

Espaces hermitiens

Introduction

Dans le cadre du programme de MP/PC, nous étudions les propriétés des espaces euclidiens, c'est-à-dire des \mathbf{R} -espaces vectoriels de dimension finie, munis d'un produit scalaire. Il est donc naturel de nous demander si ces propriétés subsistent dans un \mathbf{C} -espace vectoriel. Prenons pour cela un exemple simple : considérons \mathbf{C} comme un \mathbf{C} -espace vectoriel et munissons-le, naïvement, du "produit scalaire"

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{C}^2 &\rightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) &\mapsto xy.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une forme bilinéaire, symétrique définie. Cependant, $\varphi(x, x)$ n'a aucune raison d'être positif, contrairement à ce qui se passerait dans \mathbf{R} . On pourrait alors penser à redéfinir φ , de telle sorte à rendre cette quantité positive. L'idée la plus naturelle est de définir

$$\begin{aligned}\psi : \mathbf{C}^2 &\rightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) &\mapsto \bar{x}y.\end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $x \in \mathbf{C}$, $\psi(x, x) = |x|^2 \geq 0$. Regardons toutefois si les autres propriétés du produit scalaire sont restées intactes. Bien que le caractère défini de l'application reste inchangé, il est clair que cette dernière est loin d'être symétrique. Plus encore, elle n'est même plus bilinéaire, car, pour $\lambda, x, y \in \mathbf{C}$,

$$\psi(\lambda x, y) = \bar{\lambda}\psi(x, y).$$

Bref, il est clair que les choses ne se passent pas vraiment comme dans \mathbf{R} . Nous verrons donc comment définir les différents objets dans un \mathbf{C} -espace vectoriel afin de déterminer des propriétés similaires à celles dans \mathbf{R} . Nous trouverons d'autre part des propriétés vraies pour les \mathbf{C} -espaces vectoriels qui s'avèrent complètement fausses dans les \mathbf{R} -espaces vectoriels.

I. Formes sesquilinéaires

Définition

Soit E un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{C}$. On dit que φ est une **forme sesquilinéaire** sur E si φ vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $a \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(a, y)$ est linéaire :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbf{C}, \varphi(a, \lambda x + y) = \lambda \varphi(a, x) + \varphi(a, y).$$

- Pour tout $b \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(y, b)$ est semi-linéaire :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbf{C}, \varphi(\lambda x + y, b) = \bar{\lambda} \varphi(x, b) + \varphi(y, b).$$

Remarque

Cette définition est moins puissante que celle d'une forme bilinéaire, d'où le nom de forme sesquilinéaire (*sesqui* signifie "un et demi"). Le lecteur pourra notamment vérifier que l'unique forme sesquilinéaire et bilinéaire est l'application nulle.

Pour chacun des exemples suivants, vérifier que l'on définit bien une forme sesquilinéaire sur E .

Exemple 1

Soit, φ, ψ deux formes linéaires sur E . L'application

$$(x, y) \in E^2 \mapsto \overline{\varphi(x)}\psi(y)$$

est une forme sesquilinéaire sur E .

Exemple 2

Soit E le \mathbf{C} -espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{C} . L'application

$$(f, g) \in E^2 \mapsto \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$$

est une forme sesquilinéaire sur E .

Exemple 3

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Soit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \in E$. L'application φ définie par

$$\varphi(x, y) = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \dots + \overline{\lambda_n}\mu_n$$

est une forme sesquilinéaire sur E .

II. Produit scalaire hermitien

Définition

Soient E un \mathbf{C} -espace vectoriel et φ une forme sesquilinéaire sur E . On dit que φ est **hermitienne** si, pour tous $x, y \in E$,

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

Exercice

Soient E un \mathbf{C} -espace vectoriel, (e_1, \dots, e_n) une base de E et φ une forme sesquilinéaire sur E . On note $A = (a_{i,j})$, avec $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$, puis $A^* = {}^t\overline{A} = (\overline{a_{j,i}})$.

Montrer que φ est hermitienne si, et seulement si, $A = A^*$.

Remarque

Si φ est une forme hermitienne sur E , alors, pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbf{R}$.

Définition

Soient E un \mathbf{C} -espace vectoriel et φ une forme hermitienne sur E . On dit que φ est **positive** (resp. **définie positive**) si, pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Définition

On appelle **produit scalaire** sur un \mathbf{C} -espace vectoriel E toute forme hermitienne définie positive. Un tel espace vectoriel (de dimension finie) est alors appelé **espace hermitien**.

Nous avons ainsi généralisé la notion de produit scalaire aux \mathbf{C} -espaces vectoriels. Bien que nous ayons perdu (il le fallait bien...) le caractère bilinéaire du produit scalaire, nous verrons qu'une telle définition apporte son lot de propriétés intéressantes.

III. Premières propriétés

Dans la suite, E est un espace hermitien. Si $x, y \in E$, on note $(x|y)$ le produit scalaire de x et y (dans cet ordre). On peut alors considérer $\|x\| = (x|x)$, pour tout $x \in E$.

Proposition

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2$
- $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- $2(\|x\| + \|y\|) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ (identité du parallélogramme)

Toutes les autres définitions (orthogonalité, orthonormalité, ...) restent les mêmes que dans les espaces euclidiens. On peut alors appliquer le procédé de Gram-Schmidt à une famille de vecteurs de E afin de l'orthonormaliser, ou compléter une famille orthonormée (donc libre) de E en une base orthonormée de E .

IV. Adjoint d'un endomorphisme

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme, noté u^* et appelé l'**adjoint** de u , tel que, pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème précédent. On note pour cela E^* l'espace des formes linéaires de E et on considère l'application

$$\Phi: y \in E \mapsto \phi_y$$

où l'on définit $\phi_y: x \in E \mapsto (x|y)$, pour tout $y \in E$.

1. Montrer que Φ est bijective.
2. On fixe $y \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E , noté $u^*(y)$, tel que, pour tout $x \in E$,

$$(u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

3. Montrer que l'application u^* ainsi définie est linéaire.

Exercice 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u . Montrer que F^\perp est stable par u^* .

Exercice 3

Soient \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A^* = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$. Montrer que $A^* = {}^t \overline{A}$.

On retrouve ici la notation matricielle adoptée en II.

V. Endomorphismes unitaires

Définition

Un endomorphisme u est dit **unitaire** s'il est bijectif et si $u^{-1} = u^*$.

Une matrice A est dite **unitaire** si elle est inversible et si $A^{-1} = A^*$. On note $U(n)$ leur ensemble.

Exercice

Montrer que $U(n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On l'appelle **groupe unitaire de degré n** .

Remarque

Si $A \in U(n)$, alors $|\det A|^2 = \det A \cdot \overline{\det A} = \det(A\bar{A}) = \det(A^t \bar{A}) = \det(AA^*) = 1$, donc $\det A \in \mathbf{U}$, où \mathbf{U} désigne l'ensemble des complexes de module 1.

Définition

On appelle **groupe spécial unitaire de degré n** l'ensemble des éléments de $U(n)$ de déterminant 1.

On définit de manière analogue $U(E)$, le groupe des endomorphismes unitaires de E , appelé groupe unitaire de E et $SU(E)$, le groupe des endomorphismes unitaires de E de déterminant 1, appelé groupe spécial unitaire de E .

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- u est unitaire
- Pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
- Pour tous $x, y \in E$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$
- Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in U(n)$
- Pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in U(n)$
- Il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E
- Pour toute base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E , $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E

Remarque

Les endomorphismes unitaires sont les analogues des endomorphismes orthogonaux pour les espaces hermitiens.

Proposition

Si $u \in U(E)$, alors

- Si F est un sous-espace de E stable par u , alors F^\perp est stable par u
- $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{U}$

Tout cela nous amène au

Théorème

Soit $u \in U(E)$. Il existe une base orthonormée de E , formée de vecteurs propres de u , et les valeurs propres de u sont de module 1.

On retrouve ici un théorème qui rappelle la représentation des endomorphismes orthogonaux (blocs de rotations). Cependant, on retrouve un résultat bien plus fort ici, car le théorème dit que les endomorphismes unitaires sont diagonalisables dans une base orthonormée (ce qui est complètement faux, en général, pour

les endomorphismes orthogonaux).

VI. Endomorphismes auto-adjoints

Définition

Un endomorphisme u de E est dit **auto-adjoint** (ou **hermitien**) s'il vérifie $u^* = u$. On note $\text{Her}(E)$ leur ensemble.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- u est auto-adjoint
- Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^* = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- Pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^* = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- Pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \in \mathbf{R}$
- Il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u , et toutes les valeurs propres de u sont réelles

On retrouve ici une analogie avec les endomorphismes symétriques et notamment pour la dernière assertion avec le théorème spectral.

Exercice

Exercice classique, que l'on retrouve aussi dans le cas des espaces euclidiens

Soit $u \in \text{Her}(E)$. Notons $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres, rangées par ordre croissant. On considère $A = \left\{ \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$.

Montrer que $\lambda_1 = \min A$ et $\lambda_n = \max A$.

VII. Endomorphismes auto-adjoints positifs

Définition

On définit les ensembles suivants

- $\text{Her}^+(E) = \{u \in \text{Her}(E) \mid \text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+\}$ (endomorphismes **auto-adjoints positifs**)
- $\text{Her}^{++}(E) = \{u \in \text{Her}(E) \mid \text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+^*\}$ (endomorphismes **auto-adjoints définis positifs**)

On définit de même $\text{Her}_n^+(\mathbf{C})$ et $\text{Her}_n^{++}(\mathbf{C})$, respectivement l'ensemble des matrices auto-adjointes positives et des matrices auto-adjointes définies positives.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- $u \in \text{Her}^+(E)$
- Pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \in \mathbf{R}^+$
- Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v \circ v^*$
- Il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = w^* \circ w$

Quelques propriétés intéressantes des endomorphismes auto-adjoints positifs sont donnés sous forme d'exercices.

Exercice 1

Soit $u, v \in \text{Her}^+(E)$.

1. Montrer que, si $x \in E$, alors $x \in \ker u \Leftrightarrow (u(x)|x) = 0$.
2. Montrer que $\ker(u + v) = \ker u \cap \ker v$ et $\text{Im}(u + v) = \text{Im} u + \text{Im} v$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $w \in \text{Her}^+(E)$ tel que $w^k = u$.

Exercice 2

Soient $A \in \text{Her}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $B \in \text{Her}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in U(n)$ telle que $P^*AP = I_n$ et P^*BP soit diagonale.

Indication : S'intéresser d'abord à $P^*AP = I_n$.

Exercice 3

Exercice classique, que l'on retrouve aussi dans le cas des espaces euclidiens

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints positifs.
2. Montrer que $\text{Im} u = \text{Im}(u \circ u^*)$ et $\ker u = \ker(u^* \circ u)$.

Conclusion

Nous avons ainsi réussi à définir la notion de produit scalaire dans les \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie. En outre, bien que nous ayons perdu son caractère linéaire (ce qui peut parfois compliquer certaines preuves), nous avons pu établir des analogies avec le cas réel et retrouver, voire généraliser, des propriétés déjà connues. Mieux encore, nous avons réussi à exhiber des caractéristiques propres aux espaces hermitiens, que l'on ne peut pas obtenir dans les espaces euclidiens.