Karlsruher Institut für Technologie

Tutorium Algorithmen 1

07 · Bellmand-Ford, Floyd-Warshall, Heaps · 10.6.2024

Peter Bohner Tutorium 3

Bellman-Ford

Alle Kanten relaxieren, bis es keine Änderung mehr gibt

```
BELLMAN-FORD(Graph G = (V, E), Node s):
  d := [∞, ..., ∞]
  d[s] := 0
  for i ∈ {1, ..., n − 1} do
    for Edge (u, v) ∈ E do
      if d[v] > d[u] + w(u, v) then
        d[v] := d[u] + w(u, v)
  for Edge (u, v) ∈ E do
    if d[v] > d[u] + w(u, v) then
      d[v] := −∞
```


Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Bellman-Ford

Alle Kanten relaxieren, bis es keine Änderung mehr gibt

Bellman-Ford(*Graph* $G = (V, E)$, *Node* s):

$d := [\infty, \ldots, \infty]$
$d[s] := 0$
for $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **do**
  for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**
    if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **then**
      $d[v] := d[u] + w(u, v)$
for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**
  if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **then**
    $d[v] := -\infty$

- Wie lange kann ein kürzester Pfad ohne ≤ 0-Kreis höchstens sein? $n - 1$
- Warum reichen $n - 1$ Iterationen?

Nach i Iterationen haben wir auf jeden Fall alle kürzesten Wege der Länge höchstens i gefunden

- Warum gibt es einen negativen Kreis bei Veränderung in der n-ten Iteration?

Aus der Verbesserung folgt, dass es einen Weg der Länge n gibt, der kürzer ist, als alle Wege der Länge $n - 1$, somit muss dieser einen negativen Kreis enthalten.

Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Bellman-Ford

Karlsruher Institut für Technologie

Alle Kanten relaxieren, bis es keine Änderung mehr gibt

BELLMAN-FORD(*Graph* $G = (V, E)$, *Node* s):

$d := [\infty, \ldots, \infty]$
$d[s] := 0$
for $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **do**
  for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**
    if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **then**
      $d[v] := d[u] + w(u, v)$
for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**
  if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **then**
    $d[v] := -\infty$

- Best-case Laufzeit?

  $\mathcal{O}(n + m)$, wenn wir alle Kanten in der Reihenfolge relaxieren, dass wir im ersten Durchlauf direkt alle kürzesten Wege finden. (Warum ist das möglich?)

- Worst-case Laufzeit? $\mathcal{O}(n \cdot m)$

Floyd-Warshall

Jeden Knoten als Zwischenpunkt auf einem kürzesten Pfad in Betracht ziehen

FLOYD-WARSHALL(*Graph* $G = (V, E)$):

```
d := n × n-Matrix mit ∞ initialisiert
for Node u ∈ V do
    d[u][u] = 0
for Edge (u, v) ∈ E do
    d[u][v] = Kantenlänge von (u, v)
for v ∈ V do
    for u ∈ V do
        for w ∈ V do
            if d[u][v] + d[v][w] < d[u][w] then
                d[u][w] := d[u][v] + d[v][w]
```


Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Floyd-Warshall

Karlsruher Institut für Technologie

Idee:
Für jedes $v \in V$ und jedes Start-Ziel-Paar u, w:
Finden wir einen kürzeren Weg von u nach w, wenn wir über v gehen?

Korrektheit:

- Invariante: Nach dem Betrachten der Knoten $V_i := \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ stehen in d die Längen der kürzesten Pfade zwischen allen Punkten im Graphen, die ausschließlich über Knoten in V_i führen.

$\Rightarrow$ Am Ende kennen wir die Distanz zwischen allen Knoten im Graphen. (All Pairs Shortest Path)

Laufzeit ($n = |V|$, $m = |E|$):

- $\mathcal{O}(n^3)$
- APSP mit Bellman Ford: $n \cdot \mathcal{O}(nm) = \mathcal{O}(n^2 m)$ (immer schlechter)
- APSP mit Dijkstra: $n \cdot \mathcal{O}(n \log n + m) = \mathcal{O}(n^2 \log n + nm)$ (nur bei Kantengewichten ≥ 0)

Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Floyd-Warshall

Animation für Beispiel

Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Floyd-Warshall – Quiz

- Funktioniert Floyd-Warshall auch mit negativen Kanten?
- Was passiert bei negativen Zyklen?

Heaps

Beispiel

Repräsentation durch Array

Build Heap

Quiz

Aufgabe - Heapsort

Aufgabe - Mediansuche

decPrio – Lazy Evaluation

Zusammenfassung

Was haben wir gemacht?

- Algorithmus von Bellman-Ford
- Algorithmus von Floyd-Warshall
- APSP
- Heaps

Worauf könnt ihr euch nächste Woche freuen?

- Bäume

Peter Bohner - peter.bohner@student.kit.edu

Fragen?

Fragen!

xkcd