Matematisk statistik och diskret matematik

Oscar Palm

March 2023

Contents

Föreläsning 1

Grundläggande sannolikhetsteori

1.1 Kombinatorik

För att kunna räkna ut sannolikheten för en händelse behöver vi kunna räkna ut antalet möjliga utfall. Detta görs med hjälp av kombinatorik.

1.1.1 Multiplikationsprincipen

Antag ett slumpexperiment i k steg. Låt n_j vara antalet möjliga utfall i $j \in \{1, \dots, k\}$-te steget. Då ges antalet utfall för hela experimentet av:

$$\Pi_{j=1}^{k} n_j = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Exempel

På en dans var 8 herrar och 9 damer bjudna. Om herrarna bara dansar med damerna och vise versa, hur många olika danspar kan det bli?

1.1.2 Permutation

Hur många tal kan vi bilda med siffrorna $1, 2, 3$ utan att repetera en siffra?
Enligt multiplikationsprincipen finns $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ möjliga kombinationer:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

För att få fram antalet permutationer av $n \in \mathbb{N}$ element kan vi använda följande:
När vi väljer första objektet har vi nst val, för andra har vi $(n-1)$st val och så vidare. Antalet ordningar är då:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} = n!$$

$n!$ kallas $n-$fakultet och är ett sätt att räkna antalet permutationer av n element.
$0-$fakultet definieras som $0! = 1$.

1.1.3 Laplace experiment

Antag att vi har ett slumpmässigt försök med ändligt många möjliga utfall, där varje utfall är lika troligt, då säger man att sannolikheten är likformigt fördelad. Sannolikheten för en händelse A är då:

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|}$$

Där $\|M\|$ betecknar antalet element i mängden M.

1.2 Räkneregler

- **Komplement**: Komplementhändelsen till A definieras som $A' =$ "A inträffar inte"
- **Additivitet**: Om A och B är disjunkta gäller $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- **Additionssatsen**: För godtyckliga händelser A, B gäller $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

1.3 Betingad sannolikhet

Maskiner

I en tillverkningsprocess för en viss produkt kontrolleras kvaliteten, och en produkt klassificeras för enkelhets skull som antingen duglig eller defekt. Efter ett maskinbyte har vi tillgång till data om antalet defekta såväl innan som efter bytet.

	Duglig	Defekt	Totalt
Äldre maskin	170	10	180
Ny maskin	115	5	120
Totalt	285	15	300

$A-$"Slumpvis vald produkt är duglig".
$B-$"Slumpvis vald produkt är tillverkad med äldre maskin".
$C-$"Slumpvis vald produkt är duglig, givet tillverkad med äldre maskin".
$\mathbb{P}(A) = \frac{285}{300}$,
$\mathbb{P}(B)\frac{180}{300}$,
$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{170}{180} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

För två händelser A och B där $\mathbb{P}(B) > 0$ definieras den betingade snnolikheten för A, givet att händelsen B inträffar genom:

$$\mathbb{P}(A\|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

1.4 Multiplikationsregel och Bayes sats

1.4.1 Multiplikationsregel

För två händelser A,B gäller

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A\|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\|A)\mathbb{P}(A)$$

1.4.2 Bayes sats

$$\mathbb{P}(A\|B) = \frac{\mathbb{P}(B\|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Föreläsning 2

Diskreta stokastiska variabler

2.1 Föregående föreläsningen

Bayes sats $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\|A)P(A)}{P(B)}$
$\leftarrow P(A\|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2.2 Stokastiska variabler

Binomialfördelade och Geometriskt fördelade är de som är viktigast idag.

2.2.1 Vad är en stokastisk variabel?

En stokastisk variabel X är en funktion som för varje utfall i ett slumpmässigt försök antar ett reellt tal, dvs. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Diskreta stokastiska variabler

En stokastisk variabel som antar ett ändligt antal/uppräkneligt antal värden

Kontinuerlig stokastisk variabel

Kan istället anta värden i ett intervall.

2.2.2 sannolikhetsfunktion

Kan vara:

- Antalet ögon vid tärningskast
- Antalet gånger vi måste kasta ett mynt innan vi får krona

$$f(x) = P(X = x), x \in \mathbb{R}$$

En funktiin är en sannolikhetsfunktion om och endast om
$f(x) \geq 0$
$\sum_{x\in X(\Omega)} f(x) = 1$
$F(x) = P(X \leq x)$ kallas fördelningsfunktionen till X.

2.2.3 Väntevärde

Väntevärdet ges av

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot f(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$$

Väntevärdet betecknas ofta med μ eller μ_x

2.2.4 varians

X är en diskret slumpvariabel med sannolikhetsfunktionen f och väntevärdet μ.

Variansen av X ges då av

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

Variansen betecknas ofta med σ^2
Standardavvikelsen av X definieras som $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

2.2.5 Bernoullifördelning

Slumptal antingen. 1 eller 0, det existerar.

2.3 Geometrisk fördelning

Anta att X beskriver antalet gånger vi behöver upprepa ett försök tills det lyckas. Anta att försöken är identiska, oberoende av varandra, och lyckas med sannolikhet p. Då är
$P(X = 1) = p$, $P(X = 2) = (1 - p)p$ Och mer generellt

$$f(k) = P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, k \geq 1$$

Vi säger att X är geometriskt förselad med p och skriver $X\tilde{g}eom(p)$

2.4 Binomialfördelning

Föreläsning 3

Kontinuerliga stokastiska variabler

3.1 Täthetsfunktion

Om $f : \setminus \to \mathbb{R}_+$ är en funktion s.a.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Så kallas f för täthetsfunktionen till X.

3.1.1 Konsekvenser

Om $a \in \mathbb{R}$ så är

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

om då $a \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Exempel: Täthetsfunktion

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion
$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{om } 0<x<1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
Bestäm $F(x)$ och beräkna $P(0.1 \leq X \leq 0.8)$
Lösning:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ om } x < 0 \\ 1 \text{ om } x > 1 \\ \int_0^x 3x^2 dx \text{ om } x \in [0,1] \end{cases}$$

Exempel: Täthetsfunktion 2

Visa att om $a < b$ så är funktionen $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) \text{ om } a < x < b \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$ en täthetsfunktion.

3.2 Likformig fördelning

Om en slumpvariabel X har täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) \text{ om } a < x < b \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Så sägs X vara likformigt fördelad på intervallet (a, b). Vi skriver $X \sim \text{unif}(a, b)$.

3.3 Väntevärde, varians och standardavvikelse

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f(x)$. Då är

3.3.1 Väntevärde

Väntevärdet av X ges av

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx$$

Om $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så definieras

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot f(x)dx$$

3.3.2 Varians och väntevärde

Variansen och väntevärdet definieras precis som för diskreta stokastiska variabler.

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

och $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

3.4 Normalfördelning

Om $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$ och en kontinuerlig stokastisk variabel X har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Så är X normalfördelad med parametrar μ och σ. Vi skriver $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$.

3.4.1 Väntevärde och varians

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

3.4.2 Standard normalfördelning

Om $Z \sim N(0, 1)$ så sägs Z ha en *standard normalfördelning*. För en standard normalfördelning gäller

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Man skriver ofta Z istället för X om $>\sim N(0, 1)$ för att man ofta hanterar en annan stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ samtidigt.

3.4.3 Sannolikhetsfunktion

Det finns ingen sluten form för sannolikhetsfunktionen F till $Z \sim N(0, 1)$. Istället hittar man värden för $F(x)$ i en tabell (se sid. 697-698). Ofta skrivs $\Phi(x)$ istället för $F(x)$ när $X \sim N(0, 1)$.

3.5 Transformationer av kontinuerliga stokastiska variabler

$$\frac{\binom{n}{k}^i}{n^2}$$

Föreläsning 4

Fler användbara fördelningar

4.1 Negativ binomialfördelning

Negativ binomialfördelning beskriver hur många gånger vi behöver upprepa ett försök tills r försök har lyckats. Antag att försöken är identiska ,oberoende av varandra, och lyckas med sannolikhet p, då har X en negativ binomialfördelning med parametrarna r och p, och motsvarande sannolikhetsfunktion ges av

$$f(k) = P(X = k)) \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \ , \ k \geq r$$

$X \sim NB(r, p)$ Då kan vi skriva $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ där $X_1, \ldots, X_r \sim \text{geom}(p)$

Exempel

Vad är sannolikheten att vi får en sexa först på det tredje kastet?
Lösning:

$$\text{geom}(\frac{1}{6})$$

4.2 Hypergeometrisk fördelning

Antag att vi har N objekt, varav r har en egenskap vi tycker om. Vi väljer n objekt slumpmässigt och låter X vara antalet av de valda som har egenskapen. Då har X en hypergeometrisk fördelning med parametrarna N, r och n. Sannolikhetsfunktionen ges av

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4.2.1 Väntevärdet och variansen

Väntevärde

$$\mathbb{E}[X] = \frac{nr}{N}$$

Varians

$$\text{Var}(X) = \frac{nr(N-n)(N-r)}{N^2(N-1)}$$

Exempel: Covidsjuka

Antag att man har testat en grupp med 20 personer för SARS-Cov-2, och att 5 av dem hade ett positivt testresultat. Antag att 6 slumpvis valda personer ur gruppen träffas på ett kafe, och låt X vara antalet bland dem har viruset.

1. Bestäm sannolikhetsfunktionen till X
2. Beräkna väntevärde och varians till X
3. Beräkna sannolikheten att minst en av de som träffas har viruset

Lösning:

$$\text{Sannolikhetsfunktion: } P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{6-k}}{\binom{20}{6}}$$

$$\begin{cases} \text{Väntevärde: } \mathbb{E}[X] = \frac{5\cdot 6}{20} = 1.5 \\ \text{Varians: } \mathrm{Var}(X) = \frac{5\cdot 6\cdot 15\cdot 14}{20^2\cdot 19} = \frac{2^2\cdot 7}{4\cdot 19} \approx \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X-0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}}$$

4.3 Poissonfördelning

Poissonfördelning räknar antalet händelser X som inträffar under ett tidsintervall oberoende av varandra, om det förväntade antalet händelser $\lambda > 0$ är känt. Är n stort och $np = \lambda$, så borde vi ha $X \approx \text{bin}(n, p)$
Sannolikhetsfunktionen för enn poissonfördelning ges av:

$$f(x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ , } k \in \{1, 2, \ldots\}$$

λ(intensiteten för X) beskriver antalet händelser per tidsenhet. Vi skriver $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

4.4 Exponentialfördelning

Antag att antalet händelser i intervallet $[0,1]$ är $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. T är tiden vi väntar innan någonting händer. Låt $t > 0$ och låt X_t vara antalet händelser mellan $[0,t]$. Då är $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Vi får

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X_t > 0) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - \frac{e^{-\lambda t}\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

4.4.1 Fördelningsfunktion och täthetsfunktion

$F(t) = P(T \leq t) = -e^{-\lambda t}$ och $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$

4.4.2 Väntevärde, varians och momentgenererade funktioner

$$\begin{cases} \text{Väntevärde: } \mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Varians: } \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \\ \text{Momentgenererade funktionen: } m_T(t) = \frac{1}{1-t/\lambda} \end{cases}$$

4.4.3 Minneslöshet

$$P(T \leq s+t|X \geq t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = P(T \geq s)$$

4.5 χ^2-fördelning

$Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi_n^2$ har en χ^2-fördelning med n frihetsgrader, och vi skriver $Y \sim \chi_n^2$

4.6 Gamma-fördelning

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

Man kan kontrollera att

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$

Föreläsning 5

Flerdimensionella stokastiska variabler

5.1 Diskreta tvådimensionella stokastiska variabler

Diskret

Låt X vara mängden regn, och Y antalet studenter (av totalt 4) som tar med ett paraply. Anta att alla sannolikheter $f_{XY}(x, y)$ ges av tabellen: Då blir

$$F(1,2) = P(X \leq 1, Y \leq 2) =$$

$$= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 0)+$$
$$P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = 0.04 + 0.1 + 0 + 0.2 + 0.05 + 0.04 = 0.43$$

$f(x, y) = c(1 + x + e^{-y}) \qquad y \in [0, 1]$

$$1 = \int\int f(x,y)dxdy = \int_0^\infty (\int_0^1 c(1 + x + e^{-y})dx)dy = \int_0^\infty [c(x + \frac{x^2}{2} + xe^{-y})]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^\infty c(1 + \frac{1}{2} + e^{-y})dy = c(\frac{3}{2}y - e^{-y}) = c(\frac{3}{2} - e^{-1} - (0 - e^0)) = c(\frac{3}{2} - e^{-1} + 1) \Leftrightarrow c = \frac{1}{\frac{3}{2} - e^{-1} + 1}$$

Föreläsning 6

Genererande funktioner

6.1 Antal heltalslösningar

Hur många lösningar har ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

om

- $x_1 \leq 1$
- $1 \leq x_2 \leq 3$
- $x_3 \geq 1$ är udda

Lösningar

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1 \\ x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3 \\ x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x^1x^3x^1 + x^1x^1x3 + x^0x^2x^3 = 3x^5$$

$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ där a_j är antalet lösningar till

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = j \\ x_1 \leq 1 \\ 1 \leq x_2 \leq 3x_3 \text{ udda} \end{cases}$$

$$p(x) = (x^0 + x^1)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)$$

Om vi utvidgar $p(x)$ och räknar hur många ggr vi fr termer x^{i+j+k} med $i + j + k = 5$ så borde det vara svaret på frågan. I vårt fall får vi polynomet

$$x^2 + 2x + 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 3x^7 + O(x^8)$$

dvs. svaret är 3.

6.1.1 Exempel

Hur många lösningar har ekvationen

$$x_1 + 2x_2 = 8 \text{ givet att } x_1 \geq 1 \text{ och } x_2 \leq 2$$

$$\begin{cases} 2x_2 = x_3 \\ x_1 + 2x_2 = j \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_3 \leq 4 \text{ och är jämnt} \end{cases}$$

Lösning lämnas som en tankenöt till läsaren.

6.2 Exponentiella genererande funktioner

För en talföljd (a_k) definierar vi den exponentiella genererande funktionen

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$$

6.2.1 Exempel

Vi har ett alfabet a, b, c, d och vill bilda ord med 4 bokstäver. Hur många kan vi bilda om vi vill ha

- Jämnt antal a
- högst 3 b
- Udda antal c

$$(x^0 + x^2 + x^4)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^3)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$$

Exempelvis om vi testar hur många sätt bokstäverna aabc kan bilda ord får vi

$$\frac{4!}{2!1!1!0!} = \frac{24}{2} = 12$$

vi kan lägga in 4! i ekvationen och får

$$4!(x^0 + x^2 + x^4)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^3)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$$

Vi lägger även till vad vi dividerar med för varje för att få jut något

$$g(x) = 4!(x^0/0! + x^2/2! + x^4/4!)(x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + x^3/3!)(x^1/1! + x^3/3!)(x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!)$$

$$g(x) = \sum a_n x^n$$

$$g(x)[x^4] = a_4 = \text{Antalet ord med fyra bokstäver}$$

Föreläsning 7

Regression

7.1 Linjär regression

Beskriver en stokastisk motsvarighet till ett linjärt samband mellan 2 variabler, ex. temperatur av havsvatten antas vara linjär funktion av djupet. Skrivs

$$y_1 = B_0 + B_1 x_i + \varepsilon_i, \begin{cases} \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \\ \text{oberoende} \end{cases}$$

7.1.1 Linjär algebra

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$L(\beta_0, \beta_1) = ||y - X\beta||_2^2$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \hat{x} = (X^T X)^{-1} X y$$

$$||x||_2^2 = x^T x = |x|^2$$

Minsta kvadratmetoden hittar x som minimerar $|Ax - b|^2$

$$\arg\min_x |Ax - b|^2 = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^T y$$

$$L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = |y - X\beta|^2 + \lambda|\beta|$$

Allt detta vill säga att

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_1 \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{cases}$$

7.2 Förklaringsgrad

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum(y_1 - \bar{y})^2} \in [0,1]$$

$$\text{Antaganden}: \begin{cases} Y_i \sim \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon \sim N(0,\sigma), \text{oberoende} \end{cases}$$

Föreläsning 8

Ordlista

Utfall

Resultatet av ett slumpmässigt försök eller experiment.

Utfallsrummet

Mängden av alla möjliga utfall.

Trädiagram

Sätt att beskriva ett utfallsrum av stegvisa slumpexperiment.

Händelse

En delmängd av utfallsrummet S.

Omöjliga händelsen

Annat namn för den tomma mängden $\emptyset$.

Säkra händelsen

Mängden S kallas för den säkra händelsen.

Disjunktion/ oförenlighet

Två händelser A och B är disjunkta om de inte har några gemensamma utfall. Detta skrivs $A \cap B = \emptyset$.

Parvis disjunktion/oförenlighet

Två händelser A och B är parvis disjunkta om de inte har några gemensamma utfall. Detta skrivs $A \cap B = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Kombinatorik

Teorin om räkning av möjliga utfall (kombinationer).

Permutation

En ordning av element i en mängd kallas för en permutation av elementen i mängden.

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel är en funktion som för varje utfall i ett slumpmässigt försök antar ett reellt tal, $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Diskret stokastisk variabel

En stokastisk variabel som antar ett ändligt/uppräkneligt antal värden.

Kontinuerlig stokastisk variabel

En stokastisk variabel som antar alla värden i ett intervall.