# Matematisk analys mve045

Oscar Palm

March 2022

# Contents

# 1

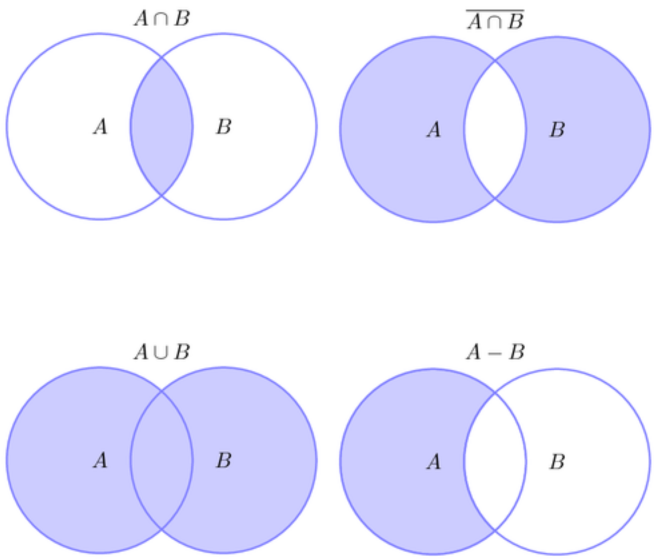
# Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd $A$ bestående av elementen $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ skrivs som $A = [a_1, a_2, ..., a_3]$. Om $A$ och $B$ är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör $A$ eller $B$. $A \cap B$ alla element som tillhör $A$ och $B$. Konstruktionen $A \cup B$ kallas för unionen av $A$ och $B$ och $A \cap B$ kallas för snittet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\varnothing = \{\}$, den tomma mängden
- $A^c$ alla element som inte finns i $A$ (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matetmatik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -2-, -1, 0, 1, 2, ...\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}\}$, där $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ speciellt i fokus.

# 2

# *Intervall*

Ett intervall är en delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och alla tal mellan två av sina element.
Mer konkret:

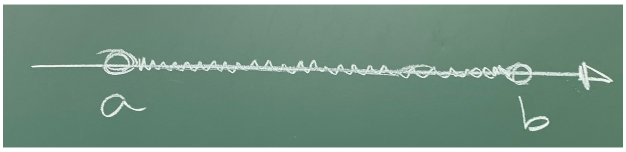



Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs $(a, b)$

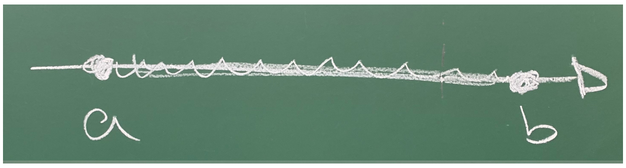



Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a, ]$

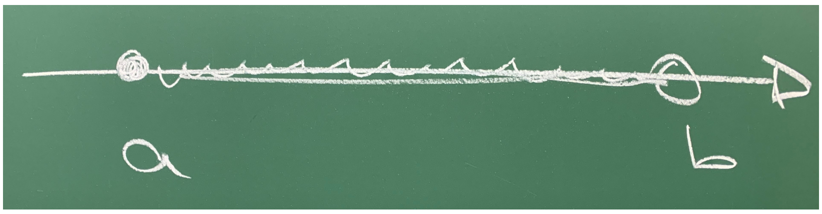



Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a, )$

**Ex** Lös olikheten $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$ och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

**Lösning** Måste försöka skriva om olikheten till faktoriserad form!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till $x^2 - 2x - 8$ genom kvadratkomplettering!

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ eller } x = -2$$

Kan nu skriva om $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ som $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$. Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

| | | $-2$ | | $0$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Tot | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Ser att $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ uppfylls i intervallen $[-2, 0]$ och $[4, \infty)$ och kan skriva lösningen som $[-2, 0) \cup [4, \infty)$.

**Absolutbelopp** Absolutbelopp av ett tal $x \in \mathbb{R}$ definieras som:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$$

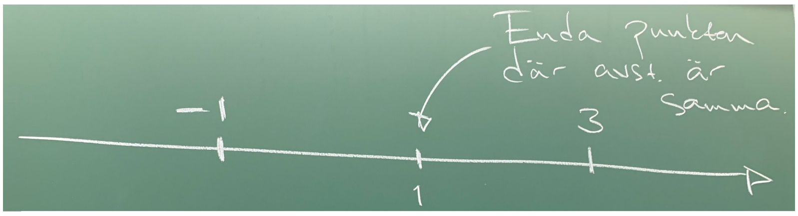
Följande tolkning gäller: Givet ett tal $a \in \mathbb{R}$ så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|x-a|$ = avståndet mellan $x$ och $a$.

Vidare gäller också, givet ett fixt tal $D \geq 0$, att $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow$ mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ vars avst. till $a$ är $\overset{<}{\underset{>}{=}} D$, dvs

$$|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow \begin{matrix} a-D < x < a+D \\ x = a-D \\ x < a-D, x > a+D \end{matrix}$$

**Ex** (P1.41)
Lös olikheten $|x+1| > |x-3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

**Lösning**
$|x+1| = |x-(-1)| =$ "avst mellan $x$ och $(-1)$"
$|x-3| =$ "avst. mellan $x$ och 3"
Så "avst. mellan $x$ och $(-1)$" > "avst. mellan $x$ och 3"
Till höger om 1 så kommer $x$ alltid att vara längre från $(-1)$ än 3.



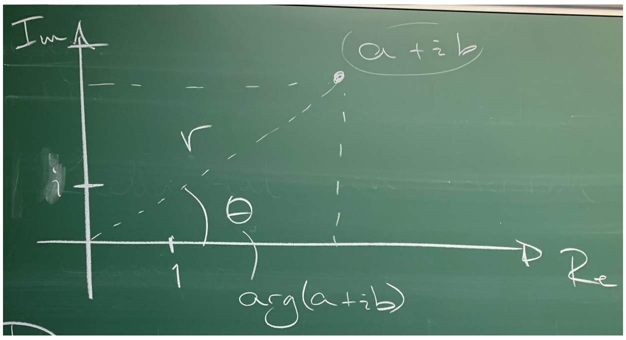
# 3

# *Komplexa tal*

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- $a$ kallas för <u>realdelen</u> av $z$ $Re(z)$
- $b$ kallas för <u>imaginärdelen</u> av $z$ $Im(z)$

Den imaginära enheten $i$ löser definitionsmässigt ekv. $x^2 + 1 = 0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a + ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.
Det gäller att $r^2 = |a+ib|^2 = \vdots = a^2+b^2$. Givet $r$ och argumentet $\theta$ kan <u>alla</u> kompexa tal skrivas $z = r(cos(\theta)+i \cdot sin(\theta))$



# 4

# Funktioner

## 4.1 Vad är en funktion?

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data. (Supervised learning)
I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat tal. Kan tänkas som en 'regel' $f$ som avbildar ett givet tal $x$ till ett annat tal $y$. Alla de värden som är tillåtna att mata in i $f$ kallas för funktionens definitionsmängd och betecknas $D(f)$. Mängden av alla möjliga $y$-värden som $f$ kan returnera kallas för värdemängden (range) och betecknas $R(f)$.

**Ex** Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ och $R(f) = \backslash\{0\}$.

En funktionsgraf (eller bara graf) givet en funktion $f$ utgörs av alla punkter $(x, y) = (x, f(x))$.
Några viktiga koncept:

- En funktion sägs vara jämn om $f(-x) = f(x)$ där $(x \in D(f))$
  Betyder att $f$ är symmetrisk m.a.p. $y$-axeln.
- En funktion sägs vara udda om $f(-x) = -f(x)$ där $(x \in D(f))$
  Betyder att $f$ är antispegelsymmetrisk m.a.p. $y$-axeln.
- En funktion är injetiv om varje par $x_1, x_2 \in D(f)$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste $x_1 = x_2$.
- En funktion $f$ som avbildar en mängd $\underline{\overline{X}}$ på en annan mängd $\underline{\overline{Y}}$ sägs vara surjektiv om $\underline{\overline{Y}} = R(f)$.

## 4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom komposition. Kan göras på två sätt:

- $f \circ g := f(g(x))$
- $g \circ f := g(f(x))$

**Notera att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet.**

## 4.3 Polynom och rationella funktioner

Ett polynom är en funktion som kan skrivas som:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

där $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ kallas för polynomets koefficienter och talet $n$ kallas för polynomet grad.
En rationell funktion $R(x)$ är en funktion som kan skrivas som en kvot av två polynom $P(x)$ och $Q(x)$, dvs. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. (jmf. de rationella talen $\mathbb{Q}$)
Definitionsmängden $D(R)$ begränsas enbart av nollställena till $Q(x)$. dvs. $D(R) = R \setminus \{x \in R : Q(x) = 0\}$.

### 4.3.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest.

**Ex** $\frac{29}{6} = 4 + \frac{5}{6}$

Motsvarande funkar äver för rationella funktioner och metoden för att hitta "heltalsdelen" och "resten" kallas Polynomdivision.

**Ex (P 6.18)** Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion.

**Lösning** .
$x - 1$
$x^4 + x^2 | x^3 + x^2 + 1$
$-x \cdot (x^3 + x^2 + 1)$
$-x^3 + x^2 - x$
$-(-1)(x^3 + x^2 + 1)$
$2x^2 - x + 1$
Eftersom polynomet $2x^2 x + 1$ har lägre grad än nämnaren $x^3 + x^2 + 1$ tar divisionsalgoritmen slut. Vi har fått att $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x - 1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1}$ (Kontrollera att det stämmer!)
□

### 4.3.2 Algebrans fundamentalsats

Enligt aritmikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal. t.e.x. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Liknande resultat finns för polynom! Algebrans fundamentalsats säger att varje polynom av gran $n$ har exakt $n$ st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller även faktorsatsen:

**Sats:** Talet $r$ är en rot (dvs. ett nollställe) till ett polynom $P$ av grad minst 1 om och endast om $(x - r)$ är en faktor av $P(x)$.

Eftersom alla polynom $P$ av grad $\geq 1$ har precis $n$ st. nollställen, säg $r_1, \ldots, r_n$, kan man alltså alltid faktorisera ett polynom som $P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n)$.

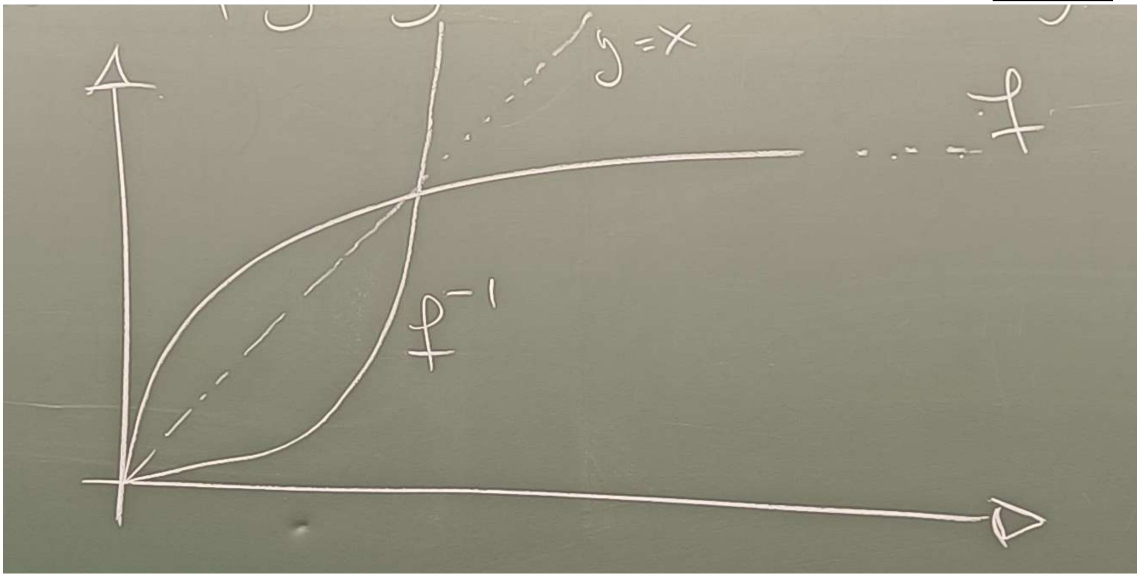
## 5

# *Transcendenta funktioner*

## 5.1 Inversa funktioner

För alla reella tal $a \neq 0$ gäller att $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Talet $\frac{1}{a}$ kallas för den multiplikativa inversen till $a$. Den multiplikativa inversen definieras med hjälp av det speciella talet 1 ("ettan") som har den unika egenskapen att
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .
Om vi istället för de reella talen tänker oss funktioner och istället för multiplikation tänker oss komposition (alltså $f \circ g$), finns det då en etta?

Ja! Funktionen $e(x) = x$ blir en etta eftersom
$f \circ e(x) = f(e(x)) = f(x)$
$e \circ f(x) = e(f(x)) = f(x)$
Så $f \circ e = e \circ f = f$ för alla funktioner f.
Med $e(x) = x$ som "etta" är det naturligt att fråga sig; givet en funktion $f$, finns det då en annan funktion $g$ sådan att $f \circ g = g \circ f = e$? Svaret är ja, med bara om $f$ är injektiv, dvs. om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen $g$ kallas då för inversen till $f$ och betecknas $f^{-1}$. Geometriskt så representeras $f^{-1}$ av speglingen af $f$ i linjen $y = x$




Lite grundläggande egenskaper för $f^{-1}$ är alltså att

- $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$
- $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Man kan också beräkna derivatan av inversfunktionen som $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ eftersom $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x) = 1$ och $\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \{\text{kedjeregeln}\} = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

## 5.2 Exponentialfunktionen

En exponentialfunktion är en funktion på formen:

$$f(x) = a^x,\ a > 0$$

Det gäller att $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ och $(a^x)^y = x^{x \cdot y}$. Vidare är funktionen $f(x) = a^x$ alltid injektiv och därmed finns alltid en invers. Denna invers kallas för $a$-logaritmen och skrivs

$$f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

För alla $a$-logaritmer gäller att:

- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
- $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{log_b x}{\log_b a},\ a, b > 0$

Derivatan av $f(x) = a^x$?

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} =?$$

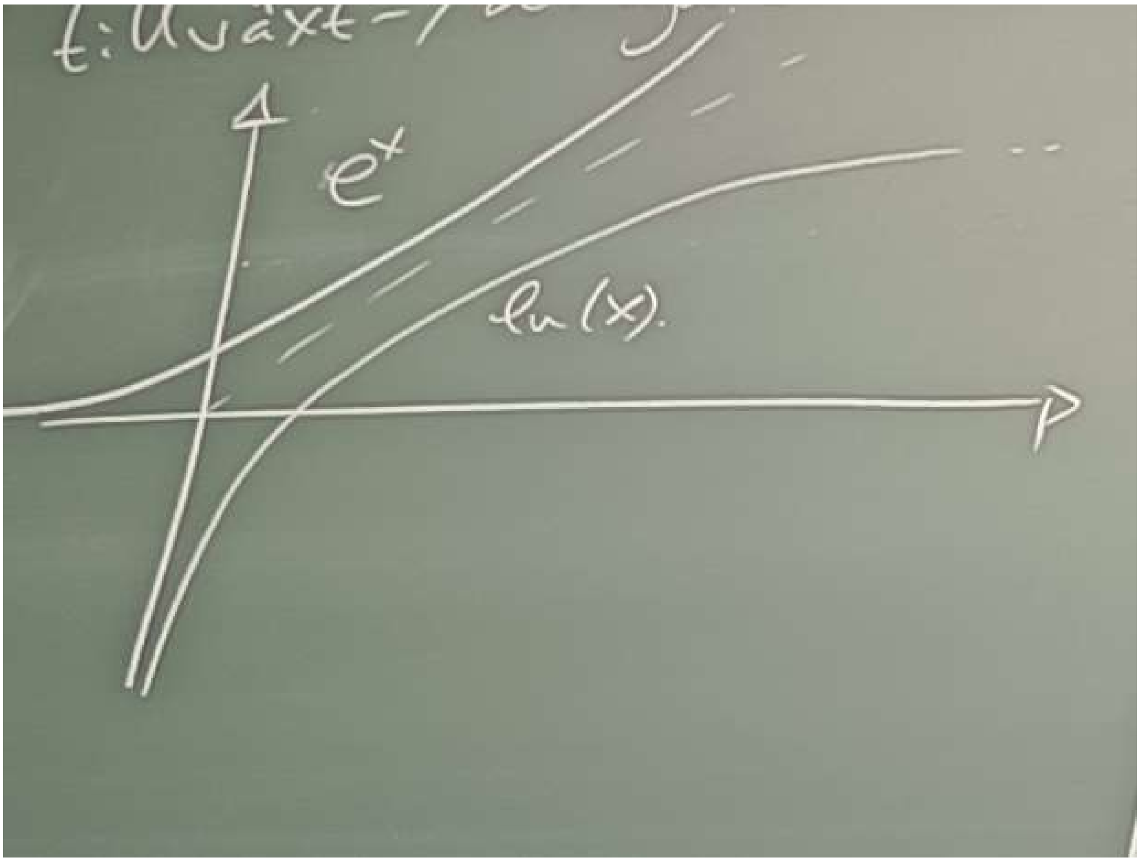
Man kan visa att gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ <u>alltid</u> är konvergent om $a > 0$, så $\frac{d}{dx}a^x = C \cdot a^x$ för någon konstant $C$. Finns det ett tal $a$ sådant att $C = 1$? Ja, det talet kallas $e = 2,718281828\ldots$ (irrationellt). Motsvarande "$e$-logaritm" kallas för den <u>naturliga logaritmen</u> och betecknas $\ln(x)$. Genom detta fås:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{\ln(a^x)} = \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln(a)} = \{\text{kedjeregeln}\} = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = \underbrace{\ln(a)}_{\text{"=C"}} \cdot a^x$$

På motsvarande sätt gäller

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

och $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$. Exponentialfunktioner och logaritmer är oumbärliga för att modellera en mängd olika processer. I synnerhet tillväxt-/avtagande-modellering.




Jämfört med potensfunktionen $x^n$, $n > 0$ så växer/avtar $e^x$ alltid snabbare och $\ln(x)$ alltid långsammare:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} |x|^n e^x = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$

Vad gäller för de primitiva funktionerna (indefinita integralerna) av $e^x$ och $\ln(x)$?

$$\int edx = e^x + C\text{Självklart}$$

$$\int \ln(x)dx = ?\text{ (senare)}$$

För $\ln|x|$ gäller att $\frac{d}{dx}\ln|x| = \{kedjeregeln\} = \frac{1}{|x|}\cdot \mathrm{sgn}(x) = \frac{1}{x}$ så $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.
Talet $e$ är intressant i sig och omgärdas än idag av flera olösta matematiska problem. Det kan formuleras som följande kända gränsvärde:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

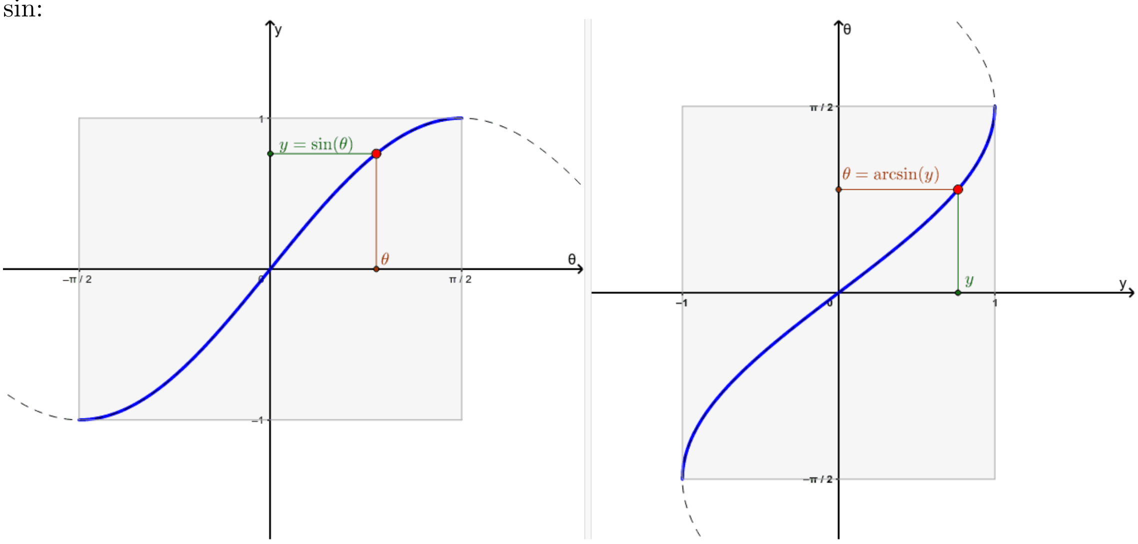
och således gäller att

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$$

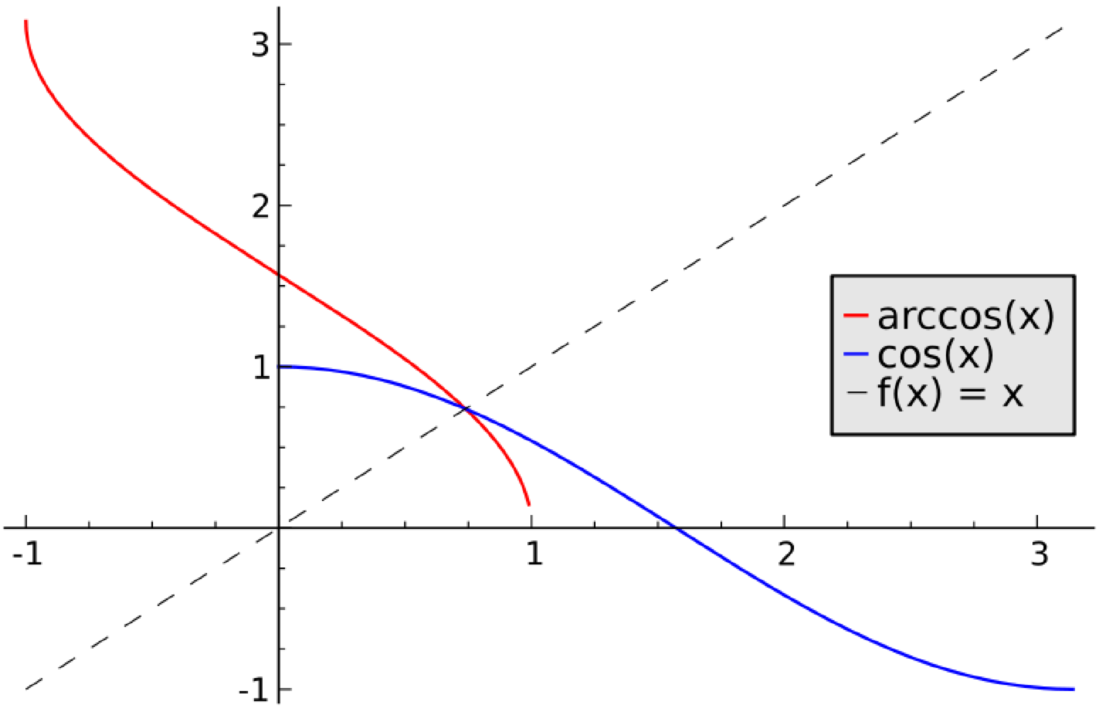
## 5.3 Inversa trigonometriska funktioner

Funktionerna $\sin x, \cos x$ och $\tan x$ är periodiska och därmed <u>inte</u> injektiva på $\mathbb{R}$. Av den anledningen saknas inversfunktioner. Det går dock att "begränsa" den så att de blir injektiva på ett kortare intervall.

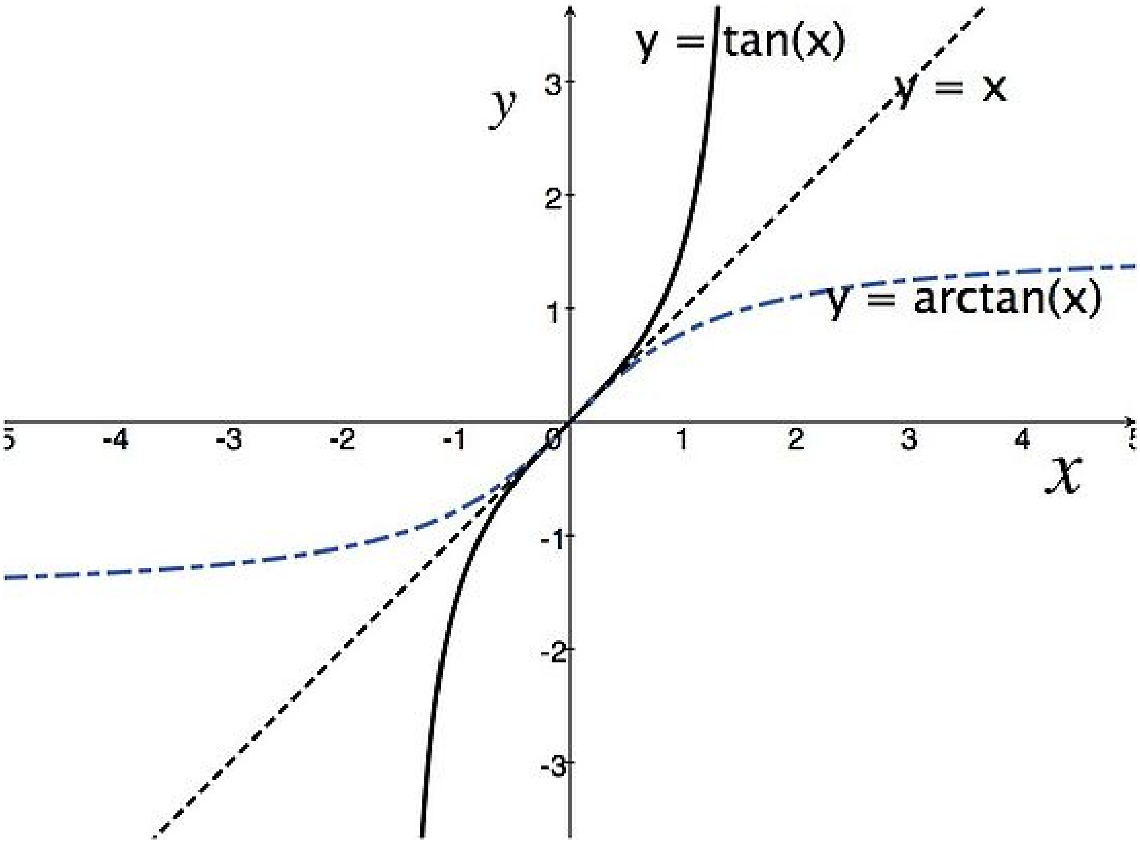
sin:


y
θ
$y = \sin(\theta)$
−π / 2
π / 2
θ
$\theta = \arcsin(y)$
π / 2
−π / 2
y
y

cos:


arccos(x)
cos(x)
f(x) = x
3
2
1
-1
-1
1
2
3

tan:




$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ har följande definitions- och värdemängder:

- $\arcsin x : D = [-1,1], R = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos x : D = [-1,1], R = [0,\pi]$
- $\arctan x : D = (-\infty,\infty), R = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

och man har följande derivator:

- $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

### 5.3.1 Hyperboliska funktionerna

Släktingar till de trigonometriska funktionerna med många liknande egenskaper.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Precis som för sinus och cosinus så är sinh en udda funktion och cosh en jämn. Den trigonometriska ettan gäller nästan (hyperboliska ettan!)

$$\cosh^2 x - sinh^2 x = 1$$

För derivatorna gäller att

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

Man definierar $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ och får att $\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{cosh^2 x}$.

# 6

# Trigonometri

## 6.1 Grundläggande trigonometri

De trigonometriska funktionerna $cos\theta$ och $sin\theta$ definieras som $x-$ respektive $y-$koordinaterna på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln $\theta$. Pythagoras sats ger omedelbart att $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ (trigonometriska ettan).
Vinkeln $\theta$ mäts oftast i radianer men kan också mätas i grader. Det gäller att $\pi$ radianer motsvarar 180 deg. Utifrån sin och cos definieras vidare funktionen tan som:

$$tan\theta := \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:

**Sinussatsen:** $\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$

**Cosinussatsen:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$

**Ex: (P 6.53)** Visa att arean av en godtycklig triangel ABC kan beräknas som $\frac{1}{2}bc \cdot sinA = \frac{1}{2}ab \cdot sinC = \frac{1}{2}ca \cdot sinB$.

**Lösning:** Rita och räkna!
Area= $\frac{x_1 \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$
Men: $sinA = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot sinA \Rightarrow$ Area= $\frac{x_1 \cdot csinA + x_2 \cdot csinA}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c \cdot sinA}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \cdot sinA$
De andra formlerna följer analogt. $\square$

# 7
# *Talföljder*

Studium av talföljder är ett av matematikens mest klassiska områden.

**Fibonnacciföljden** är en talföljd som har fått sitt namn efter den italienske matematikern Leonardo Fibonacci. Följden är definierad som: 0,1,1,2,3,5,8,... Den återfinns i många naturfenomen och har bl.a. använts för att beskriva tillväxt av populationer och tillväxt av råvaror. Följden kan definieras rekursivt som:

$$F_0 = 0 F_1 = 1 F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

**Primtalssekvensen** 2,3,5,7,11,... Finns det formel för att beskriva sekvensen? Det är ännu inte besvarat. =/

## 7.1 Begrepp

Vi ska försöka formalisera begreppen, i synnerhet för oändligt långa talföljder.
Låt $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}$ vara godtycklig talföljd. Man säger att $\{a_n\}$ är:

- Begränsad ovan-/underifrån om det finns ett tal $L$ sådan att $a_n \leq L$ eller $a_n \geq L \ \forall n = 1, 2, 3 \dots$
- Begränsad om den är begränsad <u>både</u> ovan- och underifrån.
- Positiv/Negativ om $a_L \leq 0 / a_L \geq 0 \ \forall n = 1, 2, \dots.$
- Växande/Avtagande om $a_n \leq a_{n+1} / a_n \geq a_{n+1} \ \forall n = 1, 2, 3, \dots.$
- Monoton om den är antingen växande eller avtagande.
- Alternerande om $a_{n+1} \cdot a_n < 0 \ \forall n = 1, 2, 3, \dots.$

### 7.1.1 Konvergens

Låt $\{a_n\}$ vara en godtycklig talföljd. Vi säger att $\{a_n\}$ konvergerar till $L$ om $a_n \to L \ \forall n = 1, 2, 3, \dots.$
På svenska betyder detta att $a_n$ närmar sig $L$ alltmer när $n$ blir större och större utan att någonsin nå $L$.
Måste försöka precisera vad detta betyder rent matematiskt.

**Definition:** (konvergent talföljd)
Man säger att en talföljd $\{a_n\}$ konvergerar mot $L \in R$, om det för varje positivt tal $\varepsilon > 0$ existerar ett positivt heltal $N$ så att det för alla $n \geq N$ gäller att $|a_n - L| < \varepsilon$.

**intuitivt:** $\{a_n\}$ konvergerar mot $L$ om alla tal tillräckligt långt in i följden ligger gdtyckligt nära talet $L$. Av detta följer "enkelt" att:

- Om $\{a_n\}$ konvergerar så är den begränsad.
- Om $\{a_n\}$ är begränsad ovanifrån och växande så är $\{a_n\}$ konvergent. (motsvarande för underifrån och avtagande).

**Räknelagar**

- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ om $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.
- Om $a_n \leq b_n \leq c_n$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ och $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ så $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

**Ex:** (9.1.25)
Bestäm om möjligt det tal $L$ som $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$ konvergerar mot då $n \to \infty$.

**Lösning:** Det gäller att

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \sqrt{(n+1)\cdot n} - \sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= \sqrt{n+1}\cdot\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}(= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2})$$

och

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2(n-1)} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{2(n-1)} = \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})} \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

så

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2}$$

□

# 8

# Gränsvärden

Ett av de mest kraftfulla verktygen inom matematisk analys är gränsvärden för funktioner, dvs. $\lim_{x\to a} f(x)$ $a \in \mathbb{R}$. $\rightsquigarrow$ derivator, integraler, differentialekvationer, .... Hur ska man definiera gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$? Man skulle kunna inspireras av definitionen för talföljder.

## 8.1 Definition gränsvärde

**Definition:** (försök)
Man säger att $f(x)$ konvergerar mot värdet $L \in \mathbb{R}$ då $x$ om det för varje talföljd $\{x_n\}$ så att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

**Bättre definition:** Man säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ då $x$ går mot $a \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{x\to a} f(x) = L$, om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett annat tal $\delta > 0$ (som eventuellt beror av $\varepsilon$) sådant att om $0 < |x - a| < \delta$ så ligger $x$ i $f$s definitionsmängd och $|f(x) - L| < \varepsilon$.

1. $f \to L_1$ när $x \to a_1$?

   Ja! Går alltid att hitta $\delta > 0$ så att $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ oavsett $\varepsilon$

2. $f \to L_2$ när $x \to a_1$?

   Omöjligt att hitta $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \varepsilon$ om $\varepsilon$ är tillräckligt litet.

**Ex:** (1.5.19)
Använd definitionen av gränsvärdet för att bevisa $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$

**Lösning:** Vi vill hitta $\delta > 0$ så att $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$ så länge $0 < |x - 1| < \delta$ (givet vilket $\varepsilon > 0$ som helst).
Gäller att $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$. Om $0 < \varepsilon \le 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$
Om $\varepsilon > 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < x < (1+\varepsilon)^2$
Notera att$(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$ alltid implicerar att $1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$, det vill säga $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.
$(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$ så $-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2-\varepsilon) \Rightarrow$ $-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$
Välj därför $\delta = \varepsilon \cdot (2-\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$.
För $\varepsilon \ge 2$, välj t.ex. $\delta = 1$ eftersom $|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \le \varepsilon$
$\square$

# 9

# Kontinuitet

## 9.1 Intro

Matematisk analys handlar om studiet av funktioner definierade på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. frågeställningar och intuition för ämnet hämtas ofta från fysik/teknik där funktioner bär på någon form av inormation.

Vår definition av funktion är att det är "en regel som avbildar ett tal $x$ i en given definitionsmängd $D(f)$ till ett annat tal $y$ i en värdemängd $R(f)$.

Gruppen av sådana "regler" är enorm, dvs det finns ett ouppräkneligt antal möjliga funktioner, och de flesta av dessa är inte användbara för modellering av verkliga system.

**Exempel:**
$f(x) = \left|\begin{matrix} 1, \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{matrix}\right.$
(Dirichlet-funktionen)($\star\star$)

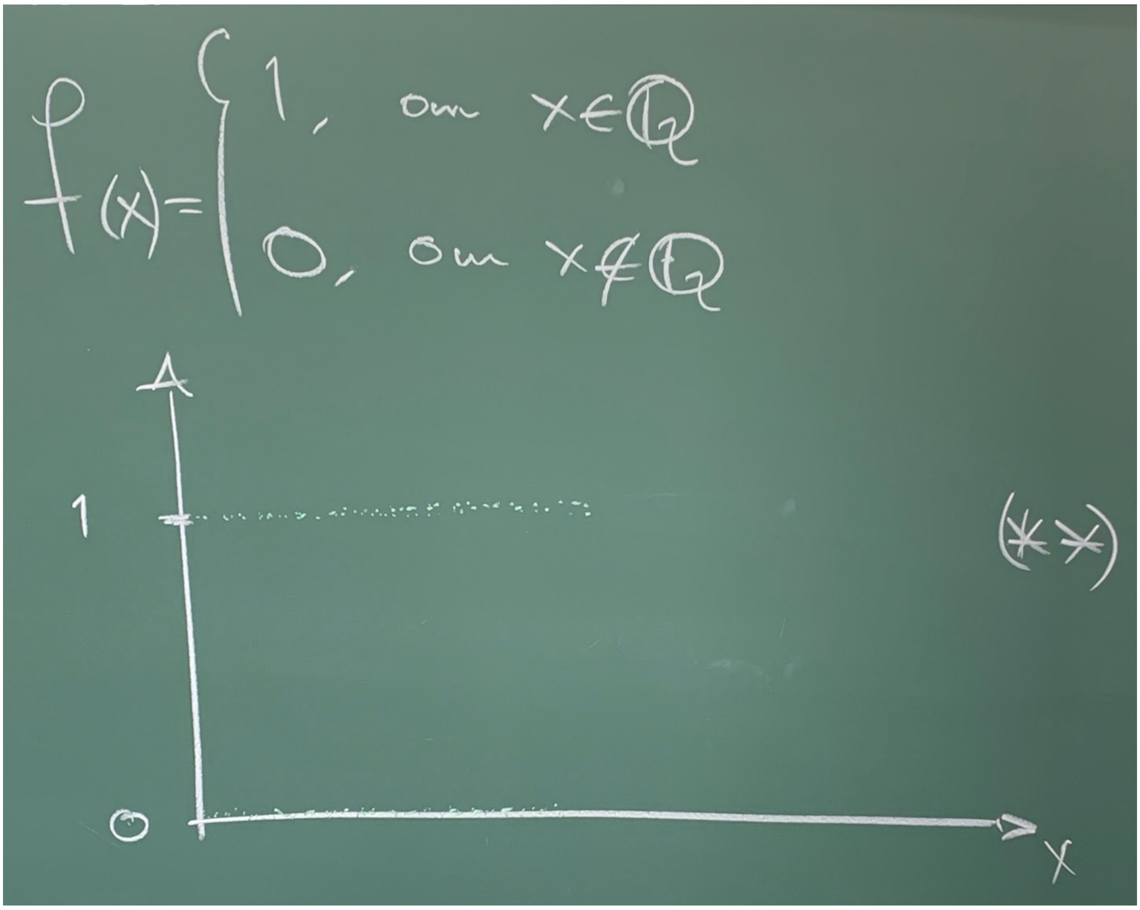
Om man drar en funktion slumpmässigt från mängden av alla funktioner så skulle man nästan säkert dra något i stil med $\star\star$. Vi måste därför hitta vettig begränsad klass av funktioner för att kunna hitta meningsfulla matematiska resultat. En sådan klass är de kontinuerliga funktionerna.

## 9.2 Definition kontinuerlig funktion

Man säger att en funktion $f$ är kontinuerlig i punkten $x = c$ (som antas vara en inre punkt i $D(f)$) om det gäller att:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Om antingen $\lim_{x \to c} f(x)$ inte existerar eller existerar men inte är lika med $f(c)$ säger man att $f$ är diskontinuerlig i$x = c$. Vad betyder detta? Jo, det betyder att "funktionen hänger ihop i $c$".

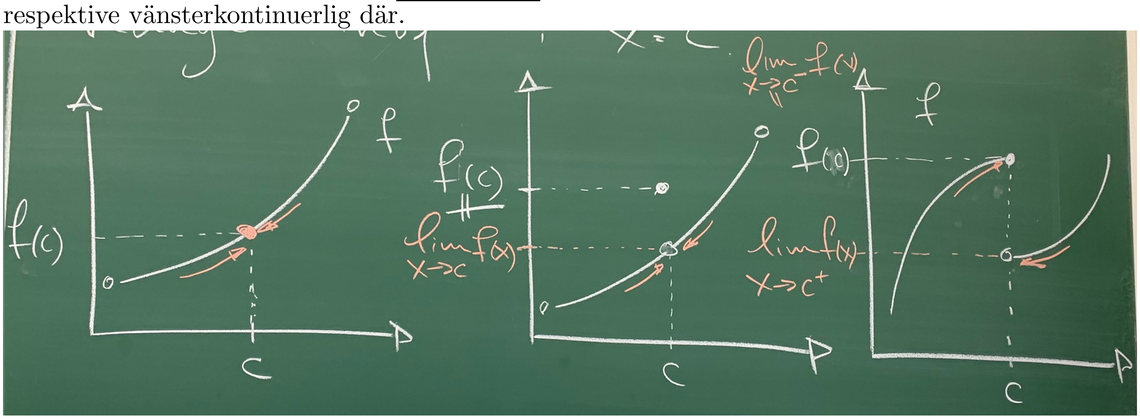



Man säger att en funktion $f$ är kontinuerlig på ett helt itervall $I$ om $f$ är kontinuerlig i varje punkt $x \in I$. Hur hanterar man ändpunkterna i $I$? Exempelvis om $I = [a, b]$, vad ska gälla för $x = a$ och $x = b$? Jo, $f$ ska vara högerkontinuerlig i $x = a$ och vänsterkontinuerlig i $x = b$:

- Man säger att en funktion $f$ är vänsterkontinuerlig i en punkt $x = c$ om

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

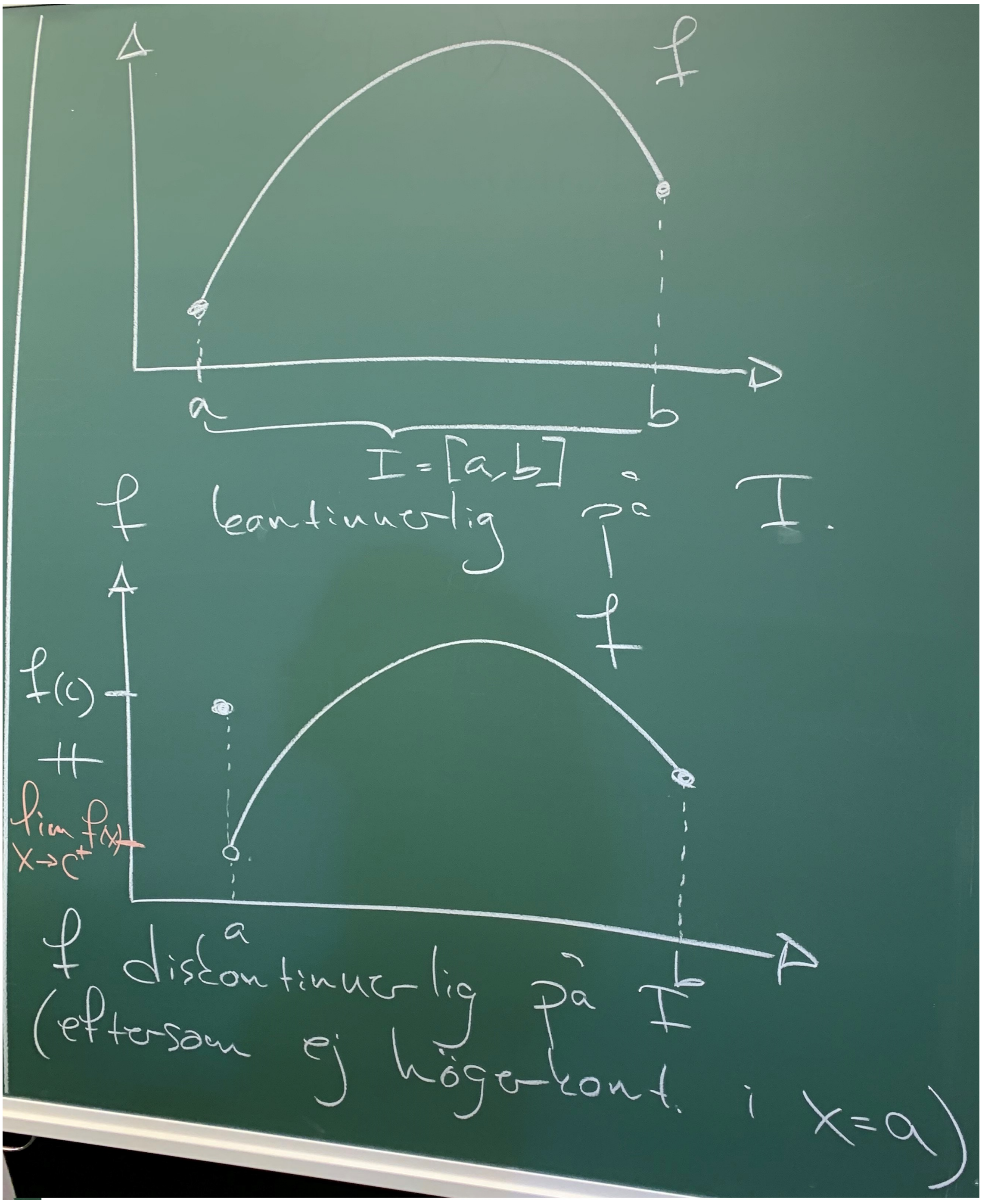
Motsvarande definition gäller för högerkontinuerlig
Så, $f$ benämns som kontinuerlig i randpunkter till ett intervall (t. ex. $a$ och $b$ för $[a, b]$) om den är högerkontinuerlig respektive vänsterkontinuerlig där.



**Ex:** (1.4.9)
Beskriv var i sin definitionsmängd som följande funktion är kontinuerlig, vänster- respektive höger-kontinuerlig och diskontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ om } x \neq 0 \\ 0, \text{ om } x = 0 \end{cases}$$

**Lösning:**
Försök att skissa funktionen:




- Funktionen $\frac{1}{x^2}$ är alltid positiv ($x^2 > 0$)

- Om $x$ är <u>stort</u> (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx 0^+$
- Om $x$ är nära 0 (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx +\infty$
- Uppenbart att $\frac{1}{x^2}$ är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$

Alltså, $f$ är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eftersom

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(a) \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

I $x = 0$ är $f$ diskontinuerlig eftersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ och } f(0) = 0 \text{ och } 0 \neq \infty$$

$\square$.

**Ex:** (1.4.16)
Hur ska man definier funktionen $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4}$ i punkten $x = \sqrt{2}$ för att den ska bli kontinuerlig där?

**Lösning:**
Vad händer i $x = \sqrt{2}$? "

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0} = ?$$

" Vill studera gränsvärdet $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4} = \frac{x^2-2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+2} \to_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{4}$$

Vi ser att $f$ naturligt kan definieras i punkten $x = \sqrt{2}$ även om det inte var uppenbart från början. Genom att sätta $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$ så blir funktionen kontinuerlig i $x = \sqrt{2}$. dvs.

$$f(x) = \left|{}^{\frac{x^2-2}{x^4-4}, x \neq \sqrt{2}}_{\frac{1}{4}, x = \sqrt{2}}\right.$$

**Ex:** (1.5.3)
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|}$$

**Lösning:**
Måste reda ut hur de olika absolutbeloppen beter sig i en omgivning av $x = 3$.

$$|5-2x| = \left|{}^{5-2x, \text{ om } 5-2x \geq x \leq \frac{5}{2} = 2.5}_{-(5-2x), \text{ om } 5-2x<0 \Leftrightarrow x>2.5}\right.$$

$$|x-2| = \left|{}^{x-2, \text{ om } x\geq 2}_{-(x-2), \text{ om } x<2}\right.$$

$$|x-5| = \left|{}^{x-5, \text{ om } x\geq 5}_{-(x-5), \text{ om } x<5}\right.$$

$$|3x-7| = \left|{}^{3x-7, \text{ om } 3x-7\geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3} \approx 2.3}_{-(3x-7), \text{ om } 3x-7<0 \Leftrightarrow x<2.33}\right.$$

Vi kan alltså skriva gränsvärdet som:

$$\lim_{x\to 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|} = \lim_{x\to 3} \frac{-(5-2x) - (x-2)}{-(x-5) - (3x-7)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-5-x+2}{5-x-3x+7} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4x+12} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4(x-3)} = \frac{-1}{4}$$

$\square$

## 9.3 Repetition föregående föreläsningar

Vi införde begreppet kontinuitet för att sålla fram ”vettiga” funktioner bland mängden av alla möjliga funktioner definierade på $\mathbb{R}$ Definitionsmässigt betyder kontinuitet för en funktion $f$ i en punkt $c \in \mathbb{R}$ att

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Rent intuitivt betyder kontinuitet för en funktion att funktionen ”håller ihop” och inte har några ”hål”. Är alla kontinuerliga funktioner ”välartade” och alltid lämpliga för att beskriva någon slags verklighet? Nej

- Finns massa verkliga situationer som kräver diskontinuitet för att kunna beskrivas.
- Finns väldigt ”konstiga” kontinuerliga funktioner.

## 9.4 Grundläggande egenskaper

Om $f$ och $g$ är två kontinuerliga funktioner i $c \in \mathbb{R}$ så gäller att:

- $f+g$,$f-g$ och $f\cdot g$ är kontinuerliga i $x=c$
- $\frac{f}{g}$ och $\frac{g}{f}$ är kontinuerliga i $x=c$ om $g(c)$ respektive $f(c)\neq 0$
- $k\cdot f$ är kontinuerlig i $x=c$ för alla konstanter $k\in\mathbb{R}$
- $(f)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{f}$ är kontinuerlig i $x=c$, $n\in\mathbb{N}$ (givet att $f(c)\geq 0$ om $n$ är jämnt).

Vad gäller om man vill komponera ihop kontinuerliga funktioner?

**Sats:** (Komposition av kontinuerliga funktioner)
Om $f\circ g = f(g(x))$ är definierad på ett intervall som innehåller $x=c$ och $f$ är kontinuerlig i $x=L$ och

$$\lim_{x\to c} g(x) = L$$

så gäller att

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

Speciellt, om $g$ är kontinuerlig i $x=c$ (dvs $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$) så är kompositionen $f\circ g$ också kontinuerlig i $x=c$

**Bevis:** .
Vill bevisa att om $f$ är kontinuerlig i $x=L$ och $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så är $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$(Resten följer per automatik).
Använd definitionen av gränsvärde! Vi vet att $f$ är kontinuerlig i $y=L$, dvs $\lim_{y\to L} f(y) = f(L)$ vilket definitionsmässigt betyder att det $\forall\varepsilon>0\exists\gamma>0$ så att om $|y-L|<\gamma$ så är $|f(y)-f(L)|<\varepsilon$. Vidare, eftersom $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så finns det ett tal $\delta>0$ sådant att om $|x-c|<\delta$ så är $|g(x)-L|<\gamma$ $\forall\gamma>0$
I vårt fall är vi intresserade av fallet där $y=g(x)$ och av tidigare gäller således att om bara $0<|x-c|<\delta$ så kommer $|f(g(x))-f(L)|<\varepsilon$ oavsett hur vi väljer $\varepsilon>0$. Men detta betyder att $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ och vi har därmed visat att

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

och speciellt att $f\circ g$ är kontinuerlig i $x=c$ om $g$ är kontinuerlig i $x=c$
$\square$

Vi fortsätter med lite allmänna egenskaper för kontunuerliga funktioner.

**Sats:** ($\star$)(kontinuerliga funktioner är begränsade)
Om $f$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så är $f$ begränsad över samma intervall. (tentasats)
För att bevisa detta ska vi använda oss Bolzano-Weiertrass sats. (Klassiskt resultat)

**Sats:** (Bolzano-Weierstrass)
Låt $\{a_n\}$ vara en oändlig och begränsad talföljd. Då finns en delföljd av $\{a_n\}$ som är konvergent!
Intuition: givet att $\{a_n\}$ är begränsad så kan man alltid "plocka ihop" en ny talföljd med element tagna i ordning från $\{a_n\}$, säg $\{a_{n_k}\}$ så att denna följd konvergerar. (tentasats)

**Bevis:** (av $\star$)
Använder ett så kallat "motsägelsebevis", dvs. antar att satsen inte stämmer och visar att detta leder till något orimligt/omöjligt. Antag att $f$ är kontinuerligt på $[a,b]$ men inte begränsad ovanifrån på $[a,b]$. Isåfall gäller att det för varje heltal $k > 0$ finns ett $x \in [a,b]$ så att $f(x_k) > k$ (eftersom $f$ växer obegränsat på $[a,b]$ enligt antagande). Alltså kan vi konstruera en talföljd $\{x_n\}$ där alla $x_n \in [a,b]$ och $(x_n) > n$. Men om alla $x_n \in [a,b]$ så måste talföljden $\{x_n\}$ vara begränsad (eftersom $a \leq x_n \leq b$). Av Bolzano-Weierstrass sats finns därför en delföljd till $\{x_n\}$, säg $\{x_{n_k}\}$ som är konvergent. Beteckna denna delföljds gränsvärde med $x$, dvs. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Eftersom $x \in [a,b]$ och $f$ är kontinuerlig i $x$ (eftersom $f$ kontinuerlig på hela $[a,b]$ enligt förutsättning) så gäller per definition att:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

Men eftersom $f(x_n) > n$ så måste $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Detta motsäger att $f$ är kontinuerlig på $[a,b]$!

**Slutsats:** $f$ måste vara begränsad ovanifrån. Liknande resonemang gäller för att visa att $f$ måste vara begränsad underifrån och därmed begränsad.
□

**Sats:** (min-max-satsen)
Låt $f$ vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ (där $|a|,|b| < \infty$), då existerar alltid tal $p,q \in [a,b]$, så att $\forall x \in [a,b]$ $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$. Dvs. $f$ har ett minimum $m = f(p)$ och ett maximum $M = f(q)$.

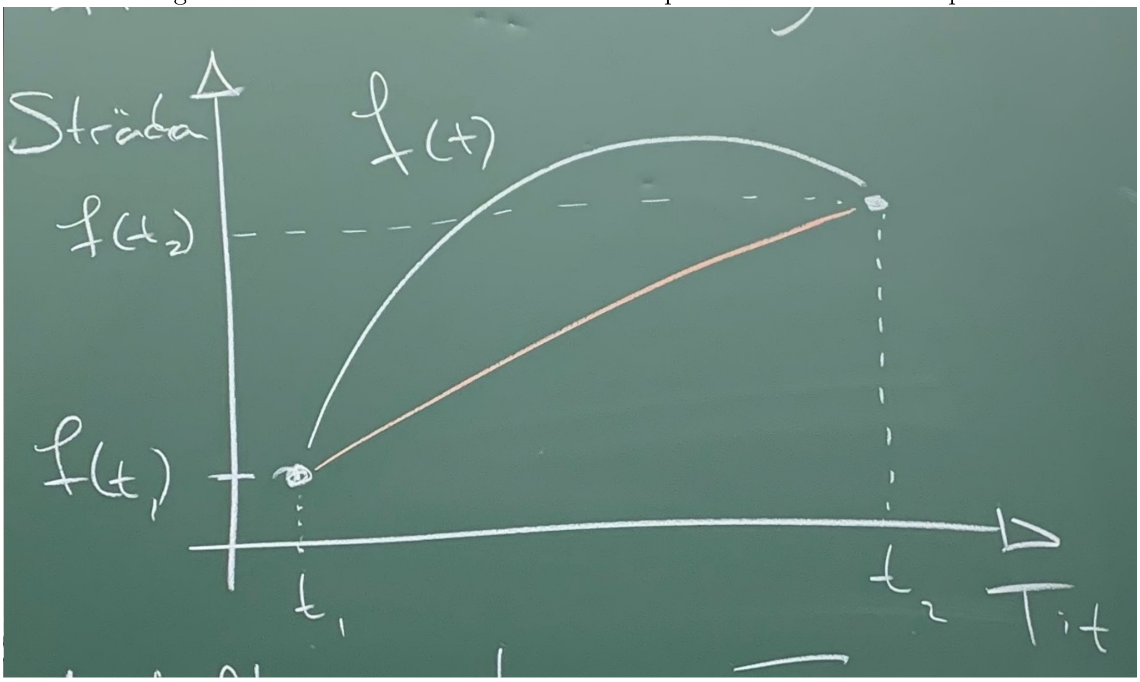
**Sats:** (Satsen om mellanliggande värden)
Låt $f$ vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och låt $s$ vara ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$. Då existerar det alltid ett tal $c \in [a,b]$ så att $f(c) = s$.

# 10

## *Derivator*

## 10.1 Vad är derivata?

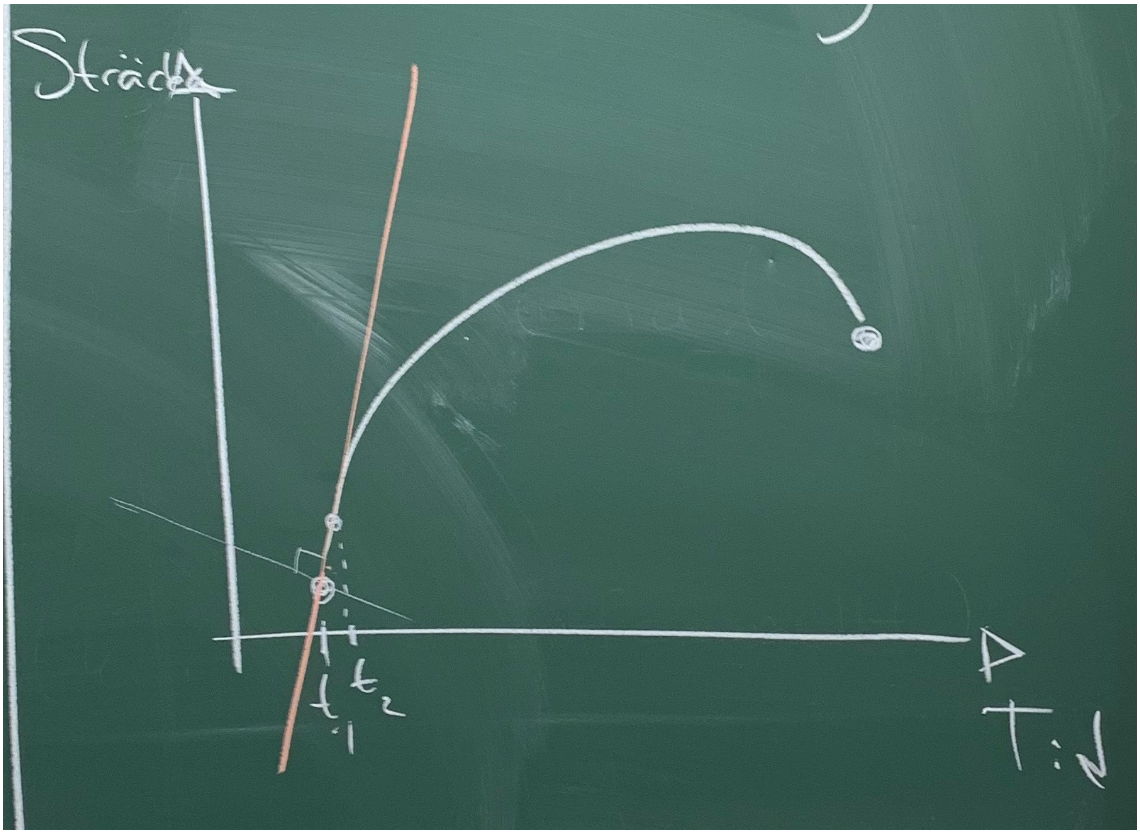
Ett av de mest fundamentala koncepen inom matematisk analys är derivata, derivata handlar om att få ett mått på hur snabbt en given funktion förändras i närheten av en punkt $x$. Kan hämta inspiration från medelhastigheten.




Medelhastigheten $\overline{v}$ mellan $t_1$ och $t_2$ är $\overline{v} = \frac{f(t_2)-f(t1)}{t_2-t_1}$. Just $\overline{v}$ är dessutom lutningen på den linje som går från $(t_1, f(t_1))$ till $(t_2, f(t_2))$.

$$\overline{v} = \frac{y - f(t_1)}{x - t_1} \Leftrightarrow y = \overline{v}(x - t_1) + f(t_1)$$

Uppenbart att ju närmare $t_2$ är $t_1$, desto mer kan $\overline{v}$ tolkas som den momentana hastigheten i $t_1$ och ”snittlinjen” övergår till att bli en tangent.




Naturligt att definiera den momentana hastigheten i en punkt $x_0$ för en given funktion $f$ som:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

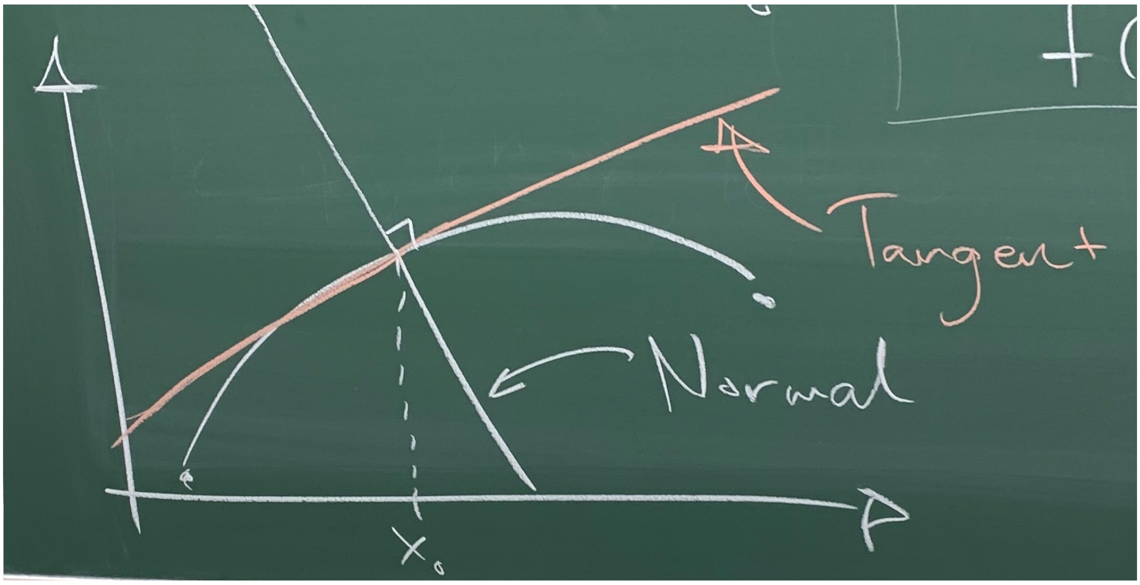
Om detta gränsvärde existerar, så kallas det för <u>derivatan</u> av $f$ i $x = x_0$ och betecknas $f'(x_0)$. Geometrisk så kan $f'(x_0)$ tolkas som tangentlinjens lutning i $x = x_0$ för grafen till $f$. Precis som för gränsvärden kan man definiera höger- och vänster-derivatan som:

$$\text{Höger: } f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{Vänster: } f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En funktion $f$ sägs vara <u>deriverbar</u> på ett intervall $[a,b]$ om den är deriverbar i varje punkt $x \in (a,b)$ samt höger- respektive vänster-deriverbar i $a$ respektive $b$. Från derivatan kan man "enkelt" beräkna lutningen för <u>normalen</u>, dvs den linje som är vinkelrät mot tangenten som:

$$\text{Normalens lutning i } x_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}$$




**Ex:** (2.2.21)
Använd derivatans definition och beräkna $f'(x)$ givet funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Lösning:**
Vi måste räkna följande gränsvärde då $h$ går mot 0:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{h} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(x+h)^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}}{h} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-(1+(x+h)^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} = \frac{1+x^2-(1+x^2+2xh+h^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$= \frac{-h(2x+h)}{\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} = \frac{-2x-h}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})}$$

$$\to_{h\to 0} -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(2\sqrt{1+x^2})} = -\frac{2x}{2(\sqrt{1+x^2})^3} = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Så $f'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

## 10.2 Räkneregler

Några "standardderivator":

1. $f(x) = c$ (konstant)$\Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Genom derivatans definition visar man enkelt att:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C \cdot f)'(x) = C \cdot f'(x)$

Två andra extremt viktiga räkneregler för derivator är produktregeln och kedjeregeln.

**Produktregeln:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(Ur denna får man även "kvotregeln" genom att sätta $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot g^{-1}(x)$)

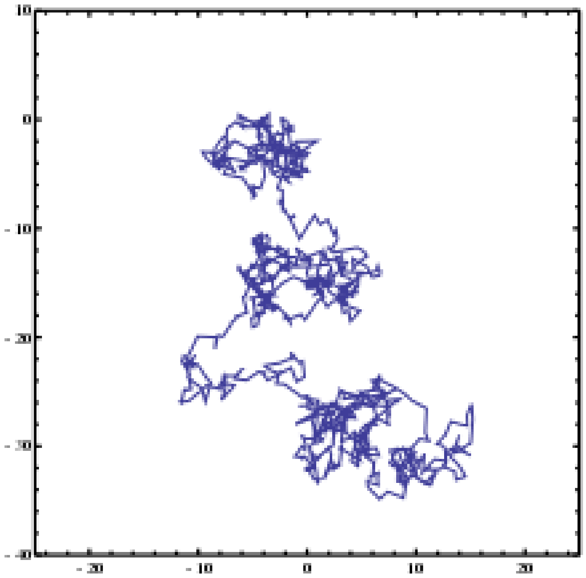
**Kedjeregeln:** $(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = \underline{f'(g(x)) \cdot g'(x)}$
Kedjeregeln ligger till grund för alla implementationer av träningssteget för neurala nätverk (typ av AI-algoritm) nämlign genom s.k. "backwards propagation".

Intuitivt så motsvarar derivatan $f'(x)$ tangentlinjens lutning för $f$ i $x$. Borde betyda att $f$ "hänger ihop@ i $x$, dvs. att $f$ är kontinuerlig i $x$?

**Sats:** (deriverbarhet ger kontinuitet)
Om $f$ är deriverbar i $x$ så är $f$ kontinuerlig i $x$. (tenta)

**Bevis:**
Att $f$ är deriverbar i $x$ betyder att gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar. Men det betyder att $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h = 0$ Så $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$
Låt $x + h = y \Rightarrow \lim_{y\to x} f(y) = f(x)$, dvs. $f$ är kontinuerlig i $x$.
□

Gäller det motsatta, dvs. att om $f$ är kontinuerlig i $x$ så är $f$ deriverbar i $x$? Nej! T.ex. är s.k. <u>Brownsk rörelse</u> $B(t)$(slmpfunktion) kontinuerlig i alla punkter men ej deriverbar någonstans.




Brownsk rörelse används bl. a. inom signalbehandling samt inom matematisk finans (för att modellera aktieprisutveckling).

## 10.3 Derivatan av trigonometriska funktioner

Det gäller att:

$$\frac{d}{dx} sinx = cosx$$

$$\frac{d}{dx} cosx = -sinx$$

$$\frac{d}{dx} tanx = \frac{1}{cos^2 x} = \frac{1}{1 - sin^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$$

Alla dessa bygger på beviset att

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

**Ex:** (2.4.12)
Beräkna derivatan av:

$$f(x) = (2 + |x|^3)^{\frac{1}{3}}$$

**Lösning:**
Tänk $2 + |x|^3$ som en inre funktion och använd <u>kedjeregeln</u>!

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2 + |x|^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2 + |x|^3)' = \frac{1}{3}(2 + |x|^3)^{\frac{-2}{3}} \cdot (2 + |x|^3)'$$

$$(2 + |x|^3)' = 0 + (|x|^3)' = \{\text{kedjeregeln}\} = 3 \cdot |x|^2 \cdot (|x|)'$$

Vad är $(|x|)'$?

$$|x| = \left\lfloor {}^{x, \text{ om } x\geq 0}_{-x, \text{ om } x<0} \right. \Rightarrow (|x|)' = \left\lfloor {}^{1, \text{ om } x\geq 0}_{-1, \text{ om } x<0} \right. = \text{sgn}(x)$$

så

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2 + |x|^3)^{\frac{-2}{3}} \cdot 3 \cdot |x|^2 \cdot \text{sgn}(x) = \frac{x^2}{(2 + |x|^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \text{sgn}(x),\ x \neq 0$$

## 10.4 Repetition derivata

Om en funktion $f$ beskriver hur värdet $y$ av någon typ av process beror av en inparameter $x$, dvs. $y = f(x)$, så beskriver derivatan $f'$ hur snabbt/långsamt motsvarande process förändras givet indata $x$. $f'(x)$ kan tolkas som förändringshastigheten av $f$ i punkten $x$. T. ex.

$$x = \text{"framledningstemperatur för radiatorvatten"}$$

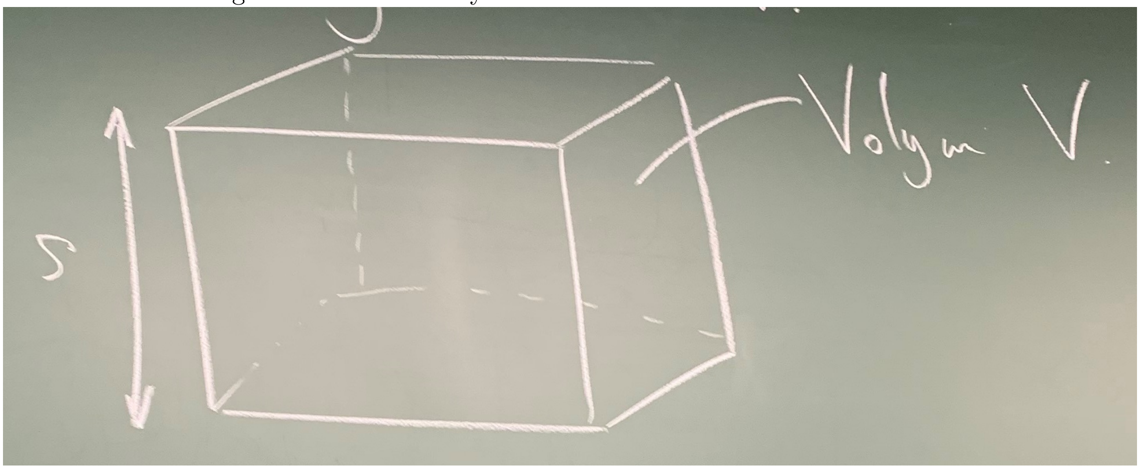
$$f(x) = \text{"inomhustemperatur givet framledningstemperatur x"}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \text{"förändringshastigheten i inomhustemperatur givet förändring i framledningstemperatur x"}$$

Derivator används och tolkas på liknande sätt i en mängd olika sammanhang, från ekonomi/samhällsvetenskap till fysik/teknik/naturvetenskap. Måste förstå möjligheter, begränsningar och egenskaper för $f'$.

**Ex:** (2.7.20)
Bestäm förändringshastigheten för sidorna av en kubsom funktion av kubens volym.

**Lösning:**
Kalla kubens sidlängd för $s$ och dess volym för $V$.




Vi vill hitta ett explicit uttryck för $s'(V)$. Vi vet att $V = s^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$ Alltså är $s'(V) = \frac{1}{3} \cdot V^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot V^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot V^{\frac{2}{3}}}$
□

**Ex:** (2.7.29)
Om det kostar en fabrikör $C(x)$ kr att tillverka $x$ enheter av något (brödrostar) så innebär detta en snittkostnad per enhet av $C(x)/x$ $\frac{kr}{enhet}$
Visa att det antal enheter $x$ som minimerar snittkostnaden gör snitt- och marginal-kostnaden ($C'(x)$) lika.

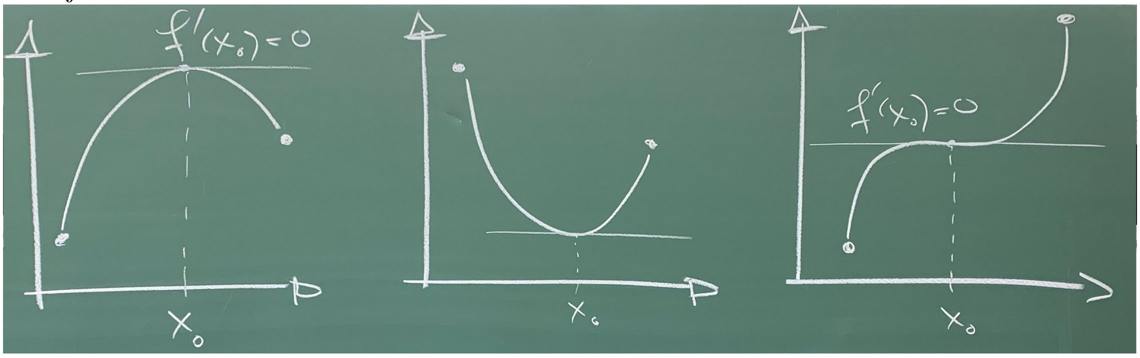
**Lösning:**
Låt $A(x)$ beteckna snittkostnad, dvs. $A(x) = \frac{C(x)}{c}$. Då gäller att

$$A'(x) = \frac{d}{dx}[\frac{C(x)}{x}] = \{\text{produktregeln}\} = C'(x) \cdot x^{-1} + C(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

Vi ser att $A'(x) = 0 \Leftrightarrow C'(x) \cdot x - C(x) = 0 \Leftrightarrow$ marginalkostnad $= C'(x) = \frac{C(x)}{x} =$ snittkostnad.
□

Varför sattes $A'(x) = 0$ som en garant för ett minimum?
Rent generellt så betyder $f'(x_0) = 0$ att en given funktion $f$ har horizontell tangent i $x = x_0$. Sådana punkter $x = x_0$ kallas för kritiska punkter och man säger att $f$ är stationär för sådana $x$. Geometriskt kan detta bara betyda något

av följande:




Hur visste man att $A'(x) = 0$ skulle motsvara en kritisk punkt för ett minvärde av $A(x)$?
Rimligt att anta att $C(x) = K + c(x)$ där $K$ är en fast kostnad och $c(x)$ den kostnad som går upp per producerad enhet.

- $A(x) \simeq \frac{K}{x}$ om $x$ litet $\Rightarrow$ avtagande.
- $A(x) \simeq \frac{c(x)}{x}$ om $x$ stort $\Rightarrow$ konstant eller växande.

$\Rightarrow A(x)$ har ett minimum ...(?)
Smidigare att kika på Högre ordningens derivator!

## 10.5 Högre ordningens derivator

Givet en funktion $f$ kan man definiera andraderivatan $f''$ som $f'' = (f')'$. På liknande sätt definieras tredje-,fjärde, och högre ordningens derivator som

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Andraderivatan bär precis som förstaderivatan både på teknisk- och geometrisk information om $f$. Om $x$ = tid och $f(x)$ = tillryggalagd sträcka så motsvarar $f'(x)$ = momentan hastighet och $f''(x)$ = momentan acceleration. Geometriskt så kan $f''(x_0)$ tolkas som krökningen av grafen till $f$ i punkten $x = x_0$. Det gäller att om:

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ konvex i $x_0$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ konkav i $x_0$
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f$ kan vara konvex eller konkav (och kan vara en s.k. inflektionspunkt) eller ingetdera.

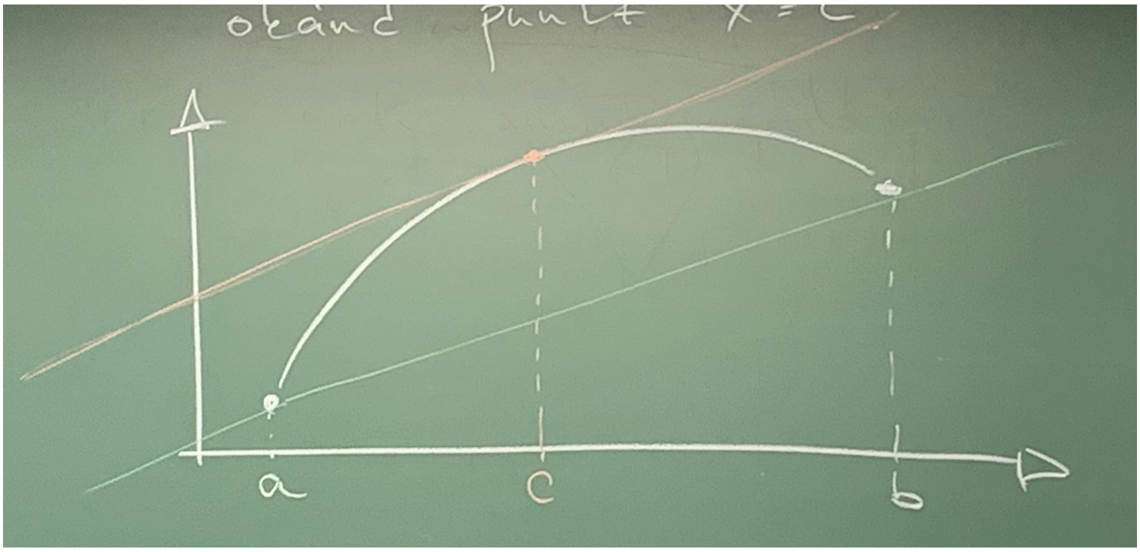
Speciellt gäller för stationära punkter där $f'(x_0) = 0$ att:

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ har ett lokalt minimum i $x_0$
- $f''(x_0) <\Rightarrow f$ har ett lokalt maximum i $x_0$

**Sats:** (medelvärdessatsen för derivator)(tenta)
Antag att $f$ är en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ och deriverbar på $(a, b)$. Då existerar en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(Notera: Vänsterledet = snittlutningen av $f$ mellan a och b,
Högerledet = tangentlutningen i punkt c)




För att bevisa detta använder man ett annat resultat som kallas Rolles sats.

**Sats:** (Rolle)
Antag att $g$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på $(a,b)$. Om $g(a) = g(b)$ så finns en punkt $c \in (a,b)$ sådan att $g'(c) = 0$.
(Notera: Rolles sats är ett specialfall av medelvärdessatsen).

**Bevis av medelvärdessatsen:**
Givet en funktion $f$ som uppfyller villkoren i satsen så kan vi konstruera funktionen $g$ som

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a))$$

Uppenbart att $g$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på $(a,b)$ eftersom $f$ är det. Notera också att: $g(a) = f(a) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a)) = f(a) - f(a) = 0$
$g(b) = f(b) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a)) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$
Så $g(a) = g(b)$ och $g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

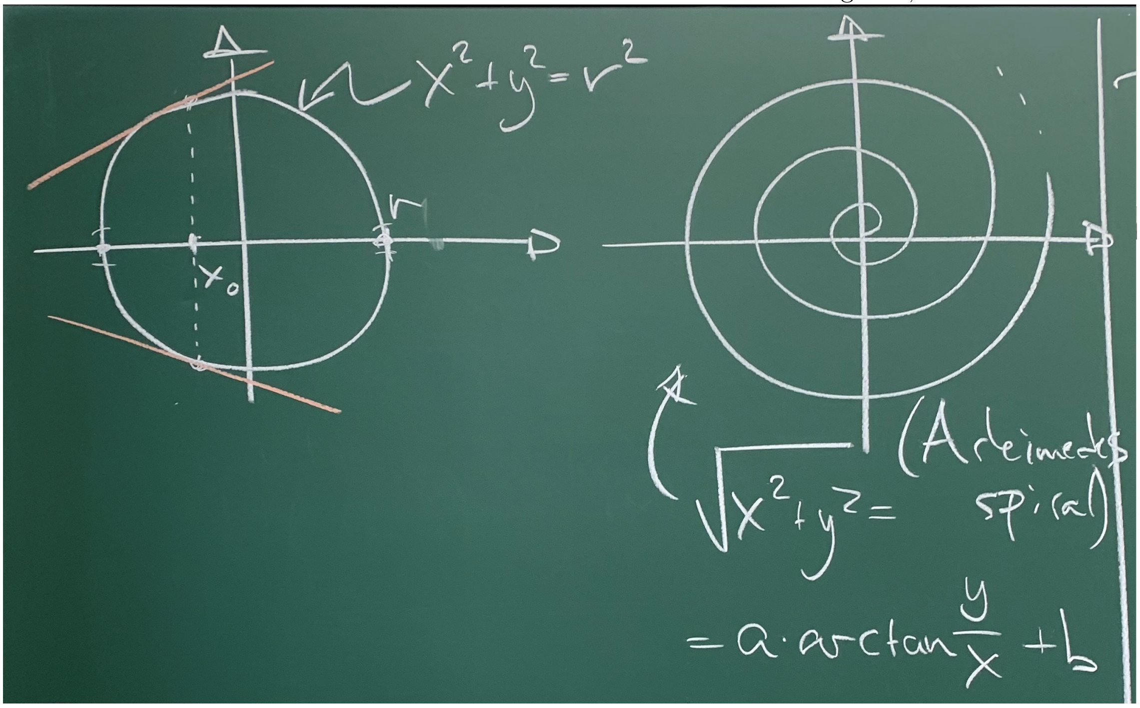
Enligt Rolles sats finns då en punkt $c \in (a,b)$ så att $g'(c) = 0$, dvs. $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ och satsen är bevisad =)
□

**Sats:**
Låt $J$ vara ett öppet intervall och $I$ vara $J$ utan ändpunkter. Om $f$ kontinuerlig på $I$ och deriverbar på $J$ gäller att

- $f'(x) \lessgtr 0 \forall x \in J \Rightarrow f$ Strängt växande/avtagande på $I$
- $f'(x) \lesseqgtr 0 \forall x \in J \Rightarrow f$ Växande/avtagande på $I$

## 10.6 Implicit derivering

Att derivera en given funktion $f(x)$ är "lätt" med hjälp av regler som exempelvis produktregeln och kedjeregeln. Ibland vill man dock beräkna derivator för kurvor som inte är funktionsgrafer, t. ex. en cirkel




Denna typ av kurvor kan inte skrivas på formen $f(x)$ (Ett $x$-värde kan inte svara mot flera $y$-värden), men däremot som $F(x,y) = 0$. T. ex. för Arkimedes spiral så är

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - a \cdot \arctan\frac{y}{x} - b$$

Hur beräknar man derivatan av kurvan $F(x,y) = 0$ i punkten $x = x_0$? Notera att det mycket väl kan finnas flera derivator tillhörande en given punkt $x = x_0$. Vi kan använda kedjeregeln för att beräkna $F'(x,y)$

**Ex:** (2.9.5)
Givet kurvan $x^2y^3 = 2x - y$, bestäm $y'$ uttryckt i termer av $x$ och $y$.

**Lösning:**

$$x^2y^3 = 2x - y \Leftrightarrow \underbrace{x^2y^3 - 2x + y = 0}_{F(x,y)}$$

$$F'(x,y) = \frac{d}{dx}[F(x,y)] = \frac{d}{dx}[x^2y^3 - 2x + y] = \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(y) =$$

$$= \{\frac{d}{dx}(2x) = 2,\ \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx} = y'\} = \frac{d}{dx}(x^2y^3) - 2 + y' = \{\text{produktregeln}\} = 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(y^3) - 2 + y' = \{\text{kedjeregeln}\} =$$

$$= 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot y' - 2 + y'$$

För kurvan gäller att

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y) = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2y' - 2 + y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2 - 2xy^3}{1 + 3x^2y^2}$$

□

Vid implicit derivering måste man vara noga med att ha koll på punkter där derivatan eventuellt inte existerar.

# 11

## Primitiva funktioner

## 11.1 Indefinita integralen

Med en primitiv funktion (antiderivata) till en funktion $f$ på ett intervall $I$ menas en funktion $f$ sådan att

$$F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$$

Eftersom derivatan av alla konstantfunktioner $g(x) = C$ är 0 ($g'(x) = 0$) så finns oändligt många primitiva funktioner till $f$ eftersom alla $G(x) = F(x) + C$ funkar. Den indefinita integralen av $f$ innefattar alla dessa!

### 11.1.1 Definition

Givet en funktion $f$ definieras den indefinita integralen som

$$\int f(x)dx := F(x) + C, \; x \in I$$

Där $C$ är en godtycklig konstant och $F$ är en primitiv funktion till $f$, dvs

$$F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$$

Integralen är en hörnsten inom matematisk analys och används i en mängd olika sammanhang.

**Ex:** (2.10.30)

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = x^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

**Lösning:**
Att lösa begynnelsevärdesproblemet innebär att bestämma $y(x)$. Om $y' = x^{\frac{1}{3}}$ så måste

$$y = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \{\frac{d}{dx} x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}\} = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C$$

. Vidare så vet vi att $y(0) = 5$ så $\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$ och vi får att

$$y = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 5$$

□

## 11.2 l'Hôpitals regler

l'Hôpitals regler är en strategi som ibland kan användas för att lösa icke-triviala gränsvärdesproblem, dvs. gränsvärden av typen

$$\lim_{x\to\ldots} = \underbrace{\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}_{\text{Här kan l'Hôpital funka!}}, 0\cdot\infty$$

### 11.2.1 l'Hôpitals första regel

Antag att $f$ och $g$ är deriverbara på $(a,b)$ och att $g'(x) \neq 0$. Antag också att

$(i)$ $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$, $c \in (a,b)$

$(ii)$ $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (Där $L$ kan vara ändligt eller oändligt)

Då är $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (Funkar även för $\lim_{x\to a^+}$,$\lim_{x\to b^-}$ och om $a, b = \pm\infty$)

### 11.2.2 l'Hôpitals andra regel

Antag att $f$ och $g$ är deriverbara på $(a,b)$ och att $g'(x) \neq 0$. Antag också att

$(i)$ $\lim_{x\to c} g(x) \pm \infty, c \in (a,b)$

$(ii)$ $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($L$ ändligt eller oändligt)

Då är $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

**Ex:** (4.3.6)
Bestäm

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}-1}}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

**Lösning:**
Gränsvärde av typen "$\frac{0}{0}$". Om $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$ och $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$ så är $g'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}}$ och därmed $g'(x) \neq 0$ i en omgivning av $x = 1$, dvs. $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ för $\varepsilon > 0$. Gäller också att

$$\lim_{x\to 1} f() = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$$

och att

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Och enligt l'Hôpitals första regel gäller därför att

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1} = \frac{1}{2}$$

□

## 11.3 Standardgränsvärden

Förutom l'Hôpitals regler finns en samling så kallade standardgränsvärden som man alltid kan ta för givna (om inte annat anges) när man löser gränsvärdesproblem:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$, om $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, om $a > 0$
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} |x|^n e^x = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$
- $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

**Ex:** (4.1.11)
Hur snabbt förändras volymen av en rektangulär låda då höjden är 6 cm, bredden 5 cm och djupet 4 cm om både höjd och djup ökar med 1 cm/s och bredden minskar med 2 cm/s?

**Lösning:**
Lådans dimensioner beror av tiden så $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Det gäller för volymen $V(t)$ att $V(t) = x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)$ och vid tiden $t = t_0$ vet vi att $x(t_0) = 6, y(t_0) = 5, z(t_0) = 4, x'(t_0) \leq' (t_0) = 1$ och $y'(t_0) = -2$. Vad blir $V'(t_0)$?

$$V'(t) = \frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)) = \{\text{Produktregeln}\} =$$

$$= x'(t) \cdot y(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y'(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y(t) \cdot z'(t) \Rightarrow V'(t_0) =$$

$$1 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 1 = 30 - 48 + 30 = 2\text{cm}^3/s$$

Så lådans volym <u>ökar</u> med $2\text{cm}^3$/s
□

**Ex:** (4.1.38)
Två tunga lådor är sammankopplade med ett 15m långt och starkt (icke-elastiskt) rep enl. figur
Hur snabbt rör sig låda $B$ mot punkten $Q$ då låda $A$ befinner sig 3m från $Q$ och rör sig bort från denna punkt med en fart av 0.5m/s?

**Lösning:**
Beteckna repets längd $l$ och de båda dellängderna $l_x$ och $l_y$. Då gäller att $l(t) = l_x(t) + l_y(t) = \sqrt{x^2(t) + 4^2} + \sqrt{y^2(t) + 4^2}$ och

$$0 = l'(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x(t) \cdot x'(t) + \frac{1}{2}(y^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y(t) \cdot y'(t) =$$

$$= \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 16}} + \frac{y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{y^2(t) + 16}}$$

Vi vet att vid $t = t_0$ så är $x(t_0) = 3, x'(t_0) = 0.5$ och $y(t_0) = \sqrt{l_y^2 - 16} = \sqrt{(l - l_x)^2 - 16} = \sqrt{(15 - sqrt16 - 9)^2 - 16} = \sqrt{84}$ så $0 = \frac{3 \cdot 0.5}{\sqrt{9+16}} + \frac{\sqrt{84} \cdot y'(t_0)}{\sqrt{84+16}} \Rightarrow y'(t_0) = -\frac{3}{\sqrt{84}} \approx -0.327$m/s
□

*12*

# *Numerisk ekvationslösning*

## 12.1 Definition

Handlar om att på numerisk väg lösa ekvationen $f(x) = 0$. Om till exempel $f$ är kontinuerlig kan man använda bisektionsalgoritmen, dvs. hitta två tal $a$ och $b$ så att $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$ (eller tvärt om!). Då ligger åtminstone ett nollställe mellan $a$ och $b$.
Beräkna $f(\frac{a+b}{2})$, dvs. värdet i mittpunkten och avgör sedan om nollställe ligger i antingen intervallet $[a, \frac{a+b}{2}]$ eller i $[\frac{a+b}{2}, b]$. Fortsätt på samma vis i delintervallen...

## 12.2 Fixpunktsiteration

Formulera om $f(x) = 0$ som $g(x) = x$ (om möjligt). Till exempel $f(x) = \sin^2(x) + x^2 - x = 0$ blir då $g(x) = 3\sin^2(x) + x^2 = x$. Ta sedan ett tal $x = x_0$ som troligtvis ligger nära det $x$ som löser ekvationen och sätt in $g(x)$. $x_0 \to g(x_0) = x_1 \to g(x_1) = x_2 \to g(x_2) \dots$ dvs. beräkna $x_0, x_1, x_2, \dots$ enligt $g(x_n) = x_{n+1}$. Under vissa förutsättningar konvergerar talföljden $\lim_{n\to\infty} x_n$ och man hittar en lösning till $g(x) = x$, dvs. $f(x) = 0$. Gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ kallas fixpunkt till $g(x)$.

**Sats:**
Antag att $g$ är definierad på intervallet $I = [a, b]$ och uppfyller att:

1. $f(x) \in I$ om $x \in I$
2. Det finns en konstant $0 < k < 1$ så att $\forall u, v \in I$ gäller att $< f(u) - f(v)| \leq k \cdot |u - v|$ (lipschitz-kontinuitet). Då har $g$ en unik fixpunkt $r \in I$, dvs. $g(r) = r$ och oavsett val av $x_0 \in I$ så är $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

## 12.3 Newtons metod

Fungerar bra om man söker nollställen $f(x) = 0$ där $f$ är en deriverbar funktion. Går ut på att iterativt hitta nollställen till tangentlinjer!
För $x = x_n$ har man tangentlinjen $\frac{y-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} = f'(x_n)$. Newtons metod kan faljera om $f$ inte är överallt deriverbar eller om det finns horizontella/vertikala tangenter.

# 13

## Extremvärden

## 13.1 Definition

Ett extremvärde av en funktion $f$ är en punkt där värdet av $f$ är maximalt/minimalt, antingen globalt eller lokalt.

### 13.1.1 Definition globalt extremvärde

En funktion $f$ har ett eller flera globalt maximum/minimum i $x = x_0$ (där $x_0 \in D(f)$) om $f(x) \lesseqgtr f(x_0)$ $\forall x \in D(f)$.

### 13.1.2 Definition lokalt extremvärde

En funktion $f$ har ett lokalt maximum/minimum i $x = x_0$ (där $x_0 \in D(f)$) om det finns ett tal $h > 0$ så att $f(x) \lesseqgtr f(x_0)$ för ett $x \in D(f)$ så att $|x - x_0| < h$.
Lokala (och globala) extrempunkter kan hittas i tre olika typer av fall:

1. Kritiska punkter, dvs. i $x$ sådana att $f'(x) = 0$.
2. Singulära punkter, dvs. i $x$ sådana att $f'(x)$ ej existerar.
3. Ändpunkter av $D(f)$

**Ex:** (4.4.13)
Hitta alla globala och lokala extrempunkter till $f(x) = |x - 1|$, $x \in [-2, 2]$.

**Lösning:**
$f$ saknar kritiska punkter (eftersom $f'(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$). Har singulär punkt i $x = 1$ där $f(1) = 0$ och i ändpunkterna gäller att:

- $f(-2) = |-2-1| = |-3| = 3$
- $f(2) = |2-1| = |1| = 1$

Så globalt minimum i $x = 1$, globalt maximum i $x = -2$ och lokalt maximum i $x = 2$.

# 14

# Taylorpolynom fortsättning

Givet en funktion $f$ och en punkt $x = a$ (där $f$ är tillräckligt många gånger deriverbar) lärde vi oss att:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylorpolynomet } P_n} + \underbrace{\frac{f^{(n1)}(s)}{(n+1)}(x-a)^{(n+1)}}_{\text{Lagranges restsats}}$$

För något tal $s$ mellan $a$ och $x$. Polynomet $P_n(x)$ approximerar funktionen $f$ i närheten av $x = a$. Ofta är man inte intresserad av det exakta uttrycket för felet $E_n(x)$ utan bara "hur snabbt det växer" i takt med att $x$ rör sig från $a$. Smidigt att använda så kallad O-notation (ordonotation eller stora O-notation).
Man skriver att $f(x) = O(u(x))$ då $x \to a$ om det finns ett tal $K > 0$ och $\delta > 0$ så att $|f(x)| \leq K \cdot |u(x)|$ då $0 < |x-a| < \delta$. På liknande sätt, om $f(x) = g(x) + O(u(x))$ då $x \to a$ så betyder det att $f(x) - g(x) = O(u(x))$. För Taylorutvecklingen gäller alltså att $f(x) = P_n(x) + O((x-n)^{n+1})$

## 14.1 Räkneregler för O

- $C \cdot O(u(x)) = O(u(x)) \ \forall C > 0$
- $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^n)$ om $n \geq m$ och $x \to \infty$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$ om $n \geq m$ och $x \to 0$
- Om $f(x) = O((x-a)^k \cdot u(x))$ då $x \to a$ så är $\frac{f(x)}{(x-a)^k} = O(u(x))$ då $x \to a$

**Sats:** (Om Taylorpolynom och $O$)
Om $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ och $Q_n$ är ett polynom av grad $n$ så är $Q_n$ = Taylorpolynomet av $f$ runt $x = a$.

## 14.2 l'Hôpitals regel och Taylorpolynom

### 14.2.1 Tes

Vi kan förstå l'Hôpitals regel bättre med hjälp av taylorpolynom och O-notation. Vi har lärt oss att om gränsvärdet $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ är av typen "$\frac{0}{0}$" och $g'(x) \neq 0$ i en omgivning av $x = a$ så kan man istället försöka beräkna $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Om det senare gränsvärdet konvergerar och <u>inte</u> är av typen $\frac{0}{0}$ så konvergerar det förra mot samma sak.

### 14.2.2 Varför?

Betrakta första ordens Taylorutveckling av $f$ och $g$ runt $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + O((x - a)^2)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + O((x - a)^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{f(a) + f'(a)(x - a) \cdot O((x - a)^2)}{g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + O((x - a)^2)}$$

$$= \{f(a) = g(a) = 0 \text{ enligt förutsättning}\} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(a) \cdot (x - a) + O((x - a)^2)}{g'(a) \cdot (x - a) + O((x - a)^2)} = \{\text{bryt ut } (x - a) \text{ ur täljare och nämnare}\} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(a) + O((x - a))}{g'(a) + O((x - a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Och om l'Hôpital inte funkar, dvs. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ är av typen $\frac{0}{0}$? Testa då istället $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Om det gränsvärdet inte är av typen $\frac{0}{0}$ så kommer

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Varför? Taylorutveckling till andra ordningen runt $x = a$ ger:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + O((x - a)^2)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2 + O((x - a)^2)$$

Samma räkning som innan ger att

$$\lim_{x \to a} = \cdots = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

**Ex:** (Kompendiet, övning 9.5)
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

**Lösning:**
Gränsvärdet är icke-trivialt då direkt insättning av $x = 0$ ger "$\infty - \infty$". Börja med lite omskrivningar.

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \text{ så } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1 - \cos 2x}{2}}{x^2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}} = \frac{2x^2 - 1 + \cos 2x}{x^2 - x^2 \cos 2x}$$

Från standardutvecklingar vet vi att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + O(x^{2n+2}) \Rightarrow \cos(2x) = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} - \ldots$$

Använd denna utveckling till ordning 4 i täljaren och ordning 2 i nämnaren!

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 1 + \cos 2x}{x^2 - x^2 \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 1 + (1-)\frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + O(x^6)}{x^2 - x^2(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 1 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^2 - x^2 + 2x^4 + O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{2x^4 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{2 + O(x^2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

□

**Ex:**
Använd Maclaurinutveckling för $\sin x$ för att beräkna Maclaurin-polynomet av ordningen 4 till funktionen $\arcsin(x)$. $(\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + O(x^{2n+1})$

**Lösning:**
Eftersom arcsin är invers funktion till sin (på intervallet $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) så gäller per definition att $\arcsin(\sin x) = \sin(\arcsin x) = x$ och $\arcsin(-\sin x) = \arcsin(\sin(-x)) = -x = \{\arcsin(\sin x) = x\} = -\arcsin(\sin x)$ Så

$$\arcsin(\underbrace{-\sin x}_{=-z}) = -\arcsin(\underbrace{\sin x}_{=z})$$

dvs. $\arcsin(-z) = -\arcsin(z)$. Detta betyder att arcsin är en udda funktion och utvecklingen vi söker måte därför vara på formen $a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + O(x^5)$ för några tal $a_1$ och $a_3$.

Vi vet att $\sin(\arcsin x) = x$ eftersom (åter igen) arcsin är invers till sin, och vi vet att $\sin x = -\frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ vilket leder till att

$$x = \sin(\arcsin x) = (a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5)) - \frac{(a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5))^3}{6} + O((a_1 x + a_3 x^3 + O(x))^5) =$$

$$= (a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5)) - (\frac{a_1^3}{6} x^3 + O(x^5)) + O(x^5) = a_1 \cdot x + (a_3 - \frac{a_1^3}{6}) \cdot x^3 + O(x^5)$$

Vilket bara kan vara sant om $a_1 = 1$ och $a_3 - \frac{a_1^3}{6} = 0$ och vi får att

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

□

# 15

# Integraler

## 15.1 Summationsnotation

En summa av tal $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ skrivs smidigare med summationsnotation:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_1$$

Indexet $i$ kallas för summationsindex och existerar bara i själva summationen (kan jämföras med iteratorn i en for-loop). Summering är en linjär operation, dvs. superpositionsprincipen gäller:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_1 + \beta \sum_{i=1}^{n} b_1$$

### 15.1.1 Viktiga standardsummor

Några viktiga standardsummor är:

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}, r \neq 1$$

## 15.2 Approximera area

Vi vill kunna beräkna arean under funktionsgrafer. Strategin är att dela upp ytan i mindre bitar för vilka arean är lätt att beräkna och sedan summera alla bidrag.
Dela upp intervallet $[a, b]$ i mindre delintervall med ändpunkter i $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Varje delintervall är av bredden $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots$. Beräkna till exempel areorna av alla rektanglar med bredd $\Delta x_i$ och höjd $\frac{f(x_1)+f(x_{i+1})}{2}$ Då borde

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

Approximationen borde bli bättre och bättre i takt med att delintervallen blir kortare och kortare och det borde gälla att:

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

Detta måste dock preciseras för att bli matematiskt relevant.

**Ex:** (5.2.5)
Beräkna arean under grafen till $y = x^2$ mellan $x = 1$ och $x = 3$

**Lösning:**
Dela upp intervallet $[1,3]$ i $n$ st lika stora delar. Delintervallens bredd blir då $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ Med ändpunkter i $1, 1+\frac{2}{n}, 1+2\frac{2}{n}, \dots, 1+(n-1)\frac{2}{n}, 3$. Om vi använder funktionens medelvärdei varje delintervall som höjd för approximerande rektanglar får vi att

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(1+i\cdot\frac{2}{n})^2 + (1+(i-1)\cdot\frac{2}{n})^2}{2} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}+1+\frac{4i}{n}-\frac{4}{n}+\frac{4i^2}{n^2}-\frac{8i}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{2} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} + \frac{8i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3} - \frac{4}{n^2} - \frac{8i}{n^3} + \frac{4}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\cdot n + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n^2}\cdot n - \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^3}\cdot n =$$

$$= 2 + 4 + \frac{16}{6} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}\text{a.e.}$$

□

## 15.3 Definitiv integraler

För att areaberäkning genom approximation ska vara "vettig" måste det gälla att resultatet är oberoende av:

(i) Hur $x$-axeln styckas upp.

(ii) Vilken stapelhöjd som väljes i varje delintervall.
(Oberoende av $f(s)$ där $s \in [x_i, x_{i+1}]$)

En uppdelning av ett intervall $[a,b]$ i disjunkta delintervall $[x_0,x_1],(x_1,x_2],\dots,(x_{n-1},x_n]$ kallas för en partition av $[a,b]$ och kan refereras till som mängden av ändpunkter:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Varje delintervall i $P$ har en längd $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ och man definierar normen av $P$ som längden av det längsta delintervallet:

$$\|P\| := \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

Enligt 9.4 gäller:
Om $f$ är en kontinuerlig funktion så antas både ett maximalt och ett minimalt värde någonstans i varje delintervall, säg i $x = u_i$ och $x = l_i$ för delintervallet $[x_i, x_{i+1}]$
dvs. om $x \in [x_i, x_{i+1}]$ så gäller att $f(l_i) \le f(x) \le f(u_i)$. Det betyder att en godtycklig stapel över intervallet $[x_i, x_{i+1}]$ alltid kommer att ha en area $A_i$ sådan att

$$f(l_i)\Delta x_i \le A_i \le f(u_i)\Delta x_i$$

Givet en partition $P$ kan vi definiera den nedåt begränsande Riemann-summan $L(f,P)$och den övre begränsande $U(f,P)$ som:

$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\cdot \Delta x_i \qquad U(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

Om $f$ beter sig "vettigt" och $P$ blir en finare och finare partition av $[a,b]$ där $\|P\| \to_{n\to\infty} 0$ så borde

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P) = \lim_{n\to\infty} U(f,P)$$

Oavsett val av partition $P$. I såfall är det ett rimligt mått av arean under funktionsgrafen. Detta definierar den definita integralen av $f$ mellan $a$ och $b$.

### 15.3.1 Definition definit integral

(tenta)
Antag att det finns precis ett enda tal $I$ sådant att det för varje partition $P$ av intervallet $[a,b]$ gäller att:

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

I så fall säger man att $f$ är integrerbar över $[a,b]$ och vi kallar talet $I$ för den definita integralen av $f$ över $[a,b]$. Detta skrivs symboliskt som:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$$

Notera att $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ är ett tal och inte en funktion. "Variabeln" $x$ existerar bara inuti integralen och kallas för integrationsvariabel. Talen $a$ och $b$ kallas nedre- och övre integrationsgräns. Funktionens $f$ kallas för integrand och dx för differentialen.
Integraler definierade utifrån Riemannsummor är en en hörnsten inom matematisk analys tillsammans med definitionen av derivata(10) och definitionen av gränsvärde(8.1). Räcker gott och väl för praktiska tillämpningar men ej för vidare teoretiskt arbete (då används den så kallade Lebesgueintegralen)

## 15.4 Egenskaper för definita integraler

Den definita integralen $\int_a^b f(x)dx$ av en funktion $f$ över ett intervall $[a,b]$ definieras som det unika tal $I$ som alltid ligger mellan godtycklig nedåt begränsade och övre begränsade Riemann-summor (om det finns):

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

för alla tänkbara partitioner $P$ av $[a,b]$. Geometriskt tolkas $\int_a^b f(x)dx$ som "arean under grafen till $f$ med tecken". Har här förutsatt att $a < b$, men är naturligt att utvidga konceptet med definit integral genom följande definitioner:

- $$a = b \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$$
- $$a > b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Integrering är en linjär operation, dvs. superpositionsprincipen (se 15.1) gäller. Rent geometriskt gäller också följande:

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
$$\Rightarrow \int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = z \cdot \int_{a-b}^{a} f(x)dx = z \cdot \int_{a}^{a+b} f(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 0$$

**Satser:**
För kontinuerliga funktioner och för derivator gäller "medelvärdessatser"

- $f$ kontinuerlig på $[a,b]$

  $\Rightarrow$ det finns en punkt $c \in [a,b]$ där $f$ antar värdet $\frac{f(a)+f(b)}{2}$
- $f$ deriverbar på $(a,b)$

  $\Rightarrow$ Det finns en punkt $c \in (a,b)$ där derivatan av $f$ motsvarar snittlutningen på intervallet, dvs $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Analog medelvärdessats finns också för definita integraler!

**Sats:** (medelvärdessats för definita integraler)
Om $f$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så finns en punkt $c \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \prod f(c)$$

Medelvärdessatsen för integraler säger att det finns en rektangel med bred $(b-a)$ och höjd $f(c)$ för något $c$ mellan $a$ och $b$ vars area är precis $\int_a^b f(x)dx$
Ur detta resultat definieras medelvärdet av en funktion $f$ (integrerbar) på ett intervall $[a,b]$ som:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

(rimligare än t.ex. att sätta medelvärdet $\overline{f}$ som $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ eftersom integralen tar hänsyn till $f$ över hela intervallet $[a,b]$ och inte bara ändpunkterna).

## 15.5 Analysens huvudsats

Att definera integraler genom Riemann-summor är bra på många sätt, inte minst för att det är intuitivt men måste ha ett smidigare sätt att beräkna $\int_a^b f(x)dx$ (håller ej att behöva beräkna gränsvärdet av $L(f,P)$ och $U(f,P)$). Detta löser delvis analysens huvudsats.

**Sats:** (analysens huvudsats)(tenta)
Antag att funktionen $f$ är kontinuerlig på ett intervall $I$ som innehåller punkten $a$.

$(i)$ Låt $F$ vara en funktion på $I$ definierad som

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Då är $F$ deriverbar på $I$ och $F'(x) = f(x)$, dvs. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
(så derivering är "antioperationen" till integrering)

$(ii)$ Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på $I$, dvs. $G'(x) = f(x)$ så gäller för varje $b \in I$ att

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(dvs. en beräkningsfunktion för integraler)

**Bevis** $(i)$**:**
Med definitionen av $F$ enligt satsen gäller att:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim^{x+h} hf(t)dt =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(x+h-x)\cdot f(c) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h\cdot f(c) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(c)\text{för något tal } c\in[x,x+h]$$

Men vi vet att $f$ är kontinuerlig på intervallet $I$ och därmed att

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

och alltså är $F'(x) = f(x)$, dvs. att $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Detta bevisar $(i)$!

**Bevis** $(ii)$**:**
För $(ii)$, om $G'(x) = f(x)$ så är $F(x) = G(x) + C$ på intervallet $I$ för något tal $C \in \mathbb{R}$ (eftersom två olika primitiva funktioner till $f$ endast kan skilja på konstant). Alltså gäller att $\int_a^x f(t)dt = G(x) + C$ och om $x = a \Rightarrow 0 = G(a) + C$ så $C = -G(a)$ om vi nu sätter $x = b$ får vi att

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \text{ vilket bevisar } (ii)$$

□

**Ex:** (5.5.15)
Beräkna $\int_0^e a^x dx$ $(a > 0)$

**Lösning:**
För att lösa problemet vill vi hitta en primitiv funktion till $a^x$, dvs. $\int a^x dx$. Det gäller att $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$ Men $\frac{d}{dx}(e^{x\cdot\ln(a)}) = \ln(a)\cdot e^{x\cdot\ln(a)}$ så $\int e^{x\ln(a)}dx = \frac{1}{\ln(a)}\cdot e^{x\cdot\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)}$ så enligt analysens huvudsats gäller:

$$\int_0^e a^x dx = [\frac{a^x}{\ln(a)}]_0^e = \frac{a^e}{\ln(a)} - \frac{a^0}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}\cdot(a^e - 1)$$

# 16

## Variabelsubstitution och Partiell integration

Analysens huvudsats (se 15.5) gör det möjligt att beräkna integraler på ett vettigt sätt (utan att konkret jobba med Riemann-summor). Kan dock vara mycket svårt ändå! För att lösa olika typer av integrationsproblem behövs:

1 Erfarenhet och mycket träning!

2 En samling metoder och tricks.

## 16.1 Variabelsubstitution

En grundläggande och viktig metod för att beräkna vissa typer av integraler. Utgå från kedjeregeln, fast "baklänges":

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} =$$

$$= \left\{ \begin{smallmatrix} u=g(x) \\ du=g'(x)dx \end{smallmatrix} \right\} = \int f'(u)du = f(u) + C = \{u = g(x)\} = f(g(x)) + C \text{ för } C \in \mathbb{R}$$

Om man vill lösa en integral där integranden är på formen $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ för några funktioner $f(x)$ och $g(x)$ (Kan vara svåra att integrera!), prova att byta variabel från $x$ till $u = g(x)$. Funkar även för definita integraler:

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left\{ \begin{smallmatrix} u=g(x) \\ du=g'(x)dx \end{smallmatrix} \Big| \begin{smallmatrix} x=a \Rightarrow u=g(a) \\ x=b \Rightarrow u=g(b) \end{smallmatrix} \right\} = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)du$$

**Ex:** (5.6.4)
Lös integralen

$$\int e^{2x} \cdot \sin(e^{2x})dx$$

**Lösning:**
Observera att $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2 \cdot e^{2x}$ så vi kan skriva

$$\int e^{2x} \cdot \sin(e^{2x})dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} \sin(e^{2x})dx$$

Använd variabelsubstitution med $f(x) = \sin x$ och $g(x) = e^{2x}$.

$$\frac{1}{2} \int \sin(e^{2x}) \cdot 2e^{2x}dx = \left\{ \begin{smallmatrix} u=e^{2x} \\ du=2e^{2x} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \int \sin(u)du =$$

$$= \frac{1}{2} - \cos(u) + C = C - \frac{1}{2}\cos(e^{2x}) \text{ , } C \in \mathbb{R}$$

**Ex:** (5.6.41)
Beräkna integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$.

**Lösning:**
Inte uppenbart på förhand. Krävs erfarenhet och trigonometri.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 dx = \{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx =$$

$$= \{\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{\cos 4x + 1}{2}\} = \frac{1}{4}[x]^{\frac{\pi}{2}}{}_0 - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x + 1 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\underbrace{\sin(2\cdot\frac{\pi}{2})}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}) + \frac{1}{8}[\frac{1}{4}\sin 4x + x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(2\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(0) - 0) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{2\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

Formlerna för "dubbla vinkeln" är väldigt ofta användbara om integranden involverar jämna potenser av sin$x$ och cos$x$!
□

## 16.2 Partiell integration

En mycket användbar metod för att lösa integraler som fås ur produktregeln (se 10.2) för derivator:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$$

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så kan vi istället skriva

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x)) = F'(x)\cdot g(x) + F(x)g'(x) = \{F'(x) = f(x)\} =$$

$$= f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

Omskrivet får vi att

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x)) - F(x)\cdot g'(x)$$

Och om vi integrerar båda sidor och använder analysens huvudsats finner man att:

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx - \int F(x)\cdot g'(x)dx =$$

$$= F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx$$

DVS. $\int f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx$
Detta samband kallas för partiell integration. Användbart när integralen $\int F(x)\cdot g'(x)dx$ är lättare än $\int f(x)\cdot g(x)dx$.

**Ex:** (6.1.6)
Lös integralen $\int x(\ln x)^3 dx$.

**Lösning:**
Använd partiell integration med $f(x) = x$ och $g(x) = (\ln x)^3$.

$$\Rightarrow \int x(\ln x)^3 dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^3 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{2} \int x(\ln x)^2 dx = \{\text{partiell integration}\} =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{2} \int \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln x)^2 + \frac{3}{2} \int x \ln x dx = \{\text{partiell integration}\} =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln x)^2 + \frac{3}{2}(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx) =$$
$$\frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln x)^2 + \frac{3}{4}x^2 \ln x - \frac{3}{4} \int x dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln x)^2 + \frac{3}{4}x^2 \ln x - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Så

$$\int x(\ln x)^3 dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln x)^2 + \frac{3}{4}x^2 \ln x - \frac{3}{8}x^2 + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

□
Kontrollera att det stämmer!

**Ex:** (6.1.23)
Lös integralen $\int \arccos x dx$

**Lösning:**
Använd partiell integration och ett klassiskt trix!

$$\int \arccos x dx \overbrace{=}^{trix!} = \int 1 \cdot \arccos x dx = \{f(x) = 1, g(x) = \arccos x\} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \int x \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx = x \cdot \arccos x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx =$$
$$= \{{}^{u=x^2}_{du=2xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = xdx}\} = x \cdot \arccos x + \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{1}{2} du =$$
$$= \{\frac{d}{du}\sqrt{1-u} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u}}\} = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-u} + C = \{i = x^2\} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Så

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \text{ för } C \in \mathbb{R}$$

**Kontroll:**

$$\frac{d}{dx}[x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + X] = 1 \cdot \arccos x + x \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + 0 =$$
$$= \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$$

□

# 17

## Partialbråksuppdelning

**Ex:** (6.2.16)
Beräkna

$$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}dx$$

**Lösning:**
Eftersom täljaren har en högre grad än nämnaren (3 > 2) kan vi skriva om den rationella funktionen i integranden med hjälp av polynomdivision.

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{x-7} \\ \hline
x^3+1 & x^2+7x+12 \\
\underline{-x\cdot(x^2+7x+12)} & \\
-7x^2-12x+1 & \\
\underline{-7\cdot(x^2+7x+12)} & \\
37x+85 \quad \text{STOP! (hammer time)} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+1}{12+7x+x^2} = (x+7) + \frac{37x+85}{12+7x+x^2}$$

och alltså får vi att

$$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}dx = \int (x+7) + \frac{37x+85}{12+7x+x^2}dx =$$

$$= \int x-7dx + \int \frac{37x+85}{12+7x+x^2}dx = \frac{x^2}{2} - 7x + \int \frac{37x+85}{12+7x+x^2}dx$$

Hur löser man den nya integralen som uppstår?
Polynomdivision hjälper ej eftersom täljaren har lägre grad än nämnaren. Faktorisera nämnaren genom att hitta dess nollställen!

$$\begin{aligned}
&12+7x+x^2=0 \\
&x^2+2\cdot(\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{7}{2})^2+12=0 \\
&\Leftrightarrow (x+\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}+12=0 \\
&\Leftrightarrow (x+\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{49}{4}-\tfrac{48}{4}=\tfrac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow x=-\tfrac{7}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}}=-\tfrac{7}{2}\pm\tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x_1=-\tfrac{6}{2}=-3, x_2=-\tfrac{8}{2}=-4
\end{aligned}$$

Så $x^2+7x+12=(x+3)\cdot(x+4)$ och alltså

$$\int \frac{37x+85}{12+7x+x^2}dx = \int \frac{37x+85}{(x+3)\cdot(x+4)}dx = ?$$

Prova följande ansats:

$$\frac{37x+85}{(x+3)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} \text{ , } A, B \in \mathbb{R}$$

Finns talen $A$ och $B$ så att detta stämmer? Ja!

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)}{(x+3)(x+4)}+\frac{B(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\frac{(A+B)\cdot x+(4A+3B)}{(x+3)(x+4)}$$

Alltså måste: (linjärt ekvationssystem)

$$\begin{cases} A+B=37 \\ 4A+3B=85 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} A=-26 \\ B=63 \end{cases}$$

$A$ och $B$ hittas dock enklast med den så kallade ”handpåläggningsmetoden”.

$$\frac{37x+85}{(x+3)(x+4)}\cdot(x+3)=\frac{A}{x+3}\cdot(x+3)+\frac{B}{x+4}\cdot(x+3)$$

$$\text{Sätt } x=-3 \Rightarrow A=\frac{37\cdot(-3)+85}{(-3)+4}=-26$$

Liknande för $B$ (Multiplicera vänsterledet och högerledet med $(x+4)$ och sätt $x=-4$). Så

$$\int\frac{37x+85}{(x+3)(x+4)}dx=\int\frac{-26}{x+3}+\frac{63}{x+4}dx=$$
$$=63\int\frac{1}{x+4}dx-26\int\frac{1}{x+3}dx=\{\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C\}=$$
$$=63\cdot\ln|x+4|-26\cdot\ln|x+3|+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

och vi har alltså till slut fått:

$$\int\frac{x^3+1}{12+7x+x^2}dx=\int x-7+\frac{37x+85}{12+7x+x^2}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}-7x+63\ln|x+4|-26\ln|x+3|+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

Denna metod för att lösa integraler av typen $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ där $P$ och $Q$ är polynom kallas för partialbråksuppdelning.

(oftast underförstått att graden av $P$ är lägre än graden av $Q$).

□

## 17.1 Sammanfattning

Om graden av $P$ är lägre än graden av $Q$ och $Q$ kan faktoriseras som $Q(x)=(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_n)$ så funkar ansatsen

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n}\ ,\ A_1,\dots,A_n\in\mathbb{R}\text{ (förutsatt att alla nollställen } x_1,x_2,\dots,x_n \text{ är unika)}$$

Talen $A_1,\dots,A_n$ kan beräknas genom handpåläggning dvs.

$$A_i=\lim_{x\to x_i}(x-x_i)\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}$$

för alla $i=1,2,\dots,n$.

Vad händer om några av faktorerna $(x-x_1),(x-x_2),\dots,(x-x_n)$ är samma?

T.ex. $Q(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$? Då gäller ansatsen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{(x-x_2)^2}+\frac{A_4}{x-x_3}+\frac{A_5}{(x-x_3)^2}+\frac{A_6}{(x-x_3)^3}$$

I dessa fall fungerar inte handpåläggning och man måste lösa det linjära ekvationssystemet enligt tidigare exempel.

Om $Q$ inte faktoriserar till linjära termer? T.ex. $Q(x)=(x-1)(x^2+1)$? Då gäller

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

OSV… Läs vidare i kapitel 6.3.

# 18

## *Inverssubstitutioner*

Variant av variabelsubstitution (se 16.1) där man istället för att ersätta en funktion av $x$ med en ny variabel $u$ ersätter $x$ med en ny funktion av $u$, alltså:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ du = f'(x)dx \end{cases} \overset{inv.subst.}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x = g(u) \\ dx = g'(u)du \end{cases}$$

Gör integralen till synes svårare, men underlättar i vissa speciella situationer.

**Ex:** (6.3.5)
Beräkna $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

**Lösning:**
För integrander som innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ brukar inverssubstitutionen $x = a \cdot \sin(u)$ vara bra.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \begin{pmatrix} x = 3\sin(u) \\ dx = 3\cos(u)du \end{pmatrix} = \int \frac{3\cos(u)du}{9\sin^2(u)\sqrt{9 - 9\sin^2 u}} =$$

$$= \int \frac{\cos(u)}{9\sin^2(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}} du = \{1 - \sin^2 u = \cos^2 u\} =$$

$$= \int \frac{\cos(u)}{9\sin^2(u)\sqrt{\cos^2 u}} = \left\{ \begin{matrix} frac1\sqrt{9-x^2} & \\ \Rightarrow -3 < x < 3 & \Rightarrow -1 < \sin(u) < 1 \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \cos u > 0 \end{matrix} \right\} =$$

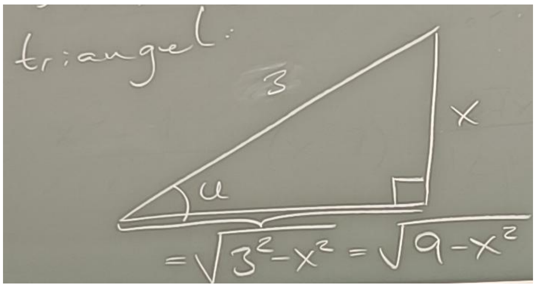
$$= \int \frac{\cos u}{9\sin^2 u \cdot \cos u} du = \int \frac{1}{9\sin^2(u)} du =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} du = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\tan^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} du =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \tan(u) = w \\ \frac{1}{\cos^2(u)du = dw} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{9} \int \frac{1}{w^2} dw = \frac{1}{9}(-\frac{1}{w}) + C =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\tan(u)} + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Hur uttrycker vi detta i termer av $x$? Använd rätvinkliga trianglar! Vi satte $x = 3\sin(u)$, dvs. $\sin(u) = \frac{x}{3}$ Betrakta följande triangel:




Här är uppenbarligen $\sin(u) = \frac{x}{3}$, dvs. $x = 3 \cdot \sin(u)$ (invers substitution) men även

$$\tan(u) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \text{använd detta!}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \cdots = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\tan(u)} + C = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C \text{ , } C \in \mathbb{R}$$

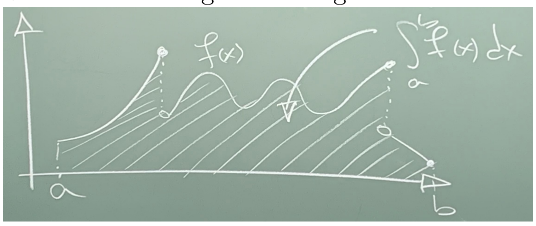
$\square$

# 19

## Generaliserade integraler

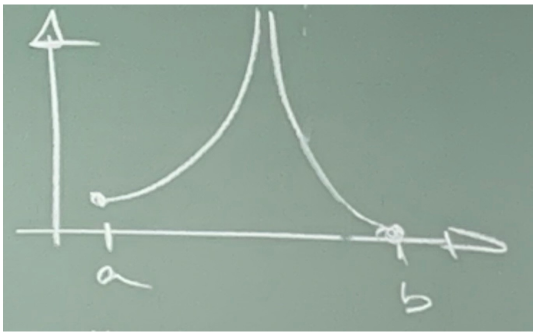
### 19.1 Inledning

Vilka funktioner går att integrera? Kontinuerliga? Självklart, men behöver inte ens kontinuitet. Till exempel:

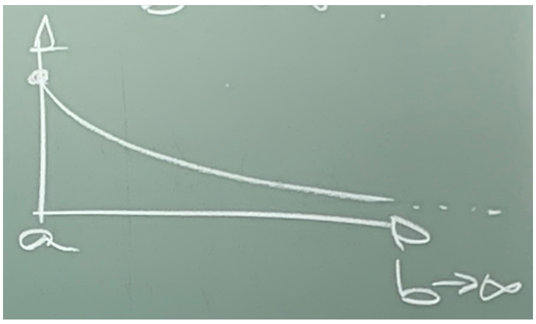


När går en funktion inte att integrera?

- $f$ är obegränsad i någon punkt $x \in [a, b]$



- $a = -\infty$ eller $b = \infty$



Integraler som involverar någon eller båda av egenheterna ovan kallas för generaliserade integraler. De definieras naturligt genom gränsvärden. Om $f$ är obegränsad i en punkt $C \in [a, b]$ så definieras integralen $\int_a^b f(x)dx$ som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z \to C^-} \int_a^z f(x)dx + \lim_{z \to C^+} \int_z^b f(x)dx$$

Om någon av integrationsgränserna är obegränsad definieras integralerna $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ och $\int_a^\infty f(x)dx$ som:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R \to -\infty} \int_R^b f(x)dx \text{ och } \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx$$

För generaliserade integraler kan ett av tre olika fall inträffa:

1 Integralen existerar (blir ett tal)
   - Integralen är konvergent

2 Integralen existerar inte (Gränsvärdet går ej att beräkna)
   - Integralen är divergent

3 Integralen $= \infty$ eller $- \infty$
   - Integralen är divergent mot $\infty$ eller $-\infty$

Det går ibland att avgöra konvergens/divergens genom att jämföra generaliserade integraler mot varandra. Om $-\infty \leq a < b \leq \infty$ och $f$ och $g$ är kontinuerliga på $(a, b)$ så att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ så konvergerar $\int_a^b f(x)dx$ om $\int_a^b g(x)dx$ gör det. På samma sätt om $\int_a^b f(x)dx$ divergerar mot $\infty$ så gör även $\int_a^b g(x)dx$ det.

**Ex:** (6.5.17)
Beräkna $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

**Lösning:**
Integralen är generaliserad eftersom $\ln 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 \cdot \sqrt{\ln(1)}} = \infty$$

$$\text{Det gäller att } \frac{d}{dx}(\sqrt{\ln(x)}) = \frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$\text{Så } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{z \to 1^+} \int_z^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{z \to 1^+} [2\sqrt{\ln(x)}]_z^e =$$

$$\lim_{z \to 1^+} 2 \cdot (\sqrt{\ln(e)} - \sqrt{\ln(z)}) = 2 \cdot (1 - 0) = 2 \Rightarrow \text{Konvergent!}$$

□

**Ex:** (6.5.18)
Samma som innan för

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

**Lösning:**

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x) & \vdots \; x = e \Rightarrow u = 1 \\ du = \frac{1}{x}dx & \vdots \; x = \infty \Rightarrow u = \infty \end{matrix} \right\} = \int_1^\infty \frac{1}{u^2}du = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{u^2}du =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left[ -\frac{1}{u} \right]_1^R = \lim_{R \to \infty} ((-\frac{1}{R}) - (-\frac{1}{1})) = 1 \Rightarrow \text{ Konvergent!}$$

□

# 20

## Numerisk integration

# **Hela kapitlet är tentabefriat**

(Courtesy of Max Hagman)

Viktigt att kunna beräkna bra approximationer av integraler numeriskt. Finns olika typer av algoritmer/metoder.

## 20.1 Mittpunktsmetoden

Approximera $\int_a^b f(x)\,dx$ som en Riemann-summa av staplar av samma bredd vars höjd motsvarar funktionens värde vid stapelns mittpunkt.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx f(m_1)\cdot h + f(m_2)\cdot h + ... + f(m_n)\cdot h = h\cdot\sum_i^n f(m_i) = M_n$$

Ju mindre bredd $h > 0$ desto bättre approximation.

## 20.2 Trapetsmetoden

Istället för att som i mittpunktsmetoden använda en punkt per stapel för höjden (mittpunkten), används stapelsn ändpunkter och linjärapprox. funktionen.
För stapel $i$ $(0 < i < n)$ gäller:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx y_0\cdot h + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\cdot h + y_1\cdot h + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\cdot h + ... =$$

$$h\cdot(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) = T_n$$

Vilken metod är bäst? Man kan visa att:

- Trapetsmetoden $|\int_a^b f(x)\,dx - M_n| \leq \frac{k\cdot(b-a)^3}{12n^2}$
- Mittpunktsmetoden $|\int_a^b f(x)\,dx - T_n \leq \frac{k\cdot(b-a)^3}{24n^2}$

för ett tal $K$ som hänger ihop med $f$. Alltså är:

- Trapetsmetoden $\int_a^b f(x)\,dx = M_n + O(\frac{1}{n^2})$
- Mittpunktsmetoden $\int_a^b f(x)\,dx = T_n + O(\frac{1}{n^2})$

dvs. dom är lika bra!
klar förbätttring fås genom att använda både mittpunkten och ändpunkterna och approximera $f$ i stapeln med en andragradskurva genom punkterna.

## 20.3 Simpsons regel

Man kan visa att Simpson-approximation innebär ett fel av storleksordning $O(\frac{1}{n^4})$ dvs.

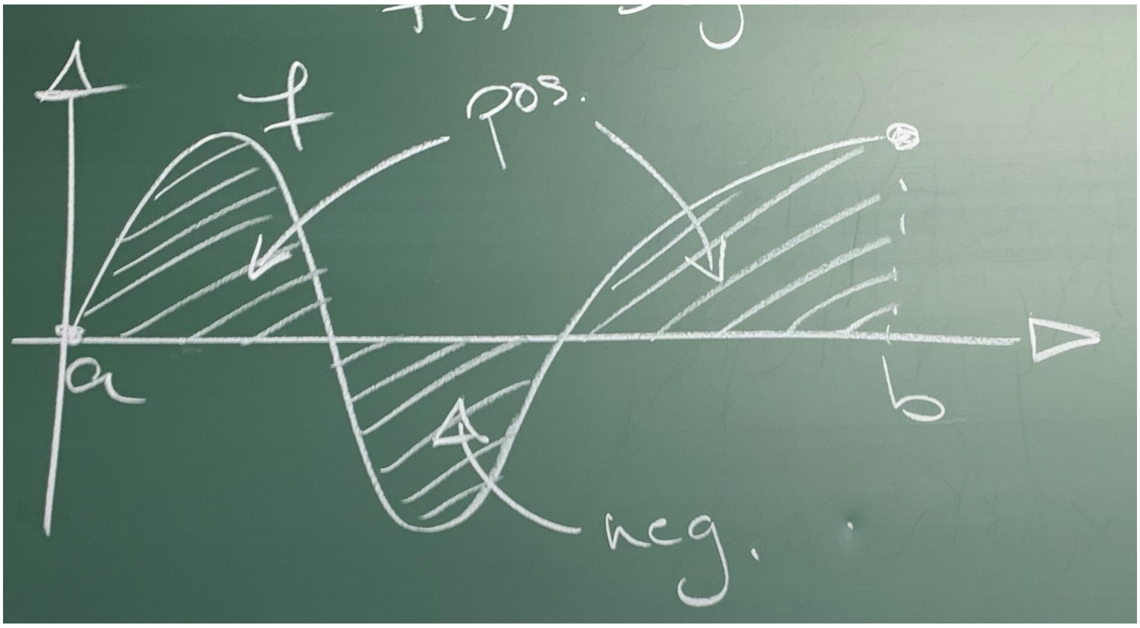
$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n + O(\frac{1}{n^4})$$

# 21

# *Tillämpningar av integraler*

Vi har följande geometriska tolkning av integraler:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{"arean med tecken under grafen till } f(x) \text{ begränsad av } x\text{-axeln"}$$




Om man vill ha totalarean (dvs. arean utan tecken) är det bara att integrera belopp $|f(x)|$ istället.

$$\int_a^b |f(x)|dx = \text{"totala arean under grafen"}$$

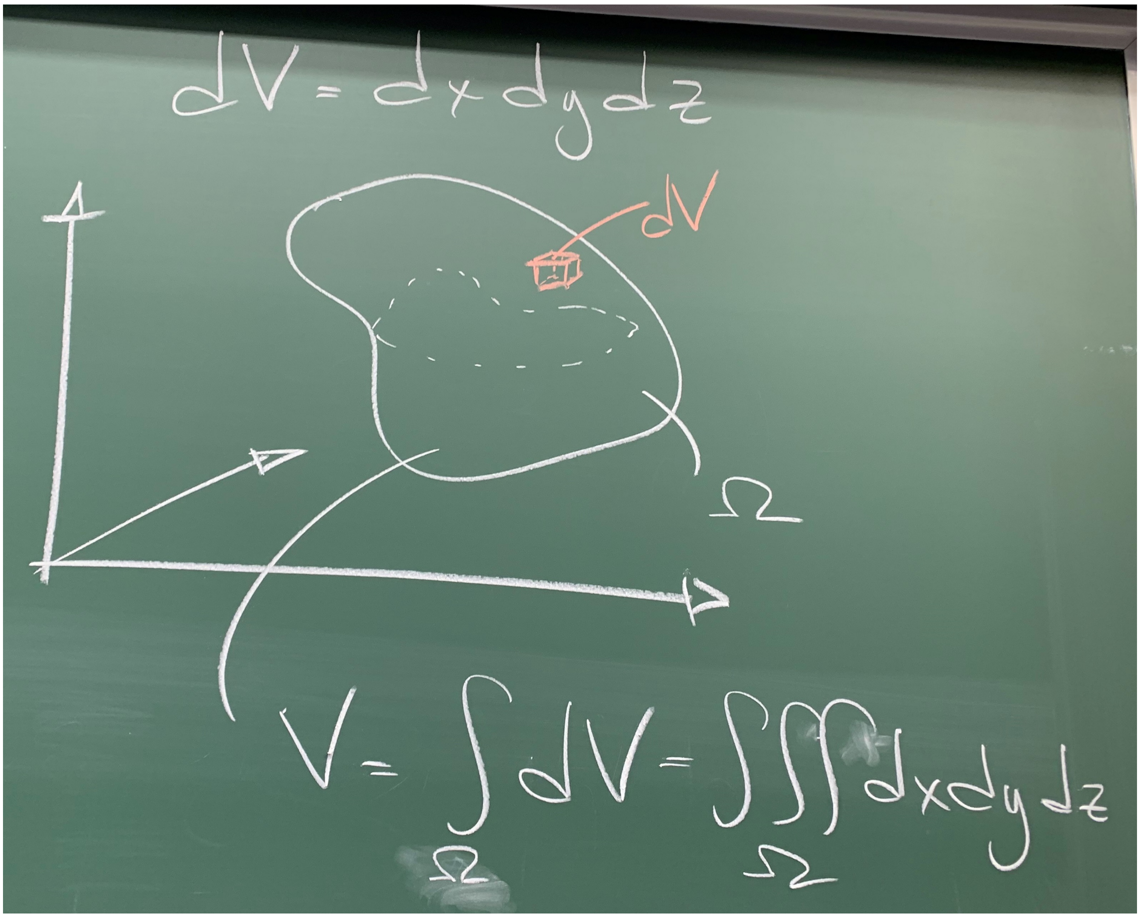
På liknande sätt kan man beräkna arean mellan två grafer.


$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Metoden med att integrera infinitecimala element (som t.ex. $|f(x) - g(x)|dx$) är mycket användbar.

## 21.1 Volymberäkning

Att beräkna volymer med integraler kräver i allmänhet teori från flervariabelanalys eftersom det grundläggande infinitecimala elementet är en liten kub med volym $dV = dxdydz$



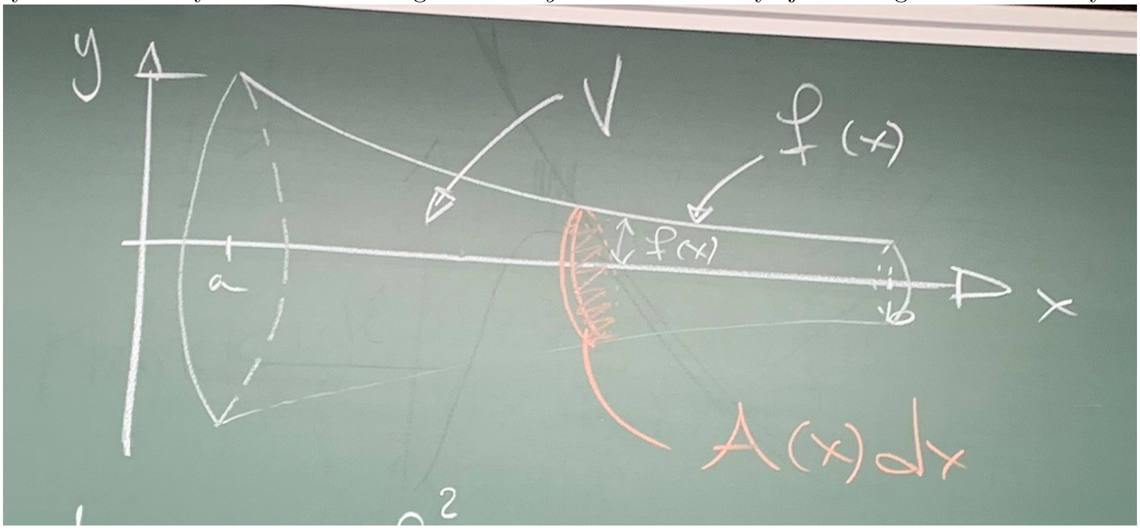

$V = \int_\omega dV = \int\int_\omega\int dxdydz$
Ibland klarar man sig dock med vanliga enkelintegraler om man kan skriva $dV = A(x)dx$, där $A(x)$ beskriver arean av en "skiva" och $dx$ är skivans tjocklek. Detta går om volymen man vill beräkna uppvisar någon form av symmetri.

$$A(x) = (2 \cdot x \tan\theta)^2 = 4x^2 \tan^2\theta \Rightarrow V = \int dV = \int A(x)dx =$$

$$= \int_0^h 4x^2 \tan^2\theta dx = \left[\frac{4}{3}x^3 \tan^2\theta\right]_0^h = \frac{4}{3}h^3 \cdot \tan^2\theta = \frac{h}{3} \cdot 4h^2 \tan^2\theta =$$

$$= \{4h^2 \tan^2\theta = \text{"basytan"} = b\} = \frac{h \cdot b}{3}$$

Ibland uppvisar volymen rotationssymmetri med antingen $x$- eller $y$-axeln och då utnyttjas detta genom rotationssym-



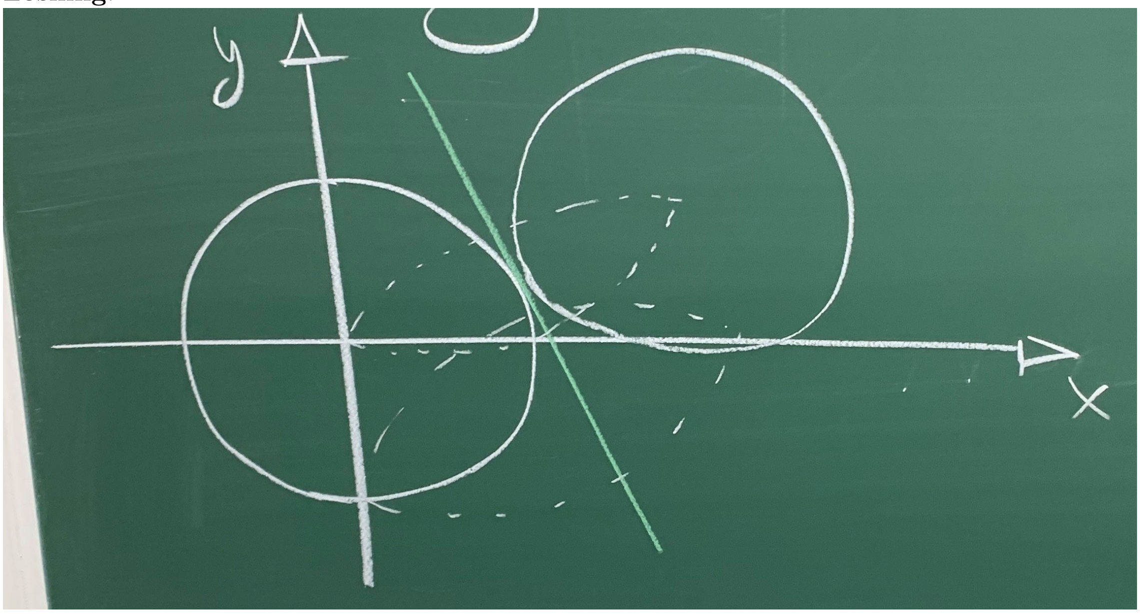

metriska element.

$$A(x) = f^2() \cdot \pi \Rightarrow V = \int dV = \int_a^b f^2(x)\pi dx$$

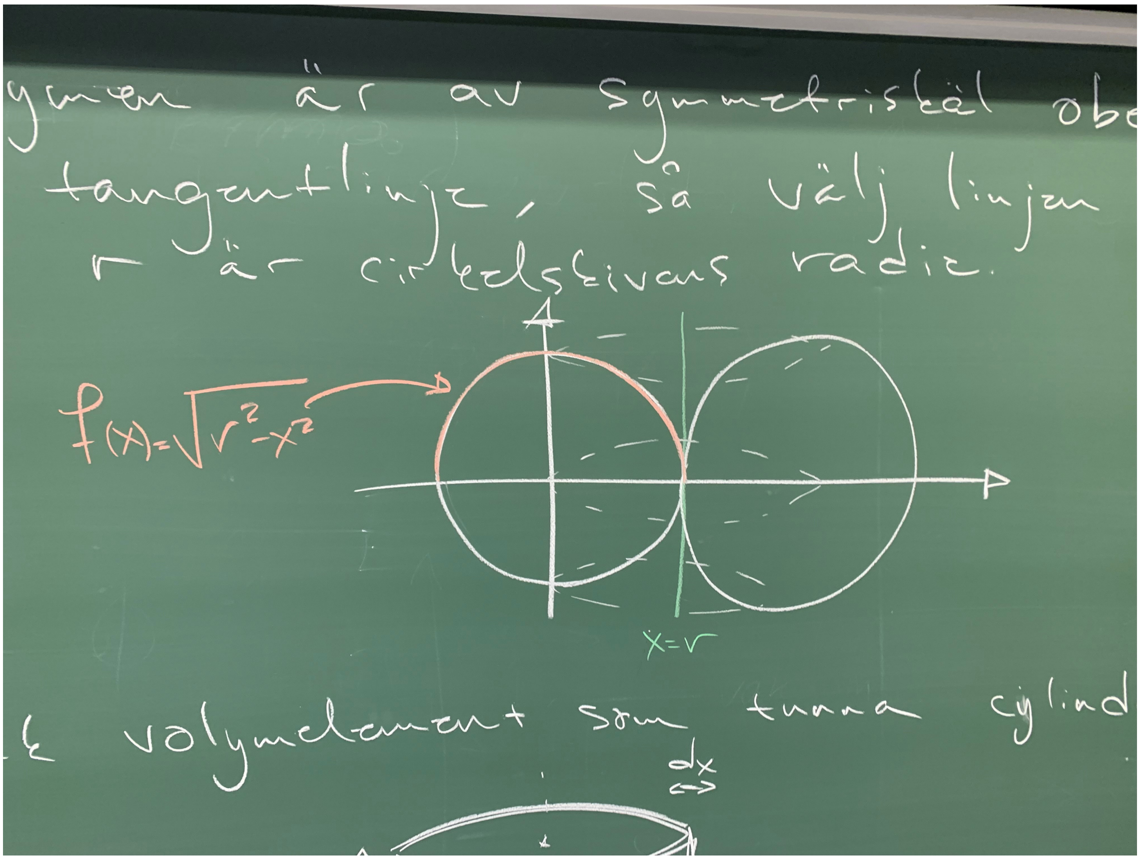
Liknande konstruktion runt $y$-axeln.

**Ex:** (7.1.16)
Bestäm volymen av den kropp som fås genom att rotera en cirkelskiva runt en godtycklig tangentlinje.

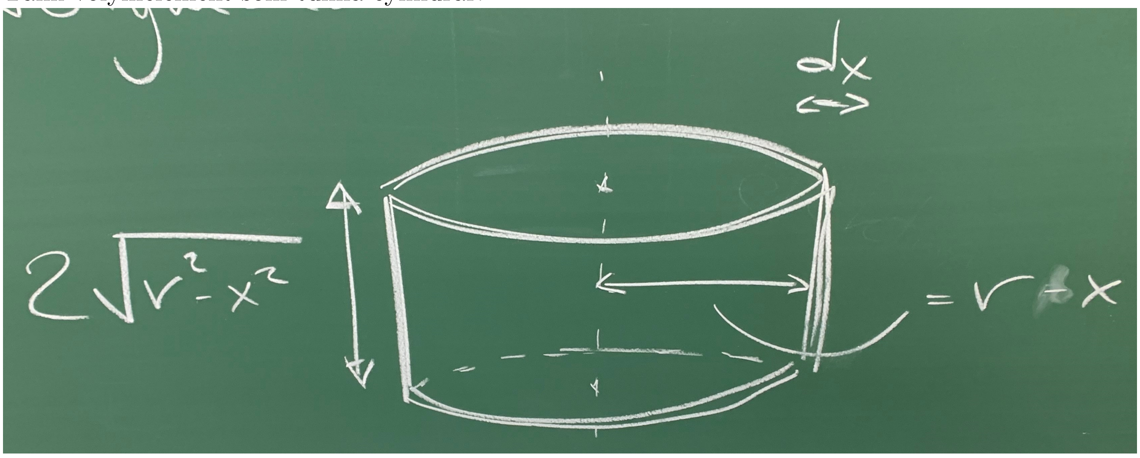
**Lösning:**




Volymen är av symmetriskäl oberoende av tangentlinje, så välj linjen $x = r$ där $r$ är cirkelskivans radie.




Tänk volymelement som tunna cylindrar:




$$\Rightarrow V = \int dV = \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} 2\pi(r-x)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}dx =$$

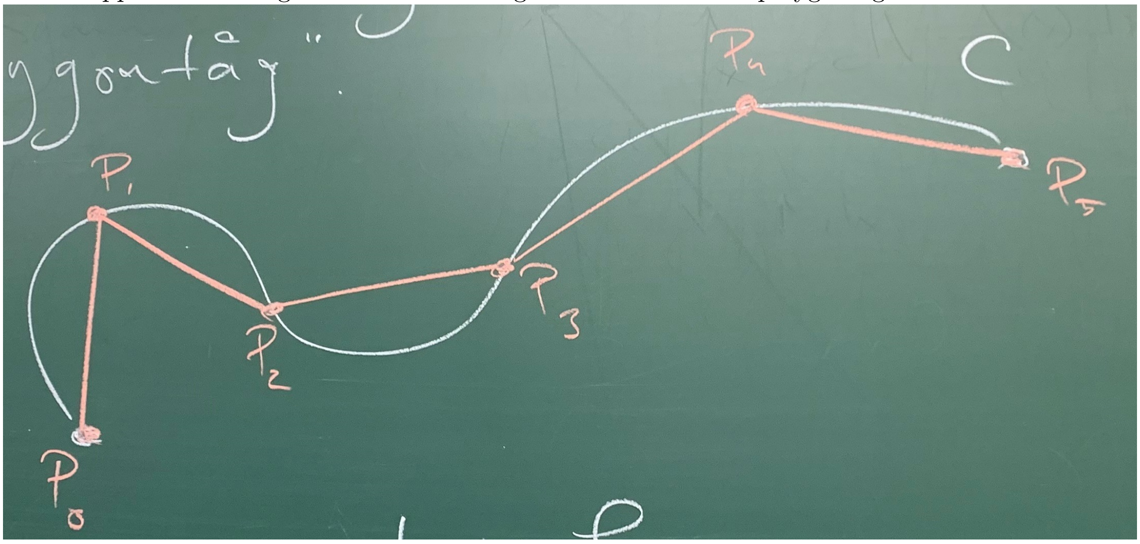
$$= 4\pi[r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx - \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}dx] = 4\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx =$$

$$= \{\text{arean av halvcirkeln} = \frac{\pi r^2}{2}\} = 4\pi r\cdot\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 r^3$$

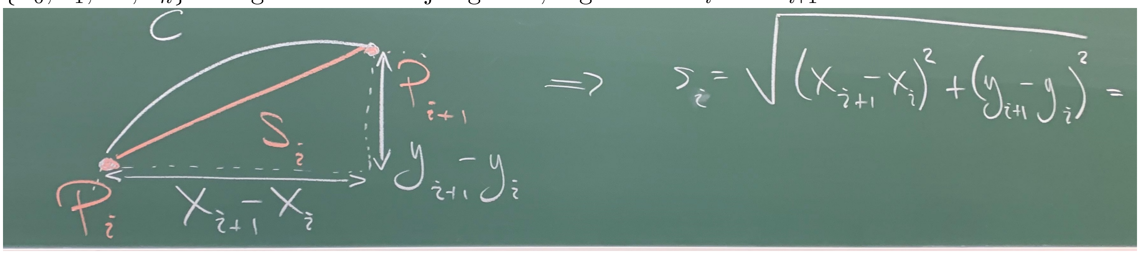
## 21.2 Kurvlängd och mantelarea

### 21.2.1 Kurvlängd

Vi kan approximera längden av en kurva C genom ett så kallat "polygontåg".




Klart att det för varje polygontåg definierat av punkterna $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ gäller att dess längd $L_n$ är kortare än den verkliga längden av $C$. Man definierar längden av $C$ som det minsta tal $s \in \mathbb{R}$ så att $L_n \leq s$ för alla polygontåg $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$. Längden för ett linjesegment, säg mellan $P_i$ och $P_{i+1}$ blir:



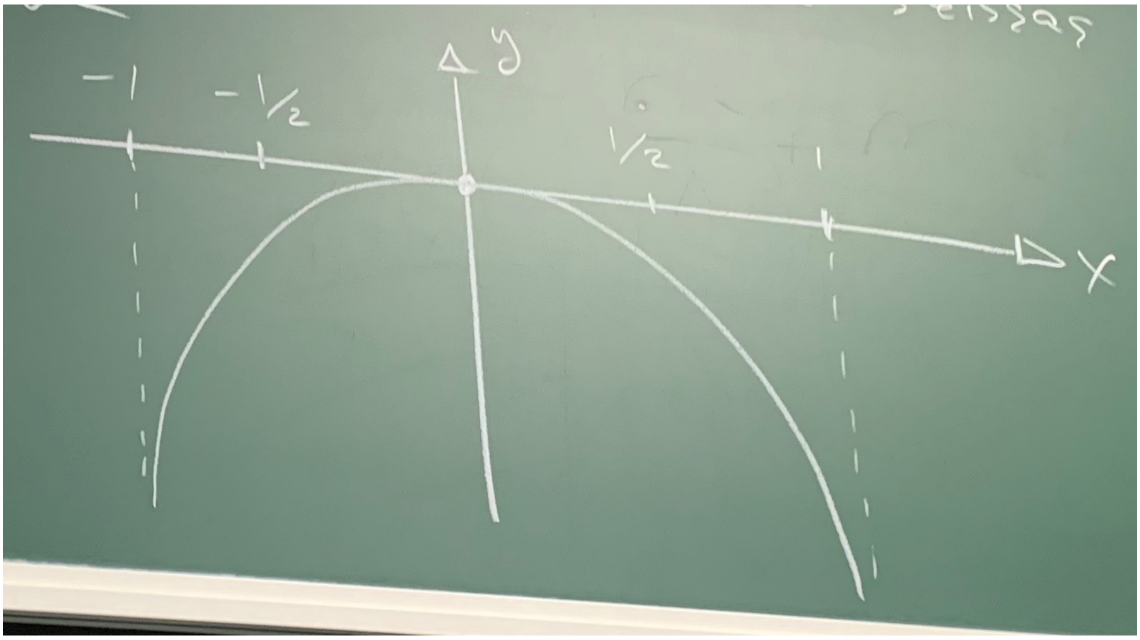

$$\Rightarrow s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}} \cdot |x_{i+1} - x_i|$$

Om kurvans $y$-värden beskrivs av en funktion $f(x)$, polygontåget blir tätare och tätare och $f'(x)$ existerar

$$s_i \longrightarrow ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \text{ och } s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

**Ex:** (7.3.12)
Beräkna längden av kurvan mellan $x = -\frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{2}$ som definieras av grafen till $y = \ln(1 - x^2)$

**Lösning:**
Kurvan kan skissas som:




Det gäller att $y' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ för alla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och alltså kan kurvans längd beräknas som:

$$s = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (-\frac{2x}{1-x^2})^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = 2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2}} dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(1-x^2)^2}} dx = 2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx = 2 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2} - 1 dx =$$

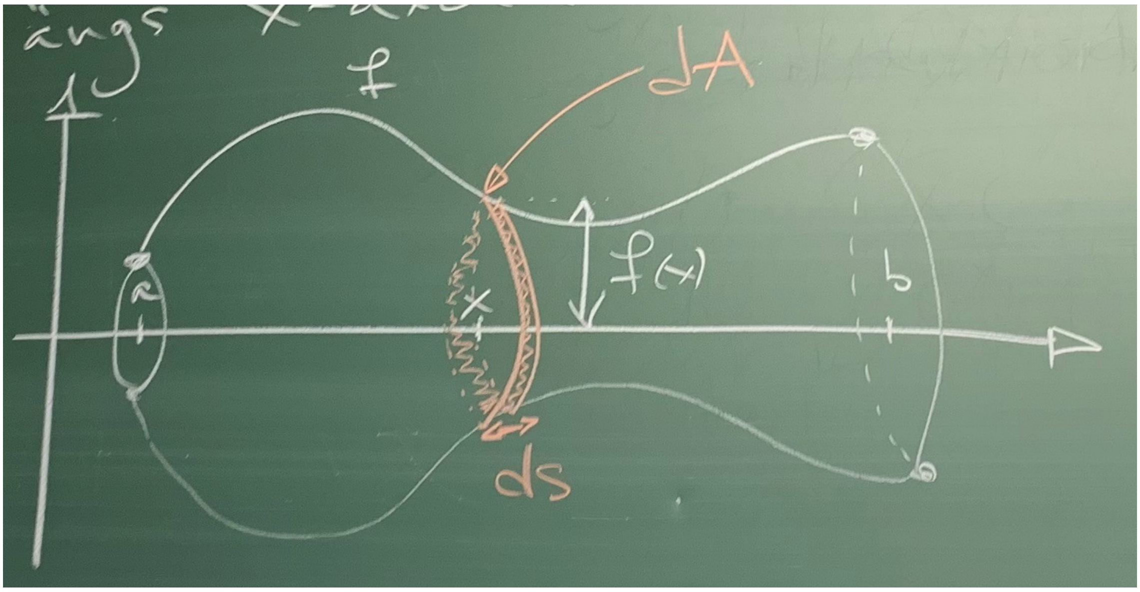
$$= \{ \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} \Rightarrow A = B = 1 \} = 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 1 dx = 2 \cdot [\ln|1+x| - \ln|1-x| - x]_{0}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \cdot (\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 2\ln(3) - 1$$

□

### 21.2.2 Mantelareor

Vi kan använda liknande teknik för att beräkna mantelytan av rotationssymmetriska kroppar. T.ex. om rotationssymmetisk längs $x$-axeln:




Måste hitta uttryck för areaelementet $dA$ så att den totala mantelarean $A$ kan beräknas som:$A = \int dA$ Bandet med arean $dA$ kan "klippas upp och tänkas som en rektangel med höjd $ds$ och längd $2\pi f(x)$ så:

$$dA = 2\pi|f(x)| \cdot ds = 2\pi|f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

och alltså kan $A$ beräknas som

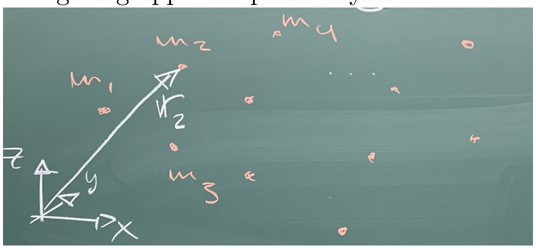
$$A = \int A = \underline{\underline{2\pi \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}}$$

# 22

# Praktiska tillämpningar av integraler

## 22.1 Stelkroppsapproximation

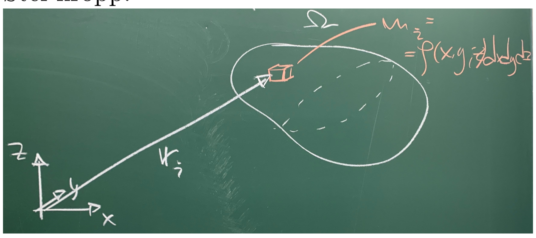
Inom klassisk mekanik studeras så kallade ”stela kroppar”. dvs. objekt som kan tänkas fullständigt oelastiska där inbördes relativa avstånd är oförändrade under påverkan av yttre krafter. För dessa är tyngdpunkt ett centralt och viktigt begrepp. För partikelsystem:




Systemets tyngdpunkt $\overline{r}$ definieras som:

$$\overline{r} = \frac{\overbrace{\sum_i r_i \cdot m_i}^{\text{Systemets moment}}}{\underbrace{\sum_i m_i}_{\text{Systemets totala massa}}}$$

Systemets moment betecknas $M_0$ och består av tre dimensionskomponenter: $M_0 = (M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0})$. Vad blir motsvarande för en stel kropp vars densitet i en punkt $(x, y, z)$ beskrivs av $\varrho(x, y, z)$.
Stel kropp:




Så tyngdpunkten för den stela kroppen blir:

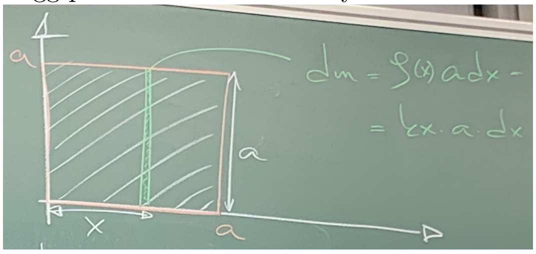
$$\overline{r} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \to \frac{\int_\Omega (x, y, z) \cdot \varrho(x, y, z) dxdydz}{\int_\Omega \varrho(x, y, z) dxdydz} = \frac{(M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0})}{M_{tot}}$$

Om man kan identifiera symmetrier kan ibland $\overline{r}$ beräknas med hjälp av ”enkelintegraler”.

### 22.1.1 Exempel

**Ex:** (7.4.7)
Beräkna tyngdpunkten för en kvadratisk platta med sidan $a$ cm om dess areadensitet är $f(x) = k \cdot x \frac{g}{cm^2}$ där $x$ är avståndet mellan en punkt $P$ på plattan och en av plattans sidor.

**Lösning:**
Lägg plattan i ett koordinatsystem där ”referenssidan” för plattans densitet sammanfaller med $y$-axeln.




Uppenbart av symmetriskäl att tyngdpunkten i $y$-led ligger på höjden $\frac{a}{2}$. Plattans totala massa $m$ blir:

$$m = \int dm = \int_0^a kx \cdot a \cdot dx = ka\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^a = \frac{ka^3}{2} m.e.$$

och momentet runt $x = 0$, betecknas $M_{x=0}$, blir:

$$M_{x=0} = \int xdm = \int_0^a x \cdot kx \cdot a \cdot dx = ka\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^a = \frac{ka^4}{3}$$

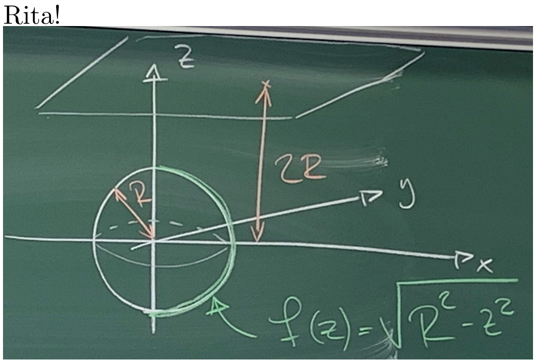
Så tyngdpunkten i $x$-led hamnar i

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\frac{ka^4}{3}}{\frac{ka^3}{2}} = \cdots = \frac{2a}{3}$$

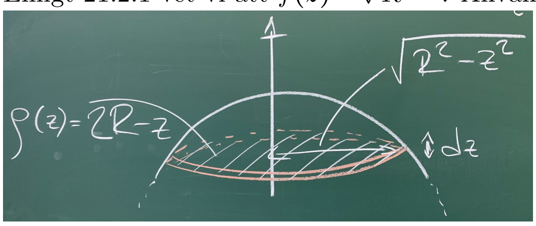
dvs. $\overline{r} = (\frac{2a}{3}, \frac{a}{2})$
□

**Ex:** (7.4.11)
Beräkna tyngdpunkten för en boll med radie $R$ m om bollens densitet i en punkt $P$ är $\varrho(z) = z\frac{kg}{m^3}$ där $z$ är avståndet från $P$ till ett plan $2R$ m från bollens mittpunkt.

**Lösning:**
Rita!




Med angivet koordinatsystem enligt bild så är det givet att bollens tyngdpunkt i $x$ respektive $y$-led är 0 på grund av symmetri och at densiteten enbart varierar i $z$-led, dvs. $\overline{r} = (0, 0, \overline{z})$
Enligt 21.2.1 vet vi att $f(z) = \sqrt{R^2 - ^2}$. Använd plattor parallella med $xy$-planet för att eräkna $m$ och $M_{z=0}$




$$\Rightarrow dm = (2R - z) \cdot \pi(\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \pi(2R - z)(R^2 - z^2)dz \Rightarrow m = \int dm = \int_{-R}^{R} \pi(2R - z)(R^2 - z^2)dz =$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} 2R^3 - 2Rz^2 - zR^2 + z^3 dz = \pi\Big[2R^3 z - \frac{2}{3}Rz^3\Big]_{-R}^{R} = \frac{8}{3}\pi R^4$$

$$M_{z=0} = \int_{-R}^{R} z dm = \int_{-R}^{R} z \cdot \pi(2Rz)(R^2 - z^2)dz = \cdots = \frac{4\pi}{15}R^5 \Rightarrow \overline{z} = \frac{(4\pi\frac{R^5}{15})}{(\frac{8\pi R^4}{3})} = \cdots = \frac{R}{10}$$

**Ex:** (7.6.3)
En damm är 200m lång, 24m hög och är utformad som en 26m lång slip. Om vattenytan står vid dammens topp, hur stor kraft måste den då hålla emot från vattentrycket?

**Lösning:** Rita!
Det hydrostatiska trycket på djupet $h$(m) ges av $p = \varrho \cdot g \cdot h$ där $\varrho$ är vattnets densitet och $g$ tyngdacceleration. Betrakta en tunn delyta på dammen som kan betraktas som utsatt för ett konstant tryck. Om ytans area är $dA$ så utsätts denna för en kraft $dF = p \cdot dA = \varrho g h dA$. Vad är $dA$?

$$dA = 200 \cdot ds = 200 \cdot \frac{dh}{\sin\alpha} \text{ där } \sin\alpha = \frac{24}{26}(\Rightarrow \alpha \approx 67,4\,\text{deg})$$

$$\text{Så } F_{tot} = \int dF = \int_0^{24} \varrho g h \cdot 200 \cdot \frac{dh}{\sin\alpha} = 200\varrho g \cdot \frac{26}{24}\int_0^{24} h dh =$$

$$= 200\varrho g \cdot \frac{26}{24}\Big[\frac{h^2}{2}\Big]_0^{24} = 6,12 \cdot 10^8\text{N}$$

**Ex:** (7.6.9)
Beräkna det arbete som krävs för att pumpa allt vatten ur en skål (sfärisk) med radie $a$(m) till en höjd $h$(m) ovanför skålens topp.

**Lösning:** Rita!
Beräkna det arbete som krävs för att lyfta en tunn cirkulär vattenskiva från skålen till höjden $h$ enligt bild. För cirkelbågen gäller att
så $dm = \varrho dV = \varrho A(x)dx = \varrho \cdot \pi f^2(x)dx = \varrho\pi(a^2 - x^2)dx$ Arbetet att lyfta en massa $m$ till höjden $h$ ges av $\omega = mgh$ och alltså

$$d\omega = \varrho g\pi(a^2 - x^2) \cdot (x + h)dx = \varrho g\pi(a^2 x + a^2 h - x^3 + hx^2)dx$$

För att lyfta skivan vid $x$ till höjden $h$ krävs det totala arbetet $\omega_{tot}$ enligt

$$\omega_{tot} = \int d\omega = \int_0^a \varrho g\pi(a^2 x + a^2 h - x^3 - hx^2)dx = \varrho g\pi\Big[\frac{a^2}{2}x^2 + a^2 hx - \frac{x^4}{4} - \frac{h}{3}x^3\Big]_0^a =$$

$$= \varrho g\pi(\frac{a^4}{2} + a^3 h - \frac{a^4}{4} - \frac{a^3 h}{3}) = \varrho g\pi(\frac{a^4}{4} + \frac{2a^3 h}{3}) = \frac{\varrho g\pi a^3}{4}(a + \frac{8h}{3}) = 2450\pi a^3(a + \frac{8h}{3})\text{J}$$

□

### Exemplet som inte hanns med

**Ex:** (7.6.12)
En låda med vatten i hissas från marken med en hastighet av $2\frac{m}{min}$. Lådan väger 1kg och vattnet 15kg. Hur stort arbete krävs för att hissa lådan till 10m höjd om den från början läcker vatten med en hastighet av $1\frac{kg}{min}$?

**Lösning:** Rita!
Arbetet som krävs för att lyfta en massa $m$ höjden $h$ beräknas som $W = mgh$. Försök uttrycka lådans massa som funktion av höjden $h$. Uttryck sedan delarbetet som krävs för att hissa lådan $dh$ meter från höjden $h$ som $dW = m(h)gdh$. Vi har att lådans höjd $h$ vid tiden $t$ är $h = 2t \Leftrightarrow t = \frac{h}{2}$ och att lådans vikt vid tiden $t$ är $m = 1 + 15 - 1 \cdot t = 16 - \frac{h}{2}$, så $dW = (16 - \frac{h}{2})gdh$ och det totala arbetet som krävs för att nå $h = 10$m blir

$$W = \int dW = \int_0^{24}(16 - \frac{h}{2})gdh = 9,8\Big[16h - \frac{h^2}{2}\Big]_0^{24} = 1,3kJ$$

# *23*

# *Ordinära differentialekvationer*

## 23.1 Differentialekvationer

Matematisk modellering handlar ofta om att använda generella principer (fysikaliska, tekniska, hypotetiska) för att beskriva hur olika typer av processer fungerar. Man vet sällan funktionen $f(x)$, utan känner ofta bara till de lagar och principer som den måste respektera.

**Ex:** (Tennis)
Vilken kastbana följer en toppad tennisboll, dvs. en boll som roterar framåt i luften.
Då bollen färdas i luften utsätts den för tre olika krafter; gravitationen $F_G$, luftmotståndet $F_D$, och Magnuseffekten (spin) $F_M$:
De tgäller att $|F_G| = mg$, $|F_D| = C_1 \cdot \frac{|v|^2}{2}$ och $|F_M| = C_2 \cdot \frac{|v|^2}{2+\frac{|v|}{R \cdot w}}$ och av Newtons andra lag gäller:

$$m \cdot \eth = F_G + F_D + F_M$$

Eftersom $v_x = \frac{dx}{dt}, v_g = \frac{dy}{dt}, a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ kan man skriva detta som två separata men kopplade samband i $x$- och $y$-led:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot v(C \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\frac{dy}{dt}}{2+\frac{v}{Rw}}) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot v(\frac{\frac{dx}{dt}}{2+\frac{v}{Rw} - C \cdot \frac{dy}{dx}}) - g \end{cases}$$

och där $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$, $C, k \in \mathbb{R}$
Bollbanan ges av de funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller 23.1

## 23.2 Separabla differentialekvationer

En differentialekvation som kan skrivas på formen: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$. Kallas för separabel. Målet är att hitta ett uttryck för $y = y(x)$.
Lösningmetodiken går ut på att separera $x$ och $y$ på varsin sida om likhetstecknet:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \overbrace{\Leftrightarrow}^{(?)} dy = f(x)g(y)dx \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

Vilket betyder att

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Kan man lösa dessa och sedan uttrycka $y$ som funktion av $x$ så är man klar.

**Ex:** (7.9.8)
Lös differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

**Lösning:**
Denna differentialekvation är separabel eftersom

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{1+y^2}dy = 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2}dy = \int dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

För den andra integralen har vi att:

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan(y) + D,\ D \in \mathbb{R} \Rightarrow \arctan(y) + D = x + C$$

$\Leftrightarrow \arctan(y) = x + E \quad (E = C - D)$Och alltså gäller att $\boxed{y = \tan(x+E)}$
Prova att det stämmer!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[\tan(x+E)\Big] = \frac{1}{\cos^2(x+E)} = \frac{\sin^2(x+E) + \cos^2(x+E)}{\cos^2(x+E)} =$$

$$= 1 + \frac{\sin^2(x+E)}{\cos^2(x+E)} = 1 + \tan^2(x+E) = \{y = \tan(x+E)\} = 1 + y^2 \text{ OK!}$$

□

## 23.3 Första ordningens linjära differentialekvationer

Första ordningen syftar på attt högsta ordningens derivata i differentialekvationen är 1, dvs $y'$. En linjär sådan differentialekvation kan skrivas $y' + p(x) \cdot y = q(x)$. Hur löser man det?
Vill hitta $y(x)$ sådant att $y' + p(x)y = q(x)$ givet $p(x)$ och $q(x)$. Antag att man kan beräkna den primitiva funktionen till $p(x)$, dvs. $\int p(x)dx$. Då gäller att

$$\frac{d}{dx}\Big[e^{\int p(x)dx}\Big] = \{kedjeregeln\} = e^{\int p(x)dx} \cdot \frac{d}{dx}\Big[\int p(x)dx\Big] = e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) + C$$

Om både vänster- och högerled i differentialekvationen multipliceras med $e^{\int p(x)dx}$ får vi:

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y' + e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot y = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \Leftrightarrow \underbrace{e^{\int p(x)dx} \cdot y' + \frac{d}{dx}\Big[e^{\int p(x)dx}\Big] \cdot y}_{= \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx} \cdot y\right]} = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)$$

Produktregeln ger:

$$\frac{d}{dx}\Big[e^{\int p(x)dx} \cdot y\Big] = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)$$

Om man integrerar vänster- och högerled m.a.p. $x$ fås:

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx$$

Och man hittar lösningen $y(x)$ till differentialekvationen som

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C$$

Funktionen $e^{\int p(x)dx}$ i lösningsmetodiken kallas för den <u>integrerande faktorn</u>.

**Ex:**
Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + \cos(x) \cdot y = 2xe^{-\sin(x)} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

**Lösning:**
Använd metoden med integrerande faktor!(23.3)

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) \quad \overbrace{+K}^{\text{Behövs ej!}}$$

Den integrerande faktorn är alltså $e^{\sin(x)}$ och

$$\overbrace{e^{\sin(x)} \cdot y' + e^{\sin(x)}}\underset{=}{\cdot} \cos(x) \cdot y = e^{\sin(x)} \cdot 2x \cdot e^{-\sin(x)} = 2x \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big[e^{\sin(x)} \cdot y\Big] = 2x \Rightarrow \{\text{integrera}\} \Rightarrow e^{\sin(x)} \cdot y = \int 2xdx = x^2 + C$$

Och vi får att $y = e^{-\sin(x)} \cdot (x^2 + C)$. Vi vet också att $y(\pi) = 0$ vilket används för att bestämma konstanten $C$.

$$y(\pi) = e^{-\sin(x)} \cdot (\pi^2 + C) = e^0 \cdot (\pi^2 + C) = 0 \Rightarrow \pi^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\pi^2$$

Och lösningen till problemet är $y(x) = e^{-\sin(x)} \cdot (x^2 - \pi^2)$
□

**Ex:** (7.9.29)
Enligt Newtons 2a lag kan en fritt fallande kropp i luft beskrivas som

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

Talen $m$ och $g$ är kroppens massa respektive tyngdaccelerationen och termen $-(k \cdot v)$ modellerar luftmotståndet.

Givet att kroppen faller från vila i $t = 0$ ($v(0) = 0$) bestäm ett uttryck för $v(t)$. Vad blir $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$?

**Lösning:**

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \Leftrightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 \text{ är separabel!} \Rightarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = \int dt = t + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = \frac{m}{k}\int \frac{1}{\frac{mg}{n} - v^2}dv = \frac{m}{k}\int \frac{1}{(\sqrt{\frac{mg}{k}} - v)(\sqrt{\frac{mg}{k}} + v)}dv = \{\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}\} =$$

$$= \frac{m}{k}\int \frac{1}{(\alpha - v)(\alpha + v)}dv = \{\text{partialbråksuppdelning}\} = \{\frac{1}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \frac{A}{\alpha - v} + \frac{B}{\alpha + v} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = \frac{1}{2\alpha} \\ B = \frac{1}{2\alpha} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha}\int \frac{1}{\alpha - v} + \frac{1}{\alpha + v}dv = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha}(\ln|\alpha + v| - \ln|\alpha - v|) = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha}\ln|\frac{\alpha + v}{\alpha - v}|$$

$$\Rightarrow \frac{m}{k} \cdot \frac{}{2\alpha}\ln|\frac{\alpha + v}{\alpha - v}| = t + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha}\ln|\frac{\alpha + 0}{\alpha - 0}| = 0 + C \Leftrightarrow C = 0(\ln(1) = 0)$$

Så

$$\ln|\frac{\alpha + v}{\alpha - v} = \frac{2\alpha tk}{m} = \{\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}\} = 2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t$$

För $v < \alpha$ så gäller att $\frac{\alpha + v}{\alpha - v} = e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t}$ vilket efter lite räkningar ger $\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} + 1}}$

$$\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} + 1} \longleftarrow 1 \text{ då } t \to \infty$$

så $\boxed{\lim_{t \to \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$
□

# 24

## Andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Ofta räcker första ordningens ekvationer inte och vi behöver kunna hantera även högre ordningar. Naturligt att studera andra ordningens linjära differentialekvationer som ett nästa steg, dvs. något i stil med:

$$y'' = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \text{ för givna funktioner } p(x), q(x), f(x).$$

Detta prolem är dock betydligt svårare än 23.1 och vi ska nöja oss med fallet där $p(x)$ och $q(x)$ båda är konstanter, dvs.

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)(**)$$

### 24.1 Terminologi

Om funktionen $f(x) = 0$ så säger man att $(**)$ är homogen. I annat fall är ekvationen icke-homogen.
Antag att $y_p$ är en lösning till en icke-homogen differentialekvation av typen $(**)$ och att $y_h$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation. Då gäller att funktionen $y_p + y_h$ löser den icke-homogena differentialekvationen eftersom:

$$(y_p+y_h)''+p\cdot(y_p+y_h)'+q\cdot(y_p+y_h) = y_p''+y_h''+p\cdot y_p'+p\cdot y_h'+q\cdot y_p+q\cdot y_h = \underbrace{(y_p''+p\cdot y_p'+q\cdot y_p)}_{=f(x)} + \underbrace{(y_h''+p\cdot y_h''+q\cdot y_h)}_{=0} = f(x)+0 = f(x)$$

Alltså, för att lösa den icke-homogena differentialekvationen måste man även lösa den homogena. Den totala lösningen ges av summan $y_p + y_h$ där $y_p$ kallas för partikulärlösning och $y_h$ kallas för homogenlösning. Hur hittar man homogenlösningen $y_h$, dvs. lösningen till differentialekvationen

$$y'' + py' + qy = 0$$

för givna tal $p, q \in \mathbb{C}$.
Testa ansatsen $y = e^{r\cdot x}$, $r \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + q(e^{rx}) = r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = (r^2 + pr + q) \cdot e^{rx} = 0$$

Men detta kan bara vara sant om $r^2+pr+q = 0$ och det gäller att hitta de tal $r$ som löser den ekvationen. Man brukar kalla $r^2+pr+q = 0$ för den karakteristiska ekvationen tillhörande den homogena differentialekvationen $y''+py'+q = 0$. Den karakteristiska ekvationen har altid två lösningar räknade med multiplicitet. (algebrans fundamentalsats) och vi för tre olika fall:(givet att $p, q \in \mathbb{R}$)

(*i*) Två reella rötter $r_1$ och $r_2$.

$\Rightarrow y_h = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$ , $A, B \in \mathbb{R}$

(*ii*) En dubbelrot $r(= r_1 = r_2)$

$\Rightarrow y_h = A \cdot e^{r} + Bxe^{rx}$ , $A, B \in \mathbb{R}$

$(iii)$ Två komplexkonjugerade rötter $r_{1,2} = k \pm i\omega$

$\Rightarrow y_h = C \cdot e^{(k+\omega i)x} + D \cdot e^{(k-\omega i)x} = C \cdot e^{kx} \cdot e^{i\omega x} + De^{kx} \cdot e^{-i\omega x} = \{e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\} = \cdots = e^{kx}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$.

Att lösa den karakteristiska ekvationen och därefter identifiera vilket av fallen $(i), (ii)$ eller $(iii)$ man har ger ett "recept" som alltid kan användas för att lösa homogena och linjära andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter.

**Ex:**
Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} 2y'' + 5y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Lösning:**
differentialekvationen är homogen av andra ordningen med konstanta koefficienter och vi vill lösa den karakteristiska ekvationen.

$$\begin{aligned} 2r^2 + 5r - r &= 0 \\ r^2 + \tfrac{5}{2}r - \tfrac{3}{2} &= 0 \\ r^2 + 2\cdot\tfrac{5}{4}r + (\tfrac{5}{4})^2 - (\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (r + \frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = \frac{25}{16} + \frac{24}{16} = \frac{49}{16}$$

$$\Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$$

Så vi får två reella rötter $r_1 = -3$ och $r_2 = \frac{1}{2}$. En allmän lösning ges därför av

$$y_h = A \cdot e^{-3x} + B \cdot e^{\frac{x}{2}} \ , \ A, B \in \mathbb{R}$$

Talen $A$ och $B$ måste respektera villkoren att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

$$y(0) = 0 \Rightarrow y_h(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = A + B = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow y_h'(0) = -3Ae^0 + \frac{B}{2}e^0 = \frac{B}{2} - 3A = 1$$

$$A = -B \Rightarrow \frac{B}{2} - 3\cdot(-B) = 1 \Leftrightarrow \frac{B}{2} + 3B = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{2}B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{2}{7} \Rightarrow A = -\frac{2}{7}$$

Så vi får slutligen lösningen:

$$y = -\frac{2}{7}e^{-3x} + \frac{2}{7}e^{\frac{x}{2}} = \frac{2}{7}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-3x})$$

□

För en differentialekvation av typen $y'' = py' + qy = f(x)$ , $p, q \in \mathbb{R}$ Så är lösningen på formen $y = y_p + y_h$ och vi kan hitta $y_h$. Hur hittar vi partikulärlösningen? Det kan vara supersvårt, men om högerledet $f(x)$ inte är för komplicerat kan man sätta upp bra ansatser och kontrollera att de funkar. Låt $P_n(x) = P_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$($n$-te gradens polynom), $A_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ och $b_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ där talen $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ är okända.

$(i)$ om $f(x) = P_n(x)$ ansätt $y_p(x) = x^m \cdot A_n(x)$

$(ii)$ Om $f(x) = P_n(x) \cdot e^{rx}$ ansätt då $y_p(x) = x^m A_n(x) \cdot e^{rx}$

$(iii)$ Om $f(x) = P_n(x) \cdot e^{rx} \cdot \cos(kx)$ eller $f(x) = P_n(x) \cdot e^{rx} \cdot \sin(kx)$ ansätt $y_p(x) = x^m \cdot e^{rx}(A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx))$

Talet $m$ i faktor $x^m$ väljs så litet så möjligt, $m = 0, 1, 2$, för att se till att $y_p$ inte överlappar med homogenlösningen $y_h$. Kräver mycket träning!

**Ex:** (19.6 chapter review 26)
Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} 2y'' + 5y' - 3y = 5 + 7e^{\frac{x}{2}} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Lösning**
Vi har redan löst det homogena problemet (tidigare exempel), så gäller nu att hitta partikulärlösning. Prova ansatsen

$$y_p(x) = A + Bxe^{\frac{x}{2}}$$

Vilken ger derivatorna: $\begin{cases} y_p'(x) & = & 0 + Be^{\frac{x}{2}} + Bx \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & = & B(1+\frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}} \\ y_p''(x) & = & B\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + B(1+\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & = & B(1+\frac{x}{4})e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$
Sätt in differentialekvationen och försök identifiera vad talen $A$ och $B$ måste vara.

$$2y_p'' + 5y_p' - 3y_p = 2B(1+\frac{x}{4})e^{\frac{x}{2}} + 5B(1+\frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}} - 3(A + Bxe^{\frac{x}{2}}) =$$

$$= -3A + (2B + 5B)e^{\frac{x}{2}} + (\frac{2}{4}B + \frac{5}{2}B - 3B)xe^{\frac{x}{2}} = -3A + 7Be^{\frac{x}{2}} + (\underbrace{\frac{2+10-12}{4}}_{=0}B)xe^{\frac{x}{2}} =$$

$$= -3A + 7Be^{\frac{x}{2}} = 6 + 7e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = -2 \\ B = 1 \end{matrix}$$

För homogenlösningen vet vi att

$$y_h(x) = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-3x}$$

och den allmänna lösningen blir

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -2 + xe^{\frac{x}{2}} + c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-3x}$$

Vi vet också att $y(0) = 0$ och att $y'(0) = 1$.

$$\begin{matrix} y(0) = 0 & \Rightarrow & -2 + c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = 1 & \Rightarrow & 1 + \frac{c_1}{2} - 3c_2 - 1 \end{matrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = \frac{12}{7} \\ c_2 = \frac{2}{7} \end{matrix}$$

Och vi får

$$y(x) = -2 + xe^{\frac{x}{2}} + \frac{12}{7}e^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{7}e^{-3x}$$

# 25

## Serier

En serie definieras som en summa av oändligt många termer, dvs.

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\text{Rent formellt är } s = \lim_{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_n$$

$$\text{Där } s_N \text{ betecknar partialsumman } s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

$$\text{Och man säger att } s \text{ är konvergent om gränsvärdet } \lim_{N\to\infty} s_N \text{ existerar}$$

En geometrisk serie definieras av egenskapen att kvoten mellan två på varandra närliggande termer är konstant, dvs. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Det betyder att

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 & = & a \\ a_n & = & a \cdot r^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + \dots$$

För geometriska summor vet vi att

$$s_N = a + a \cdot r + \dots + a \cdot r^{N-1} = \frac{a \cdot (1 - r^N)}{1 - r}$$

Och om $-1 < r < 1$, (dvs. $|r| < 1$) så blir

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \frac{a(1 - r^N)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

## 25.1 Konvergens

Villkoret att $|r| < 1$ kallas för konvergenskriteriet (förutsatt att $a \neq 0$). Rent allmänt hänger konvergens av serier ihop med de ingående termerna.

**Sats:**
Om $\sum_{=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så måste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Annars om $\lim_{n\to\infty} a_n$ inte existerar eller inte är noll så kommer serien vara divergent. Räcker det med att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ för att avgöra konvergens av $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Nej, exempelvis så divergerar den harmoniska serien ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ mot $\infty$). Hur kan man testa konvergens? Kan tolka $\sum_{n=1}^{\infty} a_N$ som en "area" genom att tänka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots$$

Där stapel $i$ har bredd 1 och höjd $a_i$. Borde kunna uppskatta genom en integral om man kan hitta en funktion $f$ som löper genom staplarnas övre vänstra/högra hörn?

**Sats:** (integraltestet)
Antag att $a_n = f(n)$ där funktionen $f$ är positiv, kontinuerlig och avtagande på ett intervall $[N, \infty)$ för något positivt heltal $N$. Då kommer både

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ och } \int_N^{\infty} f(x)dx$$

antingen att konvergera eller divergera mot $\infty$.
□
Med hjälp av integraltestet (se 25.1) kan man avgöra konvergens eller divergens för $p$-serier genom jämförelse med $p$-integraler och får då:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N^p} \begin{cases} \text{Konvergent om} & p > 1 \\ \text{divergent mot } \infty \text{ om} & p \leq 1 \end{cases}$$

**Ex:** (9.3.5)
Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin \frac{1}{n^2}|$ är konvergent eller divergent genom något lämplig test.

**Lösning:**
Serien är uppenbart positiv och $|\sin \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ då $n \longrightarrow \infty$. Av Taylors formel runt $a = 0$ vet vi att $\sin x = x + \frac{(-\cos(s))}{6} \cdot x^3$ för något tal $s$ mellan 0 och $x$. Därför gäller att

$$\sin(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + \frac{(-\cos(s))}{6} \cdot \frac{1}{n^6}$$

för något $s \in [0, \frac{1}{n^2}]$ och alltså har vi att

$$|\sin \frac{1}{n^2}| = |\frac{1}{n^2} + \frac{(-\cos(s)}{6} \cdot \frac{1}{n^6}| \leq \frac{1}{n^2} + |\frac{-cos(s)}{6}| \cdot \frac{1}{n^6} \leq$$

$$\leq \{|-\cos(s) \leq 1\} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^6}$$

Detta leder till att

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin \frac{1}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^6}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

där båda serierna i högerledet är konvergenta enligt resultat för $p$-serier ($2 > 1$ och $6 > 1$) och alltså konvergerar vänsterledet!
□

## 25.2 Absolutkonvergens

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs vara <u>absolutkonvergent</u> om det gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent. Om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent men <u>inte</u> absolutkonvergent säger man att den är <u>betingat konvergent</u>. Exempelvis är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Betingat konvergent eftersom den konvergerar men

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

är divergent mot $\infty$.

## 25.3 Potensserier och Taylorserier

### 25.3.1 Potensserie

Från den geometriska serienvet vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 r \cdots = \frac{1}{1-r}$$

förutsatt att $|r| < 1$. Vi kan därför skriva funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ där $|x| < 1$ som en serie

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Detta är ett exempel på en s.k. potensserie.

**definition potensserie**

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kallas för en potensserie i $(x-c)$ runt punkten $x = c$. Cad gäller för konvergensegenskaper för potensserier?

**Sats:**
För godtycklig potensserie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

gäller alltid något av följande:

($i$) Serien konvergerar bara i $x = c$

($ii$) Serien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$

($iii$) Det finns ett tal $R$ (konvergensradien) så att serien konvergerar för alla $x$ sådana att $|x-c| < R$ och divergerar för alla $x$ sådana att $|x-c| > R$

I ändpunkterna där $|-c| = R$ kan man ha antingen konvergens eller divergens.

I $(i)-(iii)$ är konvergensen absolut, utom möjligtvis i ändpunkterna där $|x-c| = R$.

### 25.3.2 Taylorpolynom

Vi får naturliga representationer av deriverbara funktioner som potensserier genom att uttrycka dem som ”oändligt långa” Taylorpolynom runt given punkt $x = c$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Sådana serier, givet att de konvergerar för $x$ runt $c$, kallas för Taylorserier av $f$ runt $x = c$. Några kända Taylorserier runt $x = 0$ (Maclaurin-serier) är:

$$\begin{array}{rcccl} e^x & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & = & 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ \cos x & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{array}$$

Om vi slarvar lite och betraktar $e^{ix}$ så får vi:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots =$$

$$= (1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots) + (ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots) = (1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \dots) + (ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots) =$$

$$= \underbrace{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots)}_{=\cos x} + i\underbrace{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots)}_{=\sin x} = \cos x + i \sin x, \text{ dvs. } \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \text{ (Eulers formel!)}$$

Inte helt vattentätt eftersom detta resultat bygger på antagandet att Taylor-serier funkar på precis samma sätt för reella och komplexa tal. För att helt förstå kopplingen måste man studera så kallad komplex matematisk analys. Vi nöjer oss här med Eulers formel och sambandet

$$e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$$

Alltså $\boxed{e^{i\pi} = -1}$

# 26

## Räknestuga

**Ex:**
Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} = 2x + 2$$

**Lösning:**
Om vi deriverar både vänster- och högerledet får vi

$$\frac{d}{dx}\left[y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2}dt\right] = \frac{d}{dx}\left[2x+2\right] \Rightarrow y' + \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2}dt = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{2ty(t)}{1+t^2}dt = 2 \Leftrightarrow \{\text{analysens huvudsats}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = 2(*)$$

Notera att $(*)$ är en första ordningens linjär differentialekvation och vi kan använda metoden med integrerande faktorn. I vårt fall är $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \int p(x)dx = \int -\frac{2x}{1+x^2}dx = -\ln|1+x^2|$$

Multiplicerar $(*)$ med $e^{\ln|1+x^2|} =$

$$= e^{\ln|1+x^2|} = \frac{1}{|1+x^2|} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1+x^2} \cdot y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot y}_{=\frac{d}{dx}\frac{y}{1+x^2}} = \frac{2}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\text{integrera VL och HL}\} \Rightarrow \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\arctan(x) + C \Rightarrow y(x) = 2(1+x^2)\arctan(x) + C(1+x^2)$$

Där $C \in \mathbb{R}$ $(**)$. Är vi klara? Nej! Vi hade från början en integralekvation $y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2}dt = 2x+2$. Om vi sätter $x = 1$ försvinner integraen och vi får $y(1) + 0 = 2 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow y(1) = 4$ Med detta kan vi bestämma konstanten $C$! Stt in $x = 1$ i $(**)$:

$$y(1) = 2 \cdot (1+1^2)\arctan(1) + C \cdot (1+1^2) = 4\arctan(1) + 2C = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4 - 4\arctan(1)}{2} = 2(i - \arctan(1)) = 2(1 - \frac{\pi}{4})$$

Och vi finner den slutgiltiga lösningen till integralekvationen som:

$$y(x) = 2(1+x^2)(i + \arctan(x) - \frac{\pi}{4})$$

□

**Ex:**
Beräkna värdet av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$$

**Lösning:**
Börja med att utveckla täljaren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k+2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + 2\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad (*)$$

Notera att Maclaurin-utvecklingen för $e^x$ är:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Och därför måste $e^1 = \sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1^k}{k!} K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ Försök använda detta för att beräkna serierna i $(*)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \{k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} + 2 - 2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 = \{n = k-2 \text{ i första summan och } m = k-1 \text{ i andra}\} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{=e} + 4\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}_{=e} + 2e - 2 = e + 4e + 2e - 2$$

Så alltså är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!} = 7e - 2$$

□

**Ex:**
Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + y' - 6y = e^{3x}$$

som har ett gränsvärde då $x \longrightarrow -\infty$ och som antar värdet 2 i $x = 0$.

**Lösning:**
Börja med att lösa den homogena ekvationen

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Den karakteristiska ekvationen blir $r^2 + r - 6 = 0$.

$$r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}r + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (r+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

dvs. $r_1 = -\frac{6}{2} = -3$ och $r_2 = \frac{4}{2} = 2$ och vi har två distinkta reella rötter. En allmän homogen lösning ges därför som:

$$y_h = A\cdot e^{-3x} + Be^{2x}\ ,\ A, B \in \mathbb{R}$$

Som partikulärlösning, ansätt

$$y_p(x) = C \cdot e^{3x}$$

Vilket ger$y_p'(x) = 3Ce^{3x}$ och $y_p'' = 9Ce^{3x}$. Insättning i differentialekvationen ger då:

$$9Ce^{3x} + 3Ce^{3x} - 6Ce^{3x} = 6Ce^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow C = \frac{1}{6}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen till problemet som:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{6}e^{3x} + Ae^{-3x} + Be^{2x}$$

Enligt förutsättning vet vi att $\lim_{x\to-\infty}$ måste existera vilket betyder att $A = 0$. (eftersom $e^{-3x} \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow -\infty$).
Vi vet också att $y(0) = 2$, dvs

$$\frac{1}{6}e^{3\cdot 0} + Be^{2\cdot 0} = 2 \Leftrightarrow B = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

Och alltså ges lösningen av

$$y(x) = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{11}{6}e^{2x}$$

□

**Ex:**
Beräkna

$$\int e^x \cdot \cos x dx$$

**Lösning:**
Använd partiell integration!

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \{\text{Partiell integration igen}\} =$$

$$= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx$$

Om vi betecknar $\int e^x \cos x dx$ med $I$ så har vi alltså fått

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \Leftrightarrow 2I = e^x(\cos x + \sin x) \Leftrightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

□

**Ex:**
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x+2}{x})^{3x}$$

**Lösning:**
Betrakta först logaritmen av gränsvärdet, dvs.

$$\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x+2}{x}^{3x}) = \lim_{x\to\infty} 3x \ln(\frac{x+2}{x}) = \lim_{x\to\infty} 3x \ln(1 + \frac{2}{x}) = \{y = 1 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y-1} \text{ och } x \longrightarrow \infty \text{ motsvarande } y \longrightarrow 1^+\} =$$

$$= \lim_{y\to 1^+} \frac{6}{y-1} \ln(y) = 6 \cdot \lim_{y\to 1^+} \frac{\ln(y)}{y-1} = \{z = y - 1 \Leftrightarrow y = z + 1\} = 6 \cdot \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(z+1)}{z} = \{\text{l'Hôpital}\} =$$

$$= 6 \cdot \lim_{z\to 0^+} \frac{\frac{1}{z+1}}{1} = 6$$

Men om $\lim_{x\to\infty} \ln((\frac{x+2}{x})^{3x}) = 6$ så måste

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x+2}{x})^{3x} = e^6$$

□

# 27

# Sammanfattning

## 27.1 Gränsvärde för en funktion

### 27.1.1 Formell definition

Funktionen $f(x)$ går mot gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ då talet $x$ går mot $a \in \mathbb{R}$, detta skrivs:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

### 27.1.2 Regler gränsvärden

Om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett tal $\delta > 0$ sådant att när $0 < |x - a| < \delta$ så ligger $x$ i $f$s definitionsmängd och

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

.

## 27.2 Bolzano-Weierstrass

Låt $\{a_n\}$ vara en oändlig och begränsad talföljd. Då finns en delföljd av $\{a_n\}$ som är konvergent. Givet att $\{a_n\}$ är begränsad kan man alltid välja en deltalföljd tagna i ordning från $\{a_n\}$ så att den nya talföljden $\{a_{n_k}\}$ konvergerar.

## 27.3 Kontinuitet begränsat på slutna intervall

**Motsägelsebevis:** Antag att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$ ben inte begränsad ovanifrån på $[a, b]$. Då gäller att för varje heltal $k > 0$ finns ett tal $x \in [a, b]$ så att $f(x_k) > k$ (eftersom $f$ växer obegränsat på $[a, b]$ enl. antagande). Allts kan vi konstruera en talföljd $\{x_n\}$ där samtliga $x_n \in [a, b]$ och $(x_n) > n$. Om alla $x_n \in [a, b]$ måste $\{x_n\}$ vara begränsad eftersom $a \leq x_n \leq b$. Av Bolzano-Weierstrass får vi att det finns en delföljd $\{x_{n_k}\}$ till $\{x_n\}$ som är konvergent. Delföljdens gränsvärde kan betecknas

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$$

Eftersom $x \in [a, b]$ och $f$ är kontinuerlig i $x$ så gäller att

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

Eftersom $f(x_n) > n$ så måste dock $\lim_{k \to \infty} = \infty$. Detta motsäger att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$

## 27.4 Rolles sats

$g$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $(a, b)$. Om $g(a) = g(b)$ existerar en punkt $c \in (a, b)$ sådan att $g'(c) = 0$.

## 27.5 Medelvärdessatsen

### 27.5.1 Formulering

$f$ är en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och deriverbar på $(a,b)$. Det existerar då en punkt $c \in (a,b)$ sådan att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

### 27.5.2 Bevis

Givet funktion $f$ som uppfyller ovan ställda villkor kan vi konstruera funktion $g$ enligt följande:

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a))$$

Det är uppenbart att $g$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och derivarbar på $(a,b)$ eftersom $f$ är det. Om vi sätter $x = a$ får vi:

$$f(a) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a)) = f(a) - f(a) = 0$$

Och när vi sätter $x = b$ så får vi:

$$f(b) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a)) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

Vi har alltså att $g(a) = g(b)$ och att $g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Enligt rolles sats finns då punkten $c \in (a,b)$ sådan att $g'(c) = 0$, dvs.

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

## 27.6 Definit integral definition

Antag att $!\exists I \in \mathbb{R}$ sådant att det för varje partition $P$ av intervallet $[a,b]$ gäller att

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$$

Isåfall säger man att $f$ är integrerbar över $[a,b]$ och talet $I$ kallas för den definita integralen av $f$ över $[a,b]$. Symboliskt skrivs uttrycket:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Notera att detta är ett tal och inte en funktion.

## 27.7 Analysens huvudsats

### 27.7.1 Formulering

Funktionen $f$ är kontinuerlig på ett intervall $I$ som innehåller punkten $a$.

$(i)$ Låt $F$ vara en funktion på $I$ definierad som

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Då är $F$ deriverbar på $I$ och $F'(x) = f(x)$, dvs. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(så derivering är "antioperationen" till integrering)

$(ii)$ Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på $I$, dvs. $G'(x) = f(x)$ så gäller för varje $b \in I$ att

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(dvs. en beräkningsfunktion för integraler)

### 27.7.2 Bevis

**Bevis ($i$):**
Med definitionen av $F$ enligt sasen gäller:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt =$$

$$= \{\text{Medelvärdessasen för integraler}\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(x+h-x)\cdot f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h\cdot f(c) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(c) \text{ för något tal } c \in [x, x+h]$$

**Bevis ($ii$):**
Om $G'(x) = f(x)$ så är $F(x) = G(x) + C$ på intervallet $I$ får något tal $C \in \mathbb{R}$. Alltså gäller att

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) + C$$

Och om $x = a \Rightarrow 0 = G(a) + C$ så $C = -G(a)$ och om vi nu sätter $x = b$ så får vi att:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \text{ vilket bevisar } (ii)$$