Processus de branchement

Objectif

Les processus de branchement sont des modèles introduits pour étudier le développement d'une population, dans laquelle les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres. Ces modèles sont particulièrement utilisés en biologie (étude de la croissance d'une colonie de bactéries...) et en physique nucléaire, mais trouvent leur origine dans l'étude, au 19ème siècle, des probabilités d'extinction des noms de familles illustres en Grande Bretagne (Francis Galton et Henry Watson, 1874). Leur problème était le suivant : Si un homme a une probabilité p_0 de n'avoir aucun fils, p_1 d'avoir un fils, p_2 d'en avoir deux, etc ; si chacun de ses fils éventuels est dans le même cas, et ainsi de suite ; quelle est la probabilité pour qu'à terme cette branche de la famille s'éteigne ? Plus généralement, comment connaître la probabilité pour qu'il y ait exactement k individus à la génération n ?

Notations

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On considère une suite $(Z_n)_n$ de variables aléatoires, Z_n modélisant le nombre d'individus de la population à la génération n. On fait alors les hypothèses suivantes :

- Tous les individus, quel que soit la génération à laquelle ils appartiennent, se comportent a priori de la même façon (i.e. leur nombre de fils a la même loi de probabilité).
- Le comportement d'un individu donné n'est en rien influencé par celui d'autres individus, que ce soit de sa propre génération ou des générations antérieures.
- Ce comportement n'est pas non plus affecté par le nombre d'individus.

En particulier, les descendances de deux individus distincts sont des phénomènes indépendants.

On considère une suite $\left(p_k\right)_k$ de réels positifs ou nuls telle que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} = 1$. Chaque individu, au cours du processus, aura une probabilité p_k d'avoir k enfants.

On suppose dans la suite du problème que $Z_0 = 1$, ce qui donne, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Z_1 = k) = p_k$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, on notera F_X, série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de X. On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière

$$\forall t \in [-1,1],\ F_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\, t^k.$$

Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction à valeurs réelles, on dit que f est convexe sur I si

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction à valeurs réelles, on dit que f est strictement convexe sur I si

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

0. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\omega \in \Omega$,

$$Z_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_1(\omega) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{Z_1(\omega)} Z_{n,k}(\omega) & \text{si } Z_1(\omega) \neq 0 \end{cases}.$$

où les $Z_{n,k}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que Z_n.

Ainsi, si l'on connaît Z_n, le comportement de la variable Z_{n+1} est absolument indépendant de $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{n-1}$.

I. Quelques résultats de convexité

Dans cette partie, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$. On se donne une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Montrer que f est convexe si, et seulement si, f'' est positive.
2. On revient au cas général. Montrer que f est convexe si, et seulement si, f' est croissante.
3. On suppose que f est convexe. Montrer que f est au-dessus de sa tangente en tout point de I.

II. Généralités sur les fonctions génératrices

Dans toute cette partie, on se donne une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

4. Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, $F_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$.
5. Montrer que F_X est strictement croissante et convexe sur $[0,1]$.
6. a. Donner la valeur de $F_X(0)$.
   b. Montrer que F_X est continue en 1.
   c. En déduire la valeur de $F_X(1)$.
7. On suppose que X admet une espérance finie.
   a. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \lim\limits_{t\to 1} F_X{}'(t)$.
   b. En déduire que $\mathbf{E}(X) = F_X{}'(1)$.
8. On suppose que X admet une variance finie. En particulier, X admet une espérance finie, donc les résultats précédents restent vrais.
   a. Déterminer $\lim\limits_{t\to 1} F_X{}''(t)$.
   b. Montrer alors que $\mathrm{Var}(X) = F_X{}''(1) - \left(F_X{}'(1)\right)^2 + F_X{}'(1)$.
9. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X.
   a. Montrer que $F_{X+Y} = F_X F_Y$.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de somme S_n, on a $F_{S_n} = F_{X_1} \cdots F_{X_n}$.

III. Cas des processus de branchement

A. Fonctions génératrices des variables Z_n

On considère la fonction $F = F_{Z_1}$, donnée par l'expression $F(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k t^k$, pour tout $t \in [-1,1]$. On définit alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ par la relation de récurrence

$$F_0 = \mathrm{id}_{[-1,1]} \text{ et } F_{n+1} = F \circ F_n \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

On se propose de montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{Z_n} = F_n$. Pour cela, on procède par récurrence sur n.

10. Montrer que $F_{Z_0} = F_0$ et que $F_{Z_1} = F_1$.
11. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on définit la variable aléatoire $Y_{n,i}$ par
$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(Y_{n,i} = k) = \mathbf{P}(Z_n = k | Z_1 = i).$$
   a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Z_n = k) = \sum\limits_{i \in I} \mathbf{P}\left(Y_{n,i} = k\right) p_i$, avec $I = \{i \in \mathbf{N} \mid p_i > 0\}$.
   b. Montrer que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $t \in [-1,1]$, $F_{Y_{n,i}}(t) = (F_{n-1}(t))^i$.
   c. Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, $F_{Z_n}(t) = \sum\limits_{i \in I} p_i (F_{n-1}(t))^i$.
   d. Conclure.

B. Un exemple

On suppose que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $p_i = \frac{1}{2^{i+1}}$.

12. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité.
13. Déterminer F_1.
14. a. Vérifier que, pour tout $t \in [0,1[$, $F_n(t) \neq 1$. On peut alors poser $a_n = \frac{1}{F_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
    b. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, la suite $(a_n(t))_n$ est arithmétique.
    c. En déduire que, pour $t \in [0,1[$, $F_n(t) = \frac{n-(n-1)t}{n+1-nt}$.
15. Exprimer, pour $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $\mathbf{P}(Z_n = k)$.

C. Probabilité d'extinction

Dans la suite du problème, on supposera que $p_0 > 0$ et que Z_1 possède une espérance finie.

16. Montrer que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $(F_n(0))_n$. On notera α cette limite.
17. On note x_0 le plus petit point fixe de F.
    a. Justifier l'existence de x_0.
    b. Montrer que $\alpha \leq x_0$.
    c. En déduire que $\alpha = x_0$.
18. On suppose que $\mathbf{E}(Z_1) < 1$. Montrer que 1 est l'unique point fixe de F et en déduire la valeur de α.
19. On suppose que $\mathbf{E}(Z_1) = 1$.
    a. Montrer qu'il existe $n \geq 2$ tel que $p_n > 0$.
    b. En déduire que F est strictement convexe.
    c. Déterminer la valeur de α.
20. On suppose que $\mathbf{E}(Z_1) > 1$. On considère la fonction $\varphi : \ t \in [0,1[\mapsto \frac{1-F(t)}{1-t}$.
    a. Montrer que φ est strictement croissante.
    b. En déduire l'existence d'un unique point fixe x_0 de F sur $[0,1[$. On a donc $\alpha = x_0 < 1$.

IV. Cas sur-critique ($\mathbf{E}(Z_1) > 1$)

On suppose ici que $\mathbf{E}(Z_1) > 1$. Dès lors, $\alpha < 1$.

Dans toute cette partie, on fixe un entier naturel non nul k et on définit de manière analogue aux Z_n une suite de variables aléatoires $\left(Z'_n\right)_n$, vérifiant cependant $Z'_0 = k$. On admet que, hormis cette dernière hypothèse, les résultats démontrés précédemment pour les Z_n restent valables pour les Z'_n.

On définit de plus une suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = \mathbf{P}\left(Z'_n = k \text{ et } Z'_i \neq k \text{ pour tout } 0 < i < n\right),$$

et $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Pour tout $n, r \in \mathbf{N}^*$, on définit $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $\left(Z'_n\right)_n$ prenne la valeur k pour la r-ième fois au rang n.

Enfin, on pose $U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n$ et $U_r(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(r)} t^n$, pour tout $t \in [-1,1]$ et $r \in \mathbf{N}^*$.

21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(Z_n) = \alpha^n$.

22. Vérifier que les séries $\sum_{n\geq 1} u_n t^n$ et $\sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} t^n$ convergent quand $t \in [-1,1]$.

23. a. Justifier que u est bien défini.
    b. Montrer que la probabilité que la suite $\left(Z'_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle. Ainsi, on a $u < 1$.
    c. Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose que $p_0 = 0$?

24. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et r un entier supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}.$$

    b. En déduire que, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ (U^r désigne $U \times U \times \cdots \times U$ r fois).

25. a. Montrer que la probabilité que la suite $\left(Z'_n\right)_n$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.
    b. Montrer que la probabilité que la suite $(Z_n)_n$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

26. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements, tous de probabilité 1. Que peut-on dire de $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$?

27. Montrer que $\mathbf{P}\left(\lim_{n\to+\infty} Z_n = +\infty\right) = 1 - \alpha$.

On a ainsi montré que, contrairement au cas sous-critique ($\mathbf{E}(Z_1) \leq 1$) où la population est vouée à s'éteindre presque sûrement, la suite $(Z_n)_n$ converge vers 0 avec une probabilité $\alpha < 1$. Le cas contraire, elle diverge vers $+\infty$ avec une probabilité $1 - \alpha$.

FIN DU SUJET

Ce sujet est largement inspiré de l'excellent document disponible à l'adresse suivante : http ://culturemath.ens.fr/maths/pdf/proba/watson.pdf (que j'ai eu l'occasion d'étudier au cours de l'épreuve d'ADS de l'École polytechnique), ainsi que la remarquable épreuve de Mathématiques 1 – PSI – Centrale 2015.