衍生工具模型
作业-No.3

姓名：叶云鹏　　学号：2501210025

2025-09-20

1. 证明 BS 解满足 PDE 方程，同时满足边值条件，简单说明标的资产的组合如何随着未到期期限趋于 0 而收敛到标的资产的非线性函数。

证明. Black-Scholes 模型的欧式看涨期权定价公式为：

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t,$$

$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数，$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$。

(1) 证明满足 PDE 方程

Black-Scholes PDE 为：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

首先，计算 $\frac{\partial C}{\partial S}$：

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}.$$

计算 $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$，$\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$。

代入：

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} = N(d_1) + \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

现在，证明 $\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$，即 $N'(d_1) = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S}$，或等价地 $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{Ke^{-r\tau}}{S}$。

由于 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$，

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\exp(-d_2^2/2)} = \exp\left(-\frac{d_1^2}{2} + \frac{d_2^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{-d_1^2 + d_2^2}{2}\right).$$

计算 $-d_1^2 + d_2^2 = -(d_2 + \sigma\sqrt{\tau})^2 + d_2^2 = -(d_2^2 + 2d_2\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau) + d_2^2 = -2d_2\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau$。

因此，

$$\frac{-d_1^2 + d_2^2}{2} = -d_2\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}.$$

但 $d_2 = \frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$，所以 $d_2\sigma\sqrt{\tau} = \ln(S/K) + (r-\sigma^2/2)\tau$。

故

$$-d_2\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2} = -\ln(S/K) - (r-\sigma^2/2)\tau - \frac{\sigma^2\tau}{2} = -\ln(S/K) - r\tau.$$

因此，

$$\exp\left(\frac{-d_1^2+d_2^2}{2}\right) = \exp\left(-\ln(S/K) - r\tau\right) = \frac{K}{S}e^{-r\tau}.$$

所以 $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{Ke^{-r\tau}}{S}$，从而 $\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{Ke^{-r\tau}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ 成立，两项抵消，得

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

接下来，计算 $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}N(d_1) = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = N'(d_1)\cdot\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$.

现在，计算 $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}$。

首先计算 $\frac{\partial C}{\partial \tau}$：

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - Ke^{-r\tau}\left(-rN(d_2) + N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \tau}\right) = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau}N(d_2) - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \tau}.$$

计算 $\frac{\partial d_1}{\partial \tau}$：

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{r+\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\tau},$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\frac{\ln(S/K)}{\sigma\tau^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

类似地，

$$\frac{\partial d_2}{\partial \tau} = \frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

代入 $\frac{\partial C}{\partial \tau}$：

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln(S/K)}{\sigma\tau^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + rKe^{-r\tau}N(d_2) - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

展开最后一项：

$$-Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

所以整体：

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

注意 $SN'(d_1) - Ke^{-r\tau}N'(d_2) = 0$,所以第一项和第二项的系数相同但符号相反,导致 $(SN'(d_1) - Ke^{-r\tau}N'(d_2))\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = 0$。

剩余：

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

因此

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial \tau} = -SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}N(d_2)$$

现在代入 PDE 左侧：

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}N(d_2) + rSN(d_1) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}.$$

简化最后一项：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2}\sigma SN'(d_1)/\sqrt{\tau} = \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}}.$$

因此，

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} = 0,$$

剩余：

$$-rKe^{-r\tau}N(d_2) + rSN(d_1) = r(SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)) = rC.$$

故满足 PDE。

(2) 满足边值条件

当 $\tau \to 0$：

- 若 $S > K$，$\ln(S/K) > 0$，$d_1, d_2 \to +\infty$，$N(d_1) \to 1$，$N(d_2) \to 1$，$C \to S - K$。
- 若 $S < K$，$\ln(S/K) < 0$，$d_1, d_2 \to -\infty$，$N(d_1) \to 0$，$N(d_2) \to 0$，$C \to 0$。
- 若 $S = K$，$d_1 \to (r + \sigma^2/2)\sqrt{\tau}/\sigma \to 0$，但极限为 0。

故 $C(S,T) = \max(S - K, 0)$。

其他边界：

- 当 $S \to 0$，$d_1, d_2 \to -\infty$，$C \to 0$。
- 当 $S \to \infty$，$d_1, d_2 \to +\infty$，$C \to S - Ke^{-r\tau}$。

(3) 标的资产组合的收敛

复制组合为持有 $\Delta = N(d_1)$ 份标的资产和借入 $B = Ke^{-r\tau}N(d_2)$ 现金（无风险）。当 $\tau \to 0$：

- 若 $S > K$，$\Delta \to 1$，$B \to K$，组合价值 $\to S - K = (S - K)^+$。
- 若 $S < K$，$\Delta \to 0$，$B \to 0$，组合价值 $\to 0 = (S - K)^+$。

故组合收敛到非线性支付函数 $\max(S - K, 0)$。 □

2. 利用第二次课的闭合的二叉树方法给出欧式看涨期权的定价公式。

证明. 在 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树模型中，标的资产价格从 S 上升至 Su（概率 p）或下降至 Sd（概率 $1 - p$），其中 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$d = 1/u$，风险中性概率为：

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

对于 N 步二叉树，欧式看涨期权价格为：

$$C = e^{-rT}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}\max(Su^k d^{N-k} - K, 0),$$

其中 $T = N\Delta t$。当 $N \to \infty$，此公式收敛到 Black-Scholes 公式。 □

3. 将 BS 解带入对冲组合，给出其中期权的重的表达式。并比较该权重与 1 的大小关系。如果将对冲组合中期权的权重按 BS 解放大（或缩小）α 倍，分析该对冲组合的风险和收益。

证明. 对冲组合为 $\Pi = -C + \Delta S$，其中 $\Delta = N(d_1)$。期权权重（份数）为 -1（空头）。

(1) 期权的重的表达式

期权权重为 -1，$\Delta = N(d_1)$ 是标的资产的权重。

(2) 权重与 1 的比较

对于看涨期权，$0 < N(d_1) < 1$，故 $\Delta < 1$。期权权重 -1 恒定。

(3) 放大/缩小 α 倍

若期权权重变为 $-\alpha$，组合为 $\Pi = -\alpha C + \alpha\Delta S$。原组合（$\alpha = 1$）在 BS 模型下无风险，收益为无风险利率。

- 若 $\alpha > 1$：杠杆放大，偏离完美对冲，风险增加（对标的价格波动更敏感），收益可能放大（若市场有利）。
- 若 $\alpha < 1$：杠杆缩小，风险减少，收益也减少。

在离散时间或模型误差下，$\alpha \neq 1$ 引入额外风险敞口，具体风险和收益取决于标的价格路径。

□

4. 持有同一个标的资产的一份看涨同时持有一份看跌，给出收益函数（绘图）和定价。若看跌期权为空头，同样给出收益函数和价格。并说明组合作用、杠杆等。

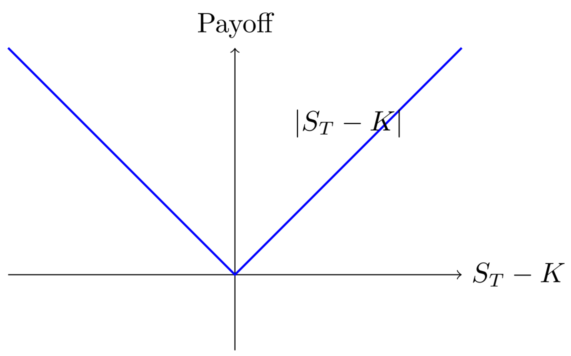
证明. **(1) 长看涨 + 长看跌（Straddle）**

收益函数：

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) + \max(K - S_T, 0) = |S_T - K|.$$

定价：$C+P$，由 BS 公式计算。看涨看跌平价 $C-P = S-Ke^{-rT}$，故 $C+P = 2C-(S-Ke^{-rT})$。

绘图：



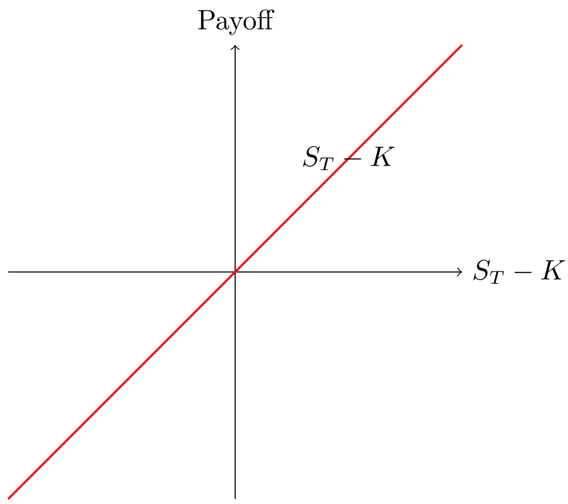
(2) 长看涨 + 空看跌（Synthetic Long）

收益函数：

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K.$$

定价：$C - P = S - Ke^{-rT}$（由平价）。

绘图：



(3) 组合作用与杠杆

- Straddle：用于波动率交易，赌标的大幅波动，无方向偏好。杠杆高，成本 $C + P$ 较低，最大损失为成本，潜在收益无限。
- Synthetic Long：复制持有标的资产，杠杆取决于行权价 K（虚值期权杠杆更高）。作用：以较低成本模拟股票持有，节省资本。

$\square$

附录1

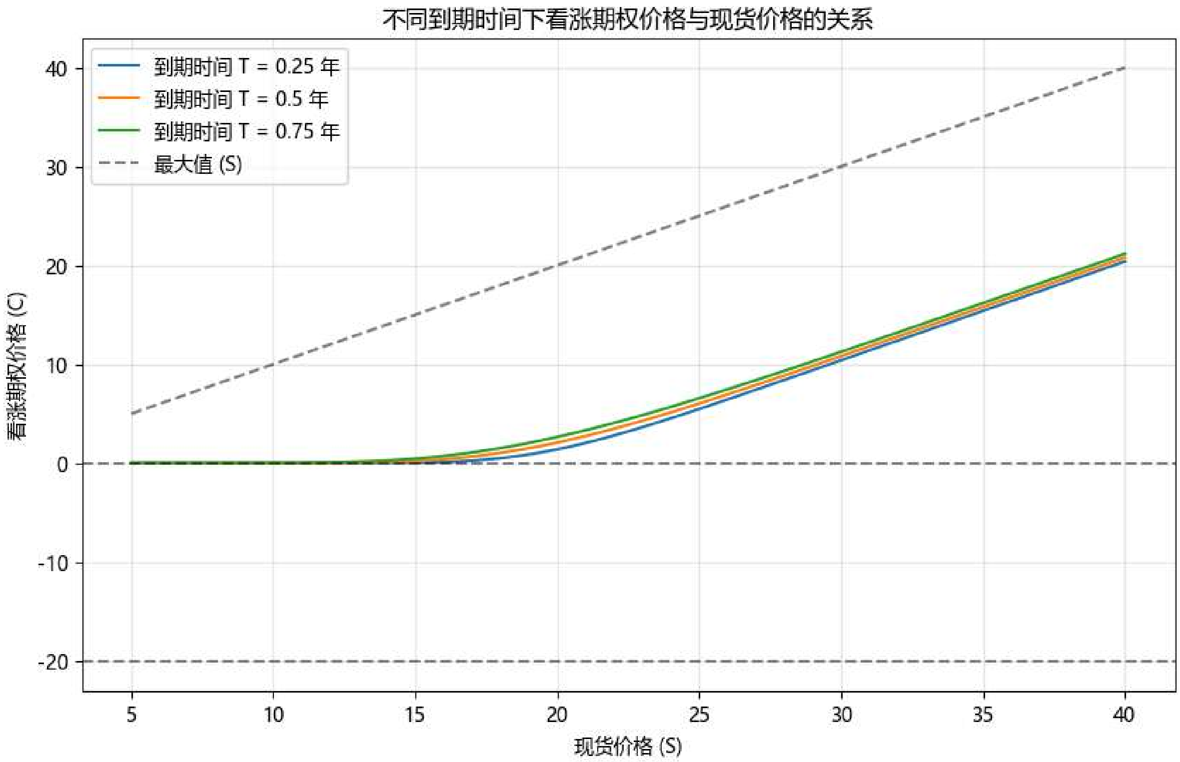
5.编程：参照BS（1973）的图1，利用BS定价绘制三个不同 到期日的期权价格与现货价格的曲线，并计算和绘制三个 曲线的一阶导和二阶导的曲线

In [7]:
```
import numpy as np
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import font_manager

# 设置中文字体以支持中文显示
# 设置支持中文和数学符号的字体
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['Microsoft YaHei', 'DejaVu Sans', 'SimHei']  # 优
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False  # 解决负号显示问题

# Black-Scholes 看涨期权价格计算函数
def black_scholes_call(S, K, T, r, sigma):
    """计算看涨期权价格
    参数:
        S: 现货价格
        K: 行权价格
        T: 到期时间（年）
        r: 无风险利率
        sigma: 波动率
    返回:
        期权价格
    """
    if T == 0:
        return np.maximum(S - K, 0)
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    return S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)

# 一阶导数：Delta
def delta_call(S, K, T, r, sigma):
    """计算期权价格对现货价格的一阶导数（Delta）
    参数同上
    返回:
        Delta 值
    """
    if T == 0:
        return (S > K).astype(float)
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    return norm.cdf(d1)

# 二阶导数：Gamma
def gamma_call(S, K, T, r, sigma):
    """计算期权价格对现货价格的二阶导数（Gamma）
    参数同上
    返回:
        Gamma 值
    """
    if T == 0:
        return 0
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    return norm.pdf(d1) / (S * sigma * np.sqrt(T))
```

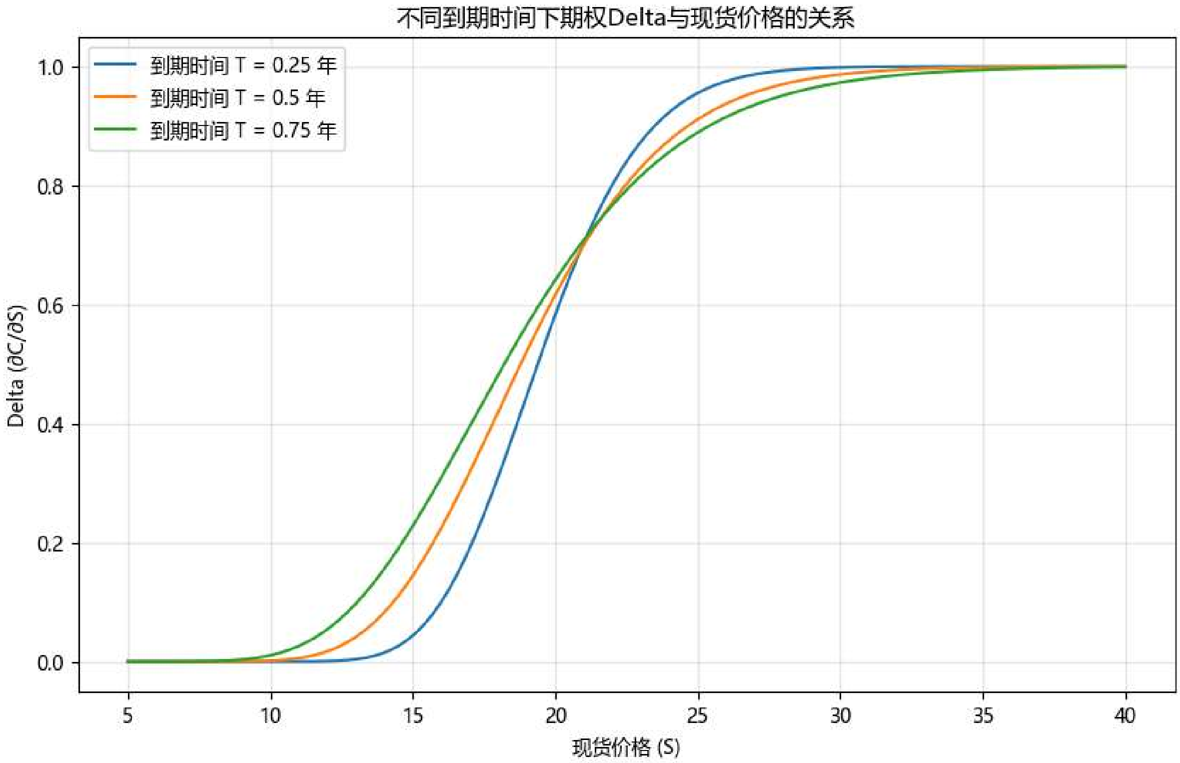
In [8]:
```
# 参数设置（参考 Black-Scholes 1973 图1）
K = 20.0  # 行权价格
```

```python
r = 0.08  # 无风险利率
sigma = 0.3  # 波动率
Ts = [0.25, 0.5, 0.75]  # 三个不同的到期时间（年）
S = np.linspace(5, 40, 200)  # 现货价格范围
```

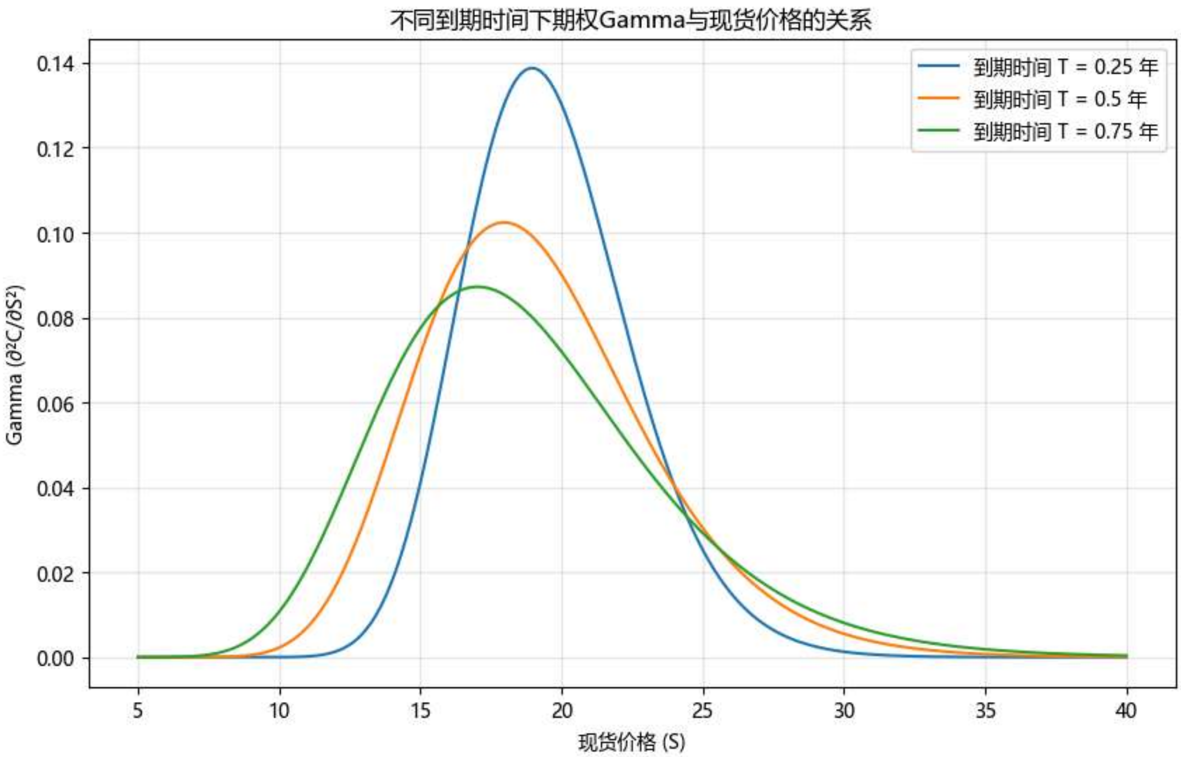
In [9]:
```python
# 绘图1：期权价格与现货价格的关系
plt.figure(figsize=(10, 6))
for T in Ts:
    C = np.array([black_scholes_call(s, K, T, r, sigma) for s in S])
    plt.plot(S, C, label=f'到期时间 T = {T} 年')
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axhline(y=-K, color='k', linestyle='--', alpha=0.5)  # 最小值线
plt.plot(S, S, 'k--', alpha=0.5, label='最大值 (S)')  # 最大值线
plt.xlabel('现货价格 (S)')
plt.ylabel('看涨期权价格 (C)')
plt.title('不同到期时间下看涨期权价格与现货价格的关系')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.savefig('option_price.png')  # 保存图像
plt.show()
```



In [10]:
```python
# 绘图2：一阶导数（Delta）与现货价格的关系
plt.figure(figsize=(10, 6))
for T in Ts:
    delta = np.array([delta_call(s, K, T, r, sigma) for s in S])
    plt.plot(S, delta, label=f'到期时间 T = {T} 年')
plt.xlabel('现货价格 (S)')
plt.ylabel('Delta (∂C/∂S)')
plt.title('不同到期时间下期权Delta与现货价格的关系')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.savefig('option_delta.png')  # 保存图像
plt.show()
```



In [11]:
```
# 绘图3：二阶导数（Gamma）与现货价格的关系
plt.figure(figsize=(10, 6))
for T in Ts:
    gamma = np.array([gamma_call(s, K, T, r, sigma) for s in S])
    plt.plot(S, gamma, label=f'到期时间 T = {T} 年')
plt.xlabel('现货价格 (S)')
plt.ylabel('Gamma (∂²C/∂S²)')
plt.title('不同到期时间下期权Gamma与现货价格的关系')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.savefig('option_gamma.png')  # 保存图像
plt.show()
```



In [ ]:
```

```