Autour des matrices de Frobenius

Notations

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désignera le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$, et par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On pose I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note enfin $\mathbf{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$.

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ unitaire (i.e. $a_n = 1$), on associe sa matrice compagnon C_P, définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En notant $a = (a_0, \cdots, a_{n-1})$, on pose $C_a = C_P$. Dans tout le problème, on s'autorisera à confondre ces deux notations.
Pour tout endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$), on note respectivement χ_φ et π_φ (resp. χ_M et π_M) ses polynômes caractéristique et minimal. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note $M^\top$ sa transposée. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par φ, on note $\varphi_{|F}$ la restriction de φ à F. Enfin, si $\mathscr{B}$ est une base de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, on note $M_{\mathscr{B}}(\varphi)$ la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Pour $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathbf{K}[\varphi] = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbf{K}[X]\}$.

Un endomorphisme φ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{B} = \left\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)\right\}$ soit une base de E. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite cyclique si elle est la matrice d'un endomorphisme cyclique. On note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices cycliques.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in E \mid \forall y \in F,\ (x|y) = 0\}$.

On pose $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$. Pour $1 \leq i \leq n$, $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, on note e_i^* l'élément de E^* (on ne demande pas de le vérifier) défini par

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \in E,\ \ e_i^*(x) = x_i,$$

et on pose $\mathscr{B}^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$.

Pour tout $x \in E$, on note ϕ_x l'élément de E^* défini par

$$\forall y \in E,\ \phi_x(y) = (x|y),$$

et on pose

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E^* \\ x &\mapsto \phi_x \end{aligned}$$

Enfin, si A est un sous-espace vectoriel de E^*, on note A° l'ensemble $\{x \in E \mid \forall \phi \in A,\ \phi(x) = 0\}$.

On s'autorisera dans tout le problème la confusion entre matrice et endomorphisme (au sens où, par exemple, on pourra considérer un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{C}_n$).

I. Préliminaires

1. Montrer que Φ est un isomorphisme. En déduire la dimension de E^*.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension d.
   a. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.
   b. En déduire la dimension de $F^\perp$.
3. Soit A un sous-espace vectoriel de E^*, de dimension d.
   a. Montrer que $A^\circ = \left(\Phi^{-1}(A)\right)^\perp$.
   b. En déduire que la dimension de A° est $n-d$.
4. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E stables par φ. Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $P(\varphi)(E) = P(\varphi)(F) \oplus P(\varphi)(G)$.

II. Endomorphismes et matrices cycliques

Dans cette sous-partie, on considère $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

5. Montrer que, pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbf{K}[X]$, $\chi_{C_P} = P$.
6. a. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que, si $M_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est une matrice compagnon, alors φ est cyclique.
   b. On suppose que φ est cyclique et on considère $x \in \mathbf{E}$ tel que $\mathscr{B} = \left\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)\right\}$ soit une base de E.
      i. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $M_{\mathscr{B}}(\varphi) = C_P$.
      ii. En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice compagnon.
7. Pour tout $x \in E$, on note $I_{\varphi,x} = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(\varphi)(x) = 0\}$.
   a. Montrer que, pour tout $x \in E$, $I_{\varphi,x}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$.
   b. En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $\pi_{\varphi,x} \in \mathbf{K}[X]$ unitaire tel que $I_{\varphi,x} = \{\pi_{\varphi,x} \cdot P \mid P \in \mathbf{K}[X]\}$.
   c. On veut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_\varphi = \pi_{\varphi,x}$.
      i. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\pi_\varphi \in I_{\varphi,x}$ et en déduire que $\pi_{\varphi,x} | \pi_\varphi$.
      ii. Montrer qu'il existe $x_1, \cdots, x_k \in E$ tels que $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left(\pi_{\varphi,x_i}(\varphi)\right)$.
      iii. Montrer qu'il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $E = \operatorname{Ker}\left(\pi_{\varphi,x_i}(\varphi)\right)$. En déduire que $\pi_\varphi | \pi_{\varphi,x_i}$.
      iv. Conclure.
8. On se propose de montrer que φ est cyclique si, et seulement si, $\chi_\varphi = \pi_\varphi$.
   a. Montrer que, si φ est cyclique, alors π_φ est de degré n. En déduire que $\chi_\varphi = \pi_\varphi$.
   b. On suppose que $\chi_\varphi = \pi_\varphi$.
      i. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que tout polynôme $P \in I_{\varphi,x}$ non nul soit de degré supérieur ou égal à n.
      ii. Montrer que $\mathscr{B} = \left\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)\right\}$ est une base de E. Conclure.
   c. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Déterminer π_{C_P}.

III. Théorème de décomposition de Frobenius

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer le théorème suivant :

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_r$ de E, tous stables par φ, tels que

- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$
- Pour tout $1 \leq i \leq r$, $\varphi_i = \varphi_{|E_i}$ est un endomorphisme cyclique
- Pour tout $1 \leq i \leq r-1$, $\pi_{i+1} = \pi_{\varphi_i} | \pi_i$.

La suite des π_i est alors définie de manière unique. En particulier, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} C_{\chi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{\chi_r} \end{pmatrix}.$$

On considère donc $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et on note d le degré de π_φ.

9. Soit $y \in E$. On note $E_y = \{P(\varphi)(y) \mid P \in \mathbf{K}[X]\}$. Montrer que E_y est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par φ et contenant y.
10. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que E_y soit de dimension d, et que $\{y, \varphi(y), \cdots, \varphi^{d-1}(y)\}$ est une base de E_y. On note alors $e_i = \varphi^{i-1}(y)$ pour tout $1 \leq i \leq d$.
11. On note $F = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbf{N},\ e_d^*\left(\varphi^k(x)\right) = 0\}$.
   a. Montrer que F est stable par φ.
   b. Montrer que $E_y \cap F = \{0\}$.
   c. On veut montrer que $\dim F = n - d$. Pour cela, on considère l'opérateur
   $$T_\varphi : \mathbf{K}[\varphi] \to E^*\ ,\ g \mapsto e_d^* \circ g.$$
      i. Montrer que T_φ est injectif. En déduire le rang de T_φ.
      ii. Montrer que $(\operatorname{Im} T)^\circ = F$.
      iii. Conclure.
   d. En déduire que $E = E_y \oplus F$.
12. Posons $\pi_1 = \pi_{\varphi_{|E_y}}$ et $\pi_2 = \pi_{\varphi_{|F}}$.
   a. Justifier que l'on peut ainsi définir ces deux polynômes.
   b. Montrer que $\pi_1 = \pi_\varphi$.
   c. En déduire que $\pi_2 | \pi_1$.
13. Démontrer l'existence de sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_r$ de E satisfaisant aux conditions du théorème.
14. Soit $F_1, \cdots, F_r$ et $G_1, \cdots, G_s$ des sous-espaces vectoriels non triviaux de E, tous stables par φ, satisfaisant aux conditions du théorème. On note $\pi_i = \pi_{\varphi_{|F_i}}$ et $\psi_j = \pi_{\varphi_{|G_j}}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$. On veut montrer que $r = s$ et que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $\pi_i = \psi_i$.
   a. Justifier que $\pi_1 = \psi_1$.
   b. On raisonne par l'absurde et on note $j \geq 2$ le plus petit entier tel que $\pi_j \neq \psi_j$.
      i. Montrer que
      $$\pi_j(\varphi)(E) = \pi_j(\varphi)(G_1) \oplus \cdots \oplus \pi_j(\varphi)(G_s).$$
      ii. Montrer que
      $$\pi_j(\varphi)(E) = \pi_j(\varphi)(F_1) \oplus \cdots \oplus \pi_j(\varphi)(F_{j-1}).$$
      iii. Montrer que, pour tout $1 \leq i < j$, $\dim \pi_j(\varphi)(F_i) = \dim \pi_j(\varphi)(G_i)$.
      On pourra commencer par montrer que $\varphi_{|F_i}$ et $\varphi_{|G_i}$ sont semblables, pour tout $1 \leq i < j$.
      iv. En déduire que $\dim \pi_j(\varphi)(G_i) = 0$, pour $j \leq i \leq s$, puis que $\psi_j | \pi_j$.
      v. Aboutir à une contradiction.
   c. Conclure.

IV. Quelques propriétés topologiques

Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désignera le corps $\mathbf{C}$.
On munit E de la norme $\|\cdot\|$ induite par le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et $\mathscr{L}(E)$ (ou, de même, $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$) d'une norme $N(\cdot)$.

15. Montrer que $\mathscr{C}_n$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

 Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on pourra considérer l'application continue $\varphi_x : M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \det\left(x, Mx, \cdots, M^{n-1}x\right)$, où x sera judicieusement choisi en fonction de A.

16. a. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

 On pourra relier les matrices triangulaires supérieures à I_n dans un premier temps.

 b. En déduire que $\mathscr{C}_n$ est connexe par arcs.

17. a. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que M est semblable à une matrice compagnon.

 b. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ possédant n valeurs propres distinctes est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

 c. En déduire que $\mathscr{C}_n$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

18. Montrer que l'application $\varphi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \pi_A$ n'est pas continue.

 On pourra raisonner par l'absurde et utiliser, après l'avoir montrée, la continuité de $\psi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \chi_A$.

V. Propriétés spectrales

Dans cette partie, on fixe $P \in \mathbf{K}[X]$.

19. Montrer que les sous-espaces propres de C_P sont de dimension 1.

20. On suppose que P est scindé à racines simples, et on note λ une racine de P.

 a. Montrer que λ est une valeur propre de $C_P{}^\top$.

 b. Déterminer un vecteur propre e_λ de $C_P{}^\top$ associé à λ.

 c. En déduire qu'il existe $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $C_P{}^\top = GDG^{-1}$, où $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonale et $G^\top$ est une matrice de Vandermonde à expliciter.

21. On suppose que P admet au moins une racine double. Montrer que C_P n'est pas diagonalisable.

FIN DU SUJET

Ce sujet est inspiré d'un cours sur la décomposition de Frobenius, disponible à l'adresse suivante : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/pdf/vfcomp.pdf