Espaces hermitiens

Introduction

Dans le cadre du programme de MP/PC, nous étudions les propriétés des espaces euclidiens, c'est-à-dire des **R**-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'un produit scalaire. Il est donc naturel de nous demander si ces propriétés subsistent dans un **C**-espace vectoriel. Prenons pour cela un exemple simple : considérons **C** comme un **C**-espace vectoriel et munissons-le, naïvement, du "produit scalaire"

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{C}^2 &\to \mathbf{C}\\ (x,y) &\mapsto xy.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une forme bilinéaire, symétrique définie. Cependant, $\varphi(x,x)$ n'a aucune raison d'être positif, contrairement à ce qui se passerait dans **R**. On pourrait alors penser à redéfinir φ, de telle sorte à rendre cette quantité positive. L'idée la plus naturelle est de définir

$$\begin{aligned}\psi : \mathbf{C}^2 &\to \mathbf{C}\\ (x,y) &\mapsto \overline{x}y.\end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $x \in \mathbf{C}$, $\psi(x,x) = |x|^2 \geq 0$. Regradons toutefois si les autres propriétés du produit scalaire sont restées intactes. Bien que le caractère défini de l'application reste inchangé, il est clair que cette dernière est loin d'être symétrique. Plus encore, elle n'est même plus bilinéaire, car, pour $\lambda, x, y \in \mathbf{C}$,

$$\psi(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\psi(x,y).$$

Bref, il est clair que les choses ne se passent pas vraiment comme dans **R**. Nous verrons donc comment définir les différents objets dans un **C**-espace vectoriel afin de déterminer des propriétés similaires à celles dans **R**. De plus, en mathématiques, plus les définitions sont compliquées, plus les résultats sont forts. En outre, nous trouverons des propriétés vraies pour les **C**-espaces vectoriels qui s'avèrent complètement fausses dans les **R**-espaces vectoriels.

I. Formes sesquilinéaires

A. Définition

Soit E un **C**-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : E \times E \to \mathbf{C}$. On dit que φ est une forme sesquilinéaire sur E si φ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $a \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(a,y)$ est linéaire :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{C},\ \varphi(a, \lambda x + y) = \lambda\varphi(a,x) + \varphi(a,y).$$

2. Pour tout $b \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(y,b)$ est semi-linéaire :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{C},\ \varphi(\lambda x + y, b) = \overline{\lambda}\varphi(x,b) + \varphi(y,b).$$

Cette définition est moins puissante que celle d'une forme bilinéaire, d'où le nom de forme sesquilinéaire (*sesqui* signifie "un et demi"). Le lecteur pourra notamment vérifier que l'unique forme sesquilinéaire et bilinéaire est l'application nulle.

B. Exemples

Pour chacun des exemples suivants, vérifier que l'on définit bien une forme sesquilinéaire sur E.

1. Soit, φ, ψ deux formes linéaires sur E. L'application

$$(x,y)\in E^2 \longmapsto \overline{\varphi(x)}\psi(y)$$

   est une forme sesquilinéaire sur E.

2. Soit E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$. L'application

$$(f,g)\in E^2 \longmapsto \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$$

   est une forme sesquilinéaire sur E.

3. Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Soit $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$, $y=\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n\in E$. L'application φ définie par

$$\varphi(x,y)=\overline{\lambda_1}\mu_1+\cdots+\overline{\lambda_n}\mu_n$$

   est une forme sesquilinéaire sur E.

II. Produit scalaire hermitien

A. Définition