

衍生工具模型

作业-No.3

姓名：叶云鹏

学号：2501210025

2025-09-20

1. 证明 BS 解满足 PDE 方程，同时满足边值条件，简单说明标的资产的组合如何随着未到期期限趋于 0 而收敛到标的资产的非线性函数。

证明. Black-Scholes 模型的欧式看涨期权定价公式为：

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t,$$

$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数， $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ 。

(1) 证明满足 PDE 方程

Black-Scholes PDE 为：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

首先，计算 $\frac{\partial C}{\partial S}$ ：

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}.$$

计算 $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ ， $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ 。

代入：

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} - Ke^{-r\tau}N'(d_2) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} = N(d_1) + \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

现在，证明 $\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ ，即 $N'(d_1) = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S}$ ，或等价地 $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{Ke^{-r\tau}}{S}$ 。

由于 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ ，

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\exp(-d_2^2/2)} = \exp\left(-\frac{d_1^2}{2} + \frac{d_2^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{-d_1^2 + d_2^2}{2}\right).$$

计算 $-d_1^2 + d_2^2 = -(d_2 + \sigma\sqrt{\tau})^2 + d_2^2 = -(d_2^2 + 2d_2\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau) + d_2^2 = -2d_2\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau$ 。

因此，

$$\frac{-d_1^2 + d_2^2}{2} = -d_2\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}.$$

但 $d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, 所以 $d_2\sigma\sqrt{\tau} = \ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)\tau$ 。

故

$$-d_2\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2} = -\ln(S/K) - (r - \sigma^2/2)\tau - \frac{\sigma^2\tau}{2} = -\ln(S/K) - r\tau.$$

因此,

$$\exp\left(\frac{-d_1^2 + d_2^2}{2}\right) = \exp(-\ln(S/K) - r\tau) = \frac{K}{S}e^{-r\tau}.$$

所以 $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{Ke^{-r\tau}}{S}$, 从而 $\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ 成立, 两项抵消, 得

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

接下来, 计算 $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}N(d_1) = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = N'(d_1) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ 。

现在, 计算 $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}$ 。

首先计算 $\frac{\partial C}{\partial \tau}$:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - Ke^{-r\tau} \left(-rN(d_2) + N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \tau} \right) = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau}N(d_2) - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \tau}.$$

计算 $\frac{\partial d_1}{\partial \tau}$:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{(r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\tau},$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\ln(S/K)}{\sigma\tau^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

类似地,

$$\frac{\partial d_2}{\partial \tau} = \frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

代入 $\frac{\partial C}{\partial \tau}$:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1) \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln(S/K)}{\sigma\tau^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) + rKe^{-r\tau}N(d_2) - Ke^{-r\tau}N'(d_2) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right).$$

展开最后一项:

$$-Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

所以整体:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

注意 $SN'(d_1) - Ke^{-r\tau}N'(d_2) = 0$, 所以第一项和第二项的系数相同但符号相反, 导致 $(SN'(d_1) - Ke^{-r\tau}N'(d_2))\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = 0$ 。

剩余:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

因此

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial \tau} = -SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}N(d_2)$$

现在代入 PDE 左侧：

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}N(d_2) + rSN(d_1) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

简化最后一项：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2}\sigma SN'(d_1)/\sqrt{\tau} = \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

因此，

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} = 0,$$

剩余：

$$-rKe^{-r\tau}N(d_2) + rSN(d_1) = r(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)) = rC.$$

故满足 PDE。

(2) 满足边值条件

当 $\tau \rightarrow 0$ ：

- 若 $S > K$, $\ln(S/K) > 0$, $d_1, d_2 \rightarrow +\infty$, $N(d_1) \rightarrow 1$, $N(d_2) \rightarrow 1$, $C \rightarrow S - K$ 。
- 若 $S < K$, $\ln(S/K) < 0$, $d_1, d_2 \rightarrow -\infty$, $N(d_1) \rightarrow 0$, $N(d_2) \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$ 。
- 若 $S = K$, $d_1 \rightarrow (r + \sigma^2/2)\sqrt{\tau}/\sigma \rightarrow 0$, 但极限为 0。

故 $C(S, T) = \max(S - K, 0)$ 。

其他边界：

- 当 $S \rightarrow 0$, $d_1, d_2 \rightarrow -\infty$, $C \rightarrow 0$ 。
- 当 $S \rightarrow \infty$, $d_1, d_2 \rightarrow +\infty$, $C \rightarrow S - Ke^{-r\tau}$ 。

(3) 标的资产组合的收敛

复制组合为持有 $\Delta = N(d_1)$ 份标的资产和借入 $B = Ke^{-r\tau}N(d_2)$ 现金（无风险）。当 $\tau \rightarrow 0$ ：

- 若 $S > K$, $\Delta \rightarrow 1$, $B \rightarrow K$, 组合价值 $\rightarrow S - K = (S - K)^+$ 。
- 若 $S < K$, $\Delta \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, 组合价值 $\rightarrow 0 = (S - K)^+$ 。

故组合收敛到非线性支付函数 $\max(S - K, 0)$ 。 □

2. 利用第二次课的闭合的二叉树方法给出欧式看涨期权的定价公式。

证明. 在 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树模型中, 标的资产价格从 S 上升至 Su (概率 p) 或下降至 Sd (概率 $1 - p$), 其中 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$, 风险中性概率为：

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

对于 N 步二叉树, 欧式看涨期权价格为：

$$C = e^{-rT} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \max(Su^k d^{N-k} - K, 0),$$

其中 $T = N\Delta t$ 。当 $N \rightarrow \infty$, 此公式收敛到 Black-Scholes 公式。 □

3. 将 BS 解带入对冲组合，给出其中期权的重的表达式。并比较该权重与 1 的大小关系。如果将对冲组合中期权的权重按 BS 解放大（或缩小） α 倍，分析该对冲组合的风险和收益。

证明. 对冲组合为 $\Pi = -C + \Delta S$ ，其中 $\Delta = N(d_1)$ 。期权权重（份数）为 -1 （空头）。

(1) 期权的重的表达式

期权权重为 -1 ， $\Delta = N(d_1)$ 是标的资产的权重。

(2) 权重与 1 的比较

对于看涨期权， $0 < N(d_1) < 1$ ，故 $\Delta < 1$ 。期权权重 -1 恒定。

(3) 放大/缩小 α 倍

若期权权重变为 $-\alpha$ ，组合为 $\Pi = -\alpha C + \alpha \Delta S$ 。原组合 ($\alpha = 1$) 在 BS 模型下无风险，收益为无风险利率。

- 若 $\alpha > 1$ ：杠杆放大，偏离完美对冲，风险增加（对标的价格波动更敏感），收益可能放大（若市场有利）。
- 若 $\alpha < 1$ ：杠杆缩小，风险减少，收益也减少。

在离散时间或模型误差下， $\alpha \neq 1$ 引入额外风险敞口，具体风险和收益取决于标的价格路径。□

4. 持有同一个标的资产的一份看涨同时持有一份看跌，给出收益函数（绘图）和定价。若看跌期权为空头，同样给出收益函数和价格。并说明组合作用、杠杆等。

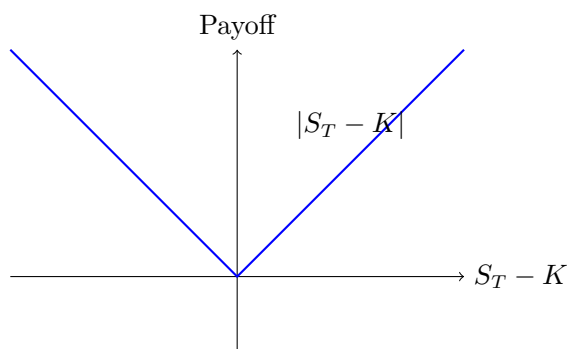
证明. (1) 长看涨 + 长看跌 (Straddle)

收益函数：

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) + \max(K - S_T, 0) = |S_T - K|.$$

定价： $C+P$ ，由 BS 公式计算。看涨看跌平价 $C-P = S - Ke^{-rT}$ ，故 $C+P = 2C - (S - Ke^{-rT})$ 。

绘图：



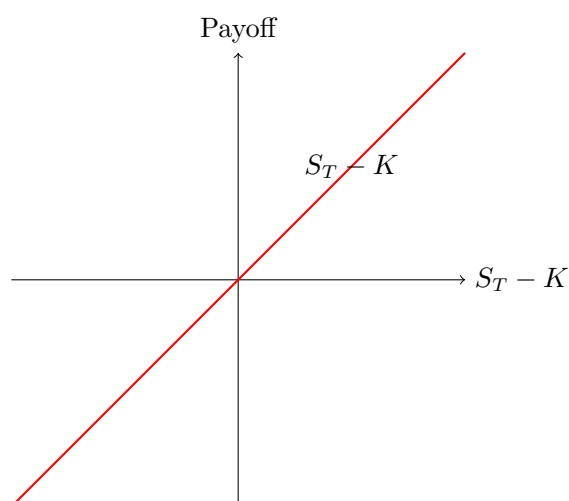
(2) 长看涨 + 空看跌 (Synthetic Long)

收益函数：

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K.$$

定价： $C - P = S - Ke^{-rT}$ （由平价）。

绘图：



(3) 组合作用与杠杆

- Straddle: 用于波动率交易，赌标的大幅波动，无方向偏好。杠杆高，成本 $C + P$ 较低，最大损失为成本，潜在收益无限。
- Synthetic Long: 复制持有标的资产，杠杆取决于行权价 K （虚值期权杠杆更高）。作用：以较低成本模拟股票持有，节省资本。

□