บทที่ 10

การเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน
Hebbian Learning

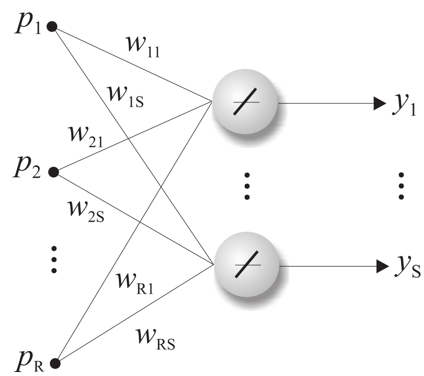
กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน (Hebbian rule) เป็นกฎแรกที่ถูกคิดค้นขึ้นมาสำหรับเครือข่ายประสาทเทียม กฎนี้นำเสนอโดย Donald Hebb [Hebb, 1949] ในปีค.ศ. 1949 โดยเน้นว่ามีความเป็นได้ที่จะมีการทำงานแบบเดียวกันกับการปรับจุดประสาทประสาท (synapse) ในระบบประสาทของมนุษย์ Hebb ได้สรุปงานวิจัยตลอด 2 ทศวรรษไว้ในงานชื่อ "The Organization of Behavior" สัจพจน์ของ Hebb (Hebb's postulate) ที่ถือว่าเป็นที่รู้จักดีที่สุดในงานชิ้นดังกล่าว (ภายหลังเป็นที่รู้จักในนามของ*การเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน*) มีดังนี้

When an axon of cell A is near enough to excite a cell B and repeatedly or persistently takes part in firing it, some growth process or metabolic change takes place in one or both cells such that A's efficiency, as one of the cells firing B, is increased"

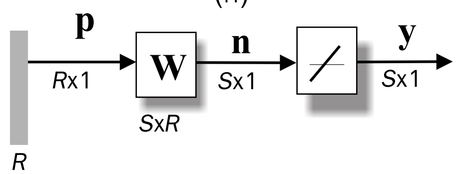
ถึงแม้ว่าการอ้างอิงของ Hebb จะไม่มีหลักฐานทางการแพทย์ยืนยัน ผลการวิจัยภายหลังได้แสดงถึงพฤติกรรมการทำงานของสมองตามกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียนจริง งานของ Hebb ได้สร้างอิทธิพลแนวความคิดให้กับงานวิจัยทางด้านประสาทศาสตร์ (neuroscience) ในเวลาต่อมา อย่างไรก็ตาม สัจพจน์ดังกล่าวข้างต้นไม่มีการนำเสนอในรูปคณิตศาสตร์ Hebb เองก็ไม่ได้นำเสนอกฎการเรียนรู้ใดๆ จากสัจพจน์นั้น จนกระทั่งในเวลาต่อมาได้มีกฎการเรียนรู้ในเชิงคณิตศาสตร์อีกมากมายที่เกี่ยวข้องกับงานของ Hebb ได้ถูกนำเสนอ บทขยายแนวคิดของ Hebb ได้ถูกนำเสนอโดย G.S. Stent [Stent, 1973] และ J.P. Changeux และ A. Danchin [Changeux and Danchin, 1976] โดยได้เพิ่มกรณีที่ว่า ถ้านิวรอน 2 ตัว ซึ่งอยู่คนละด้านของประสานประสาท มีการทำงานไม่สัมพันธ์กันจะทำให้ได้ประสานประสาทที่มีความอ่อนแรงหรืออาจจะถูกกำจัดออกไป D. E. Rumelhart และ J. L. McClelland [Rumelhart and McClelland, 1986] ได้ชี้ให้เห็นว่าสัจพจน์ของ Hebb ไม่เพียงพอที่จะพัฒนาเป็นแบบจำลองที่ชัดเจนได้ ทั้งสองจึงได้เพิ่มบทขยายสัจพจน์ของ Hebb เพื่อให้มีค่าการกระตุ้นแบบบวกและแบบลบดังนี้

Adjust the strength of the connection between units A and B in proportion to the product of their simultaneous activation

ประโยคข้างต้นส่อความว่าถ้าผลคูณของการกระตุ้นมีค่าเป็นบวก การเปลี่ยนแปลงการเชื่อมต่อระหว่างประสาทจะเกิดการเร่งเร้ามากขึ้น (exitatory) ในทางตรงกันข้าม ถ้าผลคูณมีค่าเป็นลบ การเปลี่ยนแปลงการเชื่อมต่อระหว่าง



(ก)



(ข)

รูปที่ 10.1: เครือข่าย LA (Linear Associator)

ประสาทจะเกิดการยับยั้งมากขึ้น (inhibitory)

กฎการเรียนรู้ของ Hebb สามารถนำไปใช้ร่วมกับเครือข่ายหลากหลายแบบ การนำเสนอเนื้อหาของกฎการเรียนรู้ของ Hebb ในที่นี้จะใช้เครือข่ายเรียกว่า**ความสัมพันธ์เชิงเส้น** (linear associator) [Anderson, 1972] หรือ LA ดังแสดงในรูปที่ 10.1 เอาต์พุต $\mathbf{y}$ ของเครือข่ายสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{p} \tag{10.1}$$

หรือ

$$y_i = \sum_{j=1}^{Q} w_{ij} p_j \tag{10.2}$$

เครือข่าย LA เป็นตัวอย่างหนึ่งของเครือข่ายประสาทเทียมที่เรียกว่า**ความจำสัมพันธ์** หรือ *associative memory* ซึ่งสามารถเรียนรู้คู่เวกเตอร์อินพุต-เป้าหมาย Q คู่

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{t}_1\}, \{\mathbf{p}_2, \mathbf{t}_2\}, \ldots, \{\mathbf{p}_q, \mathbf{t}_q\}, \ldots, \{\mathbf{p}_Q, \mathbf{t}_Q\} \tag{10.3}$$

10.1 กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน

จากหลักฐานแนวความคิดของ Hebb เราสามารถแปลให้อยู่ในรูปที่สามารถนำเอาไปใช้ในเครือข่ายประสาทเทียมได้ โดยการนำเอาหลักฐานแนวความคิดของ Hebb มาเรียบเรียงใหม่ได้เป็น

"ถ้ามี 2 นิวรอนที่ซึ่งอยู่คนละฝั่งของจุดประสานประสาททำงานพร้อมๆ กัน ความเข้มแข็งของจุดประสานประสาทนั้นๆ จะเพิ่มขึ้น"

พิจารณาสมการ (10.2) จะได้ว่าอินพุต p_j เชื่อมกับเอาต์พุต y_i ด้วยน้ำหนักประสาท $\mathbf{w}_{ij}$ ดังนั้นจากการอ้างอิงของ Hebb เราสามารถกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า "*ถ้า p_j ซึ่งมีค่าบวกก่อให้เกิด y_i ที่เป็นค่าบวกด้วยแล้ว w_{ij} จะมีค่าเพิ่มขึ้น*" กล่าวคือ

$$w_{ij}^{new} = w_{ij}^{old} + \alpha y_{iq} p_{jq} \tag{10.4}$$

โดยที่ p_{jq} คือองค์ประกอบที่ j ของอินพุตเวกเตอร์ $\mathbf{p_q}$ และ y_{iq} คือองค์ประกอบที่ i ของเอาต์พุตเวกเตอร์ $\mathbf{y_q}$ เมื่อพิจารณากฎการเรียนรู้ข้างต้น จะได้ว่าเมตริกซ์น้ำหนักประสาทจะถูกปรับค่าให้เพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนเมื่อ p_j และ y_i มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือเป็นลบด้วยกันทั้งคู่ ค่าเมตริกซ์น้ำหนักประสาทจะถูกปรับค่าให้ลดลงก็ต่อเมื่อ p_j และ y_i มีเครื่องหมายตรงข้ามกันกฎการเรียนรู้ในสมการ (10.4) เป็นการเรียนรู้แบบมีไม่มีผู้ฝึกสอน(unsupervised) เนื่องจากไม่มีการใช้ข้อมูลของเวกเตอร์เป้าหมายใดๆ เลย ถ้าเราแทนค่า y_q ด้วยเวกเตอร์เป้าหมาย t_q กฎการเรียนรู้ดังกล่าวจะเป็นแบบมีผู้ฝึกสอน(supervised) ดังนี้

$$w_{ij}^{new} = w_{ij}^{old} + \alpha t_{iq} p_{jq} \tag{10.5}$$

โดยที่ t_{iq} เป็นองค์ประกอบที่ i ของเวกเตอร์เป้าหมาย $\mathbf{t}_q$ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{W}^{new} = \mathbf{W}^{old} + \alpha \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T \tag{10.6}$$

จากสมการ (10.6) ถ้ากำหนดให้เมตริกซ์น้ำหนักประสาทมีค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($\mathbf{W}^{old} = \mathbf{0}$) เมื่อนำเอาคู่อินพุต/เป้าหมายป้อนให้กับเครือข่าย LA ทั้งหมด Q คู่ จะได้ค่าเมตริกซ์น้ำหนักประสาทสุดท้ายคือ

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{t}_1\mathbf{p}_1^T + \mathbf{t}_2\mathbf{p}_2^T + \ldots + \mathbf{t}_Q\mathbf{p}_Q^T && (10.7) \\ &= \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T && (10.8) \end{aligned}$$

พิจารณากฎการเรียนรู้ของเฮ็บเบียนจากเครือข่าย LA เราสามารถแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีได้ดังนี้

- <u>กรณี $\mathbf{p}_q$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย</u> พิจารณาเมื่อทำการป้อนอินพุต $\mathbf{p}_r$ เข้าสู่เครือข่าย จะได้เอาต์พุตคือ

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r &= \mathbf{W}\mathbf{p}_r && (10.9) \\ &= \left(\sum_{q=1}^{Q} \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T\right) \mathbf{p}_r && (10.10) \\ &= \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{t}_q \left(\mathbf{p}_q^T \mathbf{p}_r\right) && (10.11) \end{aligned}$$

  เนื่องจาก $\mathbf{p}_q$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_q^T \mathbf{p}_r &= 1, \text{ ถ้า } q = r && (10.12) \\ &= 0, \text{ ถ้า } q \neq r && (10.13) \end{aligned}$$

  ดังนั้นสมการ (10.11) จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{W}\mathbf{p}_r = \mathbf{t}_r \tag{10.14}$$

  นั่นคือถ้าอินพุตเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยแล้ว เครือข่าย LA จะให้เอาต์พุตตรงกับเป้าหมายอย่างถูกต้อง

- <u>กรณี $\mathbf{p}_q$ ไม่เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก</u> สมการ (10.11) จะกลายเป็น

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{W}\mathbf{p}_r = \mathbf{t}_r + \sum_{q \neq r} \mathbf{t}_q (\mathbf{p}_q^T \mathbf{p}_r) \tag{10.15}$$

เทอม $\mathbf{t}_q(\mathbf{p}_q^T\mathbf{p}_r)$ เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการที่อินพุตไม่ใช่เวกเตอร์ตั้งฉาก เอาต์พุตของเครือข่ายจึงไม่ตรงกับเป้าหมายที่ต้องการ ขนาดของค่าความผิดพลาดดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับสหสัมพันธ์ (correlation) ของชุดอินพุตทั้งหมด

10.2 กฎการผกผันเทียม Pseudoinverse Rule

กฎการผกผันเทียมสามารถแก้ปัญหาค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น เมื่อชุดอินพุตในการฝึกสอนตามกฎของเฮ็บเบียนไม่เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก จุดประสงค์ก็คือการลดค่าความผิดพลาดดังกล่าว พิจารณาเป้าหมาย $\mathbf{t}_q$ จากคู่อินพุต $\mathbf{p}_q$ ในเครือข่าย LA จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$\mathbf{W}\mathbf{p}_p = \mathbf{t}_q \tag{10.16}$$

โดยที่ $q = 1, 2, \ldots, Q$ เราสามารถหาค่าเมตริกซ์น้ำหนักประสาท $\mathbf{W}$ ที่ซึ่งทำให้ค่าความผิดพลาดระหว่างเอาต์พุตและเป้าหมายข้างต้นมีค่าน้อยที่สุดได้ในรูปค่าประมาณของค่าความผิดพลาดดังนี้ (สังเกตว่าฟังก์ชันค่าความผิดพลาดอยู่ในเทอมของตัวแปร $\mathbf{W}$)

$$E(\mathbf{W}) = \sum_{q=1}^{Q} \parallel \mathbf{t}_q - \mathbf{W}\mathbf{p}_q \parallel^2 \tag{10.17}$$

พิจารณาสมการ (10.16) ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{W}\mathbf{P} = \mathbf{T} \tag{10.18}$$

โดยที่ $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_q]$ และ $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_q]$ จะได้ว่า

$$E(\mathbf{W}) = \parallel \mathbf{T} - \mathbf{W}\mathbf{P} \parallel^2 = \parallel \mathbf{E} \parallel^2 \tag{10.19}$$

โดยที่

$$\mathbf{E} = \mathbf{T} - \mathbf{W}\mathbf{P} \tag{10.20}$$

และ

$$\parallel \mathbf{E} \parallel^2 = \sum_i \sum_j e_{ij}^2 \tag{10.21}$$

เราสามารถหา $\mathbf{W}$ ที่ทำให้ $\mathbf{E}$ เป็นศูนย์ได้นั่นคือ

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} \tag{10.22}$$

ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วจะเป็นไปได้ยากที่จะคำนวณหาเมตริกซ์ $\mathbf{P}^{-1}$ อย่างไรก็ตาม จากกฎการผกผันเทียม เราสามารถคำนวณหาค่า $\mathbf{W}$ ที่ซึ่งทำให้ค่า $\mathbf{E}$ มีค่าน้อยที่สุดได้ดังนี้

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^{+} \tag{10.23}$$

โดยที่ $\mathbf{P}^{+}$ คือเมตริกซ์ผกผันเทียมของ Moore-Penrose ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{+}\mathbf{P} = \mathbf{P} \tag{10.24}$$
$$\mathbf{P}^{+}\mathbf{P}\mathbf{P}^{+} = \mathbf{P}^{+} \tag{10.25}$$
$$\mathbf{P}^{+}\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{+}\mathbf{P})^T \tag{10.26}$$
$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{+} = (\mathbf{P}\mathbf{P}^{+})^T \tag{10.27}$$

เราสามารถคำนวณหาเมตริกซ์ผกผันเทียมได้ดังนี้

$$\mathbf{P}^{+} = (\mathbf{P}^{T}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{T} \tag{10.28}$$

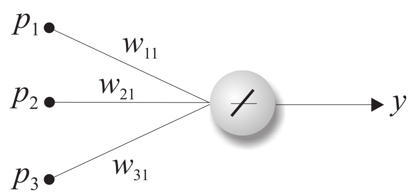
ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน ทั้งในกรณีเวกเตอร์อินพุตไม่ตั้งฉากและตั้งฉากกัน รวมไปถึงการใช้เมตริกซ์ผกผันเทียมในการคำนวณหาเมตริกซ์น้ำหนักประสาท ที่ให้ค่าความผิดพลาดในการฝึกสอนน้อยที่สุด

■ **ตัวอย่างที่ 10.1** กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน: กรณีเวกเตอร์อินพุตไม่ตั้งฉากกัน

พิจารณาคู่อินพุต-เป้าหมายต่อไปนี้ (อินพุตมีขนาดเท่ากับ 3 และเอาต์พุตมีขนาดเท่ากับ 1)

$$\left\{\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_1 = [-1]\right\} \text{ และ } \left\{\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_2 = [1]\right\} \tag{10.29}$$

รูปที่ 10.2 แสดงเครือข่าย LA ขนาด 3 อินพุต 1 เอาต์พุตสำหรับตัวอย่างนี้ พิจารณาคำนวณหาเมตริกซ์น้ำหนัก



รูปที่ 10.2: เครือข่าย LA ขนาด 3 อินพุต 1 เอาต์พุต

ประสาทจาก $\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^T$ โดยที่ $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \mathbf{T}\mathbf{P}^T && (10.30)\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T && (10.31)\\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} && (10.32)
\end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อคำนวณหาเอาต์พุตแล้วจะให้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{W}\mathbf{p}_1 && (10.33)\\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} && (10.34)\\
&= [-2] && (10.35)\\
&\neq \mathbf{t}_1 && (10.36)
\end{aligned}$$

และ

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{W}\mathbf{p}_2 \tag{10.37}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10.38}$$

$$= [2] \tag{10.39}$$

$$\neq \mathbf{t}_2 \tag{10.40}$$

จะเห็นว่าเอาต์พุตที่ได้ไม่ตรงกับเป้าหมาย อันเนื่องมาจากการที่อินพุตไม่เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากนั่นเองพิจารณาคำนวณหา $\mathbf{W}$ ด้วยเมตริกซ์ผกผันเทียมดังนี้

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^{+} \tag{10.41}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{+} \tag{10.42}$$

โดยที่ $\mathbf{P}^{+}$ สามารถคำนวณจากสมการที่ (10.28) ได้ดังนี้

$$\mathbf{P}^{+} = (\mathbf{P}^T\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T \tag{10.43}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{10.44}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & -0.25 \\ -0.50 & 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \tag{10.45}$$

ดังนั้นจะได้เมตริกซ์น้ำหนักประสาทคือ

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^{+} \tag{10.46}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & -0.25 \\ -0.50 & 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \tag{10.47}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.48}$$

ลองทดสอบกับอินพุต $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ จะได้

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{W}\mathbf{p}_1 \tag{10.49}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10.50}$$

$$= [-1] \tag{10.51}$$

$$= \mathbf{t}_1 \tag{10.52}$$

และ

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{W}\mathbf{p}_2 \tag{10.53}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10.54}$$

$$= [1] \tag{10.55}$$

$$= \mathbf{t}_2 \tag{10.56}$$

ค่าเอาต์พุตที่ได้จากการใช้กฎการผกผันเทียม มีค่าถูกต้องตามเป้าหมายที่ป้อนให้กับเครือข่าย ■

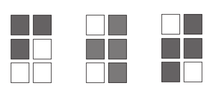
ตัวอย่างข้างต้นเป็นกรณีที่เวกเตอร์อินพุตไม่ตั้งฉากกัน เครือข่ายจะไม่สามารถเรียนรู้ความสัมพันธ์ระหว่างคู่เวก-เตอร์อินพุต/เป้าหมายได้ จึงจำเป็นต้องนำเอากฎการผกผันเทียมมาใช้ เพื่อให้สามารถฝึกสอนเครือข่ายให้ทำงานได้อย่างถูกต้อง ตัวอย่างต่อไปจะแสดงการฝึกสอนเครือข่าย LA ด้วยเวกเตอร์อินพุตที่ตั้งฉากกัน

■ **ตัวอย่างที่ 10.2** กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน: กรณีเวกเตอร์อินพุตตั้งฉากกัน

พิจารณาเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ เป็นอินพุตป้อนให้กับเครือข่าย LA และเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_t$ เป็นเวกเตอร์รูปแบบสำหรับใช้ทดสอบเครือข่ายหลังจากการฝึกสอน ดังแสดงในรูปที่ 10.3 ทำการปรับโดยเรียงค่าในแนวตั้งให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้เป็น

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_t = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10.57}$$

สังเกตว่าเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_t$ มีความคล้ายคลึงกับเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_2$ มากกว่า $\mathbf{p}_1$ จากข้อมูลเวกเตอร์รูปแบบ



$\mathbf{p}_1$ $\mathbf{p}_2$ $\mathbf{p}_t$

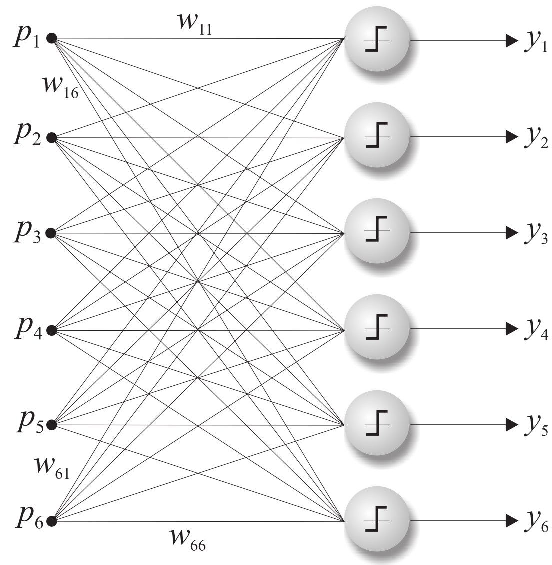
รูปที่ 10.3: เวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ พร้อมทั้งเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_t$ สำหรับใช้ในการทดสอบเครือข่าย

ดังกล่าว เราจะได้เครือข่ายอัตสัมพันธ์ขนาด 6 อินพุตและ 6 เอาต์พุตสำหรับใช้ในการจดจำรูปแบบของเวกเตอร์อินพุตดังแสดงในรูปที่ 10.4 ทดสอบการตั้งฉากกันของรูปแบบเวกเตอร์อินพุต $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ ได้ดังนี้

$$(\mathbf{p}_1)^T\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{10.58}$$

ดังนั้นเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ จึงเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน แต่ขนาดของเวกเตอร์ทั้งสองเท่ากับหนึ่งหน่วย พิจารณาใช้เครือข่าย LA นี้จดจำรูปแบบอินพุต $\mathbf{p}_1$ และ $\mathbf{p}_2$ ดังนั้นเป้าหมายของเครือข่ายก็คือรูปแบบอินพุตทั้งสองนั่นเอง หรือกล่าวได้ว่า $\mathbf{P} = \mathbf{T}$ ทำการหาเมตริกซ์น้ำหนักประสาทของเครือข่ายโดยใช้กฎของเฮ็บเบียนดังนี้

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^T \tag{10.59}$$



รูปที่ 10.4: เครือข่ายอัตสัมพันธ์ขนาด 6 อินพุต 6 เอาต์พุต

โดยที่

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.60}$$

จะได้เมตริกซ์น้ำหนักประสาทคือ

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.61}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.62}$$

ทำการทดสอบรูปแบบ $\mathbf{p}_t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ จะได้ผลตอบสนองจากเครือข่ายดังนี้

$$\mathbf{y} = \text{hardlims}(\mathbf{W}\mathbf{p}_t) \tag{10.63}$$

$$= \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \quad (10.64)$$

$$= \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.65)$$

$$= \mathbf{p}_2 \quad (10.66)$$

พิจารณาผลลัพธ์ที่ได้ จะเห็นว่ารูปแบบที่ใช้ทดสอบ $\mathbf{p}_t$ มีความสอดคล้องหรือคล้ายคลึงกับเวกเตอร์รูปแบบ $\mathbf{p}_2$ มากกว่า $\mathbf{p}_1$ เครือข่ายจึงทำงานได้อย่างถูกต้อง เราสามารถใช้มาตรวัดความคล้ายของเวกเตอร์มาทำการตรวจสอบผลลัพธ์ดังกล่าวได้ ยกตัวอย่างเช่นการใช้ระยะทางแฮมมิง (Hamming distance) เป็นต้น

เครือข่ายข้างต้นสามารถรองรับเวกเตอร์รูปแบบที่ไม่เป็นหนึ่งหน่วยได้ เนื่องจากการใช้ฟังก์ชัน hardlims จึงทำให้ได้เอาต์พุตเป็นค่า +1 และ -1 เท่านั้น ■

10.3 การปรับแต่งกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน

ในช่วงเวลาที่ผ่านมา ได้มีการปรับแต่งรายละเอียดของกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียนพื้นฐานไปมากมายหลายแบบด้วยจุดประสงค์ที่แตกต่างกัน ยกตัวอย่างเช่นในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ทำการตั้งค่าคงที่การเรียนรู้ไว้ที่ 1 ในกรณีที่จำนวนของอินพุตเวกเตอร์มากขึ้น ค่าของเมตริกซ์น้ำหนักประสาทอาจจะมีค่ามากจนเกินเสถียรภาพได้ ดังนั้นเราสามารถจำกัดไม่ให้องค์ประกอบของเมตริกซ์น้ำหนักประสาทมีค่าสูงเกินไปได้ กล่าวคือ

$$\mathbf{W}^{new} = \mathbf{W}^{old} + \alpha \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T \quad (10.67)$$

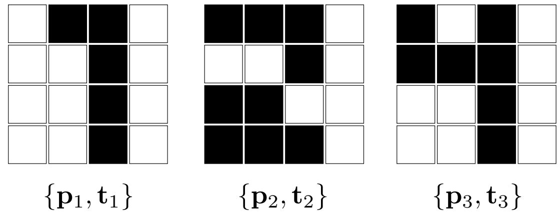
ในอีกกรณีเราสามารถเพิ่มเทอมของค่าคงที่โมเมนตัม η เพื่อให้การปรับค่าเมตริกซ์น้ำหนักประสาทเป็นไปอย่างราบเรียบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{new} &= \mathbf{W}^{old} + \alpha \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T - \eta \mathbf{W}^{old} && (10.68) \\ &= (1-\eta)\mathbf{W}^{old} + \alpha \mathbf{t}_q \mathbf{p}_q^T && (10.69) \end{aligned}$$

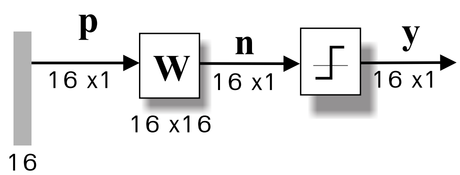
กฎการเรียนรู้ของเฮ็บเบียนยังมีการนำไปปรับเปลี่ยนและประยุกต์ใช้อีกมากมายหลายแบบ รวมไปถึงกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียนสำหรับเครือข่ายที่ไม่มีผู้ฝึกสอน (unsupervised)

10.4 การประยุกต์ใช้กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน: การจดจำรูปแบบ

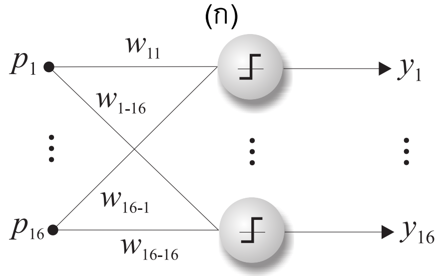
ในหัวข้อนี้จะนำเอากฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียนไปประยุกต์ใช้งานจดจำรูปแบบ (pattern recognition) ในที่นี้จะใช้เครือข่ายพิเศษของหน่วยความจำสัมพันธ์ (associative memory) เรียกว่า**หน่วยความจำอัตสัมพันธ์** หรือ *auto*associative memory ที่ซึ่งเป้าหมายของเครือข่ายมีค่าเท่ากับอินพุตที่ป้อนให้กับเครือข่าย (นั่นคือ $\mathbf{t}_q = \mathbf{p}_q$)



รูปที่ 10.5: รูปแบบตัวเลข 1 2 และ 4



(ก)



(ข)

รูปที่ 10.6: เครือข่าย LA สำหรับทำอัตสัมพันธ์ขนาด 16 อินพุต 16 เอาต์พุต

เราสามารถใช้หน่วยความจำอัตสัมพันธ์ในการบันทึกรูปแบบของอินพุต และในภายหลังสามารถระบุรูปแบบของอินพุตได้ ถึงแม้ว่าจะทำการป้อนอินพุตที่ผิดเพี้ยนให้กับเครือข่ายก็ตามในที่นี้เราจะทำการจดจำรูปแบบของตัวเลข 3 ตัวคือ $\{1, 2, 4\}$ ดังแสดงในรูปที่ 10.5 ภาพตัวเลขดังกล่าวเป็นเมตริกซ์ 4×4 ที่ซึ่งจุดขาวจะแทนด้วยค่า -1 และจุดดำจะแทนด้วยค่า 1 ตัวอย่างอินพุต $\mathbf{p}_1$ สามารถเขียนได้ดังนี้

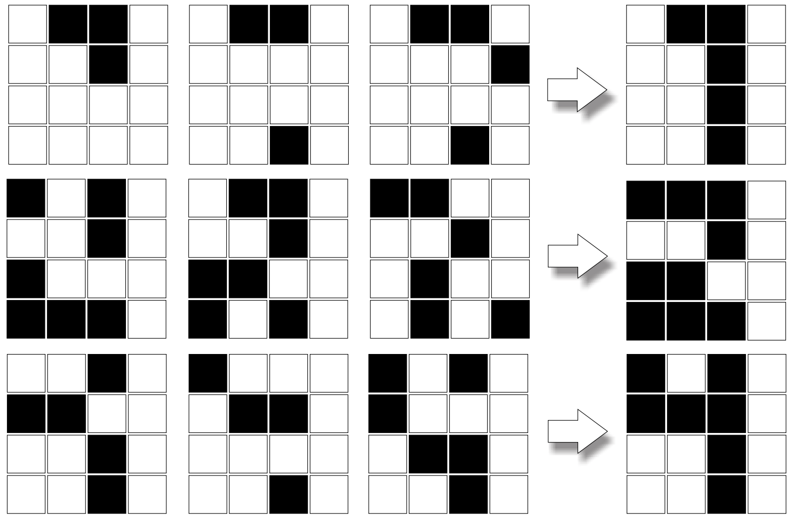
$$\mathbf{p}_1 = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]^T \qquad (10.70)$$

จากกฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียน เราจะสามารถคำนวณเมตริกซ์น้ำหนักประสาทได้ดังนี้

$$\mathbf{W} = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \mathbf{p}_3\mathbf{p}_3^T \qquad (10.71)$$

เนื่องจากองค์ประกอบของเอาต์พุต ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์อินพุต ประกอบไปด้วยค่า -1 และ 1 เท่านั้น เราจะทำการปรับเครือข่าย LA ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ชั้นเอาต์พุตเป็นแบบฮาร์ดลิมิต โครงสร้างของเครือข่ายในที่นี้แสดงในรูปที่ 10.6 เมตริกซ์น้ำหนักประสาทที่ได้สามารถบันทึกรูปแบบของตัวเลขทั้งสามแบบไว้ได้ ทดลองป้อนอินพุตที่มีความผิดเพี้ยนเข้าไปในเครือข่าย ผลลัพธ์ที่ได้มีดังรูปที่ 10.7 จากผลลัพธ์ที่ได้จะเห็นว่าเครือข่าย LA ที่ใช้กฎการเรียนรู้แบบเฮ็บเบียนสามารถจดจำรูปแบบข้อมูลได้ ถึงแม้ว่าข้อมูลดังกล่าวจะมีการผิดเพี้ยนไป (ในระดับหนึ่ง)

ตัวอย่างการจดจำรูปแบบข้างต้น แสดงให้เห็นถึงลักษณะความเป็นหน่วยความจำอัตสัมพันธ์ของเครือข่าย ซึ่งถือเป็นหนึ่งในคุณสมบัติที่น่าสนใจของเครือข่ายประสาทเทียม ด้วยเทคโนโลยีทั้งทางด้านซอฟต์แวร์และฮาร์ดแวร์ ทำให้ในปัจจุบันนี้ การประยุกต์ใช้งานการจดจำรูปแบบอยู่ในระดับที่สามารถใช้งานได้ในชีวิตจริง จุดเริ่มต้นก็มาจากเครือข่ายประสาทเทียมนี่เอง



รูปที่ 10.7: ผลทดสอบกับอินพุตที่มีความผิดเพี้ยนทั้งรูปแบบที่มีข้อมูลหายไปและรูปแบบที่มีสัญญาณรบกวน

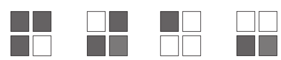
10.5 สรุป

กฎการเรียนรู้ของเฮ็บเบียนถือเป็นกฎที่ทรงอิทธิพลกฎหนึ่งในโลกของเครือข่ายประสาทเทียม ความสำคัญของกฎดังกล่าว คือการเป็นกฎแรกที่ได้รับการนำเสนอสำหรับงานของเครือข่ายประสาทเทียม และยังมีผลต่อเนื่องกับการค้นพบเกี่ยวกับการทำงานในระบบประสาทของสิ่งมีชีวิต ในเวลาต่อมาอีกด้วย นอกไปจากนั้นแล้ว กฎการเรียนรู้ของเฮ็บเบียนที่นำเสนอในบทนี้ ยังปรากฏในรูปเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้การศึกษาการเรียนรู้หรือการออกแบบรวมไปถึงการนำไปใช้งานของเครือข่ายประสาทเทียม เป็นไปอย่างมีระบบและมีประสิทธิภาพยิ่ง

โจทย์คำถาม

10.1. จงออกแบบเครือข่ายอัตสัมพันธ์สำหรับจดจำรูปแบบในรูปที่ 10.8

- ใช้กฎของเฮ็บเบียนในการฝึกสอนเครือข่าย (*หมายเหตุ* จำนวนเวกเตอร์รูปแบบเท่ากับ 3 ขนาดของเวกเตอร์เอาต์พุตต้องมีขนาดอย่างน้อยมากกว่าหรือเท่ากับ 2) พร้อมทั้งทดสอบการตั้งฉากของรูปแบบอินพุต
- หาผลตอบสนองของเครือข่ายที่ได้ต่อรูปแบบเวกเตอร์ $\mathbf{p}^t$
- อภิปรายการออกแบบและผลการทดสอบเครือข่าย



$\mathbf{p}^1$ $\mathbf{p}^2$ $\mathbf{p}^1$ $\mathbf{p}^t$

รูปที่ 10.8: รูปแบบเวกเตอร์สำหรับฝึกสอนและทดสอบเครือข่าย

10.2. พิจารณาคู่อินพุต/เอาต์พุตของเวกเตอร์รูปแบบต่อไปนี้

$$\left\{\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_1 = 1\right\}, \left\{\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t_2 = -1\right\}, \left\{\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_3 = 1\right\}$$

- จงออกแบบเครือข่ายและทำการฝึกสอนให้จดจำรูปแบบข้างต้น (*หมายเหตุ* พิจารณาใช้ไบอัสด้วย)
- ใช้กฎผกผันเทียมช่วยในการออกแบบเครือข่าย พร้อมทั้งทดสอบการทำงานของเครือข่ายที่ได้

10.3. ถ้าเปลี่ยนค่าในเวกเตอร์รูปแบบจาก +1 และ -1 เป็น 1 และ 0 จงแสดงว่ากฎของเฮ็บเบียนจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร?

บรรณานุกรม

J.A. Anderson. A simple neural network generating an interactive memory. In *Mathematical Biosciences*, volume 14, pages 197--220, 1972.

J. P. Changeux and A. Danchin. Selective stabilization of developing synapses as a mechanism for the specification of neural networks. *Nature*, 264:705--712, 1976.

D. O. Hebb. *The Organization of Behavior*, chapter Introduction and chapter 4, pages xi--xix, 60--78. Wiley, New York, 1949.

D. E. Rumelhart and J. L. McClelland. Parallel distributed processing. volume 1, Cambridge, MA, 1986. M.I.T. Press.

G. G. Stent. A physiological mechanism for hebb's postulate of learning. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, volume 70, pages 997--1001, 1973.