第2章 信息的表示和处理II：浮点数

教师：郑贵滨
计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

主要内容

- 二进制小数
- IEEE 浮点数标准: IEEE 754
- 舍入模式
- 浮点数运算
- C语言的浮点数

推荐阅读:Ch2.4

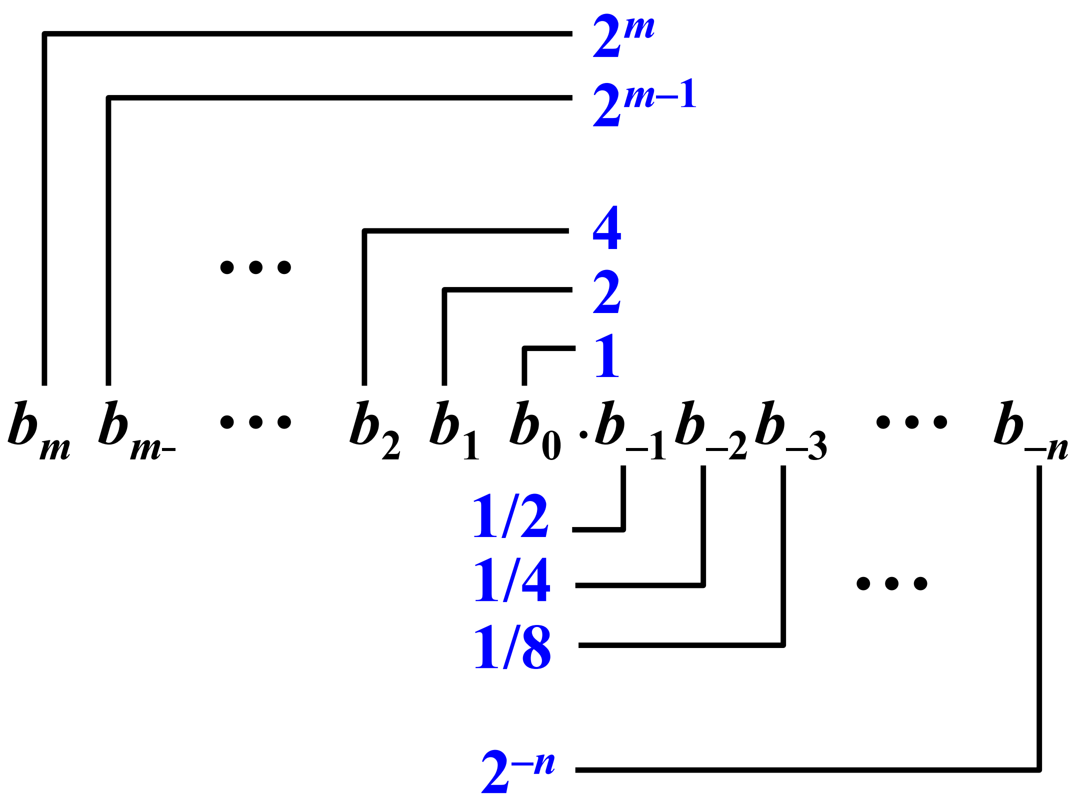
有理数编码

- **浮点表示很有用**
  - 对形如 $V = x \times 2^y$ 的有理数进行编码
  - 非常大的数($|V| \gg 0$)或非常接近0的数($|V| \ll 1$)
  - 实数的近似值

- **从程序员角度看**
  - 无趣
  - 晦涩难懂

二进制小数

- "小数点" 右边的位代表小数部分



- 表示的有理数: $\sum_{i=-n}^{m} b_i \times 2^i$

二进制小数: 例子

数值	二进制小数
5 3/4	101.11_2
2 7/8	10.111_2
1 7/16	1.0111_2
- **观察**
  - 除以2 ➔右移 (无符号数)
  - 乘以2 ➔左移
  - $0.111111\ldots_2$
    - $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^i + \ldots \rightarrow 1.0$
    - 是最接近1.0的小数
    - 表示为$1.0 - \varepsilon$

二进制数的问题

- **局限性 1——近似表示**
  - 只能精确表示形如 $x/2^k$ 的数值
  - 其他有理数的二进制表示存在重复段
    - 数值 二进制表示
      - 1/3 0.0101010101[01]…$_2$
      - 1/5 0.001100110011[0011]…$_2$
      - 1/10 0.0001100110011[0011]…$_2$

二进制数的问题

- 在计算机内的实现问题
  - 长度有限的 w位
  - 只能在*w*位内设置一个二进制小数点
  - 限制了数的范围(非常小？ 非常大?)

- **定点数**
  - 小数点隐含在*w*位编码的某一个固定位置上
    - 例如MSB做符号位，隐含后面是小数点，表示小于1.0的纯小数
    - 123.456怎么办？？？

浮点数

- 二进制小数
- **IEEE 浮点数标准: IEEE 754**
- 浮点数示例与性质
- 舍入、加法与乘法
- C语言的浮点数
- 小结

IEEE 浮点数

- **IEEE 标准 754**
  - William Kahan 从1976年开始为Intel 设计(1989获图灵奖)
  - 1985年成为浮点运算的统一标准，快速, 易于实现、精度损失小
  - 优雅、易理解
  - 所有主流的CPU都支持
  - 之前有很多不同格式、不太关注精确性

浮点数的表示

- **表示有理数的形式:**

$$(-1)^s M\ 2^E$$

  - 符号(sign)*s*，决定数的符号，是正数(s=0)或负数(s=1)
  - 尾数(Significand) *M*，**二进制小数，数值范围: [1.0,2.0)**
  - 阶码(Exponent) *E*，用2^E将数值加权

- **浮点数编码**
  - 最高有效位(MSB)s，作为符号位*s*
  - exp 字段 编码*E* (和E不一定相等)
  - frac 字段编码尾数 *M* (和M不一定相等)

s	exp	frac

精度选项

- **单精度: 32 bits**

s	exp	frac
1	8-bits	23-bits

- **双精度: 64 bits**

s	exp	frac
1	11-bits	52-bits

- **扩展精度: 80 bits (Intel)**

s	exp	frac
1	15-bits	63 or 64-bits

浮点数的表示

- 单精度浮点数值的分类

1. 规格化的

s	≠0 && ≠255	f

2. 非规格化的

s	0000 0000	f

3a. 无穷大

s	1111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000

3b. NaN(Not a Number)

s	1111 1111	≠0

规格化数

$v = (-1)^s \, M \, 2^E$

- **条件: exp ≠ 000…0 且 exp ≠ 111…1**
- **阶码(Exponent) 采用偏置值编码: *E* = *Exp* – *Bias***
  - *Exp*: exp 字段的无符号数值
  - 偏置*Bias* = $2^{k-1} - 1$, *k* 为阶码的位数
    - 单精度: 127 (Exp: 1…254, E: -126…127)
    - 双精度: 1023 (Exp: 1…2046, E: -1022…1023)
- **尾数(Significand) 编码隐含先导数值1: *M* = $1.xxx…x_2$**
  - **xxx…x: 是 frac字段的数码**
  - frac=000…0 (M = 1.0)时，为最小值
  - frac=111…1 (M = 2.0 – ε)时，为最大值
  - 额外增加了一位的精度（隐含值1）

规格化编码示例

$v = (-1)^s M\, 2^E$

$E = Exp - Bias$

- 数值: `float F = 15213.0`
  - $15213_{10} = 11101101101101_2 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$
- 尾数(Significand)

$M = 1.\underline{1101101101101}_2$

$frac = \underline{1101101101101}0000000000_2$

- 阶码(Exponent)

$E = 13$

$Bias = 127$

$Exp = 140 = 10001100_2$

- 编码结果:

s	exp	frac
0	10001100	11011011011010000000000

非规格化数

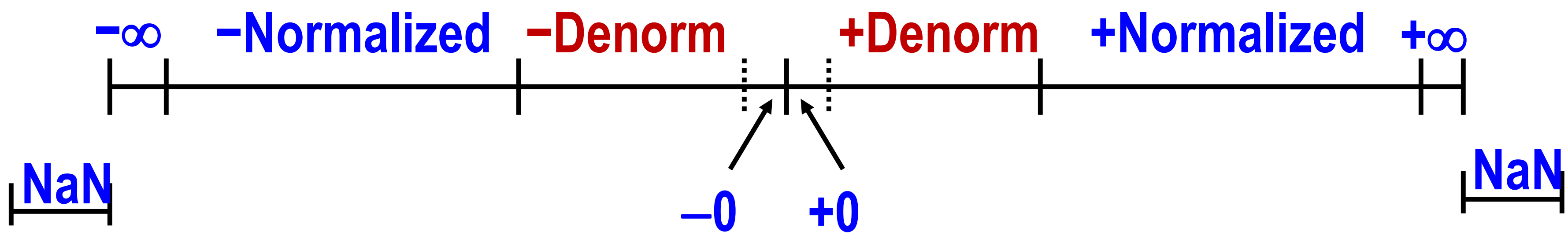
$v = (-1)^s M\ 2^E$
$E = 1 - Bias$

- **条件: exp = 000…0**
  - 阶码(Exponent) 值: $E = 1 - \text{Bias}$ (不是 $E = 0 - Bias$ ！)
  - 尾数(Significand)编码隐含先导数值0: $M = 0.\text{xxx}\ldots\text{x}_2$
    - xxx…x:是 **frac**字段的数码
- **情况1： `exp` = 000…0, `frac` = 000…0**
  - 表示值0
  - 注意有不同的数值 +0 和 –0 (why?)
- **情况2： `exp` = 000…0, `frac` ≠ 000…0**
  - 最接近0.0的那些数
  - 间隔均匀

特殊值

- **条件: `exp` = `111`…`1`**
- **情况1: `exp` = `111`…`1`, `frac` = `000`…`0`**
  - 表示无穷(infinity) ∞
  - 溢出的运算
  - 正无穷、负无穷
  - **E.g., 1.0/0.0 = −1.0/−0.0 = +∞, 1.0/−0.0 = −∞**
- **情况2: `exp` = `111`…`1`, `frac` ≠ `000`…`0`**
  - 表示：不是一个数Not-a-Number (NaN)
  - 表示没有数值结果（实数或无穷），例如：
    sqrt(–1), ∞ − ∞, ∞ × 0

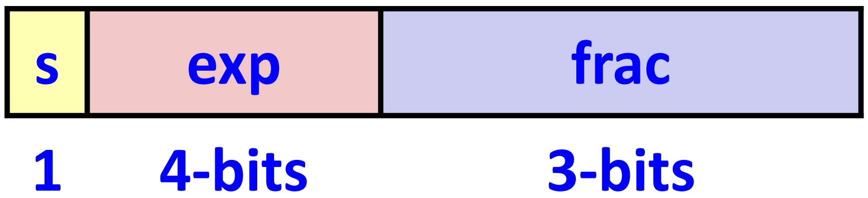
浮点编码总结



浮点数

- 二进制小数
- IEEE 浮点数标准: IEEE 754
- **浮点数示例与性质**
- 舍入、加法与乘法
- C语言的浮点数
- 小结

小浮点数例子——1字节浮点数



- **8位浮点编码**
  - 符号位：最高有效位
  - 阶码(Exponent)4位，偏置为7
  - 小数(`frac`) 3位

- **和IEEE 相同的格式**
  - 规格化、非规格化
  - 0、NaN、无穷的表示

动态范围(仅正数)

$v = (-1)^s\, M\, 2^E$

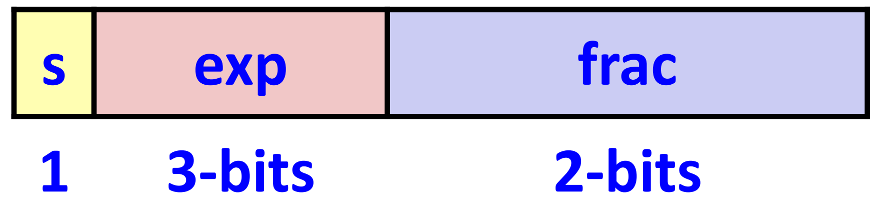
n: E = Exp – Bias

d: E = 1 – Bias

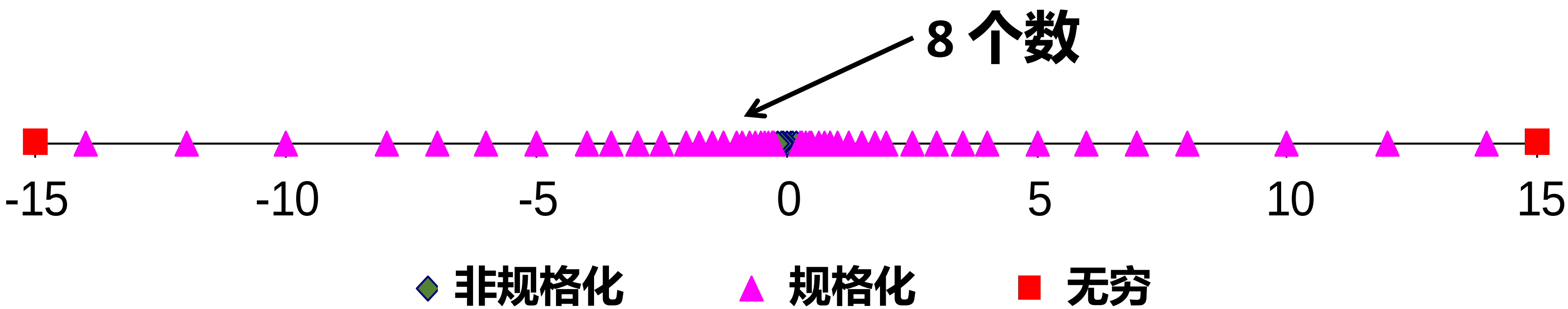
	s	exp	frac	E	Value	
非规格化数	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	最接近0
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	…					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	最大非规格化数
规格化数	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	最小规格化数
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	…					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	closest to 1 below
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	closest to 1 above
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	…					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	最大规格化数
	0	1111	000	n/a	inf	

数值分布

- **6-bit类 IEEE格式浮点数**
  - e： 阶码(Exponent) 位数3
  - f： 小数位数 2
  - 偏置bias= $2^{3-1}-1 = 3$

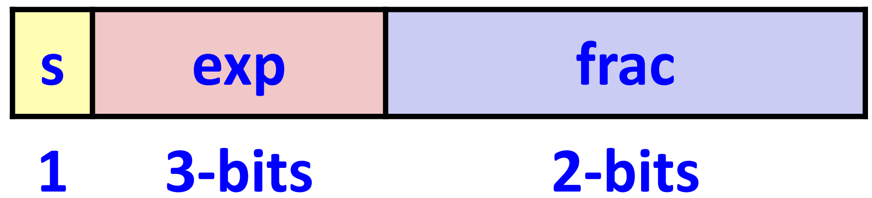


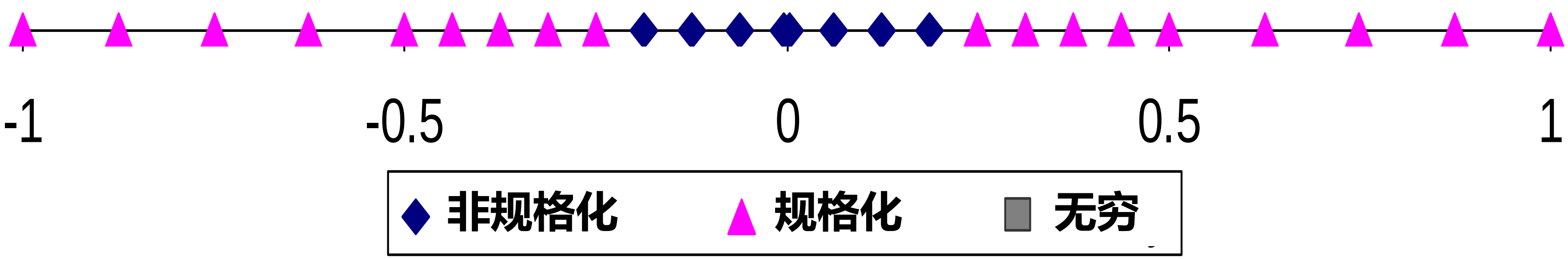
- **注意：数值在趋近于0时变密集**



数值分布(放大观察)

- **6-bit类 IEEE格式**
  - e： 阶码(Exponent) 位数3
  - f： 小数位数 2
  - 偏置bias= $2^{3-1}-1 = 3$





IEEE编码的特殊性质

- **浮点0与整数0编码相同：所有bit均为0**
- **几乎可以用与无符号整数相同的方式进行浮点数的比较**
  - 先比较符号位
  - 必须考虑 –0 = 0
  - NaN的不确定性
    - 将比其他任何值都大
    - 比较将产生什么结果？
  - 其他方面均OK
    - 规格化值 vs. 非规格化值
    - 规格化值 vs. 无穷

浮点数

- 二进制小数
- IEEE 浮点数标准: IEEE 754
- 浮点数示例与性质
- **舍入、加法与乘法**
- C语言的浮点数
- 小结

浮点数运算: 基本思想

- $x +_f y = \mathrm{Round}(x + y)$

- $x \times_f y = \mathrm{Round}(x \times y)$

- **基本思想**
  - 首先，计算精确结果
  - 然后，变换到指定格式
    - 可能溢出：阶码(Exponent) 太大
    - 小数部分可能需要舍入

舍入

- 舍入模式(以美元舍入说明)

	\$1.40	**\$1.60**	**\$1.50**	**\$2.50**	**–\$1.50**
向0舍入	\$1	\$1	\$1	\$2	–\$1
向下舍入 (−∞)	\$1	\$1	\$1	\$2	–\$2
向上 (+∞)	\$2	\$2	\$2	\$3	–\$1
向偶数舍入(默认)	\$1	\$2	\$2	\$2	–\$2

细究“向偶数舍入”

- **默认的舍入模式**
  - 很难找到更好的方法
  - 其他方法都有统计偏差
    - 对正整数集合求和时，和将始终被低估或高估（负偏差、正偏差）
- **向偶数舍入**
  - 当恰好在两个可能的数值正中间时（中间值）：舍入后，**最低有效位的数码为偶数**
  - 其他时候：向最近的数值舍入
    - **比中间值小向下舍入，比中间值大向上舍入**

细究“向偶数舍入”

- **以10进制数向最近的百分位舍入为例：**

7.8949999	7.89	(比中间值小：向下舍入)
7.8950001	7.90	(比中间值大：向上舍入)
7.8950000	7.90	(中间值—向上舍入)
7.8850000	7.88	(中间值—向下舍入)

二进制数的舍入

- **二进制小数的舍入**
  - "偶数"：最低有效位值为0
  - "中间值"：舍入位置右侧的位都是0，即形如: XXX <u>**1**</u>**00…**$_2$

- **例子**
  - 舍入到最近的1/4 (小数点右边第2位)

数值	二进制	舍入后	舍入动作	舍入后的值
2 3/32	$10.00\mathbf{011}_2$	10.00_2	(<1/2—down)	2
2 3/16	$10.00\mathbf{110}_2$	10.01_2	(>1/2—up)	2 1/4
2 7/8	$10.11\mathbf{100}_2$	11.00_2	(1/2—up)	3
2 5/8	$10.10\mathbf{100}_2$	10.10_2	(1/2—down)	2 1/2

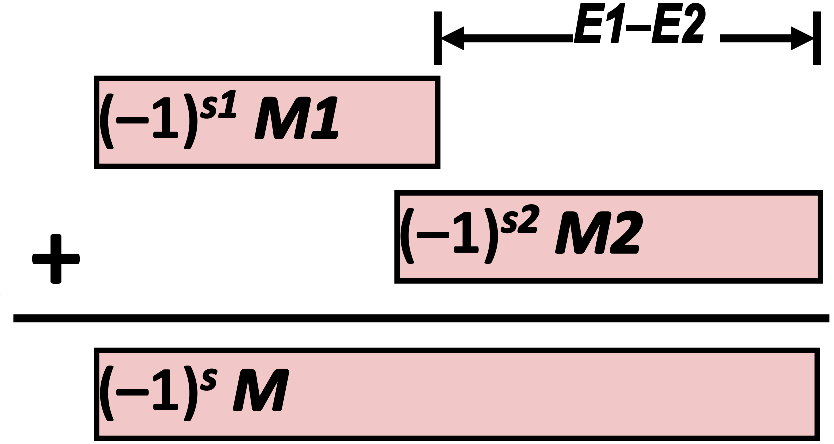
浮点乘法

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ \times\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
- **精确结果:** $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - 符号(Sign) *s*: $s1$ ^ $s2$
  - 尾数(Significand) *M*: $M1 \times M2$
  - 阶码(Exponent) *E*: $E1 + E2$
- **修正**
  - 如$M \geq 2$, 将*M*右移(1位), *E*加1
  - 如 *E* 超出范围，则溢出
  - 将*M*舍入，以符合小数部分的精度要求
- **实现**
  - 主要问题：实现尾数(Significand)的乘

浮点数加法

- $(-1)^{s1}\, M1\ \ 2^{E1}\ \ +\ \ (-1)^{s2}\, M2\ \ 2^{E2}$
  - 假设 $E1 > E2$
- **准确结果:** $(-1)^{s}\, M\ \ 2^{E}$
  - 符号 s, 尾数M:
    - 有符号数对齐、相加的结果
  - 阶码**(Exponent)** E: $E1$
- **修正**
  - $M \geq 2$：将M右移(1位)，E加1
  - $M < 1$：将M左移k 位, E 减 k
  - E超范围：溢出
  - 将M舍入，以符合小数部分的精度要求

二进制小数点对齐



浮点数加法的数学性质

- **与阿贝尔群比较**
  加法运算下:
  - 是否封闭 ***Yes***
    - 但可能产生无穷大或 NaN
  - 交换性(Commutative)? ***Yes***
  - 分配性(Associative)? ***No***
    - 溢出和舍入的不确定性

      (3.14+1e10)-1e10 = 0, 3.14+(1e10-1e10) = 3.14
  - 0 是加法的单位元? ***Yes***
  - 每个元素都有逆元? ***Almost***
    - 除了无穷和NaN
- **单调性(Monotonicity)** ***Almost***
  - $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$?
    - 除了无穷和NaN

浮点数乘法的数学性质

- **与交换环相比**
  - 乘法下封闭性？ ***Yes***
    - 但可能产生无穷或NaN
  - 乘法的交换性？ ***Yes***
  - 乘法的结合性？ ***No***
    - 可能溢出、舍入不精确
    - 例: (1e20*1e20)*1e-20= inf, 1e20*(1e20*1e-20)= 1e20
  - 1 是乘法的单位元？ ***Yes***
  - 乘法对加法的分配性？ ***No***
    - 可能溢出、舍入不精确
    - 1e20*(1e20-1e20)= 0.0, 1e20*1e20 – 1e20*1e20 = NaN
- **单调性**
  - $a \geq b \ \& \ c \geq 0 \ \Rightarrow a * c \geq b * c$? ***Almost***
    - 除了无穷和 NaN

浮点数

- 二进制小数
- IEEE 浮点数标准: IEEE 754
- 浮点数示例与性质
- 舍入、加法与乘法
- **C语言的浮点数**
- 小结

C语言的浮点数

- **两种精度**
  - `float`　单精度
  - `double`　双精度
- **类型转换**
  - `int`, `float`, `double` 间转换，将改变位模式
  - `double`/`float` → `int`
    - 截掉小数部分
    - 类似向0舍入
    - 当数值超范围或NaN时无定义：通常设置为 TMin
  - `int` → `double`
    - 精确转换,只要`int`的位宽 ≤ 53 bit，即可精确转换
  - `int` → `float`
    - 将根据舍入模式进行舍入

浮点数习题

- 针对下列C表达式:
  - 证明对所有参数值都成立
  - 或什么条件下不成立

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

假定d 和 f都不是NaN

- x == (int)(float) x
- x == (int)(double) x
- f == (float)(double) f
- d == (double)(float) d
- f == -(-f);
- 2/3 == 2/3.0
- d < 0.0 ⇒ ((d*2) < 0.0)
- d > f ⇒ -f > -d
- d * d >= 0.0
- (d+f)-d == f

浮点数习题答案

- x == (int)(float) x   No: 无法表示24 位尾数, x=0x1000001
- x == (int)(double) x   Yes: 53位尾数
- f == (float)(double) f   Yes: 增加精度
- d == (float) d   No: 损失精度
- f == -(-f);   Yes: 仅仅改变符号位
- 2/3 == 2/3.0   No: 2/3 == 0
- d < 0.0⇒ ((d*2) < 0.0)   Yes!
- d > f ⇒ -f < -d   Yes
- d *d >= 0.0   Yes!
- (d+f)-d == f   No: 不具备结合性

浮点的悲剧

- 1991年2月25日
- 美国爱国者导弹拦截伊拉克飞毛腿导弹失败!
- 后果：飞毛腿导弹炸死28名士兵
- 爱国者导弹的内置时钟计数器N每0.1秒记一次数。
- 时间计算

  $T = N \times 0.1$

  程序用24位数来近似表示0.1：

  x=0.0001 1001 1001 1001 1001 100

浮点的悲剧

- 0.1-x = 0.00000000000000000000000[1100][1100]...$_2$
- 0.1-x = 2^{-20} ×0.1 = 9.54×10^{-8}
- 程序运行100 小时后，累计的误差：
  100×3600× 10×9.54×10^{-8} =0.34344秒
- 软件升级不完全，第一次读取了精确时间，而另一次读取了有误差的时间，结果悲剧....
- 飞毛腿速度：2000 m/s
- 飞毛腿位置的估计误差：686 m

天价“溢出”

- 代价5亿美元的溢出

天价“溢出”

- 主角：阿丽亚娜5(Ariane5)型火箭的首次发射
- 时间：1996.6.4
- 剧情：发射后仅37秒，偏离路径，解体爆炸
- 代价：5亿美元
- 原因：溢出
  - 溢出——将64位浮点数转换成16位有符号整型数时，发生溢出。这个溢出的整型数，用于描述火箭的水平速度
  - Ariane4的水平速度绝对不会超过16位数的范围，因此用了16位整数
  - Ariane5简单复用了这部分代码
  - 问题：Ariane 5 的水平速度是Ariane 4的5倍！！！

小结

- IEEE 浮点数 具有清晰的数学性质
- 表示形如 $M \times 2^E$ 的数字
- 对运算进行推理，而不用考虑其实现
  - 就像有完美的精度，然后在进行舍入
- 和实数运算不同
  - 结核性、分配性有冲突
  - 日子变得难：编译器、认真的数值应用程序员

生成浮点数

s	exp	frac
1	4-bits	3-bits

- 步骤
  - 规格化为1开头的数
  - 小数部分舍入成符合的形式
  - 后规格化，处理 舍入的效果
- 例子
  - 将 8-bit 无符号数转换成浮点格式

```
128        10000000
 15        00001101
 33        00010001
 35        00010011
138        10001010
 63        00111111
```

规格化

s	exp	frac
1	4-bits	3-bits

- **要求**
  - 调整编码的所有参数，得到1开始的数，即形如1.xxxxx的数字
  - 指数减作为左移

数值	二进制	小数	指数
128	10000000	1.0000000	7
15	00001101	1.1010000	3
17	00010001	1.0001000	4
19	00010011	1.0011000	4
138	10001010	1.0001010	7
63	00111111	1.1111100	5

舍入

1.BBGRXXX

保护位(Guard bit): 结果的LSB

黏着位(Sticky bit): 剩余位

舍入位(Round bit): 舍入位中的第一个bit

- 舍入的条件
  - Round = 1, Sticky = 1 → > 0.5
  - Guard = 1, Round = 1, Sticky = 0 → Round to even

数值	小数	*GRS*	*Incr?*	舍入后的值
128	1.0000000	000	N	1.000
15	1.1010000	100	N	1.101
17	1.0001000	010	N	1.000
19	1.0011000	110	Y	1.010
138	1.0001010	011	Y	1.001
63	1.1111100	111	Y	10.000

后规格化

- **问题**
  - 舍入可能导致溢出
  - 解决：单次右移 & 阶码(Exponent)增1

数值	舍入后的值	指数值	修正	结果
128	1.000	7		128
15	1.101	3		15
17	1.000	4		16
19	1.010	4		20
138	1.001	7		134
63	10.000	5	1.000/6	64

有趣的数字

`{single,double}`

Description	*exp*	*frac*	*Numeric Value*
■ 0	00…00	00…00	0.0
■ 最小的后非规格化数	00…00	00…01	$2^{-\{23,52\}} \times 2^{-\{126,1022\}}$

- Single ≈ 1.4×10^{-45}
- Double ≈ 4.9×10^{-324}

■ 最大的非规格化数	00…00	11…11	$(1.0 - \varepsilon) \times 2^{-\{126,1022\}}$

- Single ≈ 1.18×10^{-38}
- Double ≈ 2.2×10^{-308}

■ 最小的后规格化数	00…01	00…00	$1.0 \times 2^{-\{126,1022\}}$

- 刚刚比最大的非规格化数大

■ 1	01…11	00…00	1.0
■ 最大的规格化数	11…10	11…11	$(2.0 - \varepsilon) \times 2^{\{127,1023\}}$

- Single ≈ 3.4×10^{38}
- Double ≈ 1.8×10^{308}

移码

- 移码：又叫增码，是符号位取反的补码
  - 整数移码： $[X]_{移}= 2^{(n-1)}+X$ $-2^{(n-1)} \leq X < 2^{(n-1)}$
  - 小数移码：$[X]_{移}= 1+ X$ $-1 \leq X < 1$
- 浮点数的阶码：指数的移码减去1

二进制编码	无符号数值	补码值	移码值	阶码值
0000	0	0	-8	-7
0001	1	1	-7	-6
0010	2	2	-6	-5
0011	3	3	-5	-4
0100	4	4	-4	-3
0101	5	5	-3	-2
0110	6	6	-2	-1
0111	7	7	-1	0
1000	8	-8	0	1
1001	9	-7	1	2
1010	10	-6	2	3
1011	11	-5	3	4
1100	12	-4	4	5
1101	13	-3	5	6
1110	14	-2	6	7
1111	15	-1	7	8