$c = 0, \qquad a \cdot b = 0.$$

特别地，Euler 精确块不允许出现 s 依赖。

证明. 取 $m = 1$ 的定理 6.2 直接推出。 □

定理 6.4 (一般多项式接触 Hamiltonian 不可完全 Euler 精确分解). *设 $H(p, q, s)$ 为非平凡多项式接触 Hamiltonian。若满足以下任一条：*

(i) H 含有关于 s 的非零项（即 $H_s \neq 0$）；

(ii) H 含有同索引耦合单项式 $p_i q_i$（或其多项式组合）。

则 H 不可能写成有限个 Euler 精确块之和

$$H \neq \sum_{k=1}^{M} H_k, \qquad DX_{H_k} X_{H_k} \equiv 0 \quad \forall k.$$

证明提纲. 反设存在分解。由命题 6.3，每个 H_k 都不含 s，故 $\partial_s H = \sum_k \partial_s H_k \equiv 0$，与 (i) 矛盾。关于 (ii)，Euler 精确块的允许结构过窄（本质上只允许 $a \cdot p + b \cdot q$ 且 $a \cdot b = 0$ 的一元复合），无法生成同索引耦合项 $p_i q_i$，从而矛盾。 □

注 6.5 (这就是“接触系统里显欧拉精确分块行不通”的根本原因). 辛/Hamiltonian 情形里，秩-1（单线性型幂）子场天然给出剪切平移流，从而 Euler 精确；但接触情形多了 $-pH_s$ 与 $p \cdot H_p - H$ 这类项，迫使 Euler 精确块必须完全禁止 s 依赖并满足额外正交约束，于是一般多项式（尤其含 s 或含 $p_i q_i$）无法完全由 Euler 精确块拼出。

6.5 用“纯幂单项式原子”：每块可解析求解 + 保接触 splitting

定义 6.6 (纯幂单项式接触原子（单向块）). 固定 $i \in \{1, \ldots, n\}$，取常数 $\mu \in \mathbb{R}$ 与指数

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0, \qquad c \in \mathbb{R},$$

定义接触 Hamiltonian（纯幂单项式）

$$H(q, p, s) = \mu \, q_i^{\beta} \, p_i^{\alpha} \, s^{c}. \tag{21}$$

定理 6.7 (纯幂单项式原子的可解析积分（统一流程）). *考虑 (21)，并假设 $\alpha \neq 1$。则除了 (q_i, p_i, s) 外，其余 (q_j, p_j) $(j \neq i)$ 为常数。并且沿流有封闭子系统恒等式*

$$\dot{H} = -H_s H = -\frac{c}{s} H^2, \qquad \dot{s} = p \cdot H_p - H = (\alpha - 1) H, \tag{22}$$

从而消去时间得到幂律关系

$$H(s) = H_0 \left(\frac{s}{s_0}\right)^{-\kappa}, \qquad \kappa := \frac{c}{\alpha - 1}. \tag{23}$$

因此 $s(t)$ 可显式写出：当 $\kappa \neq -1$，

$$s(t)^{\kappa+1} = s_0^{\kappa+1} + (\kappa+1)(\alpha-1)H_0 s_0^{\kappa}\, t. \tag{24}$$

进一步地，以 s 为自变量可将 $p_i(s)$ 化为 *Bernoulli* 方程并闭式求解，最后用代数回代

$$q_i(s) = \left(\frac{H(s)}{\mu\, p_i(s)^{\alpha}\, s^{c}}\right)^{1/\beta}$$

恢复 q_i，从而得到 $(q_i(t), p_i(t), s(t))$ 的解析表达式。

证明提纲. **(1) 单向性：** H 仅含 (q_i, p_i, s)，故 $j \neq i$ 时 $\partial_{q_j} H = \partial_{p_j} H = 0$，得 $\dot q_j = \dot p_j = 0$。

(2) 基本恒等式：

$$H_{p_i} = \alpha \frac{H}{p_i}, \quad H_{q_i} = \beta \frac{H}{q_i}, \quad H_s = c\frac{H}{s}.$$

代回 (19) 得 $\dot s = (\alpha - 1)H$，并利用接触系统恒等式 $\dot H = -H_s H$ 得 (22)。

(3) 求 $H(s)$ 与 $s(t)$： 由 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}s = (\dot H)/(\dot s)$ 得 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -(c/(\alpha-1))H/s$，积分得 (23)，回代 $\dot s = (\alpha-1)H$ 得 (24)（$\kappa = -1$ 为对数型，略）。

(4) 求 $p_i(s)$ 并回代求 $q_i(s)$： 由 $\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}s = (\dot p_i)/(\dot s)$，并用 $q_i = (H/(\mu p_i^{\alpha} s^{c}))^{1/\beta}$ 消去 q_i，可得 Bernoulli 形式 $p_i' + P(s)p_i = Q(s)p_i^{\alpha/\beta}$，标准代换化为线性方程即可显式积分。 □

Algorithm 1 Contact splitting 原型：分解为纯幂单项式接触原子并组合

1: 输入：多项式接触 Hamiltonian $H = \sum_\ell H^{(\ell)}$，其中每个 $H^{(\ell)}$ 为纯幂单项式原子（定义 6.6），或通过单项式展开得到。
2: 对每个原子 $H^{(\ell)}$，按定理 6.7 写出精确流映射 Φ_ℓ^h。
3: 组合：Lie–Trotter：$\Phi_H^h \approx \Phi_L^h \circ \cdots \circ \Phi_1^h$；或 Strang：$\Phi_H^h \approx \Phi_1^{h/2} \circ \cdots \circ \Phi_L^h \circ \cdots \circ \Phi_1^{h/2}$。
4: 输出：显式保接触积分器（1 阶/2 阶或更高阶对称组合）。

7 小结（可直接改写成论文引言末段的“贡献列表”）

- （结果 A）给出 n 元齐次多项式的显式幂和构造：互异素数产生互异节点，Vandermonde 可逆，从而得到 $N(n,d)$ 个幂项的通用基（定理 2.1）。
- （结果 B）解决 Hamiltonian 情形 Conjecture 1 的 $k=1$ 特例：任意齐次 Hamiltonian 分解为 $N(2m,d)$ 个 $k=1$ 原子；每个原子子流为剪切平移流，显式欧拉精确，且块数通用最优（定理 3.3）。
- （结果 D）对保体积（无散度）场：同伦势 + 反对称张量势秩-1 原子化得到剪切子流，显式欧拉精确（定理 5.3）；固定次数下当 $n \to \infty$，块数与通用最优下界之比趋于 1（定理 5.6）。

- （接触补充）严格证明接触系统中 “Euler 精确块” 必须不含 s 且满足额外正交约束（定理 6.2），从而一般多项式接触 Hamiltonian 不可完全按 Euler 精确思路分解（定理 6.4）；因此改用纯幂单项式原子（每块可解析求解）并进行保接触 splitting 组合（定理 6.7）。

参考文献

[1] R. I. McLachlan and G. R. W. Quispel, Explicit geometric integration of polynomial vector fields, *BIT Numerical Mathematics* **44** (2004), 515–538.

[2] H. Xue and A. Zanna, Explicit volume-preserving splitting methods for polynomial divergence-free vector fields, *BIT Numerical Mathematics* **53** (2013), 265–281.

[3] K. Feng (冯康), Variations on a theme by Euler（讲义/手稿，线上版本见 Feng Kang Prize 页面），可从 `https://lsec.cc.ac.cn/fengkangprize/article.html` 获取。