

清华大学研究生公共课教材——数学系列

最优化理论与算法 习题解答

陈宝林 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书对《最优化理论与算法(第2版)》中的习题全部给出了解答. 其中, 计算题基本按书中给出的方法步骤完成, 有利于对最优化方法的理解和掌握; 证明题用到一些有关的数学知识和解题技巧, 对提高数学素质及深入理解最优化理论与算法是有益的.

本书可供广大读者学习、运用和讲授运筹学时参考.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

最优化理论与算法习题解答/陈宝林编. --北京: 清华大学出版社, 2012. 5

(清华大学研究生公共课教材. 数学系列)

ISBN 978-7-302-28467-3

I. ①最… II. ①陈… III. ①最优化理论—研究生—题解 ②最优化算法—研究生—题解
IV. ①O242. 23-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 064434 号

责任编辑: 刘 颖

封面设计: 常雪影

责任校对: 王淑云

责任印制: 张雪娇

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京国马印刷厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm 印 张: 14 字 数: 305 千字

版 次: 2012 年 5 月第 1 版 印 次: 2012 年 5 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 28.00 元

产品编号: 047087-01

最优化理论与算法是用数学方法研究最优方案, 因此, 像一般数学分支一样, 有严密的逻辑性, 要想看懂不十分困难; 但要深入理解, 掌握精髓, 融会贯通, 并不容易; 要提高分析问题、解决问题的能力, 学以致用, 就更加困难. 要想真正学好这门学科, 必须重视做题. 在学习的过程中, 往往遇到一种现象, 一看就懂, 一做就错, 这正好说明做题在学习数学类课程中的重要作用. 可以说, 做题是打开最优化理论之门的钥匙, 是真正学懂、会用最优化理论与算法的一个重要途径.

本书出版的目的是满足教学和自学的需要, 促进运筹学的学习、研究和应用. 衷心希望广大读者, 在做题时严守独立思考, 发挥创造性和丰富的想象力, 切忌先看题解后做习题. 还要强调, 这里给出的解答是一家之言, 仅供参考, 不作为标准答案. 倘若本书禁锢读者思路, 就违背了作者初衷.

由于水平有限, 错误在所难免, 欢迎广大读者批评指正.

编 者

2012 年 2 月

第1章 引言题解	1
第2章 线性规划的基本性质题解	10
第3章 单纯形方法题解	18
第4章 对偶原理及灵敏度分析题解	68
第5章 运输问题题解	91
第7章 最优性条件题解	101
第8章 算法题解	112
第9章 一维搜索题解	113
第10章 使用导数的最优化方法题解	118
第11章 无约束最优化的直接方法题解	133
第12章 可行方向法题解	155
第13章 惩罚函数法题解	174
第14章 二次规划题解	183
第15章 整数规划简介题解	193
第16章 动态规划简介题解	208

引言题解

1. 用定义验证下列各集合是凸集:

$$(1) S = \{(x_1, x_2) | x_1 + 2x_2 \geq 1, x_1 - x_2 \geq 1\}; \quad (2) S = \{(x_1, x_2) | x_2 \geq |x_1|\};$$

$$(3) S = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 10\}.$$

证 (1) 对集合 S 中任意两点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$ 及每个数 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设, 有

$$\begin{aligned} & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}] + 2[\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}] \\ &= \lambda(x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) + (1-\lambda)(x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) \geq \lambda + (1-\lambda) = 1, \\ & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}] - [\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}] \\ &= \lambda(x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) + (1-\lambda)(x_1^{(2)} - x_2^{(2)}) \geq \lambda + (1-\lambda) = 1, \end{aligned}$$

因此, $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$, 故 S 是凸集.

(2) 对集合 S 中任意两点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$ 和 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$ 及每个数 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设, 有

$$\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \geq \lambda |x_1^{(1)}| + (1-\lambda)|x_1^{(2)}| \geq |\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}|,$$

因此 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$, 故 S 是凸集.

(3) 对集合 S 中任意两点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$ 和 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$ 及每个数 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设,有

$$\begin{aligned} & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}]^2 + [\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}]^2 \\ &= \lambda^2 x_1^{(1)2} + 2\lambda(1-\lambda)x_1^{(1)}x_1^{(2)} + (1-\lambda)^2 x_1^{(2)2} + \lambda^2 x_2^{(1)2} + 2\lambda(1-\lambda)x_2^{(1)}x_2^{(2)} \\ & \quad + (1-\lambda)^2 x_2^{(2)2} = \lambda^2 [x_1^{(1)2} + x_2^{(1)2}] + (1-\lambda)^2 [x_1^{(2)2} + x_2^{(2)2}] + \lambda(1-\lambda)[2x_1^{(1)}x_1^{(2)} \\ & \quad + 2x_2^{(1)}x_2^{(2)}] \leq 10\lambda^2 + 10(1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)[x_1^{(1)2} + x_1^{(2)2} + x_2^{(1)2} + x_2^{(2)2}] \\ & \leq 10\lambda^2 + 10(1-\lambda)^2 + 20\lambda(1-\lambda) = 10, \end{aligned}$$

因此 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$, 故 S 是凸集.

2. 设 $C \subset \mathbb{R}^p$ 是一个凸集, p 是正整数. 证明下列集合 S 是 \mathbb{R}^n 中的凸集:

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = A\rho, \rho \in C\},$$

其中 A 是给定的 $n \times p$ 实矩阵.

证 对任意两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 及每个数 $\lambda \in [0, 1]$, 根据集合 S 的定义, 存在 $\rho_1, \rho_2 \in C$, 使 $x^{(1)} = A\rho_1, x^{(2)} = A\rho_2$, 因此必有 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \lambda A\rho_1 + (1-\lambda)A\rho_2 = A[\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2]$. 由于 C 是凸集, 必有 $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 \in C$, 因此 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$, 故 S 是凸集.

3. 证明下列集合 S 是凸集:

$$S = \{x \mid x = Ay, y \geq 0\},$$

其中 A 是 $n \times m$ 矩阵, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

证 对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 及每个数 $\lambda \in [0, 1]$, 存在 $y_1, y_2 \geq 0$, 使 $x^{(1)} = Ay_1, x^{(2)} = Ay_2$, 因此有 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = A[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$, 而 $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0$, 故 $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$, 即 S 是凸集.

4. 设 S 是 \mathbb{R}^n 中一个非空凸集. 证明对每一个整数 $k \geq 2$, 若 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \in S$, 则

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} \in S,$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 (\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, k)$.

证 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时, 由凸集的定义知上式显然成立. 设 $k=m$ 时结论成立, 当 $k=m+1$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(i)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)},$$

其中 $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. 根据归纳法假设,

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(i)} \in S.$$

由于 $\sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda_{m+1} = 1$, 因此 $(\sum_{i=1}^m \lambda_i) \hat{x} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} \in S$, 即 $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)} \in S$. 于是当 $k=m+1$ 时结论也成立. 从而得证.

5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $l \times n$ 矩阵, $c \in \mathbb{R}^m$, 证明下列两个系统恰有一个有解:

系统 1 $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0$, 对某些 $x \in \mathbb{R}^n$.

系统 2 $A^T y + B^T z = c, y \geq 0$, 对某些 $y \in \mathbb{R}^m$ 和 $z \in \mathbb{R}^l$.

证 由于 $Bx = 0$ 等价于

$$\begin{cases} Bx \leq 0, \\ Bx \geq 0. \end{cases}$$

因此系统 1 有解, 即

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0 \text{ 有解.}$$

根据 Farkas 定理, 得

$$(A^T \quad B^T \quad -B^T) \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq 0$$

无解. 记 $u-v=z$, 即得

$$A^T y + B^T z = c, \quad y \geq 0$$

无解. 反之亦然.

6. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $c \in \mathbb{R}^m$, 则下列两个系统恰有一个有解:

系统 1 $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$, 对某些 $x \in \mathbb{R}^n$.

系统 2 $A^T y \geq c, y \geq 0$, 对某些 $y \in \mathbb{R}^m$.

证 若系统 1 有解, 即

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0$$

有解, 则根据 Farkas 定理, 有

$$(A^T - I) \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

无解, 即 $A^T y - u = c, y \geq 0, u \geq 0$ 无解, 亦即

$$A^T y \geq c, \quad y \geq 0$$

无解.

反之, 若 $A^T y \geq c, y \geq 0$ 有解, 即

$$A^T y - u = c, \quad y \geq 0, u \geq 0$$

有解, 亦即

$$(A^T - I) \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

有解. 根据 Farkas 定理, 有

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0$$

无解, 即

$$Ax \leq 0, \quad x \geq 0, \quad c^T x > 0$$

无解.

7. 证明 $Ax \leq 0, c^T x > 0$ 有解. 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证 根据 Farkas 定理, 只需证明

$$A^T y = c, \quad y \geq 0$$

无解. 事实上, $A^T y = c$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对此线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

此线性方程组 $A^T y = c$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩不等, 因此无解, 即 $A^T y = c, y \geq 0$ 无解.

根据 Farkas 定理, $Ax \leq 0, c^T x > 0$ 有解.

8. 证明下列不等式组无解:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 < 0, \\ 3x_1 - x_2 < 0, \\ 17x_1 + 11x_2 > 0. \end{cases}$$

证 将不等式组写作

$$Ax < 0, \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -17 & -11 \end{bmatrix}.$$

根据 Gordan 定理, 只需证明 $A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$ 有解. 对系数矩阵 A^T 做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & -11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$A^T y = 0$ 的同解线性方程组为

$$\begin{cases} y_1 = 5y_3, \\ y_2 = 4y_3, y_3 \text{ 任意.} \end{cases}$$

显然 $A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$ 有解. 根据 Gordan 定理, 原来的不等式组无解.

9. 判别下列函数是否为凸函数:

- (1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$;
- (2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$;
- (3) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 + e^{x_1+x_2}$;
- (4) $f(x_1, x_2) = x_1e^{-(x_1+x_2)}$;
- (5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3$.

解 (1) $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ 为半正定矩阵, 故 $f(x_1, x_2)$ 是凸函数.

(2) $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 为不定矩阵, 故 $f(x_1, x_2)$ 不是凸函数.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) + 4x_2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) + 4x_1 + e^{x_1+x_2},$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 + e^{x_1+x_2},$

因此 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \\ 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} = (2 + e^{x_1+x_2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为半正定矩阵, 因此 $f(x)$ 是凸函数.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{-(x_1+x_2)} - x_1e^{-(x_1+x_2)} = (1-x_1)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1e^{-(x_1+x_2)},$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (x_1 - 2)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = (x_1 - 1)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_1e^{-(x_1+x_2)},$

于是 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = e^{-(x_1+x_2)} \begin{bmatrix} x_1 - 2 & x_1 - 1 \\ x_1 - 1 & x_1 \end{bmatrix}$$

为不定矩阵, 故 $f(x)$ 不是凸函数.

(5) $f(x)$ 的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

做合同变换:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{44}{7} \end{bmatrix}$$

由此可得 $\nabla^2 f(x)$ 为不定矩阵, 因此 $f(x)$ 不是凸函数.

10. 设 $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$,

$$S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\},$$

$f(x_1, x_2)$ 是否为 S 上的凸函数?

$$\text{解 } \frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1(x_2 - x_1^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4(x_2 - x_1^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 8(x_2 - 3x_1^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 8x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4,$$

函数 $f(x_1, x_2)$ 的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 8(x_2 - 3x_1^2) & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{bmatrix}.$$

易知 $\nabla^2 f(x)$ 在集合 S 上不是半正定矩阵, 如在点 $(0, 1)$ 处的 Hesse 矩阵是 $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, 是不定矩阵. 因此 $f(x_1, x_2)$ 不是 S 上的凸函数.

11. 证明 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$ 为严格凸函数的充要条件是 Hesse 矩阵 A 正定.

证 先证必要性. 设 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$ 是严格凸函数. 根据定理 1.4.14, 对任意非零向量 x 及 $\bar{x} = 0$, 必有

$$f(x) > f(0) + \nabla f(0)^T x. \quad (1)$$

将 $f(x)$ 在 $\bar{x} = 0$ 处展开, 有

$$f(x) = f(0) + \nabla f(0)^T x + \frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(0)x + o(\|x\|^2). \quad (2)$$

由(1)式和(2)式知

$$\frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(0)x + o(\|x\|^2) > 0.$$

由于 $f(x)$ 是二次凸函数, $\nabla^2 f(0) = A$, $o(\|x\|^2) = 0$, 因此 $x^T Ax > 0$, 即 A 正定.

再证充分性. 设 A 正定, 对任意两个不同点 x 和 \bar{x} , 根据中值定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\hat{x})(x - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T A(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

$$> f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}).$$

根据定理 1.4.14, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$ 是严格凸函数.

12. 设 f 是定义在 \mathbb{R}^n 上的凸函数, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ 是 \mathbb{R}^n 中的点, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是非负数, 且满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, 证明:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_k f(x^{(k)}).$$

证 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时, 根据凸函数的定义, 必有

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}).$$

设 $k=m$ 时不等式成立. 当 $k=m+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_m x^{(m)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(2)} + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(m)}\right) + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}\right). \end{aligned}$$

记

$$\hat{x} = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(2)} + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(m)}.$$

由于 $f(x)$ 是凸函数, $\sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda_{m+1} = 1, \lambda_i \geq 0$, 根据凸函数定义, 有

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)\hat{x} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)f(\hat{x}) + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}).$$

根据归纳法假设, 有

$$f(\hat{x}) \leq \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(1)}) + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(2)}) + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(m)}).$$

代入上式, 则有

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}),$$

即 $k=m+1$ 时, 不等式也成立. 从而得证.

13. 设 f 是 \mathbb{R}^n 上的凸函数, 证明: 如果 f 在某点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处具有全局极大值, 则对一切点 $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ 为常数.

证 用反证法. 设 $f(x)$ 在点 \bar{x} 处具有全局极大值, 且在点 $x^{(1)}$ 处有 $f(x^{(1)}) < f(\bar{x})$. 在过点 $x^{(1)}$ 和 \bar{x} 的直线上任取一点 $x^{(2)}$, 使得

$$\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

分两种情形讨论:

(1) 若 $f(x^{(2)}) \leq f(x^{(1)})$, 由于 $f(x)$ 是凸函数, 必有

$$f(\bar{x}) = f(\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)})$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) \\ &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(1)}) = f(x^{(1)}), \text{矛盾.} \end{aligned}$$

(2) 若 $f(x^{(2)}) > f(x^{(1)})$, 由于 $f(x)$ 是凸函数, 必有

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \\ &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) \\ &< \lambda f(x^{(2)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) = f(x^{(2)}), \text{矛盾.} \end{aligned}$$

综上, $f(x)$ 必为常数.

14. 设 f 是定义在 \mathbb{R}^n 上的函数, 如果对每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 及正数 t 均有 $f(tx) = tf(x)$, 则称 f 为正齐次函数. 证明 \mathbb{R}^n 上的正齐次函数 f 为凸函数的充要条件是, 对任何 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

证 先证必要性. 设正齐次函数 $f(x)$ 是凸函数, 则对任意两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, 必有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) \leq \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)}).$$

由于 $f(x)$ 是正齐次函数, 有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) = \frac{1}{2}f(x^{(1)} + x^{(2)}).$$

代入前式得

$$\frac{1}{2}f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)}),$$

即

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

再证充分性. 设正齐次函数 $f(x)$ 对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}),$$

则对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 及每个数 $\lambda \in (0, 1)$, 必有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq f(\lambda x^{(1)}) + f((1-\lambda)x^{(2)}) = \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}).$$

因此 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的凸函数.

15. 设 S 是 \mathbb{R}^n 中非空凸集, f 是定义在 S 上的实函数. 若对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 及每一个数 $\lambda \in (0, 1)$, 均有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\},$$

则称 f 为拟凸函数.

试证明: 若 $f(x)$ 是凸集 S 上的拟凸函数, \bar{x} 是 $f(x)$ 在 S 上的严格局部极小点, 则 \bar{x} 也是 $f(x)$ 在 S 上的严格全局极小点.

证 用反证法. 设 \bar{x} 是严格局部极小点, 即存在 \bar{x} 的 δ 邻域 $N_\delta(\bar{x})$, 对于每个 $x \in S \cap N_\delta(\bar{x})$ 且 $x \neq \bar{x}$, 有 $f(x) > f(\bar{x})$, 但 \bar{x} 不是严格全局极小点, 即存在点 $\hat{x} \in S, \hat{x} \neq \bar{x}$, 使得

$$f(\hat{x}) \leq f(\bar{x}).$$

由于 $f(x)$ 是凸集 S 上的拟凸函数, 对每个 $\lambda \in (0, 1)$ 有

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq f(\bar{x}).$$

对充分小的 $\lambda, \lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\delta(\bar{x})$, 这与 \bar{x} 是严格局部极小点相矛盾. 因此, \bar{x} 也是严格全局极小点.

16. 设 S 是 \mathbb{R}^n 中一个非空开凸集, f 是定义在 S 上的可微实函数. 如果对任意两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$, 有 $(x^{(1)} - x^{(2)})^T \nabla f(x^{(2)}) \geq 0$ 蕴含 $f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)})$, 则称 $f(x)$ 是伪凸函数.

试证明: 若 $f(x)$ 是开凸集 S 上的伪凸函数, 且对某个 $\bar{x} \in S$ 有 $\nabla f(\bar{x}) = 0$, 则 \bar{x} 是 $f(x)$ 在 S 上的全局极小点.

证 设存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $\nabla f(\bar{x}) = 0$. 由于 $f(x)$ 是开凸集 S 上的伪凸函数, 按伪凸函数的定义, 对任意的 $x \in S, (x - \bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = 0$ 蕴含 $f(x) \geq f(\bar{x})$, 因此 \bar{x} 是 $f(x)$ 在 S 上的全局极小点.

第2章

CHAPTER 2

线性规划的基本性质题解

1. 用图解法解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & 5x_1 - 6x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \min \quad & 13x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 7x_1 + 3x_2 \geq 19, \\ & 10x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \min \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 - 7x_2 \geq 8, \\ & x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \max \quad & -20x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 10, \\ & -10x_1 + x_2 \leq 10, \\ & -5x_1 + 5x_2 \leq 25, \\ & x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解 以上各题的可行域均为多边形界定的平面区域,对极小化问题沿负梯度方向移动目标函数的等值线,对极大化问题沿梯度方向移动目标函数的等值线,即可达到最优解,当最优解存在时,下面只给出答案.

(1) 最优解 $(x_1, x_2) = (0, 5)$, 最优值 $f_{\min} = -30$.

(2) 最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{27}{4}, \frac{7}{4}\right)$, 最优值 $f_{\min} = -5$.

实际上,本题最优解并不惟一,连结 $(5, 0)$ 与 $\left(\frac{27}{4}, \frac{7}{4}\right)$ 的线段上的点均为最优解.

(3) 可行域是空集,不存在极小点.

(4) 最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$, 最优值 $f_{\max} = 25$.

(5) 最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$, 最优值 $f_{\min} = -6$.

实际上,本题最优解并不惟一,连结点 $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$ 和点 $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$ 的线段上的点都是最优解.

(6) 最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$, 最优值 $f_{\max} = \frac{120}{7}$.

(7) 最优解 $(x_1, x_2) = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$, 最优值 $f_{\max} = \frac{21}{2}$.

实际上,本题最优解并不惟一,连结点 $\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ 与点 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ 的线段上的点均为最优解.

2. 下列问题都存在最优解,试通过求基本可行解来确定各问题的最优解.

$$(1) \max \quad 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 12, \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(2) \min \quad -2x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(3) \min \quad x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

解 (1) 约束系数矩阵和约束右端向量分别为

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

目标系数向量 $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 5, 0, 0)$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_2) = (2, 5),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(1)} = (\frac{8}{3}, \frac{20}{3}, 0, 0)^T$, $f = c_B x_B = \frac{116}{3}$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_3) = (2, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(2)} = (6, 0, 10, 0)^T$, $f = c_B x_B = 12$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_4) = (2, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -20 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_3) = (5, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_4) = (5, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

基本可行解及相应的目标函数值分别为 $x^{(3)} = (0, 8, 0, 4)^T$, $f = c_B x_B = 40$.

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}, c_B = (c_3, c_4) = (0, 0).$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(4)} = (0, 0, 16, 12)^T$, $f = c_B x_B = 0$.

综上, 得最优解 $\bar{x} = (0, 8, 0, 4)^T$, 最优值 $f_{\max} = 40$.

(2) 约束系数矩阵和约束右端向量分别为

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

目标系数向量 $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (-2 \ 1 \ 1 \ 10)$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_2) = (-2, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(1)} = (30, 50, 0, 0)^T$, $f = c_B x_B = -10$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_3) = (-2, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(2)} = (5, 0, 25, 0)^T$, $f = c_B x_B = 15$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_4) = (-2, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} \\ \frac{25}{2} \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_3) = (1, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_4) = (1, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解和目标函数值分别为 $x^{(3)} = (0, 10, 0, 10)^T$, $f = c_B x_B = 110$.

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_3, c_4) = (1, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(4)} = (0, 0, 15, 5)^T$, $f = c_B x_B = 65$.

综上, 最优解 $\bar{x} = (30, 50, 0, 0)^T$, 最优值 $f_{\min} = -10$.

(3) 引进松弛变量 x_4, x_5 , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned}$$

记作

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, -1, 0, 0, 0).$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_2) = (1, -1),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_3) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解和目标函数值分别为 $x^{(1)} = (\frac{4}{3}, 0, \frac{11}{3}, 0, 0)^T$, $f = c_B x_B = \frac{4}{3}$.

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_4) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_5) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(2)} = (5, 0, 0, 0, 11)^T$, $f = c_B x_B = 5$.

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_3) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(3)} = (0, 4, 1, 0, 0)^T$, $f = c_B x_B = -4$.

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_4) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_5) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(4)} = (0, 5, 0, 0, 1)^T$, $f = c_B x_B = -5$.

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_3, c_4) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(5)} = (0, 0, 3, 2, 0)^T$, $f = c_B x_B = 0$.

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_3, c_5) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_4 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_4, c_5) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为 $x^{(6)} = (0, 0, 0, 5, 6)^T, f = c_B x_B = 0$.

综上, 最优解 $\bar{x} = (0, 5, 0, 0, 1)^T$, 最优值 $f_{\min} = -5$.

3. 设 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ 是 $Ax = b$ 的一个解, 其中 $A = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 是 $m \times n$ 矩阵, A 的秩为 m . 证明 $x^{(0)}$ 是基本解的充要条件为 $x^{(0)}$ 的非零分量 $x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_m}^{(0)}$, 对应的列 $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ 线性无关.

证 先证必要性. 设

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

是基本解, 记 $B = [p_{B_1} \ p_{B_2} \ \dots \ p_{B_m}]$, 则 $x^{(0)}$ 非零分量对应的列 $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\} \subset \{p_{B_1} \ p_{B_2} \ \dots \ p_{B_m}\}$. 由于 $p_{B_1}, p_{B_2}, \dots, p_{B_m}$ 线性无关, 因此 $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ 线性无关.

再证充分性. 设 $x^{(0)}$ 的非零分量对应的列 $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ 线性无关. 由于 A 的秩为 m , 因此 $S \leq m$. $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ 可扩充成一组基 $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}, p_{i_{m+1}}, \dots, p_{i_n}$. 记

$$B = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{m+1}}, \dots, p_{i_n}),$$

于是 $x^{(0)}$ 可记作: $\begin{bmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$, 即 $x^{(0)}$ 是基本解.

4. 设 $S = \{x | Ax \geq b\}$, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, $m > n$, A 的秩为 n . 证明 $x^{(0)}$ 是 S 的极点的充要条件是 A 和 b 可作如下分解:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

其中, A_1 有 n 个行, 且 A_1 的秩为 n , b_1 是 n 维列向量, 使得 $A_1 x^{(0)} = b_1, A_2 x^{(0)} \geq b_2$.

证 先证必要性. 设 $x^{(0)}$ 是 S 的极点. 用反证法. 设 A, b 在点 $x^{(0)}$ 分解如下:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 x^{(0)} = b_1, \quad A_2 x^{(0)} > b_2,$$

A_1 的秩 $R(A_1) < n$. $A_1 x = b_1$ 的同解线性方程组记作

$$\hat{A}_1 x = \hat{b}_1.$$

\hat{A}_1 是行满秩矩阵, $R(\hat{A}_1) = R(A_1) < n$. 不妨假设 \hat{A}_1 的前 $R(\hat{A}_1)$ 个列线性无关, 记作 $\hat{A}_1 = [B \ N]$, 其中 B 是可逆矩阵. 相应地记

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N.$$

$A_1 x = b_1$ 的解为

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中, x_N 是自由未知量, 是 $n - R(A_1)$ 维向量. S 的极点

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

由于 $A_2 x^{(0)} > b_2$, 则存在 $x_N^{(0)}$ 的 δ 邻域 $N_\delta(x_N^{(0)})$, 使得当 $x_N \in N_\delta(x_N^{(0)})$ 时, 解 (1) 同时满足 $A_1 x = b_1$ 和 $A_2 x \geq b_2$. 在过 $x_N^{(0)}$ 的直线上取不同点 $x_N^{(1)}, x_N^{(2)} \in N_\delta(x_N^{(0)})$, 使 $\lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)} = x_N^{(0)}, \lambda \in (0, 1)$, 代入 (2) 式, 得到

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N(\lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)}) \\ \lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这样, 可将 $x^{(0)}$ 表示成集合 S 中两个不同点的凸组合, 矛盾.

再证充分性. 设在点 $x^{(0)}, A, b$ 可作如下分解 (其中 A_1 是 n 阶方阵):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 x^{(0)} = b_1, \quad A_2 x^{(0)} \geq b_2, \quad R(A_1) = n.$$

又设存在 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$, 使得

$$x^{(0)} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)}, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (3)$$

用可逆矩阵 A_1 乘 (3) 式两端, 得

$$A_1 x^{(0)} = \lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)}. \quad (4)$$

由于 $A_1 x^{(0)} = b_1, A_1 x^{(1)} \geq b_1, A_1 x^{(2)} \geq b_1$ 及 $\lambda, 1 - \lambda > 0$, 代入 (4) 式, 则得

$$b_1 = A_1 x^{(0)} = \lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)} \geq \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_1 = b_1,$$

因此有

$$\lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)} = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_1,$$

移项整理, 即

$$\lambda (A_1 x^{(1)} - b_1) + (1 - \lambda) (A_1 x^{(2)} - b_1) = 0.$$

由于 $\lambda, 1 - \lambda > 0, A_1 x^{(1)} - b_1 \geq 0, A_1 x^{(2)} - b_1 \geq 0$, 因此 $A_1 x^{(1)} - b_1 = 0, A_1 x^{(2)} - b_1 = 0$, 从而得到

$$A_1 x^{(0)} = A_1 x^{(1)} = A_1 x^{(2)} = b_1.$$

左乘 A_1^{-1} , 则

$$x^{(0)} = x^{(1)} = x^{(2)}.$$

因此 $x^{(0)}$ 是极点.

第3章

CHAPTER 3

单纯形方法题解

1. 用单纯形方法解下列线性规划问题:

(1) $\min -9x_1 - 16x_2$

s. t. $x_1 + 4x_2 + x_3 = 80,$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90,$

$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4.$

(3) $\max -x_1 + 3x_2 + x_3$

s. t. $3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7,$

$-2x_1 + 4x_2 \leq 12,$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

(5) $\min -3x_1 - x_2$

s. t. $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,$

$4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16,$

$2x_1 - x_2 \leq 12,$

$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4.$

(2) $\max x_1 + 3x_2$

s. t. $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 1,$

$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4.$

(4) $\min 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4$

s. t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,$

$4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6,$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 12,$

$x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4.$

解 (1) 用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	④	1	0	80
x_4	2	3	0	1	90
	9	16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	20
x_4	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	30
	5	0	-4	0	-320

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	14
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	24
	0	0	-1	-4	-440

最优解 $\bar{x} = (24, 14, 0, 0)$, 最优值 $f_{\min} = -440$.

(2) 用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	3	1	0	6
x_4	-1	①	0	1	1
	-1	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	⑤	0	1	-3	3
x_2	-1	1	0	1	1
	-4	0	0	3	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{5}$

最优解 $\bar{x} = (\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, 0)$, 最优值 $f_{\max} = \frac{27}{5}$.(3) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6 , 化成标准形式:

$\max -x_1 + 3x_2 + x_3$

s. t. $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$

$-2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12,$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10,$

$x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, 6.$

用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	-1	2	1	0	0	7
x_5	-2	④	0	0	1	0	12
x_6	-4	3	8	0	0	1	10
	1	-3	-1	0	0	0	0
x_4	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_6	$-\frac{5}{2}$	0	⑧	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{3}{4}$	0	9
x_4	$\frac{25}{8}$	0	0	1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_3	$-\frac{5}{16}$	0	1	0	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$-\frac{13}{16}$	0	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{73}{8}$
x_1	1	0	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$
x_2	0	1	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
	0	0	0	$\frac{13}{50}$	$\frac{77}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{583}{50}$

最优解 $\bar{x} = (\frac{78}{25}, \frac{114}{25}, \frac{11}{10}, 0, 0, 0)$, 最优值 $f_{\max} = \frac{583}{50}$.

(4) 引入松弛变量 x_5, x_6, x_7 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\
 & 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 6, \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 12, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	①	1	0	1	0	0	4
x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	5	0	2	2	1	1	0	10
x_7	-2	0	1	③	-1	0	1	8
	-8	0	-3	1	-5	0	0	-20
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	$\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_4	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{22}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{68}{3}$

最优解 $\bar{x} = (0, 4, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{14}{3}, 0)$, 最优值 $f_{\min} = -\frac{68}{3}$.

(5) 引入松弛变量 x_5 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -3x_1 - x_2 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\
 & 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16, \\
 & 2x_1 - x_2 + x_5 = 12, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	3	1	0	0	30
x_4	④	-4	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	12
	3	1	0	0	0	0
x_3	0	⑥	1	$-\frac{3}{4}$	0	18
x_1	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	4
x_5	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	0	4	0	$-\frac{3}{4}$	0	-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{24}$	0	3
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{24}$	0	7
x_5	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	1	1
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	-24

最优解 $\bar{x} = (7, 3, 0, 0, 1)$, 最优值 $f_{\min} = -24$.

2. 求解下列线性规划问题:

- (1) $\min 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$
s. t. $x_1 + 3x_3 \geq 3$,
 $x_2 + 2x_3 \geq 5$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (2) $\max 2x_1 + x_2$
s. t. $x_1 + x_2 \leq 5$,
 $x_1 - x_2 \geq 0$,
 $6x_1 + 2x_2 \leq 21$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.
- (3) $\max 3x_1 - 5x_2$
s. t. $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 4$,
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$,
 $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (4) $\min x_1 - 3x_2 + x_3$
s. t. $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$,
 $2x_1 + x_2 \geq 2$,
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (5) $\max -3x_1 + 2x_2 - x_3$
s. t. $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$,
 $4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$,
 $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (6) $\min 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$
s. t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$,
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5$,
 $2x_1 - x_2 \leq 7$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (7) $\min 3x_1 - 2x_2 + x_3$
s. t. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$,
 $2x_1 + 3x_2 \geq 8$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (8) $\min 2x_1 - 3x_2$
s. t. $2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$,
 $x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$,
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- (9) $\min 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$
s. t. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$,
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$,
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$.
- (10) $\max 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4$
s. t. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$,
 $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$,
 $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$.

解 (1) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6 , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \text{s. t.} & x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	③	-1	0	3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	0	0	6	-4	-6	42
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解 $\bar{x} = (0, 3, 1, 0, 0)$, 最优值 $f_{\min} = 36$.

(2) 引入松弛变量 x_3, x_4, x_5 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用两阶段法求解. 先求一个基本可行解, 为此引入人工变量 y , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min & y \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 - x_2 - x_4 + y = 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5, y \geq 0. \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	
x_3	1	1	1	0	0	0	5
y	①	-1	0	-1	0	1	0
x_5	6	2	0	0	1	0	21
	1	-1	0	-1	0	0	0
x_3	0	2	1	1	0	-1	5
x_1	1	-1	0	-1	0	1	0
x_5	0	8	0	6	1	-6	21
	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解. 由此出发求最优解, 过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	②	1	1	0	5
x_1	1	-1	0	-1	0	0
x_5	0	8	0	6	1	21
	0	-3	0	-2	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_5	0	0	-4	②	1	1
	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_4	0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{4}$

最优解 $\bar{x} = (\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, 最优值 $f_{\max} = \frac{31}{4}$.

(3) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 - 5x_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 = 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

用两阶段法求解, 为此引入人工变量 y , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 + y = 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad y \geq 0.
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	
x_4	-1	2	4	1	0	0	0	4
x_5	1	1	2	0	1	0	0	5
y	-1	②	1	0	0	-1	1	1
	-1	2	1	0	0	-1	0	1
x_4	0	0	3	1	0	1	-1	3
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解 $\bar{x} = (0, \frac{1}{2}, 0, 3, \frac{9}{2}, 0)$.

由此出发求最优解, 过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	③	1	0	1	3
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
x_5	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{10}{3}$	0
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	1

最优解 $\bar{x} = (2, 1, 1, 0, 0)$, 最优值 $f_{\max} = 1$.

(4) 引入松弛变量 x_4, x_5 , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用两阶段法求解.

引入人工变量 y , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + y = 2, \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	
x_3	2	-1	1	0	0	0	8
y	②	1	0	-1	0	1	2
x_5	1	2	0	0	1	0	10
	2	1	0	-1	0	0	2
x_3	0	-2	1	1	0	-1	6
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	9
	0	0	0	0	0	-1	0

得原线性规划的一个基本可行解 $\hat{x} = (1, 0, 6, 0, 9)$.

从求得的基本可行解出发, 求最优解. 求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-2	1	1	0	6
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	9
	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	-1	0	10
x_2	2	1	0	-1	0	2
x_5	-3	0	0	②	1	6
	-3	0	0	2	0	4
x_3	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	13
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	5
x_4	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	3
	0	0	0	0	-1	-2

最优解 $\bar{x} = (0, 5, 13, 3, 0)$, 最优值 $f_{\min} = -2$.

(5) 引入松弛变量 x_4, x_5 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

先引入人工变量 y_1, y_2 , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + y_1 = 3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_4	2	1	-1	1	0	0	0	5
y_1	4	③	1	0	-1	1	0	3
y_2	-1	1	1	0	0	0	1	2
	3	4	2	0	-1	0	0	5
x_4	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
y_2	$-\frac{7}{3}$	0	②	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	1
	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_1	-4	0	0	1	1	-1	2	6
x_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到一个基本可行解 $\hat{x} = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 6, 0)$.

从求得的基本可行解出发求最优解,过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-4	0	0	1	1	6
x_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{23}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	3	0	-2	1	0	3
x_2	-1	1	1	0	0	2
x_5	-7	0	2	0	1	3
	1	0	3	0	0	4

最优解 $\bar{x} = (0, 2, 0, 3, 3)$, 最优值 $f_{\max} = 4$.

(6) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 5, \\ & 2x_1 - x_2 + x_6 = 7, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引入人工变量 y , 取大正数 M , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + My \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + y = 5, \\ & 2x_1 - x_2 + x_6 = 7, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	
x_1	1	1	1	1	0	0	0	9
y	-1	②	-1	0	-1	0	1	5
x_6	2	-1	0	0	0	1	0	7
	$-M-2$	$2M+3$	$-M-4$	0	$-M$	0	0	$5M$
x_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_6	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-M-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$
x_5	3	0	3	2	1	0	-1	13
x_2	1	1	1	1	0	0	0	9
x_6	3	0	1	1	0	1	0	16
	-5	0	-7	-3	0	0	$-M$	-27

最优解 $\bar{x} = (0, 9, 0, 0, 13, 16)$, 最优值 $f_{\min} = -27$.

(7) 引入松弛变量 x_4 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引进人工变量 y , 取大正数 M , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + My \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	2	-3	1	0	0	1
y	2	③	0	-1	1	8
	$2M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	$8M+1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	4	0	1	-1	1	9
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

最优解 $\bar{x} = (0, \frac{8}{3}, 9, 0)$, 最优值 $f_{\min} = \frac{11}{3}$.

(8) 引入松弛变量 x_4, x_5 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用大 M 法求解. 引入人工变量 y_1, y_2 , 取大正数 M , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + M(y_1 + y_2) \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + y_1 = 3, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + y_2 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	②	-1	-1	-1	0	1	0	3
y_2	1	-1	1	0	-1	0	1	2
	$3M-2$	$-2M+3$	0	$-M$	$-M$	0	0	$5M$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
y_2	0	$-\frac{1}{2}$	③	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}M+2$	$\frac{3}{2}M-1$	$\frac{1}{2}M-1$	$-M$	$-\frac{3}{2}M+1$	0	$\frac{1}{2}M+3$
x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{10}{3}$

现行基本可行解下, 对应 x_2 的判别数大于 0, 约束系数第 2 列无正元, 人工变量均为非基变量, 取值为 0, 因此不存在有限最优解.

(9) 用修正单纯形法求解. 初始基本可行解未知, 用两阶段法.

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 = 2, \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + y_2 = 6, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_3 = 7, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

记约束系数矩阵、约束右端和费用系数向量如下:

$$\begin{aligned} A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

取初始可行基

$$B = [p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

约束右端向量

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

基变量费用系数向量 $c_B = (c_5, c_6, c_7) = (1, 1, 1)$, 单纯形乘子 $w = c_B B^{-1} = (1, 1, 1)$, 目标函数值 $f = c_B \bar{b} = 15$. 构造初表:

	1	1	1	15
y_1	1	0	0	2
y_2	0	1	0	6
y_3	0	0	1	7

第 1 次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= wp_1 - c_1 = 4, \quad z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = 1, \\ z_3 - c_3 &= wp_3 - c_3 = 0, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 1, \\ z_5 - c_5 &= z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \end{aligned}$$

$$z_1 - c_1 = \max_j \{z_j - c_j\} = 4, \text{ 因此 } x_1 \text{ 进基.}$$

主列

$$B^{-1}p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	x_1			
	1	1	1	15
y_1	1	0	0	2
y_2	0	1	0	6
y_3	0	0	1	7
	-3	1	1	7
x_1	1	0	0	2
y_2	-2	1	0	2
y_3	-1	0	1	5

第2次迭代:

由上表知,单纯形乘子 $w = (-3, 1, 1)$, 计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = 5, \quad z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = -8,$$

$$z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 5, \quad z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = -4,$$

$$z_1 - c_1 = z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_2 - c_2 = \max_j \{z_j - c_j\} = 5.$$

计算主列

$$B^{-1}p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	x_2			
	-3	1	1	7
x_1	1	0	0	2
y_2	-2	1	0	2
y_3	-1	0	1	5

	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$

第3次迭代:

由前表知,单纯形乘子 $w = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$, 计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = \frac{11}{3}, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 0,$$

$$z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = -\frac{2}{3}, \quad z_6 - c_6 = wp_6 - c_6 = -\frac{5}{3},$$

$$z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_3 - c_3 = \max_j \{z_j - c_j\} = \frac{11}{3}.$$

计算主列:

$$B^{-1}p_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$

	0	0	0	0
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
x_2	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

显然, $\forall j$, 有 $z_j - c_j \leq 0$, 一阶段已达最优. 下面进行第2阶段. 从求得的基本可行解

$$\hat{x} = (3, 3, 1, 0)^T$$

出发, 求线性规划的最优解. 记 $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 1, -1, -1)$.

第1次迭代:

基变量为 x_1, x_2, x_3 . 先计算单纯形乘子:

$$w = c_B B^{-1} = (2, 1, -1) \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{6}{11} \right).$$

目标函数值 $f = c_B x_B = 8$. 现行基下对应各变量的判别数: $z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = z_3 - c_3 = 0$,

$z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 2$. 计算主列:

$$B^{-1} p_4 = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

				x_4
	$\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6}{11}$	8
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
x_2	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

	$\frac{12}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{8}{11}$	2
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
x_4	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

	2
	0
	1
	0

第2次迭代:

计算对应各变量的判别数. 因为只有1个非基变量 x_2 , 只需计算对应 x_2 的判别数.

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = -2 < 0,$$

已经达到最优. 最优解 $\bar{x} = (3, 0, 1, 3)$, 最优值 $f_{\min} = 2$.

(10) 用修正单纯形法求解.

初始基本可行解未知, 下面用大M法. 引入人工变量 y_1, y_2, y_3 , 取一个大正数 M , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - M(y_1 + y_2 + y_3) \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + y_1 = 0, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_2 = 6, \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + y_3 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

记约束系数矩阵、右端向量及目标系数向量如下:

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = [0, 6, 9]^T, \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (3, -1, -3, 1, -M, -M, -M).$$

取初始基:

$$B = [p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

单纯形乘子 $w = c_B B^{-1} = [-M, -M, -M]$, 目标函数值 $f = c_B B^{-1} b = -15M$. 构造初表:

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$
y_1	1	0	0	0
y_2	0	1	0	6
y_3	0	0	1	9

第1次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_1 - c_1 = wp_1 - c_1 = -4M - 3, \quad z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = M + 1,$$

$$z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = -4M + 3, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = -3M - 1,$$

$$z_5 - c_5 = z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_1 - c_1 = \min\{z_j - c_j\} = -4M - 3.$$

计算主列:

$$B^{-1} p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$	x_1
y_1	1	0	0	0	①
y_2	0	1	0	6	1
y_3	0	0	1	9	2

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$	
x_1	1	0	0	0	
y_2	-1	1	0	6	
y_3	-2	0	1	9	

第2次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= wp_2 - c_2 = 9M + 7, & z_3 - c_3 &= wp_3 - c_3 = -8M, \\ z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = M + 2, & z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = 4M + 3, \\ z_1 - c_1 &= z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, & z_3 - c_3 &= \min\{z_j - c_j\} = -8M. \end{aligned}$$

计算主列:

$$B^{-1}p_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$	x_3
x_1	1	0	0	0	-1
y_2	-1	1	0	6	3
y_3	-2	0	1	9	⑤

	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$	
x_1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	
y_2	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	
x_3	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	

第3次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= wp_2 - c_2 = -\frac{3}{5}M + 7, & z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = \frac{13}{5}M + 2, \\ z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = \frac{4}{5}M + 3, & z_7 - c_7 &= wp_7 - c_7 = \frac{8}{5}M, \\ z_1 - c_1 &= z_3 - c_3 = z_6 - c_6 = 0. \end{aligned}$$

计算主列:

$$B^{-1}p_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$	x_2
x_1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$
y_2	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	③
x_3	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{6}{5}$

	$\frac{2}{3}$	$-\frac{35}{3}$	7	-7	
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	1	
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1	1	
x_3	0	2	-1	3	

第4次迭代:

$$\begin{aligned} z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = \frac{97}{3}, & z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = M + \frac{2}{3}, \\ z_6 - c_6 &= wp_6 - c_6 = M - \frac{35}{3}, & z_7 - c_7 &= wp_7 - c_7 = M + 7. \end{aligned}$$

判别数均非负, 已达到最优解. 最优解和最优值分别是 $\bar{x} = (1, 1, 3, 0)$ 和 $f_{\max} = -7$.

3. 证明用单纯形方法求解线性规划问题时, 在主元消去前后对应同一变量的判别数有下列关系:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k),$$

其中 $(z_j - c_j)'$ 是主元消去后的判别数, 其余是主元消去前的数据, y_{rk} 为主元.

证 约束矩阵记作 $A = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$, 主元消去前后的基分别记作 B 和 \hat{B} , 基变量的费用系数向量分别记作 c_B 和 \hat{c}_B , 同时记 $B^{-1}p_j = y_j$ 及 $\hat{B}^{-1}p_j = \hat{y}_j$. 主元消去前后, 单纯形方法中第 i 行 j 列元素分别记为 y_{ij} 和 \hat{y}_{ij} , 主元记作 y_{rk} , 则有下列关系:

$$\begin{cases} \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}, & i \neq r, \\ \hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}. \end{cases}$$

因此, 主元消去前后的判别数 $z_j - c_j$ 与 $(z_j - c_j)'$ 必有下列关系:

$$\begin{aligned} (z_j - c_j)' &= \hat{c}_B \hat{B}^{-1} p_j - c_j \\ &= \hat{c}_B \hat{y}_j - c_j \\ &= \sum_{i \neq r} c_{B_i} \left(y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j \\ &= (z_j - c_j) - c_{B_r} y_{rj} - \sum_{i \neq r} c_{B_i} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - c_{B_r} y_{rj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i \neq r} c_{B_i} y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(\sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} - c_k \right) \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k). \end{aligned}$$

4. 假设一个线性规划问题存在有限的最小值 f_0 . 现在用单纯形方法求它的最优解(最小值点), 设在第 k 次迭代得到一个退化的基本可行解, 且只有一个基变量为零 ($x_j = 0$), 此时目标函数值 $f_k > f_0$, 试证这个退化的基本可行解在以后各次迭代中不会重新出现.

证 设现行基本可行解中, 基变量 $x_{B_r} = x_j = 0$, 其他基变量均取正值. 目标函数值为 f_k . 若下次迭代中, x_p 进基, x_j 离基, 则迭代后对应非基变量 x_j 的判别数为负数, 后续迭代中 x_j 不进基. 若下次迭代中, x_p 进基, x_j 仍为基变量, 则 x_p 进基后的取值 $x_p = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0, i \neq r \right\} > 0$, 新的基本可行解处, 目标函数值 $f = f_k - (z_p - c_p)x_p < f_k$, 由于单纯形方法得到的函数值序列单调减小, 因此原退化的基本可行解不会重复出现.

5. 假设给定一个线性规划问题及其一个基本可行解. 在此线性规划中, 变量之和的上

界为 σ , 在已知的基本可行解处, 目标函数值为 f , 最大判别数是 $z_k - c_k$, 又设目标函数值的允许误差为 ϵ , 用 f_0 表示未知的目标函数的最小值. 证明: 若

$$z_k - c_k \leq \epsilon / \sigma,$$

则

$$f - f_0 \leq \epsilon.$$

证 考虑线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & f \stackrel{\text{def}}{=} cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

在已知基本可行解 x 处的目标函数值 f 与最小值 f_0 有如下关系:

$$f_0 = f - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j,$$

其中 R 是非基变量的下标集, $z_j - c_j$ 是对应非基变量 x_j 的判别数. 显然有

$$f - f_0 = \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \leq \sum_{j \in R} (z_k - c_k) x_j \leq \frac{\epsilon}{\sigma} \sum_{j \in R} x_j \leq \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \epsilon.$$

6. 假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数 $z_j - c_j > 0$, 且单纯形表中相应的列 $y_j = B^{-1}p_j \leq 0$. 证明

$$d = \begin{bmatrix} -y_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是可行域的极方向. 其中分量 1 对应 x_j .

证 不妨设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 并记作

$$A = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_m \ \cdots \ p_n] = [B \ p_{m+1} \ \cdots \ p_n].$$

由于

$$Ad = [B \ p_{m+1} \ \cdots \ p_j \ \cdots \ p_n] \begin{bmatrix} -B^{-1}p_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -p_j + p_j = 0,$$

且 $d \geq 0$, 因此 d 是可行域的方向.

下面证明 d 是极方向. 设 d 可表示成可行域的两个方向 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 的正线性组合, 即

$$d = \lambda d^{(1)} + \mu d^{(2)}, \quad (1)$$

其中 $\lambda, \mu > 0, d^{(1)} \geq 0, d^{(2)} \geq 0$, 比较(1)式两端的各分量, 易知 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 有下列形式:

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} d_B^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} d_B^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_j, b_j > 0.$$

由于 $d^{(1)}$ 是可行域的方向, 因此 $Ad^{(1)} = 0, d^{(1)} \geq 0$, 即

$$Bd_B^{(1)} + a_j p_j = 0. \quad (2)$$

同理, 由 $Ad^{(2)} = 0$, 知

$$Bd_B^{(2)} + b_j p_j = 0. \quad (3)$$

由(2)式及(3)式得到

$$\frac{1}{a_j} Bd_B^{(1)} = \frac{1}{b_j} Bd_B^{(2)}.$$

两端左乘 B^{-1} , 则有

$$d_B^{(2)} = \frac{b_j}{a_j} d_B^{(1)}.$$

代入方向 $d^{(2)}$, 从而得到

$$d^{(2)} = \frac{b_j}{a_j} d^{(1)}, \quad \text{其中 } a_j, b_j > 0,$$

即 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 是同向非零向量. 因此方向 d 不能表示成两个不同方向的正线性组合, d 是可行域的极方向.

7. 用关于变量有界情形的单纯形方法解下列问题:

- (1) $\min 3x_1 - x_2$
s. t. $x_1 + x_2 \leq 9$,
 $0 \leq x_j \leq 6, \quad j=1, 2.$
- (2) $\max -x_1 - 3x_3$
s. t. $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$,
 $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$,
 $0 \leq x_1 \leq 4$,
 $0 \leq x_2 \leq 4$,
 $0 \leq x_3 \leq 4$,
 $0 \leq x_4 \leq 12.$
- (3) $\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$
s. t. $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 6$,
 $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$,
- (4) $\max 4x_1 + 6x_2$
s. t. $2x_1 + x_2 \leq 4$,
 $3x_1 - x_2 \leq 9$,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 8, & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 &\leq 3, & 0 \leq x_2 \leq 3. \\ 1 \leq x_2 &\leq 4, \\ 0 \leq x_3 &\leq 10, \\ 2 \leq x_4 &\leq 5. \end{aligned}$$

解 (1) 引进松弛变量 x_3 , 写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & 0 \leq x_i \leq 6, \quad i=1, 2, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_B = x_3 = 9, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{目标函数值 } f_0 = 0.$$

单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	1	①	1	9
	-3	1	0	0
	1	1		

取下界的非基变量下标集 $R_1 = \{1, 2\}$, 取上界的非基变量下标集 $R_2 = \emptyset$. 已用符号 1 标注在表下.

选择 x_2 作为进基变量, 令 $x_2 = 0 + \Delta_2 = \Delta_2$, 计算 Δ_2 :

$$\beta_1 = \frac{9-0}{1} = 9, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 6-0 = 6,$$

令 $\Delta_2 = \min\{9, \infty, 6\} = 6$, 因此, $x_2 = 6$, 取值上界, 仍为非基变量, 基变量是 x_3 , 取值改变:

$$x_B = x_3 = \hat{b} - y_2 \Delta_2 = 9 - 6 = 3, \quad f = f_0 - (z_2 - c_2)x_2 = 0 - 1 \times 6 = -6.$$

修改单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	1	1	1	3
	-3	1	0	-6
	1	u		

已经达到最优, 最优解 $\bar{x} = (0, 6, 3)$, 最优值 $f_{\min} = -6$.

(2) 用两阶段法求解. 先求一个基本可行解, 为此解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + y = 6, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ & 0 \leq x_2 \leq 4, \\ & 0 \leq x_3 \leq 4, \\ & 0 \leq x_4 \leq 12, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_B = \begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
y	②	-2	1	0	1	6
x_4	1	2	1	1	0	10
	2	-2	1	0	0	6
	1	1	1			

选择变量 x_1 , 令 $x_1 = 0 + \Delta_1 = \Delta_1$, 下面计算增量 Δ_1 :

$$\beta_1 = \min \left\{ \frac{6-0}{2}, \frac{10-0}{1} \right\} = 3, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 4.$$

令 $\Delta_1 = \min\{3, \infty, 4\} = 3$, 因此 $x_1 = 3$. 未达 x_1 的上界, 作为进基变量.

$$\begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (z_1 - c_1)x_1 = 6 - 2 \times 3 = 0,$$

y 离基, 修改单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_4	0	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
	0	0	0	0	-1	0
		1	1		1	

一阶段问题已经达到最优, 修改单纯形表, 进行第二阶段:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	3
x_4	0	3	$\frac{1}{2}$	1	7
	0	1	$\frac{5}{2}$	0	-3
		1	1		

已经达到最优, 最优解 $\bar{x} = (3, 0, 0, 7)$, 最优值 $f_{\max} = -3$.

(3) 用两阶段法求解. 先解下列线性规划, 求一个基本可行解:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_6 + y = 2, \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 8, \\ & 0 \leq x_1 \leq 3, \\ & 1 \leq x_2 \leq 4, \\ & 0 \leq x_3 \leq 10, \\ & 2 \leq x_4 \leq 5, \\ & x_5, x_6, x_7, y \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ y \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f = 1.$$

单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y
x_5	1	-1	1	-2	1	0	0	11
y	②	1	-1	0	0	-1	0	1
x_7	-1	1	-1	1	0	0	1	5
	2	1	-1	0	0	-1	0	1
	1	1	1	1		1		

选择变量 x_1 , 令 $x_1 = \Delta_1$, 计算 Δ_1 的取值:

$$\beta_1 = \min\left\{\frac{11-0}{1}, \frac{1-0}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 3-0 = 3.$$

令 $\Delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \infty, 3\right\} = \frac{1}{2}$. 修改右端列, 取 $x_1 = \frac{1}{2}$, 原来基变量的取值为

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ 0 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix},$$

y 离基, x_1 进基, 新基下目标值 $f = f_0 - (z_1 - c_1)\Delta_1 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$. 修改后单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
		1	1	1		1		1	

得到原来线性规划的一个基本可行解.

下面进行第二阶段, 从求得的基本可行解出发, 求最优解. 为此, 先修改上面单纯形表.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{11}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
		1	1	1		1		

选择变量 x_4 , 令 $x_4 = 2 + \Delta_4$, 下面求 Δ_4 :

$$\beta_1 = \frac{11}{2} - 0 = \frac{11}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 5 - 2 = 3.$$

令 $\Delta_4 = \min\left\{\frac{11}{2}, \infty, 3\right\} = 3$, x_4 取上界值.

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (z_4 - c_4)\Delta_4 = \frac{1}{2} - 1 \times 3 = -\frac{5}{2}.$$

修改单纯形表右端列, 得下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{33}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
		1	1	1		1		

求得最优解 $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 5, \frac{33}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$, 最优值 $f_{\min} = -\frac{5}{2}$.

(4) 引入松弛变量 x_3, x_4 , 化成

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 9, \\ & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ & 0 \leq x_2 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

目标函数值 $f_0 = 0$. 列表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	1	1	0	4
x_4	3	-1	0	1	9
	-4	-6	0	0	0
	1	1			

选择 x_2 , 令 $x_2 = 0 + \Delta_2$. 下面求 Δ_2 :

$$\beta_1 = \frac{4-0}{1} = 4, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 3-0 = 3, \quad \Delta_2 = \min\{4, \infty, 3\} = 3.$$

非基变量 x_2 改为取值上界, 令 $x_2=3$. 仍取 x_3, x_4 作为基变量. 修改右端列:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (x_2 - c_2)\Delta_2 = 18,$$

得下列单纯形表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	②	1	1	0	1
x_4	3	-1	0	1	12
	-4	-6	0	0	18
	1	u			

还未达到最优.

选择变量 x_1 , 令 $x_1=0+\Delta_1$ 计算 Δ_1 :

$$\beta_1 = \min\left\{\frac{1-0}{2}, \frac{12-0}{3}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 4-0 = 4.$$

$$\text{令 } \Delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \infty, 4\right\} = \frac{1}{2}. \text{ 取}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (x_1 - c_1)\Delta_1 = 18 - (-4) \times \frac{1}{2} = 20.$$

x_1 进基, x_3 离基取下界. 经迭代得到新单纯形表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_4	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{21}{2}$
	0	-4	2	0	20
		u	1		

已经达到最优, 最优解 $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 3, 0, \frac{21}{2}\right)$, 最优值 $f_{\max} = 20$.

8. 用分解算法解下列线性规划问题:

$$(1) \max x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$(2) \max 5x_1 - 2x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30,$$

$$x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_4 &\leq 10, \\ -x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(3) \max x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 12,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$x_3 \leq 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9,$$

$$-x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

$$(4) \min -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 20,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_3 - 5x_4 \leq 5,$$

$$-x_3 + 2x_4 \leq 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

$$(5) \min -x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 6x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 7,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$3x_3 + 4x_4 \geq 12,$$

$$x_3 \leq 4,$$

$$x_4 \leq 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

解 (1) 把线性规划写为下列形式:

$$\max cx$$

$$\text{s. t. } Ax \leq b,$$

$$x \in S,$$

其中, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $c = (1, 3, -1, 1)$, $A = (1, 1, 1, 1)$, $b = 8$,

$$S = \left\{ x \mid \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \end{cases} \right\}.$$

引入松弛变量 $v \geq 0$. 设集合 S 有 t 个极点, 有 l 个极方向, 则每个 $x \in S$ 可表示为

$$x = \sum_{j=1}^t \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^l \mu_j d^{(j)},$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

主规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^t (cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^l (cd^{(j)})\mu_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^t (Ax^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^l (Ad^{(j)})\mu_j + v = b, \\ & \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ & \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形法解主规划.

取集 S 一个极点 $x^{(1)} = (0, 0, 0, 0)^T$, 将其对应的变量 λ_1 和松弛变量 v 作为初始基变量, 初始基

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在主规划中, 基变量的目标系数 $\hat{c}_B = (0, cx^{(1)}) = (0, 0)$. 在基 B 下, 单纯形乘子 $(w, \alpha) =$

$\hat{c}_B B^{-1} = (0, 0)$, 约束右端 $\bar{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$, 目标函数值 $f = \hat{c}_B \bar{b} = 0$. 修正单纯形法中, 初表如下:

	0	0	0
v	1	0	8
λ_1	0	1	1

第1次迭代:

解子规划, 求最小判别数:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA - c)x + \alpha \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ & -x_3 + x_4 \leq 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ & x_3 + 2x_4 + x_6 = 10, \\ & -x_3 + x_4 + x_7 = 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned}$$

用单纯形法求解如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	①	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	1	0	0	1	4
	1	3	-1	1	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	①	0	0	1	4
	-2	0	-1	1	-3	0	0	-18
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	3	0	0	1	-2	2
x_4	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	0	0	-3	0	-1	-22

主规划的最小判别数 $z_2 - c_2 = -22$, 集合 S 的一个极点 $x^{(2)} = (0, 6, 0, 4)^T$. 计算主列:

$$y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

			λ_2
	0	0	0
v	1	0	8
λ_1	0	1	1
	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{88}{5}$
λ_2	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{5}$
λ_1	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{5}$

第2次迭代:

先解子规划,求最小判别数:

由第1次迭代结果知,在新基下单纯形乘子 $w = \frac{11}{5}, \alpha = 0, wA - c = \left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

$$\min (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

即

$$\min \frac{6}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{16}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

修改第1次迭代中子规划最优表最后一行,然后用单纯形法求子规划最优解:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	3	0	0	1	-2	2
x_4	0	0	-1	1	0	0	①	4
	-2	0	-\frac{22}{5}	0	-\frac{4}{5}	0	\frac{6}{5}	0

x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	-\frac{16}{5}	-\frac{6}{5}	-\frac{4}{5}	0	0	-\frac{24}{5}

得到集合 S 的一个极点 $x^{(3)} = (0, 6, 0, 0)$, 现行主规划最小判别数 $z_3 - c_3 = -\frac{24}{5}, \lambda_3$ 进基.

$$y_3 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

		λ_3
	$\frac{11}{5}$	0
λ_2	$\frac{1}{10}$	0
λ_1	$-\frac{1}{10}$	1

	$\frac{88}{5}$	
	$\frac{4}{5}$	
	$\frac{1}{5}$	
	②	

	1	12	20
λ_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
λ_3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

第3次迭代:

解子规划求最小判别数:

$$wA - c = 1 \cdot (1, 1, 1, 1) - (1, 3, -1, 1) = (0, -2, 2, 0).$$

$$\min (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

即

$$\min -2x_2 + 2x_3 + 12$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	-2	0	-2	0	0	0

子规划的最小值为0, 即主规划在现行基下最小判别数为0, 因此达到最优. 最优解是

$$\bar{x} = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

最优值 $f_{\max} = 20$.

(2) 第一个约束记作 $A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq b$, 其中 $A_1 = (1, 1), A_2 = (1, 1), b = 30$. 相应地, 记 $c =$

$$(c_1, c_2), c_1 = (5, 0), c_2 = (-2, 1), S_1 = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}, S_2 = \left\{ x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} -x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

线性规划记为:

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{s. t. } A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq b,$$

$$x_1 \in S_1,$$

$$x_2 \in S_2.$$

由于 S_1, S_2 均是有界集, 不存在方向, 设 S_1 的极点为 $x_1^{(j)}, j = 1, 2, \dots, t_1, S_2$ 的极点为 $x_2^{(j)},$

$j=1, 2, \dots, t_2$, 引入松弛变量 $v \geq 0$.

主规划如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + v = b, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_2. \end{aligned}$$

分别取 S_1 和 S_2 的极点

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

初始基变量 $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$, 初始基矩阵 B 为三阶单位矩阵. 单纯形乘子和约束右端向量分别是

$$(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} = (0, 0, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0), \quad \bar{b} = B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用修正单纯形方法解主规划, 初表如下:

	0	0	0	0
v	1	0	0	30
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第1次迭代:

为确定进基变量, 分别求解下列两个子规划. 先解第一个子规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned} \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 9, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是 $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, Z_{1,\min} = -35$.

再解第二个子规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2. \end{aligned} \quad (2)$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & -x_3 + x_4 \leq 2, \\ & x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解和最优值分别是 $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, Z_{2,\min} = -2$.

对应 λ_{12} 的判别数 $x_{12} - c_{12} = -35$, 最小, 因此 λ_{12} 作为进基变量. 主列是

$$y_1^{(2)} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

下面作主元消去运算:

	0	0	0	0	λ_{12}	-35
v	1	0	0	30		12
λ_{11}	0	1	0	1		①
λ_{21}	0	0	1	1		0
	0	35	0	35		
v	1	-12	0	18		
λ_{12}	0	1	0	1		
λ_{21}	0	0	1	1		

第2次迭代:

先解子规划确定进基变量.

解子规划(1):

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 + 35 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 12, \end{aligned}$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是 $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $Z_{1,\min} = 0$.

解子规划(2):

$$\min 2x_3 - x_4$$

$$\text{s. t. } -x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_3, x_4 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是 $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $Z_{2,\min} = -2$.

λ_{23} 进基, 计算主列:

$$y_2^{(3)} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(3)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

				λ_{23}
	0	35	0	35
v	1	-12	0	18
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1
	0	35	2	37
v	1	-12	-2	16
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{23}	0	0	1	1

第3次迭代:

子规划(1)计算结果同前.

子规划(2), 即

$$\min 2x_3 - x_4 + 2$$

$$\text{s. t. } -x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划(2)的最优值 $Z_{3,\min} = 0$.

经两次迭代, 在现行基下, 对应各变量的判别数均大于或等于0, 因此达到最优. 最优解

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \lambda_{12} x_1^{(2)} \\ \lambda_{23} x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_{\max} = 37.$$

(3) 将线性规划记为

$$\max cx$$

$$\text{s. t. } Ax \leq 12,$$

$$x \in S,$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $c = (1, 2, 1)$, $A = (1, 1, 1)$,

$$S = \left\{ x \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

设 S 有 t 个极点 $x^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, t$, 有 l 个极方向 $d^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, l$. 引入松弛变量 $v \geq 0$. 主规划如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^t (cx^{(j)}) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (cd^{(j)}) \mu_j \\ \text{s. t. } \quad & \sum_{j=1}^t (Ax^{(j)}) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (Ad^{(j)}) \mu_j + v = 12, \\ & \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ & \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划:

取集合 S 的一个极点 $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$, 初始基变量为 v 和 λ_1 , 初始基 B 是二阶单位矩阵. 单纯形乘子 $(w, \alpha) = c_B B^{-1} = (0, 0)$, 约束右端 $b = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$ 现行基本可行解下的目标函数值 $f=0$. 初表为

	0	0	0
v	1	0	12
λ_1	0	1	1

第1次迭代:

解子规划,求最小判别数:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA - c)x + \alpha \\ \text{s. t.} \quad & x \in S, \end{aligned}$$

其中 $wA - c = (-1, -2, -1)$, 上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解,求得集合 S 的一个极方向, $d^{(1)} = (2, 1, 0)^T$.

主规划中,对应 μ_1 的判别数 $(wA - c)d^{(1)} = -4$, μ_1 进基,主列

$$y_1 = B^{-1} \begin{bmatrix} A d^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

			μ_1
	0	0	0
v	1	0	12
λ_1	0	1	1
	$\frac{4}{3}$	0	16
μ_1	$\frac{1}{3}$	0	4
λ_1	0	1	1
			-4
			③
			0

第2次迭代:

先解子规划,求判别数:

$$wA - c = \frac{4}{3}(1, 1, 1) - (1, 2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

子规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

用单纯形方法求得子规划最优解 $x^{(2)} = (4, 6, 0)^T$, 最小值 $z = -\frac{8}{3}$. λ_2 为进基变量, 主列

$$y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} A x^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

			λ_2
	$\frac{4}{3}$	0	16
μ_1	$\frac{1}{3}$	0	4
λ_1	0	1	1
	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{56}{3}$
μ_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$
λ_2	0	1	1
			$-\frac{8}{3}$
			$\frac{10}{3}$
			①

第3次迭代:

$wA - c = \frac{4}{3}(1, 1, 1) - (1, 2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $w = \frac{4}{3}$, $\alpha = \frac{8}{3}$. 子规划如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3} \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x^{(3)} = (4, 6, 0)^T$, 最优值 $z = 0$. 结果表明, 主规划已达最优解. 原问题的最优解为

$$\bar{x} = \lambda_2 x^{(2)} + \mu_1 d^{(1)} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

最优值 $f_{\max} = \frac{56}{3}$.

(4) 将线性规划写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.} \quad & A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq 20, \\ & x_1 \in S_1, \\ & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

其中, $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, c_1 = (-2, 4), c_2 = (-1, 1), A_1 = (1, 2), A_2 = (4, 1).$

$$S_1 = \left\{ x_1 \mid \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \right\}, \quad S_2 = \left\{ x_2 \mid \begin{cases} x_3 - 5x_4 \leq 5 \\ -x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

S_1 是有界集, 设有 t_1 个极点 $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(t_1)}$. S_2 是无界集, 设有 t_2 个极点, 有 l 个极方向. 引入松弛变量 v . 主规划如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + \sum_{j=1}^l (c_2 d^{(j)}) \mu_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + \sum_{j=1}^l (A_2 d^{(j)}) \mu_j + v = 20, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_2, \\ & \mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l, v \geq 0. \end{aligned}$$

取 S_1 的极点 $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, S_2$ 的极点 $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 初始基变量取 $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$.

初始基 B 是三阶单位矩阵, 单纯形乘子 $(w, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0)$, 目标值 $z = 0$, 初始单纯形表如下:

	0	0	0	0
v	1	0	0	20
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第1次迭代:

解下列子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, 最优值 $z_1 = 8$, 即主规划中对应 λ_{12} 的判别数是 8. λ_{12} 进基, 主列

$$y_{12} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

					λ_{12}
	0	0	0	0	8
v	1	0	0	20	4
λ_{11}	0	1	0	1	①
λ_{21}	0	0	1	1	0
	0	-8	0	-8	
v	1	-4	0	16	
λ_{12}	0	1	0	1	
λ_{21}	0	0	1	1	

第2次迭代:

解下列子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 4x_2 - 8 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解同第1次迭代,最优值 $z_1 = 0$. 现行解下,对应 λ_{1j} 的判别数均小于或等于0.

再解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

用单纯形方法解子规划,可知无界. S_2 的一个极方向 $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. 在主规划中,对应于 μ_1 的

判别数 $(wA_2 - c_2)d^{(1)} = (1, -1) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4, \mu_1$ 进基,主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 d^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

		0	-8	0	-8	
v		1	-4	0	16	
λ_{12}		0	1	0	1	
λ_{21}		0	0	1	1	
		$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$	
μ_1		$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$	
λ_{12}		0	1	0	1	
λ_{21}		0	0	1	1	

μ_1	4
	(21)
	0
	0

第3次迭代:

解子规则

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{38}{21}x_1 - \frac{92}{21}x_2 - \frac{152}{21} \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$, 最优值 $z_1 = 0$.

再解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{21}x_3 - \frac{25}{21}x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, 最优值 $z_2 = \frac{25}{21}$.

主规划中,对应 λ_{22} 的判别数为 $\frac{25}{21}$, 主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$
μ_1	$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

	$\frac{25}{21}$
	$(\frac{20}{21})$
	0
	1

	$-\frac{1}{4}$	-7	0	$-\frac{12}{1}$
λ_{22}	$\frac{1}{20}$	$-\frac{4}{20}$	0	$\frac{16}{20}$
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	$-\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	1	$\frac{4}{20}$

第4次迭代:
解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{7}{4}x_1 - \frac{9}{2}x_2 - 7 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$, 最优值 $z_1 = 0$.

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + a_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{5}{4}x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2^{(2)}$, 最优值 $z_2 = 0$.

主规划对应各变量的判别数均小于或等于0, 因此达到最优. 主规划的最优解是 $\lambda_{12} = 1, \lambda_{21} = \frac{4}{20}, \lambda_{22} = \frac{16}{20}$, 其余变量均为非基变量, 取值为0.

原来问题最优解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{12}x_1^{(2)} \\ \lambda_{21}x_2^{(1)} + \lambda_{22}x_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优值 } f_{\min} = -12.$$

(5) 线性规划写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & A_1x_1 + A_2x_2 \leq b \\ & x_1 \in S_1, \\ & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

其中 $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, c_1 = [-1, -8], c_2 = [-5, -6], A_1 = [1, 4], A_2 = [5, 2], b = 7$.

$$S_1 = \left\{ x_1 \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \right\}, \quad S_2 = \left\{ x_2 \mid \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 \geq 12 \\ x_3 \leq 4 \\ x_4 \leq 3 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

S_1 和 S_2 均为有界集. 设 S_1 有 t_1 个极点: $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(t_1)}$, S_2 有 t_2 个极点: $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(t_2)}$. 主规划写成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1x_1^{(j)})\lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2x_2^{(j)})\lambda_{2j} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1x_1^{(j)})\lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2x_2^{(j)})\lambda_{2j} + v = b, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_2, v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划.

先给定初始基. 取 S_1 的一个极点 $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, S_2 的一个极点 $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

初始基变量为 $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$. 构造初表:

	0	0	0	0
v	1	0	0	7
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第1次迭代:

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, 最优值 $z_1 = 16$. 可知主规划中对应 λ_{12} 的判别数为 16, λ_{12} 进基, 主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

	0	0	0	0	λ_{12}
v	1	0	0	7	16
λ_{11}	0	1	0	1	8
λ_{21}	0	0	1	1	1

	-2	0	0	-14
λ_{12}	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$
λ_{11}	$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$
λ_{21}	0	0	1	1

第2次迭代:

解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1^{(1)}$, 最优值 $z_1 = 0$. 即主规划中对应 λ_{1j} 的最大判别数为 0.

再解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + a_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_3 + 2x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_3 + 4x_4 \geq 12, \\ & x_3 \leq 4, \\ & x_4 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

用两阶段法求得子规划最优解 $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, 最优值 $z_2 = 6$, 即主规划中对应 λ_{22} 的判别数为 6, λ_{22} 进基, 主列为

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

					λ_{22}
		-2	0	0	-14
λ_{12}		$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$
λ_{11}		$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$
λ_{21}		0	0	1	1
		-2	0	-6	-20
λ_{12}		$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
λ_{11}		$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
λ_{22}		0	0	1	1

λ_{22}
6
$\frac{3}{4}$
$-\frac{3}{4}$
①

第3次迭代:

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (uA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$, 最优值 $z_1 = 0$.

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (uA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_3 + 2x_4 - 6 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_3 + 4x_4 \geq 12, \\ & x_3 \leq 4, \\ & x_4 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = x_2^{(2)}$, 最优值 $z_2 = 0$.

主规划已达到最优, 最优解是: $\lambda_{11} = \frac{7}{8}, \lambda_{12} = \frac{1}{8}, \lambda_{22} = 1$, 其余变量均为非基变量, 取值为0.

原来问题最优解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}x_1^{(1)} + \lambda_{12}x_1^{(2)} \\ \lambda_{22}x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

最优值 $f_{\min} = -20$.

对偶原理及灵敏度分析题解

1. 写出下列原问题的对偶问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \max \quad & 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15, \\
 & -x_1 + 2x_2 - 7x_3 \geq 3, \\
 & x_1 + x_3 = 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 (2) \min \quad & -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 1, \\
 & 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -3, \\
 & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\
 & x_1, x_2, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

解 (1) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 15w_1 + 3w_2 + w_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 3w_1 - w_2 + w_3 \geq 4, \\
 & w_1 + 2w_2 \geq -3, \\
 & 2w_1 - 7w_2 + w_3 \geq 5, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

(2) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w_1 - 3w_2 - 5w_3 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + 2w_2 + w_3 \leq -4, \\
 & w_1 - 6w_2 + 4w_3 \leq -5, \\
 & 2w_1 + 3w_2 + 3w_3 = -7, \\
 & -w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 1, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

2. 给定原问题

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

已知对偶问题的最优解 $(w_1, w_2) = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$, 利用对偶性质求原问题的最优解.

解 对偶问题:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w_1 + 2w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + w_2 \leq 4, \\
 & -w_1 + 2w_2 \leq 3, \\
 & w_1 - 3w_2 \leq 1, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

由于对偶问题的最优解 $w_1 = \frac{5}{3} > 0, w_2 = \frac{7}{3} > 0$, 因此原问题的前两个约束在最优解处是紧约束. 又知对偶问题的第3个约束在最优解处是松约束, 因此原问题在最优解处 $x_3 = 0$. 从而得下列线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

解得原问题的最优解 $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 0$, 最优值为 $\frac{19}{3}$.

3. 给定下列线性规划问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 10x_1 + 7x_2 + 30x_3 + 2x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 - 6x_3 + x_4 \leq -2, \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -7, \\
 & x_2, x_3, x_4 \leq 0.
 \end{aligned}$$

(1) 写出上述原问题的对偶问题.

(2) 用图解法求对偶问题的最优解.

(3) 利用对偶问题的最优解及对偶性质求原问题的最优解和目标函数的最优值.

解 (1) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -2w_1 - 7w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + w_2 = 10, \\
 & w_2 \leq 7,
 \end{aligned}$$

$$-6w_1 + 5w_2 \leq 30,$$

$$w_1 - w_2 \leq 2,$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

(2) 对偶问题的可行域是直线 $w_1 + w_2 = 10$ 上的一线段, 容易在坐标平面上画出, 这里从略. 对偶问题最优解 $(w_1, w_2) = (3, 7)$, 最优值为 -55 .

(3) 由于对偶问题的最优解中, $w_1 > 0, w_2 > 0$, 因此在原问题最优解处, 有

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -7. \end{cases}$$

由于对偶问题在点 $(3, 7)$ 处第 3、4 个约束是松约束, 因此原问题中 $x_3 = x_4 = 0$. 代入方程组, 得到原问题的最优解为 $x_1 = -2, x_2 = -5, x_3 = x_4 = 0$, 最优值为 -55 .

4. 给定线性规划问题

$$\min \quad 5x_1 + 21x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 - x_2 + 6x_3 \geq b_1,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

其中 b_1 是某一个正数, 已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$.

(1) 写出对偶问题.

(2) 求对偶问题的最优解.

解 (1) 对偶问题如下:

$$\max \quad b_1 w_1 + w_2$$

$$\text{s. t.} \quad w_1 + w_2 \leq 5,$$

$$-w_1 + w_2 \leq 0,$$

$$6w_1 + 2w_2 \leq 21,$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

(2) 利用互补松弛性质求对偶问题的最优解. 由于原问题在最优解处 $x_1 > 0, x_3 > 0$, 因此有

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 5, \\ 6w_1 + 2w_2 = 21. \end{cases}$$

解得对偶问题的最优解: $w_1 = \frac{11}{4}, w_2 = \frac{9}{4}$, 最优值为 $\frac{31}{4}$.

5. 给定原始的线性规划问题

$$\min \quad cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

假设这个问题与其对偶问题是可行的. 令 $w^{(0)}$ 是对偶问题的一个已知的最优解.

(1) 若用 $\mu \neq 0$ 乘原问题的第 k 个方程, 得到一个新的原问题, 试求其对偶问题的最优解.

(2) 若将原问题第 k 个方程的 μ 倍加到第 r 个方程上, 得到新的原问题, 试求其对偶问题的最优解.

$$\text{解 不妨设 } A \text{ 是 } m \times n \text{ 矩阵, 并记 } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

于是原问题可写作

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & A_i x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其对偶问题可写作

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m b_i w_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m w_i A_i \leq c. \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 用 $\mu \neq 0$ 乘 (1) 式中第 k 个方程后, 对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + \mu b_k w_k + \dots + b_m w_m \\ \text{s. t.} \quad & w_1 A_1 + \dots + \mu w_k A_k + \dots + w_m A_m \leq c. \end{aligned}$$

显然, $w = (w_1^{(0)}, \dots, \frac{1}{\mu} w_k^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$ 是对偶问题的可行解, 且对偶目标函数值等于原问题的最优值, 因此是对偶问题的最优解.

(2) 变化后的原问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & A_1 x = b_1, \\ & \vdots \\ & A_k x = b_k, \\ & \vdots \\ & (A_r + \mu A_k) x = b_r + \mu b_k, \\ & \vdots \\ & A_m x = b_m, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

其对偶问题是:

$$\begin{aligned} \max \quad & b_1 w_1 + \cdots + b_k w_k + \cdots + (b_r + \mu b_k) w_r + \cdots + b_m w_m \\ \text{s. t.} \quad & w_1 A_1 + \cdots + w_k A_k + \cdots + w_r (A_r + \mu A_k) + \cdots + w_m A_m \leq c. \end{aligned}$$

显然, $w = (w_1^{(0)}, \dots, w_k^{(0)} - \mu w_r^{(0)}, \dots, w_r^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$ 是可行解, 且在此点处对偶问题的目标函数值等于原问题的最优值, 因此是对偶问题的最优解.

6. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

其中 A 是 m 阶对称矩阵, $c^T = b$. 证明若 $x^{(0)}$ 是上述问题的可行解, 则它也是最优解.

证 对偶问题是

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c. \end{aligned}$$

显然, $w = x^{(0)T}$ 是对偶问题的可行解, 且在此点处对偶问题的目标函数值等于原问题在 $x^{(0)}$ 点处的函数值. 因此 $x^{(0)}$ 是最优解.

7. 用对偶单纯形法解下列问题:

- (1) $\min 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$ (2) $\max -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4$
 $\text{s. t. } x_1 + 3x_3 \geq 3, \quad \text{s. t. } -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3,$
 $x_2 + 2x_3 \geq 5, \quad x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 8,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0. \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$
- (3) $\max x_1 + x_2$ (4) $\max -4x_1 + 3x_2$
 $\text{s. t. } x_1 - x_2 - x_3 = 1, \quad \text{s. t. } 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 32,$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 14,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0. \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$
- (5) $\min 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5$
 $\text{s. t. } -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 + x_8 = 1,$
 $x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_8 = 4,$
 $-2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_7 + x_8 = 2,$
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8.$

解 (1) 引进松弛变量 x_4, x_5 , 化成标准形式, 并给定初始对偶可行的基本解:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ & -x_2 - 2x_3 + x_5 = -5, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用表格形式计算如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
	-4	-6	-18	0	0	0
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	-4	0	-6	0	-6	30
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 1)$, 最优值 $f_{\min} = 36$.

(2) 引进松弛变量 x_5, x_6 , 给定初始对偶可行的基本解. 问题化成

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \\ & -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + x_6 = -8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

用表格形式计算如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	-2	5	3	-5	1	0	3
x_6	-1	-2	-5	-6	0	1	-8
	3	2	4	8	0	0	0
x_5	$-\frac{13}{5}$	$\frac{19}{5}$	0	$-\frac{43}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$
x_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{16}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{32}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{13}{43}$	$-\frac{19}{43}$	0	1	$-\frac{5}{43}$	$-\frac{3}{43}$	$\frac{9}{43}$
x_3	$\frac{7}{43}$	$\frac{40}{43}$	1	0	$\frac{6}{43}$	$-\frac{5}{43}$	$\frac{58}{43}$
	$\frac{53}{43}$	$\frac{78}{43}$	0	0	$\frac{16}{43}$	$\frac{44}{43}$	$-\frac{304}{43}$

最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, \frac{58}{43}, \frac{9}{43})$, 最优值 $f_{\max} = -\frac{304}{43}$.

(3) 先给定一个基本解, 为此将线性规划化作

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_3 + x_4 = -2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

构造扩充问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_3 + x_4 = -2, \\ & x_2 + x_3 + x_5 = M, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

其中 $M > 0$, 很大.

用表格形式求解扩充问题:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-1	-1	0	0	1
x_4	0	0	-1	1	0	-2
x_5	0	①	1	0	1	M
	0	-2	-1	0	0	1
x_1	1	0	0	0	1	M+1
x_4	0	0	⊖1	1	0	-2
x_2	0	1	1	0	1	M
	0	0	1	0	2	2M+1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	0	1	M+1
x_3	0	0	1	-1	0	2
x_2	0	1	0	1	1	M-2
	0	0	0	1	2	2M-1

扩充问题的最优解是 $(M+1, M-2, 2, 0, 0)$, 最优值为 $2M-1$. 显然, 原来线性规划无上界.

(4) 先给出一个基本解, 为此将线性规划写作:

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -23, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

构造扩充问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -23, \\ & x_1 + x_2 + x_5 = M, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

其中 $M > 0$, 很大.

用表格形式求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	1	1	0	0	9
x_4	-3	-2	0	1	0	-23
x_5	1	①	0	0	1	M
	4	-3	0	0	0	0
x_3	0	0	1	0	⊖1	9-M
x_4	-1	0	0	1	2	2M-23
x_2	1	1	0	0	1	M
	7	0	0	0	3	3M

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	-1	0	1	$M-9$
x_4	-1	0	2	1	0	-5
x_2	1	1	1	0	0	9
	7	0	3	0	0	27

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	-1	0	1	$M-9$
x_1	1	0	-2	-1	0	5
x_2	0	1	3	1	0	4
	0	0	17	7	0	-8

扩充问题的最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 4, 0, 0, M-9)$, 最优值为-8.

原来问题的最优解: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 4, 0, 0)$, 最优值 $f_{\max} = -8$.

(5) 先求一个基本解, 将线性规划化成

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 \\
 \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = -3, \\
 & x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_8 = 4, \\
 & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = -2, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8.
 \end{aligned}$$

用表格形式求解如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_6	-2	1	1	1	-1	1	0	0	-3
x_8	1	1	-3	2	-2	0	0	1	4
x_7	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	-2
	-4	-3	-5	-1	-2	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	2	-1	-1	-1	1	-1	0	0	3
x_8	5	-1	-5	0	0	-2	0	1	10
x_7	1	-2	0	0	0	-1	1	0	1
	0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6

最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 10)$, 最优解 $f_{\min} = 6$.

8. 用原始-对偶算法解下列问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \max \quad & -x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 6x_5 \\
 \text{s. t.} \quad & -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \min \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 + x_6 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\
 & x_4 + x_5 + x_6 = 8, \\
 & x_1 + x_3 + x_5 = 12, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

解 (1) 对偶问题是

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6w_1 + 3w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -5w_1 + 2w_2 \geq -1, \\
 & 2w_1 + w_2 \geq -3, \\
 & 6w_1 + w_2 \geq -7, \\
 & -w_1 + w_2 \geq -4, \\
 & w_1 + 2w_2 \geq -6, \\
 & -w_1 \geq 0, \\
 & -w_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

显然, $w^{(0)} = (0, 0)$ 是对偶问题的一个可行解. 在 $w^{(0)}$ 起作用的约束指标集为 $Q = \{6, 7\}$.

一阶段问题为

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_1 + y_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + y_1 = 6, \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 + y_2 = 3,
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

列表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{x}_7	\hat{y}_1	\hat{y}_2	
y_1	-5	2	6	-1	1	-1	0	1	0	6
y_2	2	1	1	1	2	0	-1	0	1	3
	-3	3	7	0	3	-1	-1	0	0	9
	1	3	7	4	6	0	0			0

表的最后一行是在 $w^{(0)} = (0, 0)$ 处对偶约束函数值 $w^{(0)} p_j - c_j$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) 及对偶目标函数值 0. 表格上端用符号“△”标出限定原始问题包含的变量.

限定原始问题已经达到最优, 最优值 $9 > 0$. 修改对偶问题的可行解, 令

$$\theta = \max \left\{ \frac{-(w^{(0)} p_j - c_j)}{v^{(0)} p_j} \mid v^{(0)} p_j > 0 \right\} = \max \left\{ \frac{-3}{3}, \frac{-7}{7}, \frac{-6}{3} \right\} = -1,$$

把第 3 行的 θ 倍加到第 4 行. 然后, 解新的限定原始问题:

	x_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\hat{y}_1	\hat{y}_2	
y_1	-5	2	⑥	-1	1	-1	0	1	0	6
y_2	2	1	1	1	2	0	-1	0	1	3
	-3	3	7	0	3	-1	-1	0	0	9
	4	0	0	4	3	1	1			-9

	x_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\hat{y}_1	\hat{y}_2	
x_3	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	1
y_2	$\frac{17}{6}$	② $\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	1	2
	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{7}{6}$	0	2
	4	0	0	4	3	1	1			-9

	x_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\hat{y}_1	\hat{y}_2	
x_3	$-\frac{9}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{17}{4}$	1	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	3
	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	4	0	0	4	3	1	1			-9

原问题的最优解和最优值如下:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 3, 0, 0, 0, 0, 0), \quad f_{\max} = -9.$$

(2) 对偶问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & 15w_1 + 8w_2 + 12w_3 \\ \text{s. t.} \quad & w_1 + w_3 \leq 5, \\ & w_1 \leq 2, \\ & w_1 + w_3 \leq 3, \\ & w_2 \leq 7, \\ & w_2 + w_3 \leq 9, \\ & w_2 \leq 1. \end{aligned}$$

取对偶问题的一个可行解, 令 $(w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 1)$, 对偶问题起作用约束指标集 $Q = \{6\}$.

一阶段问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 15, \\ & x_4 + x_5 + x_6 + y_2 = 8, \\ & x_1 + x_3 + x_5 + y_3 = 12, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

下面用表格形式求解. 顶上有标识符号“△”的变量属于限定原始问题. 表中最后一行是对偶约束函数值 $w p_j - c_j$ 和对偶目标函数值 $w b$. 求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
y_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
y_2	0	0	0	1	1	①	0	1	0	8
y_3	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	1	2	1	0	0	0	35
	-3	-1	-1	-6	-7	0				35

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
y_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
x_6	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
y_3	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	0	1	0	0	-1	0	27
	-3	-1	-1	-6	-7	0				35

限定原始问题已达到最优解, 求最小比值 θ :

$$\theta = \min \left\{ \frac{-(-3)}{2}, \frac{-(-1)}{1}, \frac{-(-1)}{2}, \frac{-(-7)}{1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

修改对偶问题的可行解, 然后解限定原始问题:

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
y_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
x_6	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
y_3	1	0	①	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	0	1	0	0	-1	0	27
	-2	$-\frac{1}{2}$	0	-6	$-\frac{13}{2}$	0				$\frac{97}{2}$

	x_1	x_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
y_1	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3
x_6	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-2	3
	-2	$-\frac{1}{2}$	0	-6	$-\frac{13}{2}$	0				$\frac{97}{2}$

限定原始问题达到最优, 计算 θ :

$$\theta = \min \left\{ \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

修改对偶问题的可行解, 继续解限定原始问题:

	x_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
y_1	0	①	0	0	-1	0	1	0	-1	3
x_6	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-2	3
	-2	0	0	-6	-7	0				50

	x_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	x_4	x_5	\hat{x}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2	\hat{y}_3	
x_2	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3
x_6	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
	-2	0	0	-6	-7	0				50

原问题最优解和最优值如下:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 12, 0, 0, 8), \quad f_{\min} = 50.$$

9. 给定下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

它的最优单纯形表如下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{26}{3}$

(1) 若右端向量 $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ 改为 $b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, 原来的最优基是否还为最优基? 利用原来的最优表求新问题的最优解.

(2) 若目标函数中 x_1 的系数由 $c_1 = -2$ 改为 c'_1 , 那么 c'_1 在什么范围内时原来的最优解也是新问题的最优解?

解 (1) 先计算改变后的右端列向量

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}, \quad c_B \bar{b}' = (1, -2) \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = -\frac{22}{3}.$$

右端向量 b 改为 b' 后, 原来的最优基已不是可行基, 对应各变量的判别数不变. 下面用对偶单纯形法求最优解:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{3}$
x_5	0	3	-3	-1	1	2
x_1	1	1	2	1	0	2
	0	-1	-5	-2	0	-4

新问题的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$, 最优值 $f_{\min} = -4$.

(2) c_1 改为 c'_1 后, 令对应各变量的判别数

$$\begin{cases} z'_1 - c'_1 = 0, \\ z'_2 - c'_2 = -6 + 3(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_3 - c'_3 = 0 + 0(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_4 - c'_4 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_5 - c'_5 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}(c'_1 + 2) \leq 0. \end{cases}$$

解得 $c'_1 \leq -1$. 因此, 当 $c'_1 \leq -1$ 时原来的最优解也是新问题的最优解.

10. 考虑下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

先用单纯形方法求出上述问题的最优解, 然后对原来问题分别进行下列改变, 试用原来问题的最优表求新问题的最优解:

(1) 目标函数中 x_3 的系数 c_3 由 13 改变为 8.

(2) b_1 由 20 改变为 30.

(3) b_2 由 90 改变为 70.

(4) A 的列 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 改变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(5) 增加约束条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$.

解 先引入松弛变量 x_4, x_5 , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20, \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 90, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求最优解, 过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	①	3	1	0	20
x_5	12	4	10	0	1	90
	5	-5	-13	0	0	0
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$, 最优值 $f_{\max} = 100$.

(1) 非基变量 x_3 的目标系数 c_3 由 13 改变为 8 后, 对应 x_3 的判别数

$$z'_3 - c'_3 = (z_3 - c_3) + (c_3 - c'_3) = 2 + (13 - 8) = 7 > 0.$$

最优解不变, 仍为 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$, $f_{\max} = 100$.

(2) b_1 由 20 改变为 30 后, 原来最优单纯形表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形方法计算如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	-1	1	3	1	0	30
x_5	16	0	-2	-4	1	-30
	0	0	2	5	0	150
x_2	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	-15
x_3	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	15
	16	0	0	1	1	120
x_4	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{10}$	3
x_3	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	9
	$\frac{103}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{10}$	117

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 9)$, 最优值 $f_{\max} = 117$.

(3) b_2 由 90 改变为 70 后, 原来最优表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形法求解如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	-10
	0	0	2	5	0	100
x_2	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	5
x_3	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	5
	16	0	0	1	1	90

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 5)$, 最优值 $f_{\max} = 90$.

(4) 约束矩阵 A 的列 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 改为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ 后, 对应 x_1 的判别数

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} p_1 - c_1 = (5, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - (-5) = 5 > 0.$$

最优解仍为 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$, $f_{\max} = 100$.

(5) 增加约束条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ 后, 原来的最优解不满足这个约束条件, 修改原来的最优表, 将新增加约束的系数置于最后一行:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	2	3	5	0	0	1	50
	0	0	2	5	0	0	100

将第 1 行的 (-3) 倍加到第 3 行, 把对应 x_2 的列化成单位向量, 然后用对偶单纯形法求解:

x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	5	0	-4	-3	0	1	-10
	0	0	2	5	0	0	100
x_2	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{2}$
x_5	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_3	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	95

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{25}{2}, \frac{5}{2})$, $f_{\max} = 95$.

11. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 9, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(1) 用单纯形方法求出最优解.

(2) 假设费用系数向量 $c = (-1, 1, -2)$ 改为 $(-1, 1, -2) + \lambda(2, 1, 1)$, λ 是实参数, 对 λ 的所有值求出问题的最优解.

解 (1) 将所求问题化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	1	1	0	6
x_5	-1	2	3	0	1	9
	1	-1	2	0	0	0
x_4	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
x_3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-6
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
	0	$-\frac{11}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{39}{4}$

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{9}{4}, 0, \frac{15}{4})$, $f_{\min} = -\frac{39}{4}$.

(2) 目标系数摄动后, 问题改变为

$$\begin{aligned} \min \quad & (-1 + 2\lambda)x_1 + (1 + \lambda)x_2 + (-2 + \lambda)x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

判别数行改变为 $(c_B B^{-1} A - c) + (c'_B B^{-1} A - c')\lambda$, 其中 A 是约束矩阵, 按此式修改原来的最优表, 得到表 1:

表 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
	0	$-\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\lambda$	0	$-\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\lambda$	$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda$	$-\frac{39}{4} + \frac{33}{4}\lambda$

令

$$\begin{cases} -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\lambda \leq 0, \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\lambda \leq 0, \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda \leq 0, \end{cases}$$

解得 $-1 \leq \lambda \leq \frac{5}{7}$. 当 $\lambda \in [-1, \frac{5}{7}]$ 时, 最优解不变. 最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{9}{4}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0)$, 最优值 $f^*(\lambda) = -\frac{39}{4} + \frac{33}{4}\lambda$.

当 $\lambda > \frac{5}{7}$ 时, 表 1 不再是最优表, x_4 进基, 得到表 2:

表 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
x_3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
	$\frac{5}{3} - \frac{7}{3}\lambda$	$-\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\lambda$	0	0	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda$	$-6 + 3\lambda$

当 $\lambda \in [\frac{5}{7}, 2]$ 时, 最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 3, 3, 0)$, 最优值 $f^*(\lambda) = -6 + 3\lambda$.

当 $\lambda > 2$ 时, x_5 进基, 得到表 3:

表 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	1	1	0	6
x_5	-1	2	3	0	1	9
	$1-2\lambda$	$-1-\lambda$	$2-\lambda$	0	0	0

当 $\lambda \in [2, +\infty)$ 时, 最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 6, 9)$, 最优值 $f^*(\lambda) = 0$.

当 $\lambda < -1$ 时, 表 1 不再是最优表, x_5 进基, 修改表 1, 得到表 4:

表 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	4	1	1	15
	0	$-2+\lambda$	$1+\lambda$	$-1+2\lambda$	0	$-6+12\lambda$

令

$$\begin{cases} -2+\lambda \leq 0, \\ 1+\lambda \leq 0, \\ -1+2\lambda \leq 0, \end{cases}$$

当 $\lambda \in (-\infty, -1]$ 时, 最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 0, 0, 0, 15)$, 最优值 $f^*(\lambda) = -6+12\lambda$.

12. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 用单纯形方法求出最优解.

(2) 将约束右端 $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ 改变为 $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \geq 0$, 求含参数线性规划的最优解.

解 (1) 将所求问题化为标准形式, 用单纯形方法求解:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	6
x_4	-1	2	0	1	6
	1	3	0	0	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-9
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-14

最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$, 最优值 $f_{\min} = -14$.

(2) 将含参数线性规划化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 - \lambda, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 + \lambda, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

修改问题(1)中的最优表:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b + \lambda B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{bmatrix},$$

$f(\lambda) = c_B x_B = -14 + \lambda$. 在现行基下, 参数规划的单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$2-\lambda$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-14+\lambda$

当 $\lambda \in [0, 2]$ 时, 最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - \lambda, 4, 0, 0)$, 最优值 $f^*(\lambda) = -14 + \lambda$.

当 $\lambda > 2$ 时, $2 - \lambda < 0$, 用对偶单纯形法, 得下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_4	-3	0	-2	1	$-6 + 3\lambda$
x_2	1	1	1	0	$6 - \lambda$
	-2	0	-3	0	$-18 + 3\lambda$

当 $\lambda \in [2, 6]$ 时, 最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6 - \lambda, 0, -6 + 3\lambda)$, 最优值 $f^*(\lambda) = -18 + 3\lambda$.

当 $\lambda > 6$ 时, 无可行解.

第5章

运输问题题解

1. 设一运输问题具有 3 个产地 A_i , 3 个销地 B_j , A_i 供给 B_j 的货物量为 x_{ij} , 问下列每一组变量可否作为一组基变量?

- (1) $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{33}$;
- (2) $x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{31}$;
- (3) $x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{33}$;
- (4) $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$;
- (5) $x_{11}, x_{14}, x_{22}, x_{33}$.

解 (1) 可作为一组基变量;

(2) 含闭回路, 不能作为一组基变量;

(3) 可作为一组基变量;

(4) 变量个数大于 5, 必含闭回路, 不能作为一组基变量;

(5) 变量个数小于 5, 不能作为一组基变量.

2. 设有运输问题如下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	7	5	4	8
A_2	6	3	5	9	6
A_3	10	9	7	8	7
b_j	5	4	6	6	

(1) 用西北角法求一基本可行解;

(2) 用最小元素法求一基本可行解;

(3) 分别计算出在两个基本可行解下的目标函数值。

解 (1) 用西北角法, 计算结果如下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8 5	7 3	5 /	4 /	8, 3, 0
A_2	6 /	3 1	5 5	9 /	6, 5, 0
A_3	10 /	9 /	7 1	8 6	7, 6, 0
b_j	5 0	4 1 0	6 1 0	6 0	

基本可行解中, 基变量取值为

$$(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}) = (5, 3, 1, 5, 1, 6),$$

其余变量为非基变量, 取值为 0. 目标函数值

$$f = 8 \times 5 + 7 \times 3 + 3 \times 1 + 5 \times 5 + 7 \times 1 + 8 \times 6 = 144.$$

(2) 用最小元素法, 计算结果如下:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8 /	7 /	5 2	4 6	8, 2, 0
A_2	6 /	3 4	5 2	9 /	6, 2, 0
A_3	10 5	9 /	7 2	8 /	7, 5, 0
b_j	5 0	4 0	6 4 2 0	6 0	

基本可行解中, 基变量取值为

$$(x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{33}) = (2, 6, 4, 2, 5, 2).$$

目标函数值

$$f = 5 \times 2 + 4 \times 6 + 3 \times 4 + 5 \times 2 + 10 \times 5 + 7 \times 2 = 120.$$

3. 考虑对应下表的运输问题:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	5	6	5	20
A_2	7	10	5	6	20
A_3	8	9	12	7	50
b_j	15	25	20	30	

(1) 用西北角法求一初始基本可行解;

(2) 由(1)中求得的基本可行解出发, 用表上作业法求最优解, 使总运输费用最小.

解 (1) 用西北角法求得初始基本可行解如下表所示:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 15	5 5	6 /	5 /	20, 5, 0
A_2	7 /	10 20	5 /	6 /	20, 0
A_3	8 /	9 0	12 20	7 30	50, 30, 0
b_j	15 0	25 20 0	20 0	30 0	

(2) 下面用表上作业法求最优解, 求解过程如下:

先计算对偶变量 w_i, v_j 和判别数 $z_{ij} - c_{ij}$, 判别数列于每个方格的左下角:

	v_j	4	5	8	3	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	4 15	5	6 2	5 -2	20
5	A_2	7 2	10 20	5 8	6 2	20
4	A_3	8 0	9 0	12 20	7 30	50
	b_j	15	25	20	30	

取进基变量 x_{23} , 构成闭回路 $x_{23}, x_{33}, x_{32}, x_{22}$, 令

$$\begin{cases} x_{23} = \theta \geq 0, \\ x_{33} = 20 - \theta \geq 0, \\ x_{32} = 0 + \theta \geq 0, \\ x_{22} = 20 - \theta \geq 0. \end{cases}$$

求得 θ 的最大取值, $\theta=20$. 新的基本可行解如下表所示:

	v_j	4	5	8	3	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	4 15	5	6 2	5 -2	20
-3	A_2	7 -6	10 -8	5 20	6 -6	20
4	A_3	8 0	9 20	12 0	7 30	50
	b_j	15	25	20	30	

取进基变量 x_{13} , 构成闭回路 $x_{13}, x_{33}, x_{32}, x_{12}$, 调整量 $\theta=0$, 新的基本可行解如下表所示:

	v_j	4	5	6	3	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	4 15	5	6 0	5 -2	20
-1	A_2	7 -4	10 -6	5 20	6 -4	20
4	A_3	8 0	9 20	12 -2	7 30	50
	b_j	15	25	20	30	

已经达到最优解. 最优解为

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}, x_{34}) = (15, 5, 0, 20, 20, 30),$$

其余 $x_{ij}=0$. 最优值

$$f = 4 \times 15 + 5 \times 5 + 6 \times 0 + 5 \times 20 + 9 \times 20 + 7 \times 30 = 575.$$

4. 设有 3 个产地 4 个销地的运输问题, 产量 a_i , 销量 b_j 及单位运价 c_{ij} 的数值如下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	4	3	7	9
A_2	9	8	10	5	12
A_3	4	7	6	10	14
b_j	8	9	10	11	

(1) 转化成产销平衡运输问题;

(2) 用西北角法求一基本可行解, 并由此出发求最优解, 使总运输费用最小;

(3) 用最小元素法求一基本可行解, 进而求出最优解, 使总运输费用最小.

解 (1) $\sum_{i=1}^3 a_i = 35$, $\sum_{j=1}^4 b_j = 38$, 销量大于产量. 引进虚拟产地 A_4 , 虚拟产量 $a_4 = 38 - 35 = 3$, 虚拟单位运价 $c_{4j} = 0, j=1, 2, 3, 4$. 然后再用表上作业法求解产销平衡运输问题.

(2) 先用西北角法求出一个基本可行解, 计算结果如下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	1			9, 1, 0
A_2		8	4		12, 4, 0
A_3			6	8	14, 8, 0
A_4				3	3, 0
b_j	8	9	10	11	
	0	8	6	3	
		0	0	0	

求得的基本可行解中, 基变量取值

$$(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{44}) = (8, 1, 8, 4, 6, 8, 3),$$

其余为非基变量, 取值均为 0.

再由求得的基本可行解出发, 求最优解, 求解过程如下.

先计算对偶变量 w_i, v_j 和判别数 $z_{ij} - c_{ij}$, 计算结果列于下表, 其中对应基变量的判别数均为 0, 对应非基变量的判别数置于每个方格的左下角.

	v_j	6	4	6	10	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	8 6	1 4	3 3	3 7	9
4	A_2	1 9	8 8	4 10	9 5	12
0	A_3	2 4	-3 7	6 6	8 10	14
-10	A_4	-4 0	-6 0	-4 0	3 0	3
	b_j	8	9	10	11	

取进基变量 x_{24} , 构成闭回路 $x_{24}, x_{34}, x_{33}, x_{23}$. 令

$$\begin{cases} x_{24} = \theta \geq 0, \\ x_{34} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{33} = 6 + \theta \geq 0, \\ x_{23} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取 $\theta=4$, 修改运输表, 给出新的基本可行解, 并计算对偶变量 w_i, v_j 和判别数 $z_{ij} - c_{ij}$, 计算结果置于下表:

	v_j	6		4		-3		1		
w_i		B_1		B_2		B_3		B_4		a_i
0	A_1	6		4		3		7		9
		8		1		-6		-6		
4	A_2	9		8		10		5		12
		1		8		-9		4		
9	A_3	4		7		6		10		14
		11		6		10		4		
-1	A_4	0		0		0		0		3
		5		3		-4		3		
	b_j	8		9		10		11		

取进基变量 x_{31} , 构成闭回路 $x_{31}, x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}$. 令

$$\begin{cases} x_{31} = \theta \geq 0, \\ x_{11} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{12} = 1 + \theta \geq 0, \\ x_{22} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{24} = 4 + \theta \geq 0, \\ x_{34} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取 $\theta=4$, 得到新的基本可行解. 计算出相应的对偶变量 w_i, v_j 和判别数 $z_{ij} - c_{ij}$, 计算结果置于下表:

	v_j	6	4	8	1	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	6 4	4 5	3 5	7 -6	9
4	A_2	9 1	8 4	10 2	5 8	12
-2	A_3	4 4	7 -5	6 10	10 -11	14
-1	A_4	0 5	0 3	0 7	0 3	3
	b_j	8	9	10	11	

取进基变量 x_{13} , 构成闭回路 $x_{13}, x_{33}, x_{31}, x_{11}$. 令

$$\begin{cases} x_{13} = \theta \geq 0, \\ x_{33} = 10 - \theta \geq 0, \\ x_{31} = 4 + \theta \geq 0, \\ x_{11} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取 $\theta=4$, 得到新的基本可行解. 计算相应的 $w_i, v_j, z_{ij} - c_{ij}$ 置于下表:

	v_j	1	4	3	1	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	6 -5	4 5	3 4	7 -6	9
4	A_2	9 -4	8 4	10 -3	5 8	12
3	A_3	4 8	7 0	6 6	10 -6	14
-1	A_4	0 0	0 3	0 2	0 3	3
	b_j	8	9	10	11	

取进基变量 x_{42} , 构成闭回路 $x_{42}, x_{22}, x_{24}, x_{44}$. 令

$$\begin{cases} x_{42} = \theta \geq 0, \\ x_{22} = 4 - \theta \geq 0, \\ x_{24} = 8 + \theta \geq 0, \\ x_{44} = 3 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取 $\theta=3$, 得到新的基本可行解及相应的 $w_i, v_j, z_{ij} - c_{ij}$ 置于下表:

	v_j	1	4	3	1	
w_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	6 -5	4 5	3 4	7 -6	9
4	A_2	9 -4	8 1	10 -3	5 11	12
3	A_3	4 8	7 0	6 6	10 -6	14
-4	A_4	0 -3	0 3	0 -1	0 -3	3
	b_j	8	9	10	11	

判别数均非正, 已经达到最优解. 最优解中基变量取值

$$(x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{33}) = (5, 4, 1, 11, 8, 6),$$

其余非虚拟变量 $x_{ij}=0$. 最优值

$$f = 4 \times 5 + 3 \times 4 + 8 \times 1 + 5 \times 11 + 4 \times 8 + 6 \times 6 = 163.$$

用户 B_2 的需求量没有得到满足, 缺量为 3.

(3) 先用最小元素法求一个基本可行解, 计算结果如下表:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6 /	4 /	3 9	7 /	9, 0
A_2	9 /	8 1	10 /	5 11	12, 1, 0
A_3	4 8	7 5	6 1	10 /	14, 6, 5, 0
A_4	0 /	0 3	0 /	0 /	3, 0
b_j	8 0	9 4 3 0	10 1 0	11 0	

用最小元素法求得一个基本可行解, 其中基变量的取值是

$$(x_{13}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{42}) = (9, 1, 11, 8, 5, 1, 3),$$

其余为非基变量, 取值均为零. 目标函数值为

$$f = 3 \times 9 + 8 \times 1 + 5 \times 11 + 4 \times 8 + 7 \times 5 + 6 \times 1 + 0 \times 3 = 163.$$

由于目标函数已经达到最优值, 因此上述基本可行解已经是最优解.

第7章

最优性条件题解

1. 给定函数

$$f(x) = \frac{x_1 + x_2}{3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2},$$

求 $f(x)$ 的极小点.

解 令

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{3 - x_1^2 - 2x_1 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{3 - x_2^2 - 2x_1 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^2} = 0, \end{cases}$$

得到驻点

$$x^{(1)} = (1, 1), \quad x^{(2)} = (-1, -1).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{-18x_1 - 12x_2 + 2x_1^3 - 2x_2^3 + 6x_1^2 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-12x_1 - 18x_2 - 2x_1^3 + 2x_2^3 + 6x_1 x_2^2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-12x_1 - 12x_2 + 6x_1^2 x_2 + 6x_1 x_2^2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

由于 $\nabla^2 f(x^{(1)})$ 为负定矩阵, $\nabla^2 f(x^{(2)})$ 为正定矩阵, 因此 $f(x)$ 的极小点是 $x^{(2)} = (-1, -1)$.

2. 考虑非线性规划问题

$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

检验 $\bar{x} = (2, 1)^T$ 是否为 K-T 点.

解 非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0, \\ & x_1 + 2x_2 - 4 = 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

在点 \bar{x} , 目标函数的梯度为 $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, 前两个约束是起作用约束, 梯度分别是 $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. K-T 条件如下:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} - v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \begin{cases} 4w - v - 2 = 0, \\ 2w - 2v - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $w = \frac{1}{3}, v = -\frac{2}{3}, w \geq 0$, 因此 $\bar{x} = (2, 1)^T$ 是 K-T 点.

3. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_2 + 7 \geq 0, \\ & -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

求满足 K-T 必要条件的点.

解 目标函数 $f(x) = 4x_1 - 3x_2$, 约束函数 $g_1(x) = 4 - x_1 - x_2, g_2(x) = x_2 + 7$ 和 $g_3(x) = -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1$ 的梯度分别是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 3) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件如下:

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \sum_{i=1}^3 w_i \nabla g_i(x) = 0, \\ w_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0, \\ g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} w_1 + 2w_3(x_1 - 3) + 4 = 0, \\ w_1 - w_2 - w_3 - 3 = 0, \\ w_1(4 - x_1 - x_2) = 0, \\ w_2(x_2 + 7) = 0, \\ w_3[-(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1] = 0, \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0, \\ 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 + 7 \geq 0, \\ -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1 \geq 0. \end{cases}$$

求解上述 K-T 条件, 得到非线性规划的 K-T 点 $x_1 = 1, x_2 = 3$, 相应的乘子 $(w_1, w_2, w_3) = (\frac{16}{3}, 0, \frac{7}{3})$.

4. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

判别下列各点是否为最优解:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解 将非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & -x_1 - x_2 + 6 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

由于给定的非线性规划是凸规划, 因此只需检验上述各点是否为 K-T 点.

检验点 $x^{(1)}$: $x^{(1)}$ 是可行点, 只有第 1 个约束是起作用约束, K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2\left(x_1 - \frac{9}{4}\right) + 2w_1 x_1 = 0, \\ 2(x_2 - 2) - w_1 = 0, \\ w_1 \geq 0. \end{cases}$$

经检验, $x^{(1)}$ 是最优解, 最优值等于 $\frac{5}{8}$, K-T 乘子 $w_1 = \frac{1}{2}$.

检验点 $x^{(2)}$: $x^{(2)}$ 不是可行解.

检验点 $x^{(3)}$: $x^{(3)}$ 是可行解, 起作用约束只有 $x_1 \geq 0$, K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2(x_1 - \frac{9}{4}) - w_3 = 0, & (1) \\ 2(x_2 - 2) = 0, & (2) \\ w_3 \geq 0. & (3) \end{cases}$$

由方程(1)得 $w_3 = -\frac{9}{2}$, 不满足方程(3), 因此 $x^{(3)}$ 不是 K-T 点.

5. 用 K-T 条件求解下列问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ & x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

解 记作 $f(x) = x_1^2 - x_2 - 3x_3$, $g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3$, $h(x) = x_1^2 + 2x_2 - x_3$. 目标函数和约束函数的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件如下:

$$\begin{cases} 2x_1 + w - 2wx_1 = 0, \\ -1 + w - 2v = 0, \\ -3 + w + v = 0, \\ w(-x_1 - x_2 - x_3) = 0, \\ w \geq 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点 $\bar{x} = (-\frac{7}{2}, -\frac{35}{12}, \frac{77}{12})$, $w = \frac{7}{3}$, $v = \frac{2}{3}$, Lagrange 函数为

$$L(x, w, v) = x_1^2 - x_2 - 3x_3 - w(-x_1 - x_2 - x_3) - v(x_1^2 + 2x_2 - x_3),$$

Hesse 矩阵为

$$\nabla_x^2 L(x, w, v) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在点 \bar{x} , 两个约束均是起作用约束, 梯度

$$\nabla g(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \nabla g(\bar{x})^T d = 0, \\ \nabla h(\bar{x})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -d_1 - d_2 - d_3 = 0, \\ -7d_1 + 2d_2 - d_3 = 0. \end{cases}$$

得解 $d = (d_1, 2d_1, -3d_1)^T$. 由于 $d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, w, v) d = \frac{2}{3} d_1^2 > 0$, 因此最优解 $\bar{x} = (-\frac{7}{2}, -\frac{35}{12}, \frac{77}{12})$,

最优值 $f(\bar{x}) = -\frac{49}{12}$.

6. 求解下列问题

$$\begin{aligned} \max \quad & 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

解 将非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ & -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0. \end{aligned}$$

目标函数和约束函数的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 14 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件为

$$\begin{cases} 2x_1 - 14 + w_1 + w_2 = 0, \\ 2x_2 - 6 + w_1 + 2w_2 = 0, \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ w_2(-x_1 - 2x_2 + 3) = 0, \\ w_1, w_2 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, 乘子 $w_1 = 8, w_2 = 0$. 由于是凸规划, 因此 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是最优解, 最优值 $f_{\max} = 33$.

7. 求原点 $x^{(0)} = (0, 0)^T$ 到凸集

$$S = \{x \mid x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

的最小距离.

解 求最小距离可表达成下列凸规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ & 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2x_1 - w_1 - 2w_2 = 0, \\ 2x_2 - w_1 - w_2 = 0, \\ w_1(x_1 + x_2 - 4) = 0, \\ w_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0, \\ w_1, w_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 最小距离 $d = 2\sqrt{2}$.

8. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16 \geq 0, \\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13 = 0. \end{aligned}$$

判别下列各点是否为局部最优解:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{32}{5} \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{13} \end{bmatrix}.$$

解 目标函数 $f(x) = x_2$ 及约束函数 $g(x) = -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16$, $h(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13$ 的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2(x_2 - 4) \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 3) \end{bmatrix}.$$

Lagrange 函数 $L(x, w, v) = x_2 - w[-x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16] - v[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13]$,

$$\nabla_x^2 L(x, w, v) = \begin{bmatrix} 2(w-v) & 0 \\ 0 & 2(w-v) \end{bmatrix}.$$

检验 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: 两个约束均为起作用约束.

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix},$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} 4v = 0, \\ 1 - 8w + 6v = 0, \\ w \geq 0, \end{cases}$$

解得 $w = \frac{1}{8}, v = 0$. 在 $x^{(1)}$ 满足一阶必要条件.

解方程组

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \\ \nabla h(x^{(1)})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{其中 } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } \begin{cases} 8d_2 = 0, \\ -4d_1 - 6d_2 = 0, \end{cases}$$

得到 $d = 0$. 方向集 $G = \{d \mid d \neq 0, \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \nabla h(x^{(1)})^T d = 0\} = \emptyset$, 因此 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是局部最优解.

检验 $x^{(2)} = \left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right)^T$: 两个约束均是起作用约束.

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{34}{5} \end{bmatrix},$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} \frac{32}{5}w - \frac{12}{5}v = 0, \\ 1 + \frac{24}{5}w - \frac{34}{5}v = 0, \\ w \geq 0, \end{cases}$$

解得 $w = \frac{3}{40}, v = \frac{1}{5}$, $x^{(2)}$ 是 K-T 点.

求方向集 G , 为此解下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(2)})^T d = 0, \\ \nabla h(x^{(2)})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -\frac{32}{5}d_1 - \frac{24}{5}d_2 = 0, \\ \frac{12}{5}d_1 + \frac{34}{5}d_2 = 0, \end{cases}$$

得到 $d = 0, G = \{d \mid d \neq 0, \nabla g(x^{(2)})^T d = 0, \nabla h(x^{(2)})^T d = 0\} = \emptyset$, 因此 $x^{(2)} = \left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right)^T$ 是最优解.

检验 $x^{(3)} = (2, 3 + \sqrt{13})^T$: $x^{(3)}$ 是可行点, 等式约束是起作用约束, $\nabla h(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{13} \end{bmatrix}$, K-T 条件为

$$1 - 2\sqrt{13}v = 0, \quad v = \frac{\sqrt{13}}{26}.$$

求方向集 G :

$$G = \{d \mid d \neq 0, \nabla h(x^{(3)})^T d = 0\} = \{d \mid d = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}, d_1 \neq 0\}.$$

在点 $x^{(3)}$, $g(x) \geq 0$ 是不起作用约束, 因此乘子 $w=0$, Lagrange 函数的 Hesse 矩阵为

$$\nabla_x^2 L(x^{(3)}, w, v) = \begin{bmatrix} -2v & 0 \\ 0 & -2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

$$d^T \nabla_x^2 L(x^{(3)}, 0, \frac{1}{\sqrt{13}}) d = (d_1, 0) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{13}} d_1^2 < 0.$$

因此 $x^{(3)} = (2, 3 + \sqrt{13})^T$ 不满足二阶必要条件, 不是最优解.

9. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + \beta x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

讨论 β 取何值时 $\bar{x} = (0, 0)^T$ 是局部最优解?

解 记 $f(x) = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2]$, $h(x) = -x_1 + \beta x_2^2$, 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2\beta x_2 \end{bmatrix},$$

$$L(x, v) = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] - v(-x_1 + \beta x_2^2),$$

$$\nabla_x^2 L(x, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta v \end{bmatrix}.$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} x_1 - 1 + v = 0, \\ x_2 - 2\beta v x_2 = 0. \end{cases}$$

代入 $\bar{x} = (0, 0)^T$, 得到 $v=1$. 在点 $\bar{x} = (0, 0)^T$ 处

$$\nabla_x^2 L(\bar{x}, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方向集 $\bar{G} = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\} = \{(0, d_2)^T \mid d_2 \in \mathbb{R}\}$. 令

$$(0, d_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = (1 - 2\beta) d_2^2 > 0,$$

得到 $\beta < \frac{1}{2}$. 当 $\beta < \frac{1}{2}$ 时, \bar{x} 是最优解. 当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时, 将约束问题化为无约束问题, 即

$$\min \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + 1).$$

显然, 极小点是 $x_1 = 0$, 因此 $\bar{x} = (0, 0)^T$ 是极小点. 综上, 当 $\beta \leq \frac{1}{2}$ 时 $\bar{x} = (0, 0)^T$ 是局部最优解.

10. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = 0, \\ & x^T x \leq \gamma^2, \end{aligned}$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵 ($m < n$), A 的秩为 m , $c \in \mathbb{R}^n$ 且 $c \neq 0$, γ 是一个正数. 试求问题的最优解及目标函数最优值.

解 由于目标函数是线性函数, 可行域是闭凸集, 必存在最优解, 且最优值 f_{\min} 可在边界上达到, 因此可通过求解下列非线性规划求得最优解.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = 0, \\ & -x^T x + \gamma^2 = 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} c - A^T v + 2v_{m+1}x = 0, \\ Ax = 0, \\ -x^T x + \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

其中 $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ 和 v_{m+1} 是 K-T 乘子. 由于 A 行满秩, 因此 AA^T 可逆. 解上述非线性方程组, 结果如下:

$$\text{乘子:} \quad v = (AA^T)^{-1}Ac, \quad v_{m+1} = -\frac{f_{\min}}{2\gamma^2};$$

$$\text{最优值:} \quad f_{\min} = -\gamma \sqrt{c^T (c - A^T v)};$$

$$\text{最优解:} \quad x = \frac{\gamma^2}{f_{\min}} (c - A^T v) \quad (f_{\min} \neq 0).$$

当 $c = A^T v$ 时, 最优解不惟一, 最优值 $f_{\min} = 0$.

11. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{s. t.} \quad & x^T x \leq 1, \end{aligned}$$

其中 $b \neq 0$. 证明向量 $\bar{x} = b / \|b\|$ 满足最优性的充分条件.

证明 将非线性规划写作:

$$\begin{aligned} \min \quad & -b^T x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{s. t.} \quad & 1 - x^T x \geq 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} -b + wx = 0, \\ w(1 - x^T x) = 0, \\ w \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点 $x = \frac{b}{\|b\|}$. 由于上述非线性规划是凸规划, 因此 K-T 条件是最优解的充分条件.

12. 给定原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

写出上述原问题的对偶问题. 将原问题中第 3 个约束条件和变量的非负限制记作

$$x \in D = \{x \mid x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1, x_2 \geq 0\}.$$

解 Lagrange 对偶函数

$$\theta(w_1, w_2) = \inf\{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 - w_1(-x_1^2 + x_2) - w_2(x_1 - 1) \mid x \in D\}.$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta(w_1, w_2) \\ \text{s. t.} \quad & w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

13. 考虑下列原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 分别用图解法和最优性条件求解原问题.

(2) 写出对偶问题.

(3) 求解对偶问题.

(4) 用对偶理论说明对偶规划的最优值是否等于原问题的最优值.

(5) 用有关定理说明原问题的 K-T 乘子与对偶问题的最优解之间的关系.

解 (1) 记 $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2$, $g(x) = -x_1 + x_2 - 1$, 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最优性条件如下:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + w = 0, \\ 2(x_2 + 1) - w = 0, \\ w(-x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ w \geq 0, \\ -x_1 + x_2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

解得最优解 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $w = 3$, 最优值 $f_{\min} = \frac{9}{2}$.

(2) Lagrange 函数

$$L(w) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1),$$

对偶问题的目标函数为

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf\{(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1) \mid x \in \mathbb{R}^2\}, \\ &= \inf\{x_1^2 - 2x_1 + wx_1\} + \inf\{x_2^2 + 2x_2 - wx_2\} + w + 2. \end{aligned}$$

当 $w \geq 0$ 时, $\inf\{x_1^2 - 2x_1 + wx_1\} = -\frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4)$, $\inf\{x_2^2 + 2x_2 - wx_2\} = -\frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4)$, 对偶问题的目标函数 $\theta(w) = -\frac{1}{2}w^2 + 3w$. 对偶问题如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}w^2 + 3w \\ \text{s. t.} \quad & w \geq 0. \end{aligned}$$

(3) 对偶问题的最优性条件为

$$\begin{cases} -w + 3 + w_1 = 0, \\ w_1 w = 0, \\ w_1 \geq 0, \\ w \geq 0. \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $w = 3$, 乘子 $w_1 = 0$, 最优值 $\theta_{\max} = \frac{9}{2}$.

(4) 由于原问题是凸规划, 因此对偶问题与原问题的最优值相等.

(5) 对于凸规划, 在适当的约束规格下, 原问题的 K-T 乘子是对偶问题的最优解.

算法题解

1. 定义算法映射如下:

$$A(x) = \begin{cases} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x, 1 + \frac{1}{2}x \right], & x \geq 2, \\ \frac{1}{2}(x+1), & x < 2. \end{cases}$$

证明 A 在 $x=2$ 处不是闭的.

证明 问题的证明只需举一反例.

令 $x^{(k)} = 2 - \frac{1}{k}$, 令正整数 $k \rightarrow +\infty$, 则 $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = 2, A(\bar{x}) = 2$. 相应地, 算法产生序列 $\{y^{(k)}\}$, 其中

$$y^{(k)} = \frac{1}{2} \left[\left(2 - \frac{1}{k} \right) + 1 \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2k}, \quad \text{则 } \bar{y} = \lim_{k \rightarrow +\infty} y^{(k)} = \frac{3}{2} \notin A(\bar{x}).$$

因此 $A(x)$ 在 $x=2$ 处不是闭的.

2. 在集合 $X=[0, 1]$ 上定义算法映射

$$A(x) = \begin{cases} [0, x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

讨论在以下各点处 A 是否为闭的:

$$x^{(1)} = 0, \quad x^{(2)} = \frac{1}{2}.$$

答案 算法映射 A 在 $x^{(1)}=0$ 处是闭的, 在 $x^{(2)}=\frac{1}{2}$ 处不是闭的.

3. 求以下各序列的收敛级:

$$(1) \gamma_k = \frac{1}{k}; \quad (2) \gamma_k = \left(\frac{1}{k} \right)^k.$$

答案 序列 $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$ 为 1 级收敛; 序列 $\left\{ \left(\frac{1}{k} \right)^k \right\}$ 为超线性收敛.

一维搜索题解

1. 分别用 0.618 法和 Fibonacci 法求解下列问题:

$$\min e^{-x} + x^2.$$

要求最终区间长度 $L \leq 0.2$, 取初始区间为 $[0, 1]$.

解 (1) 用 0.618 法求解.

第 1 次迭代: 初始区间记作 $[a_1, b_1] = [0, 1]$, 目标函数记作 $f(x) = e^{-x} + x^2$. 计算试探点 λ_1, μ_1 及在试探点处目标函数值:

$$\lambda_1 = a_1 + 0.382(b_1 - a_1) = 0.382, \quad f(\lambda_1) = e^{-0.382} + 0.382^2 = 0.828,$$

$$\mu_1 = a_1 + 0.618(b_1 - a_1) = 0.618, \quad f(\mu_1) = e^{-0.618} + 0.618^2 = 0.921.$$

$f(\lambda_1) < f(\mu_1)$, 因此令 $a_2 = a_1 = 0, b_2 = \mu_1 = 0.618, b_2 - a_2 = 0.618 > 0.2$.

第 2 次迭代:

$$\lambda_2 = a_2 + 0.382(b_2 - a_2) = 0.236, \quad f(\lambda_2) = e^{-0.236} + 0.236^2 = 0.845,$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 0.382, \quad f(\mu_2) = f(\lambda_1) = 0.828.$$

$f(\lambda_2) > f(\mu_2)$, 因此令 $a_3 = \lambda_2 = 0.236, b_3 = b_2 = 0.618, b_3 - a_3 = 0.382 > 0.2$.

第 3 次迭代:

$$\lambda_3 = \mu_2 = 0.382, \quad f(\lambda_3) = f(\mu_2) = 0.828,$$

$$\mu_3 = a_3 + 0.618(b_3 - a_3) = 0.472, \quad f(\mu_3) = e^{-0.472} + 0.472^2 = 0.847.$$

$f(\lambda_3) < f(\mu_3)$, 因此令 $a_4 = a_3 = 0.236, b_4 = \mu_3 = 0.472, b_4 - a_4 = 0.236 > 0.2$.

第 4 次迭代:

$$\lambda_4 = a_4 + 0.382(b_4 - a_4) = 0.326, \quad f(\lambda_4) = e^{-0.326} + 0.326^2 = 0.828,$$

$$\mu_4 = \lambda_3 = 0.382, \quad f(\mu_4) = f(\lambda_3) = 0.828.$$

令 $a_5 = a_4 = 0.236, b_5 = \mu_4 = 0.382, b_5 - a_5 = 0.146 < 0.2$.

最优解 $\bar{x} \in [0.236, 0.382]$.

(2) 用 Fibonacci 法求解.

先求计算函数值次数 $n, F_n \geq (b_1 - a_1)/L = 5$, 取 $n = 5$.

第 1 次迭代:

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_3}{F_5}(b_1 - a_1) = 0.375, \quad f(\lambda_1) = e^{-0.375} + 0.375^2 = 0.828,$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_4}{F_5}(b_1 - a_1) = 0.625, \quad f(\mu_1) = e^{-0.625} + 0.625^2 = 0.926.$$

$f(\lambda_1) < f(\mu_1)$, 因此令 $a_2 = a_1 = 0, b_2 = \mu_1 = 0.625$.

第 2 次迭代:

$$\lambda_2 = a_2 + \frac{F_2}{F_4}(b_2 - a_2) = 0.25, \quad f(\lambda_2) = e^{-0.25} + 0.25^2 = 0.842,$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 0.375, \quad f(\mu_2) = f(\lambda_1) = 0.828.$$

$f(\lambda_2) > f(\mu_2)$, 因此令 $a_3 = \lambda_2 = 0.25, b_3 = b_2 = 0.625$.

第 3 次迭代:

$$\lambda_3 = \mu_2 = 0.375, \quad f(\lambda_3) = f(\mu_2) = 0.828,$$

$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_2}{F_3}(b_3 - a_3) = 0.5, \quad f(\mu_3) = e^{-0.5} + 0.5^2 = 0.857.$$

$f(\lambda_3) < f(\mu_3)$, 因此令 $a_4 = a_3 = 0.25, b_4 = \mu_3 = 0.5$.

第 4 次迭代必有 $\lambda_4 = \mu_4 = \frac{1}{2}(a_4 + b_4) = 0.375$, 取分辨常数 $\delta = 0.01$, 令 $\lambda_5 = \lambda_4 = 0.375$, $\mu_5 = 0.375 + 0.01 = 0.385$, $f(\lambda_5) = 0.828$, $f(\mu_5) = e^{-0.385} + 0.385^2 = 0.829$, 故令 $a_5 = a_4 = 0.25, b_5 = \mu_5 = 0.385$.

最优解 $\bar{x} \in [0.25, 0.385]$.

2. 考虑下列问题:

$$\min 3x^4 - 4x^3 - 12x^2.$$

(1) 用牛顿法迭代 3 次, 取初点 $x^{(0)} = -1.2$;

(2) 用割线法迭代 3 次, 取初点 $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -0.8$;

(3) 用抛物线法迭代 3 次, 取初点 $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -1.1, x^{(3)} = -0.8$.

解 目标函数记作 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, 则导函数

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x, \quad f''(x) = 36x^2 - 24x - 24.$$

(1) 用牛顿法求解

迭代公式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}.$$

在点 $x^{(0)} = -1.2, f'(x^{(0)}) = -9.216, f''(x^{(0)}) = 56.64$, 代入公式, 得到后继点 $x^{(1)} = -1.037$.

在点 $x^{(1)} = -1.037, f'(x^{(1)}) = -1.398, f''(x^{(1)}) = 39.601$, 代入公式, 得到后继点 $x^{(2)} = -1.002$.

在点 $x^{(2)} = -1.002, f'(x^{(2)}) = -0.072, f''(x^{(2)}) = 36.192$, 代入公式, 得到 $x^{(3)} = -1.000$. 这时 $f(x^{(3)}) = -5$.

实际上, $\bar{x} = -1$ 是精确的局部极小点.

(2) 用割线法求解

迭代公式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)})} f'(x^{(k)}).$$

第 1 次迭代: 由 $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -0.8$ 求后继点 $x^{(3)}$. 易知 $f'(-1.2) = -9.216, f'(-0.8) = 5.376$. 代入迭代公式, 得到 $x^{(3)} = -0.947$.

第 2 次迭代: 由 $x^{(2)} = -0.8, x^{(3)} = -0.947$ 求后继点 $x^{(4)}$. 在点 $x^{(3)}, f'(x^{(3)}) = 1.775$, 代入迭代公式, 得到 $x^{(4)} = -1.019$.

第 3 次迭代: 由 $x^{(3)} = -0.947, x^{(4)} = -1.019$ 求后继点 $x^{(5)}$. 易知 $f'(x^{(3)}) = 1.775, f'(x^{(4)}) = -0.701$, 代入公式, 得到 $x^{(5)} = -0.999$.

(3) 用抛物线法求解

迭代公式为

$$B_1 = (x^{(2)^2} - x^{(3)^2})f(x^{(1)}), \quad B_2 = (x^{(3)^2} - x^{(1)^2})f(x^{(2)}),$$

$$B_3 = (x^{(1)^2} - x^{(2)^2})f(x^{(3)}), \quad C_1 = (x^{(2)} - x^{(3)})f(x^{(1)}),$$

$$C_2 = (x^{(3)} - x^{(1)})f(x^{(2)}), \quad C_3 = (x^{(1)} - x^{(2)})f(x^{(3)}),$$

$$\bar{x} = \frac{B_1 + B_2 + B_3}{2(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

第 1 次迭代: 记 $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -1.1, x^{(3)} = -0.8$, 各点函数值分别为 $f(-1.2) = -4.147, f(-1.1) = -4.804, f(-0.8) = -4.403$. 将已知数据代入迭代公式, 得到 $\bar{x} = -0.985$, 在点 \bar{x} 处, 目标函数值 $f(\bar{x}) = -4.996$.

第 2 次迭代: 记 $x^{(1)} = -1.1, x^{(2)} = -0.985, x^{(3)} = -0.8$, 各点函数值分别为 $f(-1.1) = -4.804, f(-0.985) = -4.996, f(-0.8) = -4.403$, 代入迭代公式, 得到 $\bar{x} = -0.990$. 在点 \bar{x} 处, 目标函数值 $f(\bar{x}) = -4.998$.

第 3 次迭代: 记 $x^{(1)} = -1.1, x^{(2)} = -0.990, x^{(3)} = -0.985$, 各点函数值分别为 $f(-1.1) = -4.804, f(-0.990) = -4.998, f(-0.985) = -4.996$, 代入迭代公式, 得到 $\bar{x} = -1.008$. 对应的目标函数值 $f(\bar{x}) = -4.999$. $\bar{x} = -1.008$ 是经过 3 次迭代得到的比较好的近似解.

需要说明, 以上 3 种方法给出的结果, 均为局部极小点或其近似解, 不可作为全局极小点的近似解. 易知, 全局极小点 $x^* = 2$.

3. 用三次插值法求解

$$\min x^4 + 2x + 4.$$

解 令 $f(x) = x^4 + 2x + 4$, 则 $f'(x) = 4x^3 + 2$. 取两点 $x_1 < x_2$, 使得 $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$, 然后利用下式计算近似解 \bar{x} :

$$\bar{x} = x_1 + (x_2 - x_1) \left[1 - \frac{f'(x_2) + w + z}{f'(x_2) - f'(x_1) + 2w} \right],$$

其中 z 和 w 如下:

$$s = \frac{3[f(x_2) - f(x_1)]}{x_2 - x_1}, \quad z = s - f'(x_1) - f'(x_2),$$

$$w^2 = z^2 - f'(x_1)f'(x_2) \quad (w > 0).$$

第1次迭代: 取 $x_1 = -1, x_2 = 0$, 则 $f(x_1) = 3, f(x_2) = 4, f'(x_1) = -2 < 0, f'(x_2) = 2 > 0$. 代入迭代公式, 计算得到: $s = 3, z = 3, w^2 = 13, w = \sqrt{13}$. 近似解

$$\bar{x} = -\frac{5 + \sqrt{13}}{4 + 2\sqrt{13}} \approx -0.768.$$

第2次迭代: 由于 $f'(-0.768) = 0.188 > 0$, 令 $x_1 = -1, x_2 = -0.768$, 经计算得到: $f(x_1) = 3, f(x_2) = 2.812, f'(x_1) = -2, f'(x_2) = 0.188, s = -2.431, z = -0.619, w^2 = 0.759, w = \sqrt{0.759}$. 代入迭代公式, 得到新的近似解:

$$\bar{x} = -1 + 0.232 \left[1 + \frac{0.431 - \sqrt{0.759}}{2.188 + 2\sqrt{0.759}} \right] \approx -0.794.$$

经两次迭代得到近似解 $\bar{x} = -0.794$. 易知精确解 $x^* = -\sqrt[3]{0.5} \approx -0.794$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x^{(1)}$ 与 $x^{(2)}$ 之间存在极小点, 又知

$$f_1 = f(x^{(1)}), \quad f_2 = f(x^{(2)}), \quad f'_1 = f'(x^{(1)}).$$

作二次插值多项式 $\varphi(x)$, 使

$$\varphi(x^{(1)}) = f_1, \quad \varphi(x^{(2)}) = f_2, \quad \varphi'(x^{(1)}) = f'_1.$$

求 $\varphi(x)$ 的极小点.

解 设 $\varphi(x) = a + bx + cx^2$, 则 $\varphi'(x) = b + 2cx$. 根据假设, 得到以 a, b, c 为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a + bx^{(1)} + cx^{(1)2} = f_1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + bx^{(2)} + cx^{(2)2} = f_2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2cx^{(1)} = f'_1. & (3) \end{cases}$$

由方程(1)和方程(2)得到

$$(x^{(2)} - x^{(1)})b + (x^{(2)2} - x^{(1)2})c = f_2 - f_1,$$

即

$$b + (x^{(2)} + x^{(1)})c = \frac{f_2 - f_1}{x^{(2)} - x^{(1)}}. \quad (4)$$

由方程(3)和方程(4)解得

$$c = \frac{f_2 - f_1 - (x^{(2)} - x^{(1)})f'_1}{(x^{(2)} - x^{(1)})^2}, \quad b = \frac{-2x^{(1)}(f_2 - f_1) + (x^{(2)2} - x^{(1)2})f'_1}{(x^{(2)} - x^{(1)})^2},$$

故得 $\varphi(x)$ 的极小点

$$\bar{x} = -\frac{b}{2c} = \frac{2x^{(1)}(f_2 - f_1) - (x^{(2)2} - x^{(1)2})f'_1}{2[f_2 - f_1 - (x^{(2)} - x^{(1)})f'_1]}.$$

第10章

CHAPTER 10

使用导数的最优化方法题解

1. 给定函数

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

求在以下各点处的最速下降方向:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1), \frac{\partial f}{\partial x_2} = 200(x_2 - x_1^2).$

在点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 最速下降方向 $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; 在点 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(2)}$ 是驻点;

在点 $x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, 最速下降方向 $d = \begin{bmatrix} -751 \\ 250 \end{bmatrix}.$

2. 给定函数

$$f(x) = (6 + x_1 + x_2)^2 + (2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)^2.$$

求在点

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

处的牛顿方向和最速下降方向.

解 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(10x_1 + 8x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1x_2^2), \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(8x_1 + 10x_2 + 3x_1^2 + 6x_1x_2 + x_1^2x_2),$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2(10 + 6x_2 + x_2^2), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2(10 + 6x_1 + x_1^2), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2(8 + 6x_1 + 6x_2 + 2x_1x_2).$$

在点 $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$, 最速下降方向

$$d = -\nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 344 \\ -56 \end{bmatrix};$$

Hesse 矩阵及其逆分别为

$$\nabla^2 f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 164 & -56 \\ -56 & 4 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(\hat{x})^{-1} = -\frac{1}{2480} \begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 56 & 164 \end{bmatrix},$$

因此牛顿方向为

$$d = -\nabla^2 f(\hat{x})^{-1} \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{22}{31} \\ -\frac{126}{31} \end{bmatrix}.$$

3. 用最速下降法求解下列问题:

$$\min x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2.$$

取初点 $x^{(1)} = (1, 1)^T$, 迭代两次.

解 第1次迭代, 从 $x^{(1)}$ 出发沿最速下降方向搜索.

设 $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2$, 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ -2x_1 + 8x_2 - 3 \end{bmatrix},$$

故

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - 3\lambda \end{bmatrix}.$$

取

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = (1 - \lambda)^2 - 2(1 - \lambda)(1 - 3\lambda) + 4(1 - 3\lambda)^2 + (1 - \lambda) - 3(1 - 3\lambda),$$

令

$$\varphi'(\lambda) = -2(1 - \lambda) + 2(1 - 3\lambda) + 6(1 - \lambda) - 24(1 - 3\lambda) - 1 + 9 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{5}{31}, \quad x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{31} \\ \frac{16}{31} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代, 从 $x^{(2)}$ 出发, 沿最速下降方向搜索.

$$d^{(2)} = -\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -\frac{51}{31} \\ \frac{17}{31} \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{31}(26 - 51\lambda) \\ \frac{1}{31}(16 + 17\lambda) \end{bmatrix},$$

取

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \frac{1}{31^2}(26 - 51\lambda)^2 - \frac{2}{31^2}(26 - 51\lambda)(16 + 17\lambda) \\ &\quad + \frac{4}{31^2}(16 + 17\lambda)^2 + \frac{1}{31}(26 - 51\lambda) - \frac{3}{31}(16 + 17\lambda),\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= -\frac{2 \times 51}{31^2}(26 - 51\lambda) + \frac{2 \times 51}{31^2}(16 + 17\lambda) \\ &\quad - \frac{2 \times 17}{31^2}(26 - 51\lambda) + \frac{8 \times 17}{31^2}(16 + 17\lambda) - \frac{51}{31} - \frac{3 \times 17}{31} = 0,\end{aligned}$$

得到

$$\lambda_2 = \frac{5}{19}, \quad x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 239 \\ 589 \\ 389 \\ 589 \end{bmatrix}.$$

4. 考虑函数

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2.$$

(1) 画出函数 $f(x)$ 的等值线, 并求出极小点.

(2) 证明若从 $x^{(1)} = (0, 0)^T$ 出发, 用最速下降法求极小点 \bar{x} , 则不能经有限步迭代达到 \bar{x} .

(3) 是否存在 $x^{(1)}$, 使得从 $x^{(1)}$ 出发, 用最速下降法求 $f(x)$ 的极小点, 经有限步迭代即收敛?

解 (1) 记 $f(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 1)^2 - 8$, 等值线方程为

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{k + 8} + \frac{(x_2 - 1)^2}{\frac{k + 8}{4}} = 1 \quad (k > -8),$$

等值线是一族椭圆, 中心在点 $(2, 1)$, 长半轴等于 $\sqrt{k + 8}$, 短半轴等于 $\frac{1}{2}\sqrt{k + 8}$. 极小点 $\bar{x} = (2, 1)^T$.

(2) 假设从 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 出发, 经有限步迭代即达到点 \bar{x} , 则存在一个迭代点 $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \neq \bar{x}$,

使得 $\bar{x} = \hat{x} - \lambda \nabla f(\hat{x})$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2(\hat{x}_1 - 2) \\ 8(\hat{x}_2 - 1) \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

经整理得方程组

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda) \hat{x}_1 + 4\lambda - 2 = 0, \\ (1 - 8\lambda) \hat{x}_2 + 8\lambda - 1 = 0. \end{cases}$$

下面分 3 种情形讨论:

若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{梯度 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2(\hat{x}_1 - 2) \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

显然, $\nabla f(\hat{x})$ 与 $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ 既不正交, 也不共线, 这是不可能的, 因此 $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

若 $\lambda = \frac{1}{8}$, 则

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{梯度 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8(\hat{x}_2 - 1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

$\nabla f(\hat{x})$ 与 $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ 仍然既不正交也不共线, 因此不可能, 即 $\lambda \neq \frac{1}{8}$.

若 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 且 $\lambda \neq \frac{1}{8}$, 则 $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{x}$, 矛盾.

综上所述, 从 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 出发, 用最速下降法, 经有限步迭代不可能达到极小点.

(3) 存在初点 $x^{(1)}$, 使得从 $x^{(1)}$ 出发, 用最速下降法, 经有限步迭代达到极小点. 例如, 从 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 出发, 经一次迭代达到极小点 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. 设有函数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x^{(1)} (\neq \bar{x})$ 可表示为

$$x^{(1)} = \bar{x} + \mu p,$$

其中 \bar{x} 是 $f(x)$ 的极小点, p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明:

(1) $\nabla f(x^{(1)}) = \mu \lambda p$.

(2) 如果从 $x^{(1)}$ 出发, 沿最速下降方向作精确的一维搜索, 则一步达到极小点 \bar{x} .

证 (1) 先证第 1 个等式. 易知

$$\nabla f(x^{(1)}) = A x^{(1)} + b = A(\bar{x} + \mu p) + b = (A \bar{x} + b) + \mu A p.$$

由于 \bar{x} 是 $f(x)$ 的极小点, 故 $\nabla f(\bar{x}) = A \bar{x} + b = 0$, 而 $A p = \lambda p$, 因此

$$\nabla f(x^{(1)}) = \mu \lambda p.$$

(2) 从 $x^{(1)}$ 出发, 用最速下降法搜索, 并考虑 (1) 中结论, 则有

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \beta \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x} + \mu p - \beta(\mu \lambda p) = \bar{x} + (1 - \beta \lambda) \mu p.$$

由于 A 是对称正定矩阵, 因此特征值 $\lambda \neq 0$. 令 $\beta = \frac{1}{\lambda}$, 则 $x^{(2)} = \bar{x}$.

6. 设有函数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x^{(1)} (\neq \bar{x})$ 可表示为

$$x^{(1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)},$$

其中 $m > 1$, 对所有 $i, \mu_i \neq 0, p^{(i)}$ 是 A 的属于不同特征值 λ_i 的特征向量, \bar{x} 是 $f(x)$ 的极小点.

证明从 $x^{(1)}$ 出发用最速下降法不可能一步迭代终止.

证 假设经一步迭代终止, 即

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x},$$

则必有

$$\sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = 0. \quad (1)$$

已知

$$x^{(1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)},$$

上式两端左乘可逆矩阵 A , 再加上向量 b , 并考虑到 $A\bar{x} + b = 0$ 及 $\nabla f(x^{(1)}) = Ax^{(1)} + b$, 得到

$$\nabla f(x^{(1)}) = \sum_{i=1}^m \mu_i A p^{(i)} = \sum_{i=1}^m \mu_i \lambda_i p^{(i)}. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 经整理有

$$\sum_{i=1}^m \mu_i (1 - \lambda \lambda_i) p^{(i)} = 0.$$

由于 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$ 线性无关, 则

$$\mu_i (1 - \lambda \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

已知 $\mu_i \neq 0$, 因此

$$1 - \lambda \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m (m > 1)$ 是互不相同正数, 同时满足上述 m 个条件的 λ 不存在, 因此用最速下降法搜索不可能经一步迭代终止.

7. 考虑下列问题:

$$\min f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

A 为对称正定矩阵. 设从点 $x^{(k)}$ 出发, 用最速下降法求后继点 $x^{(k+1)}$. 证明:

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) = \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}.$$

证 最速下降法迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)}). \quad (1)$$

式中 λ_k 是从 $x^{(k)}$ 出发, 沿方向 $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$ 搜索的移动步长, 记

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})),$$

则

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \nabla f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)}))^T (-\nabla f(x^{(k)})) \\ &= -[A(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})) + b]^T \nabla f(x^{(k)}) \\ &= -[\nabla f(x^{(k)}) - \lambda A \nabla f(x^{(k)})]^T \nabla f(x^{(k)}). \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 解得步长

$$\lambda_k = \frac{\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}. \quad (2)$$

两点目标函数值之差为:

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2} x^{(k)T} A x^{(k)} - \frac{1}{2} x^{(k+1)T} A x^{(k+1)} + b^T (x^{(k)} - x^{(k+1)}). \quad (3)$$

式中,

$$\begin{aligned} x^{(k+1)T} A x^{(k+1)} &= (x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)}))^T A (x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)})) = x^{(k)T} A x^{(k)} \\ &\quad - 2\lambda_k x^{(k)T} A \nabla f(x^{(k)}) + \lambda_k^2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} b^T (x^{(k)} - x^{(k+1)}) &= (\nabla f(x^{(k)}) - A x^{(k)})^T (\lambda_k \nabla f(x^{(k)})) \\ &= \lambda_k \nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) - \lambda_k x^{(k)T} A \nabla f(x^{(k)}). \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)式, (5)式代入(3)式, 并注意到(2)式, 则

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) &= -\frac{1}{2} \lambda_k^2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)}) + \lambda_k \nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})} + \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})} \\ &= \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}. \end{aligned}$$

8. 设 $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, A 是对称正定矩阵. 用最速下降法求 $f(x)$ 的极小点, 迭代公式如下:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k, \quad (10.1)$$

其中 g_k 是 $f(x)$ 在点 $x^{(k)}$ 处的梯度. 令

$$E(x) = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) = f(x) + \frac{1}{2} \bar{x}^T A \bar{x},$$

其中 \bar{x} 是 $f(x)$ 的极小点. 证明迭代算法 (10.1) 式满足

$$E(x^{(k+1)}) = \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right] E(x^{(k)}).$$

(提示: 直接计算 $[E(x^{(k)}) - E(x^{(k+1)})]/E(x^{(k)})$, 并注意到 $A(x^{(k)} - \bar{x}) = g_k$.)

证

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{E(x^{(k+1)})}{E(x^{(k)})} \\ &= \frac{E(x^{(k)}) - E(x^{(k+1)})}{E(x^{(k)})} \\ &= \frac{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - (x^{(k+1)} - \bar{x})^T A (x^{(k+1)} - \bar{x})}{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x})} \\ &= \frac{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - \left(x^{(k)} - \bar{x} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k \right)^T A \left(x^{(k)} - \bar{x} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k \right)}{(x^{(k)} - \bar{x})^T A A^{-1} A (x^{(k)} - \bar{x})} \\ &= \frac{\frac{2g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - \left(\frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} \right)^2 g_k^T A g_k}{g_k^T A^{-1} g_k} \\ &= \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)}. \end{aligned}$$

两边乘以 $E(x^{(k)})$, 经移项, 得到

$$E(x^{(k+1)}) = \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right] E(x^{(k)}).$$

9. 设 $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, A 为对称正定矩阵, 任取初始点 $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$. 证明最速下降法

(10.1) 式产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于唯一的极小点 \bar{x} , 并且对每一个 k , 成立

$$E(x^{(k+1)}) \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E(x^{(k)}), \quad (10.2)$$

其中 $E(x) = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x})$, M 和 m 分别是矩阵 A 的最大和最小特征值.

(提示: 利用习题 8 的结果和 Kantorovich 不等式. 这个不等式是, 对任意的非零向量 x , 有

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (10.3)$$

先证不等式 (10.2), 再证收敛性.)

证 由 8 题所证, 有

$$E(x^{(k+1)}) = \left\{ 1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right\} E(x^{(k)}). \quad (1)$$

根据 Kantorovich 不等式, 有

$$\frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}.$$

代入 (1) 式, 由于 $E(x^{(k)}) \geq 0$, 必有

$$E(x^{(k+1)}) \leq \left[1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} \right] E(x^{(k)}), \quad \text{即 } E(x^{(k+1)}) \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E(x^{(k)}).$$

序列 $\{E(x^{(k)})\}$ 是单调递减有下界的正数列, 必收敛于 $E(\bar{x}) = 0$, 因此 $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$. 由此可知, 迭代产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于惟一极小点 \bar{x} .

10. 证明向量 $(1, 0)^T$ 和 $(3, -2)^T$ 关于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

共轭.

证 由于

$$(1, 0) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (2, 3) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0,$$

因此 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 关于 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 共轭.

11. 给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

关于 A, B 各求出一组共轭方向.

解 不惟一, 仅举一例.

如 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ 关于 A 共轭. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 关于 B 共轭.

12. 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, 证明 A 的 n 个互相正交的特征向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ 关于 A 共轭.

证 设 $A p^{(i)} = \lambda_i p^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$. 已知当 $i \neq j$ 时, $p^{(i)T} p^{(j)} = 0$. 因此

$$p^{(i)T} A p^{(j)} = \lambda_j p^{(i)T} p^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

故 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ 关于 A 共轭.

13. 设 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ 为一组线性无关向量, H 是 n 阶对称正定矩阵, 令向量 $d^{(k)}$ 为

$$d^{(k)} = \begin{cases} p^{(k)}, & k = 1, \\ p^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{d^{(i)T} H p^{(k)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} \right] d^{(i)}, & k = 2, \dots, n. \end{cases}$$

证明 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭.

证 用数学归纳法.

当 $k=2$ 时

$$\begin{aligned} d^{(1)T} H d^{(2)} &= p^{(1)T} H \left(p^{(2)} - \frac{d^{(1)T} H p^{(2)}}{d^{(1)T} H d^{(1)}} d^{(1)} \right) \\ &= p^{(1)T} H \left(p^{(2)} - \frac{p^{(1)T} H p^{(2)}}{p^{(1)T} H p^{(1)}} p^{(1)} \right) \\ &= p^{(1)T} H p^{(2)} - p^{(1)T} H p^{(2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

即 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 关于 H 共轭.

设 $k < n$ 时结论成立, 即对所有不同的正整数 $j, t \leq k < n$, 有 $d^{(j)T} H d^{(t)} = 0$.

当 $k=n$ 时, 有

$$\begin{aligned} d^{(j)T} H d^{(n)} &= d^{(j)T} H \left[p^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^{(i)T} H p^{(n)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} d^{(i)} \right] \quad (j < n) \\ &= d^{(j)T} H p^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^{(i)T} H p^{(n)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} d^{(j)T} H d^{(i)} \\ &= d^{(j)T} H p^{(n)} - d^{(j)T} H p^{(n)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, $k=n$ 时结论成立, 即 $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭.

14. 用共轭梯度法求解下列问题:

(1) $\min \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2$, 取初始点 $x^{(1)} = (4, 4)^T$.

(2) $\min x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2 + 2$, 取初始点 $x^{(1)} = (0, 0)^T$.

(3) $\min (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, 取初始点 $x^{(1)} = (1, 3)^T$.

(4) $\min 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 4x_2$, 取初始点 $x^{(1)} = (3, 4)^T$.

(5) $\min 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2$, 取初始点 $x^{(1)} = (2, -2)^T$.

解 目标函数记作 $f(x)$, 在点 $x^{(k)}$ 处目标函数的梯度记作 $g_k = \nabla f(x^{(k)})$.

(1) $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, 搜索方向记作 $d^{(k)}$.

第1次迭代:

$$d^{(1)} = -g_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 - 4\lambda \\ 4 - 8\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = \frac{1}{2} (4 - 4\lambda)^2 + (4 - 8\lambda)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到

$$\lambda_1 = \frac{5}{9}, \quad \text{故 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$g_2 = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{4}{81}, \quad -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} + \frac{4}{81} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{40}{81} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令 $d^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则

$$x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} - 4\lambda \\ -\frac{4}{9} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{9} - 4\lambda \right)^2 + \left(-\frac{4}{9} + \lambda \right)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到

$$\lambda_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{故 } x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优解 } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2) $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{bmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

第1次迭代:

$$d^{(1)} = -g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\lambda \end{bmatrix}, \quad \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = 8\lambda^2 - 4\lambda + 2.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{故 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{1}{4}, \quad d^{(2)} = -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -\frac{1}{2}(1 + \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \lambda^2 + \frac{1}{2} (1 + \lambda)^2 - \lambda(1 + \lambda) - (1 + \lambda) + 2.$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_2=1$, 故

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优解 } \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1-2) \\ 4(x_2-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ 3-8\lambda \end{bmatrix},$$

$\varphi(\lambda) = (2\lambda-1)^2 + 2(2-8\lambda)^2$. 令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_1 = \frac{17}{66}$, 故

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{50}{33} \\ \frac{31}{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{32}{33} \\ -\frac{8}{33} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = \frac{16}{33^2}, \quad -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \frac{8 \times 17}{33^2} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{50}{33} + 8\lambda \\ \frac{31}{33} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)}) = \left(8\lambda - \frac{16}{33}\right)^2 + 2\left(\lambda - \frac{2}{33}\right)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_2 = \frac{2}{33}$, 故 $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 最优解 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(4) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -23 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3-23\lambda \\ 4-10\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 2(3-23\lambda)^2 + 2(3-23\lambda)(4-10\lambda) + (4-10\lambda)^2 + 3(3-23\lambda) - 4(4-10\lambda).$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_1 = \frac{629}{3236} \approx 0.194$, 故

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3-23\lambda_1 \\ 4-10\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.462 \\ 2.06 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1.272 \\ -2.804 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = 0.015, \quad \mathbf{d}^{(2)} = -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.617 \\ 2.654 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.462 - 1.617\lambda \\ 2.06 + 2.654\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 2(-1.462 - 1.617\lambda)^2 + 2(-1.462 - 1.617\lambda)(2.06 + 2.654\lambda) + (2.06 + 2.654\lambda)^2 + 3(-1.462 - 1.617\lambda) - 4(2.06 + 2.654\lambda).$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 即 $7.380\lambda - 9.499=0$, 得 $\lambda_2 = 1.287$,

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda_2 \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.543 \\ 5.476 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.134 \end{bmatrix}.$$

得近似解 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.543 \\ 5.476 \end{bmatrix}$. 精确最优解 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}$, 误差是计算造成的.

$$(5) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2-4\lambda \\ -2+16\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)}) = 2(2-4\lambda)^2 + 2(2-4\lambda)(-2+16\lambda) + 5(-2+16\lambda)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 解得 $\lambda_2 = \frac{17}{148}$, 于是得到

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{57}{37} \\ -\frac{6}{37} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{216}{37} \\ \frac{54}{37} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = \left(\frac{27}{74}\right)^2, \quad -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \frac{27 \times 17}{37^2} \begin{bmatrix} -19 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -19 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{57}{37} - 19\lambda \\ -\frac{6}{37} + 2\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)}) = 2\left(\frac{57}{37} - 19\lambda\right)^2 + 2\left(\frac{57}{37} - 19\lambda\right)\left(-\frac{6}{37} + 2\lambda\right) + 5\left(-\frac{6}{37} + 2\lambda\right)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_2 = \frac{3}{37}$, 故 $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 最优解 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

15. 设将 FR 共轭梯度法用于有三个变量的函数 $f(x)$, 第 1 次迭代, 搜索方向 $d^{(1)} = (1, -1, 2)^T$, 沿 $d^{(1)}$ 作精确一维搜索, 得到点 $x^{(2)}$, 又设

$$\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -2, \quad \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -2,$$

那么按共轭梯度法的规定, 从 $x^{(2)}$ 出发的搜索方向是什么?

解 记 $g_i = \nabla f(x^{(i)})$. 由一维搜索知, $g_2^T d^{(1)} = 0$, 由此得到 $g_2 = (-2, -2, 0)^T$. 根据 FR 共轭梯度法规定,

$$g_1 = -d^{(1)} = (-1, 1, -2)^T, \quad \beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{4}{3}, \quad \text{则 } d^{(2)} = -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)^T.$$

16. 设 A 为 n 阶对称正定矩阵, 非零向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ 关于矩阵 A 共轭. 证明:

$$(1) x = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2) A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

证 (1) 由假设, $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$ 是 \mathbb{R}^n 中 n 个线性无关向量, 可作为一组基, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 可令

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p^{(i)}.$$

上式两端左乘 $p^{(i)T} A$, 则 $p^{(i)T} A x = \lambda_i p^{(i)T} A p^{(i)}$, 从而

$$\lambda_i = \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

代入上式, 则

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)}.$$

(2) 记 $A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 由 (1) 所证, β_j 可表示为

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A \beta_j}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A \beta_j}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

因此可以写作

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{p^{(i)T} A p^{(i)}} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}},$$

即

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

17. 设有非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T A x \\ \text{s. t.} \quad & x \geq b, \end{aligned}$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵. 设 \bar{x} 是问题的最优解. 证明 \bar{x} 与 $\bar{x} - b$ 关于 A 共轭.

证 此问题属于凸规划, \bar{x} 必是 K-T 点, 即满足

$$\begin{cases} A \bar{x} - w^T = 0, \\ w(\bar{x} - b) = 0, \\ w \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

由方程 (1), 得 $w = \bar{x}^T A$, 两边右乘 $\bar{x} - b$, 考虑到方程 (2), 则有

$$\bar{x}^T A (\bar{x} - b) = w(\bar{x} - b) = 0,$$

即 \bar{x} 与 $\bar{x} - b$ 关于 A 共轭.

18. 用 DFP 方法求解下列问题:

$$\min x_1^2 + 3x_2^2,$$

取初始点及初始矩阵为

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 记 $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$, 则 $g_k = \nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$. 第 1 次迭代:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = -H_1 g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 + 2\lambda \\ -1 + 4\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = (1 + 2\lambda)^2 + 3(-1 + 4\lambda)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 4(1 + 2\lambda) + 24(-1 + 4\lambda) = 0$, 得 $\lambda_1 = \frac{5}{26}$, 故

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 + 2\lambda_1 \\ -1 + 4\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} \frac{36}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

记

$$p^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} = \frac{5}{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(1)} = g_2 - g_1 = \begin{bmatrix} \frac{36}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{10}{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = H_1 + \frac{p^{(1)} p^{(1)T}}{p^{(1)T} q^{(1)}} - \frac{H_1 q^{(1)} q^{(1)T} H_1}{q^{(1)T} H_1 q^{(1)}} = \frac{1}{650} \begin{bmatrix} 493 & -28 \\ -28 & 113 \end{bmatrix}, \quad -H_2 g_2 = \frac{18 \times 169}{650 \times 13} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d^{(2)} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} - 6\lambda \\ -\frac{3}{13} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{18}{13} - 6\lambda\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{13} + \lambda\right)^2. \text{ 令 } \varphi'(\lambda) = 0,$$

得到 $\lambda_2 = \frac{9}{39}$, 故 $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 最优解为 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

19. 用 DFP 方法求解问题的过程中, 已知

$$H_k = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad p^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

求矩阵 H_{k+1} .

解 代入相应公式, 得到

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

20. 假如用 DFP 方法求解某问题时算得

$$H_k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad p^{(k)} = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(k)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

这些数据有什么错误?

解 $p^{(k)T} q^{(k)} = (17 \ 2) \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = -5 < 0$, 运用 DFP 方法求解过程中, 应有 $p^{(k)T} q^{(k)} > 0$.

第11章

无约束最优化的直接方法题解

1. 用模式搜索法求解下列问题:

(1) $\min x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 7$, 取初始点 $x^{(1)} = (0, 0)^T$, 初始步长 $\delta = 1$, $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{4}$.

(2) $\min x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$, 取初始点 $x^{(1)} = (1, 1)^T$, 初始步长 $\delta = 1, \alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

解 (1) 记 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 7$, 坐标方向 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 初始点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则 $f(x^{(1)}) = 7$.

从 $y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 4 < f(y^{(1)}) = 7.$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = 4$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 7 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = 3 < f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} - \delta e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(3)}) = 3, f(y^{(3)}) < f(y^{(1)})$, 故取第 2 个基点 $x^{(2)} =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(x^{(2)}) = 3$. 沿方向 $x^{(2)} - x^{(1)}$ 进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} + \alpha(x^{(2)} - x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = 3.$$

从 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ 出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 4 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = 4 > f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = 3$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 2 < f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} + \delta e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(3)}) = 2$, $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)})$, 故取第 3 个基点 $x^{(3)} =$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(x^{(3)}) = 2$. 沿方向 $x^{(3)} - x^{(2)}$ 进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} + \alpha(x^{(3)} - x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = 3.$$

从 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 6 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = 2 < f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} - \delta e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 3 > f(y^{(2)}) = 2, \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = 3 > f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = x^{(3)}$.

缩小步长, 令 $\delta = \frac{1}{4}$, 取 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 则 $f(y^{(1)}) = 2$.

从 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = \frac{33}{16} > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = \frac{33}{16} > f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = 2$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = \frac{33}{16} > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = \frac{33}{16} > f(y^{(2)}).$$

本轮探测失败. 基点 $x^{(3)}$ 已经是最优解.

(2) 记 $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$, 从 $y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6 < f(y^{(1)}) = -3,$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -6$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -4 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -4 > f(y^{(2)}).$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(3)}) = -6 < f(x^{(1)})$. 令 $x^{(2)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 沿方向 $x^{(2)} - x^{(1)}$ 进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} + \alpha(x^{(2)} - x^{(1)}) = 2x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = -7.$$

从 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 出发, 进行第 2 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -6 > f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -7$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7 = f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -3 > f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. 基点 $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(x^{(3)}) = -7$. 进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} + \alpha(x^{(3)} - x^{(2)}) = 2x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = -6.$$

从 $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 出发, 进行第 3 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -3 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -7 < f(y^{(1)}) = -6,$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} - \delta e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -7$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7 = f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -3 > f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = x^{(3)}$.

退回到 $x^{(3)}$, 减小步长, 令 $\delta = \frac{1}{2}$, 进行第 4 轮探测:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(1)}) = -7.$$

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6.75 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -6.75 > f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7.5 < f(y^{(2)}) = -7,$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)} + \delta e_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(3)}) < f(x^{(3)})$. 令基点 $x^{(4)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, 则 $f(x^{(4)}) =$

-7.5. 沿方向 $x^{(4)} - x^{(3)}$ 进行模式移动:

令 $y^{(1)} = x^{(4)} + \alpha(x^{(4)} - x^{(3)}) = 2x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, 则 $f(y^{(1)}) = -7$.

从 $y^{(1)}$ 出发, 进行第5轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.75 < f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -7.75$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -6.75 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.75 = f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)}$. 取基点 $x^{(5)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(x^{(5)}) = -7.75$. 沿方向 $x^{(5)} - x^{(4)}$ 作模式

移动:

令 $y^{(1)} = x^{(5)} + \alpha(x^{(5)} - x^{(4)}) = 2x^{(5)} - x^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, 则 $f(y^{(1)}) = -7.5$.

从 $y^{(1)}$ 出发, 进行第6轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.75 < f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -7.75$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -6.75 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.75 = f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)}$, 这时 $f(y^{(3)}) = -7.75 = f(x^{(5)})$.

第7轮探测:

令 $\delta = \frac{1}{4}$, $y^{(1)} = x^{(5)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 则 $f(y^{(1)}) = -7.75$.

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.9375 < f(y^{(1)}),$$

故令 $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 这时 $f(y^{(2)}) = -7.9375$.

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7.6875 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.9375 = f(y^{(2)}),$$

故令 $y^{(3)} = y^{(2)}$, 这时 $f(y^{(3)}) < f(x^{(5)}) = -7.75$. 令 $x^{(6)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

继续做下去, 可以得到更好的近似解. 易知问题的精确解 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. 用 Rosenbrock 方法解下列问题:

(1) $\min (x_2 - 2x_1)^2 + (x_2 - 2)^4$, 取初始点 $x^{(1)} = (3, 0)^T$, 初始步长

$$\delta_1^{(0)} = \delta_2^{(0)} = \frac{1}{10}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

要求迭代两次.

(2) $\min x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2 + 3$, 取初始点 $x^{(1)} = (0, 8)^T$, 初始步长

$$\delta_1^{(0)} = \delta_2^{(0)} = 1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

解 (1) 记 $f(x) = (x_2 - 2x_1)^2 + (x_2 - 2)^4$.

第1轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = f(x^{(1)}) = 52, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{11} = \delta_{21} = 0.1, \quad f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 54.44 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{12} = -0.05,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 52.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 47.842 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{22} = 0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 47.842, \quad \delta_{12} = -0.05, \quad \delta_{22} = 0.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 46.672 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{13} = -0.1,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 46.672.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 39.712 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{23} = 0.4,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 39.712.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 39.712, \quad \delta_{13} = -0.1, \quad \delta_{23} = 0.4.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 37.512 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{14} = -0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 37.512.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 27.856 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{24} = 0.8,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 27.856.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 27.856, \quad \delta_{14} = -0.2, \quad \delta_{24} = 0.8.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 24.016 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{15} = -0.4,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 24.016.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 14.503 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{25} = 1.6,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 14.503.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 14.503, \quad \delta_{15} = -0.4, \quad \delta_{25} = 1.6.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 9.063 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{16} = -0.8,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 9.063.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 3.424 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{26} = 3.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 3.424.$$

第6轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 3.424, \quad \delta_{16} = -0.8, \quad \delta_{26} = 3.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{16}d^{(1)}) = 1.504 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{17} = -1.6,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{16}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{26}d^{(2)}) = 353.440 > f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{27} = -1.6,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 1.504.$$

第7轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 1.504, \quad \delta_{17} = -1.6, \quad \delta_{27} = -1.6.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{17}d^{(1)}) = 13.024 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{18} = 0.8,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{27}d^{(2)}) = 2.023 > f(y^{(2)}),$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 1.504.$$

沿两个方向探测均失败, $f(y^{(3)}) < f(x^{(1)})$, 令

$$x^{(2)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 1.504.$$

下面构造一组新的单位正交方向. 为此先求出沿每个方向移动步长的代数和. 由于

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix},$$

沿 $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 移动步长的代数和 $\lambda_1 = -1.55$, 沿 $d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 移动步长的代数和 $\lambda_2 = 3.1$. 再用

施密特正交化方法构造一组新的标准正交基. 令

$$p^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} = -1.55 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix},$$

$$p^{(2)} = \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.1 \end{bmatrix}.$$

把 $p^{(1)}, p^{(2)}$ 正交化, 令

$$q^{(1)} = p^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad q^{(2)} = p^{(2)} - \frac{p^{(2)T} q^{(1)}}{q^{(1)T} q^{(1)}} q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.24 \\ 0.62 \end{bmatrix}.$$

再单位化, 令

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}.$$

从探测得到的点 $x^{(2)}$ 出发, 沿着新的单位正交方向 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 进行新一阶段的探测. 下面给出进一步探测过程.

第1轮探测:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.504. \text{ 记 } \delta_{11} = \delta_{21} = 0.1, \alpha = 2, \beta = -0.5. \text{ 探测方向为}$$

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 2.142 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{12} = -0.05,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 1.723 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = -0.05,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.504 = f(x^{(2)}), \text{ 继续探测.}$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.504, \delta_{12} = -0.05, \delta_{22} = -0.05.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 1.251 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = -0.1,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 3.055 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 1.251.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 1.171 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -0.1,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.427 \\ 3.033 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.171.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.427 \\ 3.033 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.171, \delta_{13} = -0.1, \delta_{23} = -0.1.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 0.794 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = -0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 2.944 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.794.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 0.671 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = -0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.383 \\ 2.899 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.671.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.383 \\ 2.899 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.671, \delta_{14} = -0.2, \delta_{24} = -0.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 0.319 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{15} = -0.4,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 2.720 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.319.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 0.161 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{25} = -0.4,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.161.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.161, \delta_{15} = -0.4, \delta_{25} = -0.4.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 0.456 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{16} = 0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.161.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 0.380 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{26} = 0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.161.$$

沿两个方向探测均失败, $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)}) = 1.504$, 根据算法规定, 需构造一组新的单位正交方向, 再进行新的探测阶段. 这里不再做下去. 至此, 得到近似解:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, f(x^{(3)}) = 0.161.$$

问题的精确解 $x^* = (1, 2)^T$.

(2) 记 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2 + 3$, 取初始探测方向 $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 初始点

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

第1轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 67, \delta_{11} = \delta_{21} = 1, \alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 57 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{12} = 3,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 57.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 73 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = -0.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 57.$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 57, \delta_{12} = 3, \delta_{22} = -0.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 39 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = 9,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 39.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 33.25 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -1.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 33.25.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 33.25, \delta_{13} = 9, \delta_{23} = -1.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 91.75 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = -4.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 33.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 19 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = -4.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 19.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 19, \delta_{14} = -4.5, \delta_{24} = -4.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 43.75 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{15} = 2.25,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 19.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 3.25 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{25} = -13.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 3.25.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 3.25, \delta_{15} = 2.25, \delta_{25} = -13.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 16.188 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{16} = -1.125,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 3.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 199 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{26} = 6.75,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 3.25.$$

沿两个方向探测均失败, $f(y^{(3)}) < f(x^{(1)}) = 67$.

$$\text{令 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(x^{(2)}) = 3.25.$$

构造一组新的探测方向:

$$\lambda_1 = 1 + 3 = 4, \lambda_2 = -0.5 - 1.5 - 4.5 = -6.5.$$

令

$$p^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6.5 \end{bmatrix}, p^{(2)} = \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.5 \end{bmatrix}.$$

把 $p^{(1)}, p^{(2)}$ 正交化, 令

$$q^{(1)} = p^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6.5 \end{bmatrix}, q^{(2)} = p^{(2)} - \frac{p^{(2)T}q^{(1)}}{q^{(1)T}q^{(1)}}q^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.901 \\ -1.785 \end{bmatrix}.$$

再单位化, 令

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.524 \\ -0.852 \end{bmatrix}, d^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.852 \\ -0.524 \end{bmatrix}.$$

从探测得到的 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ 出发, 沿着新构造的单位正交方向探测.

第1轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 3.25, \delta_{11} = \delta_{21} = 1, \alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 7.383 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{12} = -0.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 3.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 1.346 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = 3,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.148 \\ 0.976 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.346.$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.148 \\ 0.976 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.346, \delta_{12} = -0.5, \delta_{22} = 3.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 0.590 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = -1.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.590.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 2.204 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -1.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.590.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.590, \delta_{13} = -1.5, \delta_{23} = -1.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 2.664 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = 0.75,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.590.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 3.523 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = 0.75,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.590.$$

沿两个方向探测均失败, $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)}) = 3.25$. 令

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(\mathbf{x}^{(3)}) = 0.590.$$

需构造新的单位正交方向, 再进行探测. 这里不再作下去. 近似解

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(\mathbf{x}^{(3)}) = 0.590.$$

实际上, 问题最优解

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^*) = 0.$$

3. 用单纯形搜索法求解下列问题:

(1) $\min 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$, 取初始单纯形的顶点

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix},$$

取因子 $\alpha=1, \gamma=2, \beta=\frac{1}{2}$. 要求迭代 4 次.

(2) $\min (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_1 + x_2 - 4)^2$, 取初始单纯形的顶点

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

取因子 $\alpha=1, \gamma=2, \beta=\frac{1}{2}$. 要求画出这个算法的进程.

解 (1) 第 1 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=125, f(\mathbf{x}^{(3)})=61$, 最高点 $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(2)}$, 次高点 $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(3)}$, 最低点 $\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(1)}$. 线段 $\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(3)}$ 的中点为

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix},$$

最高点 $\mathbf{x}^{(2)}$ 经过点 $\bar{\mathbf{x}}$ 的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 13 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45.$$

进行扩展, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}^{(4)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 8 < f(\mathbf{x}^{(4)}) = 13.$$

用扩展点 $\mathbf{x}^{(5)}$ 取代最高点 $\mathbf{x}^{(2)}$, 得到新的单纯形, 其顶点为

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=61$. 最高点 $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(3)}$, 次高点 $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(1)}$, 最低点

$$\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(2)}.$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8.5 \end{bmatrix}.$$

最高点 $\mathbf{x}^{(3)}$ 经过点 $\bar{\mathbf{x}}$ 的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 4 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 8.$$

进行扩展, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}^{(4)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 42.25 > f(\mathbf{x}^{(4)}) = 4.$$

用 $\mathbf{x}^{(4)}$ 替换最高点 $\mathbf{x}^{(3)}$, 得到新的单纯形, 顶点是

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

第 3 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=4$, 最高点 $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(1)}$, 次高点 $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(2)}$, 最低点 $\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(3)}$.

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(1)}$ 经 $\bar{\mathbf{x}}$ 的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 101 > f(\mathbf{x}^{(g)}) = 8.$$

由于 $\min\{f(\mathbf{x}^{(1)}), f(\mathbf{x}^{(4)})\} = f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45$, 将 $\mathbf{x}^{(1)}$ 向 $\bar{\mathbf{x}}$ 压缩, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \beta(\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 8 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45.$$

用 $\mathbf{x}^{(5)}$ 替换 $\mathbf{x}^{(1)}$, 得到新的单纯形, 其顶点记为

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

第 4 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=8, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=4$. 由于 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ 两点函数值相等, 任取其一作为最高点, 不妨令 $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(1)}$. $\mathbf{x}^{(2)}\mathbf{x}^{(3)}$ 的中点是

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(1)}$ 经 $\bar{\mathbf{x}}$ 的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 36 > f(\mathbf{x}^{(g)}) = 8.$$

由于 $\min\{f(\mathbf{x}^{(1)}), f(\mathbf{x}^{(4)})\} = f(\mathbf{x}^{(1)})$, 将 $\mathbf{x}^{(1)}$ 向 $\bar{\mathbf{x}}$ 压缩, 令

$$x^{(5)} = \bar{x} + \beta(x^{(1)} - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(5)}) = 2.25 < f(x^{(1)}) = 8.$$

用 $x^{(5)}$ 替换 $x^{(1)}$, 得到新的单纯形, 其顶点记为

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \text{ 作为近似解. 精确解 } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(2) 第2个问题与(1)题解法类似, 经多次迭代, 得到以下列3点为顶点的单纯形:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.53 \\ 1.938 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.655 \\ 1.688 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.81 \\ 1.375 \end{bmatrix}.$$

其中 $x^{(2)}$ 可作为近似解, 函数值 $f(x^{(2)}) = 0.334$. 精确解 $x^* = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)^T$, $f(x^*) = \frac{1}{3}$. 由于迭代进展比较缓慢, 迭代过程从略.

4. 用 Powell 方法解下列问题:

$$\min \quad \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1,$$

取初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 第1轮搜索:

记 $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$, 置 $x^{(1,0)} = x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. 从 $x^{(1,0)}$ 出发, 沿 $d^{(1,1)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} -2 + \lambda \\ 4 \end{bmatrix}.$$

记

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}) = \frac{3}{2}(-2 + \lambda)^2 + 8 - 4(-2 + \lambda) - 2(-2 + \lambda).$$

令 $\varphi'(\lambda) = 3(-2 + \lambda) - 4 - 2 = 0$, 得 $\lambda_1 = 4$, 故

$$x^{(1,1)} = x^{(1,0)} + \lambda_1 d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

再从 $x^{(1,1)}$ 出发, 沿 $d^{(1,2)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)})$$

其中

$$x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}) = 6 + \frac{1}{2}(4 + \lambda)^2 - 2(4 + \lambda) - 4.$$

取 $\varphi'(\lambda) = (4 + \lambda) - 2 = 0$, 得 $\lambda_2 = -2$, 故

$$x^{(1,2)} = x^{(1,1)} + \lambda_1 d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$d^{(1,3)} = x^{(1,2)} - x^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(1,2)}$ 出发, 沿方向 $d^{(1,3)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}),$$

其中

$$x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 + 4\lambda \\ 2 - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}) \\ &= \frac{3}{2}(2 + 4\lambda)^2 + \frac{1}{2}(2 - 2\lambda)^2 - (2 + 4\lambda)(2 - 2\lambda) - 2(2 + 4\lambda), \end{aligned}$$

取 $\varphi'(\lambda) = 12(2 + 4\lambda) - 2(2 - 2\lambda) - 4(2 - 2\lambda) + 2(2 + 4\lambda) - 8 = 0$, 则得 $\lambda_3 = -\frac{2}{17}$, 经第1轮搜索, 得到

$$x^{(1)} = x^{(1,2)} + \lambda_3 d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix}.$$

第2轮搜索:

$$d^{(2,1)} = d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,2)} = d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x^{(2,0)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(2,0)}$ 出发, 沿 $d^{(2,1)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,1)}),$$

其中

$$x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} + \lambda \\ \frac{26}{17} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = \frac{3}{2} \left(\frac{26}{17} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{38}{17} + \lambda \right)^2 - \frac{26}{17} \left(\frac{38}{17} + \lambda \right) - 2 \times \frac{26}{17},$$

取 $\varphi'(\lambda) = \frac{38}{17} + \lambda - \frac{26}{17} = 0$, 得 $\lambda_1 = -\frac{12}{17}$, 故

$$x^{(2,1)} = x^{(2,0)} + \lambda_1 d^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(2,1)}$ 出发, 沿 $d^{(2,2)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)}),$$

其中

$$x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} + 4\lambda \\ \frac{26}{17} - 2\lambda \\ \frac{26}{17} - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= f(x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)}) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{26}{17} + 4\lambda \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{26}{17} - 2\lambda \right)^2 - \left(\frac{26}{17} + 4\lambda \right) \left(\frac{26}{17} - 2\lambda \right) - 2 \left(\frac{26}{17} + 4\lambda \right), \end{aligned}$$

取 $\varphi'(\lambda) = 12 \left(\frac{26}{17} + 4\lambda \right) - 2 \left(\frac{26}{17} - 2\lambda \right) - 4 \left(\frac{26}{17} - 2\lambda \right) + 2 \left(\frac{26}{17} + 4\lambda \right) - 8 = 0$, 得到 $\lambda_2 = -\frac{18}{289}$, 故

$$x^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{370}{17^2} \\ \frac{478}{17^2} \\ \frac{478}{17^2} \end{bmatrix}.$$

由于

$$x^{(2,2)} - x^{(2,0)} = -\frac{24}{17^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(2,2)}$ 出发, 沿方向 $d^{(2,3)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)}),$$

其中

$$x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{370}{17^2} + 3\lambda \\ \frac{478}{17^2} + 7\lambda \\ \frac{478}{17^2} + 7\lambda \end{bmatrix}.$$

令 $\varphi(\lambda) = f(x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)})$, 取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_3 = -\frac{27}{17^2}$, 故

$$x^{(2)} = x^{(2,3)} = x^{(2,2)} + \lambda_3 d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

已经达到最优解 $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(x^*) = -1$.

5. 用改进的 Powell 方法解下列问题:

$$\min (-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2,$$

取初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 第1轮搜索:

记 $f(x) = (-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2$, $x^{(1,0)} = x^{(0)}$, $f(x^{(1,0)}) = 2$.

从 $x^{(1,0)}$ 出发沿 $d^{(1,1)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}) = (-\lambda + 1)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 1)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_1 = 0$, 因此

$$x^{(1,1)} = x^{(1,0)} + \lambda_1 d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,1)}) = 2.$$

从 $x^{(1,1)}$ 出发,沿 $d^{(1,2)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}),$$

其中

$$x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \lambda \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}) = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 + (1 + \lambda)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$, 从而有

$$x^{(1,2)} = x^{(1,1)} + \lambda_2 d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,2)}) = \frac{2}{3}.$$

从 $x^{(1,2)}$ 出发,沿 $d^{(1,3)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}),$$

其中

$$x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}) = \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_3 = -\frac{2}{9}$, 因此

$$x^{(1,3)} = x^{(1,2)} + \lambda_3 d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,3)}) = \frac{42}{81}.$$

令

$$d^{(1,4)} = x^{(1,3)} - x^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

从 $x^{(1,0)}$ 出发,沿方向 $d^{(1,4)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)}) = \left(1 - \frac{8}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\lambda\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{9}\lambda\right)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_4 = \frac{9}{8}$, 因此

$$x^{(1)} = x^{(1,0)} + \lambda_4 d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \frac{1}{2}.$$

$$\max\{f(x^{(1,0)}) - f(x^{(1,1)}), f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)}), f(x^{(1,2)}) - f(x^{(1,3)})\}$$

$$= \max\left\{0, \frac{4}{3}, \frac{12}{81}\right\}$$

$$= f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)}).$$

$$\text{记 } x^{(2,0)} = x^{(1)}, \left[\frac{f(x^{(1,0)}) - f(x^{(2,0)})}{f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)})} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} < \lambda_4 = \frac{9}{8}.$$

第2轮搜索:

$$d^{(2,1)} = d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,2)} = d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,3)} = d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2,0)} = \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,0)}) = \frac{1}{2}.$$

从 $\mathbf{x}^{(2,0)}$ 出发, 沿 $\mathbf{d}^{(2,1)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)}) = (-\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, 则

$$\mathbf{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,1)}) = \frac{1}{6}.$$

从 $\mathbf{x}^{(2,1)}$ 出发, 沿 $\mathbf{d}^{(2,2)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)}) = \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{6} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \lambda\right)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$, 于是

$$\mathbf{x}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{36} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,2)}) = \frac{7}{54}.$$

从 $\mathbf{x}^{(2,2)}$ 出发, 沿 $\mathbf{d}^{(2,3)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{36} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{5}{36} - \frac{2}{9}\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)}) = \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{5}{18} - \frac{4}{9}\lambda\right)^2,$$

取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, 因此

$$\mathbf{x}^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,3)}) = \frac{1}{18}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2,4)} = \mathbf{x}^{(2,3)} - \mathbf{x}^{(2,0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

从 $\mathbf{x}^{(2,0)}$ 出发, 沿 $\mathbf{d}^{(2,4)}$ 搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,4)}),$$

其中

$$x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda \end{bmatrix}.$$

令 $\varphi(\lambda) = f(x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,4)}) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda\right)^2$, 取 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda_4 = \frac{3}{2}$, 因此

$$x^{(2)} = x^{(2,0)} + \lambda_4 d^{(2,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

已经达到最优解.

第12章

可行方向法题解

1. 对于下列每种情形, 写出在点 $x \in S$ 处的可行方向集:

(1) $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$; (2) $S = \{x | Ax \leq b, Ex = e, x \geq 0\}$;

(3) $S = \{x | Ax \geq b, x \geq 0\}$.

解 答案如下:

(1) $\{d | Ad = 0, I_1 d \geq 0\}$;

(2) $\{d | A_1 d \leq 0, Ed = 0, I_1 d \geq 0\}$;

(3) $\{d | A_1 d \geq 0, I_1 d \geq 0\}$.

各式中, A_1 和 I_1 分别是 x 处起作用约束系数矩阵.

2. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

求出在点 $\hat{x} = (1, 1, 0)^T$ 处的一个下降可行方向.

解 目标函数 $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$ 的梯度是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 4x_2 - 2 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \text{故 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

在 $\hat{x} = (1, 1, 0)^T$ 处起作用约束有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

在 \hat{x} 处可行方向满足下列条件:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 0, \\ d_3 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

下降方向满足 $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$, 即

$$-3d_1 + 3d_2 - 12d_3 < 0. \quad (2)$$

同时满足上述 3 个条件的方向是 \hat{x} 处下降可行方向. 如 $d = (0, -1, 1)^T$.

3. 用 Zoutendijk 方法求解下列问题:

$$(1) \min x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

取初始点 $x^{(1)} = (1, 2)^T$.

$$(2) \min x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_1 - 6x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

取初始可行点 $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$.

解 (1) 将问题写作:

$$\min x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2$$

$$\text{s. t. } -2x_1 - x_2 \geq -6$$

$$-x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{目标函数的梯度 } \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 34 \\ 8x_2 - 32 \end{bmatrix}.$$

第 1 次迭代:

在点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -32 \\ -16 \end{bmatrix}$, 起作用约束和不起作用约束的系数矩阵分别记为

$$A_1 = [0, -1], A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端分别记为 } b_1 = [-2], b_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

先求在 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 处下降可行方向 $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$, 解下列线性规划问题:

$$\min \nabla f(x^{(1)})^T d$$

$$\text{s. t. } A_1 d \geq 0,$$

$$|d_1| \leq 1,$$

$$|d_2| \leq 1.$$

用单纯形方法, 求得

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

再从 $x^{(1)}$ 出发, 沿可行下降方向 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\min f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(1)

其中 λ_{\max} 是步长 λ 的上限. 为使后继点是可行点, λ 必须满足

$$A_2(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \geq b_2.$$

记

$$\hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

则

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \left\{ \frac{-2}{-2} \right\} = 1.$$

问题(1)即

$$\min (1 + \lambda)^2 - 34\lambda - 82$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

解得 $\lambda_1 = 1$, 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

在 $x^{(2)}$ 处起作用约束和不起作用约束系数矩阵分别记为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

相应的约束右端记为

$$b_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

求在 $x^{(2)}$ 处可行下降方向 $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$:

$$\min \nabla f(x^{(2)})^T d$$

$$\text{s. t. } A_1 d \geq 0,$$

$$|d_1| \leq 1,$$

$$|d_2| \leq 1.$$

用单纯形方法求得 $d^{(2)} = (0, 0)^T$.

根据教材中定理 12.1.2, $x^{(2)} = (2, 2)^T$ 是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此 $x^{(2)}$ 也是最优解, 最优值 $f_{\min} = -112$.

(2) 目标函数的梯度记为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 6 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}.$$

第 1 次迭代:

在点 $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$, 目标函数的梯度, 起作用约束系数矩阵, 不起作用约束系数矩阵及约束右端, 分别记为

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [-1, -2, -1], \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = -4.$$

先求在 $x^{(1)}$ 处下降可行方向 $d = (d_1, d_2, d_3)^T$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(1)})^T d \\ \text{s. t.} \quad & A_1 d \geq 0, \\ & |d_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

用单纯形方法, 求得下降可行方向

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再从 $x^{(1)}$ 出发, 沿方向 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 λ_{\max} 是步长 λ 的上限. 为保持可行性, λ 必须满足

$$A_2(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \geq b_2.$$

记 $\hat{d} = A_2 d^{(1)} = -4, \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = -4$, 则

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = 1.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & 6\lambda^2 - 10\lambda \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

解得 $\lambda_1 = \frac{5}{6}$. 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(2)}) = -4.167.$$

第 2 次迭代:

在点 $x^{(2)} = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})^T$, 目标函数的梯度 $\nabla f(x^{(2)}) = (-\frac{19}{6}, -1, \frac{25}{6})^T$. 在 $x^{(2)}$ 无起作用约束, 因此令

$$d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} \\ 1 \\ -\frac{25}{6} \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(2)}$ 出发, 沿最速下降方向 $d^{(2)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

计算步长 λ 的上限 λ_{\max} .

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{19}{6} \\ 1 \\ -\frac{25}{6} \end{bmatrix},$$

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \min \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right) / (-1), \left(-\frac{5}{6} \right) / \left(-\frac{25}{6} \right) \right\} = \frac{1}{5}.$$

问题(2)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_2=0.159$, 后继点

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.337 \\ 0.992 \\ 0.171 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(3)}) = -6.418.$$

第3次迭代:

在点 $x^{(3)}$ 不存在起作用约束, 令

$$d^{(3)} = -\nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.676 \\ 0.524 \\ 0.656 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(3)}$ 出发, 沿 $d^{(3)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (3)$$

求 λ_{\max} :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.508 \\ -1.337 \\ -0.992 \\ -0.171 \end{bmatrix},$$

$$\hat{d} = A_2 d^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.38 \\ 0.676 \\ 0.524 \\ 0.656 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = 0.213.$$

问题(3)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 0.213. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$, 得到 $\lambda_3=0.213$.

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \lambda_3 d^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.481 \\ 1.104 \\ 0.311 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(4)}) = -6.570.$$

经3次迭代, 得近似解 $x^{(4)} = (1.481, 1.104, 0.311)^T$, 目标函数值 $f(x^{(4)}) = -6.570$. 不

再迭代. 运用最优性条件, 求得问题的精确解 $x^* = (2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})^T$, $f_{\min} = -6.75$.

4. 用梯度投影法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & (4-x_2)(x_1-3)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1+x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 2, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 5 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点 $x^{(1)} = (2, 0)^T$.

取初始点 $x^{(1)} = (1, 2)^T$.

$$\begin{aligned} (3) \min \quad & x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点 $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$.

解 (1) 目标函数 $f(x) = (4-x_2)(x_1-3)^2$, 梯度

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-3)(4-x_2) \\ -2(x_1-3)^2 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

在点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 处, 目标函数梯度为 $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$, 起作用约束和不起作用约束系数

矩阵, 相应的约束右端, 分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

从 A_1 中去掉第2行, 记为

$$\hat{A}_1 = [-1, -1].$$

投影矩阵

$$\hat{P} = I - \hat{A}_1^T (\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

投影方向

$$\hat{d}^{(1)} = -\hat{P} \nabla f(x^{(1)}) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $\hat{d}^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min & f(x^{(1)} + \lambda \hat{d}^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

求步长上限 λ_{\max} :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min & 8(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

得到沿 $\hat{d}^{(1)}$ 方向搜索步长 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 3.$$

第2次迭代:

在点 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 处有

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d^{(2)} = -P \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} > 0,$$

$x^{(2)} = (2, 1)^T$ 是 K-T 点, 满足最优解的二阶充分条件, 因此也是最优解. $f_{\min} = 3$.

(2) 在点 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 处, 目标函数梯度、起作用约束及不起作用约束的系数矩阵、相应的约束右端分别为

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = [0, 1], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

搜索方向

$$d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

求步长 λ 的上限 λ_{\max} :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min & (2 - 4\lambda)^2 + 5 \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

求得步长 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 5.$$

由于目标函数等值线是以 $(0, -1)$ 为中心的一族同心圆, 因此 $x^{(2)} = (0, 0)^T$ 已是最优解.

(3) 第1次迭代:

在点 $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ 处, 目标函数梯度、不等式约束中起作用约束和不起作用约束的系数矩阵及右端、等式约束系数矩阵、起作用约束系数矩阵分别为:

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad A_1 = [0, 1, 0], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [1, 1, 1], \quad M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

搜索方向

$$d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

求步长上限 λ_{\max} :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{4}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 则得 $\lambda = 1$. 取搜索步长 $\lambda_1 = \frac{1}{4}$.

后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = -24.$$

第2次迭代:

在点 $x^{(2)}$ 处, 有

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

投影矩阵

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [1 \quad 1 \quad 1], \quad M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$d^{(2)} = -P \nabla f(x^{(2)}) = [0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad w = (MM^T)^{-1}M \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix},$$

其中 $u = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \geq 0$, 因此 $x^{(2)} = (0, 0, 2)^T$ 是 K-T 点. 由于是凸规划, K-T 点就是最优解, 最优目标函数值 $f_{\min} = -24$.

5. 用既约梯度法求解下列问题:

$$(1) \min \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \quad (2) \min \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 5, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \text{取初始点 } x^{(1)} = (1, 0)^T.$$

取初始点 $x^{(1)} = (1, 0, 1, 4)^T$.解 (1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$, $\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, -2x_1 + 4x_2 - 6, 0, 0)^T$, 等式约束系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

第1次迭代:

先求既约梯度. 在 $x^{(1)} = (1, 0, 1, 4)^T$, 目标函数的梯度为 $\nabla f(x^{(1)}) = (0, -8, 0, 0)^T$. 取基

$$x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{非基变量 } x_N^{(1)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(1)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d_N^{(1)} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(1)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(1)} = \begin{bmatrix} -8 \\ -32 \end{bmatrix}.$$

搜索方向 $d^{(1)} = [-8, 8, 0, -32]^T$. 从 $x^{(1)}$ 出发, 沿方向 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\min f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(1)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \left\{ -\frac{x_j^{(1)}}{d_j^{(1)}} \mid d_j^{(1)} < 0 \right\} = \min \left\{ -\frac{1}{8}, -\frac{4}{-32} \right\} = \frac{1}{8}.$$

问题(1)即

$$\min \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{8}.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{12} < \frac{1}{8}$, 令步长 $\lambda_1 = \frac{1}{12}$, 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right]^T, \text{ 这时 } f(x^{(2)}) = -\frac{14}{3}.$$

第2次迭代:

$$x^{(2)} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right]^T, \nabla f(x^{(2)}) = [-4, -4, 0, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(2)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

下面确定搜索方向, 令

$$d_N^{(2)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, d_B^{(2)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(2)} = \begin{bmatrix} -8 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

搜索方向 $d^{(2)} = [4, 4, -8, -24]^T$. 从 $x^{(2)}$ 出发, 沿 $d^{(2)}$ 搜索:

$$\min f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(2)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(2)}}{d_j^{(2)}} \mid d_j^{(2)} < 0 \right\} = \frac{1}{18}.$$

问题(2)即

$$\min \varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{18}.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda = \frac{1}{2} > \frac{1}{18}$, 因此令 $\lambda_2 = \frac{1}{18}$, 后继点

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}, 0 \right)^T, \text{ 这时 } f(x^{(3)}) = -6.346.$$

第3次迭代:

$$x^{(3)} = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}, 0 \right)^T, \nabla f(x^{(3)}) = \left[-\frac{32}{9}, -\frac{32}{9}, 0, 0 \right]^T.$$

令

$$x_B^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{9} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(3)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{32}{9} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $x_3 = \frac{5}{9} > 0$, 在搜索方向中应令 $d_3 = -\frac{32}{9}$, 因此令

$$d_N^{(3)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{9} \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(3)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

搜索方向 $d^{(3)} = \left[\frac{40}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{32}{9}, 0 \right]^T$. 从 $x^{(3)}$ 出发, 沿 $d^{(3)}$ 搜索:

$$\min f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(3)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(3)}}{d_j^{(3)}} \mid d_j^{(3)} < 0 \right\} = \frac{5}{32}.$$

问题(3)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = \frac{4}{31} < \frac{5}{32}$, 令 $\lambda_3 = \frac{4}{31}$, 后继点

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \lambda_3 d^{(3)} = \left(\frac{35}{31}, \frac{24}{31}, \frac{3}{31}, 0 \right)^T, \text{ 这时 } f(x^{(4)}) = -7.16.$$

第4次迭代:

$$x^{(4)} = \left(\frac{35}{31}, \frac{24}{31}, \frac{3}{31}, 0 \right)^T, \quad \nabla f(x^{(4)}) = \left[-\frac{32}{31}, -\frac{160}{31}, 0, 0 \right]^T.$$

令

$$x_B^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{31} \\ -\frac{160}{31} \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(4)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{31} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(4)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{32}{31} \end{bmatrix}.$$

由于 $x_4^{(4)} = 0$, 搜索方向 $d^{(4)}$ 中应令 $d_4 = 0$, 因此

$$d_N^{(4)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_B^{(4)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

搜索方向 $d^{(4)} = [0, 0, 0, 0]^T$, 因此 $x^{(4)}$ 是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此 $x^{(4)}$ 就是最优解. 最优值 $f_{\min} = -7.161$.

(2) 引进松弛变量 x_3 , 将(2)题化为

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点 $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$, $f(x^{(1)}) = 5$. 目标函数的梯度为 $\nabla f(x) = [2(x_1 - 2), 2(x_2 - 2), 0]^T$.

第1次迭代:

$$x^{(1)} = (1, 0, 1)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = [-2, -4, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(1)} = x_1 = 1, \quad B = [1], \quad \nabla_{x_B} f(x) = [-2],$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N = [1, 1], \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(1)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d_N^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, d_B^{(1)} = -B^{-1}Nd_N^{(1)} = 0.$$

搜索方向 $d^{(1)} = [0, 2, -2]^T$. 从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(1)}}{d_j^{(1)}} \mid d_j^{(1)} < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 1 - 2\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 1 + (2\lambda - 2)^2.$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得到 $\lambda = 1 > \frac{1}{2}$. 令 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 后继点 $x^{(2)} = (1, 1, 0)^T$, $f(x^{(2)}) = 2$.

第2次迭代:

$$x^{(2)} = (1, 1, 0)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = [-2, -2, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(2)} = x_1 = 1, \quad B = [1], \quad \nabla_{x_B} f(x) = -2,$$

$$x_N^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = [1, 1], \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(2)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

由于 $x^{(2)} = (1, 1, 0)^T$ 中 $x_3^{(2)} = 0$, 因此令

$$d_N^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(2)} = -Bnd_N^{(2)} = 0, d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$x^{(2)}$ 是 K-T 点, 由于给定问题是凸规划, 因此 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是最优解, $f_{\min} = 2$.

6. 用 Frank-Wolfe 方法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2 + 4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点 $x^{(1)} = (1, 1, 3)^T$.

取初始点 $x^{(1)} = (2, 0, 1, 4)^T$, 迭代 2 次.

解 (1) 令 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$, 则 $\nabla f(x) = (2x_1 - x_2 - 2, -x_1 + 2x_2 + 3, 0, 0)^T$, 可行域记作 S .

第 1 次迭代:

$$x^{(1)} = (2, 0, 1, 4)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = (2, 1, 0, 0)^T.$$

先解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(1)})^T x \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

线性规划最优解 $y^{(1)} = (0, 0, 3, 6)^T$.

令搜索方向

$$d^{(1)} = y^{(1)} - x^{(1)} = (-2, 0, 2, 2)^T,$$

则 $\nabla f(x^{(1)})^T d^{(1)} = -4$.

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 令步长 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 得到

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = (1, 0, 2, 5)^T, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = -1.$$

第 2 次迭代:

$$x^{(2)} = (1, 0, 2, 5)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = (0, 2, 0, 0)^T.$$

解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(2)})^T x \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

线性规划最优解 $y^{(2)} = (0, 0, 3, 6)^T$.

令搜索方向

$$d^{(2)} = y^{(2)} - x^{(2)} = (-1, 0, 1, 1)^T,$$

则 $\nabla f(x^{(2)})^T d^{(2)} = 0$.

$x^{(2)} = (1, 0, 2, 5)^T$ 是 K-T 点, 由于给定问题是凸规划, 因此也是最优解.

(2) 令 $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2 + 4$, 则 $\nabla f(x) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 4x_2 + 4, 0)^T$, 可行域记作 S .

第 1 次迭代:

$$x^{(1)} = (1, 1, 3)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = (1, 7, 0)^T.$$

先解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(1)})^T x \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 7x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

线性规划最优解 $y^{(1)} = (0, 0, 5)^T$.

令搜索方向

$$d^{(1)} = y^{(1)} - x^{(1)} = [-1, -1, 2]^T,$$

则 $\nabla f(x^{(1)})^T d^{(1)} = -8$.

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

令 $\varphi'(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 2$, 为保持可行性, 令步长 $\lambda_1 = 1$. 则

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = (0, 0, 5)^T, \quad f(x^{(2)}) = 4.$$

第 2 次迭代:

$$x^{(2)} = (0, 0, 5)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = [0, 4, 0]^T.$$

解线性规划,确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(2)})^T x \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

线性规划最优解 $y^{(2)} = (0, 0, 5)^T$.

令 $d^{(2)} = y^{(2)} - x^{(2)} = (0, 0, 0)^T$, 则 $\nabla f(x^{(2)})^T d^{(2)} = 0$, $x^{(2)} = (0, 0, 5)^T$ 是 K-T 点, 也是最优解.

7. 考虑约束 $Ax \leq b$, 令 $P = I - A_1^T(A_1 A_1^T)^{-1}A_1$, 其中 A_1 的每一行是在已知点 \hat{x} 处的紧约束的梯度, 试解释下列各式的几何意义:

- (1) $P \nabla f(\hat{x}) = 0$;
- (2) $P \nabla f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$;
- (3) $P \nabla f(\hat{x}) \neq 0$.

解 (1) $P \nabla f(\hat{x})$ 是向量 $\nabla f(\hat{x})$ 在矩阵 A_1 的零空间上的投影, $P \nabla f(\hat{x}) = 0$ 表明 $\nabla f(\hat{x})$ 在 A_1 的零空间上的投影为零向量, 因此在 \hat{x} 处不存在下降可行方向.

(2) $P \nabla f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$ 表示 $\nabla f(\hat{x})$ 在 A_1 的零空间上的投影等于 $\nabla f(\hat{x})$, 因此 $\nabla f(\hat{x})$ 在 A_1 的零空间上.

(3) $P \nabla f(\hat{x}) \neq 0$, 表明 $\nabla f(\hat{x})$ 在 A_1 的零空间上的投影不等于零向量, 因此 $d = -P \nabla f(\hat{x})$ 是 \hat{x} 处下降可行方向.

8. 考虑问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

设 \hat{x} 是可行点, $I = \{i | g_i(\hat{x}) = 0\}$. 证明 \hat{x} 为 K-T 点的充要条件是下列问题的目标函数的最优值为零:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\hat{x})^T d \\ \text{s. t.} \quad & \nabla g_i(\hat{x})^T d \geq 0, \quad i \in I, \\ & \nabla h_j(\hat{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \\ & -1 \leq d_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

证 \hat{x} 为 K-T 点的充要条件是, 存在乘子 $w_i \geq 0 (i \in I)$ 和 $v_j (j = 1, 2, \dots, l)$, 使得

$$\nabla f(\hat{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0. \quad (1)$$

记 $A_1 = [\nabla g_{i_1}(\hat{x}), \nabla g_{i_2}(\hat{x}), \dots, \nabla g_{i_k}(\hat{x})]$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$, $B = [\nabla h_1(\hat{x}), \nabla h_2(\hat{x}), \dots, \nabla h_l(\hat{x})]$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T = p - q$, $p \geq 0, q \geq 0$. (1) 式可写成

$$(-A_1, -B, B) \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} = -\nabla f(\hat{x}), \quad \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2)$$

根据 Farkas 定理(参看定理 1.4.6), 系统(2)有解的充要条件是系统

$$\begin{bmatrix} -A_1^T \\ -B^T \\ B^T \end{bmatrix} d \leq 0, \quad -\nabla f(\hat{x})^T d > 0. \quad (3)$$

无解, 即

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x})^T d < 0, \\ A_1^T d \geq 0, \\ B^T d = 0 \end{cases}$$

无解. 因此线性规划的最优值为零.

第13章

CHAPTER 13

惩罚函数法题解

1. 用外点法求解下列问题:

(1) $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t. $x_2 = 1$;

(3) $\min -x_1 - x_2$

s. t. $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$;

(5) $\min -x_1 x_2 x_3$

s. t. $72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$.

解 (1) 记 $f(x) = x_1^2 + x_2^2, h(x) = x_2 - 1$, 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_2 - 1)^2, \quad \sigma > 0, \text{很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\bar{x}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{1+\sigma} \end{bmatrix}, \quad \text{令 } \sigma \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \bar{x}_\sigma \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

 \bar{x} 为最优解, 最优值 $f_{\min} = 1$.

(2) $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t. $x_1 + x_2 - 1 = 0$;

(4) $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t. $2x_1 + x_2 - 2 \leq 0,$
 $x_2 \geq 1$;

(2) 记 $f(x) = x_1^2 + x_2^2, h(x) = x_1 + x_2 - 1$. 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_1 + x_2 - 1)^2, \quad \sigma > 0, \text{很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\sigma(x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_1 + x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\bar{x}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{1+2\sigma} \\ \frac{\sigma}{1+2\sigma} \end{bmatrix}, \quad \text{令 } \sigma \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \bar{x}_\sigma \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

 \bar{x} 为最优解, 最优值 $f_{\min} = \frac{1}{2}$.(3) 记 $f(x) = -x_1 - x_2, h(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$. 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = -x_1 - x_2 + \sigma(1 - x_1^2 - x_2^2)^2, \quad \sigma > 0, \text{很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -1 - 4\sigma x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0, \\ -1 - 4\sigma x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0. \end{cases}$$

当点 x 不在可行域上时, $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$, 由上式得 $x_1 = x_2$, 代入上式, 则有

$$8\sigma x_1^3 - 4\sigma x_1 - 1 = 0,$$

即

$$2x_1^3 - x_1 = \frac{1}{4\sigma}.$$

由于有界闭域上的连续函数存在极小点, 可令 $\sigma \rightarrow +\infty$, 则

$$2\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 = 0.$$

从而得到最小值点: $\bar{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, 最小值 $f_{\min} = -\sqrt{2}$.

(4) 记 $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, $g_1(x) = -2x_1 - x_2 + 2$, $g_2(x) = x_2 - 1$. 定义罚函数:

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma[(\max\{0, 2x_1 + x_2 - 2\})^2 + (\max\{0, 1 - x_2\})^2]$$

下面, 分作 4 种情形, 分别求解:

① 若极小点是可行域的内点, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

解得 $\bar{x} = (0, 0)^T$, \bar{x} 不是可行解.

② 若极小点在可行域的两条边界线上, 则取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(-2x_1 - x_2 + 2)^2 + \sigma(x_2 - 1)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 - 4\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ 2x_2 - 2\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left(\frac{4\sigma + 2\sigma^2}{1 + 6\sigma + 4\sigma^2}, \frac{3\sigma + 4\sigma^2}{1 + 6\sigma + 4\sigma^2} \right)^T.$$

令 $\sigma \rightarrow +\infty$, 得到 $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)^T$. \bar{x} 是可行点, 但不是 K-T 点.

③ 若极小点在可行域的第 1 条边界上, 则取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(-2x_1 - x_2 + 2)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 - 4\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ 2x_2 - 2\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left(\frac{4\sigma}{1 + 5\sigma}, \frac{2\sigma}{1 + 5\sigma} \right)^T.$$

令 $\sigma \rightarrow +\infty$, 得 $\bar{x} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)^T$, 不是可行解.

④ 若极小点在可行域的第 2 条边界上, 取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_2 - 1)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left(0, \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right)^T.$$

令 $\sigma \rightarrow +\infty$, 得到 $\bar{x} = (0, 1)^T$. 经检验, \bar{x} 是可行解, 也是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此 \bar{x} 是最优解, 最优值 $f_{\min} = 1$.

(5) 记 $f(x) = -x_1x_2x_3$, $h(x) = 72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$. 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = -x_1x_2x_3 + \sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2, \sigma > 0.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = -x_2x_3 - 2\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = -x_1x_3 - 4\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_3} = -x_1x_2 - 4\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0. \end{cases}$$

解非线性方程组, 得解

$$\bar{x}(\sigma) = \begin{bmatrix} 12(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \\ 6(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \\ 6(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \end{bmatrix}.$$

令 $\sigma \rightarrow +\infty$, 得到 $\bar{x} = (24, 12, 12)^T$, 易知 \bar{x} 是 K-T 点, 且满足二阶充分条件, 因此是最优解, 最优值 $f_{\min} = -3456$.

2. 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^3 + x_2^3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

(1) 求问题的最优解;

(2) 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = x_1^3 + x_2^3 + \sigma(x_1 + x_2 - 1)^2,$$

讨论能否通过求解无约束问题

$$\min F(x, \sigma),$$

来获得原来约束问题的最优解? 为什么?

解 (1) 将 $x_2 = 1 - x_1$ 代入目标函数, 化成无约束问题:

$$\min f(x_1) = 3x_1^2 - 3x_1 + 1.$$

令 $f'(x_1) = 6x_1 - 3 = 0$, 得到 $x_1 = \frac{1}{2}$. 约束问题的最优解 $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $f_{\min} = \frac{1}{4}$.

(2) 不能通过解 $\min F(x, \sigma)$ 来获得约束问题的最优解. 因为不满足所有无约束问题最优解含于紧集的条件.

3. 用内点法求解下列问题:

$$(1) \min x$$

$$\text{s. t. } x \geq 1;$$

$$(2) \min (x+1)^2$$

$$\text{s. t. } x \geq 0.$$

解 (1) 定义障碍函数

$$G(x, r_k) = x + \frac{r_k}{x-1},$$

解下列问题:

$$\min G(x, r_k)$$

$$\text{s. t. } x \in \text{int } S,$$

其中 $S = \{x | x-1 \geq 0\}$, r_k 是罚因子, $r_k > 0$, 很小. 令

$$\frac{dG(x, r_k)}{dx} = 1 - \frac{r_k}{(x-1)^2} = 0,$$

解得 $x_k = 1 + \sqrt{r_k}$. 令 $r_k \rightarrow 0$, 得到 $\bar{x} = 1$, \bar{x} 是最优解, 最优值 $f_{\min} = 1$.

(2) 定义障碍函数

$$G(x, r_k) = (x+1)^2 - r_k \ln x,$$

其中 $r_k > 0$, 很小. 解下列问题:

$$\min G(x, r_k)$$

$$\text{s. t. } x \in \text{int } S,$$

其中 $S = \{x | x \geq 0\}$. 令

$$\frac{dG(x, r_k)}{dx} = 2(x+1) - \frac{r_k}{x} = 0,$$

得解

$$x_k = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+2r_k}).$$

令 $r_k \rightarrow 0$, 则 $x_k \rightarrow \bar{x} = 0$, \bar{x} 是最优解, 最优值 $f_{\min} = 1$.

4. 考虑下列问题:

$$\min x_1 x_2$$

$$\text{s. t. } g(x) = -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0.$$

(1) 用二阶最优性条件证明点

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

是局部最优解. 并说明它是否为全局最优解?

(2) 定义障碍函数为

$$G(x, r) = x_1 x_2 - r \ln g(x),$$

试用内点法求解此问题, 并说明内点法产生的序列趋向点 \bar{x} .

解 (1) 在点 \bar{x} , 目标函数和约束函数的梯度分别是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \nabla g(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$g(x) \geq 0$ 是起作用约束. 令

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得 $w = \frac{3}{4} > 0$, 因此 \bar{x} 是 K-T 点.

取 Lagrange 函数

$$L(x, w) = x_1 x_2 - w(-2x_1 + x_2 + 3),$$

则

$$\nabla_x^2 L(x, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$\nabla g(\bar{x})^T d = [-2, 1] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0, \text{ 则 } d_2 = 2d_1.$$

方向集

$$G = \left\{ d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid -2d_1 + d_2 = 0, d \neq 0 \right\} = \left\{ d \mid d = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, d_1 \neq 0 \right\}.$$

$\forall d \in G$, 有

$$d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, w) d = 4d_1^2 > 0.$$

因此 $\bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right)^T$ 是严格局部最优解. 显然, \bar{x} 不是全局最优解.

(2) 对于障碍函数

$$G(x, r) = x_1 x_2 - r \ln(-2x_1 + x_2 + 3),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial G(x, r)}{\partial x_1} = x_2 + \frac{2r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0, \\ \frac{\partial G(x, r)}{\partial x_2} = x_1 - \frac{r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0. \end{cases}$$

此方程组的解为

$$\bar{x}(r) = \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{8}, -\frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{4} \right)^T.$$

令 $r \rightarrow 0$, 则

$$\bar{x}(r) \rightarrow \bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right)^T.$$

5. 用乘子法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \min \quad & x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

解 (1) 定义增广 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \Phi(x, w, \sigma) &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w - \sigma(x_1 - 1)\})^2 - w^2] \\ &= \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2\sigma} \{[w - \sigma(x_1 - 1)]^2 - w^2\}, & x_1 - 1 \leq \frac{w}{\sigma}, \\ x_1^2 + x_2^2 - \frac{w^2}{2\sigma}, & x_1 - 1 > \frac{w}{\sigma}, \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 - [w - \sigma(x_1 - 1)], & x_1 - 1 \leq \frac{w}{\sigma}, \\ 2x_1, & x_1 - 1 > \frac{w}{\sigma}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2x_2.$$

设第 k 次迭代取乘子 $w^{(k)}, \sigma$, 求 $\Phi(x, w^{(k)}, \sigma)$ 的极小点. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2x_1 - [w^{(k)} - \sigma(x_1 - 1)] = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2x_2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w^{(k)} + \sigma}{2 + \sigma} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

修改 $w^{(k)}$, 令

$$w^{(k+1)} = \max\{0, w^{(k)} - \sigma(x_1^{(k)} - 1)\} = \frac{2(w^{(k)} + \sigma)}{2 + \sigma}.$$

当 $w^{(k)} < 2$ 时, $w^{(k+1)} - w^{(k)} = \frac{\sigma(2 - w^{(k)})}{2 + \sigma} > 0$, 因此 $\{w^{(k)}\}$ 是单调增加有上界的数列, 必有极

限. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $w^{(k)} \rightarrow 2, x^{(k)} \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. \bar{x} 为最优解, 最优值 $f_{\min} = 1$.

(2) 定义增广 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \Phi(x, w, \sigma) &= f(x) + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w_1 - \sigma g_1(x)\})^2 - w_1^2 \\ &\quad + (\max\{0, w_2 - \sigma g_2(x)\})^2 - w_2^2] \\ &= x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w_1 - \sigma x_1\})^2 \\ &\quad - w_1^2 + (\max\{0, w_2 - \sigma(x_2 - 1)\})^2 - w_2^2] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \begin{cases} 1 - (w_1 - \sigma x_1), & x_1 \leq \frac{w_1}{\sigma}, \\ 1, & x_1 > \frac{w_1}{\sigma}, \end{cases} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \begin{cases} \frac{2}{3}(x_2 + 1) - [w_2 - \sigma(x_2 - 1)], & x_2 - 1 \leq \frac{w_2}{\sigma}, \\ \frac{2}{3}(x_2 + 1), & x_2 - 1 > \frac{w_2}{\sigma}. \end{cases} \end{aligned}$$

第 k 次迭代中, 令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0,$$

即

$$\begin{cases} 1 - (w_1^{(k)} - \sigma x_1) = 0, \\ \frac{2}{3}(x_2 + 1) - [w_2^{(k)} - \sigma(x_2 - 1)] = 0, \end{cases}$$

解得

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1^{(k)} - 1}{\sigma} \\ \frac{3w_2^{(k)} + 3\sigma - 2}{2 + 3\sigma} \end{bmatrix}.$$

修正乘子 $w^{(k)}$, 令

$$w_1^{(k+1)} = \max\{0, w_1^{(k)} - \sigma x_1^{(k)}\} = 1,$$

$$w_2^{(k+1)} = \max\left\{0, w_2^{(k)} - \sigma\left(\frac{3w_2^{(k)} + 3\sigma - 2}{2 + 3\sigma} - 1\right)\right\} = \frac{2(w_2^{(k)} + 2\sigma)}{2 + 3\sigma}.$$

当 $w_2^{(k)} < \frac{4}{3}$ 时, 数列 $\{w_2^{(k)}\}$ 单调增加有上界, 必有极限. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $w_2^{(k)} \rightarrow \frac{4}{3}$, 因此最优

乘子 $\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$. 最优解如下:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_{\min} = \frac{4}{3}.$$

第14章

二次规划题解

1. 用 Lagrange 方法求解下列问题:

$$(1) \min \quad 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 = 1;$$

$$(2) \min \quad \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

解 (1) 定义 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -(x_1 + x_2 - 1) = 0, \end{cases}$$

解得最优解

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{Lagrange 乘子 } \lambda = \frac{3}{4}.$$

(2) 定义 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 - \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3 - 4),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 3x_1 - x_2 + 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_3} = -x_2 + x_3 + 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 = 0, \end{cases}$$

求得最优解

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{9}, \frac{7}{6}\right)^T, \lambda = \frac{17}{18}.$$

2. 用起作用集方法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & 9x_1^2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 72x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 - x_2 \geq -4, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 \geq -2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始可行点 $x^{(1)} = (0, 0)^T$.

取初始可行点 $x^{(1)} = (0, 0)^T$.

解 (1) 记 $f(x) = 9x_1^2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 72x_2$, 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 18x_1 - 30 \\ 18x_2 - 72 \end{bmatrix}, \quad H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix},$$

$$\text{约束系数矩阵 } A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端向量 } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_1 = \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ -72 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(1)} = \{2, 3\}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求校正量 $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(1)})^T \delta \\ \text{s. t.} \quad & A_1 \delta = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1 - 72\delta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \delta_1 = 0, \\ & \delta_2 = 0. \end{aligned}$$

即

(1)

解得 $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 下面判别 $x^{(1)}$ 是否为最优解.

计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_1 = \begin{bmatrix} -30 \\ -72 \end{bmatrix},$$

$x^{(1)}$ 还不是最优解. 从(1)式中去掉第2个约束, 置 $I_2^{(1)} = \{2\}$, 再求校正量:

$$\begin{aligned} \min \quad & 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1 - 72\delta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \delta_1 = 0. \end{aligned}$$

解得 $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. 令

$$d^{(1)} = \bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

从 $x^{(1)}$ 出发, 沿 $d^{(1)}$ 搜索, 令

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)}.$$

取步长 $\alpha_1 = \min\{1, \hat{\alpha}_1\}$, 其中

$$\hat{\alpha}_1 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(1)}}{a^{(i)} d^{(1)}} \mid i \notin I_2^{(1)}, a^{(i)} d^{(1)} < 0 \right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(1)}}{a^{(1)} d^{(1)}} = 1.$$

令 $\alpha_1 = 1$, 得点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

在 $x^{(2)}$ 起作用约束集为 $I_3^{(1)} = \{1, 2\}$.

第2次迭代:

初始点 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $g_2 = \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}$, 起作用约束集 $I_1^{(2)} = \{1, 2\}$, 起作用约束矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_1 = 1.$$

计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \end{bmatrix},$$

从 $I_1^{(2)}$ 中去掉 2, 置 $I_2^{(2)} = \{1\}$, $A_1 = (-2, -1)$. 求校正量 $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(2)})^T \delta \\ \text{s. t.} \quad & A_1 \delta = 0. \end{aligned}$$

即

$$\min \quad 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1$$

$$\text{s. t. } -2\delta_1 - \delta_2 = 0.$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T.$$

令 $d^{(2)} = \bar{\delta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$, 从 $x^{(2)}$ 出发沿 $d^{(2)}$ 搜索, 令

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)},$$

其中搜索步长 $\alpha_2 = \min\{1, \hat{\alpha}_2\}$, 其中 $\hat{\alpha}_2 = \min\left\{\frac{b_i - a^{(i)} x^{(2)}}{a^{(i)} d^{(2)}} \mid i \notin I_2^{(2)}, a^{(i)} d^{(2)} < 0\right\} = \frac{b_3 - a^{(3)} x^{(2)}}{a^{(3)} d^{(2)}} = 6$,

因此取 $\alpha_2 = 1$. 后继点

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

第3次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}, g_3 = \nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} -24 \\ -12 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(3)} = \{1\}, A_1 = (-2, -1),$$

$\alpha_2 = 1$, 计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_3 = 12 > 0,$$

因此, $x^{(3)}$ 是最优解, 最优值 $f_{\min} = -149$.

(2) 记 $f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1$, 则梯度

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\text{约束矩阵 } A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端向量 } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{梯度 } g_1 = \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(1)} = \{2, 3\}, \text{起作用约束}$$

$$\text{系数矩阵 } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{求校正量 } \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}:$$

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(1)})^T \delta$$

$$\text{s. t. } A_1 \delta = 0.$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - 3\delta_1$$

$$\text{s. t. } \delta_1 = 0,$$

(1)

$$\delta_2 = 0,$$

$$\text{得解 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

判别 $x^{(1)}$ 是否为最优解, 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_2 = -3 < 0$, 故 $x^{(1)}$ 不是最优解. 从(1)式中去掉第1个约束, 置 $I_2^{(1)} = \{3\}$, 再求校正量:

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - 3\delta_1$$

$$\text{s. t. } \delta_2 = 0,$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \text{令 } d^{(1)} = \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{从 } x^{(1)} \text{ 出发沿 } d^{(1)} \text{ 搜索:}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)}.$$

步长 $\alpha_1 = \min\{1, \hat{\alpha}_1\}$, 其中

$$\hat{\alpha}_1 = \min\left\{\frac{b_i - a^{(i)} x^{(1)}}{a^{(i)} d^{(1)}} \mid i \notin I_2^{(1)}, a^{(i)} d^{(1)} < 0\right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(1)}}{a^{(1)} d^{(1)}} = \frac{4}{3},$$

故令 $\alpha_1 = 1$, 得后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{梯度 } g_2 = \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(2)} = I_2^{(1)} = \{3\}, A_1 =$$

$(0, 1)$, 由于 $\alpha_1 = 1$, 计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_2 = -\frac{3}{2},$$

故 $x^{(2)}$ 不是最优解, 从 $I_1^{(2)}$ 中去掉指标 3, 起作用约束集 $I_2^{(2)} = \emptyset$, 求校正量

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(2)})^T \delta$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - \frac{3}{2} \delta_2.$$

解得 $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. 令 $d^{(2)} = \bar{\delta}$, 从 $x^{(2)}$ 出发沿 $d^{(2)}$ 搜索:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)}.$$

步长 $\alpha_2 = \min\{1, \hat{\alpha}_2\}$, 其中 $\hat{\alpha}_2$ 计算如下:

$$\hat{\alpha}_2 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(2)}}{a^{(i)} d^{(2)}} \mid i \notin I_2^{(2)}, a^{(i)} d^{(2)} < 0 \right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(2)}}{a^{(1)} d^{(2)}} = \frac{1}{3},$$

故令 $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. 在 $x^{(3)}$ 起作用约束集为 $I_3^{(2)} = \{1\}$.

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \frac{1}{3} d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

第3次迭代:

初始点 $x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $g_3 = \nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, 起作用约束集 $I_1^{(3)} = I_3^{(2)} = \{1\}$, $A_1 = (-1, -1)$,

-1). 由于 $\alpha_2 = \frac{1}{3} < 1$, 再求校正量 $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$:

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(3)})^T \delta$$

$$\text{s. t. } A_1 \delta = 0.$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_2$$

$$\text{s. t. } -\delta_1 - \delta_2 = 0.$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

令 $d^{(3)} = \bar{\delta}$, 从 $x^{(3)}$ 出发沿 $d^{(3)}$ 搜索, 令

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \alpha_3 d^{(3)}.$$

步长 $\alpha_3 = \min\{1, \hat{\alpha}_3\}$, $\hat{\alpha}_3$ 计算如下:

$$\hat{\alpha}_3 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(3)}}{a^{(i)} d^{(3)}} \mid i \notin I_1^{(3)}, a^{(i)} d^{(3)} < 0 \right\} = \frac{b_2 - a^{(2)} x^{(3)}}{a^{(2)} d^{(3)}} = 10,$$

故令 $\alpha_3 = 1$. 后继点

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

第4次迭代:

初始点 $x^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $g_4 = \nabla f(x^{(4)}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. 起作用约束集 $I_1^{(4)} = \{1\}$, $A_1 = (-1, -1)$,

$\alpha_3 = 1$. 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_4 = \frac{1}{2} > 0,$$

得到最优解 $x^{(4)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $f_{\min} = -\frac{11}{4}$.

3. 用 Lemke 方法求解下列问题:

$$(1) \min 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2$$

$$\text{s. t. } -x_1 - x_2 \geq -2,$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

$$(2) \min 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9$$

$$\text{s. t. } -x_1 - x_2 - x_3 \geq -3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

解 (1) 目标函数的 Hesse 矩阵 $H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, 一次项系数向量 $c = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$, 约束系

数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, 约束右端向量 $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. 取

$$M = \begin{bmatrix} H & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

线性互补问题是

$$\begin{cases} w - Mz = q, \\ w, z \geq 0, \\ w^T z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} w_1 & -4z_1 + 2z_2 - z_3 - 2z_4 = -6, \\ w_2 & +2z_1 - 2z_2 - z_3 + z_4 = -2, \\ w_3 & +z_1 + z_2 = 2, \\ w_4 & +2z_1 - z_2 = 2, \\ w_i & \geq 0, z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ w_i z_i & = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

引入人工变量 z_0 , 列下表, 并按规定作主元消去运算:

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	0	-4	2	-1	-2	(-1)	-6
w_2	0	1	0	0	2	-2	-1	1	-1	-2
w_3	0	0	1	0	1	1	0	0	-1	2
w_4	0	0	0	1	2	-1	0	0	-1	2

z_0	-1	0	0	0	4	-2	1	2	1	6
w_2	-1	1	0	0	(6)	-4	0	3	0	4
w_3	-1	0	1	0	5	-1	1	2	0	8
w_4	-1	0	0	1	6	-3	1	2	0	8

z_0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1	0	1	$\frac{10}{3}$
z_1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$
w_3	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	0	0	($\frac{7}{3}$)	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{14}{3}$
w_4	0	-1	0	1	0	1	1	-1	0	4

z_0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	0	0	($\frac{5}{7}$)	$\frac{1}{7}$	1	2
z_1	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	2
z_2	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$	$\frac{3}{7}$	0	0	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{14}$	0	2
w_4	$\frac{1}{14}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{3}{7}$	1	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{14}$	0	2

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
z_3	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$
z_1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
z_2	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	0	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
w_4	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

得互补基本可行解

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{14}{5}, 0),$$

得 K-T 点 $(x_1, x_2) = (\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$. 问题是凸规划, K-T 点是最优解, 最优值 $f_{\min} = -7.2$.

(2) 目标函数的 Hesse 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A = (-1, -1, -1), \quad b = -3,$$

取

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} H & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

线性互补问题是

$$\begin{cases} w - Mz = q, \\ w, z \geq 0, \\ w^T z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} w_1 & -4z_1 - 2z_2 - 2z_3 - z_4 = -8, \\ w_2 & -2z_1 - 4z_2 \quad \quad - z_4 = -6, \\ w_3 & -2z_1 \quad \quad - 2z_3 - z_4 = -4, \\ w_4 & +z_1 + z_2 + z_3 \quad \quad = 3, \\ w_i & \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ w_i z_i & \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

引入人工变量 z_0 , 列下表, 按规定作主元消去运算.

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	0	-4	-2	-2	-1	-1	-8
w_2	0	1	0	0	-2	-4	0	-1	-1	-6
w_3	0	0	1	0	-2	0	-2	-1	-1	-4
w_4	0	0	0	1	1	1	1	0	-1	3

z_0	-1	0	0	0	4	2	2	1	1	8
w_2	-1	1	0	0	②	-2	2	0	0	2
w_3	-1	0	1	0	2	2	0	0	0	4
w_4	-1	0	0	1	5	3	3	1	0	11

z_0	1	-2	0	0	0	6	-2	1	1	4
z_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	1	0	0	1
w_3	0	-1	1	0	0	④	-2	0	0	2
w_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	8	-2	1	0	6

z_0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	①	1	1	1
z_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
z_2	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
w_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	1	0	0	2	1	0	2

z_3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	1	1	1	1
z_1	-1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
w_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	-1	-2	0

得互补基本可行解

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

K-T 点 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$. 由于是凸规划, 因此也是最优解, 最优值 $f_{\min} = 0$.

第15章

整数规划简介题解

1. 用分支定界法解下列问题:

$$(1) \min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数};$$

$$(2) \min 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数}.$$

解 (1) 先给出一个最优值的上界. 任取一个可行点, 例如 $(0, 0, 2)$, 目标函数最优值的一个上界 $F_u = -6$, 解下列松弛问题:

$$\min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(P)

用单纯形方法求得松弛问题(P)的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$, 最优值 $f_{\min} = -\frac{15}{2}$.

由此知, 整数规划最优值的一个下界 $F_l = -\frac{15}{2}$. 整数规划最优值 $F^* \in [-\frac{15}{2}, -6]$.

松弛问题(P)的解不满足整数要求, 引进条件 $x_3 \leq [\frac{5}{2}] = 2, x_3 \geq [\frac{5}{2}] + 1 = 3$. 将整数规划分解成两个子问题:

$$\min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_3 \leq 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数},$$

(P₁)

和

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \geq 3, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数.}
 \end{aligned} \quad (P_2)$$

用单纯形方法求解 (P_1) 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \leq 2, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0,
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_1)$$

得到松弛问题 (\bar{P}_1) 的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)$,也是子问题 (P_1) 的最优解,最优值 $f_{\min} = -6 = F_u$,子问题 (P_1) 不需要再分解.

再用单纯形方法解 (P_2) 的松弛问题 (\bar{P}_2) :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \geq 3, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_2)$$

用两阶段法求解 (\bar{P}_2) ,易知无可行解,因此子问题 (P_2) 无可行解.综上,整数规划的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)$,最优值 $F^* = -6$.

(2) 先给出最优值上界.任取可行点 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2)$,整数规划最优值一个上界 $F_u = 17$.解松弛问题 (\bar{P}) :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P})$$

用单纯形方法求得松弛问题的最优解

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right), \quad f_{\min} = \frac{71}{5}.$$

由此知整数规划最优值的一个下界 $F_l = \frac{71}{5}$,最优值 $F^* \in \left[\frac{71}{5}, 17\right]$.

松弛问题的最优解不满足整数要求,引入条件 $x_2 \leq \left[\frac{2}{5}\right] = 0, x_2 \geq \left[\frac{2}{5}\right] + 1 = 1$,将整数

规划分解成两个子问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \leq 0, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数,}
 \end{aligned} \quad (P_1)$$

和

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \geq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数.}
 \end{aligned} \quad (P_2)$$

求解子问题 (P_1) 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \leq 0, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_1)$$

用单纯形方法求得 (\bar{P}_1) 的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5)$,最优值 $f_{\min} = 15$. $\bar{x} = (0, 0, 5)^T$ 是子问题 (P_1) 的可行解,也是 (P_1) 的最优解,整数规划最优值新的上界 $F_u = 15$.

再用单纯形方法解 (P_2) 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \geq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{3}, 1, 0\right)$,最优值 $f_{\min} = \frac{49}{3} > F_u = 15$.由此可知, (P_2) 没有更好的整数解.

综上,整数规划的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5)$,最优值 $F^* = 15$.

2. 用割平面法解下列问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min \quad x_1 - 2x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 10, \\
 & \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 5, \\
 (2) \quad & \min \quad 5x_1 + 3x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 10, \\
 & \quad \quad x_1 + 3x_2 \geq 9,
 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且为整数};$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且为整数}.$$

解 (1) 先用单纯形方法解松弛问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

最优表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{2}$

松弛问题的最优解不满足整数要求, 任选一个取值非整数的基变量, 比如取 x_1 , 源约束为

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{2},$$

x_3 和 x_4 的系数及常数项分别分解为

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2},$$

切割条件为

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq 0, \quad \text{即 } -x_3 - x_4 \leq -1.$$

将此条件置入松弛问题最优表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
x_5	0	0	-1	-1	1	-1
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{25}{2}$

用对偶单纯形方法, 得下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	2
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	7
x_3	0	0	1	1	-1	1
	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	-12

整数规划最优解 $(x_1, x_2) = (2, 7)$, 最优值 $f_{\min} = -12$.

(2) 先用单纯形方法解松弛问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

最优表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{21}{5}$
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{129}{5}$

松弛问题的解不满足整数要求, 选择源约束

$$x_1 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{21}{5},$$

记 $-\frac{3}{5} = -1 + \frac{2}{5}$, $\frac{1}{5} = 0 + \frac{1}{5}$, $\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$, 切割条件为

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \leq 0, \quad \text{即 } -2x_3 - x_4 \leq -1.$$

将此约束条件置于松弛问题的最优表, 并用对偶单纯形方法求解:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
x_5	0	0	-2	①	1	-1
	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{129}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1	0	$\frac{1}{5}$	4
x_2	0	1	1	0	$-\frac{2}{5}$	2
x_4	0	0	2	1	-1	1
	0	0	-2	0	$-\frac{1}{5}$	26

整数规划的最优解 $(x_1, x_2) = (4, 2)$, 最优值 $f_{\min} = 26$.

3. 求解下列 0-1 规划:

(1) $\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

s. t. $-3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -4$,

$3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3$,

$x_1 + x_2 \geq 1$,

x_1, x_2, x_3 取 0 或 1;

(2) $\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

s. t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 \geq 8$,

$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 5$,

x_j 取 0 或 1, $j=1, 2, \dots, 5$;

(3) $\min x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5$

s. t. $-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 2$,

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 3$,

x_j 取 0 或 1, $j=1, 2, \dots, 5$;

(4) $\min x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5$

s. t. $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 \geq 3$,

$4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 2$,

$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \geq 1$,

x_j 取 0 或 1, $j=1, 2, \dots, 5$.

解 (1) 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $c = (c_1, c_2, c_3) = (2, 3, 4)$, 则 $f = cx$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行解 $\bar{x} = (0, 0, 1)^T$, 最优值的上界 $\bar{f} = 4$. 下面用隐数法求解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \emptyset$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 4$, $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -3$, $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$. 违背约束集 $I = \{2, 3\}$;

④ 自由变量有 x_1, x_2, x_3 , $c\sigma_0 + c_1 = 2 < \bar{f} = 4$, $c\sigma_0 + c_2 = 3$, $c\sigma_0 + c_3 = 4$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2\}$. 对每个违背约束, 约束函数值可增加的上限为 $q_2 = 3 + 1 = 4$, $q_3 = 1 + 1 = 2$, $s_2 + q_2 = -3 + 4 = 1$, $s_3 + q_3 = -1 + 2 = 1$;

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 1$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 1$, $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = 0$, $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = 0$, $\sigma_0 = (1, 0, 0)^T$ 是可行点, 置 $\bar{x} = \sigma_0 = (1, 0, 0)^T$, $\bar{f} = c\sigma_0 = 2$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 2$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 4$, $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -3$, $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$. 违背约束集 $I = \{2, 3\}$;

④ 自由变量有 x_2, x_3 , $c\sigma_0 + c_2 = 3 > \bar{f} = 2$, 子问题没有更好的可行解.

$\{\sigma\}$ 中固定变量全为 0, 探测完毕.

最优解 $\bar{x} = (1, 0, 0)^T$, 最优值 $f_{\min} = 2$.

(2) 记 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, 目标函数系数 $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$, 则 $f = cx$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行解 $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)^T$, 最优值上界 $\bar{f} = c\bar{x} = 6$. 下面用隐数法求解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{\emptyset\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -8$, $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -5$. 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_2 = 2, c\sigma_0 + c_3 = 3, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 约束函数值可增加的上限 $q_1 = \sum_{j=1}^5 a_{1j} =$

$$21, q_2 = \sum_{j=1}^5 a_{2j} = 10, s_1 + q_1 = 13, s_2 + q_2 = 5;$$

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 1$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_2 = 3 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_3 = 4, c\sigma_0 + c_4 = 5, c\sigma_0 + c_5 = 6$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4\}$, 约束函数值可增加的上限 $q_1 = \sum_{j=2}^4 a_{1j} = 12,$

$$q_2 = \sum_{j=2}^4 a_{2j} = 7, s_1 + q_1 = 6, s_2 + q_2 = 3;$$

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 2$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, +2\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 3 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 6 = \bar{f}$, 本子问题没有比 \bar{x} 好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 4 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_4 = 5, c\sigma_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3, 4\}, q_1 = 9, q_2 = 6, s_1 + q_1 = 3, s_2 + q_2 = 2$;

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2, +3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 4 < \bar{f}$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$, 违背约束集 $I = \{1\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 8 > \bar{f} = 6$, 本子问题没有更好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 5 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{4\}; q_1 = 4, q_2 = 2, s_1 + q_1 = -2, s_2 + q_2 = -2$. 本子问题没有更好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_2 = 2, c\sigma_0 + c_3 = 3, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5 < \bar{f} = 6$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4, 5\}, q_1 = 19, q_2 = 9, s_1 + q_1 = 11, s_2 + q_2 = 4$;

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 2$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, +2\}, \sigma_0 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -5, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 5 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_4 = 6 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3\}, q_1 = 5, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = 0$;

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, +2, +3\}, \sigma_0 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 5 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 0, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0, \sigma_0$ 是可行解, 置 $\bar{x} = \sigma_0 = (0, 1, 1, 0,$

$0)^T, \bar{f} = c\sigma_0 = 5$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, +2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -5, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 6 > \bar{f}$. 本子问题没有更好可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, -2\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 3 < \bar{f} = 5, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3, 4\}, q_1 = 9, q_2 = 6, s_1 + q_1 = 1, s_2 + q_2 = 1$;

⑥ 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, -2, +3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 3 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -1$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量 $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 7 > \bar{f} = 5$. 本子问题没有更好可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, -2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 4 < \bar{f} = 5, \alpha_0 + c_5 = 5 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{4\}, q_1 = 4, q_2 = 2, s_1 + q_1 = -4, s_2 + q_2 = -3$. 本子问题没有更好可行解.

$\{\sigma\}$ 的固定变量均为 0, 探测完毕.

最优解 $\bar{x} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 1, 1, 0, 0)^T$, 最优值 $\bar{f} = 5$.

(3) 记 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, 目标函数系数 $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 1, 2, 4, 6)$, 则 $f = cx$,

$$A = (a_{ij})_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行点 $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 1)^T$, 目标函数最优值上界 $\bar{f} = c\bar{x} = 6$. 用隐数法求解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{\emptyset\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_2 = 1, \alpha_0 + c_3 = 2, \alpha_0 + c_4 = 4, \alpha_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2, 3, 4\}, J_1 = \{j | j \in J, a_{1j} > 0\} = \{2, 3, 4\}, J_2 = \{j | j \in J, a_{2j} > 0\} = \{1, 3, 4\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 5, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 9, s_1 + q_1 = 3, s_2 + q_2 = 6$;

⑥ 检验 J 中的每个指标, 仍有 $J = \{1, 2, 3, 4\}$. 令 $l = \min\{j | j \in J\} = 1$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1\}, \sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -4, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$, 违背约束集 $I = \{1\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 2 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_3 = 3, \alpha_0 + c_4 = 5, \alpha_0 + c_5 = 7 > \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4\}, J_1 = \{j | j \in J, a_{1j} > 0\} = \{2, 3, 4\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} =$

$5, s_1 + q_1 = 1$;

⑥ 经检验仍有 $J = \{2, 3, 4\}, l = \min\{2, 3, 4\} = 2$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, +2\}, \sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_3 = 4 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_4 = 6 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3\}, q_1 = 3, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = 2$;

⑥ 置 $l = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, +2, +3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 1, 1, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 4 < \bar{f} = 6$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 0, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2$. σ_0 是可行点, 置 $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)^T$,

$\bar{f} = c\sigma_0 = 4$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, +2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 6 > \bar{f} = 4$. 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -4, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$, 违背约束集 $I = \{1\}$;

④ 自由变量有 $x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_3 = 3 < \bar{f} = 4, \alpha_0 + c_4 = 5 > \bar{f} = 4$, 可选集 $J = \{3\}, q_1 = 3, q_2 = 4, s_1 + q_1 = -1 < 0, s_2 + q_2 = 4$. 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 1 < \bar{f} = 4, \alpha_0 + c_3 = 2, \alpha_0 + c_4 = 4 = \bar{f}$;

⑤ 可选集 $J = \{2, 3\}, J_1 = \{2, 3\}, J_2 = \{3\}, q_1 = 1 + 3 = 4, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 2, s_2 + q_2 = 1$;

⑥ 检验 J 中的每个指标, $s_2 + q_2 + a_{22} = -1$, 可选集中去掉指标 2. 令 $J = \{3\}, l = \min\{3\} = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, -2, +3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 4$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 1, \sigma_0$ 是可行点, 置 $\bar{x} = \sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$,

0)^T, $\bar{f} = \alpha_0 = 2$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1, -2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 2$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 2\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 4 > \bar{f} = 2$, 子问题 $\{\sigma\}$ 无更好的可行解.

$\{\sigma\}$ 中固定变量全为 0, 探测完毕. 最优解 $\bar{x} = (0, 0, 1, 0, 0)$, 最优值 $\bar{f} = 2$.

(4) 记 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T, c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 3, 4, 6, 7)$,

$$A = (a_{ij})_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则 $f = cx$, 最优值上界 $\bar{f} = +\infty$. 下面用隐数法求解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{\emptyset\}$, 探测点 $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = +\infty$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -1$, 违背约束集 $I = \{1, 2, 3\}$;

④ 自由变量有 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = +\infty, \alpha_0 + c_2 = 3, \alpha_0 + c_3 = 4, \alpha_0 + c_4 = 6, \alpha_0 + c_5 = 7$;

⑤ 可选集 $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 各违背约束中, 属于 J 的有正系数的自由变量下标集: $J_1 = \{1, 3, 5\}, J_2 = \{1, 2, 4\}, J_3 = \{2, 3, 5\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 5, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 8, q_3 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 7, s_1 + q_1 = 2, s_2 + q_2 = 6, s_3 + q_3 = 6$;

⑥ 检验 J 中每个指标: $s_1 + q_1 + a_{12} = -3, s_1 + q_1 + a_{14} = -2$, 从 J 中去掉指标 $\{2, 4\}$. 令可选集 $J = \{1, 3, 5\}, l = \min\{j | j \in J\} = 1$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = +\infty$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 3\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 4 < \bar{f} = +\infty, \alpha_0 + c_3 = 5, \alpha_0 + c_4 = 7, \alpha_0 + c_5 = 8$;

⑤ 可选集 $J = \{2, 3, 4, 5\}$, 各违背约束中, 有正系数的自由变量下标集 $J_1 = \{3, 5\}, J_3 = \{2, 3, 5\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 4, q_2 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 7, s_1 + q_1 = 2, s_3 + q_3 = 4$;

⑥ 检验 J 中每个指标: $s_1 + q_1 + a_{12} = -3, s_1 + q_1 + a_{14} = -2$, 从 J 中去掉指标 $\{2, 4\}$. 令可选

集 $J = \{3, 5\}, l = \min\{j | j \in J\} = 3$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2, +3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 5 < \bar{f} = +\infty$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = 1, \sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$

是可行点, 令 $\bar{x} = \sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$, 则 $\bar{f} = c\bar{x} = 5$.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{+1, -2, -3\}$, 探测点 $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -3$, 违背约束集 $I = \{1, 3\}$;

④ 自由变量有 $x_4, x_5, \alpha_0 + c_5 = 7 > \bar{f} = 5$. 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题 $\{\sigma\} = \{-1\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$;

② $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 5$;

③ 松弛变量 $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -1$, 违背约束集 $I = \{1, 2, 3\}$;

④ 自由变量有 $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 3 < \bar{f} = 5, \alpha_0 + c_3 = 4, \alpha_0 + c_4 = 6 > \bar{f} = 5$;

⑤ 可选集 $J = \{j | c_{\sigma_j} - c_j < \bar{f}\} = \{2, 3\}$. 各违背约束中, 属于 J 的有正系数的自由变量下标集 $J_1 = \{3\}, J_2 = \{2\}, J_3 = \{2, 3\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 3, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 1, q_3 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 6, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = -1, s_3 + q_3 = 5$. 本子问题没有更好的可行解.

子问题 $\{\sigma\} = \{-1\}$ 中, 固定变量均取 0, 探测完毕. 最优解 $\bar{x} = (1, 0, 1, 0, 0)^T$, 最优值 $\bar{f} = 5$.

4. 假设分派甲、乙、丙、丁、戊 5 人去完成 A, B, C, D, E 5 项任务, 每人必须完成一项, 每项任务必须由 1 人完成. 每个人完成各项任务所需时间 c_{ij} 如下表所示, 问怎样分派任务才能使完成 5 项任务的总时间最少?

	A	B	C	D	E
甲	16	14	18	17	20
乙	14	13	16	15	17
丙	18	16	17	19	20
丁	19	17	15	16	19
戊	17	15	19	18	21

解 设第 i 个人完成第 j 项任务的工作量为 $x_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 5$. 数学模型如下:

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & Ax = e, \\ & x_j \geq 0, \text{ 且取 } 0 \text{ 或 } 1, j = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned}$$

其中

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}, \dots, x_{51}, x_{52}, \dots, x_{55})^T, \quad c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{15}, \dots, c_{51}, c_{52}, \dots, c_{55}),$$

$$A = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{15}, \dots, p_{51}, p_{52}, \dots, p_{55}),$$

p_{ij} 的第 i 和第 $5+j$ 个分量是 1, 其余分量是 0, 向量 e 的分量均为 1.

将费用系数向量 c 写成矩阵形式:

$$(c_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 18 & 17 & 20 \\ 14 & 13 & 16 & 15 & 17 \\ 18 & 16 & 17 & 19 & 20 \\ 19 & 17 & 15 & 16 & 19 \\ 17 & 15 & 19 & 18 & 21 \end{bmatrix}.$$

下面求约化矩阵 $(\hat{c}_{ij})_{5 \times 5}$.

令 $u_i = \min_j \{c_{ij}\}, i = 1, 2, \dots, 5$. 第 i 行的每个元素减去本行的最小数 $u_i (i = 1, 2, \dots, 5)$,

得到下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

再从所得矩阵的每一列各元素减去本列的最小数 $v_j (j = 1, 2, \dots, 5)$, 得到约化矩阵:

$$(\hat{c}_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

用最少数直线覆盖矩阵(1)中的全部零元素. 最少直线数是 4, 尚未达到最优解. 未被覆盖元素中最小数 $l = 1$. 未被覆盖元素减去最小数 1, 两次覆盖元素加 1, 得下列约化矩阵:

$$(\bar{c}_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

用最少数直线覆盖矩阵(2)中的全部零元素, 最少直线数是 4, 尚未达到最优解. 未被覆盖元素中最小数 $l = 1$. 未被覆盖元素减 1, 两次覆盖元素加 1, 得到约化矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

用最少数直线覆盖矩阵(3)中的全部零元素, 最少直线数等于 5, 已经得到 5 个独立的零元素. 5 个独立的零元素的选择并不惟一. 例如, 令

$$x_{12} = x_{24} = x_{35} = x_{43} = x_{51} = 1,$$

其中 $x_{ij} = 1$ 表示第 i 个人完成第 j 项任务; 其他 $x_{ij} = 0$. 最小值

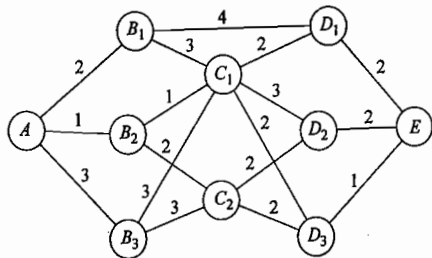
$$f_{\min} = 14 + 15 + 20 + 15 + 17 = 81.$$

第16章

CHAPTER 16

动态规划简介题解

1. 假设有一个路网如下图所示,图中数字表示该路段的长度,求从A到E的最短路线及其长度.



解 用逆推解法. 分为4个阶段. 第 k 阶段的状态变量记作 s_k , 决策变量记作 u_k , 状态转移方程 $s_{k+1}=u_k(s_k)$. 最优指标函数记作 $f_k(s_k)$, 表示从 s_k 到终端的最短路程.

当 $k=4$ 时:

$$f_4(D_1) = 2, u_4(D_1) = E; \quad f_4(D_2) = 2, u_4(D_2) = E; \quad f_4(D_3) = 1, u_4(D_3) = E.$$

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned} f_3(C_1) &= \min\{2 + f_4(D_1), 3 + f_4(D_2), 2 + f_4(D_3)\} \\ &= \min\{2 + 2, 3 + 2, 2 + 1\} \\ &= 3, \quad u_3(C_1) = D_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(C_2) &= \min\{2 + f_4(D_2), 2 + f_4(D_3)\} \\ &= \min\{2 + 2, 2 + 1\} \\ &= 3, \quad u_3(C_2) = D_3. \end{aligned}$$

当 $k=2$ 时:

$$f_2(B_1) = \min\{4 + f_4(D_1), 3 + f_3(C_1)\}$$

$$= \min\{4 + 2, 3 + 3\}$$

$$= 6, \quad u_2(B_1) = D_1 \text{ 或 } C_1;$$

$$f_2(B_2) = \min\{1 + f_3(C_1), 2 + f_3(C_2)\}$$

$$= \min\{1 + 3, 2 + 3\}$$

$$= 4, \quad u_2(B_2) = C_1;$$

$$f_2(B_3) = \min\{3 + f_3(C_1), 3 + f_3(C_2)\}$$

$$= \min\{3 + 3, 3 + 3\}$$

$$= 6, \quad u_2(B_3) = C_1 \text{ 或 } C_2.$$

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \min\{2 + f_2(B_1), 1 + f_2(B_2), 3 + f_2(B_3)\} \\ &= \min\{2 + 6, 1 + 4, 3 + 6\} \\ &= 5, \quad u_1(A) = B_2. \end{aligned}$$

最短路线: $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_3 \rightarrow E$.

最短路程: $f_1(A) = 5$.

2. 分别用逆推解法及顺推解法求解下列各题:

$$(1) \max \quad 2x_1^2 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s. t.} \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

$$(2) \max \quad x_1^2 + 8x_2 + 3x_3^2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

$$(3) \min \quad x_1 + x_2^2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

$$(4) \max \quad x_1 x_2 x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

解 (1) 先用逆推解法

划分为3个阶段. 阶段指标 $v_3(x_3) = 5x_3$, $v_2(x_2) = 3x_2$, $v_1(x_1) = 2x_1^2$. 用 s_k 表示第 k 阶段的状态变量, 状态转移方程:

$$s_3 - x_3 = 0, \quad s_3 = s_2 - 4x_2, \quad s_2 = s_1 - 2x_1, \quad s_1 = 8.$$

考虑非负限制, 则有

$$x_3 = s_3, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1.$$

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{x \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3=s_3} \{5x_3 + f_4(s_4)\} = 5s_3, \quad x_3 = s_3.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2} \{3x_2 + f_3(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2} \{3x_2 + 5(s_2 - 4x_2)\} \\
 &= 5s_2, \\
 x_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1} \{2x_1^2 + f_2(s_2)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1} \{2x_1^2 + 5(s_1 - 2x_1)\} \\
 &= 5s_1, \\
 x_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

由 $x_1=0$, 知 $s_2=s_1=8$; 由 $x_2=0$, 知 $s_3=s_2=8$. 因此 $x_3=s_3=8$.

最优解 $\bar{x}=(0,0,8)$, 最优值 $f_{\max}=40$.

再用顺推解法.

划分为 3 个阶段. 阶段指标 $v_1(x_1)=2x_1^2$, $v_2(x_2)=3x_2$, $v_3(x_3)=5x_3$. 用 s_{k+1} 表示 k 阶段末的结束状态, 状态转移方程:

$$s_1 = s_2 - 2x_1 = 0, \quad s_2 = s_3 - 4x_2, \quad s_3 = s_4 - x_3, \quad s_4 = 8.$$

由于 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, 因此有

$$x_1 = \frac{1}{2}s_2, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3, \quad 0 \leq x_3 \leq s_4.$$

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=1,2,3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当 $k=1$ 时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1=\frac{1}{2}s_2} \{2x_1^2 + f_0(s_1)\} = \frac{1}{2}s_2^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}s_2.$$

当 $k=2$ 时:

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3} \{3x_2 + f_1(s_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3} \left\{3x_2 + \frac{1}{2}(s_3 - 4x_2)^2\right\}.$$

由于 $g(x_2)=3x_2+\frac{1}{2}(s_3-4x_2)^2$ 是凸函数, 最大值点是 $x_2=0$ 或 $x_2=\frac{1}{4}s_3$. 因此

$$f_2(s_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}s_3^2, & x_2 = 0, \\ \frac{3}{4}s_3, & x_2 = \frac{1}{4}s_3. \end{cases}$$

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned}
 f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \{5x_3 + f_2(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \left\{5x_3 + \frac{1}{2}s_3^2, 5x_3 + \frac{3}{4}s_3\right\} \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \left\{5x_3 + \frac{1}{2}(s_4 - x_3)^2, 5x_3 + \frac{3}{4}(s_4 - x_3)\right\} \\
 &= 5s_4, \\
 x_3 &= s_4 = 8.
 \end{aligned}$$

由状态转移方程知, 当 $x_3=8$ 时, $s_3=0$; 由 $x_2=0$, 知 $s_2=0$, 故 $x_1=0$.

最优解 $\bar{x}=(0,0,8)$, 最优值 $f_{\max}=40$.

(2) 先用逆推解法. 划分为 3 个阶段, 阶段指标 $v_3(x_3)=3x_3^2$, $v_2(x_2)=8x_2$, $v_1(x_1)=x_1^2$. 状态转移方程:

$$s_3 - 2x_3 = 0, \quad s_3 = s_2 - x_2, \quad s_2 = s_1 - x_1, \quad s_1 \leq 6.$$

基本方程:

$$f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k=3,2,1,$$

$$f_4(s_4) = 0.$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3=\frac{1}{2}s_3} \{3x_3^2 + f_4(s_4)\} = \frac{3}{4}s_3^2, \quad x_3 = \frac{1}{2}s_3.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{8x_2 + f_3(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \left\{8x_2 + \frac{3}{4}(s_2 - x_2)^2\right\} \\
 &= 8s_2, \\
 x_2 &= s_2.
 \end{aligned}$$

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1^2 + f_2(s_2)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1^2 + 8(s_1 - x_1)\} \\
 &= 8s_1, \\
 x_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

由于求最大值, 令 $s_1=6$. 利用状态转移方程, 由 $s_1=6, x_1=0$ 推得 $s_2=6$, 故 $x_2=6, s_3=0, x_3=0$.

最优解 $\bar{x}=(0,6,0)$, 最优值 $f_{\max}=48$.

再用顺推解法.

划分为3个阶段. 阶段指标 $v_1(x_1)=x_1^2, v_2(x_2)=8x_2, v_3(x_3)=3x_3^2$. 状态转移方程:

$$s_1 = s_2 - x_1 = 0, \quad s_2 = s_3 - x_2, \quad s_3 = s_4 - 2x_3, \quad s_4 \leq 6.$$

由于变量有非负的限制, 因此 $x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k) + f_{k-1}(s_k)\}, & k=1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当 $k=1$ 时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1=s_2} \{v_1(x_1) + f_0(s_1)\} = s_2^2, \quad x_1 = s_2.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{v_2(x_2) + f_1(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{8x_2 + (s_3 - x_2)^2\} \\ &= 8s_3, \\ x_2 &= s_3. \end{aligned}$$

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned} f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{v_3(x_3) + f_2(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{3x_3^2 + 8(s_4 - 2x_3)\} \\ &= 8s_4, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

为取最大值, 令 $s_4=6, x_3=0$. 利用状态转移方程, 推出 $s_3=s_4-2x_3=6, x_2=6, s_2=s_3-x_2=0, x_1=s_2=0$.

最优解 $\bar{x}=(0, 6, 0)$, 最优值 $f_{\max}=48$.

(3) 先用逆推解法.

划分为3个阶段, 阶段指标 $v_3(x_3)=2x_3, v_2(x_2)=x_2^2, v_1(x_1)=x_1$. 用 s_k 表示第 k 阶段的状态变量. 状态转移方程: $s_3-x_3=0, s_3=s_2-x_2, s_2=s_1-x_1, s_1 \geq 10$.

由于有非负的限制, 因此 $x_3=s_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_3) = \min_{x_3=s_3} \{2x_3 + f_4(s_4)\} = 2s_3, \quad x_3 = s_3.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2^2 + f_3(s_3)\} \\ &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2^2 + 2(s_2 - x_2)\} \\ &= \begin{cases} s_2^2, & s_2 < 1, \\ 2s_2 - 1, & s_2 \geq 1, \end{cases} \\ x_2 &= \begin{cases} s_2, & s_2 < 1, \\ 1, & s_2 \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \min_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 + f_2(s_1 - x_1)\} = s_1 - \frac{1}{4}, \\ x_1 &= s_1 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

为取最小值, 令 $s_1=10, x_1=s_1-\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$, 利用状态转移方程, 得到 $s_2=s_1-x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}, s_3=s_2-x_2=0, x_3=s_3=0$.

最优解 $\bar{x}=(\frac{19}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 最优值 $f_{\min}=\frac{39}{4}$.

再用顺推解法.

划分为3个阶段, 阶段指标 $v_1(x_1)=x_1, v_2(x_2)=x_2^2, v_3(x_3)=2x_3$. 状态转移方程: $s_1=s_2-x_1=0, s_2=s_3-x_2, s_3=s_4-x_3, s_4 \geq 10$. 由于有非负的限制, 因此 $x_1=s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq s_4$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \min\{v_k(x_k) + f_{k-1}(s_k)\}, & k=1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当 $k=1$ 时:

$$f_1(s_2) = \min_{x_1=s_2} \{x_1 + f_0(s_1)\} = s_2, \quad x_1 = s_2.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2^2 + f_1(s_2)\} \\ &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2^2 + (s_3 - x_2)\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} s_3^2, & \text{当 } s_3 < \frac{1}{2}, \\ s_3 - \frac{1}{4}, & \text{当 } s_3 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} s_3, & s_3 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & s_3 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_4) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_4} \{2x_3 + f_2(s_4 - x_3)\} = s_4 - \frac{1}{4}, \quad x_3 = 0.$$

为取最小值, 令 $s_4 = 10, x_3 = 0$, 利用状态转移方程求得 $s_3 = s_4 - x_3 = 10, x_2 = \frac{1}{2}, s_2 =$

$$s_3 - x_2 = \frac{19}{2}, x_1 = s_2 = \frac{19}{2}, s_1 = s_2 - x_1 = 0.$$

$$\text{最优解 } \bar{x} = \left(\frac{19}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \text{最优值 } f_{\min} = \frac{39}{4}.$$

(4) 先用逆推解法.

划分为 3 个阶段, 阶段指标: $v_3(x_3) = x_3, v_2(x_2) = x_2, v_1(x_1) = x_1$. 状态转移方程: $s_4 = s_3 - 2x_3 = 0, s_3 = s_2 - x_2, s_2 = s_1 - x_1, s_1 \leq 6$. 由于有非负的限制, 因此 $x_3 = \frac{1}{2}s_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(s_k)f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 1. \end{cases}$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 = \frac{1}{2}s_3} \{x_3 f_4(s_4)\} = \frac{1}{2}s_3, \quad x_3 = \frac{1}{2}s_3.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2 f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \left\{ \frac{1}{2} x_2 (s_2 - x_2) \right\} \\ &= \frac{1}{8} s_2^2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} s_2. \end{aligned}$$

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \left\{ \frac{1}{8} x_1 (s_1 - x_1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{54} s_1^3, \\ x_1 &= \frac{1}{3} s_1. \end{aligned}$$

为求最大值点, 令 $s_1 = 6, x_1 = 2$, 利用状态转移方程得到 $s_2 = s_1 - x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{2} s_2 = 2,$

$$s_3 = s_2 - x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} s_3 = 1.$$

最优解 $\bar{x} = (2, 2, 1)$, 最优值 $f_{\max} = 4$.

再用顺推解法.

划分为 3 个阶段, 阶段指标: $v_1(x_1) = x_1, v_2(x_2) = x_2, v_3(x_3) = x_3$. 状态转移方程: $s_1 = s_2 - x_1 = 0, s_2 = s_3 - x_2, s_3 = s_4 - 2x_3, s_4 \leq 6$. 由于有非负的限制, 因此 $x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2} s_4$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k)f_{k-1}(s_k)\}, & k = 1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 1. \end{cases}$$

当 $k=1$ 时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2} \{x_1 f_0(s_1)\} = s_2, \quad x_1 = s_2.$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2 f_1(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2 (s_3 - x_2)\} \\ &= \frac{1}{4} s_3^2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} s_3. \end{aligned}$$

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned} f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{x_3 f_2(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \left\{ \frac{1}{4} x_3 (s_4 - 2x_3)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{54} s_4^3,$$

$$x_3 = \frac{1}{6} s_4.$$

求极大值,令 $s_4 = 6, x_3 = \frac{1}{6} s_4 = 1$, 利用状态转移方程得到 $s_3 = s_4 - 2x_3 = 4, x_2 = \frac{1}{2} s_3 = 2, s_2 = s_3 - x_2 = 2, x_1 = s_2 = 2$.

最优解 $\bar{x} = (2, 2, 1)$, 最优值 $f_{\max} = 4$.

3. 假设某种机器可在高低两种不同负荷下运行,在高负荷下运行时,每台机器每年产值 20 万元,机器年损坏率 20%,在低负荷下运行时,每台机器每年产值 17 万元,机器年损坏率 10%,开始生产时,完好机器数量为 100 台,试问如何安排机器在高低负荷下的生产,才能使 3 年内总产值最高?(提示:可取第 k 年度初完好机器数 s_k 作为状态变量).

解 下面用逆推解法.

第 k 年度初完好机器数 s_k 为状态变量, $s_1 = 100$. 第 k 年度分配高负荷下生产的机器数 x_k 为决策变量,低负荷下生产的机器数为 $s_k - x_k$. 阶段指标 $v_k(s_k, x_k)$ 为第 k 年度产值,即

$$v_k(s_k, x_k) = 20x_k + 17(s_k - x_k) = 17s_k + 3x_k, \quad k = 3, 2, 1.$$

状态转移方程:

$$s_{k+1} = 0.8x_k + 0.9(s_k - x_k) = 0.9s_k - 0.1x_k, \quad k = 3, 2, 1.$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示从第 k 年度初到第 3 年度末最大产值.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

求解过程如下:

当 $k=3$ 时:

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{v_3(s_3, x_3) + f_4(s_4)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{17s_3 + 3x_3\} \\ &= 20s_3, \\ x_3 &= s_3. \end{aligned}$$

当 $k=2$ 时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{v_2(s_2, x_2) + f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{17s_2 + 3x_2 + 20(0.9s_2 - 0.1x_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{35s_2 + x_2\} \\ &= 36s_2, \end{aligned}$$

$$x_2 = s_2.$$

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{v_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{17s_1 + 3x_1 + 36(0.9s_1 - 0.1x_1)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{49.4s_1 - 0.6x_1\} \\ &= 49.4s_1 = 4940(\text{万元}), \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

利用状态转移方程,由 $s_1 = 100, x_1 = 0$ 推得 $s_2 = 90, x_2 = 90, s_3 = 72, x_3 = 72$.

最优解 $\bar{x} = (0, 90, 72)$, 总产值 $f_1(s_1) = 4940$ 万元.

计划安排: 第 1 年, 100 台机器均在低负荷下生产; 第 2 年初有 90 台完好机器, 均安排高负荷下生产, 第 3 年初完好机器 72 台, 均安排高负荷下生产. 按此计划, 3 年总产值最高, 为 4940 万元.

4. 假设旅行者携带各种货物总重量不得超过 80kg. 现有 A, B, C 三种货物, 每件重量及价值如下表所示, 试问 A, B, C 各携带多少件才能使总价值最大?

货物种类	A	B	C
每件重/kg	15	24	30
每件价值/元	200	340	420

解 设携带货物 A, B, C 分别为 x_1, x_2, x_3 件. 问题表达成整数规划如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & 200x_1 + 340x_2 + 420x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 15x_1 + 24x_2 + 30x_3 \leq 80, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ 且为整数.} \end{aligned}$$

下面用动态规划逆推解法求解.

按货物种类分为 3 个阶段, 阶段指标 $v_1(x_1) = 200x_1, v_2(x_2) = 340x_2, v_3(x_3) = 420x_3$.

用 s_k 表示第 k 阶段的状态变量, s_k 是携带货物重量的上限. 状态转移方程: $0 \leq s_4 = s_3 - 30x_3, s_3 = s_2 - 24x_2, s_2 = s_1 - 15x_1, s_1 \leq 80$.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

首先, 从第 1 阶段开始, 分析最优值函数 $f_k(s_k)$.

当 $k=1$ 时:

$$f_1(s_1) = \max_{\substack{0 \leq 15x_1 \leq 80 \\ x_1 \text{ 为整数}}} \{200x_1 + f_2(s_2)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \leq 15x_1 \leq 80 \\ x_1 \text{ 为整数}}} \{200x_1 + f_2(80 - 15x_1)\}$$

$$= \max\{0 + f_2(80), 200 + f_2(65), 400 + f_2(50), 600 + f_2(35), 800 + f_2(20), 1000 + f_2(5)\}.$$

当 $k=2$ 时:

$$f_2(s_2) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq s_2 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(s_2 - 24x_2)\} = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq s_2 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(s_2 - 24x_2)\}.$$

利用上式,对 $f_1(s_1)$ 中涉及的 $f_2(s_2)$ 分别计算如下:

$$f_2(80) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 80 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(80 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(80), 340 + f_3(56), 680 + f_3(32), 1020 + f_3(8)\},$$

$$f_2(65) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 65 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(65 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(65), 340 + f_3(41), 680 + f_3(17)\},$$

$$f_2(50) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 50 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(50 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(50), 340 + f_3(26), 680 + f_3(2)\},$$

$$f_2(35) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 35 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(35 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(35), 340 + f_3(11)\},$$

$$f_2(20) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 20 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(20 - 24x_2)\}$$

$$= 0 + f_3(20),$$

$$f_2(5) = 0 + f_3(5).$$

当 $k=3$ 时:

$$f_3(s_3) = \max_{\substack{0 \leq 30x_3 \leq s_3 \\ x_3 \text{ 为整数}}} \{420x_3 + f_4(s_3 - 30x_3)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \leq 30x_3 \leq s_3 \\ x_3 \text{ 为整数}}} \{420x_3\}$$

$$= 420 \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor, \quad x_3 = \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor.$$

利用 $f_3(s_3) = 420 \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor$ 计算 $f_2(s_2)$ 中涉及的 $f_3(s_3)$:

$$f_3(80) = 840, \quad f_3(56) = 420, \quad f_3(32) = 420, \quad f_3(8) = 0, \quad f_3(65) = 840,$$

$$f_3(41) = 420, \quad f_3(17) = 0, \quad f_3(50) = 420, \quad f_3(26) = 0, \quad f_3(2) = 0,$$

$$f_3(35) = 420, \quad f_3(11) = 0, \quad f_3(20) = 0, \quad f_3(5) = 0.$$

代入 $f_2(s_2)$ 各表达式,则有

$$f_2(80) = \max\{840, 340 + 420, 680 + 420, 1020 + 0\}$$

$$= 1100, \quad x_2 = 2;$$

$$f_2(65) = \max\{840, 340 + 420, 680 + 0\} = 840, \quad x_2 = 0;$$

$$f_2(50) = \max\{420, 340 + 0, 680 + 0\} = 680, \quad x_2 = 2;$$

$$f_2(35) = \max\{420, 340 + 0\} = 420, \quad x_2 = 0;$$

$$f_2(20) = f_2(5) = 0.$$

最后计算 $f_1(s_1)$:

将 $f_2(s_2)$ 代入 $f_1(s_1)$ 的表达式,则有

$$f_1(s_1) = \max\{1100, 200 + 840, 400 + 680, 600 + 420, 800 + 0\} = 1100,$$

$$x_1 = 0;$$

取重量上限, $s_1 = 80, x_1 = 0$, 利用状态转移方程得到 $s_2 = s_1 = 80, x_2 = 2, s_3 = 80 - 24 \times 2 = 32, x_3 = \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor = 1$.

携带货物情况是, A 种 0 件, B 种 2 件, C 种 1 件. 最大总价值 1100.