Autour des endomorphismes nilpotents

Notations

Soit n un entier naturel non nul et $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension n. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Une application $u \in \mathscr{L}(E)$ est dite nilpotente d'indice p si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note χ_u le polynôme caractéristique de M et $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres.
On pose

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

Dans tout le problème, on considèrera une application $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'indice p.

I. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

A. Une majoration de p

1. a. Donner un polynôme annulateur de u.
   b. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$. Montrer que v est nilpotente.

On a ainsi montré qu'une application $v \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotente si, et seulement si, χ_v est scindé et $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$.

3. En déduire que $p \leq n$.

B. Le cas $p = n$

4. a. Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
   b. Montrer alors que la famille $\mathscr{B} = (u^{n-1}(x), \cdots, u(x), x)$ est une base de E.
5. En déduire la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

C. Le cas $p < n$

6. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(u^{p-1}(x), \cdots, u(x), x)$ soit libre dans E.
7. En déduire que $F = \mathrm{Vect}\left(u^{p-1}(x), \cdots, u(x), x\right)$ est stable par u.
8. a. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u.
   b. Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.
   c. Montrer que les restrictions $u_{|F}$ et $u_{|F^{\perp}}$ de u à F et $F^{\perp}$ sont nilpotentes.
9. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$.

D. Caractéristiques de la décomposition de Jordan

10. Montrer qu'il existe $p_1 \geq \cdots \geq p_s \in \mathbf{N}^*$ ainsi qu'une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_s} \end{pmatrix}$. Cette forme est appelée la décomposition de Jordan de u.
11. En déduire la valeur de p.
12. Justifier l'existence d'une famille libre $(x_1, \cdots, x_s) \in E^s$ tel que pour $1 \leq i \leq s$, $u^{p_i - 1}(x_i) \neq 0$.
13. Montrer que $(x_1, \cdots, x_s)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$. En déduire la valeur de s.

Pour $0 \leq k \leq s$, on note $d_k = \dim\left(\mathrm{Ker}\, u^k\right)$.

14. Montrer que $(x_1, \cdots, x_s, u(x_1), \cdots, u(x_s))$ est une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$. En déduire $\mathrm{Card}\left(\{p_i | 1 \leq i \leq s \text{ et } p_i \geq 2\}\right)$.
15. Montrer que pour $1 \leq k \leq s$, $\mathrm{Card}\left(\{p_i | 1 \leq i \leq s \text{ et } p_i \geq k\}\right) = d_k - d_{k-1}$.

E. Généralisation aux matrices quelconques

On considère $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que χ_v soit scindé. On note alors $\chi_v = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, les λ_k étant des réels deux à deux distincts et les α_k étant des entiers naturels non nuls.

16. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} C_k$, où $C_k = \mathrm{Ker}\,(v - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{\alpha_k}$. On appelle sous-espaces caractéristiques de u les C_k.
17. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq r$, C_k est stable par v.
18. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq r$, $v_k = v_{|C_k}$ peut s'écrire $v_k = \lambda_k \mathrm{id}_E + n_k$, où n_k est un endomorphisme nilpotent de C_k.
19. Montrer qu'il existe $p_1 \geq \cdots \geq p_s \in \mathbf{N}^*$, ainsi qu'une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de v est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{p_1} + J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{p_s} + J_{p_s} \end{pmatrix}.$$
20. Justifier que l'on peut déterminer la valeur des p_i, uniquement en fonction de u. En déduire l'unicité des p_i.
21. Montrer alors que deux matrices A et B sont semblables dans $\mathbf{C}$ si, et seulement si
$$\forall (\lambda, k) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}^*,\ \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)^k = \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)^k.$$

F. Commutant d'un endomorphisme