题目 1. $x(t),y(t)\in\mathcal{C}[a,b]$, $1\le p<+\infty$, $d_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$, $d_\infty(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$.

求证：$\lim\limits_{p\to+\infty}d_p(x,y)=d_\infty(x,y)$.

证明. 若 $d_\infty(x,y)=0$，则 $\forall t\in[a,b]$, $x(t)\equiv y(t)$，有 $\forall p\ge 1$, $d_p(x,y)=0$，$\lim\limits_{p\to+\infty}d_p(x,y)=d_\infty(x,y)=0$.

否则，$d_\infty(x,y)>0$. 记 $\overline{d}_p(x,y)=\frac{d_p(x,y)}{d_\infty(x,y)}$. 欲证 $\lim\limits_{p\to+\infty}d_p(x,y)=d_\infty(x,y)$，即需证

$$\lim_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)=\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b\left(\frac{|x(t)-y(t)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}\right)^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

记 $t_0\in[a,b]$ 为 $|x(t)-y(t)|$ 的一个最大值点. 由 $\frac{|x(t_0)-y(t_0)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}=1$ 且 $\frac{|x(t)-y(t)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}\in\mathcal{C}[a,b]$，知 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[a,b]$, $1-\varepsilon\le\frac{|x(t)-y(t)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}\le 1$.

所以 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\forall p\ge1$，有

$$\delta(\varepsilon)(1-\varepsilon)^p\le\int\limits_{[t_0-\delta,t_0+\delta]\bigcap[a,b]}\left(\frac{|x(t)-y(t)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}\right)^p\mathrm{d}t\le\int_a^b\left(\frac{|x(t)-y(t)|}{\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|}\right)^p\mathrm{d}t\le b-a$$

$$\delta(\varepsilon)^{\frac{1}{p}}(1-\varepsilon)\le\overline{d}_p(x,y)\le(b-a)^{\frac{1}{p}}$$

两边对 $p\to+\infty$ 分别取上、下极限，得

$$\forall\varepsilon\in(0,1),\ 1-\varepsilon\le\varliminf_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)\le\varlimsup_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)\le1$$

再令 $\varepsilon\to0^+$ 夹逼得 $\varliminf\limits_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)=\varlimsup\limits_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)=1$，知 $\lim\limits_{p\to+\infty}\overline{d}_p(x,y)=1$，从而 $\lim\limits_{p\to+\infty}d_p(x,y)=d_\infty(x,y)$. □

题目 2. 求证: $d_1(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ 定义了 $\mathbb{R}$ 上的度量. $d_2(x,y)=(x-y)^2$ 能定义 $\mathbb{R}$ 上的度量吗? 证明你的结论.

证明. 先证明：$d_1(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ 定义了 $\mathbb{R}$ 上的度量. 非负性、非退化性、对称性显然，只

需证三角不等式：

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$$

只需证 $|x-y| \leq (\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2 = |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|}$，由绝对值不等式 $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$，知其显然成立.

再证明：$d_2(x,y) = (x-y)^2$ 不能定义 $\mathbb{R}$ 上的度量. 令 $x=0,\ y=2,\ z=1$，有 $(x-y)^2 = 4,\ (x-z)^2 + (z-y)^2 = 2$ ，三角不等式不成立. □

题目 3. 度量空间 (X,d)，$M \subseteq X,\ M \neq \varnothing.\ \forall x \in X,\ f(x) = \inf\limits_{y \in M} d(x,y)$. 求证：$\forall r > 0,\ \{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ 为闭集.

证明. 记 d_0 是通常度量，$d_0(x,y) = |x-y|$. 因为 $\forall x, x_1 \in X,\ \forall y \in M$,

$$d(x,y) - d(x_1,x) \leq d(x_1,y) \leq d(x,y) + d(x_1,x)$$

两边取 $\inf\limits_{y \in M}$，得 $f(x) - d(x_1,x) \leq f(x_1) \leq f(x) + d(x_1,x)$，即 $d_0(f(x_1), f(x)) \leq d(x_1,x)$.

所以 $f(x)$ 是 $(X,d) \to (\mathbb{R}, d_0)$ 的 Lipschitz 映射，自然连续. $\forall r > 0$，因为 $(-\infty, r]$ 为 $\mathbb{R}$ 的闭集，知 $f^{-1}((-\infty, r]) = \{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ 是 X 的闭集. □

题目 1. **习题 1.9.** 设 (X,d) 为度量空间，A,B 为 X 的子集. 求证：

(1) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

(2) $\overline{A\bigcap B}\subseteq\overline{A}\bigcap\overline{B}$.

(3) $(A\bigcap B)^\circ=A^\circ\bigcap B^\circ$.

(4) $A^\circ\bigcup B^\circ\subseteq(A\bigcup B)^\circ$.

举例说明 (2)(4) 包含关系严格.

证明. 引理：

- $A\subseteq B\Rightarrow\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

  证明：如果 $\overline{A}=\varnothing$ 则显然，否则 $\forall x\in\overline{A}$，满足 $\forall r>0$, $A\bigcap B(x,r)\neq\varnothing$. 由 $A\bigcap B(x,r)\subseteq B\bigcap B(x,r)$ 知 $B\bigcap B(x,r)\neq\varnothing$，从而 $x\in\overline{B}$，所以 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

- $(A^\circ)^C=\overline{A^C}$.

  证明：由德・摩根律，$(A^\circ)^C=(A\bigcap(\partial A)^C)^C=A^C\bigcup\partial A=A^C\bigcup\partial(A^C)=\overline{A^C}$.

- $A\subseteq B\Rightarrow B^C\subseteq A^C$.

  证明：$\forall x\in B^C$, $x\notin B$，由 $A\subseteq B$ 知 $x\notin A$，即 $x\in A^C$，所以 $B^C\subseteq A^C$.

(1) 先证明 $\overline{A\bigcup B}\subseteq\overline{A}\bigcup\overline{B}$. 由 $A\subseteq\overline{A}$, $B\subseteq\overline{B}$，得 $A\bigcup B\subseteq\overline{A}\bigcup\overline{B}$. 两边取闭包，由于 $\overline{A}\bigcup\overline{B}$ 是闭集，得 $\overline{A\bigcup B}\subseteq\overline{\overline{A}\bigcup\overline{B}}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

   再证明 $\overline{A\bigcup B}\supseteq\overline{A}\bigcup\overline{B}$. 由 $A\subseteq A\bigcup B$, $B\subseteq A\bigcup B$，两边取闭包，得 $\overline{A}\subseteq\overline{A\bigcup B}$, $\overline{B}\subseteq\overline{A\bigcup B}$，从而 $\overline{A}\bigcup\overline{B}\subseteq\overline{A\bigcup B}$.

(2) 由 $A\subseteq\overline{A}$, $B\subseteq\overline{B}$，得 $A\bigcap B\subseteq\overline{A}\bigcap\overline{B}$. 两边取闭包，由于 $\overline{A}\bigcap\overline{B}$ 是闭集，得 $\overline{A\bigcap B}\subseteq\overline{\overline{A}\bigcap\overline{B}}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$.

   考虑 $\mathbb{R}$，取 $A=(-1,0)$, $B=(0,1)$，则 $\overline{A\bigcap B}=\overline{\varnothing}=\varnothing$, $\overline{A}\bigcap\overline{B}=[-1,0]\bigcap[0,1]=\{0\}$.

(3) $((A\bigcap B)^\circ)^C=\overline{(A\bigcap B)^C}=\overline{A^C\bigcup B^C}$.

   由 $A^\circ\bigcap B^\circ$ 是开集，$\overline{A^C}\bigcup\overline{B^C}$ 是闭集，得 $(A^\circ\bigcap B^\circ)^C=((A^\circ\bigcap B^\circ)^\circ)^C=\overline{(A^\circ\bigcap B^\circ)^C}=\overline{(A^\circ)^C\bigcup(B^\circ)^C}=\overline{\overline{A^C}\bigcup\overline{B^C}}=\overline{A^C}\bigcup\overline{B^C}$.

由 (1) 结论，$\overline{A^C\bigcup B^C}=\overline{A^C}\bigcup\overline{B^C}$，所以 $((A\bigcap B)^\circ)^C=(A^\circ\bigcap B^\circ)^C$，两边取补集，证毕.

(4) 由 $A^\circ\bigcup B^\circ$ 是开集，$\overline{A^C}\bigcap\overline{B^C}$ 是闭集，得 $(A^\circ\bigcup B^\circ)^C=((A^\circ\bigcup B^\circ)^\circ)^C=\overline{(A^\circ\bigcup B^\circ)^C}=\overline{(A^\circ)^C\bigcap(B^\circ)^C}=\overline{\overline{A^C}\bigcap\overline{B^C}}=\overline{A^C}\bigcap\overline{B^C}$.

$((A\bigcup B)^\circ)^C=\overline{(A\bigcup B)^C}=\overline{A^C\bigcap B^C}$.

由 (2) 结论，$\overline{A^C\bigcap B^C}\subseteq\overline{A^C}\bigcap\overline{B^C}$，所以 $((A\bigcup B)^\circ)^C\subseteq(A^\circ\bigcup B^\circ)^C$，两边取补集，包含关系反向，证毕.

考虑 $\mathbb{R}$，取 $A=[-1,0],\ B=[0,1]$，则 $A^\circ\bigcup B^\circ=(-1,0)\bigcup(0,1),\ (A\bigcup B)^\circ=[-1,1]^\circ=(-1,1)$. □

题目 2. $S=\{(x_n)_{n\geq1}:\ x_n\in\mathbb{R}\}$. $d((x_n)_{n\geq1},(y_n)_{n\geq1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$. 求证：$S$ 可分.

证明. 取 $M=\{(y_n)_{n\geq1}:y_n\in\mathbb{Q},\ \exists N\geq1,\ \forall n\geq N+1,\ y_n=0\}$，显然 $M\subseteq S$，下证 $\overline{M}=S$，即证 $S\subseteq\overline{M}$.

$\forall(x_n)_{n\geq1}\in S,\ \forall r\in(0,2)$，取 $\delta=\frac{r}{2-r}>0$，取 $N=[1-\log_2 r]+1\geq\max(1-\log_2 r,1)$.

取 $(y_n)_{n\geq1}\in M$ s.t. $\forall n=1,2,\cdots,N,\ |x_n-y_n|<\delta$ 且 $\forall n\geq N+1,\ y_n=0$（由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，知可以取出这样的 $(y_n)_{n\geq1}$）.

由于 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 严格单调递增，得 $\forall n=1,2,\cdots,N,\ \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}<\frac{\delta}{1+\delta}=\frac{r}{2}$.

$$
\begin{aligned}
d((x_n)_{n\geq1},(y_n)_{n\geq1})&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\\
&<\frac{r}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\
&<\frac{r}{2}+\frac{1}{2^N}\\
&<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\\
&=r
\end{aligned}
$$

即 $S \subseteq \overline{M}$. 下证 M 可数. 记 $M_i = \{(y_n)_{n\geq 1} : y_n \in \mathbb{Q},\ \forall k \geq i+1,\ y_k = 0\}$. 则 M_i 与 $\mathbb{Q}^i$ 等势，从而可数. 所以 $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ 可数.

综上，S 可分. $\square$

题目 1. **习题 1.11.** 在 $C[0,1]$ 上赋予度量 d_∞，考虑集合 $M=\{x\in C[0,1]:\ x(0)=1\}$. 求证：$M$ 为闭集. 若在 $C[0,1]$ 上赋予度量 d_1，M 还是闭集吗？证明你的结论.

证明. $\forall\{x_n\}\subseteq M$，如果 $x_n\to x\in C[0,1]\ (n\to+\infty)$，下证 $x\in M$，即证 $x(0)=1$. 假设 $x(0)\neq 1$，则 $\exists\varepsilon_0=|x(0)-1|>0,\ \forall N\in\mathbb{N}^+,\ \exists n=N+1>N,\ d_\infty(x_n-x)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x_{N+1}(t)-x(t)|\ge|x_{N+1}(0)-x(0)|=|x(0)-1|\ge\varepsilon$，与 $x_n\to x\ (n\to+\infty)$ 矛盾. 所以 $x\in M$. 从而 M 是闭集.

若在 $C[0,1]$ 上赋予度量 d_1，M 不是闭集. 设 $x_n(t)=\max\{0,1-nt\}\ (n=1,2,\cdots)$, $x(t)=0\ (t\in[0,1])$，则 $\{x_n\}\subseteq M$. 由于 $d_1(x_n,x)=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{n}}(1-nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}\to 0\ (n\to+\infty)$，知 $x_n\to x\in C[0,1]\ (n\to+\infty)$，但 $x\notin M$. 从而 M 不是闭集. □

题目 2. $S=\{(x_n)_{n\ge1}:\ x_n\in\mathbb{K}\}$, $d((x_n)_{n\ge1},(y_n)_{n\ge1})=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$，求证：$(S,d)$ 是完备的.

证明. 设 $x^{(m)}=\left(x_n^{(m)}\right)_{n\ge1}\ (m=1,2,\cdots)$ 是柯西列，即 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall p,q\ge N, d\left(x^{(p)},x^{(q)}\right)<\varepsilon$. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}{1+\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}<\varepsilon \tag{1}$$

特别地，$\forall n\in\mathbb{N}^+$, $\frac{1}{2^n}\frac{\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}{1+\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}<\varepsilon$. 即 $\forall n\in\mathbb{N}^+,\ \forall\varepsilon\in(0,2^{-n}),\ \exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall p,q\ge N,\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|<\frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}$. 由于 $\inf\limits_{\varepsilon\in(0,2^{-n})}\frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}=0$，知 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$x_n^{(m)}\ (m=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的柯西列. 记 $x_n^{(m)}\to x_n^{(\infty)}\in\mathbb{K}\ (m\to\infty)$，显然 $x^{(\infty)}=\left(x_n^{(\infty)}\right)_{n\ge1}\in S$.

由式 (1) 得，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall p,q\ge N,\ \forall l\ge 1$,

$$\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{2^n}\frac{\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}{1+\left|x_n^{(p)}-x_n^{(q)}\right|}<\varepsilon \tag{2}$$

在式 (2) 中 $\forall p\ge N$，令 $q\to\infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{2^n}\frac{\left|x_n^{(p)}-x_n^{(\infty)}\right|}{1+\left|x_n^{(p)}-x_n^{(\infty)}\right|}\le\varepsilon$$

再令 $l \to \infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\left|x_n^{(p)} - x_n^{(\infty)}\right|}{1 + \left|x_n^{(p)} - x_n^{(\infty)}\right|} \le \varepsilon$$

即 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall p \ge N,\ d(x^{(p)}, x^{(\infty)}) \le \varepsilon$，即 $x^{(m)} \to x^{(\infty)} \in S\ (m \to \infty)$.

从而 (S, d) 是完备的. □

题目 2 的注记. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ 的定义：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $\forall n > N,\ |a_n - A| < \varepsilon$.

命题 1：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $\forall n > N,\ |a_n - A| < f(\varepsilon)\ (\forall \varepsilon > 0,\ f(\varepsilon) > 0)$.

定义 $\Longrightarrow$ 命题 1： $\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon_1 > 0$ s.t. $\varepsilon_1 < f(\varepsilon)$，则定义 $\Longrightarrow$ 命题 1.

由于 $\forall \varepsilon > 0,\ f(\varepsilon) > 0$，知这样的 ε_1 一定存在（如 $\varepsilon_1 = f(\varepsilon)/2$），故定义 $\Longrightarrow$ 命题 1 恒成立.

命题 1 $\Longrightarrow$ 定义： 若 0 是 $f(\varepsilon)\ (\varepsilon > 0)$ 值域的聚点/下确界，则命题 1 $\Longrightarrow$ 定义，否则有反例.

即 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varepsilon_1 > 0$ s.t. $f(\varepsilon_1) < \varepsilon$. 以下给出证明：由于命题 1 成立，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varepsilon_1 > 0$ s.t. $f(\varepsilon_1) < \varepsilon$. 对 $\varepsilon_1 > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $\forall n > N,\ |a_n - A| < f(\varepsilon_1) < \varepsilon$. 即定义成立.

题目 1.　习题 1.36. 设 $v \in C[0,1]$ 固定，求证：$\exists! x \in C[0,1]$ s.t. $x(t) = \frac{1}{3}\cos(x(t)) + v(t),\ 0 \leq t \leq 1$.

证明.　设 $v \in C[0,1]$ 固定，定义映射 $T: C[0,1] \to C[0,1]$ 为 $Tx = \frac{1}{3}\cos x + v$. 对于非空完备度量空间 $(C[0,1], d_\infty)$，$\forall x, y \in C[0,1],\ d_\infty(Tx, Ty) = \frac{1}{3}\max\limits_{0\leq t\leq 1}|\cos(x(t)) - \cos(y(t))| \leq \frac{1}{3}\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x(t) - y(t)| = \frac{1}{3}d_\infty(x, y)$，即 T 是压缩映射，根据 Banach 不动点定理，$\exists! x \in C[0,1]$ s.t. $Tx = x$，即 $x(t) = \frac{1}{3}\cos(x(t)) + v(t),\ 0 \leq t \leq 1$. □

题目 2.　习题 1.37. 举例说明 Banach 不动点定理中度量空间 X 的完备性假设是必要条件.

解.　假设 Banach 不动点定理中度量空间的完备性假设不满足. 举例：讨论 $(\mathbb{R}^+, d)$，其中 $d(x,y) = |x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ 是通常度量. $(\mathbb{R}^+, d)$ 不是完备度量空间（因为 $\mathbb{R}^+$ 不是闭集）. 定义映射 $T: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为 $Tx = \frac{1}{2}x$. 由于 $d(Tx, Ty) = \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x,y)$，知 T 为压缩映射，但是 $\nexists x \in \mathbb{R}^+$ s.t. $Tx = \frac{1}{2}x = x$，Banach 不动点定理不成立.

题目 3.　习题 1.38. 设 $c > 0$ 固定，取定 $x_0 > \sqrt{c}$，对于 $n \geq 0$，令 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}),\ n = 0, 1, 2, \cdots$，求证 $x_n \to \sqrt{c}$. 取 $c = 2,\ x_0 = 2$，求 x_1, x_2, x_3, x_4，并给出 $|x_n - \sqrt{2}|$ 的一个上界.

证明.　考虑 (A, d)，其中 $A = [\sqrt{c}, +\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集，$d(x,y) = |x-y|,\ \forall x, y \in A$ 是通常度量，则 (A, d) 是非空完备度量空间. 定义映射 $T: A \to A$ 为 $Tx = \frac{1}{2}(x + \frac{c}{x})$. 由于 $\forall x, y \in A,\ 0 \leq \frac{c}{xy} \leq 1$，知 $d(Tx, Ty) = \frac{1}{2}|x - y + \frac{c}{x} - \frac{c}{y}| = \frac{|x-y|}{2}|1 - \frac{c}{xy}| \leq \frac{|x-y|}{2} = \frac{1}{2}d(x,y)$，所以 T 为压缩映射. 根据 Banach 不动点定理，$\exists! x \in A$ s.t. $Tx = x$，而 $T\sqrt{c} = \sqrt{c}$，知其即为唯一不动点.

$\forall n \geq 0$，由于 $x_{n+1} = Tx_n$，知 $d(x_n, \sqrt{c}) = d(Tx_{n-1}, T\sqrt{c}) \leq \frac{1}{2}d(x_{n-1}, \sqrt{c}) \leq \frac{1}{2^2}d(x_{n-2}, \sqrt{c}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}d(x_0, \sqrt{c}) \to 0\ (n \to \infty)$，所以 $x_n \to \sqrt{c}\ (n \to \infty)$.

取 $c = 2,\ x_0 = 2$，则 $x_1 = Tx_0 = \frac{3}{2} = 1.5,\ x_2 = Tx_1 = \frac{17}{12} \approx 1.416667,\ x_3 = Tx_2 = \frac{577}{408} \approx 1.414216,\ x_4 = Tx_3 = \frac{665857}{470832} \approx 1.414213562$.（注意：$\sqrt{2} \approx 1.414213562$）

$\forall n \geq 0,\ |x_n - \sqrt{2}| = d(x_n, \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2^n}d(x_0, \sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2^n}$，即 $|x_n - \sqrt{2}|$ 的一个上界为 $\frac{2-\sqrt{2}}{2^n}$. □

题目 1. 设 $X = C[0,2\pi]$，$f_n(t) = \cos(nt)$ $(n \geq 0)$，$g_n(t) = \sin(nt)$ $(n \geq 1)$，求证：$\{f_n : n \geq 0\} \bigcup \{g_n : n \geq 1\}$ 是线性无关的.

证明. 只需证 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$f_0, f_1, \cdots, f_n, g_1, g_2, \cdots, g_n$ 线性无关.

设 $\exists c_0, c_2, \cdots, c_n, d_1, d_2, \cdots, d_n \in \mathbb{K}$ s.t.

$$\forall t \in [0,2\pi],\ c_0 f_0(t) + c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) + d_1 g_1(t) + d_2 g_2(t) + \cdots + d_n g_n(t) = 0$$

则

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\ & c_0 + c_1\cos(t) + c_2\cos(2t) + \cdots + c_n\cos(nt) \\ & + d_1\sin(t) + d_2\sin(2t) + \cdots + d_n\sin(nt) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

两边同时求二阶导，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\ & -c_1\cos(t) - 2^2 c_2\cos(2t) - \cdots - n^2 c_n\cos(nt) \\ & - d_1\sin(t) - 2^2 d_2\sin(2t) - \cdots - n^2 d_n\sin(nt) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

(1)+(2)，消去 $\cos(t), \sin(t)$，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\ & c_0 + (1-2^2)c_2\cos(2t) + \cdots + (1-n^2)c_n\cos(nt) \\ & + (1-2^2)d_2\sin(2t) + \cdots + (1-n^2)d_n\sin(nt) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

两边同时求二阶导，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\ & -2^2(1-2^2)c_2\cos(2t) - \cdots - n^2(1-n^2)c_n\cos(nt) \\ & - 2^2(1-2^2)d_2\sin(2t) - \cdots - n^2(1-n^2)d_n\sin(nt) = 0\end{aligned} \tag{4}$$

(3)+(4)$\times\frac{1}{2^2}$，消去 $\cos(2t), \sin(2t)$，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\ & c_0 + \left(1 - \frac{3^2}{2^2}\right)(1-3^2)c_3\cos(3t) + \cdots + \left(1 - \frac{n^2}{2^2}\right)(1-n^2)c_n\cos(nt) \\ & + \left(1 - \frac{3^2}{2^2}\right)(1-3^2)d_3\sin(3t) + \cdots + \left(1 - \frac{n^2}{2^2}\right)(1-n^2)d_n\sin(nt) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

重复上述过程，消去 $\cos(3t), \sin(3t), \cdots, \cos(nt), \sin(nt)$，有 $c_0 = 0$.

下证 $c_1 = d_1 = 0$. 将 $c_0 = 0$ 代回(1)，(1)+(2)$\times\frac{1}{2^2}$，消去 $\cos(2t), \sin(2t)$，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 2\pi],\ &\left(1-\frac{1}{2^2}\right)c_1\cos(t)+\left(1-\frac{3^2}{2^2}\right)c_3\cos(3t)+\cdots+\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)c_n\cos(nt)\\ &+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)d_1\sin(t)+\left(1-\frac{3^2}{2^2}\right)c_3\cos(3t)+\cdots+\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)d_n\sin(nt)=0\end{aligned}\tag{6}$$

两边同时求二阶导，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 2\pi],\ &-\left(1-\frac{1}{2^2}\right)c_1\cos(t)-3^2\left(1-\frac{3^2}{2^2}\right)c_3\cos(3t)-\cdots-n^2\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)c_n\cos(nt)\\ &-\left(1-\frac{1}{2^2}\right)d_1\sin(t)-3^2\left(1-\frac{3^2}{2^2}\right)c_3\cos(3t)-\cdots-n^2\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)d_n\sin(nt)=0\end{aligned}\tag{7}$$

(6)+(7)$\times\frac{1}{3^2}$，消去 $\cos(3t), \sin(3t)$，有

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 2\pi],\ &\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)c_1\cos(t)+\left(1-\frac{4^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{4^2}{2^2}\right)c_4\cos(4t)\\ &+\cdots+\left(1-\frac{n^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)c_n\cos(nt)\\ &+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)d_1\sin(t)+\left(1-\frac{4^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{4^2}{2^2}\right)d_4\sin(4t)\\ &+\cdots+\left(1-\frac{n^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)d_n\sin(nt)=0\end{aligned}\tag{8}$$

重复上述过程，消去 $\cos(4t), \sin(4t), \cdots, \cos(nt), \sin(nt)$，有

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)(c_1\cos(t)+d_1\sin(t))=0$$

即 $\forall t \in [0, 2\pi],\ c_1\cos(t)+d_1\sin(t)=0$. 令 $t=0$，有 $c_1=0$. 令 $t=\frac{\pi}{2}$，有 $d_1=0$.

将 $c_0=c_1=d_1=0$ 代回(1)、(2)，重复上述过程，有 $c_2=d_2=0$, $c_3=d_3=0$, $\cdots$, $c_n=d_n=0$. 所以 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $f_0, f_1, \cdots, f_n, g_1, g_2, \cdots, g_n$ 线性无关.

从 $\{f_n : n\ge 0\}\bigcup\{g_n : n\ge 1\}$ 中任取有限个元素，设为 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots, f_{n_k}, g_{m_1}, g_{m_2}, \cdots, g_{m_l}$. 记 $N=\max\{n_1, n_2, \cdots, n_k, m_1, m_2, \cdots, m_l\}$. 由于已证明 $f_0, f_1, \cdots, f_N, g_1, g_2, \cdots, g_N$ 线性无关，知其中的部分元素 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots, f_{n_k}, g_{m_1}, g_{m_2}, \cdots, g_{m_l}$ 线性无关. □

题目 1 的注记. 以上证明思路类似于课本例 2.1.3. 实际上，可以用其它更便捷的方法证明. 如课本例 3.1.5，在 $C[0, 2\pi]$ 上定义内积 $\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$，易证明 $\forall n \in$

$\mathbb{N}^+$, $f_0, f_1, \cdots, f_n, g_1, g_2, \cdots, g_n$ 两两正交，从而线性无关.

题目 2.

1. (X,d) 为度量空间，$\{x_n\}$ 为 X 中柯西列，有子列收敛到 x，则 $x_n \to x$.
2. $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间 $\iff$ $\forall x_n \in X,\ \|x_n\| < \frac{1}{2^n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 X 中收敛.

证明.

1. 若存在子列 $x_{n_k} \to x$，则 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall k > K,\ d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $\{x_n\}$ 为柯西列，知 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall m, n > N,\ d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $\exists k' > K$ s.t. $n_{k'} > N$，知 $\forall n > N,\ d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_{k'}}) + d(x_{n_{k'}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 所以 $x_n \to x\ (n \to \infty)$.

2. 设范数诱导出的度量 $d(x,y) = \|x - y\|$.

   若 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间：则 (X,d) 为完备度量空间. 设 $S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n \in X$，由于 $\forall p \in \mathbb{N}^+,\ d(S_k,\ S_{k+p}) = \|S_k - S_{k+p}\| = \|\sum_{n=k+1}^{k+p} x_n\| \le \sum_{n=k+1}^{k+p} \|x_n\| < \sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} \to 0\ (k \to \infty)$，知 $\{S_k\}$ 为完备度量空间 (X,d) 中的柯西列，从而收敛到 X 中的 $S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

   若 $\forall x_n \in X,\ \|x_n\| < \frac{1}{2^n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 X 中收敛：下证 (X,d) 为完备度量空间. 设 $\{y_n\}$ 为 X 中的柯西列，则 $\exists N_k \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall m, n > N_k,\ d(y_n, y_m) < \frac{1}{2^k}\ (k = 1, 2, \cdots)$. 取 $n_1 = N_1 + 1,\ n_k = \max\{n_{k-1}, N_k\} + 1\ (k = 2, 3, \cdots)$，则对于子列 $\{y_{n_k}\}$，有 $d(y_{n_{k+1}}, y_{n_k}) = \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$，且 $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \in X\ (k = 1, 2, \cdots)$. 从而 $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{n_{k+1}} - y_{n_k})$ 在 X 中收敛到 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} - y_{n_1}$. 由于 $y_{n_1} \in X$，知 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in X$. 由 1，$\{y_n\}$ 在 X 中收敛，从而 (X,d) 为完备度量空间. □

题目 1.　习题 1.31. 设 (X,d) 为度量空间，$M,N\subset X$ 为非空子集. 定义 M 和 N 的距离为

$$\rho(M,N)=\inf_{x\in M,y\in N}d(x,y).$$

求证：

(1) 若 $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的所有非空子集所构成的集合，ρ 一般不是 $\mathcal{P}(X)$ 上的度量；

(2) 若 M 为紧集，N 为闭集，则 $M\cap N=\varnothing$ 当且仅当 $\rho(M,N)>0$；

(3) 举例说明当 M 为有界闭集时 (2) 中的结论不成立；

(4) 若 M,N 均为紧集，存在 $x_0\in M$, $y_0\in N$，使得 $\rho(M,N)=d(x_0,y_0)$.

证明.

(1) 举反例如下：设 $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$. 设 $M_1=[0,1]$, $M_2=[1,2]$, $M_3=[2,3]$. 则 $M_1,M_2,M_3\in\mathcal{P}(X)$. $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_3)=0$，但 $\rho(M_1,M_3)=1$，三角不等式 $\rho(M_1,M_3)\le\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$ 不成立，故 ρ 不是 $\mathcal{P}(X)$ 上的度量.

(2) 证明两个逆否命题.

i. 若 $\rho(M,N)=0$，取 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}>0$, $\exists x_n\in M$, $y_n\in N$ s.t. $d(x_n,y_n)<\frac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 由 M 为紧集，知 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设其极限 $x\in M$.

法一： $\forall\varepsilon>0$, $\exists K_1\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall k>K_1, d(x,x_{n_k})<\frac{\epsilon}{2}$. 又 $\exists K_2\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall k>K_2$, $n_k>\max\{1,\lfloor\log_2\frac{2}{\epsilon}\rfloor+1\}$，从而 $d(x_{n_k},y_{n_k})<\frac{1}{2^{n_k}}<\frac{\epsilon}{2}$. 故 $\exists K=\max\{K_1,K_2\}$ s.t. $\forall k>K, d(x,y_{n_k})\le d(x,x_{n_k})+d(x_{n_k},y_{n_k})<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. 故 $y_{n_k}\to x$ $(k\to\infty)$. 由 N 为闭集，知 N 中的数列 y_{n_k} 的极限 $x\in N$，故 $x\in M\cap N$, $M\cap N\neq\varnothing$.

法二： 对 $0\le d(x_{n_k},y_{n_k})<\frac{1}{2^{n_k}}$ 令 $k\to\infty$，由课本定理 1.3.4（度量关于两变量连续）与夹逼定理，得 $\lim\limits_{k\to\infty}d(x,y_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}d(x_{n_k},y_{n_k})=0$. 以下同法一.

ii. 若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 $\exists x_0\in M\cap N$，故 $\rho(M,N)=0$.

(3) 举反例如下：设 $X=\mathbb{Q}$, $d(x,y)=|x-y|$. 设 $M=[0,\pi]\cap\mathbb{Q}$, $N=[\pi,2\pi]\cap\mathbb{Q}$. 则 M,N 均为 $\mathbb{Q}$ 的有界闭集，$M\cap N=\varnothing$，但 $\rho(M,N)=0$.

(4) 取 $\epsilon_n = \frac{1}{2^n} > 0$, $\exists x_n \in M$, $y_n \in N$ s.t. $\rho(M,N) \le d(x_n,y_n) < \rho(M,N) + \frac{1}{2^n}$ $(n = 1,2,\cdots)$. 由 M 为紧集，知 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 由 N 为紧集，知 $\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_{k_l}}\}$. $\{x_{n_{k_l}}\}$ 仍是 $\{x_n\}$ 的收敛子列. 设 $\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = x_0 \in M$, $\lim\limits_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = y_0 \in N$. 则对 $\rho(M,N) \le d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) < \rho(M,N) + \frac{1}{2^{n_{k_l}}}$ 令 $l \to \infty$，由课本定理 1.3.4（度量关于两变量连续）与夹逼定理，得 $d(x_0,y_0) = \lim\limits_{l\to\infty} d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = \rho(M,N)$. □

题目 2. 设 X,Y 为赋范空间，$T:\ X \to Y$ 为线性算子. 求证：$\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$.

证明. 由课本定理 2.4.1，只需证明 $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y$. 由于 $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\le1}} \|Tx\|_Y \ge \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$，只需证明 $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y \le \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$.

设数列 $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. $\forall x \in X$, $\|x\|_X = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$，由于 $a_n x \in X$, $\|a_n x\|_X = a_n\|x\|_X < 1$，得 $a_n\|Tx\|_Y = \|T(a_n x)\|_Y \le \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$, $\|Tx\|_Y \le \frac{1}{a_n} \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$. 令 $n \to \infty$，得 $\|Tx\|_Y \le \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$. 由 $x \in X$, $\|x\|_X = 1$ 的任意性，取上确界，得 $\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y \le \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X<1}} \|Tx\|_Y$. □

题目 1. 设 $X\neq\{0\}$ 为赋范空间，$f\in X'$, $f\neq 0$. $E=\{x\in X:\ f(x)=\|f\|\}$. 求证：

1. E 为非空凸闭集.
2. $\inf\limits_{x\in E}\|x\|=1$.

证明. 1. 先证明 $E\neq\varnothing$. 由于 $f\neq 0$，知 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)\neq 0$. 令 $x_1=\frac{x_0\|f\|}{f(x_0)}\in X$，则 $f(x_1)=\|f\|$，所以 $x_1\in E$, $E\neq\varnothing$.

再证明 E 为凸集. $\forall x_1,x_2\in E$, $\forall\lambda\in[0,1]$，有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=\lambda\|f\|+(1-\lambda)\|f\|=\|f\|$，故 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in E$，即 E 为凸集.

再证明 E 为闭集. 由于 f 有界，故连续. 单点集 $\{\|f\|\}$ 为 $\mathbb{K}$ 的闭集，故 $E=f^{-1}(\{\|f\|\})$ 为 X 的闭集.

2. $\forall x\in E$, $f(x)=\|f\|$. 取绝对值（模长），得 $\|f\|=|f(x)|\le\|f\|\cdot\|x\|$, $\|x\|\ge 1$，故 $\inf\limits_{x\in E}\|x\|\ge 1$. 由于 $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$，故 $\forall\varepsilon\in(0,\|f\|)$, $\exists x_0\in X$ s.t. $\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}>\|f\|-\varepsilon$. 显然 $f(x_0)\neq 0$，令 $x_1=\frac{x_0\|f\|}{f(x_0)}\in X$，则 $f(x_1)=\|f\|$, $x_1\in E$, $\|x_1\|=\frac{\|x_0\|\|f\|}{|f(x_0)|}<\frac{\|f\|}{\|f\|-\varepsilon}$. 综上，$\forall\varepsilon\in(0,\|f\|)$, $\exists x_1\in E$ s.t. $\|x_1\|<\frac{\|f\|}{\|f\|-\varepsilon}$，所以 $\inf\limits_{x\in E}\|x\|\le\|x_1\|<\frac{\|f\|}{\|f\|-\varepsilon}$. 令 $\varepsilon\to 0^+$，则 $\inf\limits_{x\in E}\|x\|\le 1$. 从而 $\inf\limits_{x\in E}\|x\|=1$. □

题目 2. $C[a,b]$（赋予 $\|\cdot\|_\infty$）上的线性泛函 f 称为正泛函，如果任取 $x\in C[a,b]$ 满足任取 $t\in[a,b]$, $x(t)\ge 0$，都有 $f(x)\ge 0$. 求证: f 为正线性泛函当且仅当 f 为连续线性泛函且 $\|f\|=f(1)$，此处 $1\in C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上恒为 1 的连续函数.

证明. 先证明 $\Longrightarrow$. 假设 f 是正线性泛函，取 $1\in C[a,b]$，有 $f(1)\ge 0$. 取 $0\in C[a,b]$，由于 $f(0)=f(0+0)=2f(0)$，知 $f(0)=0$. $\forall x\in C[a,b]$，由于 $\forall t\in[a,b]$, $x(t)\le\|x\|_\infty$，知如果 $x\neq 0$ ($\|x\|_\infty\neq 0$)，则 $1-\frac{x(t)}{\|x\|_\infty}\ge 0$，从而 $f(1-\frac{x(t)}{\|x\|_\infty})=f(1)-\frac{f(x)}{\|x\|_\infty}\ge 0$，即 $f(x)\le\|x\|_\infty f(1)$. 此式也对 $x=0$ 成立，从而对 $\forall x\in C[a,b]$ 成立. 利用 $-x(t)\le\|x\|_\infty$ 同理可得 $-\|x\|_\infty f(1)\le f(x)$，从而 $|f(x)|\le\|x\|_\infty|f(1)|=\|x\|_\infty f(1)$. 从而 f 有界（连续），且 $\|f\|=\sup\limits_{x\in C[a,b]}\frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty}\le f(1)$. 又由于 $f(1)=|f(1)|\le\|f\|\cdot\|1\|_\infty=\|f\|$，故 $\|f\|=f(1)$.

再证明 $\Longleftarrow$. 假设 f 是连续的且 $\|f\|=f(1)$，则 $f(1)=\|f\|\ge 0$. $\forall x\in C[a,b]$ 满足 $\forall t\in[a,b]$, $x(t)\ge 0$，若 $x=0$，易知 $f(x)=f(0)=0$. 以下讨论 $x\neq 0$. 记 $m=\min\limits_{t\in[a,b]}x(t)$, $M=\max\limits_{t\in[a,b]}x(t)=\|x\|_\infty>m\ge 0$，设 $y(t)=1-\frac{x(t)-m}{M-m}$，易知 $\min\limits_{t\in[a,b]}y(t)=0$, $\max\limits_{t\in[a,b]}y(t)=\|y\|_\infty=1$. 由于 $f(y)\le|f(y)|\le\|f\|\cdot\|y\|_\infty=f(1)$，得 $f(1-y)\ge 0$，即 $f(x)=f((M-m)(1-y)+m)=(M-m)f(1-y)+mf(1)\ge 0$. 所以 f 是正泛函. □

题目 2 的注记. $\Longleftarrow$ 证明思路：$\forall x \in C[a,b]$ 满足 $\forall t \in [a,b]$, $x(t) \geq 0$ 且 $x \neq 0$，直接逆推，可以得到 $f(1 - \frac{x(t)}{\|x\|_\infty}) \geq 0$. 注意到 $1 - \frac{x(t)}{\|x\|_\infty}$ 可取遍最小值为 0、最大值小于等于 1 的 $C[a,b]$ 中的函数，其乘以非负常数、加非负常数后可取遍 $C[a,b]$ 中的非负函数，从而完成证明.

题目 1. **习题 3.1.** 设 X 为实内积空间, $x, y \in X$. 求证: $x \perp y$ 当且仅当勾股定理对 x, y 成立, 即 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. 举例说明若 X 为复内积空间, 则上述结论一般不成立.

证明. 若 X 为实内积空间:

1. 先证明 $\Longrightarrow$. 若 $x \perp y$, 则 $\langle x, y\rangle = 0$, 从而
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. 再证明 $\Longleftarrow$. 若 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 则
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle (x+y) - y, (x+y) - x\rangle \\ &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x+y, x\rangle - \langle y, x+y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle \\ &= \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \langle y, x\rangle \\ &= -\langle y, x\rangle\end{aligned}$$
从而 $\langle x, y\rangle = 0$, 即 $x \perp y$.

若 X 为复内积空间, 则 $\langle x, y\rangle = -\langle y, x\rangle = -\overline{\langle x, y\rangle}$ 只能得到 $\Re\langle x, y\rangle = 0$, 从而 $\Longleftarrow$ 证明失效. 举例说明: 设 $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = x\overline{y}$, 易验证其是 X 上的内积. 取 $x = 1$, $y = \mathrm{i}$, 则 $\|x+y\|^2 = \|1+\mathrm{i}\|^2 = 2$, $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|1\|^2 + \|\mathrm{i}\|^2 = 2$, 但 $\langle x, y\rangle = -\mathrm{i} \neq 0$. □

题目 2. **习题 3.2.** 设 X 为内积空间, $x, y, z \in X$. 证明 Applonius 恒等式:
$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2$$

证明. 由内积的平行四边形等式, 得
$$\begin{aligned}2\left(\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2\right) &= \|(z-x) + (z-y)\|^2 + \|(z-x) - (z-y)\|^2 \\ &= \|2z - (x+y)\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &= 4\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2 + \|x-y\|^2\end{aligned}$$

从而

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$$

$\square$

题目 3. **习题 3.6.** 设 X 为内积空间, $x\in X$, $M\subset X$ 为非空子集, 且 $x\perp M$. 求证: $x\perp\overline{\mathrm{span}(M)}$.

证明. 先证明 $x\perp\mathrm{span}(M)$. $\forall y\in\mathrm{span}(M)$, $\exists\alpha_i\in M$, $c_i\in\mathbb{K}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ s.t. $y=\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$, 从而 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n\overline{c_i}\langle x,\alpha_i\rangle=0$, 即 $x\perp\mathrm{span}(M)$.

再证明 $x\perp\overline{\mathrm{span}(M)}$. $\forall y\in\overline{\mathrm{span}(M)}$, $\exists\{y_n\}\subset\mathrm{span}(M)$ s.t. $y_n\to y$. 由 $x\perp\mathrm{span}(M)$ 知 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $\langle x,y_n\rangle=0$. 由内积的连续性, $\langle x,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$, 从而 $\langle x,y\rangle=0$, 即 $x\perp\overline{\mathrm{span}(M)}$. $\square$

题目 4. **习题 3.7.** 设 X 为复内积空间, $T:X\to X$ 为线性算子, 且任取 $x\in X$, $\langle Tx,x\rangle=0$. 求证: $T=0$.

证明. $\forall x,y\in X$, $\forall c\in\mathbb{C}$, 令 $z=x+cy$, 则

$$\begin{aligned}\langle Tz,z\rangle&=\langle Tx+T(cy),x+cy\rangle=\langle Tx,x\rangle+\overline{c}\langle Tx,y\rangle+c\langle Ty,x\rangle+\langle T(cy),cy\rangle\\&=\overline{c}\langle Tx,y\rangle+c\langle Ty,x\rangle=0\end{aligned}$$

令 $c=1$ 得 $\langle Tx,y\rangle=-\langle Ty,x\rangle$. 令 $c=\mathrm{i}$ 得 $\langle Tx,y\rangle=\langle Ty,x\rangle$, 从而 $\langle Tx,y\rangle=0$.

代入 $y=Tx$, 得 $\langle Tx,Tx\rangle=0$, 从而 $Tx=0$. 由 x 的任意性知 $T=0$. $\square$

题目 1. 习题 3.12. 设 X 为内积空间, $M, N \subset X$ 为非空子集. 求证:

(1) 若 $M \subset N$, 则 $N^\perp \subset M^\perp$;

(2) 若 $M \perp N$, 则 $M \subset N^\perp$, $N \subset M^\perp$;

(3) $M^\perp \cap N^\perp \subset (M \cup N)^\perp$;

(4) $M^\perp \cup N^\perp \subset (M \cap N)^\perp$.

证明. (1) $\forall x \in N^\perp$, 有 $x \perp N$, 即 $\forall y \in N$, $\langle x, y\rangle = 0$. 所以 $\forall y \in M \subset N$, $\langle x, y\rangle = 0$, 即 $x \perp M$, 从而 $x \in M^\perp$.

(2) $\forall x \in M$, 由 $M \perp N$ 知 $x \perp N$, 从而 $x \in N^\perp$, $M \subset N^\perp$. 同理可证 $N \subset M^\perp$.

(3) $\forall x \in M^\perp \cap N^\perp$, 有 $x \perp M$ 且 $x \perp N$, 即 $\forall y \in M$, $\langle x, y\rangle = 0$ 且 $\forall y \in N$, $\langle x, y\rangle = 0$. 所以 $\forall y \in M \cup N$, $\langle x, y\rangle = 0$, 即 $x \perp (M \cup N)$, $x \in (M \cup N)^\perp$.

(4) $\forall x \in M^\perp \cup N^\perp$, 有 $x \perp M$ 或 $x \perp N$, 即 $\forall y \in M$, $\langle x, y\rangle = 0$ 或 $\forall y \in N$, $\langle x, y\rangle = 0$. 所以 $\forall y \in M \cap N$, $\langle x, y\rangle = 0$, 即 $x \perp (M \cap N)$, $x \in (M \cap N)^\perp$. □

题目 2. 习题 3.18. 求最小值: $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 \,\mathrm{d}t$.

解. 在 $C[-1,1]$ 上定义内积 $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. 则

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ \langle t^i, t^j\rangle = \int_{-1}^1 t^{i+j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j+1}(1-(-1)^{i+j+1}) = \begin{cases} 0, & i+j \text{ 为奇数}, \\ \frac{2}{i+j+1}, & i+j \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \langle t^3 - a - bt - ct^2, t^3 - a - bt - ct^2 \rangle \\
&= \langle t^3, t^3 \rangle - 2c\langle t^3, t^2 \rangle - 2b\langle t^3, t \rangle - 2a\langle t^3, 1 \rangle + c^2\langle t^2, t^2 \rangle + 2bc\langle t^2, t \rangle + 2ac\langle t^2, 1 \rangle \\
&\quad + b^2\langle t, t \rangle + 2ab\langle t, 1 \rangle + a^2\langle 1, 1 \rangle \\
&= \langle t^3, t^3 \rangle - 2b\langle t^3, t \rangle + c^2\langle t^2, t^2 \rangle + 2ac\langle t^2, 1 \rangle + b^2\langle t, t \rangle + a^2\langle 1, 1 \rangle \\
&= \frac{2}{7} + \frac{2}{5}(c^2 - 2b) + \frac{2}{3}(b^2 + 2ac) + 2a^2 \\
&= 2a^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{3}b^2 - \frac{4}{5}b + \frac{2}{5}c^2 + \frac{2}{7} \\
&= 2\left(a + \frac{1}{3}c\right)^2 + \frac{8}{45}c^2 + \frac{2}{3}\left(b - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{8}{175} \\
&\geq \frac{8}{175}.
\end{aligned}
$$

当且仅当 $(a, b, c) = \left(0, \frac{3}{5}, 0\right)$ 时取等号. 综上, $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{8}{175}$.

题目 1. **习题 3.24.** 设 H_1, H_2 为 Hilbert 空间, $T \in B(H_1, H_2)$. 若 $M_1 \subseteq H_1, M_2 \subseteq H_2$ s.t. $T(M_1) \subseteq M_2$, 求证: $T^*(M_2^\perp) \subseteq M_1^\perp$.

证明. $\forall x \in M_2^\perp$, $\forall y \in M_1$, 由 $T(M_1) \subseteq M_2$ 知 $Ty \in M_2$, 故 $\langle y, T^*x\rangle = \langle Ty, x\rangle = 0$. 由 y 的任意性知 $T^*x \in M_1^\perp$. 由 x 的任意性知 $T^*(M_2^\perp) \subseteq M_1^\perp$. $\square$

题目 2. **习题 3.25.** 在习题 24 中, 设 M_1, M_2 均为闭线性子空间, 求证: $T(M_1) \subseteq M_2 \iff T^*(M_2^\perp) \subseteq M_1^\perp$.

证明. $\Longrightarrow$: 习题 24 中已证明.

$\Longleftarrow$: 已知 $T^*(M_2^\perp) \subseteq M_1^\perp$, 由于 $T^* \in B(H_2, H_1)$, $M_2^\perp \subseteq H_2$, $M_1^\perp \subseteq H_1$, 由习题 24 结论得 $T^{**}\left((M_1^\perp)^\perp\right) \subseteq (M_2^\perp)^\perp$. 由于 M_1, M_2 为闭线性子空间, 知 $(M_1^\perp)^\perp = M_1$, $(M_2^\perp)^\perp = M_2$, 结合 $T^{**} = T$, 得 $T(M_1) \subseteq M_2$. $\square$

题目 3. **习题 4.1.** 设 p 为赋范空间 X 上的次线性泛函, 满足 $p(0) = 0$, 且在 0 处连续. 求证: p 为连续映射.

证明. 由于 p 在 0 处连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$ s.t. $\forall x_0 \in X$ $(\|x_0\| < \delta_0)$, $|p(x_0) - p(0)| = |p(x_0)| < \varepsilon$.

所以 $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta_0 > 0$ s.t. $\forall x_1 \in X$ $(\|x_1 - x\| < \delta)$, 有 $p(x_1) - p(x) \le p(x_1 - x) \le |p(x_1 - x)| < \varepsilon$ 且 $p(x) - p(x_1) \le p(x - x_1) \le |p(x - x_1)| < \varepsilon$, 即 $|p(x_1) - p(x)| < \varepsilon$. 从而 $\forall x \in X$, p 在 x 处连续, 即 p 为连续映射. $\square$

题目 3 的注记. 或直接夹逼: $\forall x \in X$, $\forall x_n \to x$, $-p(x - x_n) \le p(x) - p(x_n) \le p(x - x_n)$, 由 p 在 0 处连续知 $p(x - x_n) \to 0$, 故 $p(x_n) \to p(x)$, 即 p 在 x 处连续.

题目 4. **习题 4.2.** 设 X 为线性空间, $p : X \to \mathbb{R}$ s.t. $\forall x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $p(x + y) \le p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. 求证: p 为 X 上的半范数.

证明. 只需证明: $\forall x \in X$, $p(x) \ge 0$.

由于 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, 代入 $\lambda = 0, -1$ 得 $p(0) = 0$, $p(-x) = p(x)$.

由于 $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, 代入 $y = -x$ 得 $p(0) \le p(x) + p(-x) = 2p(x)$, 即 $p(x) \ge 0$. $\square$

题目 1. **习题 4.6.** 设 X 为赋范空间, $f \in X^*$. 求证: $f \in X'$ 当且仅当 $N(f)$ 为 X 的闭线性子空间.

证明. 先证明 $\Longrightarrow$: **法一.** 若 $f \in X'$, $\forall \{x_n\} \subseteq N(f)$, $x_n \to x \in X$, 则 $f(x_n) = 0$. 由 f 的连续性有 $f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, 故 $x \in N(f)$, 即 $N(f)$ 为闭集. 由 $N(f)$ 为 X 的线性子空间易知 $N(f)$ 为 X 的闭线性子空间.

法二. 由于 $\{0\}$ 为 X 的闭集, 由 f 的连续性有 $N(f) = f^{-1}(\{0\})$ 为闭集.

再证明 $\Longleftarrow$: 已知 $N(f)$ 为 X 的闭线性子空间. 情形 1: $N(f) = X$, 则 $f = 0 \in X'$. 情形 2: $N(f) \neq X$, 则 $\exists x_0 \in X$ s.t. $x_0 \notin N(f) = \overline{N(f)}$, 所以 $\exists r > 0$ s.t. $B(x_0, r) \cap N(f) = \varnothing$. 以下使用反证法证明 $f \in X'$. 假设 $f \notin X'$, 则 $f(B(0,r))$ 无界, 所以 $\exists x_1 \in B(0,r)$ s.t. $|f(x_1)| > |f(x_0)| > 0$. 则

$$f\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)} x_1\right) = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{f(x_1)} f(x_1) = 0, \text{ 即 } x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)} x_1 \in N(f).$$

其中 $\|-\frac{f(x_0)}{f(x_1)} x_1\| = \frac{|f(x_0)|}{|f(x_1)|}\|x_1\| < \frac{|f(x_0)|}{|f(x_1)|} r < r$, 故 $x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)} x_1 \in B(x_0, r)$. 这与 $B(x_0,r) \cap N(f) = \varnothing$ 矛盾. 综上, $f \in X'$. □

题目 1 的注记. $\Longleftarrow$ 反证另证: $f(\{x \in X \mid \|x\| = 1\})$ 无界, 则 $\exists x_n \in X$ s.t. $\|x_n\| = 1$, $|f(x_n)| > n$, 有 $\frac{x_n}{f(x_n)} \to 0$. 由于 $f\left(\frac{x_0}{f(x_0)} - \frac{x_n}{f(x_n)}\right) = 0$, 知 $\frac{x_0}{f(x_0)} - \frac{x_n}{f(x_n)} \in N(f)$, 由 $N(f)$ 为闭集知 $\frac{x_0}{f(x_0)} \in N(f)$, 矛盾.

题目 2. **习题 4.7.** 设 X 为赋范空间, M 为 X' 的非空子集, 求证: 若 $\overline{\operatorname{span}(M)} = X'$, 则 $\bigcap\limits_{f\in M} N(f) = \{0\}$.

证明. 由 $\overline{\operatorname{span}(M)} = X'$ 知 $\forall g \in X'$, $\exists \{g_n\} \subseteq \operatorname{span}(M)$ s.t. $g_n \to g$. 由 $g_n \in \operatorname{span}(M)$ 知 $\exists f_{n,m} \in M, \lambda_{n,m} \in \mathbb{K}$ $(m = 1, 2, \cdots, k_n)$ s.t. $g_n = \sum\limits_{m=1}^{k_n} \lambda_{n,m} f_{n,m}$. $\forall x_0 \in \bigcap\limits_{f\in M} N(f)$, 有 $f_{n,m}(x_0) = 0$, 故 $g_n(x_0) = 0$, 由 $g_n \to g$ 知 $g(x_0) = 0$ [注 1]. 由 Hahn-Banach 定理推论 [注 2] 知 $x_0 = 0$. 所以 $\bigcap\limits_{f\in M} N(f) = \{0\}$. □

题目 2 的注记. 注 1: 已知 $g_n \to g$, $g_n(x_0) = 0$, 则 $|g(x_0) - g_n(x_0)| = |(g - g_n)(x_0)| \leq \|g - g_n\|\|x_0\| \to 0$, 故 $g(x_0) = 0$.

注 2: 已知 $x_0 \in X$ 满足 $\forall g \in X'$, $g(x_0) = 0$. 若 $x_0 \neq 0$, 由 Hahn-Banach 定理知 $\exists f \in X'$ s.t. $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$, 矛盾. 故 $x_0 = 0$.

题目 3.　**习题 4.5.** 设 X 为可分赋范空间, 求证: 存在 X' 单位球面的至多可数子集 N, 使得任取 $x \in X$, 有 $\|x\| = \sup\limits_{f \in N} |f(x)|$.

证明.　由于 X 为可分赋范空间, 知存在至多可数集 M s.t. $\overline{M} = X$. $\forall m \in M$ $(m \neq 0)$, 由 Hahn-Banach 定理知 $\exists f_m \in X'$ s.t. $\|f_m\| = 1$, $f_m(m) = \|m\|$. 令 $N = \{f_m \mid m \in M,\ m \neq 0\}$, 则 N 为 X' 单位球面的至多可数子集.

$\forall x \in X$, 下证 $\|x\| = \sup\limits_{f \in N} |f(x)|$. 若 $x = 0$ 则结论显然. 以下讨论 $x \neq 0$. 此时易知 $N \neq \varnothing$.

$\forall f \in N$, $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|$, 故 $\sup\limits_{f \in N} |f(x)| \leq \|x\|$.

由 $x \in X = \overline{M}$, $x \neq 0$ 知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in M$ $(m \neq 0)$ s.t. $\|x - m\| < \varepsilon$, 则对 $f_m \in N$ 有

$$
\begin{aligned}
|f_m(x)| &= |f_m(x-m) + f_m(m)| \geq |f_m(m)| - |f_m(x-m)| \\
&= \|m\| - |f_m(x-m)| \geq \|m\| - \|f_m\|\|x-m\| \\
&= \|m\| - \|x-m\| > \|x\| - \varepsilon - \|x-m\| > \|x\| - 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

所以 $\sup\limits_{f \in N} |f(x)| \geq |f_m(x)| \geq \|x\| - 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $\sup\limits_{f \in N} |f(x)| \geq \|x\|$.

综上, $\|x\| = \sup\limits_{f \in N} |f(x)|$. □

题目 1. **习题 4.4.** 设 X 为赋范空间, M 为 X 的线性子空间, $x_0 \in X$. 求证 $x_0 \in \overline{M}$ 当且仅当任取 $f \in X'$, $f|_M = 0$, 都有 $f(x_0) = 0$.

证明. 先证明 $\Longrightarrow$. 若 $x_0 \in \overline{M}$, 则 $\exists \{x_n\} \subseteq M$ s.t. $x_n \to x_0$. $\forall f \in X'$, $f|_M = 0$, 由 $x_n \in M$ 有 $f(x_n) = 0$, 由 f 的连续性有 $f(x_n) \to f(x_0)$, 故 $f(x_0) = 0$.

再证明 $\Longleftarrow$. $\overline{M} = X$ 情形平凡, 只需讨论 $\overline{M} \subsetneq X$ 情形. 假设 $x_0 \notin \overline{M}$, 记 $\delta = \rho(x_0, \overline{M}) = \inf\limits_{y \in \overline{M}} \|x_0 - y\| > 0$. 由 Hahn-Banach 定理, $\exists g \in X'$ s.t. $\|g\| = 1$, $g|_{\overline{M}} = 0$, $g(x_0) = \delta > 0$, 与 $\forall f \in X'$, $f|_M = 0$ 都有 $f(x_0) = 0$ 矛盾. 故 $x_0 \in \overline{M}$. □

题目 2. **习题 4.13.** 设 X, Y 为赋范空间, $T \in B(X, Y)$, $T^* \in B(Y', X')$ 为其共轭算子. 求证: ${}^{\perp}R(T) = N(T^*)$.

注: 设 X 为赋范空间, M 为 X 的线性子空间, ${}^{\perp}M = \{f \in X' \mid f|_M = 0\}$.

证明. 以下证明: $\forall f \in Y'$, $f \in {}^{\perp}R(T) \iff f \in N(T^*)$.

$$\begin{aligned} f \in {}^{\perp}R(T) &\iff \forall y \in R(T),\ f(y) = 0 \\ &\iff \forall x \in X,\ f(Tx) = 0 \\ &\iff \forall x \in X,\ T^*(f)(x) = 0 \\ &\iff T^*(f) = 0 \\ &\iff f \in N(T^*) \end{aligned}$$

□

题目 3. **习题 4.14.** 设 (X, d) 为度量空间. 求证: $M \subseteq X$ 为无处稠密子集当且仅当 $(\overline{M})^c$ 为 X 的稠密子集.

证明. M 为无处稠密子集 $\iff$ $\overline{M}$ 无内点, 即 $\forall x \in \overline{M}$, $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subseteq \overline{M}$

$\iff$ $\forall x \in \overline{M}$, $\forall r > 0$, $\exists y \in B(x, r)$ s.t. $y \in (\overline{M})^c$, 即 $B(x, r) \cap (\overline{M})^c \neq \varnothing$

$\iff$ $\forall x \in X$, $\forall r > 0$, $\exists y \in B(x, r)$ s.t. $B(x, r) \cap (\overline{M})^c \neq \varnothing$

(注: 若 $x \in (\overline{M})^c$, 取 $y = x$ 即可, 这是平凡情形)

$\iff$ $\overline{(\overline{M})^c} = X$, 即 $(\overline{M})^c$ 为 X 的稠密子集. □

题目 3 的注记. 另证: M 为无处稠密子集 $\iff \overline{M}$ 无内点 (X 的点都是其外点或边界点) $\iff (\overline{M})^c$ 无外点 (X 的点都是其内点或边界点) $\iff (\overline{M})^c$ 为 X 的稠密子集.

题目 4. **习题 4.15.** 证明: 非空完备度量空间的第一范畴子集的余集必为第二范畴子集.

证明. 反证法. 设 (X, d) 为非空完备度量空间, $\exists A \subseteq X$ 为第一范畴子集, 使得 A^c 也是第一范畴子集. 则 A, A^c 都可表示成 X 中可数个无处稠密子集的并集, 所以 $X = A \cup A^c$ 也可表示成 X 中可数个无处稠密子集的并集, 从而 X 作为 X 的子集为第一范畴的, 与 Baire 范畴定理矛盾. 所以非空完备度量空间的第一范畴子集的余集必为第二范畴子集. $\square$

题目 1. **习题 4.16.** 设 x_n 为赋范空间 X 中的一列元, 任给 $f \in X'$, $f(x_n)$ 都为纯量有界列. 求证: $\{x_n\}$ 为有界列.

证明. 考虑典范映射 $J : X \to X''$. 由于 $\forall f \in X'$, $J(x_n)(f) = f(x_n)$ 为纯量有界列, 得 $\sup\limits_{n\geq 1} \|J(x_n)(f)\| < \infty$. 由于 X' 总为 Banach 空间, 利用一致有界性原理可得 $\sup\limits_{n\geq 1} \|J(x_n)\| < \infty$. 由于 J 为保范映射, $\|J(x_n)\| = \|x_n\|$, 故 $\sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$, $\{x_n\}$ 为有界列. □

题目 2. **习题 4.17.** 设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范空间, $T_n \in B(X, Y)$ 为一列有界线性算子, 设任取 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 都是 Y 中的柯西列, 求证: 存在常数 $C \geq 0$, 使得任取 $n \geq 1$, $\|T_n\| \leq C$.

证明. $\forall x \in X$, 由于 $\forall n \geq 1$, $\{T_n x\}$ 是 Y 中的柯西列, 故其是有界列, 即 $\sup\limits_{n\geq 1} \|T_n x\| < \infty$. 由于 X 为 Banach 空间, 由一致有界性原理 $\sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$, 即 $\exists C \geq 0$ s.t. $\forall n \geq 1$, $\|T_n\| \leq C$. □

题目 3. **习题 4.18.** 在上题中又设 Y 为 Banach 空间, 求证: 存在 $T \in B(X, Y)$, 使得任取 $x \in X$, $T_n x \to Tx$, 且 $\|T\| \leq \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$.

证明. 由于 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 Banach 空间 Y 中的柯西列, 故 $\forall x \in X$, $\exists y_x \in Y$ s.t. $T_n x \to y_x$. 定义 $T : X \to Y$ 为 $Tx = y_x$, 则 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx$. 下证 T 为线性映射:

$$\forall x, y \in X,\ T(ax + by) = \lim_{n\to\infty} T_n(ax + by) = \lim_{n\to\infty} aT_n x + \lim_{n\to\infty} bT_n y = aTx + bTy$$

由于 T_n 强收敛到 T, 自然弱收敛到 T, 由定理 4.3.6 [注] 知 $\|T\| \leq \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$. 所以 $T \in B(X, Y)$ 符合题意. □

题目 3 的注记. 注: $\forall x \in X$, $\forall f \in Y'$, $\|f(T_n x)\| \leq \|f\|\ \|T_n\|\ \|x\| \leq C\|f\|\ \|x\|$, 令 $n \to \infty$, 由 f 的连续性、范数连续性知 $\|f(T_n x)\| \to \|f(Tx)\|$, 可得 $\|f(Tx)\| \leq C\|f\|\ \|x\|$. 由 Hahn-Banach 定理, $\|Tx\| = \sup\limits_{f\in Y',\, \|f\|=1} \|f(Tx)\| \leq C\|x\|$, 即 $\|T\| \leq C$.

题目 4. **习题 4.19.** 设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范空间, $T_n \in B(X, Y)$ 为一列有界线性算子. 证明下述命题相互等价:

(1) 存在 $C \geq 0$, $\|T_n\| \leq C$;

(2) 任取 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 为 Y 中的有界列;

(3) 任取 $x \in X$, $f \in Y'$, $\{f(T_n x)\}$ 为纯量有界列.

证明. (3) $\implies$ (2): 习题 4.16 已证.

(2) $\implies$ (1): 习题 4.17 已证 (条件中的柯西列换成有界列即可).

(1) $\implies$ (3): $\forall x \in X$, $\forall f \in Y'$, $\|f(T_n x)\| \leq \|f\| \, \|T_n\| \, \|x\| \leq C\|f\| \, \|x\|$, 故 $\{f(T_n x)\}$ 为纯量有界列. □