1 度量空间

1.1

度量公理 4 条：非负、非退化、对称、三角不等式

度量关于两个变量连续（三角不等式证）

ℓ^p：p阶可和 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$

ℓ^∞：有界数列

c_0：极限为 0 的数列

c：收敛列

$$l^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset s$$

Young 不等式：$\left(\alpha,\beta \geq 0, 1 \leq p,q \leq \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

Holder 不等式：$\left(1 < p,q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\{x_n\} \in \ell^p, \{y_n\} \in \ell^q \Longrightarrow \{x_n y_n\} \in \ell^1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Minkowski 不等式：$\left(1 \leq p,q \leq \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\{x_n\} \in \ell^p, \{y_n\} \in \ell^p$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_p(x,y) \leq d_p(x,z)+d_p(z,y)$$

度量：

$$(\ell^p,d_p): d_p(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\ell^\infty,d_\infty): d_\infty(x,y)=\sup_{n\geq 1}|x_n-y_n|$$

等价度量：

$$d_\infty \leq d_p \leq n^{\frac{1}{p}} d_\infty$$

1.2 开集和闭集

开/闭子集简称开/闭集，相对某个度量空间

例如$(\frac{1}{2},1]$是$[0,1]$的开集，不是$\mathbb{R}$的开集

离散度量空间，任意子集既开又闭

性质：

任意开集的并、有限开集的交仍是开集

任意闭集的交、有限闭集的并仍是闭集

内部是集合中最大开集，闭包是包含集合最小闭集

闭集判据：$M \subset X$

1 $\Leftrightarrow M=\overline{M}$

2 （收敛列）$x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists\{x_n\} \subset M, x_n \to x$

3 （闭集常用判据）$\Leftrightarrow \forall\{x_n\}, x_n \to x \in X \Longrightarrow x \in M$

连续映射：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x \in X_1, d_1(x,x_0)<\delta \Longrightarrow d_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$

Lipschitz 映射（像距可由原像距控制，蕴含连续）：

$$\exists C \geq 0, \forall x,y \in X_1, d_2(Tx,Ty) \leq C d_1(x,y)$$

逆像（只是记号）：$T^{-1}(G)=\{x \in X \mid Tx \in G\}$

连续映射判据：$T: X_1 \to X_2$

1 $\forall$开集合$G \subset X_2$，$T^{-1}(G)$是X_1开集

2 $\forall$闭集合$F \subset X_2$，$T^{-1}(F)$是X_1闭集

$$T^{-1}(F) \cup T^{-1}(F^c)=X_1, T^{-1}(F) \cap T^{-1}(F^c)=\emptyset$$

3 （海涅归结）T在x_0连续$\Leftrightarrow \forall\{x_n\} \subset X_1, x_n \to x_0 \Longrightarrow Tx_n \to Tx_0$

稠密子集：$M \subset X, \overline{M}=X$，即$X$元素可用$M$元素逼近

可分度量空间：有至多可数的稠密子集，例如$\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$

可分性证明：即证$X \subset \overline{M}$：$\forall x \in X, \forall r>0$，找到$y \in M \cap B(x,r)$，从而$M \cap B(x,r) \neq \emptyset, x \in \overline{M}$

示例：

$(\ell^p,d_p)(1 \leq p < \infty)$可分（收敛级数尾巴可被控制）：

$$M_n=\left\{\{x_n\} \in \ell^p \mid x_n \in \mathbb{Q}, \forall k \geq n+1, x_k=0\right\}$$

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \overline{M}=\ell^p$$

(ℓ^∞,d_∞)不可分：定义不可数的M，其中元素分离（距离为 1），对于稠密子集N，逼近M中元素（距离小于 1/4），则有$M \to N$单射

$$M=\left\{\{x_n\} \in \ell^\infty \mid x_n=0 \text{ or } 1\right\} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\forall x,y \in M, d_\infty(x,y)=1$$

$$\phi: M \to N, \phi(x)=t_x \text{ 单射}$$

$(C[a,b],d_\infty)$可分：M为全体有理系数多项式

有理系数多项式→实系数多项式→连续函数

$\left(C[a,b],d_p\right)(1 \leq p < \infty)$可分：$d_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} d_\infty$，可用$d_\infty$控制则可用$d_p$控制

可分集合子集可分：(X,d)可分，$Y \subset X$，$(Y,d|_{Y\times Y})$可分

1.3 收敛性、完备性、紧性

收敛列有界

闭集收敛列判据

映射连续性的海涅归结

完备度量空间：任意柯西列均收敛（到本空间）

收敛列⊂柯西列⊂有界列；柯西列+收敛子列→收敛

度量空间的完备子空间为闭集

完备度量空间的子空间完备⟺子空间为闭集

度量强弱：d_2强于d_1，d_1弱于d_2

$$\exists\alpha>0, d_1(x,y)\le\alpha d_2(x,y)$$

性质：d_2收敛/柯西→d_1收敛/柯西

d_1中开/闭集→d_2中开/闭集，考虑 Lipschitz 映射：恒等映射$(X,d_2)\to(X,d_1)$

等价度量：

$$\exists\alpha,\beta>0, \alpha d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le\beta d_1(x,y)$$

性质：开集、闭集、柯西列、收敛列、完备、稠密、可分、相同内点/内部/聚点/闭包

完备性证明：

1 任取X中柯西列

2 找到可能的极限（利用$\mathbb{R}$中柯西列）

3 证明极限在X中（利用三角不等式，x被足够近的x_n和$x-x_n$控制）

4 证明$x_n\to x$（令柯西列一变元趋于无穷）

一取柯西待操作，二猜极限在心中，

三证极限留圈内，四判收敛有完备。

或证明是完备空间的闭子集

例：$d_p(1\le p\le\infty)$等价

离散度量空间完备

$(\mathbb{R}^n,d_p)$完备

$(\ell^p,d_p)(1\le p<\infty)$完备（累次极限，Minkowski）

(ℓ^∞,d_∞)完备

$(c_0,d_\infty|_{c_0\times c_0})$完备：可推广至$c$（$\ell^\infty$闭子集）

$(C[a,b],d_\infty)$完备（一致收敛，3ε法）

$(C[0,1],d_p)(1\le p<\infty)$不完备

等距同构：T一一映射，$d_2(Tx,Ty)=d_1(x,y)$

可以将等距同构的度量空间视为同一度量空间

完备化：(X,d)的完备化$(\hat{X},\hat{d})$：$M\subset\hat{X},\overline{M}=\hat{X}$，$M$与$X$等距同构；完备化等距同构意义唯一

紧度量空间：任意序列均有收敛子列

有限集必为紧集

离散度量空间为紧⟺其为有限集

紧集必为有界闭集，逆命题反例：$\{e_n\}\subset\ell^2$

紧度量空间：紧集⟺闭集

紧集⟺完备+完全有界集

连续映射与紧性：

1 $T:X\to Y$连续：若M紧，则$T(M)$紧；若(X,d_1)紧，T一一映射，则T^{-1}连续（闭集取逆像仍为闭集）

2 非空紧度量空间连续映射可取最大、最小值（值域紧）

非空紧集最佳逼近元存在 $\rho(x_0,M)=\inf\limits_{y\in M}d(x_0,y)=d(x_0,y_0),\exists y_0\in M$

1.4 Banach 不动点定理

压缩映射：$T:X\to X,\exists\alpha\in[0,1),d(Tx,Ty)\le\alpha d(x,y)$

Banach 不动点定理：(X,d)非空完备，压缩映射T有唯一不动点（任取初始点迭代，证明其为柯西列）

推广：T^m压缩映射

2 赋范空间

2.1 线性空间

线性空间定义 8 条：

加法交换律、加法结合律、0 元、负元、1 元、数乘运算律、两条分配律

线性子空间判定 2 条：加法、数乘封闭，X两个平凡子空间：$\{0\},X$

线性子空间任意多交集仍然是线性子空间，并集不是

线性组合、span、集合线性相关/无关：针对有限个元素

线性子空间，span 等于自己

Hamel 基：X线性空间，$M\subset X$线性无关，$\mathrm{span}(M)=X$

Hamel 基下表示唯一

任意非零线性空间有 Hamel 基（Zorn 引理）

$\{e_n\mid n\ge1\}$是$\{\{x_n\}\mid\exists N,\forall n\ge N,x_n=0\}$的 Hamel 基，但不是$\ell^p$的 Hamel 基（span 是有限的）

2.2 赋范空间、Banach 空间

范数定义 4 条：非负、非退化、齐次（提取数乘）、三角不等式

范数诱导的度量具有额外性质：齐次性、平移不变性

取范数的映射是 Lipschitz 映射，连续（三角不等式证）

范数：

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad\|x\|_\infty=\sup_{n\ge1}|x_n|$$

Banach 空间：赋范空间，且范数诱导的度量使其完备

X赋范，$Y\subset X$，若YBanach，则Y闭（完备子空间闭）

X赋范 Banach，$Y\subset X$，YBanach⟺闭

例：

$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$Banach

$(\ell^p,\|\cdot\|_p)(1\le p<\infty)$Banach（累次极限，Minkowski）

$(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$Banach

$(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$Banach（一致收敛，$3\varepsilon$法）

$(C[a,b],\|\cdot\|_p)(1\le p<\infty)$非 Banach

线性算子：$T:X\to Y,T(ax+by)=aTx+bTy$

等距同构：T一一映射，$\|Tx\|_y = \|x\|_x$
完备化：赋范X的完备化 Banach$\hat{X}$：线性$Y \subset \hat{X}, \overline{Y} = \hat{X}$，$Y$与$X$等距同构；完备化等距同构意义唯一

线性空间 Hamel，Banach 空间 Schauder
Schauder 基：$\{e_n\} \subset X: \forall x \in X, \exists! \{a_n\}, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$
$\{e_n \mid n \geq 1\}$不是$\ell^p(p < \infty)$的 Hamel 基，是 Schauder 基
有 Schauder 基的 Banach 空间可分(收敛级数尾巴可控)：

$$M_n = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X \mid x_i \in \mathbb{Q}\right\} \sim \mathbb{Q}^n$$

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \qquad \overline{M} = X$$

有 Schauder 基的 Banach 空间是无穷维的，Schauder 基线性无关（否则 0 有 2 种表示）
无穷维可分 Banach 空间不一定有 Schauder 基(P.Enflo)

2.3 有限维赋范空间

等价范数：$\exists a, b > 0, \forall x \in X, a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$

范数等价引理（下界 1 范数）：$x_1 \sim x_n$线性无关，
$\exists C > 0, \forall a_i, C(|a_1| + \cdots + |a_n|) \leq \|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\|$
先证明$|a_1| + \cdots + |a_n| = 1$情形，反证，设$RHS < \frac{1}{m}$，用 Bolzano 定理对$\left\{a_i^{(m)}\right\}$取$n$次收敛子列，取定$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$，则$x = 0$，矛盾

范数等价定理：有限维赋范空间：范数等价，必 Banach
取 Hamel 基$x_1 \sim x_n$，

$$C\|\cdot\|_1 \leq \|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\| \leq \max_{i=1\sim n} \|x_i\| \ \ \|\cdot\|_1$$

然后在$\|\cdot\|_1$证完备
推论：赋范空间有限维线性子空间 Banach，且总是闭的
有限维赋范空间：紧集⟺有界闭集（Bolzano）

Riesz：赋范空间有限维⟺单位闭球/单位闭球面紧
赋范空间有限维线性子空间最佳逼近元存在（找闭球，$r = \frac{2\|x_0\|}{C}$，证明其外对逼近距离最小化无贡献）

2.4 有界线性算子

线性T单射⟺ $N(T) = \{0\}$
$\dim D(T) = n < \infty \Longrightarrow \dim R(T) \leq n$：映射后维数不增
有界线性算子：$\exists C \geq 0, \forall x \in X, \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$
T有界线性⟺ T将有界集映射到有界集
范数（最小的C，也是有界线性算子空间$B(X,Y)$范数）：

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$$\|Tx\| \leq \|T\| \ \|x\|$$

范数证明题：
证明范数≤某数：取一般情况，上确界≤上界
证明范数≥某数：取特例，上确界是一个上界

反例：$C^1[0,1]$求导算子不是有界线性算子
X有限维赋范，线性$T: X \to Y$有界（用 1 范数证）

线性算子等价命题：T线性
1 T在$x = 0$连续 2 T在$x = x_0$连续 3 T连续
4 T有界
1→4：$x' = \frac{\delta x}{2\|x\|}, \|x'\| < \delta, \|Tx'\| < 1, \|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$
4→1：$\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|+1}$

有界线性$T: N(T) = T^{-1}(\{0\})$为闭线性子空间

X赋范，YBanach，则$B(X,Y)$Banach
完备性四步走：取$B(X,Y)$柯西列$\{T_n\}$，则$\{T_n x\}$是Y柯西列，据此定义$T: X \to Y$，证线性、有界，再证$T_n \to T$（令柯西列一变元趋于无穷）

延拓定理：X赋范，YBanach，$X_0 \subset X$稠密线性子空间，$T_0 = B(X,Y)$，则$\exists! T \in B(X,Y)$为T_0延拓使$\|T\| = \|T_0\|$

2.5 有界线性泛函及其表示

线性泛函：线性算子$f: X \to \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$
代数对偶空间X^*：线性泛函全体
对偶空间X'：有界线性泛函全体（$\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ Banach，所以X'总为 Banach 空间！）

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

例：Dirac 测度$\delta_{t_0}(x) = x(t_0), \left\|\delta_{t_0}(x)\right\| = 1$
$f \in X^*$的值由XHamel 基上的值唯一确定
对偶基：有限维X的 Hamel 基$e_1 \sim e_n$，设线性泛函$\phi_i(x) = x_i$（截取e_i分量系数），则$\phi_1 \sim \phi_n$是X^*的 Hamel 基，坐标$x_i \to f(e_i)$，特别地$\dim X^* = \dim X$
赋范空间X有限维⟺ $X' = X^*$：反证⟸：无限维X的 Hamel 基$\{e_n\}$，令$\|e_n\| = 1$，$f(e) = n\ (e = e_n)$ or 0，延拓到X，则$f \notin X'$
例：（关键：证明等距同构）

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)' = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$，$T: \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)': a \to f_a$

$$f_a(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, f_a \in (\mathbb{R}^n)', \|f_a\| = \|a\|_2$$

保范证明：两步走 Cauchy-Schwarz+取$x=\overline{a}$
T单射：$N(T)=\{0\}$（因为保范，$f_a=0\Rightarrow a=0$）
T满射：$\forall f\in(\mathbb{R}^n)',\exists a=\left(f(e_1),\cdots,f(e_n)\right)$

ℓ^∞的线性子空间c_0（需收敛，证明用到收敛性）
$(c_0)'=\ell^1$，$T:(c_0)'\to\ell^1:f\to\{f(e_i)\},e_i=\{\delta_{ij}\}\in c_0$
证明$\{f(e_i)\}\in\ell^1$：旋转因子法，$|\varepsilon_i|=1$

$$\sum_{i=1}^n|f(e_i)|=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(e_i)=f\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i e_i\right)$$

$$\le\|f\|\ \left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i e_i\right\|_\infty=\|f\|$$

所以$\|\{f(e_i)\}\|_1=\sum_{i=1}^\infty|f(e_i)|\le\|f\|,\{f(e_i)\}\in\ell^1$

T单射：$T(f)=T(g)$，证$\forall x\in c_0,f(x)=g(x)$
考虑$x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n,0,0,\cdots)=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in c_0$，
则$f\left(x^{(n)}\right)=g\left(x^{(n)}\right)$，结合$\left\|x-x^{(n)}\right\|_\infty=\max\limits_{i\ge n+1}|x_i|\to 0$
以及f,g连续性
T满射：$\forall a\in\ell^1$，$f_a(x)=\sum_{i=1}^\infty a_ix_i,x\in c_0$，满足$Tf_a=a$，由$|f_a(x)|\le\|a\|_1\|x\|_\infty<\infty$知$f_a\in(c_0)',\|f_a\|\le\|a\|_1$
T等距同构：结合$\{f(e_i)\}\in\ell^1$+ T满射的证明知$\forall x\in(c_0)',\|Tf\|_1=\|f\|$（$\le\ge$都证了）

$(\ell^1)'=\ell^\infty$，证明类似，

$T:(\ell^1)'\to\ell^\infty:f\to\{f(e_i)\},e_i=\{\delta_{ij}\}\in\ell^1$

证明$\{f(e_i)\}\in\ell^\infty$：直接证

$$|f(e_i)|\le\|f\|\ \|e_i\|_1=\|f\|$$

所以$\|\{f(e_i)\}\|_\infty=\sup|f(e_i)|\le\|f\|,\{f(e_i)\}\in\ell^\infty$

T单射：$T(f)=T(g)$，证$\forall x\in\ell^1,f(x)=g(x)$
考虑$x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n,0,0,\cdots)=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in l_1$，
则$f\left(x^{(n)}\right)=g\left(x^{(n)}\right)$，结合$\left\|x-x^{(n)}\right\|_1\to 0$（收敛级数尾巴）以及$f,g$连续性
T满射：$\forall a\in\ell^\infty$，$f_a(x)=\sum_{i=1}^\infty a_ix_i,x\in\ell^1$，满足$Tf_a=a$，由$|f_a(x)|\le\|a\|_\infty\|x\|_1<\infty$知$f_a\in(\ell^1)',\|f_a\|\le\|a\|_\infty$
T等距同构：结合$\{f(e_i)\}\in\ell^\infty$+ T满射的证明知$\forall x\in(\ell^1)',\|Tf\|_\infty=\|f\|$（$\le\ge$都证了）

$(\ell^p)'=\ell^q$，证明类似，

$T:(\ell^p)'\to\ell^q:f\to\{f(e_i)\},e_i=\{\delta_{ij}\}\in\ell^p$

证明$\{f(e_i)\}\in\ell^\infty$：旋转因子法，$\xi_i=\frac{|f(e_i)|^q}{f(e_i)}$ or 0

$$\sum_{i=1}^n|f(e_i)|^q=\sum_{i=1}^n\xi_if(e_i)=f\left(\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\right)$$

$$\le\|f\|\ \left\|\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\right\|_p=\|f\|\left(\sum_{i=1}^n\frac{|f(e_i)|^{qp}}{|f(e_i)|^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{i=1}^n|f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

即$\left(\sum_{i=1}^n|f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|$，所以$\{f(e_i)\}\in\ell^q$

T单射：$T(f)=T(g)$，证$\forall x\in\ell^p,f(x)=g(x)$
考虑$x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n,0,0,\cdots)=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in l_1$，
则$f\left(x^{(n)}\right)=g\left(x^{(n)}\right)$，结合$\left\|x-x^{(n)}\right\|_p\to 0$（收敛级数尾巴）以及$f,g$连续性
T满射：$\forall a\in\ell^q$，$f_a(x)=\sum_{i=1}^\infty a_ix_i,x\in\ell^p$，满足$Tf_a=a$，由 Holder 不等式，$|f_a(x)|\le\sum_{i=1}^\infty|a_ix_i|\le\|a\|_q\|x\|_p<\infty$，知$f_a\in(\ell^p)',\|f_a\|\le\|a\|_q$
T等距同构：结合$\{f(e_i)\}\in\ell^q$+ T满射的证明知$\forall x\in(\ell^p)',\|Tf\|_q=\|f\|$（$\le\ge$都证了）

$\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p\right)'=\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_q\right)$，同上

---

3 内积空间和 Hilbert 空间

3.1

内积定义 5 条：关于第一变量线性（可加、齐次）、共轭对称、非负、非退化（即关于第二变量共轭线性，提出的常数有共轭）
内积具有连续性

内积可诱导范数 $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$

Hilbert 空间：对应赋范空间（内积诱导）为 Banach
内积空间性质：
1 Schwarz 不等式 $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\ \|y\|$
等号成立$\Leftrightarrow x,y$线性相关
2 三角不等式 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$
3 平行四边形等式 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ 范数由某个内积诱导$\Leftrightarrow$上式恒成立
极化恒等式：

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

勾股定理（实内积空间）：$\Leftrightarrow x\perp y$

例：取 2 个序列代入平行四边形等式
$\left(\ell^p,\|\cdot\|_p\right)$的范数可由某内积诱导$\Leftrightarrow p=2$
$(\ell^2,\|\cdot\|_2)$Hilbert
$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$Hilbert

等距同构：T 一一映射，$\langle Tx_1, Tx_2\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X \Leftrightarrow \|Tx\|_Y = \|x\|_X$（极化恒等式）
完备化：内积X的完备化 Hilbert$\hat{X}$：线性$Y \subset \hat{X}, \overline{Y} = \hat{X}$，$Y$与$X$等距同构；完备化等距同构意义唯一

3.2 正交补、正交投影

$M^\perp = \{x \in X \mid x \perp M\}$是$X$闭线性子空间（内积连续性）
逼近：内积空间X，子集M非空完备凸，$\forall x_0 \in X$，存在唯一最佳逼近元 $\rho(x_0, M) = \inf_{y\in M} d(x_0, y) = d(x_0, y_0), \exists!\, y_0 \in M$
投影：XHilbert，子集M非空凸，$\forall x_0 \in X$，存在唯一$y_0 \in M$，$\rho(x_0, M) = \|x_0 - y_0\|$，此时$x_0 - y_0 \perp M$
（注：若M是 Hilbert$X$的非空闭子空间，则非空完备凸）

直和（在 2 个线性子空间唯一分解）：$X = M \oplus N \Leftrightarrow X = \operatorname{span}(M \cup N), M \cap N = \{0\}$
正交分解定理：H Hilbert，$M \subset H$ 闭子空间，则$H = M \oplus M^\perp$
正交投影$P_M: H \to M$：1 有界线性，$\|P_M\| \le 1$
2 $P_M^2 = P_M$ “投影”，对应幂等矩阵
3 $R(P_M) = M, N(P_M) = M^\perp$ “正交”，对应对称矩阵

正交补性质：
$(M^\perp)^\perp = M$ （H Hilbert，M闭子空间）
$(\operatorname{span} M)^\perp = M^\perp, \left(\overline{M}\right)^\perp = M^\perp$（$X$内积空间，$M$非空子集）

完全集：$\overline{\operatorname{span} M} = X$，在 Hilbert 中可用正交补刻画
H Hilbert，M非空子集，M在H完全$\Leftrightarrow M^\perp = \{0\}$，令$H$对$\overline{\operatorname{span} M}$正交分解即可，注意$M^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp, H^\perp = \{0\}$

3.3 标准正交集、标准正交基

正交集：两两正交
标准正交集：+ 模长为 1
标准正交序列：+ 至多可数
标准正交组：+ 有限集
标准正交基 / 完全标准正交集：$\overline{\operatorname{span} M} = H$

标准正交集的勾股定理：$\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$
推论：标准正交集M线性无关

Bessel 不等式 $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2$ （n可无穷）
x对$\operatorname{span} M$正交分解（但X不一定完备） + 勾股定理

Hilbert 空间标准正交序列M：
1 $\sum a_i e_i$在H中收敛$\Leftrightarrow \sum |a_i|^2 < \infty$
2 $\sum a_i e_i$在H中收敛到$x = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$，则$a_i = \langle x, e_i\rangle$
3 $\forall x \in H, \sum \langle x, e_i\rangle e_i$在$H$中收敛

1 柯西列等价
2 和e_i内积，内积连续
3 Bessel 不等式 + 1

至多可数性质：$M_x = \{e \in M \mid \langle x, e\rangle \ne 0\}$，考虑$M_{x,m} = \left\{e \in M \mid |\langle x, e\rangle| \ge \frac{1}{m}\right\}$，Bessel，$M_{x,m}$有限，$k \le m^2\|x\|^2$

完全标准正交集：$\|x\|^2 = \sum_{e\in M} \|\langle x, e\rangle\|^2$ Parseval 等式

Parseval 推完全：$\forall y \in \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp = M^\perp$，证明$y = 0$

Gram-Schmidt 正交化方法：由线性无关序列构造标准正交序列
Hilbert 空间标准正交基存在定理（Zorn 引理，可分情形可构造，对可数稠密子集取线性无关子列 GS 正交化）

3.4 Hilbert 空间有界线性泛函的表示

Riesz 表示定理：$\forall f \in H', \exists!\, y_0 \in H, f(x) = \langle x, y_0\rangle$
固定 $z_0 \in \left(N(f)\right)^\perp$，$v = f(x) z_0 - f(z_0) x \in N(f), y_0 = \frac{\overline{f(z_0)} z_0}{\|z_0\|^2}$

共轭双线性泛函：关于第一个变量线性，关于第二个变量共轭线性（提出常数有共轭）（例：内积）
有界共轭双线性泛函：$\|h\| = \sup_{x,y\ne 0} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|}$

引理：内积空间元素范数 $\|x_0\| = \max_{x\ne 0} \frac{|\langle x_0, x\rangle|}{\|x\|}$
Cauchy-Schwarz 证$\sup RHS \le \|x_0\|$，再取特殊值

推论：$T \in B(H_1, H_2), h(x, y) = \langle Tx, y\rangle$，则$\|h\| = \|T\|$

Hilbert 空间有界共轭双线性泛函 Riesz 表示定理：
$\forall$有界 $h: H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$,
$\exists!\, T \in B(H_1, H_2), h(x, y) = \langle Tx, y\rangle_2, \|h\| = \|T\|$
固定 $x \in H_1, \phi: H_2 \to \mathbb{R}: y \to \overline{h(x, y)}$，用 Riesz 定义 $T: \phi(y) = \langle y, Tx\rangle, h(x, y) = \langle Tx, y\rangle$，证明$T$线性、有界、唯一

Hilbert 空间有界线性算子的伴随算子（共轭转置矩阵）
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle, \qquad \|T^*\| = \|T\| = \|h\|$$

*运算性质类似共轭转置

Hilbert 空间之间的等距同构：$T^*T = TT^* = I$（酉算子）

4 赋范空间中的基本定理

4.1 Hahn-Banach 定理（7 个）

次线性泛函：$p(x+y) \le p(x) + p(y), (a \ge 0)\ p(ax) = a(px)$

复线性空间线性泛函由实部唯一确定：$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i}f_2(x) = f_1(x) - \mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x), f \in X^*, f_1, f_2 \in X^*_{\mathbb{R}}$

半范数：非负、齐次、三角不等式（没有非退化）（半范数满足次线性）

Hahn-Banach 定理（实线性空间）：X实线性空间，p为X上次线性泛函，$Z \subset X$线性子空间，$f \in Z^*$线性泛函，$f(x) \le p(x)$，则$\exists g \in X^*, g|_Z = f, g(x) \le p(x)$

（也可不考虑$f(x) \le p(x)$）

Hahn-Banach 定理（一般线性空间）：X（实/复）线性空间，p为X上半范数，$Z \subset X$线性子空间，$f \in Z^*$线性泛函，$|f(x)| \le p(x)$，则$\exists g \in X^*, g|_Z = f, |g(x)| \le p(x)$

Hahn-Banach 定理（赋范空间有界线性泛函保范延拓）：X赋范空间，$Z \subset X$线性子空间，$f \in Z'$，则$\exists g \in X', g|_Z = f, \|g\| = \|f\|$

Hilbert 空间X，$Z \subset X$闭线性子空间，上述保范延拓唯一（Riesz 表示定理+勾股定理）

Hahn-Banach 定理（赋范空间支撑泛函）：X赋范空间，$x_0 \in X, x_0 \ne 0$，则$\exists f \in X', \|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$

考虑$Z = \mathbb{R}x_0$ or $\mathbb{C}x_0$，在其上取支撑泛函$h(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$，再保范延拓

推论：X非 0 赋范空间，则$X' \ne \{0\}$

可以用X'中的元素分离X中的元素

Hahn-Banach 定理（赋范空间 0 元素判据）：

$$x_0 \in X, \quad x_0 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X', f(x_0) = 0$$

Hahn-Banach 定理（赋范空间元素范数）：

$$\|x_0\| = \max_{f \in X', f \ne 0} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \max_{f \in X', \|f\| \le 1} |f(x_0)|$$

用范数定义证$\sup RHS \le \|x_0\|$，再取支撑泛函

应用：赋范线性空间有界线性算子的共轭算子

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

$$T^*: Y' \to X', \qquad f \to f \circ T, \qquad T^*(f)(x) = f(Tx)$$

性质：$\|T^*\| = \|T\|$，转置矩阵

与 Hilbert 空间有界线性算子的伴随算子区别：

伴随：$T^* \in B(H_2, H_1)$，共轭：$T^* \in B(H_2', H_1')$

典范映射：

$$J: X \to X'', \qquad x \to g_x, \qquad g_x(f) = f(x)$$

性质：保范 $\|g_x\| = \|J(x)\| = \|x\|$（范数定义+支撑泛函）

单射：若$x \ne y, \exists f \in X', f(x) \ne f(y)$，所以$g_x(f) \ne g_y(f), J(x) \ne J(y)$；另证：$N(J) = \{0\}$（保范立证）

若J满射，称X自反空间，X, X''等距同构，推论：XBanach

$$\forall F \in X'', \exists x \in X, \forall f \in X', F(f) = f(x)$$

例：

Hilbert 空间自反

$\ell^p (1 < p < \infty)$自反：

$$\forall y \in \ell^q = (\ell^p)', \qquad \phi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i \ (x \in \ell^p)$$

$$\phi: \ell^q \to (\ell^p)' \text{ 等距同构/满}$$

$$\forall F \in (\ell^p)'', F \circ \phi = (\ell^q)',$$

$$\exists ! x \in \ell^p, F(\phi(y)) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i = \phi(y)(x)$$

有限维赋范空间自反（回忆$X' = X^*$，X^*对偶基ϕ_i）

$$\dim X = \dim X' = \dim X'' = n, \qquad J: X \to X'' \text{ 满}$$

c_0不自反：c_0可分，$c_0'' = {\ell^1}' = \ell^\infty$不可分

Hahn-Banach 定理（赋范空间闭子空间外点支撑泛函）：X赋范空间，$Y \subset X$闭线性真子空间，$x_0 \in Y^c, \delta = \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$，则 $\exists f \in X', \|f\| = 1, f|_Y = 0, f(x_0) = \delta$（若$Y = \emptyset$，即为左边的情形）

推论：X赋范，X'可分，则X可分

（取X'单位球面，其可分，取可数稠密子集，找$x_n \in X, \|x_n\| = 1, f(x_n) \ge \frac{1}{2}$，然后证明$X = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$，再证明$\overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$可分）

用途：证明$C[a,b]', \ell^1, \ell^\infty$不自反

4.2 一致有界性原理

无处稠密：$\overline{M}$无内点

第一范畴子集：可表示成可数个无处稠密子集的并集

第二范畴子集：不可

例：$X = \mathbb{R}$，有限集无处稠密，至多可数集第一范畴

Baire 范畴定理：(X, d)非空完备度量空间，X作为X子集是第二范畴的（反证，构造一系列开球）

Banach-Steinhauss 定理（一致有界性原理）X Banach，Y赋范，$(T_i)_{i\in I}\subset B(X,Y)$，$I$为指标集（可数或不可数均可），若$\forall x\in X,\sup\limits_{i\in I}\|T_ix\|<\infty$，则$\sup\limits_{i\in I}\|T_i\|<\infty$

即：逐点有界→一致有界

已知$\forall x\in X,\exists C_x>0,\forall i\in I,\|T_ix\|\le C_x$

则$\exists C>0,\forall x\in X,\|x\|\le 1,\forall i\in I,\|T_ix\|\le C$

逆否命题：若$\sup\limits_{i\in I}\|T_i\|=\infty$，则可找到与$T_i$无关的共鸣点$x,\sup\limits_{i\in I}\|T_ix\|=\infty$

4.3 强收敛、弱收敛

赋范空间：强收敛 $\|x_n-x\|\to 0$，弱收敛 $\forall x\in X',f(x_n)\to f(x)$

弱收敛性质：弱极限唯一（Hahn-Banach），收敛列的子列也收敛到相同的弱极限，收敛列有界（典范映射+一致有界性原理）固定$f\in X'$，点点有界

$$J(x_n)(f)=f(x_n)\to f(x),\qquad \sup|J(x_n)(f)|<\infty$$
$$\sup\|J(x_n)\|=\sup\|x_n\|<\infty$$

强收敛→弱收敛，有限维赋范空间二者等价（取 Hamel 基、对偶基，则弱收敛就是依坐标收敛）

强收敛但不弱收敛：无穷维 Hilbert 空间，Bessel 不等式，知$\forall x\in H,\langle e_n,x\rangle\to 0$（收敛级数尾巴），Riesz，$e_n\xrightarrow{w}0$，但$\|e_n\|=1$

弱收敛刻画：（注：X'总为 Banach）弱收敛⟺有界，且在$\forall f\in M\subset X'$完全集上$f(x_n)\to f(x)$

用f_n逼近f，拆项3ε法

例：考虑$x\in\ell^p(1<p<\infty)$，由于$M=\{e_n\}$是ℓ^q的完全集（用 span 逼近前面有限个元素，后面用收敛级数尾巴控制），只需要考虑e_n定义的$\phi_n(y)=\sum e_{n,i}y_i=y_n$，所以：$x_n\xrightarrow{w}x\Leftrightarrow x_n$ 有界，且x_n依坐标收敛到x

---

有界线性算子$T_n\in B(X,Y)$的收敛性（T线性）：

一致收敛 $\|T_n-T\|\to 0$ （极限仍是有界线性）

强收敛 $\forall x\in X,T_nx\to Tx$ （极限未必有界）

弱收敛 $\forall x\in X,f\in Y',f(T_nx)\to f(Tx)$

弱收敛但不强收敛：

$$T_n:\ell^2\to\ell^2,\qquad (x_1,x_2,\cdots)\to(0,0,\cdots 0,x_1,x_2,\cdots)$$

弱收敛至 0：Hilbert Riesz 收敛级数尾巴

一致收敛但不强收敛：

$$T_n:\ell^2\to\ell^2,\qquad (x_1,x_2,\cdots)\to(0,0,\cdots 0,x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$$

强收敛至 0：收敛级数尾巴，但$\|T_n\|=1$

想要算子极限有界：完备化X：X Banach，Y赋范，$T_n\in B(X,Y)$，T线性，T_n弱收敛到T，则

$$\sup\|T_n\|<\infty,\qquad T\in B(X,Y),\qquad \|T\|\le\sup\|T_n\|$$

（典范映射+两次一致有界性原理，或由$Tx_n\xrightarrow{w}Tx$得T_nx点点有界，用一次一致有界性原理）

（用 Hahn-Banach 计算$\|Tx\|$，得到$\|T\|$）

算子强收敛刻画：X Banach，算子强收敛⟺有界，且在$\forall x\in M\subset X$完全集上$T_nx\to Tx$

对偶空间：弱星收敛 $f_n\xrightarrow{w^*}f:\forall x\in X,f_n(x)\to f(x)$

（泛函弱星收敛定义即为算子强收敛定义）

性质：弱星极限唯一，收敛子列均弱星收敛到相同极限，若X Banach 则$\{f_n\}$在X'有界（一致有界性原理）

弱星收敛刻画：X Banach，泛函弱星收敛⟺有界，且在$\forall x\in M\subset X$完全集上$f_n(x)\to f(x)$

4.4 开映射定理、闭图像定理

开映射：度量空间，将开集映到开集

开映射定理：X,Y Banach，$T\in B(X,Y)$满射，则T为开映射；特别地，若T一一映射，则$T^{-1}\in B(X,Y)$

逆算子定理理解：T有界即$\|Tx\|\le C_1\|x\|$，推出T^{-1}有界即$\|x\|\le C_2\|Tx\|$，得到相反的不等式

推论：Banach 空间，范数互相控制（考虑恒等映射）

笛卡尔乘积上的范数：$\|(x,y)\|=\|x\|_X+\|y\|_Y$

若X,Y Banach，则$Z=X\times Y$ Banach

闭算子：X,Y赋范，$D(T)\subset X$线性子空间，$T:D(T)\to Y$线性，图像$G_T=\{(x,Tx)\in X\times Y\mid x\in D(T)\}$闭

证明闭算子：（$D(T)=X$）假设$(x_n,Tx_n)\to(x,y)\in X\times Y$，证明$y=Tx$（$Tx_n\to y$已知）

例：

$D(T)=X,T\in B(X,Y)$，则T闭算子（范数连续+T连续）

闭图像定理：X,Y Banach，$D(T)\subset X$闭线性子空间，$T:D(T)\to Y$线性算子、闭算子，则T有界

总结：全空间定义，有界→闭；

（Banach）闭空间定义，闭→有界；

（Banach）全空间定义，闭↔有界