Ordlista GUI

Oscar Palm

March 2022

Contents

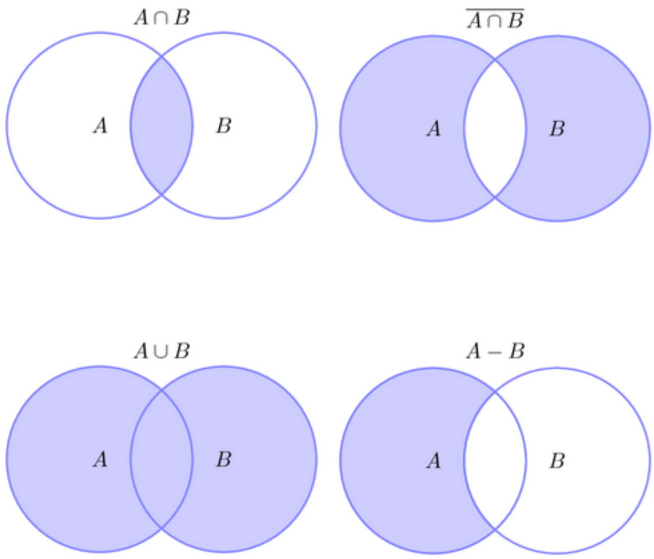
Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för <u>element</u>.

En mängd A bestående av elementen a_1, a_2, ... , a_n skrivs som $A = [a_1, a_2, ..., a_3]$. Om A och B är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör A eller B. $A \cap B$ alla element som tillhör A <u>och</u> B. Konstruktionen $A \cup B$ kallas för <u>unionen</u> av A och B och $A \cap B$ kallas för <u>snittet</u>.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade <u>venndiagram</u>:



Ett par saker till

- $\varnothing = \{\}$, den tomma mängden
- A^c alla element som inte finns i A (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matetmatik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -2-, -1, 0, 1, 2, ...\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}\}$, där $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ speciellt i fokus.

Intervall

Ett <u>intervall</u> är en delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och <u>alla</u> tal mellan två av sina element.
Mer konkret:

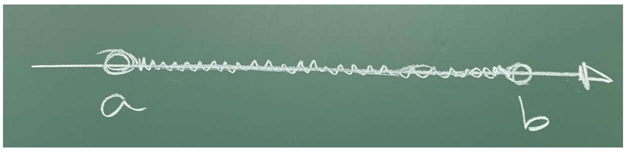


Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs (a, b)

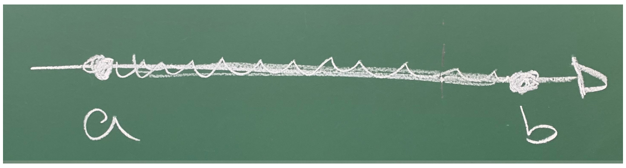


Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,]$

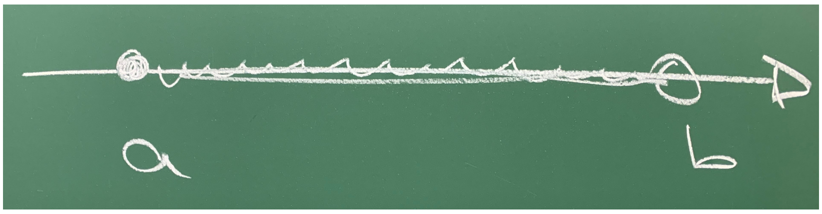


Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,)$

Ex Lös olikheten $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$ och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

Lösning Måste försöka skriva om olikheten till faktoriserad form!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till $x^2 - 2x - 8$ genom kvadratkomplettering!

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ eller } x = -2$$

Kan nu skriva om $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ som $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$. Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

		-2		0		4	
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Tot	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ser att $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ uppfylls i intervallen $[-2, 0]$ och $[4, \infty)$ och kan skriva lösningen som $[-2, 0) \cup [4, \infty)$.

<u>**Absolutbelopp**</u> Absolutbelopp av ett tal $x \in \mathbb{R}$ definieras som:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$$

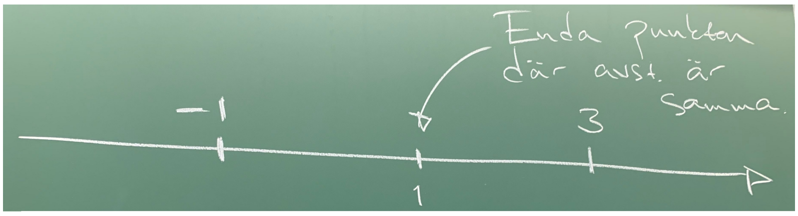
Följande tolkning gäller: Givet ett tal $a \in \mathbb{R}$ så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|x-a|$ = avståndet mellan x och a.

Vidare gäller också, givet ett fixt tal $D \geq 0$, att $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D$ $\Leftrightarrow$ mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ vars avst. till a är $\overset{<}{\underset{>}{=}} D$, dvs

$$|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow \begin{matrix} a-D < x < a+D \\ x = a-D \\ x < a-D, x > a+D \end{matrix}$$

Ex (P1.41)
Lös olikheten $|x + 1| > |x - 3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

Lösning
$|x + 1| = |x - (-1)| =$ "avst mellan x och (-1)"
$|x - 3| =$ "avst. mellan x och 3"
Så "avst. mellan x och (-1)" > "avst. mellan x och 3"
Till höger om 1 så kommer x alltid att vara längre från (-1) än 3.

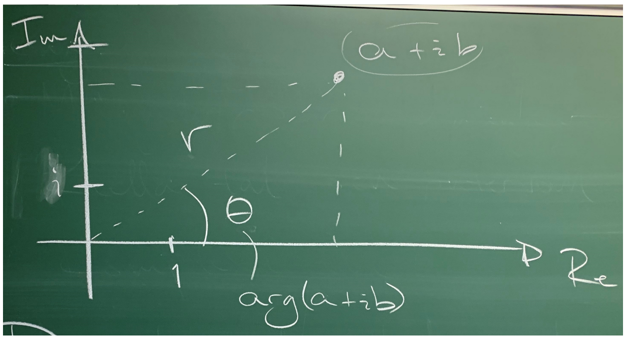


Komplexa tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- a kallas för realdelen av z $Re(z)$
- b kallas för imaginärdelen av z $Im(z)$

Den imaginära enheten i löser definitionsmässigt ekv. $x^2 + 1 = 0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a + ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.
Det gäller att $r^2 = |a+ib|^2 = \vdots = a^2+b^2$. Givet r och argumentet θ kan alla kompexa tal skrivas $z = r(cos(\theta)+i \cdot sin(\theta))$



Funktioner

4.1 Vad är en funktion?

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data. (Supervised learning)
I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat tal. Kan tänkas som en 'regel' f som avbildar <u>ett</u> givet tal x till <u>ett</u> annat tal y. Alla de värden som är tillåtna att mata in i f kallas för funktionens definitionsmängd och betecknas $D(f)$. Mängden av alla möjliga y-värden som f kan returnera kallas för värdemängden (range) och betecknas $R(f)$.

Ex Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har $D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$ och $R(f) = \backslash\{0\}$.

En funktionsgraf (eller bara graf) givet en funktion f utgörs av alla punkter $(x,y) = (x, f(x))$.
Några viktiga koncept:

- En funktion sägs vara <u>jämn</u> om $f(-x) = f(x)$ där $(x \in D(f))$

  Betyder att f är symmetrisk m.a.p. y-axeln.

- En funktion sägs vara <u>udda</u> om $f(-x) = -f(x)$ där $(x \in D(f))$

  Betyder att f är antispegelsymmetrisk m.a.p. y-axeln.

- En funktion är <u>injetiv</u> om varje par $x_1, x_2 \in D(f)$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste $x_1 = x_2$.
- En funktion f som avbildar en mängd $\underline{\overline{X}}$ på en annan mängd $\underline{\overline{Y}}$ sägs vara <u>surjektiv</u> om $\underline{\overline{Y}} = R(f)$.

4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom <u>komposition</u>. Kan göras på två sätt:

- $f \circ g := f(g(x))$
- $g \circ f := g(f(x))$

Notera att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet.

4.3 Polynom och rationella funktioner

Ett polynom är en funktion som kan skrivas som:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

där $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ kallas för polynomets koefficienter och talet n kallas för polynomet <u>grad</u>.
En rationell funktion $R(x)$ är en funktion som kan skrivas som en kvot av två polynom $P(x)$ och $Q(x)$, dvs. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. (jmf. de rationella talen $\mathbb{Q}$)
Definitionsmängden $D(R)$ begränsas enbart av nollställena till $Q(x)$. dvs. $D(R) = R\backslash\{x \in R : Q(x) = 0\}$.

4.3.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest.

Ex $\frac{29}{6} = 4 + \frac{5}{6}$

Motsvarande funkar äver för rationella funktioner och metoden för att hitta "heltalsdelen" och "resten" kallas Polynomdivision.

Ex (P 6.18) Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion.

Lösning .

$$\begin{array}{l} \underline{x-1} \\ x^4 + x^2 | \underline{x^3 + x^2 + 1} \\ \underline{-x \cdot (x^3 + x^2 + 1)} \\ -x^3 + x^2 - x \\ \underline{-(-1)(x^3 + x^2 + 1)} \\ 2x^2 - x + 1 \end{array}$$

Eftersom polynomet $2x^2x + 1$ har lägre grad än nämnaren $x^3 + x^2 + 1$ tar divisionsalgoritmen slut. Vi har fått att $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x-1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1}$ (Kontrollera att det stämmer!)
$\square$

4.3.2 Algebrans fundamentalsats

Enligt aritmikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal. t.e.x. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Liknande resultat finns för polynom! Algebrans fundamentalsats säger att varje polynom av gran n har exakt n st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller även faktorsatsen:

Sats: Talet r är en rot (dvs. ett nollställe) till ett polynom P av grad minst 1 om och endast om $(x - r)$ är en faktor av $P(x)$.

Eftersom alla polynom P av grad ≥ 1 har precis n st. nollställen, säg $r_1, \ldots, r_n$, kan man alltså alltid faktorisera ett polynom som $P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n)$.

Trigonometri

5.1 Grundläggande trigonometri

De trigonometriska funktionerna $cos\theta$ och $sin\theta$ definieras som $x-$ respektive $y-$koordinaterna på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln θ. Pythagoras sats ger omedelbart att $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ (trigonometriska ettan).
Vinkeln θ mäts oftast i radianer men kan också mätas i grader. Det gäller att π radianer motsvarar 180 deg. Utifrån sin och cos definieras vidare funktionen tan som:

$$tan\theta := \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:

Sinussatsen: $\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$

Cosinussatsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$

Ex: (P 6.53) Visa att arean av en godtycklig triangel ABC kan beräknas som $\frac{1}{2}bc \cdot sinA = \frac{1}{2}ab \cdot sinC = \frac{1}{2}ca \cdot sinB$.

Lösning: Rita och räkna!
Area= $\frac{x_1 \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$
Men: $sinA = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot sinA \Rightarrow$ Area= $\frac{x_1 \cdot csinA + x_2 \cdot csinA}{2} = \frac{(x_1+x_2) \cdot c \cdot sinA}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \cdot sinA$
De andra formlerna följer analogt. $\square$

Talföljder

Studium av talföljder är ett av matematikens mest klassiska områden.

Fibonnacciföljden är en talföljd som har fått sitt namn efter den italienske matematikern Leonardo Fibonacci. Följden är definierad som: 0,1,1,2,3,5,8,... Den återfinns i många naturfenomen och har bl.a. använts för att beskriva tillväxt av populationer och tillväxt av råvaror. Följden kan definieras rekursivt som:

$$F_0 = 0F_1 = 1F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Primtalssekvensen 2,3,5,7,11,... Finns det formel för att beskriva sekvensen? Det är ännu inte besvarat. =/

6.1 Begrepp

Vi ska försöka formalisera begreppen, i synnerhet för oändligt långa talföljder.
Låt $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}$ vara godtycklig talföljd. Man säger att $\{a_n\}$ är:

- Begränsad ovan-/underifrån om det finns ett tal L sådan att $a_n \leq L$ eller $a_n \geq L$ $\forall n = 1, 2, 3 \dots$
- Begränsad om den är begränsad <u>både</u> ovan- och underifrån.
- Positiv/Negativ om $a_L \leq 0/a_L \geq 0$ $\forall n = 1, 2, \dots$.
- Växande/Avtagande om $a_n \leq a_{n+1}/a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$.
- Monoton om den är antingen växande eller avtagande.
- Alternerande om $a_{n+1} \cdot a_n < 0$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$.

6.1.1 Konvergens

Låt $\{a_n\}$ vara en godtycklig talföljd. Vi säger att $\{a_n\}$ konvergerar till L om $a_n \to L$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$.
På svenska betyder detta att a_n närmar sig L alltmer när n blir större och större utan att någonsin nå L.
Måste försöka precisera vad detta betyder rent matematiskt.

Definition: (konvergent talföljd)
Man säger att en talföljd $\{a_n\}$ konvergerar mot $L \in R$, om det för varje positivt tal $\varepsilon > 0$ existerar ett positivt heltal N så att det för alla $n \geq N$ gäller att $|a_n - L| < \varepsilon$.

intuitivt: $\{a_n\}$ konvergerar mot L om <u>alla</u> tal tillräckligt långt in i följden ligger gdtyckligt nära talet L. Av detta följer "enkelt" att:

- Om $\{a_n\}$ konvergerar så är den begränsad.
- Om $\{a_n\}$ är begränsad ovanifrån och växande så är $\{a_n\}$ konvergent. (motsvarande för underifrån och avtagande).

Räknelagar

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ om $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.
- Om $a_n \leq b_n \leq c_n$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ och $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ så $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ex: (9.1.25)
Bestäm om möjligt det tal L som $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$ konvergerar mot då $n \to \infty$.

Lösning: Det gäller att

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \sqrt{(n+1)\cdot n} - \sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= \sqrt{n+1}\cdot\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\left(= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\right)$$

och

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2(n-1)} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{2(n-1)} = \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})} \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

så

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2}$$

□

Gränsvärden

Ett av de mest kraftfulla verktygen inom matematisk analys är gränsvärden för funktioner, dvs. $\lim_{x\to a} f(x)$ $a \in \mathbb{R}$. $\rightsquigarrow$ derivator, integraler, differentialekvationer, ... Hur ska man definiera gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$? Man skulle kunna inspireras av definitionen för talföljder.

7.1 Definition gränsvärde

Definition: (försök)
Man säger att $f(x)$ konvergerar mot värdet $L \in \mathbb{R}$ då x om det för varje talföljd $\{x_n\}$ så att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Bättre definition: Man säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{x\to a} f(x) = L$, om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett annat tal $\delta > 0$ (som eventuellt beror av ε) sådant att om $0 < |x - a| < \delta$ så ligger x i fs definitionsmängd och $|f(x) - L| < \varepsilon$.

1. $f \to L_1$ när $x \to a_1$?

   Ja! Går alltid att hitta $\delta > 0$ så att $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ oavsett ε

2. $f \to L_2$ när $x \to a_1$?

   Omöjligt att hitta $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \varepsilon$ om ε är tillräckligt litet.

Ex: (1.5.19)
Använd definitionen av gränsvärdet för att bevisa $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$

Lösning: Vi vill hitta $\delta > 0$ så att $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$ så länge $0 < |x - 1| < \delta$ (givet vilket $\varepsilon > 0$ som helst).
Gäller att $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$. Om $0 < \varepsilon \le 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$
Om $\varepsilon > 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < x < (1+\varepsilon)^2$
Notera att$(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$ alltid implicerar att $1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$, det vill säga $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.
$(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$ så $-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2-\varepsilon) \Rightarrow$ $-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$
Välj därför $\delta = \varepsilon \cdot (2-\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$.
För $\varepsilon \ge 2$, välj t.ex. $\delta = 1$ eftersom $|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \le \varepsilon$
$\square$

Kontinuitet

8.1 Intro

Matematisk analys handlar om studiet av funktioner definierade på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. frågeställningar och intuition för ämnet hämtas ofta från fysik/teknik där funktioner bär på någon form av inormation.

Vår definition av funktion är att det är "en regel som avbildar ett tal x i en given definitionsmängd $D(f)$ till ett annat tal y i en värdemängd $R(f)$.

Gruppen av sådana "regler" är enorm, dvs det finns ett oupppräkneligt antal möjliga funktioner, och de flesta av dessa är inte användbara för modellering av verkliga system.

Exempel :
$f(x) = \begin{cases} 1, \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
(Dirichlet-funktionen)($\star\star$)

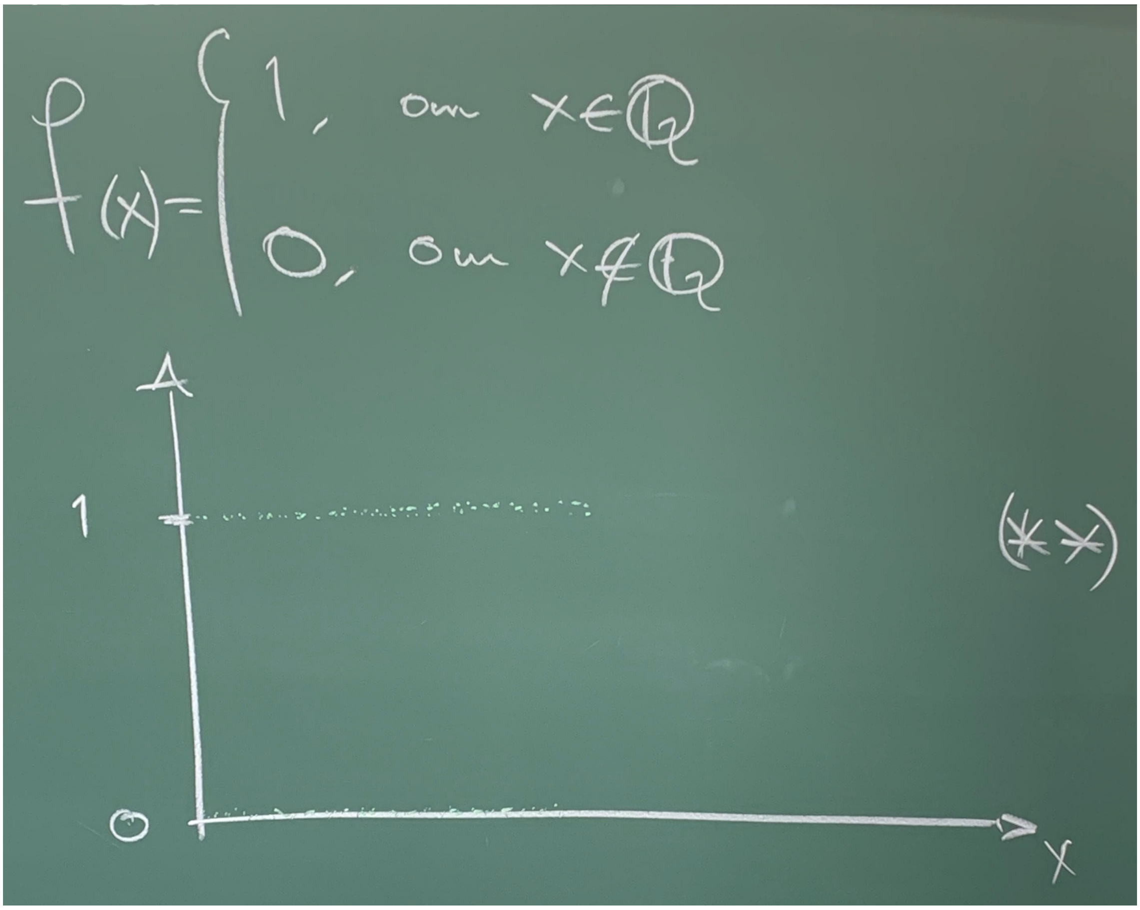
Om man drar en funktion slumpmässigt från mängden av alla funktioner så skulle man nästan säkert dra något i stil med $\star\star$. Vi måste därför hitta vettig begränsad klass av funktioner för att kunna hitta meningsfulla matematiska resultat. En sådan klass är de kontinuerliga funktionerna.

8.2 Definition kontinuerlig funktion

Man säger att en funktion f är kontinuerlig i punkten $x = c$ (som antas vara en inre punkt i $D(f)$) om det gäller att:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Om antingen $\lim_{x \to c} f(x)$ inte existerar eller existerar men inte är lika med $f(c)$ säger man att f är diskontinuerlig i$x = c$. Vad betyder detta? Jo, det betyder att "funktionen hänger ihop i c".

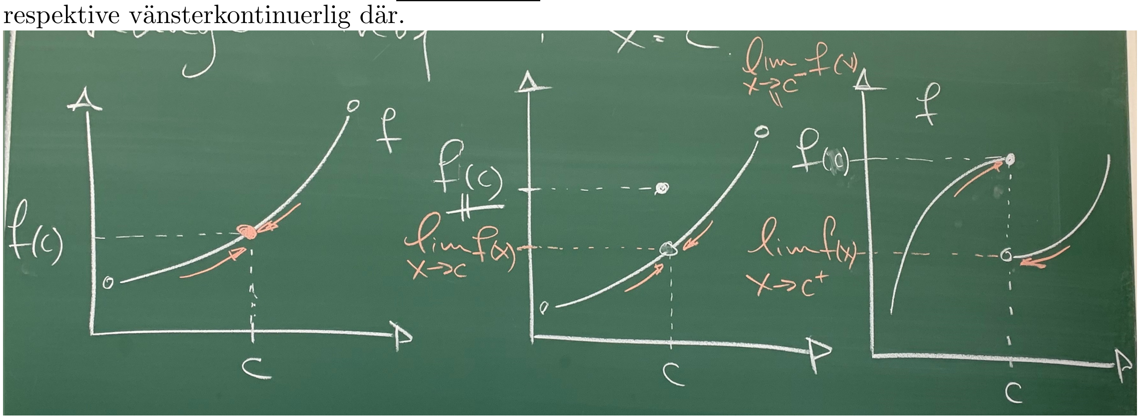


Man säger att en funktion f är kontinuerlig på ett helt itervall I om f är kontinuerlig i varje punkt $x \in I$. Hur hanterar man ändpunkterna i I? Exempelvis om $I = [a, b]$, vad ska gälla för $x = a$ och $x = b$? Jo, f ska vara högerkontinuerlig i $x = a$ och vänsterkontinuerlig i $x = b$:

- Man säger att en funktion f är vänsterkontinuerlig i en punkt $x = c$ om

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

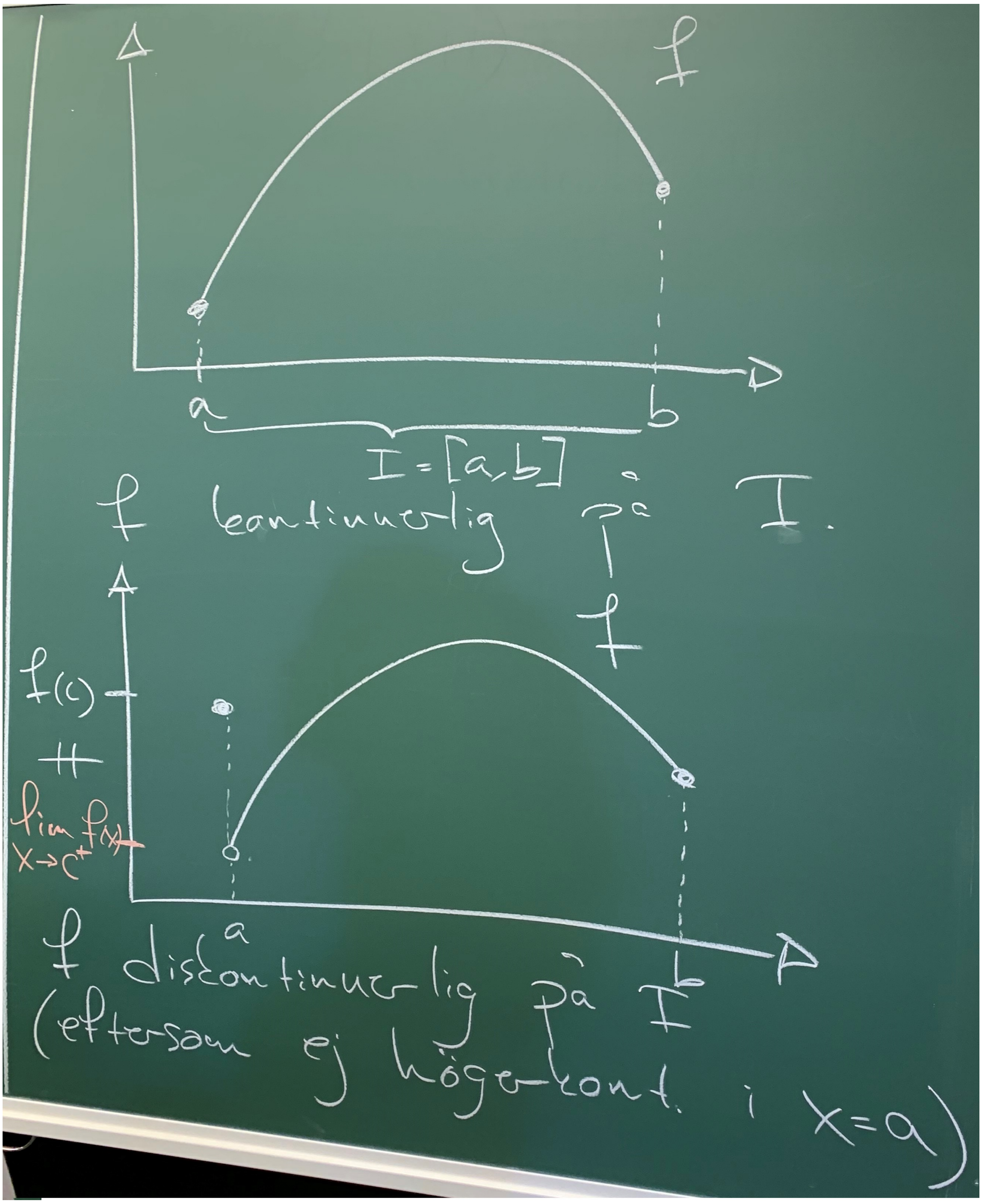
Motsvarande definition gäller för högerkontinuerlig
Så, f benämns som kontinuerlig i randpunkter till ett intervall (t. ex. a och b för $[a, b]$) om den är högerkontinuerlig respektive vänsterkontinuerlig där.



Ex: (1.4.9)
Beskriv var i sin definitionsmängd som följande funktion är kontinuerlig, vänster- respektive höger-kontinuerlig och diskontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ om } x \neq 0 \\ 0, \text{ om } x = 0 \end{cases}$$

Lösning :
Försök att skissa funktionen:



- Funktionen $\frac{1}{x^2}$ är alltid positiv ($x^2 > 0$)

- Om x är <u>stort</u> (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx 0^+$
- Om x är nära 0 (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx +\infty$
- Uppenbart att $\frac{1}{x^2}$ är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$

Alltså, f är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eftersom

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(a) \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

I $x = 0$ är f diskontinuerlig eftersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ och } f(0) = 0 \text{ och } 0 \neq \infty$$

$\square$.

Ex: (1.4.16)
Hur ska man definier funktionen $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4}$ i punkten $x = \sqrt{2}$ för att den ska bli kontinuerlig där?

Lösning :
Vad händer i $x = \sqrt{2}$? "

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0} = ?$$

" Vill studera gränsvärdet $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4} = \frac{x^2-2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+2} \to_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{4}$$

Vi ser att f naturligt kan definieras i punkten $x = \sqrt{2}$ även om det inte var uppenbart från början. Genom att sätta $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$ så blir funktionen kontinuerlig i $x = \sqrt{2}$. dvs.

$$f(x) = \Big|^{\frac{x^2-2}{x^4-4}, x\neq\sqrt{2}}_{\frac{1}{4}, x=\sqrt{2}}$$

Ex: (1.5.3)
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|}$$

Lösning :
Måste reda ut hur de olika absolutbeloppen beter sig i en omgivning av $x = 3$.

$$|5-2x| = \Big|^{5-2x, \text{ om } 5-2x \geq x \leq \frac{5}{2} = 2.5}_{-(5-2x), \text{ om } 5-2x<0 \Leftrightarrow x>2.5}$$

$$|x-2| = \Big|^{x-2, \text{ om } x\geq 2}_{-(x-2), \text{ om } x<2}$$

$$|x-5| = \Big|^{x-5, \text{ om } x\geq 5}_{-(x-5), \text{ om } x<5}$$

$$|3x-7| = \Big|^{3x-7, \text{ om } 3x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{7}{3}\approx 2.3}_{-(3x-7), \text{ om } 3x-7<0 \Leftrightarrow x<2.33}$$

Vi kan alltså skriva gränsvärdet som:

$$\lim_{x\to 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|} = \lim_{x\to 3} \frac{-(5-2x) - (x-2)}{-(x-5) - (3x-7)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-5-x+2}{5-x-3x+7} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4x+12} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4(x-3)} = \frac{-1}{4}$$

$\square$