Exercices classiques

Ce document recense des exercices à savoir refaire, qui peuvent tomber aux écrits de concours. Les exercices sont donnés dans un ordre aléatoire.

Exercice 1 — *Intégrales de Wallis*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t.$$

1. Établir, pour $n \in \mathbf{N}$, une relation simple entre W_n et W_{n+2}.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de $W_n W_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

Exercice 2 — *Une caractérisation des matrices symétriques*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $S_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in \mathbf{R}^n$ non nul, on a ${}^tXSX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que, si $S \in S_n(\mathbf{R})$, alors
$$S \in S_n^{++}(\mathbf{R}) \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^*.$$
2. En déduire que, pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $S = {}^tRR$. Réciproquement, montrer que, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, ${}^tRR \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Exercice 3 — *Une caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soit E un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$. Établir l'équivalence des énoncés suivants

1. p est un projecteur orthogonal ;
2. $p \circ p = p$ et, pour tout $x \in E$, $\left\| p(x) \right\| \leq \|x\|$;
3. $p \circ p = p$ et, pour tous $x, y \in E$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.

Exercice 4 — *Compacité du groupe orthogonal*

Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 5 — *Conservation de la norme dans $O_n(\mathbf{R})$*

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $P, Q \in O_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\|PAQ\| = \|A\|$, où l'on définit $\|M\| = \mathrm{tr}\left({}^tMM\right)$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 6 — *Caractérisation de Borel-Lebesgue d'un compact*

Soit E un espace vectoriel et K un compact de E. On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x,\alpha) \subset \Omega_i$.

   Indication : Raisonner par l'absurde et construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.

2. Montrer qu'il existe $p > 0$ et $x_1, \cdots x_p \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k,\alpha)$.

   Indication : Raisonner par l'absurde et construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.

3. En déduire qu'il existe $i_1, \cdots, i_p \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Exercice 7 — *Adjoint d'un endomorphisme*

Soit E un espace euclidien. On considère l'application

$$\Phi : \ y \in E \mapsto \phi_y$$

où l'on définit $\phi_y : \ x \in E \mapsto (x|y)$, pour tout $y \in E$.

1. Montrer que Φ est bijective.
2. On fixe $y \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E, noté $u^*(y)$, tel que, pour tout $x \in E$,
$$(u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$
3. Montrer que l'application u^* ainsi définie est linéaire.
4. Montrer que $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont symétriques définis positifs.

Exercice 8 — *Preuve probabiliste du théorème de Weierstrass*

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in [0,1]$ et $f : \ [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On note $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$

1. Rappeler la loi de S_n. En déduire les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout $\alpha > 0$,
$$\sum_{\substack{0\le k\le n \\ |\frac{k}{n}-x|\ge\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\alpha^2}$$
3. Montrer que
$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$$
et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine.

Exercice 9 — *Norme subordonnée*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. On note S l'ensemble des éléments de E de norme 1, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\text{sub}} : \mathscr{L}(E) &\to \mathbf{R} \\ u &\mapsto \|u\|_{\text{sub}} = \max_{x \in S}\{\|u(x)\|\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{\text{sub}}$ est bien définie.
2. Montrer que $\|\cdot\|_{\text{sub}}$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que, pour tous $x, y \in E$ et $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \|u\|_{\text{sub}} \|x - y\|.$$

Exercice 10 — *Autour des endomorphismes nilpotents*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent.

1. Montrer que $u^n = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\left(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E. En déduire la matrice de u dans cette base.

Exercice 11 — *Caractérisation des endomorphismes nilpotents*

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents

1. u est nilpotent ;
2. 0 est l'unique valeur propre de u ;
3. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\operatorname{tr}(u^k) = 0$.

Exercice 12 — *Commutation et polynôme caractéristique*

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Indication : Commencer par montrer le résultat dans le cas où A est inversible.

Exercice 13 — *Autour de l'exponentielle matricielle*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On pose $\exp A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que $\exp A$ est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$.
3. Calculer $\det(\exp A)$ en fonction de $\operatorname{tr} A$. En déduire que $\exp$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
4. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp A = P(A)$.

Exercice 14 — *Théorème du point fixe (Picard)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et A une partie de E. Soit $f : A \to A$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in A, \ \left\|f(x) - f(y)\right\| \leq \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 15 — *Diagonalisation simultanée*

Soient E un espace euclidien de dimension n et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E, qui commutent deux à deux : $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous $i, j \in I$.

Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que, pour tout $i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ soit diagonale.
Indication : Montrer que, si u_i n'est pas une homothétie, alors ses sous-espaces propres sont de dimension $< n$. Dès lors, montrer que ces derniers sont stables par tous les u_j.

Exercice 16 — *Décomposition polaire*

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique positive, telle que ${}^tAA = H^2$.
2. En déduire que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, il existe $U \in O_n(\mathbf{R})$ et $H \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $A = UH$.
3. Montrer que, si A est inversible, alors le couple (U, H) est unique.

Exercice 17 — *Théorème de Carathéodory*

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et H une partie de E. On appelle enveloppe convexe de H et on note $\mathrm{Conv}(H)$ le plus petit sous-ensemble convexe de E, au sens de l'inclusion, contenant H.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{Conv}(H)$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$, $x_1, \cdots, x_{p+1} \in H$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1} \in \mathbf{R}^+$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k$.
2. On se propose de montrer que l'on peut prendre $p = n$. Pour cela, on considère $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k \in \mathrm{Conv}(H)$ avec $p \geq n+1$ (on dira que x est une combinaison convexe de $x_1, \cdots, x_{p+1}$).
   a. Montrer qu'il existe des réels $\mu_1, \cdots, \mu_p$ non tous nuls tels que
   $$\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k = 0 \text{ et } x = \sum_{k=1}^{p+1} \mu_k x_k = 0.$$
   b. En déduire que x peut s'écrire comme combinaison convexe de $p-1$ éléments de H.
   Indication : Considérer des coefficients de la forme $\lambda_i - t\mu_i$, où t est bien choisi.

Exercice 18 — *Polynômes de Lagrange*

Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe un unique polynôme L_i de degré au plus $n-1$ tel que, pour tout $1 \leq j \leq n$,
   $$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme L_f de degré au plus $n-1$ tel que, pour tout $1 \leq j \leq n$, $L_f(x_j) = f(x_j)$.

Exercice 19 — *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que
$$\forall t \in \mathbf{R},\ T_n(\cos t) = \cos(nt).$$
2. Donner T_0, T_1 et T_2.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_{n+2} + T_n = 2T_{n+1}$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Déterminer les racines de T_n et en déduire une forme factorisée de T_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 20 — *Fonction Gamma d'Euler*

On définit la fonction
$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Γ est définie et continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$. En déduire les dérivées successives de Γ.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice 21 — *Récupération des coefficients d'une série entière*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que, pour tous $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbf{N}$,
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t.$$

Exercice 22 — *Uniforme continuité des fonctions périodiques*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 23 — *Sous-groupes de $\mathbf{R}$*

Montrer que les sous-groupes de $\mathbf{R}$ sont ou bien denses dans $\mathbf{R}$, ou bien de la forme $a\mathbf{Z}$, avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 24 — *Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$*

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 25 — *Topologie dans les hyperplans*

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer que, si F est un sous-espace de E, alors $\overline{F}$ aussi.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 26 — *Union et intersection d'événements*

1. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements négligeables. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ sont des événements négligeables.
2. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements presque sûrs. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ sont des événements presque sûrs.

Exercice 27 *Inégalité arithmético-géométrique*

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$