Autour des matrices de Frobenius – Corrigé

I. Préliminaires

1. - Φ est linéaire par linéarité du produit scalaire.
   - Soit $x \in E$ tel que $\phi_x = 0$. Alors $\phi_x(x) = (x|x) = 0$, donc $x = 0$. Donc Φ est injective.
   - Soit $\phi \in E^*$. Comme $\mathrm{Ker}\phi$ est de dimension $n-1$, on peut choisir $x' \in E$ tel que $E = \mathrm{Ker}\phi \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(x')$. Posons alors $x = \frac{\phi(x')}{(x'|x')}$. Pour tout $y = a + \lambda x \in E$, on a alors

$$\phi_x(y) = (x|y) = \lambda \frac{\phi(x')^2}{(x'|x')} = \phi(\lambda x) = \phi(y).$$

   Ainsi,

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme, et } \dim E^* = n.}$$

2. a. - Si $x \in F \cap F\perp$, alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0$.
      - Soit $x \in E$. Considérons l'application $\phi_{x|F} \in F^*$. La question **1.** donne l'existence de $y \in F$ tel que $\phi_{x|F} = \phi_{y|F}$. Dès lors, $\phi_{x|F} - \phi_{y|F} = \phi_{x-y|F} = 0$, donc $x - y \in F^\perp$, et $x = y + (x - y)$.

   Ainsi,

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp.}$$

   b. Le théorème du rang donne donc

$$\boxed{\dim F^\perp = n - d.}$$

3. a. Soit $x \in E$. On a

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow \forall \phi \in A,\ \phi(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \Phi^{-1}(A),\ \phi_y(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\Phi^{-1}(A)\right)^\perp.$$

   Donc

$$\boxed{A^\circ = \left(\Phi^{-1}(A)\right)^\perp.}$$

   b. Les questions **1.** et **2.b.** donnent successivement $\dim \Phi^{-1}(A) = \dim A = d$ puis $\dim \left(\Phi^{-1}(A)\right)^\perp = n - d$. Ainsi,

$$\boxed{\dim A^\circ = n - d.}$$

4. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.
   - Pour tout $x = x_F + x_G \in E$, $P(\varphi)(x) = P(\varphi)(x_F) + P(\varphi)(x_G) \in P(\varphi)(F) + P(\varphi)(G)$.
   - La stabilité de F et G par φ donne $\dim P(\varphi)(F) \le \dim F$ et $\dim P(\varphi)(G) \le \dim G$. Dès lors,

$$n = \dim(P(\varphi)(F) + P(\varphi)(G)) \le \dim P(\varphi)(F) + \dim P(\varphi)(G) \le \dim F + \dim G = n.$$

     Dès lors, la formule de Grassmann donne $\dim(F \cap G) = 0$, donc $F \cap G = 0$.

   En définitive,

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{K}[X],\ P(\varphi)(E) = P(\varphi)(F) \oplus P(\varphi)(G).}$$

II. Endomorphismes et matrices cycliques

5. Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ unitaire, en développant $\chi_{C_P} = \det(XI_n - C_P)$ selon sa dernière colonne, on obtient aisément

$$\boxed{\chi_{C_P} = P.}$$

6. a. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $M_{\mathscr{B}}(\varphi) = C_P$. En notant $e_1, \cdots, e_n$ les éléments de $\mathscr{B}$ dans l'ordre, on obtient $e_{i+1} = \varphi(e_i)$ pour tout $1 \leq i < n$. Ainsi

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$$

b. i. Comme $\phi^n(x) \in E$, on peut noter $\phi^n(x) = -a_0 x - \cdots - a_{n-1}\phi^{n-1}(x)$. En posant $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on a donc $M_{\mathscr{B}}(\varphi) = C_P$. Donc

$$\boxed{\text{il existe } P \in \mathbf{K}[X] \text{ tel que } M_{\mathscr{B}}(\varphi) = C_P.}$$

ii. Toute matrice cyclique est de la forme $M_{\mathscr{B}'}(\varphi')$, où φ' est un endomorphisme cyclique de E. En choisissant $\mathscr{B}$ une base comme celle donnée en énoncé et en posant Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, on a $M_{\mathscr{B}}(\varphi') = Q M_{\mathscr{B}'}(\varphi') Q^{-1}$, et la question **i.** permet de conclure :

$$\boxed{\text{toute matrice cyclique est semblable à une matrice compagnon.}}$$

7. a. Soit $x \in E$.
- $I_{\varphi,x}$ est clairement un sous-groupe additif de $\mathbf{K}[X]$.
- Si $P \in I_{\varphi,x}$, $Q \in \mathbf{K}[X]$, alors $QP(\varphi)(x) = Q(\varphi) \circ P(\varphi)(x) = 0$, donc $QP \in I_{\varphi,x}$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ I_{\varphi,x} \text{ est un idéal de } \mathbf{K}[X].}$$

b. Considérons un élément P de $I_{\varphi,x}$ de degré minimal, et $Q \in I_{\varphi,x}$. En notant $Q = PR + S$ la division euclidienne de Q par P, on a $S \in I_{\varphi,x}$ donc $S = 0$. Dès lors, $I_{\varphi,x} = P \cdot \mathbf{K}[X]$, d'une part, et tous les éléments de $I_{\varphi,x}$ de degré minimal sont égaux à une constante multiplicative près, d'autre part. Ainsi,

$$\boxed{\text{il existe un unique } \pi_{\varphi,x} \in \mathbf{K}[X] \text{ unitaire tel que } I_{\varphi,x} = \pi_{\varphi,x} \cdot \mathbf{K}[X].}$$

c. i. Comme $\pi_\varphi(\varphi) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il vient, à l'aide de la question **b.**,

$$\boxed{\pi_\varphi \in I_{\varphi,x} \text{ et } \pi_{\varphi,x} | \pi_\varphi.}$$

ii. Les $\pi_{\varphi,x}$ étant tous des diviseurs unitaires de π_φ, il sont en nombre fini. Notons-les $\pi_{\varphi,x_1}, \cdots, \pi_{\varphi,x_k}$. Comme, de plus, tout $x \in E$ est dans $\operatorname{Ker}\left(\pi_{\varphi,x}(\varphi)\right)$, il vient

$$\boxed{E = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left(\pi_{\varphi,x_i}(\varphi)\right).}$$

iii. Notons $F_i = \operatorname{Ker}\left(\pi_{\varphi,x_i}(\varphi)\right)$, pour tout $1 \leq i \leq k$. Alors
- ou bien $F_1 = E$.
- ou bien $F_1 \neq E$, et on peut choisir $x \in E \setminus F_1 = F_2 \cup \cdots \cup F_k$. Soit alors $y \in F_1$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, $y - ix \in F_2 \cup \cdots \cup F_k$, car sinon, $x = \frac{1}{i}(y - (y - ix)) \in F_1$. Le principe des tiroirs assure l'existence de $i_1 \neq i_2$ et $2 \leq j \leq k$ tels que $y - i_1 x, y - i_2 x \in F_j$. Dès lors,

$$y = \frac{1}{i_2 - i_1}(i_2(y - i_1 x) - i_1(y - i_2 x)) \in F_j \subset F_2 \cup \cdots \cup F_k.$$

Ainsi, $F_1 \subset F_2 \cup \cdots \cup F_k$ et $E = F_2 \cup \cdots \cup F_k$. On réitère le procédé, et on montre ainsi qu'

$$\boxed{\text{il existe } 1 \leq i \leq k \text{ tel que } E = F_i.}$$

En particulier, π_{φ,x_i} est un polynôme annulateur de φ, donc

$$\boxed{\pi_\varphi | \pi_{\varphi,x_i}.}$$

iv. Les questions **i.** et **iii.** donnent $\pi_{\varphi,x_i} | \pi_\varphi$ et $\pi_\varphi | \pi_{\varphi,x_i}$. Comme π_φ π_{φ,x_i} sont tous deux unitaires, on a

$$\boxed{\pi_\varphi = \pi_{\varphi,x_i}.}$$

8. a. Choisissons $x \in E$ tel que $\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)\}$ soit une base de E. Alors la liberté de cette famille montre que l'unique $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(\varphi)(x) = 0$ est le polynôme nul. Ainsi, π_φ est de degré au moins n. Comme, de plus, $\pi_\varphi | \chi_\varphi$, et que ces deux polynômes sont unitaires,

$$\boxed{\pi_\varphi \text{ est de degré } n \text{ et } \pi_\varphi = \chi_\varphi.}$$

b. i. La question **7.** donne $x \in E$ tel que $\pi_\varphi = \pi_{\varphi,x}$. De plus, $\pi_\varphi = \chi_\varphi$ est de degré n et divise en particulier tout élément non nul de $I_{\varphi,x}$, qui est donc de degré au moins n. Ainsi,

$$\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que tout élément non nul de } I_{\varphi,x} \text{ soit de degré au moins } n.}$$

ii. Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est de degré au plus $n-1$ et si $P(\varphi)(x) = 0$, alors, d'après la question **i.**, P est le polynôme nul. Autrement dit, $\mathscr{B}$ est une famille libre. Comme elle possède n éléments,

$$\boxed{\mathscr{B} = \left\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)\right\} \text{ est une base de } E \text{, et } \varphi \text{ est } \textit{a fortiori} \text{ cyclique.}}$$

c. C_P étant une matrice compagnon, on a $\pi_{C_P} = \chi_{C_P}$. La question **5.** donne donc

$$\boxed{\pi_{C_P} = P.}$$

III. Théorème de décomposition de Frobenius

9.
- E_y est clairement un sous-espace vectoriel de E.
- Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $\varphi \circ P(\varphi)(y) = (XP)(\varphi)(y)$, donc E_y est stable par φ.
- Pour $P = 1$, on a $P(\varphi) = \mathrm{id}_E$, donc $y \in E_y$.
- Tout sous-espace vectoriel de E stable par φ et contenant y contient *a fortiori* tous les $\varphi^k(y)$, et donc, par linéarité, contient E_y.

Ainsi,

$$\boxed{E_y \text{ est le plus petit sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } \varphi \text{ et contenant } y.}$$

10. La question **7.** donne $y \in E$ tel que $\pi_\varphi = \pi_{\varphi,y}$. Comme $\pi_\varphi(\varphi)(y) = 0$, la famille $\left\{y, \varphi(y), \cdots, \varphi^d(y)\right\}$ est liée, donc E_y est de dimension au plus d. De plus, la famille $\left\{y, \varphi(y), \cdots, \varphi^{d-1}(y)\right\}$ ne saurait être liée, car sinon il existerait $P \in I_{\varphi,y}$, non nul et de degré au plus $d-1$, tel que $P(\varphi)(y) = 0$, ce qui contredirait la définition de $\pi_{\varphi,y}$. Dès lors,

$$\boxed{E_y \text{ est de dimension } d \text{ et } \left\{y, \varphi(y), \cdots, \varphi^{d-1}(y)\right\} \text{ en est une base.}}$$

11. a. Pour tout $x \in F$, $k \in \mathbf{N}$, $e_d^*(\varphi^k(\varphi(x)) = e_d^*(\varphi^{k+1}(x)) = 0$, donc

$$\boxed{F \text{ est stable par } \varphi.}$$

b. Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \in E_y \cap F$. Par définition des, e_k, pour tout $0 \leq k < d$, $e_d^*(\varphi^k(x)) = x_{d-k} = 0$, donc $x = 0$. Ainsi,

$$\boxed{E_y \cap F = \{0\}.}$$

c. i. Soit $g = g_0 \mathrm{id}_E + \cdots + g_p \varphi^p \in \mathbf{K}[\varphi]$ tel que $T_\varphi(g) = 0$. Comme $\pi_\varphi(\varphi) = 0$, on peut supposer que $p < d$ (ce qui permet de montrer, au passage, en utilisant la définition du polynôme minimal comme polynôme annulateur de plus petit degré, que $\mathbf{K}[\varphi]$ est de dimension d). En évaluant en y, on obtient $e_d^*(g_0 e_1 + \cdots + g_p e_{p+1}) = 0$, donc $g_0 e_1 + \cdots + g_p e_{p+1} \in E_y \cap F = \{0\}$. Donc $g_0 e_1 + \cdots + g_p e_{p+1} = 0$, et par liberté de $\{e_1, \cdots, e_{p+1}\}$, $g_0 = \cdots = g_p = 0$. D'où $g = 0$. Finalement, on obtient, grâce au théorème du rang, que

$$\boxed{T_\varphi \text{ est injectif et donc de rang } d.}$$

ii. Soit $x \in E$.
- Si $x \in \left(\mathrm{Im}\, T_\varphi\right)^\circ$, alors, pour tout $g \in \mathbf{K}[\varphi]$, $e_d^* \circ g(x) = 0$. En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $e_d^* \circ \varphi^k(x) = 0$, donc $x \in F$.
- Si $x \in F$, alors, par linéarité de φ, pour tout $g \in \mathbf{K}[\varphi]$, $e_d^* \circ g(x) = 0$, donc $x \in \left(\mathrm{Im}\, T_\varphi\right)^\circ$.

Par double inclusion, on a donc

$$\boxed{\left(\mathrm{Im}\,T_\varphi\right)^\circ = F.}$$

iii. Les questions **i.** et **3.b.** donnent $\dim\left(\mathrm{Im}\,T_\varphi\right)^\circ = n-d$. Autrement dit,

$$\boxed{\dim F = n-d.}$$

d. Les questions **b.** d'une part puis **10.** et **c.** d'autre part donnent, en définitive,

$$\boxed{E = E_y \oplus F.}$$

12. a. Les questions **9.** et **11.a.** montrent que E_y et F sont stables par φ, donc que $\varphi_{|E_y}$ et $\varphi_{|F}$ sont bien définis. Ainsi,

$$\boxed{\pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ sont bien définis.}}$$

b. D'abord, $\pi_1 \in I_{\varphi,y}$, donc $\pi_\varphi = \pi_{\varphi,y}|\pi_1$. De plus, $\varphi_{|E_y}$ est cyclique par construction, donc, d'après la question **8.b.**, π_1 est de degré d. Comme π_1 et π_φ sont tous deux unitaires et de même degré, il vient

$$\boxed{\pi_1 = \pi_\varphi.}$$

c. Comme F est stable par φ, $\pi_\varphi\left(\varphi_{|F}\right) = 0$, donc $\pi_{\varphi_{|F}}|\pi_\varphi$. En d'autres termes,

$$\boxed{\pi_2|\pi_1.}$$

13. On raisonne par récurrence sur n.
- L'initialisation est immédiate.
- Supposons le résultat vrai pour tout $k<n$. Les questions **11.** et **12.** donnent $E = E_1 \oplus F$, avec $E_1 = E_y$, $\pi_2|\pi_1$ et π_1 un endomorphisme cyclique. L'hypothèse de récurrence appliquée à F et $\varphi_{|F}$ donnent $E_2,\cdots,E_r$ des sous-espaces vectoriels de F, stables par φ, tels que $F = E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$ et $\pi_{i+1}|\pi_i$ pour $2 \le i < r$, avec π_i un endomorphisme cyclique. Dès lors, $E_1,\cdots,E_r$ vérifient les conditions de l'énoncé.

Ainsi,

$$\boxed{\text{il existe des sous-espaces vectoriels } E_1,\cdots,E_r \text{ de } E \text{ qui satisfont aux conditions de l'énoncé.}}$$

14. a. La question **12.b.** donne $\pi_1 = \psi_1 = \pi_\varphi$, donc

$$\boxed{\pi_1 = \psi_1.}$$

b. i. Les G_i étant tous stables par φ, la question **4.** donne

$$\boxed{\pi_j(\varphi)(E) = \pi_j(\varphi)(G_1) \oplus \cdots \oplus \pi_j(\varphi)(G_s).}$$

ii. Les F_i étant tous stables par φ, la question **4.** donne

$$\pi_j(\varphi)(E) = \pi_j(\varphi)(F_1) \oplus \cdots \oplus \pi_j(\varphi)(F_r).$$

Comme, de plus, pour $j \le i \le r$, $\pi_i|\pi_j$, $\pi_j(\varphi)(F_i) = \{0\}$. Donc

$$\boxed{\pi_j(\varphi)(E) = \pi_j(\varphi)(F_1) \oplus \cdots \oplus \pi_j(\varphi)(F_{j-1}).}$$

iii. Soit $1 \le i < j$. Par construction, $\varphi_{|F_i}$ et $\varphi_{|G_i}$ sont cycliques. La question **6.b.** montre que $M_{\mathscr{B}}(\varphi_{|F_i})$ (resp. $M_{\mathscr{B}}(\varphi_{|G_i})$) est semblable à C_{π_i} (resp. C_{ψ_i}). Comme $\pi_i = \psi_i$, $\varphi_{|F_i}$ et $\varphi_{|G_i}$ sont semblables. Donc, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $P(\varphi_{|F_i})$ et $P(\varphi_{|G_i})$ sont semblables, donc $\dim P(\varphi)(F_i) = \dim P(\varphi)(G_i)$. En particulier, cela montre que

$$\boxed{\forall 1 \le i < j,\ \dim \pi_j(\varphi)(F_i) = \dim \pi_j(\varphi)(G_i).}$$

iv. Les questions **i.** à **iii.** donnent $\dim \pi_j(\varphi)(G_j)+\cdots+\dim \pi_j(\varphi)(G_s)=0$, d'où

$$\boxed{\forall j\le i\le s,\ \dim \pi_j(\varphi)(G_i)=0.}$$

En particulier, π_j est un polynôme annulateur de $\varphi_{|G_j}$, donc

$$\boxed{\psi_j|\pi_j.}$$

v. En échangeant les rôles des F_i et des G_i, on a $\pi_j|\psi_j$. Ces deux polynômes étant, de plus, unitaires, ils sont égaux,

$$\boxed{\text{d'où une contradiction.}}$$

c. Quitte à ajouter le sous-espace vectoriel nul, on peut supposer que $r=s$. La question **b.** montre alors que

$$\boxed{\forall 1\le i\le r,\ \pi_i=\psi_i.}$$

IV. Quelques propriétés topologiques

15. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $x\in E$ tel que $\mathscr{B}=\left\{x,Ax,\cdots,A^{n-1}x\right\}$ soit une base de E. Considérons l'application

$$\varphi_x:\ M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})\mapsto \det_{\mathscr{B}}\left(x,Mx,\cdots,M^{n-1}x\right).$$

Par continuité de φ_x en A, et comme $\varphi_x(A)\neq 0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $M\in B(A,\delta)$, $\varphi_x(M)\neq 0$. Pour ces mêmes M, $\left\{x,Mx,\cdots,M^{n-1}x\right\}$ est donc une base de E, ce qui montre que $B(A,\delta)\subset\mathscr{C}_n$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbf{C}).}$$

16. a. Soit $A=(a_{i,j})\in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Notons $a_{i,i}=\rho_i e^{i\theta_i}$ pour $1\le i\le n$. Quitte à trigonaliser A, sans perte de généralité, on peut la supposer triangulaire supérieure. Pour $t\in[0,1]$, posons

$$m_{i,j}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } i>j\\ ta_{i,j} & \text{si } i<j\\ \rho_i^t e^{it\theta_i} & \text{si } i=j\end{cases}$$

et définissons $M:\ t\in[0,1]\mapsto M(t)=(m_{i,j}(t))$. M est continue car polynomiale en les $a_{i,j}$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, par construction. Enfin, $M(0)=I_n$ et $M(1)=A$. En définitive,

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \text{ est connexe par arcs.}}$$

b. La question **6.** montre que, pour tout $A\in\mathscr{C}_n$, il existe un unique $a_A\in\mathbf{C}^n$ et $P_A\in \mathrm{GL}_n(/C)$ tels que $A=P_A C_{a_A} {P_A}^{-1}$. On définit ainsi une application $\psi:\ (P,a)\in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\times\mathbf{C}^n\mapsto PC_aP^{-1}$. ψ est clairement continue, d'image $\mathscr{C}_n$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\times\mathbf{C}^n$ est connexe par arc comme produit d'ensembles connexes par arcs,

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est connexe par arcs.}}$$

17. a. Comme M possède n valeurs propres distinctes, on a $\pi_M=\chi_M$. Dès lors, les questions **8.b.** puis **6.b.** montrent que M est cyclique donc semblable à une matrice compagnon. Ainsi,

$$\boxed{M \text{ est semblable à une matrice compagnon.}}$$

b. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, que l'on peut supposer triangulaire supérieure sans perte de généralité. Notons $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ ses valeurs propres, éventuellement égales. Choisissons $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\mathbf{R}$ tels que, pour tout $t\in[0,1]$, $k\neq l$, $\lambda_k e^{it\theta_k}\neq\lambda_l e^{it\theta_l}$, et notons A_n la matrice triangulaire supérieure, de coefficients identiques à A, mis à part les coefficients diagonaux valant $\lambda_k e^{i\frac{\theta_k}{n}}$, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. Les A_n forment alors une suite de matrices de valeurs propres deux à deux distinctes, convergeant vers A. Ainsi,

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \text{ possédant } n \text{ valeurs propres distinctes est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{C}).}$$

c. Notons $\mathscr{D}_n$ 'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ possédant n valeurs propres distinctes. On a les inclusions $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{C}_n \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Comme $\mathscr{D}_n$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{C}).}$$

18. Considérons l'application $\psi : A \mapsto \chi_A$. ψ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ car polynomiale. Dès lors, si φ est continue, alors $\varphi - \psi$ aussi. D'après la question **8.** $\mathscr{C}_n = (\varphi - \psi)^{-1}(\{0\})$ donc est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Comme il est, de plus, ouvert d'après la question **15.** et non vide, il est égal à $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, ce qui est absurde pour $n \geq 2$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas continue sur } \mathscr{M}_n(\mathbf{C}).}$$

V. Propriétés spectrales

19. Pour toute valeur propre λ de C_P, les $n-1$ premières colonnes de $C_P - \lambda I_n$ étant échelonnées, celle-ci est de rang au moins $n-1$. Donc $\operatorname{Ker}(C_P - \lambda I_n)$ est de dimension au plus 1, donc exactement 1 par définition d'un sous-espace propre. Ainsi,

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres de } C_P \text{ sont de dimension 1.}}$$

20. a. P étant scindé à racines simples, C_P est diagonalisable. Dès lors C_P et $C_P{}^\top$ sont semblables, donc admettent les mêmes valeurs propres. Ainsi,

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } C_P{}^\top.}$$

b. Étant donné que $P(\lambda) = 0$, on vérifie que

$$\boxed{e_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } C_P{}^\top \text{ associé à } \lambda.}$$

c. En notant G la matrice par colonnes $\left(e_{\lambda_1}|\cdots|e_{\lambda_n}\right)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de C_P, on a

$$G^\top = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{C_P{}^\top = GDG^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } G^\top \text{ est une matrice de Vandermonde.}}$$

21. Soit λ une racine de multiplicité $\alpha > 1$ de P, égal à π_{C_P} d'après la question **8.c.**. La question **19.** donne $\dim \operatorname{Ker}(C_P - \lambda I_n) = 1 < \alpha$, donc

$$\boxed{C_P \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

FIN DU CORRIGÉ