Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№4**
«Аппроксимация функции методом наименьших квадратов»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **4**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Есоян Владимир Саркисович
Группа: P3208

Санкт-Петербург, 2024 г.

<u>Цель работы</u>: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

<u>Линейная аппроксимация</u>:

y = $\frac{15x}{x^4+4}$

n = 11
x ∈ [-4; 0]
h = 0.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-4.0	-3.6	-3.2	-2.8	-2.4	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-0.231	-0.314	-0.441	-0.642	-0.968	-1.5	-2.274	-2.964	-2.721	-1.49	0

φ(x) = a + bx

Вычисляем суммы: sx = -22, sxx = 61.6, sy = -13.545 sxy = 20.554

$$\begin{cases} n*a+sx*b=sy \\ sx*a+sxx*b=sxy \end{cases} \quad \begin{cases} 11*a-22*b=-13.545 \\ -22*a+61.6*b=20.554 \end{cases} \quad \begin{cases} 11*a-22*b=-13.545 \\ 17.6*b=-6.536 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-6.536/\ 17.6\ =-0.3714 \\ 11a=-13.545+22*(-0.3714)=-21.7158 \end{cases} \quad \begin{cases} b\ =-0.3714 \\ a=-1.9742 \end{cases}$$

φ(x) = $-1.9742-0.3714*x$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-4.0	-3.6	-3.2	-2.8	-2.4	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-0.231	-0.314	-0.441	-0.642	-0.968	-1.5	-2.274	-2.964	-2.721	-1.49	0
φ(xi)	-0.489	-0.637	-0.786	-0.934	-1.083	-1.231	-1.38	-1.529	-1.677	-1.826	-1.974
(φ (xi)-yi)^2	0.067	0.104	0.119	0.085	0.013	0.072	0.799	2.059	1.09	0.113	3.897

σ = $\sqrt{\frac{\sum(\varphi\ (xi)-\ yi)^2}{n}}$ = **0.875**

Квадратичная аппроксимация:

y = $\frac{15x}{x^4+4}$

n = 11
x ∈ [-4; 0]
h = 0.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-4.0	-3.6	-3.2	-2.8	-2.4	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-0.231	-0.314	-0.441	-0.642	-0.968	-1.5	-2.274	-2.964	-2.721	-1.49	0

φ(x) = a + bx + cx^2

Вычисляем суммы:
sx = -22, sxx = 61.6, sxxx = -193.6, sxxxx = 648.525, sy = -13.545, sxy = 20.554, sxxy = -40.96

$$\begin{cases} n*a+sx*b+sxx*c=sy \\ sx*a+sxx*b+sxxx*c=sxy \\ sxx*a+sxxx*b+sxxxx*c=sxxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11*a-22*b+61.6*c=-13.545 \\ -22*a+61.6*b-193.6*c=20.554 \\ 61.6*a-193.6*b+648.52*c=-40.96 \end{cases}$$

По методу Крамера:
$$\Delta = 11\cdot(61.6\cdot 648.52-(-193.6)\cdot(-193.6))-(-22)\cdot(-22\cdot 648.52-(-193.6)\cdot 61.6)+61.6\cdot(-22\cdot(-193.6)-61.6\cdot 61.6) = 4251.456$$
$$\Delta_1=-4328.09, \Delta_2=5195.615, \Delta_3=1693.6128$$

$$\begin{cases} a=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-4328.09}{4251.456}\approx -1.018 \\ b=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{5195.615}{4251.456}\approx 1.222 \\ c=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1693.6128}{4251.456}\approx 0.398 \end{cases}$$

φ(x) $= -1.018+1.222x+0.398x^2$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-4.0	-3.6	-3.2	-2.8	-2.4	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-0.231	-0.314	-0.441	-0.642	-0.968	-1.5	-2.274	-2.964	-2.721	-1.49	0
φ(xi)	0.462	-0.259	-0.853	-1.319	-1.658	-1.87	-1.954	-1.911	-1.741	-1.443	-1.018

(φ (xi)-yi)^2	0.48	0.003	0.17	0.458	0.476	0.137	0.102	1.109	0.96	0.002	1.036

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi\ (xi) - yi)^2}{n}} = \mathbf{0.67}$$

0.67 < 0.875, у квадратичной аппроксимации среднеквадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.

2. Программная реализация задачи

https://github.com/x-oc/function-approximation

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

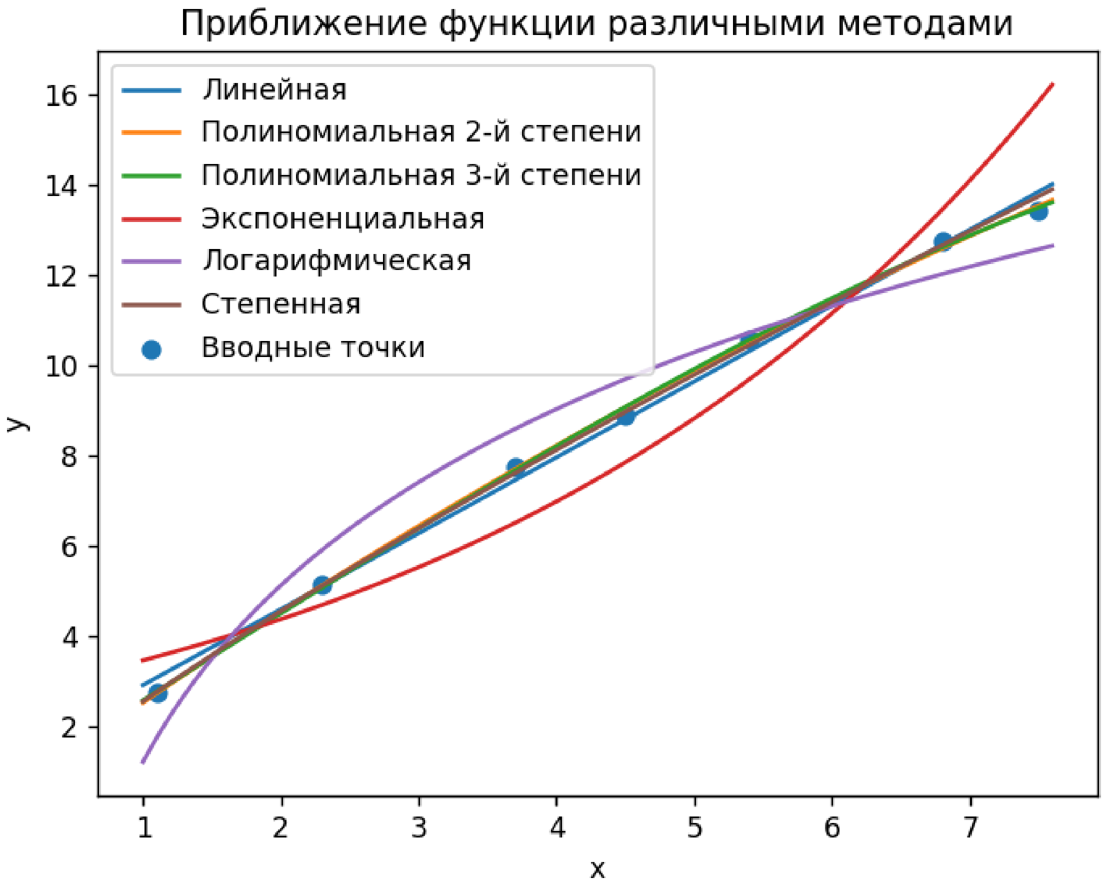
```
Введите 'f' для ввода из файла или 't' для ввода с клавиатуры: f
Введите имя файла: in1.txt
! Невозможно прочитать файл in1.txt: [Errno 2] No such file or directory: 'in1.txt'
Введите имя файла: in.txt
Куда выводим? 'f'- файл, 't'- терминал: t
Выбран вариант вывода в терминал.

------------------------------

Линейная функция:
*  Функция: f(x) = a + b * x
*  Коэффициенты (a, b): [1.2168, 1.6854]
*  Среднеквадратичное отклонение: σ = 0.25995
*  Коэффициент детерминации: R^2 = 0.99484, высокая точность аппроксимации
*  Мера отклонения: S = 0.47302
*  Коэффициент корреляции Пирсона: r = 0.9974189309974396, (строгая линейная функциональная зависимость)

------------------------------

Полиномиальная 2-й степени функция:
*  Функция: f(x) = a + b * x + c * x ** 2
*  Коэффициенты (a, b, c): [0.3743, 2.1974, -0.0589]
*  Среднеквадратичное отклонение: σ = 0.09929
*  Коэффициент детерминации: R^2 = 0.99925, высокая точность аппроксимации
*  Мера отклонения: S = 0.06901

------------------------------

Полиномиальная 3-й степени функция:
*  Функция: f(x) = a + b * x + c * x ** 2 + d * x ** 3
*  Коэффициенты (a, b, c, d): [0.6398, 1.9119, 0.0191, -0.006]
*  Среднеквадратичное отклонение: σ = 0.09212
*  Коэффициент детерминации: R^2 = 0.99935, высокая точность аппроксимации
*  Мера отклонения: S = 0.05940

------------------------------

Экспоненциальная функция:
*  Функция: f(x) = a * exp(b * x)
*  Коэффициенты (a, b): [2.7309, 0.2346]
*  Среднеквадратичное отклонение: σ = 1.23676
*  Коэффициент детерминации: R^2 = 0.88332, удовлетворительная точность аппроксимации
```

* Мера отклонения: S = 10.70709

Логарифмическая функция:
* Функция: f(x) = a + b * log(x)
* Коэффициенты (a, b): [1.1989, 5.65]
* Среднеквадратичное отклонение: σ = 0.77458
* Коэффициент детерминации: R^2 = 0.95423, высокая точность аппроксимации
* Мера отклонения: S = 4.19978

Степенная функция:
* Функция: f(x) = a * x ** b
* Коэффициенты (a, b): [2.5421, 0.838]
* Среднеквадратичное отклонение: σ = 0.14851
* Коэффициент детерминации: R^2 = 0.99832, высокая точность аппроксимации
* Мера отклонения: S = 0.15440

Лучшая функция приближения: Полиномиальная 3-й степени



Вывод

В ходе данной работы была выполнена аппроксимация функций с использованием линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического приближений. Также на основе этих методов был реализован Python скрипт, который реализует метод наименьших квадратов и строит графики исходной функции и аппроксимаций.
Исследование позволило определить наилучшее приближение, вычислить среднеквадратические отклонения и коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.