Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

# Лабораторная работа **№3**
# **«Численное интегрирование»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **4**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Есоян Владимир Саркисович
Группа: P3208

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения:

**Исходные данные:**
1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

**Программная реализация задачи:**
1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
• Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
• Метод трапеций
• Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

**Вычислительная реализация задачи:**
1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n=6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n=10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

# 1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)\, dx$$

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 4x^2 - 4\mathrm{x};\ F(-1) = \frac{53}{6};\ F(-3) = \frac{87}{2}$$

$$I_{\text{точн}} = F(x) = F(-1) - F(-3) = \frac{53}{6} - \frac{87}{2} = \frac{-104}{3} = \mathbf{-34.(6)}$$

2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{(-1)-(-3)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes} = \big((-1)-(-3)\big) \times \left(\frac{41}{840} f(-3) + \frac{216}{840} f\left(\frac{-8}{3}\right) + \frac{27}{840} f\left(\frac{-7}{3}\right) + \frac{272}{840} f(-2) + \frac{27}{840} f\left(\frac{-5}{3}\right) + \frac{216}{840} f\left(\frac{-4}{3}\right) + \frac{41}{840} f(-1)\right) = \frac{-104}{3} = \mathbf{-34.(6)}$$

Решение на Wolfram Alpha

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{-1-(-3)}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h \cdot \left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f\left(a+\frac{5h}{2}\right) + f\left(a+\frac{7h}{2}\right) + f\left(a+\frac{9h}{2}\right) + f\left(a+\frac{11h}{2}\right) + f\left(a+\frac{13h}{2}\right) + f\left(a+\frac{15h}{2}\right) + f\left(a+\frac{17h}{2}\right) + f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right) =$$

$$= 0.2\big(f(-3+0.1) + f(-3+0.3) + f(-3+0.5) + f(-3+0.7) + f(-3+0.9) + f(-3+1.1) + f(-3+1.3) + f(-3+1.5) + f(-3+1.7) + f(-3+1.9)\big) = \mathbf{-34.72}$$

Решение на Wolfram Alpha

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(-3)+f(-1)}{2} + f(-3+0.2) + f(-3+0.4) + f(-3+0.6) + f(-3+0.8) + f(-3+1) + f(-3+1.2) + f(-3+1.4) + f(-3+1.6) + f(-3+1.8)\right) = \mathbf{-34.56}$$

Решение на Wolfram Alpha

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2\sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n\right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3}\big(f(-3) + 4 * \big(f(-3+0.2) + f(-3+0.6) + f(-3+1) + f(-3+1.4) + f(-3+1.8)\big) + 2 * \big(f(-3+0.4) + f(-3+0.8) + f(-3+1.2) + f(-3+1.6)\big) + f(-1)\big) = \mathbf{-34.(6)}$$

Решение на Wolfram Alpha

## 4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале вычислено как $I_{\text{точн}} = \frac{-104}{3} = \mathbf{-34.(6)}$

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{cotes} = -34.(6)$, **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-34.(6) - (-34.(6))| = 0$
2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -34.72$.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}| = |-34.(6) - (-34.72)| = 0.05(3)$
3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -34.56$.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}| = |-34.(6) - (-34.56)| = 0.10(6)$
4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -34.(6)$, **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-34.(6) - (-34.(6))| = 0$

## 5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**
2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta = \frac{|-34.(6)-(-34.72)|}{|-34.(6)|} \approx 1.5\%$
3. Для метода **трапеций**: $\Delta = \frac{|-34.(6)-(-34.56)|}{|-34.(6)|} \approx 3.1\%$
4. Для метода **Симпсона**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**

Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–

Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

## 2. Программная реализация задачи

https://github.com/x-oc/numerical-integration

**Результаты выполнения программы при различных исходных данных:**

```
Выберите функцию:
1.x + 1
2.x * 2
3.x^2
4.sin(x)
5.-x
6.1 / x
7.e^x
8.42
9.1 / sqrt(x)
9
Введите начальный предел интегрирования: 0
Введите конечный предел интегрирования: 10
! Обнаружена точка разрыва: функция имеет разрыв или не существует в точках [0.0].
+ Интеграл сходится.
Введите требуемую точность вычислений: 0.001
Метод левых прямоугольников:
Значение интеграла: 6.319013520096221
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n =
2097152
Метод правых прямоугольников:
Значение интеграла: 6.3175071380011705
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n =
2097152
Метод трапеций:
Значение интеграла: 6.3196336214115805
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n =
262144
Метод Симпсона:
Значение интеграла: 6.32396125277298
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n =
65536
Метод средних прямоугольников:
Значение интеграла: 6.315262751279526
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n =
65536
```

```
Выберите функцию:
1.x + 1
2.x * 2
3.x^2
4.sin(x)
5.-x
```

```
6.1 / x
7.e^x
8.42
9.1 / sqrt(x)
1
Введите начальный предел интегрирования: 0
Введите конечный предел интегрирования: 1
Введите требуемую точность вычислений: 0.01
Метод левых прямоугольников:
Значение интеграла: 1.4921875
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 64
Метод правых прямоугольников:
Значение интеграла: 1.5078125
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 64
Метод трапеций:
Значение интеграла: 1.5
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 8
Метод Симпсона:
Значение интеграла: 1.5
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 8
Метод средних прямоугольников:
Значение интеграла: 1.5
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: n = 8
```

# Вывод

В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования. Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона.

В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.

Также была выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.