Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №2
по дисциплине «Вычислительная математика»
Численные методы решения нелинейных уравнений и систем.

Вариант: **4**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Есоян Владимир Саркисович
Группа: P3208

Санкт-Петербург, 2025 г

Цель работы
Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

Порядок выполнения
1 часть. Решение нелинейного уравнения
1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
2. Определить интервалы изоляции корней.
3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.
4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удержать 3 знака после запятой.
5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
5.5 Для метода простой итерации заполнить таблицу 5. Проверить условие сходимости метода на выбранном интервале.
6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

2 часть. Решение системы нелинейных уравнений
1. Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически (вид системы представлен в табл. 8).
2. Используя указанный метод, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,01.
3. Для метода простой итерации проверить условие сходимости метода.
4. Подробные вычисления привести в отчете.

Рабочие формулы
Метод половинного деления
$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

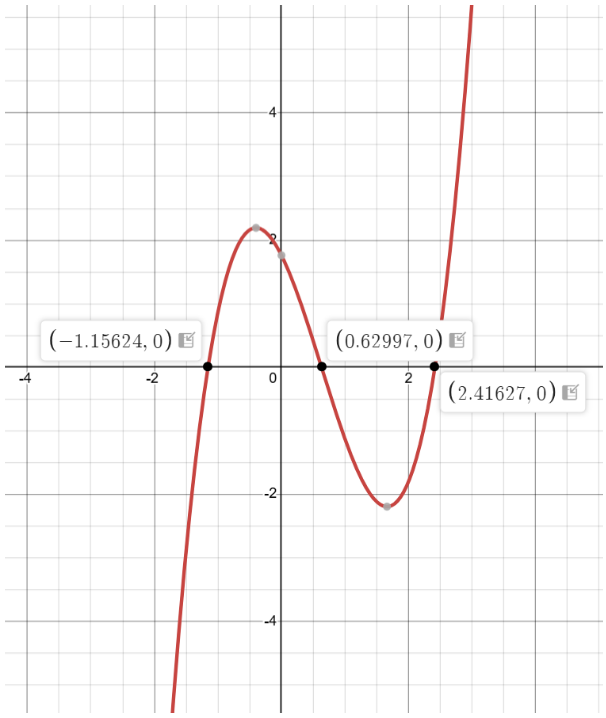
Метод секущих
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

Метод простой итерации
$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

$$x^3 - 1{,}89x^2 - 2x + 1{,}76$$



Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.

Получим приближенные значения корней:
x ≈ -1.2, x ≈ 0.6, x ≈ 2.4

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: (-∞, -1.2), (-1.2, 0.6), (0.6, 2.4) и (2.4, +∞). На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвольной точке каждого интервала. Например, для интервала (-∞, -1.2) можно выбрать x = -2, для интервала (-1.2, 0.6) x = -1, для интервала (0.6, 2.4) x = 1, и для интервала (2.4, +∞) x = 3.

Таким образом, знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

(-∞, -1.2)	(-1.2, 0.6)	(0.6, 2.4)	(2.4, +∞)
-	+	-	+

И следовательно, мы получаем три интервала изоляции корней уравнения:

(-1.5, -1), (0, 1) и (2, 2.5).

Уточнение корней с точностью $\varepsilon=10^{-2}$:

Крайний правый: метод простой итерации

Проверка **условия сходимости** метода на выбранном интервале:
$$f(x) = x^3 - 1{,}89x^2 - 2x + 1{,}76 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3{,}78x - 2$$
$$f'(a) = 2{,}44 > 0, f'(b) = 7{,}3 > 0$$

$\max(|f'(a)|, |f'(b)|) = 7{,}3 \to \lambda = -\frac{1}{\max(|f'(x)| \quad)} = -\frac{1}{7{,}3}$

$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x - \dfrac{x^3 - 1{,}89x^2 - 2x + 1{,}76}{7{,}3}$

$\varphi'^{(x)} = 1 + \lambda f'^{(x)} = 1 - \dfrac{3x^2 - 3{,}78x - 2}{7{,}3}$

На отрезке начального приближения [2, 2.5] функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема.

$|\varphi'(a)| = 0{,}666$
$|\varphi'(b)| = 0$
$|\varphi'(x)| \leq q,$ где $q = 0{,}666$
$0 \leq q < 1 \to$ **итерационная последовательность сходится**, $0{,}5 < q < 1 \to$ критерий окончания итерационного процесса $|x_{k+1} - x_k| < \frac{1-q}{q}\varepsilon = 0.005$, $x_0 = 2.5$

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	2.500	2.422	0.573	0.078
2	2.422	2.417	0.037	0.005
3	2.417	2.416	0.005	0.001

Крайний левый: метод половинного деления

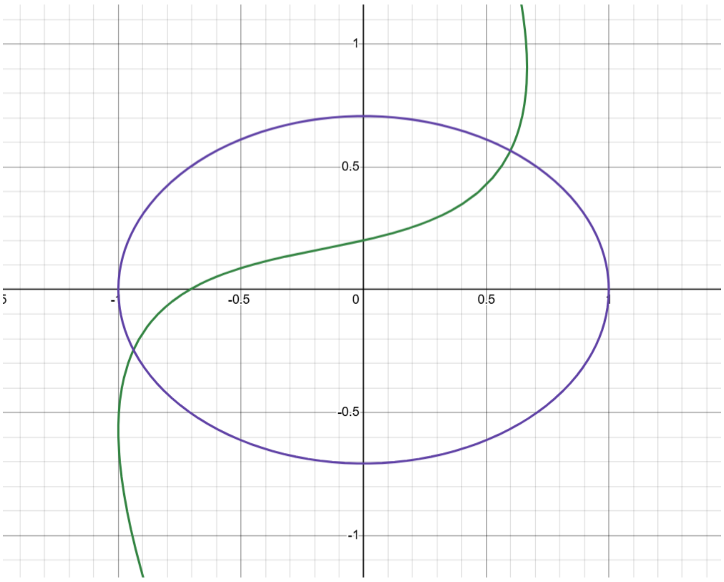
№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a – b|
1	-1.5	-1	-1.25	-2.867	0.87	-0.646	0.5
2	-1.25	-1	-1.125	-0.646	0.87	0.194	0.25
3	-1.25	-1.125	-1.188	-0.646	0.194	-0.208	0.125
4	-1.188	-1.125	-1.156	-0.208	0.194	0.002	0.063
5	-1.188	-1.156	-1.172	-0.208	0.002	-0.102	0.032
6	-1.172	-1.156	-1.164	-0.102	0.002	-0.05	0.016
7	-1.164	-1.156	-1.16	-0.05	0.002	-0.024	0.008
8	-1.16	-1.156	-1.158	-0.024	0.002	-0.011	0.004
9	-1.158	-1.156	**-1.157**	-0.011	0.002	-0.005	0.002

Центральный: метод секущих

№	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	0	0.5	0.653	-0.073	0.153
2	0.5	0.653	0.63	0	0.023
3	0.653	0.63	0.63	0	0

2. Решение системы нелинейных уравнений

$\begin{cases} sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, Метод Ньютона



$$\begin{cases} sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x,y)} \ = \ 0 \\ \mathrm{g(x,y)} \ = \ 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sin(x+y) - 1{,}2x - 0{,}2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и $sin(x+y) - 1{,}2x - 0{,}2 = 0$, следовательно, система имеет не более двух различных решений.

Построим матрицу Якоби:

$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(x+y) - 1.2, \frac{\partial f}{\partial y} = cos(x+y), \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 4y$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} cos(x+y) - 1.2 & cos(x+y) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2x + 0{,}2 - sin(x+y) \\ 1 - \ x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} cos(x+y)\Delta x - 1.2\Delta x + \ cos(x+y)\Delta y = 1{,}2x + 0{,}2 - sin(x+y) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - \ x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Выбираем $x_0 = 0.6;\ y_0 = 0.56$ и решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \Delta x = -0.001 \\ \Delta y = 0.006 \end{cases}$$

Вычисляем очередные приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.6 - 0.001 = 0.599$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.56 + 0.006 = 0.566$

$|x_1 - x_0| \le \varepsilon, |y_1 - y_0| \le \varepsilon$

$|0.001| \le \varepsilon, |0.006| \le \varepsilon \rightarrow$ ответ найден, **корень 1**: $(0.599, 0.566)$

Аналогично находим **другой корень**: $(-0.938, -0.245)$

2. <u>Программная реализация задачи</u>

Листинг программы

https://github.com/x-oc/nonlinear-equations

Результаты работы программы
Выберите тип программы:
1: Нелинейное уравнение
2: Система нелинейных уравнений
Введите номер типа: 1
Выберите уравнение:
1: -1.38*x^3 - 5.42*x^2 + 2.57*x + 10.95
2: x^3 - 1.89*x^2 - 2*x + 1.76
3: -x/2 + e^x + 5*sin(x)
Введите номер уравнения: 1
Выберите метод:
1: Метод хорд
2: Метод простой итерации
3: Метод Ньютона
Введите номер метода: 1
Введите имя файла для загрузки исходных данных и интервала или пустую строку, чтобы ввести вручную:
Введите левую границу интервала: -4
Введите правую границу интервала: -3
Введите погрешность вычисления: 0.0001
Введите имя файла для вывода результата или пустую строку, чтобы вывести в консоль:
Процесс решения:
1: a = -4.000, b = -3.785, x = -3.874, f(a) = 2.270, f(b) = -1.598, f(x)=-0.11975504232917622, |x_k+1 - x_k| = 0.08889300381592546
2: a = -4.000, b = -3.874, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.120, f(x)=-0.008197201018855793, |x_k+1 - x_k| = 0.006327767063427636
3: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.008, f(x)=-0.0005575468628844504, |x_k+1 - x_k| = 0.00043157552113282094
4: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.001, f(x)=-3.790612670506732e-05, |x_k+1 - x_k| = 2.9347150450220738e-05

Результат:
Найденный корень уравнения: -3.8805
Значение функции в корне: -3.790612670506732e-05
Число итераций: 4
Программа завершена успешно

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов. Все рассмотренные методы демонстрируют различные характеристики: метод половинного деления гарантирует сходимость, но является самым медленным; метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, но требует вычисления производной и чувствителен к начальному приближению; метод секущих представляет собой компромисс, не требуя производной, но уступая в скорости методу Ньютона; метод хорд быстрее метода половинного деления, но требует непрерывности; метод простой итерации наиболее требователен к подготовке уравнения и обеспечению сходимости; выбор оптимального метода зависит от конкретной задачи, свойств функции и требуемой точности, а на практике часто используются комбинации методов для повышения эффективности решения.