题目 1. 求证：$S = \{x \in \mathbb{R}^n | x = Ay,\ A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times m},\ y \in \mathbb{R}^m,\ y \geq 0\}$ 是凸集.

证明. $\forall x_1, x_2 \in S,\ \exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ s.t. $x_1 = Ay_1,\ x_2 = Ay_2$，其中 $y_1, y_2 \geq 0$.

$\forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda A y_1 + (1-\lambda)Ay_2 = A(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$. 因为 $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0$，得 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$. 所以 S 是凸集. □

题目 2. S 是 E_n 中的一个非空凸集. 求证：$\forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$，若 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)} \in S$，则 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} \in S$，其中 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots k)$.

证明. 使用归纳法. 归纳基础：$k = 2$ 时：若 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$，由 S 是凸集，立得命题成立.

假设 $k = m - 1\ (m \geq 3,\ m \in \mathbb{N})$ 时命题成立. 考虑 $k = m$ 时：若 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)} \in S,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots m)$，有

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x^{(i)} + \lambda_m x^{(m)} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i} x^{(i)}\right) + \lambda_m x^{(m)}$$

因为 $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i} = 1$，由归纳假设，$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i} x^{(i)} \in S$. 又因为 $\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i + \lambda_m = 1$，得 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} \in S$. 所以命题对 $k = m$ 成立.

归纳知命题对 $\forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ 成立. □

题目 3. 用图解法解线性规划问题.

1. $\max -20x_1 + 10x_2$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ -10x_1 + x_2 \leq 10 \\ -5x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. $\min -3x_1 - 2x_2$ s.t.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解.

1. 如图 1a，阴影部分为可行域，点 $A=(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$. 最优解在点 A 取得，最优值 $f^*=25$.

2. 如图 1b，阴影部分为可行域，点 $A=(\frac{7}{4},\frac{3}{8})$, $B=(\frac{5}{4},\frac{9}{8})$. 最优解在线段 AB 取得，最优值 $f^*=-6$.

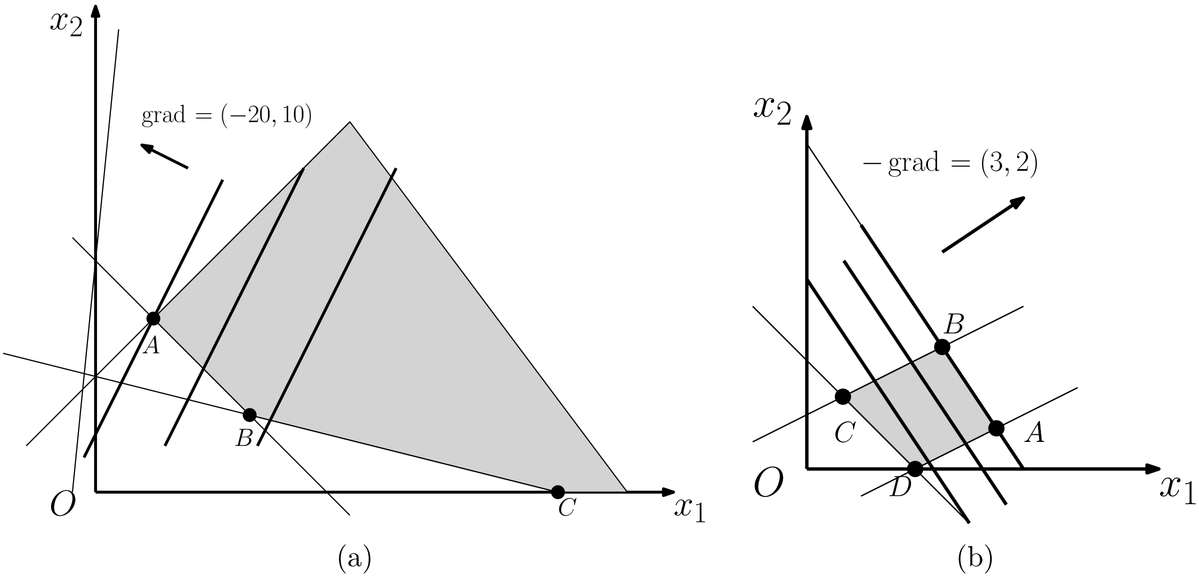

图 1

题目 1. **习题 2.4.** 设 $S=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}\}$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m>n$，A 的秩为 n. 证明 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是 S 的极点的充要条件是 A 和 $\boldsymbol{b}$ 可作如下分解：

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}$$

其中，A_1 有 n 个行，且 A_1 的秩为 n，$\boldsymbol{b_1}$ 是 n 维列向量，使得 $A_1\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{b_1}$, $A_2\boldsymbol{x}^{(0)}\geq\boldsymbol{b_2}$.

证明. 先证明 $\Longrightarrow$. 已知 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是 S 的极点. 假设 A 和 $\boldsymbol{b}$ 不可作题设分解，即分解后找不到 A 的 n 个线性无关的行组成 A_1 使 $A_1\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{b_1}$.

设 A 和 $\boldsymbol{b}$ 可作分解：$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}$ 使得 $A_1\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{b_1}$, $A_2\boldsymbol{x}^{(0)}>\boldsymbol{b_2}$，且 A_1 的秩 $r<n$. 解线性方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其解的自由度为 $n-r$，存在 $n-r$ 个线性无关的解 $\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots,\boldsymbol{x_{n-r}}$，解集为 $N(A_1)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n-r}c_j\boldsymbol{x_j}\}$. 则方程 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b_1}$ 的解集为 $X=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}+\sum_{j=1}^{n-r}c_j\boldsymbol{x_j}\}$.

已知在 S 中存在 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in S$. 以下证明引理：$\exists\delta>0$ s.t. $\forall\boldsymbol{x}\in X$，若 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty<\delta$，则 $\boldsymbol{x}\in S$. $\forall\boldsymbol{x}\in X$，由于 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}A_1\boldsymbol{x}\\A_2\boldsymbol{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\\A_2\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{x}\in S$ 只需 $A_2\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b_2}$. 由于 $A_2\boldsymbol{x}^{(0)}>\boldsymbol{b_2}$，知向量 $A_2\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b_2}$ 的各个分量的最小值 $m=\min\{(A_2\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b_2})_i\}>0$. 取 $\delta=\frac{m}{\|A_2\|_\infty}>0$，若 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty<\delta$，有

$$\|A_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)})\|_\infty\leq\|A_2\|_\infty\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty\leq\delta\|A_2\|_\infty=m$$

从而 $A_2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b_2}=A_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)})+(A_2\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b_2})\geq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}\in S$，引理得证.

对 $\delta=\frac{m}{\|A_2\|_\infty}>0$，取 $\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(0)}+\sum_{j=1}^{n-r}\frac{\delta}{2(n-r)}\frac{\boldsymbol{x_j}}{\|\boldsymbol{x_j}\|_\infty}\in X$，则

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty=\left\|\sum_{j=1}^{n-r}\frac{\delta}{2(n-r)}\frac{\boldsymbol{x_j}}{\|\boldsymbol{x_j}\|_\infty}\right\|_\infty\leq\sum_{j=1}^{n-r}\left\|\frac{\delta}{2(n-r)}\frac{\boldsymbol{x_j}}{\|\boldsymbol{x_j}\|_\infty}\right\|_\infty=\frac{\delta}{2}<\delta$$

取 $\boldsymbol{x}^{(2)}=2\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}$，满足 $A_1\boldsymbol{x}^{(2)}=2A_1\boldsymbol{x}^{(0)}-A_1\boldsymbol{x}^{(1)}=2\boldsymbol{b_1}-\boldsymbol{b_1}=\boldsymbol{b_1}$，故 $\boldsymbol{x}^{(2)}\in X$. 并且 $\|\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty=\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty<\delta$. 根据引理，$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$，且 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(2)}$，与 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是 S 的极点矛盾. 所以假设错误，A 和 $\boldsymbol{b}$ 可作题设分解.

再证明 $\Longleftarrow$. 已知 A 和 $\boldsymbol{b}$ 可作题设分解. 假设 $\exists\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$, $\lambda\in(0,1)$ s.t. $\boldsymbol{x}^{(0)}=\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}$.

由于 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in S$，满足 $A\boldsymbol{x}^{(1)} \geq \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x}^{(2)} \geq \boldsymbol{b}$，知 $A_1\boldsymbol{x}^{(1)} \geq \boldsymbol{b_1}$, $A_1\boldsymbol{x}^{(2)} \geq \boldsymbol{b_1}$.

由于

$$\boldsymbol{b_1} = A_1\boldsymbol{x}^{(0)} = \lambda A_1\boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\lambda)A_1\boldsymbol{x}^{(2)} \geq \lambda\boldsymbol{b_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{b_1}$$

知 $\lambda A_1\boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\lambda)A_1\boldsymbol{x}^{(2)} = \lambda\boldsymbol{b_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{b_1}$，从而 $\lambda(A_1\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{b_1}) + (1-\lambda)(A_1\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{b_1}) = \boldsymbol{0}$. 由于 $\lambda > 0$, $1-\lambda > 0$，得 $A_1\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{b_1}$, $A_1\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{b_1}$.

由于 $A_1\boldsymbol{x}^{(0)} = A_1\boldsymbol{x}^{(1)} = A_1\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{b_1}$ 且 A_1 可逆，得 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = A_1^{-1}\boldsymbol{b_1}$，即 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是极点. □

题目 2. **习题 3.6.** 假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t. } &A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数 $z_j - c_j > 0$，且单纯形表中对应的列 $\boldsymbol{y_j} = B^{-1}\boldsymbol{p_j} \leq \boldsymbol{0}$. 证明：$d = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 是可行域的极方向. 其中分量 1 对应 x_j. (假设 B 为 A 的前 m 列)

证明. 记 $A = \begin{bmatrix} B & \boldsymbol{p_{m+1}} & \cdots & \boldsymbol{p_j} & \cdots & \boldsymbol{p_n} \end{bmatrix}$，则

$$Ad = \begin{bmatrix} B & \boldsymbol{p_{m+1}} & \cdots & \boldsymbol{p_j} & \cdots & \boldsymbol{p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -B\boldsymbol{y_j} + \boldsymbol{p_j} = \boldsymbol{0}$$

且 $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{d}$ 是可行域的方向.

设 $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2} \geq \boldsymbol{0}$ 是可行域的方向，满足 $\boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{d_1} + \mu \boldsymbol{d_2}\ (\lambda, \mu > 0)$. 则 $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}$ 形如

$$\boldsymbol{d_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{d_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ 0 \\ \vdots \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于 $A\boldsymbol{d_1} = A\boldsymbol{d_2} = \boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases} B\boldsymbol{a_1} + b_1 \boldsymbol{p_j} = \boldsymbol{0} \\ B\boldsymbol{a_2} + b_2 \boldsymbol{p_j} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

从而 $b_2 B\boldsymbol{a_1} = b_1 B\boldsymbol{a_2}$, $b_2 \boldsymbol{d_1} = b_1 \boldsymbol{d_2}$. 易知 $b_1, b_2 > 0$（否则，若 $b_1 = 0$，由 B 可逆，得 $\boldsymbol{a_1} = 0$, $\boldsymbol{d_1} = 0$，b_2 同理），得 $\boldsymbol{d_1} \parallel \boldsymbol{d_2}$，所以 $\boldsymbol{d}$ 是可行域的极方向. □

题目 3. 习题 3.2(4)(5). 用单纯形方法解下列线性规划问题.

1. $\min 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 4$$

2. $\min -3x_1 - x_2$ s.t.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 4$$

解.

1. 引入松弛变量，化为标准形

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 7$$

使用单纯形表求解

	$\boldsymbol{c} =$	3	-5	-2	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1	1	1	0	1	0	0	4
0	x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
0	x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
		-3	5	2	1	0	0	0	0
-5	x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
0	x_6	5	0	2	2	1	1	0	10
0	x_7	-2	0	1	3	-1	0	1	8
		-8	0	-3	1	-5	0	0	-20
-5	x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
0	x_6	$19/3$	0	$4/3$	0	$5/3$	1	$-2/3$	$14/3$
-1	x_4	$-2/3$	0	$1/3$	1	$-1/3$	0	$1/3$	$8/3$
		$-22/3$	0	$-10/3$	0	$-14/3$	0	$-1/3$	$-68/3$

最优解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 8/3 & 0 & 14/3 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^* = -68/3$.

2. 引入松弛变量，化为标准形

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 5$$

使用单纯形表求解

	$\boldsymbol{c} =$	-3	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	3	3	1	0	0	30
0	x_4	4	-4	0	1	0	16
0	x_5	2	-1	0	0	1	12
		3	1	0	0	0	0
0	x_3	0	6	1	$-3/4$	0	18
-3	x_1	1	-1	0	$1/4$	0	4
0	x_5	0	1	0	$-1/2$	1	4
		0	4	0	$-3/4$	0	-12
-1	x_2	0	1	$1/6$	$-1/8$	0	3
-3	x_1	1	0	$1/6$	$1/8$	0	7
0	x_5	0	0	$-1/6$	$-3/8$	1	1
		0	0	$-2/3$	$-1/4$	0	-24

最优解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^* = -24$.

题目 1. 习题 3.2(3)(4). 用两阶段法求解下列线性规划.

1. $\max 3x_1 - 5x_2$ s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3$$

2. $\min x_1 - 3x_2 + x_3$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3$$

解.

1. 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6，化为标准形，并引入人工变量 x_7. 第一阶段先求解：$\min x_7$ s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, 7$$

	$\boldsymbol{c} =$	0	0	0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	-1	2	4	1	0	0	0	4
0	x_5	1	1	2	0	1	0	0	5
1	x_7	-1	2	1	0	0	-1	1	1
		-1	2	1	0	0	-1	0	1
0	x_4	0	0	3	1	0	1	-1	3
0	x_5	$3/2$	0	$3/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	$9/2$
0	x_2	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
		0	0	0	0	0	0	-1	0

一个基本可行解是 $\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 0 & 3 & 9/2 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，人工变量 $x_7 = 0$ 且为非基变量，知找到了原问题的一个基本可行解 $\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 0 & 3 & 9/2 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，进行第二阶段求解 $\min -3x_1 + 5x_2$.

	$\boldsymbol{c}=$	-3	5	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	0	0	3	1	0	1	3
0	x_5	3/2	0	3/2	0	1	1/2	9/2
5	x_2	$-1/2$	1	1/2	0	0	$-1/2$	1/2
		1/2	0	5/2	0	0	$-5/2$	5/2
		不妨令 x_4 出基						
0	x_3	0	0	1	1/3	0	1/3	1
0	x_5	3/2	0	0	$-1/2$	1	0	3
5	x_2	$-1/2$	1	0	$-1/6$	0	$-2/3$	0
		1/2	0	0	$-5/6$	0	$-10/3$	0
0	x_3	0	0	1	1/3	0	1/3	1
-3	x_1	1	0	0	$-1/3$	2/3	0	2
5	x_2	0	1	0	$-1/3$	1/3	$-2/3$	1
		0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	$-10/3$	-1

最优解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

最优值 $f_{\max}^* = -f_{\min}^* = 1$.

2. 引入松弛变量 x_4, x_5，化为标准形，并引入人工变量 x_6. 第一阶段先求解：$\min x_6$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 6$$

	$\boldsymbol{c}=$	0	0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	2	-1	1	0	0	0	8
1	x_6	2	1	0	-1	0	1	2
0	x_5	1	2	0	0	1	0	10
	2	1	0	-1	0	0	2	
0	x_3	0	-2	1	1	0	-1	6
0	x_1	1	1/2	0	$-1/2$	0	1/2	1
0	x_5	0	3/2	0	1/2	1	$-1/2$	9
		0	0	0	0	0	-1	0

一个基本可行解是 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 6 & 0 & 9 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，人工变量 $x_6=0$ 且为非基变量，知找到了原问题的一个基本可行解 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 6 & 0 & 9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，进行第二阶段求解 $\min x_1-3x_2+x_3$.

	$\boldsymbol{c}=$	1	-3	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	-2	1	1	0	6
1	x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	1
0	x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	9
		0	$3/2$	0	$1/2$	0	7
1	x_3	4	0	1	-1	0	10
-3	x_2	2	1	0	-1	0	2
0	x_5	-3	0	0	2	1	6
		-3	0	0	2	0	4
1	x_3	$5/2$	0	1	0	$1/2$	13
-3	x_2	$1/2$	1	0	0	$1/2$	5
0	x_4	$-3/2$	0	0	1	$1/2$	3
		0	0	0	0	-1	-2
1	x_1	1	0	$2/5$	0	$1/5$	$26/5$
-3	x_2	0	1	$-1/5$	0	$2/5$	$12/5$
0	x_4	0	0	$3/5$	1	$4/5$	$54/5$
		0	0	0	0	-1	-2

最优解 $\boldsymbol{x}_1^*=\begin{bmatrix}0 & 5 & 13 & 3 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2^*=\begin{bmatrix}26/5 & 12/5 & 0 & 54/5 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 13\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 或 $\begin{bmatrix}26/5 & 12/5 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f_{\min}^*=-2$.

题目 2. 习题 3.2(5)(7). 用大 M 法求解下列线性规划.

1. $\max -3x_1+2x_2-x_3$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3\leq 5\\ 4x_1+3x_2+x_3\geq 3\\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,3$$

2. $\min 3x_1-2x_2+x_3$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=1\\ 2x_1+3x_2\geq 8 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,3$$

解.

1. 引入松弛变量 x_4, x_5，化为标准形，并引入人工变量 x_6, x_7. 求解：$\min 3x_1 - 2x_2 + x_3 + M(x_6 + x_7)$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 7$$

	$\boldsymbol{c}=$	3	-2	1	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	2	1	-1	1	0	0	0	5
M	x_6	4	3	1	0	-1	1	0	3
M	x_7	-1	1	1	0	0	0	1	2
		$3M-3$	$4M+2$	$2M-1$	0	$-M$	0	0	$5M$
0	x_4	$2/3$	0	$-4/3$	1	$1/3$	$-1/3$	0	4
-2	x_2	$4/3$	1	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	1
M	x_7	$-7/3$	0	$2/3$	0	$1/3$	$-1/3$	1	1
		$\frac{-7M-17}{3}$	0	$\frac{2M-5}{3}$	0	$\frac{M+2}{3}$	$\frac{-4M-2}{3}$	0	$M-2$
0	x_4	-4	0	0	1	1	-1	2	6
-2	x_2	$5/2$	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
1	x_3	$-7/2$	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
		$-23/2$	0	0	0	$3/2$	$-3/2-M$	$5/2-M$	$1/2$
0	x_4	3	0	-2	1	0	0	-1	3
-2	x_2	-1	1	1	0	0	0	1	2
0	x_5	-7	0	2	0	1	-1	3	3
		-1	0	-3	0	0	$-M$	$-2-M$	-4

最优解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

最优值 $f_{\max}^* = -f_{\min}^* = 4$.

2. 引入松弛变量 x_4，化为标准形，并引入人工变量 x_5. 求解：$\min 3x_1 - 2x_2 + x_3 + Mx_5$ s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 5$$

	$\boldsymbol{c} =$	3	-2	1	0	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	2	-3	1	0	0	1
M	x_5	2	3	0	-1	1	8
		$2M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	$8M+1$
1	x_3	4	0	1	-1	1	9
-2	x_2	$2/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	$8/3$
	$-1/3$	0	0	$-1/3$	$1/3-M$	$11/3$	

最优解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix}0 & 8/3 & 9 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & 8/3 & 9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f_{\min}^* = 11/3$.

题目 1. 习题 4.7(3)(5). 用对偶单纯形法解下列问题.

1. $\max x_1 + x_2$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$$

2. $\min 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5$ s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 + x_8 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_8 = 4 \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_7 + x_8 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, 8$$

解.

1. 引入松弛变量 x_4，化为标准形，求解 $\min -x_1 - x_2$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4$$

经尝试，不易找到初始对偶可行的基本解. 以 x_3, x_4 为初始基变量，增加变量 x_5 与约束条件 $x_1 + x_2 + x_5 = M$（$M > 0$ 充分大），解扩充问题.

$c=$		-1	-1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	-1	1	1	0	0	-1
0	x_4	-1	1	0	1	0	-3
0	x_5	1	1	0	0	1	M
		1	1	0	0	0	
0	x_3	0	2	1	0	1	$M-1$
0	x_4	0	2	0	1	1	$M-3$
-1	x_1	1	1	0	0	1	M
		0	0	0	0	-1	$-M$

扩充问题的最优解是 $x^* = \begin{bmatrix} M & 0 & M-1 & M-3 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

最优值 $f^*_{\max} = -f^*_{\min} = M$ $(M \geq 3)$. 原问题无界.

2. 设 x_6, x_8, x_7 为初始基变量，$c_B B^{-1} A - c = -c = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -5 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0$，找到了对偶可行的基本解.

$c=$		4	3	5	1	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_6	-2	1	1	1	-1	1	0	0	-3
0	x_8	1	1	-3	2	-2	0	0	1	4
0	x_7	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	-2
		-4	-3	-5	-1	-2	0	0	0	0
4	x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0	$3/2$
0	x_8	0	$3/2$	$-5/2$	$5/2$	$-5/2$	$1/2$	0	1	$5/2$
0	x_7	0	$-3/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1	0	$-1/2$
		0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6
4	x_1	1	-2	0	0	0	-1	1	0	1
0	x_8	0	9	-5	0	0	3	-5	1	5
2	x_5	0	3	-1	-1	1	1	-2	0	1
		0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6
		存在判别数为 0 的非基变量，令其进基求另外的最优解								
0	x_7	1	-2	0	0	0	-1	1	0	1
0	x_8	5	-1	-5	0	0	-2	0	1	10
2	x_5	2	-1	-1	-1	1	-1	0	0	3
		0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6

最优解是 $x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 或 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

最优值 $f^*_{\min} = 6$.

题目 2. 习题 4.2. 给定原问题.

$\min 4x_1 + 3x_2 + x_3$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 - & x_2 + & x_3 \geq & 1 \\ x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 \geq & 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$$

已知对偶问题的最优解 $(w_1, w_2) = (5/3, 7/3)$，利用对偶性质求原问题的最优解.

解. 原问题的对偶问题为 $\max w_1 + 2w_2$ s.t.

$$\begin{cases} w_1 + & w_2 \leq & 4 \\ -w_1 + & 2w_2 \leq & 3 \\ w_1 - & 3w_2 \leq & 1 \end{cases}$$

$$w_j \geq 0,\ j = 1, 2$$

由互补松弛定理：由于 $w_1, w_2 > 0$，知原问题前 2 个约束在最优解处是紧的. 由于对偶问题第 3 个约束在最优解处是松的，知原问题最优解 $x_3 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 - & x_2 + & x_3 = & 1 \\ x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 = & 2 \\ & & x_3 = & 0 \end{cases}$$

原问题的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (4/3, 1/3, 0)$，最优值 $f^* = 19/3$.

题目 3. 习题 4.4. 给定线性规划问题.

$\min 5x_1 + 21x_3$ s.t.

$$\begin{cases} x_1 - & x_2 + & 6x_3 \geq & b_1 \\ x_1 + & x_2 + & 2x_3 \geq & 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$$

其中 b_1 是某一个正数，已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 1/4)$.

1. 写出对偶问题.
2. 求对偶问题的最优解.

解.

1. 原问题的对偶问题为 $\max b_1w_1 + w_2$ s.t.

$$\begin{cases} w_1 + w_2 \le 5 \\ -w_1 + w_2 \le 0 \\ 6w_1 + 2w_2 \le 21 \end{cases}$$

$$w_j \ge 0,\ j = 1, 2$$

2. 由互补松弛定理：由于 $x_1, x_3 > 0$，知对偶问题第 1、3 个约束在最优解处是紧的.

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 5 \\ 6w_1 + 2w_2 = 21 \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $(w_1, w_2) = (11/4, 9/4)$，最优值 $f^* = 31/4$（计算原问题最优值即得）.

题目 4. 习题 4.6. 考虑线性规划问题

$\min cx$ s.t.

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

其中 A 是 m 阶对称矩阵，$c^{\mathrm{T}} = b$. 证明若 $x^{(0)}$ 是上述问题的可行解，则它也是最优解.

证明. 法一. 原问题的对偶问题为 $\max wb$ s.t.

$$wA \le c$$

因为 $x^{(0)\,\mathrm{T}}A = (Ax^{(0)})^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}} = c$，知 $x^{(0)\,\mathrm{T}}$ 是对偶问题可行解，且此时 $f = x^{(0)\,\mathrm{T}}b = (x^{(0)\,\mathrm{T}}b)^{\mathrm{T}} = cx^{(0)}$（注意 f 是数，$f^{\mathrm{T}} = f$），知 $x^{(0)}$ 是原问题最优解，$x^{(0)\,\mathrm{T}}$ 是对偶问题最优解.

法二. 下证 $\forall x$ 满足 $Ax=b,\ x\geq 0$，$f=cx$ 恒为定值. 假设 $x^{(0)}$ 是可行解，$Ax^{(0)}=b,\ x^{(0)}\geq 0,\ f=cx^{(0)}$. 假设 $x^{(1)}$ 也是可行解，满足 $Ax^{(1)}=b,\ x^{(1)}\geq 0$，则 $f=cx^{(1)}=b^{\mathrm{T}}x^{(1)}=x^{(0)\,\mathrm{T}}Ax^{(1)}=x^{(0)\,\mathrm{T}}b=(x^{(0)\,\mathrm{T}}b)^{\mathrm{T}}=b^{\mathrm{T}}x^{(0)}=cx^{(0)}$（注意 f 是数，$f^{\mathrm{T}}=f$），从而 f 恒为定值 $cx^{(0)}$，其可行解均为最优解. $\square$

题目 5. 习题 4.9. 给定下列线性规划问题：

$\min -2x_1-x_2+x_3$ s.t.

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ 2x_3\leq\ 6\\ x_1+\ 4x_2-\ \ x_3\leq\ 4\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,3$$

它的最优单纯形表如下表：

	$c=$	-2	-1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	-1	1	$1/3$	$-1/3$	$2/3$
-2	x_1	1	3	0	$1/3$	$2/3$	$14/3$
		0	-6	0	$-1/3$	$-5/3$	$-26/3$

1. 若右端向量 $b=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ 改为 $b'=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，原来的最优基是否还是最优基？利用原来的最优表求新问题的最优表.
2. 若目标函数中 x_1 的系数由 $c_1=-2$ 改为 c_1'，那么 c_1' 在什么范围内时原来的最优解也是新问题的最优解？

解.

1. 计算 $B^{-1}b'=\begin{bmatrix}1/3 & -1/3\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/3\\10/3\end{bmatrix}\ngeq 0$，所以原来的最优基不再可行. 以下使用对偶单纯形法求解.

	$c=$	-2	-1	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	-1	1	$1/3$	$-1/3$	$-2/3$
-2	x_1	1	3	0	$1/3$	$2/3$	$10/3$
		0	-6	0	$-1/3$	$-5/3$	$-22/3$
0	x_5	0	3	-3	-1	1	2
-2	x_1	1	1	2	1	0	2
	0	-1	-5	-2	0	-4	

原最优基改变. 新问题的最优解是 $x^*=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\min}=-4$.

2. 重新计算各非基变量判别数：

$$\begin{cases} z_2'-c_2=3c_1'\leq 0 \\ z_4'-c_4=\dfrac{c_1'+1}{3}\leq 0 \\ z_5'-c_5=\dfrac{2c_1'-1}{3}\leq 0 \end{cases}$$

解得 $c_1'\leq -1$，此时原最优解也是新问题的最优解.

题目 1. 习题 4.10. 考虑下列线性规划问题：$\max -5x_1+5x_2+13x_3$ s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 \le \quad 20 \\ 12x_1 + \quad 4x_2 + \quad 10x_3 \le \quad 90 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

先用单纯形方法求出上述问题的最优解，然后对原来问题分别进行下列改变，试用原来问题的最优表求新问题的最优解：

1. 目标函数中 x_3 系数 c_3 由 13 改变为 8；
2. b_1 由 20 改变为 30；
3. b_2 由 90 改变为 70；
4. A 的列由 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 改变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$；
5. 增加约束条件：$2x_1+3x_2+5x_3 \le 50$.

解. 引入松弛变量 x_4, x_5，化为标准形，求解 $\min 5x_1-5x_2-13x_3$ s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 + \quad x_4 \quad\quad\quad = \quad 20 \\ 12x_1 + \quad 4x_2 + \quad 10x_3 \quad\quad + \quad x_5 = \quad 90 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, 5$$

初始单纯形表如下：

	$c=$	5	-5	-13	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_4	-1	1	3	1	0	20
0	x_5	12	4	10	0	1	90
		-5	5	13	0	0	0
-13	x_3	$-1/3$	$1/3$	1	$1/3$	0	$20/3$
0	x_5	$46/3$	$2/3$	0	$-10/3$	1	$70/3$
		$-2/3$	$2/3$	0	$-13/3$	0	$-260/3$
-5	x_2	-1	1	3	1	0	20
0	x_5	16	0	-2	-4	1	10
		0	0	-2	-5	0	-100

一个最优解是 $x^*=\begin{bmatrix}0 & 20 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\max}=-f^*_{\min}=100$.

1. 目标函数中 x_3 系数 c_3 由 13 改变为 8. 由于 x_3 是非基变量，只有 x_3 的判别数改变.

   $z_3'-c_3'=(z_3-c_3)+(c_3-c_3')=-2-5=-7<0$，故最优解不变.

2. b_1 由 20 改变为 30. 则最优表右端向量变为 $b'=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\ 90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\ -30\end{bmatrix}\not\geq 0$.

   使用对偶单纯形法求解.

	$c=$	5	-5	-13	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-5	x_2	-1	1	3	1	0	30
0	x_5	16	0	-2	-4	1	-30
		0	0	-2	-5	0	-150
-5	x_2	23	1	0	-5	$3/2$	-15
-13	x_3	-8	0	1	2	$-1/2$	15
		-16	0	0	-1	-1	-120
0	x_4	$-23/5$	$-1/5$	0	1	$-3/10$	3
-13	x_3	$6/5$	$2/5$	1	0	$1/10$	9
		$-103/5$	$-1/5$	0	0	$-13/10$	-117

   最优解是 $x^*=\begin{bmatrix}0 & 0 & 9 & 3 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\max}=-f^*_{\min}=117$.

3. b_2 由 90 改变为 70. 则最优表右端向量变为 $b'=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ -10\end{bmatrix}\not\geq 0$.

   使用对偶单纯形法求解.

	$c=$	5	-5	-13	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-5	x_2	-1	1	3	1	0	20
0	x_5	16	0	-2	-4	1	-10
		0	0	-2	-5	0	-100
-5	x_2	23	1	0	-5	$3/2$	5
-13	x_3	-8	0	1	2	$-1/2$	5
		-16	0	0	-1	-1	-90

最优解是 $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\max} = -f^*_{\min} = 90$.

4. A 的列由 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 改变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. x_1 的判别数改变.

$$z'_1 - c_1 = c_B B^{-1} P_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 5 = -5 < 0\text{，故最优解不变.}$$

5. 增加约束条件：$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$. 原最优解不满足此约束. 引入松弛变量 x_6，使用对偶单纯形法求解.

	$c=$	5	-5	-13	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-5	x_2	-1	1	3	1	0	0	20
0	x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
0	x_6	2	3	5	0	0	1	50
		0	0	-2	-5	0	0	-100
-5	x_2	-1	1	3	1	0	0	20
0	x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
0	x_6	5	0	-4	-3	0	1	-10
		0	0	-2	-5	0	0	-100
-5	x_2	$11/4$	1	0	$-5/4$	0	$3/4$	$25/2$
0	x_5	$27/2$	0	0	$-5/2$	1	$-1/2$	15
-13	x_3	$-5/4$	0	1	$3/4$	0	$-1/4$	$5/2$
		$-5/2$	0	0	$-7/2$	0	$-1/2$	-95

最优解是 $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 25/2 & 5/2 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\max} = -f^*_{\min} = 95$.

题目 2. 习题 4.5. 给定原始的线性规划问题：$\min cx$ s.t.

$$\begin{cases} Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

假设这个问题与其对偶问题是可行的，令 $w^{(0)}$ 是对偶问题的一个已知的最优解.

1. 若用 $\mu \neq 0$ 乘原问题的第 k 个方程，得到一个新的原问题，试求其对偶问题的的最优解.
2. 若将原问题第 k 个方程的 μ 倍加到第 r 个方程上，得到新的原问题，试求其对偶问题的的最优解.

解. 原问题的对偶问题为 $\max wb$ s.t.

$$wA \leq c$$

1. 记矩阵 $P_1 = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, \mu, 1, \cdots, 1)$，其中 μ 在第 k 个位置.

   新的原问题为 $\min cx$ s.t.
   $$\begin{cases} P_1 Ax = P_1 b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   即原问题 $A \mapsto P_1 A,\ b \mapsto P_1 b$，对偶问题为 $\max wP_1 b$ s.t.

   $$wP_1 A \leq c$$

   即对偶问题 $w \mapsto wP_1$. 其最优解 $w^{(1)}$ 满足 $w^{(0)} = w^{(1)} P_1$，即

   $$w^{(1)} = w^{(0)} P_1^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^{(0)} & \cdots & w_{k-1}^{(0)} & w_k^{(0)}/\mu & w_{k+1}^{(0)} & \cdots & w_m^{(0)} \end{bmatrix}$$

2. 以下只讨论 $r \neq k$ 的情形，否则同 1，将 1 答案中的 μ 替换为 $\mu + 1$ 即可. 记矩阵 $P_2 = I + \mu e_r e_k^{\mathrm{T}}$，其中 μ 在第 r 行第 k 列位置. 与 1 同理，对偶问题最优解 $w^{(2)}$ 满足

$w^{(0)} = w^{(2)}P_2$，即

$$w^{(2)} = w^{(0)}P_2^{-1} = w^{(0)}(I - \mu e_r e_k^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} w_1^{(0)} & \cdots & w_{k-1}^{(0)} & w_k^{(0)} - \mu w_r^{(0)} & w_{k+1}^{(0)} & \cdots & w_m^{(0)} \end{bmatrix}$$

题目 2 的注记. P_1, P_2 为初等变换阵：左乘表示行变换，右乘表示列变换.

题目 3. 习题 15.3(1). 求解下列 0-1 规划：$\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ s.t.

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j = 0 \text{ 或} 1,\ j = 1, 2, 3$$

解. 使用隐枚举法求解. 先用试探法求出一个可行解，如 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 其目标函数值为 $f(x_0) = 2 + 3 + 0 = 5$. 增加约束 4：$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5$，进行枚举.

点	过滤条件（约束 4）	约束 4	约束 1	约束 2	约束 3	目标函数值
$(0,0,0)^{\mathrm{T}}$	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5$	O	O	X		
$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$		O	O	O	X	
$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$		O	O	X		
$(0,1,1)^{\mathrm{T}}$		X				
$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$		O	O	O	O	2
$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2$	X				
$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$		X				
$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$		X				

故最优解是 $x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 最优值 $f^*_{\min} = 2$.

题目 1. **习题 1.5.** 设 $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{l\times n}$, $c \in E^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

- 系 1：$Ax \le 0,\ Bx = 0,\ c^{\mathrm{T}}x > 0$，对某些 $x \in E^n$.
- 系 2：$A^{\mathrm{T}}y + B^{\mathrm{T}}z = c,\ y \ge 0$，对某些 $y \in E^m, z \in E^l$.

证明. 系 1 有解 $\iff \begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \le 0,\ c^{\mathrm{T}}x > 0$ 有解 $\overset{\text{Farkas}}{\iff} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & B^{\mathrm{T}} & -B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = c,\ \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \ge 0$ 无解 $\iff A^{\mathrm{T}}y + B^{\mathrm{T}}(z_1 - z_2) = c,\ y \ge 0,\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0$ 无解 $\overset{z=z_1-z_2}{\iff}$ 系 2 无解. □

题目 2. **习题 1.6.** 设 $A \in M_{m\times n}$, $c \in E^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

- 系 1：$Ax \le 0,\ x \ge 0,\ c^{\mathrm{T}}x > 0$，对某些 $x \in E^n$.
- 系 2：$A^{\mathrm{T}}y \ge c,\ y \ge 0$，对某些 $y \in E^m$.

证明. 系 1 有解 $\iff \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \le 0,\ c^{\mathrm{T}}x > 0$ 有解 $\overset{\text{Farkas}}{\iff} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = c,\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \ge 0$ 无解 $\iff A^{\mathrm{T}}y - z = c,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ 无解 $\iff$ 系 2 无解. □

题目 3. **习题 1.10.** $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2,\ S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1\}$. $f(x_1, x_2)$ 是否为 S 上的凸函数？

解. $f(x_1, x_2)$ 不是 S 上的凸函数. 取 $x^{(1)} = (-1, 0),\ x^{(2)} = (1, 0)$，则 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 8$，但 $f(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}) = 10$，$f(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}) \le \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)})$ 不成立.

实际上，$f(x_1, x_2)$ 也不是 S 上的凹函数. 取 $x^{(1)} = (-1, 1),\ x^{(2)} = (1, 1)$，则 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 10$，但 $f(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}) = 8$，$f(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}) \ge \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)})$ 不成立.

题目 4. **习题 1.12.** 设 f 是定义在 E^n 上的凸函数. $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \in E^n$，证明：$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}) \le \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \cdots + \lambda_k f(x^{(k)})$，其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \ge 0$.

证明. 对 k 归纳：$k=2$ 时，即为凸函数定义. 假设命题对 $k-1$ 成立 $(k=3,4,\cdots)$，则对 $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}\in E^n$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\geq 0$，由凸函数定义与归纳假设，有

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\cdots+\lambda_kx^{(k)})\\
&=f\left((1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x^{(1)}+\cdots+\frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x^{(k-1)}\right)+\lambda_kx^{(k)}\right)\\
&\leq(1-\lambda_k)f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x^{(1)}+\cdots+\frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x^{(k-1)}\right)+\lambda_kf(x^{(k)})\\
&\leq(1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}f(x^{(1)})+\cdots+\frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}f(x^{(k-1)})\right)+\lambda_kf(x^{(k)})\\
&=\lambda_1f(x^{(1)})+\cdots+\lambda_kf(x^{(k)})
\end{aligned}$$

其中利用了 $\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}=\frac{1-\lambda_k}{1-\lambda_k}=1$，故命题对 k 成立. 归纳知命题对任意 $k=2,3,\cdots$ 成立. □

题目 5. 习题 1.14. 设 f 是定义在 R^n 上的函数，如果对每一个点 $x\in R^n$ 及正数 t 均有 $f(tx)=tf(x)$，则称 f 为正齐次函数. 证明 R^n 上的正齐次函数 f 为凸函数的充要条件是：对任意的 $x^{(1)},x^{(2)}\in R^n$，有 $f(x^{(1)}+x^{(2)})\leq f(x^{(1)})+f(x^{(2)})$.

证明. 充分性：若 R^n 上的正齐次函数 f 为凸函数，$\forall x^{(1)},x^{(2)}\in R^n$, $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(x^{(1)}+x^{(2)})=2f\left(\frac{1}{2}(x^{(1)}+x^{(2)})\right)\leq 2\times\left(\frac{1}{2}(f(x^{(1)})+\frac{1}{2}f(x^{(2)}))\right)=f(x^{(1)})+f(x^{(2)})$$

必要性：设 R^n 上的正齐次函数 f 满足 $\forall x^{(1)},x^{(2)}\in R^n$，有 $f(x^{(1)}+x^{(2)})\leq f(x^{(1)})+f(x^{(2)})$. 则 $\forall x^{(1)},x^{(2)}\in R^n$, $\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})\leq f(\lambda x^{(1)})+f((1-\lambda)x^{(2)})=\lambda f(x^{(1)})+(1-\lambda)f(x^{(2)})$$

故 f 为凸函数. □

题目 1. **习题 7.4.** 给定非线性规划问题：$\min(x_1-\frac{9}{4})^2+(x_2-2)^2 \ \text{s.t.} \begin{cases} -x_1^2+x_2\geq 0 \\ x_1+x_2\leq 6 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$.

判断下列各点是否为最优解：$x^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{9}{4}\end{bmatrix}$，$x^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\ 2\end{bmatrix}$，$x^{(3)}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$.

解. 非线性规划问题标准形式为：$\min(x_1-\frac{9}{4})^2+(x_2-2)^2 \ \text{s.t.} \begin{cases} -x_1^2+x_2\geq 0 \\ -x_1-x_2+6\geq 0 \\ x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$.

由于 $f(x_1,x_2)=(x_1-\frac{9}{4})^2+(x_2-2)^2$ 是凸函数，$g_1(x_1,x_2)=-x_1^2+x_2$，$g_2(x_1,x_2)=-x_1-x_2+6$，$g_3(x_1,x_2)=x_1$，$g_4(x_1,x_2)=x_2$ 是凹函数，因此该问题是凸规划. 只需验证 $x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}$ 是否为 KKT 点.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f=\begin{bmatrix}2(x_1-\frac{9}{4})\\ 2(x_2-2)\end{bmatrix},\quad \nabla g_1=\begin{bmatrix}-2x_1\\ 1\end{bmatrix},\quad \nabla g_2=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix},\quad \nabla g_3=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \nabla g_4=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

验证 $x^{(1)}$. 只有 $g_1\geq 0$ 是起作用约束，KKT 条件如下：

$$\nabla f(x^{(1)})-w_1\nabla g_1(x^{(1)})=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}+3w_1\\ \frac{1}{2}-w_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

解得 $w_1=\frac{1}{2}\geq 0$，因此 $x^{(1)}$ 是 KKT 点.

验证 $x^{(2)}$. 其不是可行解，因此不是 KKT 点.

验证 $x^{(3)}$. 只有 $g_3\geq 0$ 是起作用约束，KKT 条件如下：

$$\nabla f(x^{(3)})-w_3\nabla g_3(x^{(3)})\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2}-w_3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

解得 $w_3=-\frac{9}{2}<0$，因此 $x^{(3)}$ 不是 KKT 点.

综上，$x^{(1)}$ 是最优解，最优值 $f(x^{(1)})=\frac{5}{8}$.

题目 2. **习题 7.7.** 求原点 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 到凸集 $S = \{x \mid x_1 + x_2 \geq 4,\ 2x_1 + x_2 \geq 5\}$ 的最小距离.

解. 该非线性规划问题的标准形式为：$\min x_1^2 + x_2^2 \ \text{ s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0 \end{cases}.$

由于 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 是凸函数，$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4,\ g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 5$ 是凹函数，因此该问题是凸规划. 只需求解 KKT 点.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

KKT 条件如下：

$$\begin{cases} \nabla f(x) - w_1 \nabla g_1(x) - w_2 \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - w_1 - 2w_2 \\ 2x_2 - w_1 - w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ w_1 g_1(x) = w_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ w_2 g_2(x) = w_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \\ w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ g_1(x) \geq 0,\ g_2(x) \geq 0 \end{cases}$$

若 $g_1(x) > 0,\ g_2(x) > 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，舍去.

若 $g_1(x) = 0,\ g_2(x) > 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

若 $g_1(x) > 0,\ g_2(x) = 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，舍去.

若 $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，舍去.

综上，最优解为 $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，最小距离为 $d^* = \sqrt{f(x^*)} = 2\sqrt{2}$.

题目 3. 习题 7.6. 求解下列问题：$\max 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \text{ s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$.

解. 该非线性规划问题的标准形式为:$\min -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7 \text{ s.t. } \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2 \ge 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3 \ge 0 \end{cases}$.

由于 $f(x_1, x_2) = -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7$ 是凸函数，$g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 2$, $g_2(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + 3$ 是凹函数，因此该问题是凸规划. 只需求解 KKT 点.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 \\ -6 + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

KKT 条件如下：

$$\begin{cases} \nabla f(x) - w_1 \nabla g_1(x) - w_2 \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 + w_1 + w_2 \\ -6 + 2x_2 + w_1 + 2w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ w_1 g_1(x) = w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ w_2 g_2(x) = w_2(-x_1 - 2x_2 + 3) = 0 \\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ g_1(x) \ge 0,\ g_2(x) \ge 0 \end{cases}$$

若 $g_1(x) > 0,\ g_2(x) > 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$，舍去.

若 $g_1(x) = 0,\ g_2(x) > 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

若 $g_1(x) > 0,\ g_2(x) = 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$，舍去.

若 $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0$，解得 $w = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，舍去.

综上，最优解为 $x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，最优值为 $f(x^*) = 33$.

题目 1. 习题 7.11. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max \quad b^{\mathrm{T}}x, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ &\text{s.t. } x^T x \le 1 \end{aligned}$$

其中 $b \neq 0$. 证明向量 $\overline{x} = \frac{b}{\|b\|}$ 满足最优性的充分条件.

证明. 非线性规划问题标准形式为

$$\begin{aligned} &\min \quad -b^{\mathrm{T}}x, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ &\text{s.t. } 1 - x^T x \ge 0 \end{aligned}$$

由于 $f(x) = -b^{\mathrm{T}}x$ 是凸函数 (线性函数), $g(x) = 1 - x^T x$ 是凹函数, 故该问题是凸规划. 目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x) = -b, \quad \nabla g(x) = -2x$$

求解 KKT 条件 ($x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \nabla f(x) - w\nabla g(x) = -b + 2wx = 0 & (1) \\ wg(x) = w(1 - x^{\mathrm{T}}x) = 0 & (2) \\ w \ge 0,\ g(x) = 1 - x^{\mathrm{T}}x \ge 0 & (3) \end{cases}$$

1. 若 $w = 0$, 代入 (1) 得 $-b = 0$, 矛盾.
2. 所以 $w > 0$, 代入互补松弛条件 (2) 得 $x^{\mathrm{T}}x = 1$.

由 (1) 得 $x = \frac{b}{2w}$, 所以 $x^{\mathrm{T}} = \frac{b^{\mathrm{T}}}{2w}$, $x^{\mathrm{T}}x = \frac{b^{\mathrm{T}}b}{4w^2} = 1$, 解得 $w = \frac{\|b\|}{2}$.
从而 $x = \frac{b}{2w} = \frac{b}{\|b\|}$.
综上 $x = \frac{b}{\|b\|} = \overline{x}$, $w = \frac{\|b\|}{2} > 0$, KKT 条件成立, 所以 $\overline{x} = \frac{b}{\|b\|}$ 满足最优性的充分条件. □

题目 2. **习题 7.10.** 给定非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^{\mathrm{T}}x \\
&\text{s.t. } Ax = 0 \\
&\qquad x^{\mathrm{T}}x \le \gamma^2
\end{aligned}
$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵 $(m < n)$, A 的秩为 m, $c \in \mathbb{R}^n$ 且 $c \neq 0$, γ 是一个正数, 试求问题的最优解及目标函数最优值.

解. 非线性规划问题标准形式为

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^{\mathrm{T}}x \\
&\text{s.t. } Ax = 0 \\
&\qquad \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x \ge 0
\end{aligned}
$$

由于 $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$ 是凸函数 (线性函数), $g_1(x) = Ax$ 是线性函数, $g_2(x) = \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x$ 是凹函数, 故该问题是凸规划.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x) = c, \quad \nabla g_1(x) = A^{\mathrm{T}}, \quad \nabla g_2(x) = -2x$$

求解 KKT 条件 $(x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^m,\ w \in \mathbb{R})$

$$
\begin{cases}
\nabla f(x) - \nabla g_1(x)v - w\nabla g_2(x) = c - A^{\mathrm{T}}v + 2wx = 0 & (4) \\
g_1(x) = Ax = 0 & (5) \\
wg_2(x) = w(\gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x) = 0 & (6) \\
w \ge 0,\ g_2(x) = \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x \ge 0 & (7)
\end{cases}
$$

1. 若 $w = 0$, 代入 (4) 得 $A^{\mathrm{T}}v = c$. 左乘 x^{T} 结合 (5) 得 $f_{\min} = c^{\mathrm{T}}x = 0$.
2. 若 $w > 0$, 代入互补松弛条件 (6) 得 $x^{\mathrm{T}}x = \gamma^2$.

(4) 左乘 A 结合 (5) 得 $AA^{\mathrm{T}}v = Ac$, 由 A 行满秩知 AA^{T} 可逆, $v = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}Ac$.

(4) 左乘 x^{T} 结合 (5) 得 $x^{\mathrm{T}}c + 2wx^{\mathrm{T}}x = 0$, $w = -\frac{x^{\mathrm{T}}c}{2x^{\mathrm{T}}x} = -\frac{c^{\mathrm{T}}x}{2\gamma^2}$.

(4) 左乘 c^{T} 得 $c^{\mathrm{T}}(c-A^{\mathrm{T}}v)+2wc^{\mathrm{T}}x=0$, 代入 $c^{\mathrm{T}}x=-2\gamma^2 w$ 解得 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(c-A^{\mathrm{T}}v)}=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$.

由 (4) 得 $x=-\frac{1}{2w}(c-A^{\mathrm{T}}v)=\frac{-\gamma(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}{\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}}$.

此时 $f_{\min}=c^{\mathrm{T}}x=-2\gamma^2 w=-\gamma\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$.

3. 以下证明: 若 KKT 条件成立, 则 $w=0 \iff c\in \operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

若 $w=0$, 代入 KKT 条件 (4) 得 $A^{\mathrm{T}}v=c$, 即 $c\in \operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

否则 $w>0$, 则 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$. 由于 $\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(A)\oplus\operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则 $\exists c_1\in\operatorname{Ker}(A)$, $c_2\in\operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$ s.t. $c=c_1+c_2$ 且 $c_1^{\mathrm{T}}c_2=0$. 进一步地, $\exists v$ s.t. $A^{\mathrm{T}}v=c_2$. 代入 w 表达式得 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(c-c_2)}=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c_1^{\mathrm{T}}c_1}>0$. 所以 $c_1\neq 0$, $c=c_1+c_2\notin\operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

综上, KKT 条件的解为: 若 $c\in\operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则 $w=0$, x 不唯一, $f_{\min}=0$. 若 $c\notin\operatorname{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}>0\\
x &= \frac{-\gamma(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}{\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}}\\
f_{\min} &= -\gamma\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}
\end{aligned}$$

题目 3. 习题 7.8. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned}
&\min \quad x_2\\
&\text{s.t.} \; -x_1^2-(x_2-4)^2+16\geq 0\\
&\qquad (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-13=0
\end{aligned}$$

判断下列各点是否为局部最优解

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad x^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{16}{5}\\\frac{32}{5}\end{bmatrix},\quad x^{(3)}=\begin{bmatrix}2\\3+\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

解. 目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \nabla g(x)=\begin{bmatrix}-2x_1\\-2(x_2-4)\end{bmatrix},\quad \nabla h(x)=\begin{bmatrix}2(x_1-2)\\2(x_2-3)\end{bmatrix}$$

该问题不是凸规划, 因为 $h(x)$ 不是线性函数.

Lagrange 函数为 $L_x(x,w,v) = f(x) - wg(x) - vh(x) = x_2 - w[-x_1^2 - (x_2-4)^2 + 16] - v[(x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 - 13]$. Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 L_x(x,w,v) = \begin{bmatrix} 2(w-v) & 0 \\ 0 & 2(w-v) \end{bmatrix}$$

1. 检验 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $x^{(1)}$ 是可行解, 两个约束均为起作用约束. 求解 KKT 条件

$$\nabla f(x^{(1)}) - w\nabla g(x^{(1)}) - v\nabla h(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - w\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4v \\ 6v+1-8w \end{bmatrix} = 0$$

解得 $w = \frac{1}{8}$, $v = 0$. 满足一阶必要条件. $\nabla^2 L_x(x^{(1)},w,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 不必求方向集 G 即知 $x^{(1)}$ 是局部最优解.

2. 检验 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{32}{5} \end{bmatrix}$. $x^{(2)}$ 是可行解, 两个约束均为起作用约束. 求解 KKT 条件

$$\nabla f(x^{(2)}) - w\nabla g(x^{(2)}) - v\nabla h(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - w\begin{bmatrix} -\frac{32}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{34}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{32}{5}w - \frac{12}{5}v \\ \frac{24}{5}w - \frac{34}{5}v + 1 \end{bmatrix} = 0$$

解得 $w = \frac{3}{40}$, $v = \frac{1}{5}$. 满足一阶必要条件. $\nabla^2 L_x(x^{(2)},w,v) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 是负定矩阵. 求解方向集 G

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(2)})^{\mathrm{T}} d = -\frac{32}{5}d_1 - \frac{24}{5}d_2 = 0 \\ \nabla h(x^{(2)})^{\mathrm{T}} d = \frac{12}{5}d_1 + \frac{34}{5}d_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $d = 0$, 从而 $G = \varnothing$, $x^{(2)}$ 是局部最优解.

3. 检验 $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3+\sqrt{13} \end{bmatrix}$. $x^{(3)}$ 是可行解, 约束 $h(x)=0$ 为起作用约束. 求解 KKT 条件

$$\nabla f(x^{(3)}) - v\nabla h(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-2\sqrt{13}v \end{bmatrix} = 0$$

解得 $v = \frac{\sqrt{13}}{26}$. 满足一阶必要条件. $\nabla^2 L_x(x^{(3)}, w, v) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{13}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$ 是负定矩阵. 求解方向集 G

$$\nabla h(x^{(3)})^{\mathrm{T}} d = 0d_1 + 2\sqrt{13}d_2 = 0$$

解得 $G = \{d \mid d_1 \neq 0,\ d_2 = 0\}$,

$$d^{\mathrm{T}}\nabla^2 L_x(x^{(3)}, w, v)d = -\frac{\sqrt{13}}{13}d_1^2 < 0$$

从而 $x^{(3)}$ 不是局部最优解.

题目 4. **习题 7.9.** 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + x_2^2\right] \\ \text{s.t.} \ & -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

讨论 β 取何值时 $\overline{x} = (0,0)^{\mathrm{T}}$ 是局部最优解?

解. 目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2\beta x_2 \end{bmatrix}$$

该问题不是凸规划, 因为 $h(x)$ 不是线性函数.

Lagrange 函数为 $L_x(x, v) = f(x) - vh(x) = \frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + x_2^2\right] - v[-x_1 + \beta x_2^2]$. Hesse 矩阵

为

$$\nabla^2 L_x(x,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta v \end{bmatrix}$$

在 $\overline{x}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 处, $h(x)$ 是起作用约束. 求解 KKT 条件

$$\nabla f(\overline{x}) - v\nabla h(\overline{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v-1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

解得 $v=1$. 满足一阶必要条件. $\nabla^2 L_x(\overline{x},v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta \end{bmatrix}$.

若 $\beta < \frac{1}{2}$, 则 $\nabla^2 L_x(\overline{x},v)$ 是正定矩阵, 不必求方向集 G 即知 $\overline{x}$ 是局部最优解.

求解方向集 G

$$\nabla h(\overline{x})^{\mathrm{T}} d = -d_1 = 0$$

解得 $G=\{d \mid d_1=0,\ d_2\neq 0\}$,

$$d^{\mathrm{T}}\nabla^2 L_x(\overline{x},v)d = (1-2\beta)d_2^2$$

若 $\beta > \frac{1}{2}$, 则 $d^{\mathrm{T}}\nabla^2 L_x(\overline{x},v)d < 0$, 从而 $\overline{x}$ 不是局部最优解.

若 $\beta = \frac{1}{2}$, 无法利用二阶条件, 消去 x_2, 将原问题转化为

$$\min \quad \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}$$

知 $\overline{x}$ 是局部最优解.

综上, $\overline{x}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 是局部最优解的充要条件是 $\beta \leq \frac{1}{2}$.

题目 1. **习题 7.13.** 考虑下列原问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-1)^2+(x_2+1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1+x_2-1 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) 分别用图解法和最优性条件求解原问题.

(2) 写出对偶问题. (集约束为整个空间)

解. (1) 非线性规划问题标准形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-1)^2+(x_2+1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1+x_2-1 \geq 0 \end{aligned}$$

使用图解法, 即在直线 $-x_1+x_2-1=0$ 上寻找到点 $(1,-1)$ 距离最近的点. 如图 1 所示, 该点为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $f_{\min}=\frac{9}{2}$.

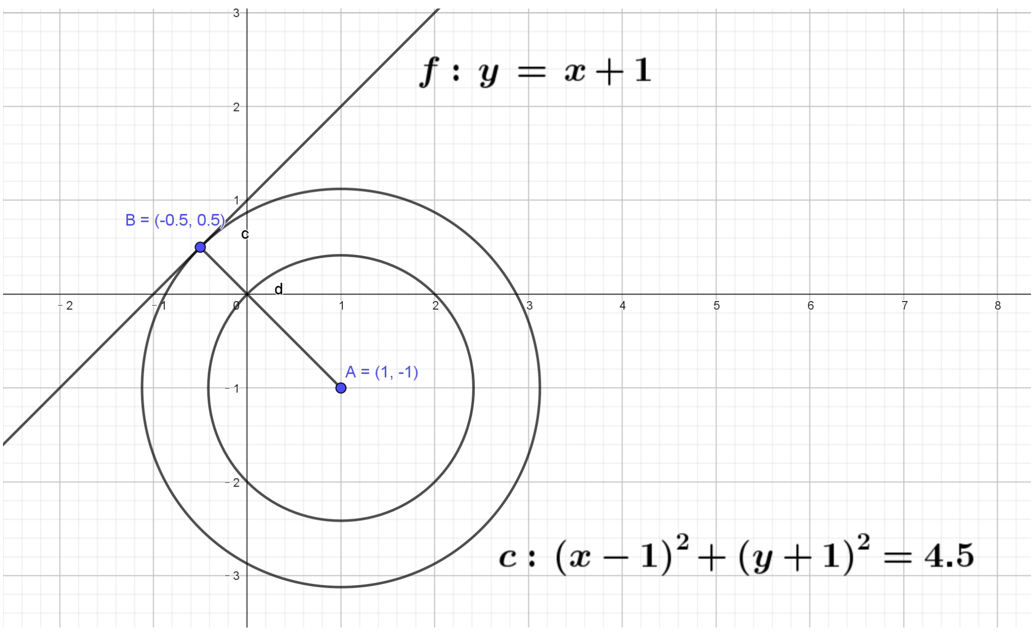

图 1: 图解法

由于 $f(x)=(x_1-1)^2+(x_2+1)^2$ 是凸函数, $g(x)=-x_1+x_2-1$ 是凹函数 (线性函数), 故该问题是凸规划.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2(x_2+1) \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求解 KKT 条件 ($x \in \mathbb{R}^2,\ w \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \nabla f(x) - w\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-1)+w \\ 2(x_2+1)-w \end{bmatrix} = 0 \\ wg(x) = w(-x_1+x_2-1) = 0 \\ w \geq 0,\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1. 若 $w=0$, 代入 KKT 条件得 $x_1=1$, $x_2=-1$, $g(x)<0$, 舍去.

2. 若 $w>0$, 代入互补松弛条件得 $g(x)=-x_1+x_2-1=0$, 解得 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $w=3$, $f_{\min}=\frac{9}{2}$. 与图解法结果一致.

(2) Lagrange 函数为

$$L(x,w) = (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 - w(-x_1+x_2-1)$$

则

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^2} L(x,w) = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} \{(x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 - w(-x_1+x_2-1)\} \\ &= \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \{x_1^2 + (w-2)x_1\} + \inf_{x_2\in\mathbb{R}} \{x_2^2 + (2-w)x_2\} + w + 2 \\ &= -\frac{(w-2)^2}{4} - \frac{(w-2)^2}{4} + w + 2 \qquad \left(x_1 = \frac{2-w}{2},\ x_2 = \frac{w-2}{2}\right) \\ &= -\frac{w^2}{2} + 3w \end{aligned}$$

所以对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{w^2}{2} + 3w \\ \text{s.t.} \quad & w \geq 0 \end{aligned}$$

题目 2. **习题 7.10.** 给定非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = 0 \\ & x^{\mathrm{T}}x = \gamma^2 \end{aligned}$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵 $(m < n)$ 且秩为 m, $c \in \mathbb{R}^n$ 且 $c \neq 0$, $\gamma > 0$. 试求问题的最优解及目标函数最优值.

解. (作业 08 已布置过本题)

非线性规划问题标准形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\ & Ax = 0 \\ & \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x \geq 0 \end{aligned}$$

由于 $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$ 是凸函数 (线性函数), $g_1(x) = Ax$ 是线性函数, $g_2(x) = \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x$ 是凹函数, 故该问题是凸规划.

目标函数与约束函数的梯度是

$$\nabla f(x) = c, \quad \nabla g_1(x) = A^{\mathrm{T}}, \quad \nabla g_2(x) = -2x$$

求解 KKT 条件 $(x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^m,\ w \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \nabla g_1(x)v - w\nabla g_2(x) = c - A^{\mathrm{T}}v + 2wx = 0 & (1) \\ g_1(x) = Ax = 0 & (2) \\ wg_2(x) = w(\gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x) = 0 & (3) \\ w \geq 0,\ g_2(x) = \gamma^2 - x^{\mathrm{T}}x \geq 0 & (4) \end{cases}$$

1. 若 $w = 0$, 代入 (1) 得 $A^{\mathrm{T}}v = c$. 左乘 x^{T} 结合 (2) 得 $f_{\min} = c^{\mathrm{T}}x = 0$.
2. 若 $w > 0$, 代入互补松弛条件 (3) 得 $x^{\mathrm{T}}x = \gamma^2$.

(1) 左乘 A 结合 (2) 得 $AA^{\mathrm{T}}v = Ac$, 由 A 行满秩知 AA^{T} 可逆, $v = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}Ac$.

(1) 左乘 x^{T} 结合 (2) 得 $x^{\mathrm{T}}c+2wx^{\mathrm{T}}x=0$, $w=-\frac{x^{\mathrm{T}}c}{2x^{\mathrm{T}}x}=-\frac{c^{\mathrm{T}}x}{2\gamma^2}$.

(1) 左乘 c^{T} 得 $c^{\mathrm{T}}(c-A^{\mathrm{T}}v)+2wc^{\mathrm{T}}x=0$, 代入 $c^{\mathrm{T}}x=-2\gamma^2 w$ 解得 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(c-A^{\mathrm{T}}v)}=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$.

由 (1) 得 $x=-\frac{1}{2w}(c-A^{\mathrm{T}}v)=\frac{-\gamma(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}{\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}}$.

此时 $f_{\min}=c^{\mathrm{T}}x=-2\gamma^2 w=-\gamma\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$.

3. 以下证明: 若 KKT 条件成立, 则 $w=0 \iff c\in \mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

若 $w=0$, 代入 KKT 条件 (1) 得 $A^{\mathrm{T}}v=c$, 即 $c\in\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

否则 $w>0$, 则 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}$. 由于 $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(A)\oplus\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则 $\exists c_1\in\mathrm{Ker}(A)$, $c_2\in\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$ s.t. $c=c_1+c_2$ 且 $c_1^{\mathrm{T}}c_2=0$. 进一步地, $\exists v$ s.t. $A^{\mathrm{T}}v=c_2$. 代入 w 表达式得 $w=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(c-c_2)}=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c_1^{\mathrm{T}}c_1}>0$. 所以 $c_1\neq 0$, $c=c_1+c_2\notin\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

综上, KKT 条件的解为: 若 $c\in\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则 $w=0$, x 不唯一, $f_{\min}=0$. 若 $c\notin\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$, 则

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{1}{2\gamma}\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}>0\\
x&=\frac{-\gamma(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}{\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}}\\
f_{\min}&=-\gamma\sqrt{c^{\mathrm{T}}(I_n-A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)c}
\end{aligned}
$$

题目 3. 习题 8.1. 定义算法映射如下:

$$
A(x)=\begin{cases}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{4}x,1+\frac{1}{2}x\right] & (x\geq 2)\\ \frac{1}{2}(x+1) & (x<2)\end{cases}
$$

证明 A 在 $x=2$ 处不是闭的.

证明. 注意到 $\lim\limits_{x\to 2^-}A(x)=\frac{3}{2}\notin A(2)$, 据此构造反例. 取序列 $x_k=2-\frac{1}{k}\to 2$, 由 $y_k\in A(x_k)=\{\frac{1}{2}(x+1)\}$ 得 $y_k=\frac{1}{2}(x_k+1)\to\frac{3}{2}$. 但 $\frac{3}{2}\notin A(2)=\{2\}$, 故 A 在 $x=2$ 处不是闭的. □

题目 4. 习题 8.2. 在集合 $X=[0,1]$ 上定义算法映射

$$
A(x)=\begin{cases}[0,x) & (0<x\leq 1)\\ 0 & (x=0)\end{cases}
$$

讨论在以下各点处 A 是否为闭的: $x^{(1)}=0$, $x^{(2)}=\frac{1}{2}$.

解. A 在 $x^{(1)}=0$ 处是闭的. 任取序列 $\{x_k\}\subseteq[0,1]$ 且 $x_k\to 0$, 任取序列 $\{y_k\}$ 满足 $y_k\in A(x_k)=\begin{cases}[0,x_k) & (0<x_k\le 1)\\ 0 & (x_k=0)\end{cases}$ 且 $y_k\to y$, 由夹逼定理知 $y=0$. 由 $y\in A(0)=\{0\}$, 知 A 在 $x^{(1)}=0$ 处是闭的.

A 在 $x^{(2)}=\frac{1}{2}$ 处不是闭的. 注意到 $[0,\frac{1}{2})$ 不是闭集, 据此构造反例: 取序列 $x_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\to\frac{1}{2}$, 取 $y_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\in A(x_k)$, 但 $y_k\to\frac{1}{2}\notin A(\frac{1}{2})=[0,\frac{1}{2})$, 故 A 在 $x^{(2)}=\frac{1}{2}$ 处不是闭的.

题目 1. **习题 9.14.** 设函数 $f(x)$ 在 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 之间存在极小点, 又知

$$f_1 = f(x^{(1)}),\ f_2 = f(x^{(2)}),\ f_1' = f'(x^{(1)})$$

作二次插值多项式 $\varphi(x)$, 使

$$\varphi(x^{(1)}) = f_1,\ \varphi(x^{(2)}) = f_2,\ \varphi'(x^{(1)}) = f_1'$$

求 $\varphi(x)$ 的极小点.

解. 设 $\varphi(x) = a(x - x^{(1)})^2 + b(x - x^{(1)}) + c$, 代入已知条件得

$$\begin{aligned}
\varphi(x^{(1)}) &= c = f_1 \\
\varphi(x^{(2)}) &= a(x^{(2)} - x^{(1)})^2 + b(x^{(2)} - x^{(1)}) + f_1 = f_2 \\
\varphi'(x^{(1)}) &= b = f_1'
\end{aligned}$$

解得

$$a = \frac{f_2 - f_1 - f_1'(x^{(2)} - x^{(1)})}{(x^{(2)} - x^{(1)})^2}, \quad b = f_1', \quad c = f_1$$

从而 $\varphi(x)$ 的极小点为

$$x^* = x^{(1)} - \frac{b}{2a} = x^{(1)} - \frac{f_1'(x^{(2)} - x^{(1)})^2}{2(f_2 - f_1 - f_1'(x^{(2)} - x^{(1)}))}$$

题目 2. **习题 10.2.** 给定函数

$$f(x) = (6 + x_1 + x_2)^2 + (2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)^2$$

求在点 $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ 处的最速下降方向.

解. 目标函数的梯度为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(6+x_1+x_2)+2(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)(-3-x_2) \\ 2(6+x_1+x_2)+2(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)(-3-x_1) \end{bmatrix}$$

在 $\hat{x}$ 处的最速下降方向为

$$d = -\nabla f(\hat{x}) = -\begin{bmatrix} 2(6-4+6)+2(2+12-18+24)(-3-6) \\ 2(6-4+6)+2(2+12-18+24)(-3+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 344 \\ -56 \end{bmatrix}$$

题目 1. **习题 10.2.** 给定函数

$$f(x) = (6 + x_1 + x_2)^2 + (2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)^2$$

求在点 $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ 处的牛顿方向.

解. 目标函数的梯度为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(6 + x_1 + x_2) + 2(2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)(-3 - x_2) \\ 2(6 + x_1 + x_2) + 2(2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)(-3 - x_1) \end{bmatrix}$$

Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 + 2(3 + x_2)^2 & 2 + 2(7 + 6x_1 + 6x_2 + 2x_1x_2) \\ 2 + 2(7 + 6x_1 + 6x_2 + 2x_1x_2) & 2 + 2(3 + x_1)^2 \end{bmatrix}$$

在 $\hat{x}$ 处的牛顿方向为

$$d = -\nabla^2 f(\hat{x})^{-1} \nabla f(\hat{x}) = -\begin{bmatrix} 164 & -56 \\ -56 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -344 \\ 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{31} \\ -\frac{126}{31} \end{bmatrix}$$

题目 2. **习题 10.5.** 设有函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c$, 其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x^{(1)} \neq \overline{x}$ 可表示为 $x^{(1)} = \overline{x} + \mu p$, 其中 $\overline{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点, p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明:

(1) $\nabla f(x^{(1)}) = \mu\lambda p$

(2) 如果从 $x^{(1)}$ 出发, 沿最速下降方向作一维搜索, 则一步达到极小点 $\overline{x}$.

证明. (1) 由 $\nabla f(x) = Ax + b$ 且 $\nabla f(\overline{x}) = A\overline{x} + b = 0$ 知

$$\nabla f(x^{(1)}) = Ax^{(1)} + b = A(\overline{x} + \mu p) + b = A\overline{x} + \mu Ap + b = \mu Ap = \mu\lambda p$$

(2) $x^{(1)}$ 处的最速下降方向 $d=-\nabla f(x^{(1)})=-\mu\lambda p$. 设 $g(c)=f(x^{(1)}+cd)$, 则

$$
\begin{aligned}
\nabla g(c) &= \nabla f(x^{(1)}+cd)^{\mathrm{T}} d = \left(A(\overline{x}+\mu p+cd)+b\right)^{\mathrm{T}} d \\
&\xlongequal{A\overline{x}+b=0} \left(A(\mu p+cd)\right)^{\mathrm{T}} d \xlongequal[d=-\mu\lambda p]{Ap=\lambda p} \left(\mu\lambda(1-\lambda c)p\right)^{\mathrm{T}}(-\mu\lambda p) \\
&= -\mu^2\lambda^2(1-\lambda c)p^{\mathrm{T}}p \begin{cases} <0, & c<\frac{1}{\lambda} \\ =0, & c=\frac{1}{\lambda} \\ >0, & c>\frac{1}{\lambda} \end{cases}
\end{aligned}
$$

注: 由于 A 对称正定, 知 $\lambda>0$. 由于 $x^{(1)}\neq\overline{x}$, 有 $\mu\neq0,\ p\neq0$.

所以 $g(c)$ 在 $c=\frac{1}{\lambda}$ 处取最小值, $\min g(c)=\min f(x^{(1)}+cd)=f(x^{(1)}+\frac{d}{\lambda})=f(\overline{x})$, 即沿 d 作一维搜索一步达到极小点 $\overline{x}$. □

题目 3. **习题 10.12.** 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, 证明 A 的 n 个互相正交的特征向量 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}$ 关于 A 共轭.

证明. 设 $Ap^{(i)}=\lambda_i p^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}$ 两两正交, 得

$$
p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(j)}=\lambda_i p^{(i)\,\mathrm{T}}p^{(j)}=0,\quad i,j\in\{1,2,\cdots,n\},\ i\neq j
$$

即 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}$ 关于 A 共轭. □

题目 4. **习题 10.16.** 设 A 为 n 阶对称正定矩阵, 非零向量 $p^{(1)},p^{(2)},\ldots,p^{(n)}\in E_n$ 关于矩阵 A 共轭. 证明:

(1) $\forall x\in E_n,\ x=\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ax}{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}}p^{(i)}$.

(2) $A^{-1}=\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\,\mathrm{T}}}{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}}$.

证明. (1) 由于 $p^{(1)},p^{(2)},\ldots,p^{(n)}$ 关于 A 共轭, 知其线性无关, 是 E_n 的一组基. $\forall x\in E_n$, 设 $x=\sum_{i=1}^n c_i p^{(i)}$, 左乘 $p^{(j)\,\mathrm{T}}A$ 得 $p^{(j)\,\mathrm{T}}Ax=\sum_{i=1}^n c_i p^{(j)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}=c_j p^{(j)\,\mathrm{T}}Ap^{(j)}$, 即 $c_j=\frac{p^{(j)\,\mathrm{T}}Ax}{p^{(j)\,\mathrm{T}}Ap^{(j)}}$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 所以 $x=\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ax}{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}}p^{(i)}$.

(2) 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix}$. 由 (1) 结论, 得

$$
u_j=\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)\,\mathrm{T}}Au_i}{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}}p^{(i)}=\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\,\mathrm{T}}Au_i}{p^{(i)\,\mathrm{T}}Ap^{(i)}}\ (j=1,2,\cdots,n)
$$

注: $p^{(i)\mathrm{T}}Au_i$ 是数字, 与 $p^{(i)}$ 可交换. 所以

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}Au_1}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}} & \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}Au_2}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}} & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}Au_n}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}}\end{bmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}}A\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}}AA^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)}p^{(i)\mathrm{T}}}{p^{(i)\mathrm{T}}Ap^{(i)}}\end{aligned}$$

□

题目 5. 习题 10.17. 设有非线性规划问题

$$\begin{aligned}&\min \frac{1}{2}x^T Ax\\ &\text{s.t. } x \geq b\end{aligned}$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵. 设 $\overline{x}$ 是问题的最优解, 证明: $\overline{x}$ 与 $\overline{x}-b$ 关于 A 共轭.

证明. 目标函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ 的梯度为 $\nabla f(x) = Ax$. 约束 $g(x) = x - b$ 的梯度为 $\nabla g(x) = I$.

由已知, $\overline{x}$ 是 KKT 点, 即

$$\begin{cases}\nabla f(\overline{x}) - \nabla g(\overline{x})w^{\mathrm{T}} = A\overline{x} - w^{\mathrm{T}} = 0 & (1)\\ wg(\overline{x}) = w(\overline{x}-b) = 0 & (2)\\ w \geq 0,\ g(\overline{x}) \geq 0 & (3)\end{cases}$$

由 (1) 得 $w = \overline{x}^{\mathrm{T}}A^T = \overline{x}^{\mathrm{T}}A$. 由 (2) 得 $\overline{x}^{\mathrm{T}}A(\overline{x}-b) = w(\overline{x}-b) = 0$, 即 $\overline{x}$ 与 $\overline{x}-b$ 关于 A 共轭. □

题目 1. **习题 10.13.** 设 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ 为一组线性无关向量, H 是 n 阶对称正定矩阵, 令向量 $d^{(k)}$ 为

$$d^{(k)} = \begin{cases} p^{(k)}, & k = 1, \\ p^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d^{(i)\mathrm{T}} H p^{(k)}}{d^{(i)\mathrm{T}} H d^{(i)}} d^{(i)}, & k = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

证明 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭.

证明. 使用数学归纳法. $n = 2$ 时,

$$d^{(1)\mathrm{T}} H d^{(2)} = p^{(1)\mathrm{T}} H \left(p^{(2)} - \frac{d^{(1)\mathrm{T}} H p^{(2)}}{d^{(1)\mathrm{T}} H d^{(1)}} d^{(1)} \right) = p^{(1)\mathrm{T}} H p^{(2)} - \frac{p^{(1)\mathrm{T}} H p^{(2)}}{p^{(1)\mathrm{T}} H p^{(1)}} p^{(1)\mathrm{T}} H p^{(1)} = 0$$

假设 $n = k$ 时成立 ($k \geq 2$), 即 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(k)}$ 关于 H 共轭. 则

$$\begin{aligned} d^{(j)\mathrm{T}} H d^{(k+1)} &= d^{(j)\mathrm{T}} H \left(p^{(k+1)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{d^{(i)\mathrm{T}} H p^{(k+1)}}{d^{(i)\mathrm{T}} H d^{(i)}} d^{(i)} \right) \\ &= d^{(j)\mathrm{T}} H p^{(k+1)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{d^{(i)\mathrm{T}} H p^{(k+1)}}{d^{(i)\mathrm{T}} H d^{(i)}} d^{(j)\mathrm{T}} H d^{(i)} \\ &= d^{(j)\mathrm{T}} H p^{(k+1)} - \frac{d^{(j)\mathrm{T}} H p^{(k+1)}}{d^{(j)\mathrm{T}} H d^{(j)}} d^{(j)\mathrm{T}} H d^{(j)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

故 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(k+1)}$ 关于 H 共轭. 归纳知 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭 ($n \geq 2$). □

题目 1 的注记. 此为 Gram-Schmidt 正交化方法的推广. 若 $H = I$, 即为 Gram-Schmidt 正交化方法.

题目 2. **习题 10.15.** 设将 FR 共轭梯度法用于有三个变量的函数 $f(x)$, 第 1 次迭代, 搜索方向 $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 沿 $d^{(1)}$ 作精确一维搜索, 得到点 $x^{(2)}$, 又设 $\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -2$, $\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -2$, 那么按共轭梯度法的规定, 从 $x^{(2)}$ 出发的搜索方向是什么?

解.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \nabla f(x^{(1)}) = -d_1 = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
g_2 &= \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix}-2 & -2 & \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \xlongequal{g_2^{\mathrm{T}} d_1 = 0} \begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
d_2 &= -g_2 + \beta_1 d_1 = -g_2 + \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} d_1 = -g_2 + \frac{4}{3} d_1 = \begin{bmatrix}\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

题目 3. **习题 12.2.** 考虑下列问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

求出在点 $\hat{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 处的一个下降可行方向.

解. 在点 $\hat{x}$ 处起作用的约束为 $g(x) = x_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} x \geq 0$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} x = 2$. 求解

$$
\begin{aligned}
\nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d = \begin{bmatrix}2x_1 + x_2 - 6 & x_1 + 4x_2 - 2 & -12\end{bmatrix}\Big|_{\hat{x}} d = \begin{bmatrix}-3 & 3 & -12\end{bmatrix} d &< 0 \\
\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} d &\geq 0 \\
\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} d &= 0
\end{aligned}
$$

满足上述条件的 d 即为下降可行方向. 可取 $d = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

题目 1. **习题 12.8.** 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ \text{s.t.} \quad &g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l \end{aligned}$$

设 $\hat{x}$ 是可行点, $I = \{i \mid g_i(\hat{x}) = 0\}$. 证明 $\hat{x}$ 为 KKT 点的充要条件是下列问题的目标函数的最优值为零:

$$\begin{aligned} &\min \nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d \\ \text{s.t.} \quad &\nabla g_i(\hat{x})^{\mathrm{T}} d \geq 0, \quad i \in I \\ &\nabla h_j(\hat{x})^{\mathrm{T}} d = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l \\ &-1 \leq d_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

证明. $\hat{x}$ 为 KKT 点 $\iff \exists w_i \geq 0 \ (i \in I),\ v_j \ (j = 1, 2, \cdots, l)$ s.t.

$$\nabla f(\hat{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0$$

$$\iff \exists w \geq 0,\ v \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \nabla g(\hat{x}) & \nabla h(\hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \nabla f(\hat{x}).$$

令 $v = v_1 - v_2,\ v_1, v_2 \geq 0$

$$\iff \exists w, v_1, v_2 \geq 0 \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \nabla g(\hat{x}) & \nabla h(\hat{x}) & -\nabla h(\hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \nabla f(\hat{x}).$$

由 Farkas 定理

$$\iff \nexists d_1 \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \nabla g(\hat{x})^{\mathrm{T}} \\ \nabla h(\hat{x})^{\mathrm{T}} \\ -\nabla h(\hat{x})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} d_1 \leq 0,\ \nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d_1 > 0.$$

令 $d = -d_1$

$$\iff \nexists d \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \nabla g(\hat{x})^{\mathrm{T}} \\ \nabla h(\hat{x})^{\mathrm{T}} \\ -\nabla h(\hat{x})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} d \geq 0,\ \nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d < 0.$$

$$\iff \nexists d \text{ s.t. } \nabla g(\hat{x})^{\mathrm{T}} d \geq 0,\ \nabla h(\hat{x})^{\mathrm{T}} d = 0,\ \nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d < 0.$$

$\iff$ 下列问题的目标函数的最优值为零, 在 $d = 0$ 时取得.

$$\begin{aligned} & \min \nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}} d \\ \text{s.t.} \quad & \nabla g_i(\hat{x})^{\mathrm{T}} d \geq 0, \quad i \in I \\ & \nabla h_j(\hat{x})^{\mathrm{T}} d = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l \\ & -1 \leq d_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

$\square$

题目 1. **习题 13.4.** 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & g(x) = -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) 用二阶最优性条件证明点 $\overline{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ 是局部最优解, 并说明它是否为全局最优解?

(2) 定义障碍函数为 $G(x,r) = x_1x_2 - r\ln g(x)$, 试用内点法求解此问题，并说明内点法产生的序列趋向点 $\overline{x}$.

解.

(1) 目标函数和约束函数的梯度为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lagrange 函数为 $L_x(x,w) = x_1x_2 - w(-2x_1 + x_2 + 3)$, Hesse 矩阵为 $\nabla^2 L_x(x,w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

在 $\overline{x}$ 处, $g(\overline{x}) = 0$, $g(x)$ 是起作用约束. 解 KKT 条件

$$\nabla f(\overline{x}) - w\nabla g(\overline{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + 2w \\ \frac{3}{4} - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $w = \frac{3}{4} > 0$, 故 $\overline{x}$ 是 KKT 点.

求解方向集 G:

$$\nabla g(\overline{x})^{\mathrm{T}} d = -2d_1 + d_2 = 0$$

解得 $G = \{d \mid d \neq 0,\ d_1 = \frac{1}{2}d_2\}$.

$$d^{\mathrm{T}}\nabla^2 L_x(\overline{x}, w, v)d = 2d_1d_2 = 4d_1^2 > 0$$

故 $\overline{x}$ 是局部最优解. $f(\overline{x}) = -\frac{9}{8}$.

记 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \end{bmatrix}$, 则 $g(x^{(1)}) \geq 0$, $f(x^{(1)}) < f(\overline{x})$. 故 $\overline{x}$ 不是全局最优解.

(2) 令

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1} &= x_2 + \frac{2r}{g(x)} = x_2 + \frac{2r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} &= x_1 - \frac{r}{g(x)} = x_1 - \frac{r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0 \end{aligned}$$

整理得 $4x_1^2 - 3x_1 + r = 0,\ x_2 = -2x_1,\ x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{9-16r}}{8}$.

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 G(x,r) &= \begin{bmatrix} \frac{4r}{(-2x_1+x_2+3)^2} & 1 - \frac{2r}{(-2x_1+x_2+3)^2} \\ 1 - \frac{2r}{(-2x_1+x_2+3)^2} & \frac{r}{(-2x_1+x_2+3)^2} \end{bmatrix} \\ \det \nabla_x^2 G(x,r) &= \frac{4r}{(-2x_1+x_2+3)^2} - 1 \end{aligned}$$

令 $\det \nabla_x^2 G(x,r) \geq 0$, 解得 $x_1 \geq \frac{3-2\sqrt{r}}{4}$. 所以 $x_1 = \frac{3+\sqrt{9-16r}}{8}$, $x_2 = -\frac{3+\sqrt{9-16r}}{4}$ 是 $G(x,r)$ 的极小点. 令 $r \to 0^+$, 则 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \overline{x}$. 故内点法产生的序列趋向点 $\overline{x}$.