Linjär algebra - TMV206

Oscar Palm

Jan - Mars 2022

Contents

Lecture No. 1

Vecka 1

1.1 Föreläsning 1

Kolla kurshemsidan för allmän information, finns det inte där, maila matlen@chalmers.se
Schema finns på TimeEdit.
Kurslitteratur: ”Linjär Algebra från en geometrisk utgångspunkt” - Stefan Lemurell

1.1.1 Kursupplägg

Föreläsningar (14 totalt)
Räkneövningar
Gruppövningar
Datorlaborationer

1.1.2 Första veckan

Måndag : Föreläsning
Tisdag: Laboration
Onsdag: Laboration

Fokus ligger på att lära sig MatLab =/

1.1.3 Tredje till åttonde läsveckorna

Måndag: Föreläsning, Räkneövning
Onsdag: Gruppövning, Laboration
Torsdag: Föreläsning
Fredag: Gruppövning, Laboration

1.1.4 Examination

En skriven tenta i slutet av kursen (På plats)
Sex inlämningar med utvalda uppgifter från gruppövningar och datorlaborationer.

1.1.5 Duggor

Under kursens gång publiceras 4 st onlineduggor på kurshemsidan.
Varje dugga är tillgänglig i två veckor och görs i programmet Möbius.
Duggorna är frivilliga men kan ge bonuspoäng för tentan.

1.1.6 Kursplan

Lärandemål

Vi ska ha förståelse om innebörden hos den linjära algebrans grundläggamde begrepp.
Ska kunna kombinera tidigare begrepp med begrepp från linjär algebra.
Redovisa lösningar på ett tillfredsställande vis.
Med stöd kunna fördjupa kunskapen.
Ska kunna använda Matlab som stöd för beräkningar.
Ska kunna skriva och dokumentera program i Matlab.

Innehåll

- Geometriska vektorer
- Matrisalgebra
- Linjära avbildningar
- Vektorer i godtycklig dimension
- Determinanter
- Baser och linjärt oberoende
- Egenvärden och egenvektorer
- Grafer och grannmatriser

1.2 Geometriska vektorer

Oftast menas med en vektor en matris. på formen
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ så kommer det även vara för oss.
Men vi börjar med att diskutera geometriska vektorer.
<u>Definition</u>: En geometrisk vektor är ett objekt som har både storlek och riktning.
Storleken av vektorn $\mathbb{V}$ betecknas som $||\mathbb{V}||$ och kallas för vektorns längd.
Det finns en vektor, nollvektorn $\mathbb{O}$, som har längd 0 men saknar riktning.
Vi tänker på en geometrisk vektor som en pil (Insert pilar HERE)
Men en pil har en start- och en slutpunkt, något vektorer saknar.
Vektorer bestäms av dess längd och riktning.

<u>Definition</u>: Vi säger att två ektorer är lika om de har samma längd och samma riktning.
Vektorerna $\leftarrow$ och $\longleftarrow$ är inte lika för de har olika längd, trots att de har samma riktning.
Vektorerna $\leftarrow$ och $\rightarrow$ är inte heller samma trots att de har samma längd, detta på grund av skiljd riktning.
Vektorerna $\searrow$ och $\searrow$ är lika, de har samma längd och riktning. Start och slutpunkt spelar som bekant ingen roll.

Hastighet är en vektor, i detta fall kallas vektorns storlek för fart.

Givet två punkter A och B, så betecknar $\overrightarrow{AB}$ vektorn från A till B.
$A \longrightarrow B$
Vi vill kunna räkna med vektorer, dvs. göra vektoralgebra.
<u>Definition</u>: Givet en vektor $\mathbb{V}$ och ett tal $a \neq 0$ så är vektorn av den vektor som uppfyller

1. $|a\mathbb{V}| = |a| \times |\mathbb{V}|$

2. om $a > 0$ då har $a\mathbb{V}$ och $\mathbb{V}$ samma riktning

3. om $a < 0$ då har $a\mathbb{V}$ och $\mathbb{V}$ motsatt riktning.

Vi låter $0\mathbb{V} = \mathbb{O}$
Om vektorn $\mathbb{V}$ ges av $\longleftarrow$
då är $2\mathbb{V}$, $\frac{1}{2}\mathbb{V}$, och $-1\mathbb{V}$ vektorerna:
$\longleftarrow --$, $\leftarrow$, och $\longrightarrow$

Om $\mathbb{V}$ är en vektor med positiv längd, då är $\mathbb{W}\mathbb{V} = \frac{1}{|\mathbb{V}|}\mathbb{V}$ är en vektor med längd 1.
En vektor med längd 1 kallas för en <u>enhetsvektor</u>.

<u>Definition</u>: om $\mathbb{V} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbb{W} = \overrightarrow{BC}$ då definierar summan av $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ som $\mathbb{V} + \mathbb{W} = \overrightarrow{AC}$
Det är ingen inskränkning att anta att $\mathbb{W}$ börjar där $\mathbb{V}$ slutar då samtliga start/slutpunkter för vektorer är arbiträra.

1.2.1 Räkneregler

1. $a(b\mathbb{V}) = (ab)\mathbb{V}$

2. $(a + b)\mathbb{V} = a\mathbb{V} + b\mathbb{V}$

3. $a(\mathbb{V} + \mathbb{W}) = a\mathbb{V} + a\mathbb{W}$

4. $\mathbb{V} + \mathbb{W} = \mathbb{W} + \mathbb{V}$

5. $\mathbb{U} + (\mathbb{V} + \mathbb{W}) = (\mathbb{U} + \mathbb{V}) + \mathbb{W}$

Räkneregel 5 gör att vi kan skippa parenteser när vi adderar många vektorer.
Vi skriver $\mathbb{U} + \mathbb{V} + \mathbb{W}$

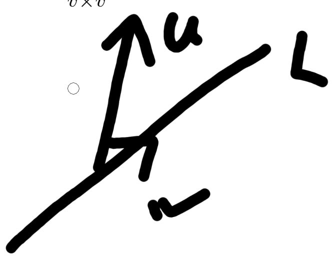
Lecture No. 2

Vecka 2

2.1 Repetition

Givet vektorer u och v ges deras skalärprodukt av u och v, $u \times v = ||u||\ ||v||cos(\alpha)$
Detta relaterar till den ortogonala projektionen såsom

$uL = \frac{u \times v}{v \times v} v$



Vektorprodukten ges av

1. $u \times v = 0$ om u,v parallella
2. $||u \times v|| = ||u||||v||sin(\alpha)$
3. $u \times v$ är ortogonal mot u och v
4. $(u, v, u \times v)$ (Gör skumma saker med handen)

Om u och v ej är parallella, då är $u \times v$ en normal till det plan som bestäms av u och v

2.1.1 Proposition 1.32

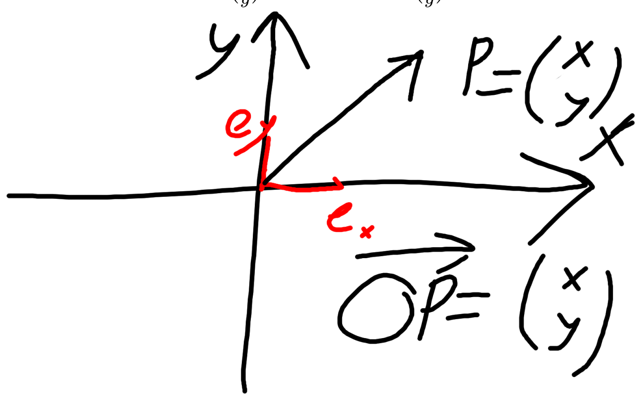
gällande kryssprodukter

1. $v \times u = -u \times v$
2. $(cu) \times v = u \times (cv) = c(u \times v)$
3. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

2.2 Koordinatsystem

Vi inför ett koordinatsystem i planet som följer:
Vi fixerar en punkt O som vi kallar origo.
Vi väljer två vektorer av längd 1, s.k Enhetsvektorer, e_x och e_y som är ortogonala mot varann, dvs.

vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{2}$
Varje vektor v i planet kan skrivas $v = xe_x + ye_y$
x och y kallas för v:s koordinater med avseende på basen e_x,e_y.
Givet en bas skriver vi $v = \binom{x}{y}$. Om $\overrightarrow{OP} = \binom{x}{y}$ säger vi att punkten P har koordinaterna x och y.



Vi inför ett koordinatsystem i rummet som följer:
Vi fixerar en punkt O, origo, och tre enhetsvektorer e_x, e_y, e_z som är parvis ortogonala.
Då kan varje vektor v i rummet skrivas som $v = xe_x + ye_y + ze_z$.
Vi skriver detta som $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och vi kallar x, y, z för v:s koordinater med avseende på basen e_x, e_y, e_z.
En bas e_x, e_y, e_z av enhetsvektorer och där vektorerna är parvis ortogonala kallas för en ON-bas (OrtoNormal bas).
Om $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ så säger vi att punkten P har koordinaterna x, y, z.
Om vi har en punkt i ett tredimentsionellt rum säger vi att den har koordinaterna x,y,z, alltså $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad v = v_x + v_y + v_z = xe_x + ye_y + ze_z$.
Vi väljer (Nästan alltid) en ON-bas så att (e_x, e_y, e_z) är högerorienterad.

2.2.1 Proposition 1.37

Följande regler gäller gäller för koordinaterna av vektorer;

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

2. $c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$

2.2.2 Sats 1.38

Om $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en ON-bas, då är $u \bullet v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

$||u||^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

<u>Bevis</u>: låt e_x, e_y, e_z vara ON-basen.
Då är $||e_x|| = 1 = ||e_y|| = ||e_z||$
och $e_x \bullet e_y = 0 = e_x \bullet e_z = e_y \bullet e_z$.
Vi har dessutom att $u = x_1e_x + y_1e_y + z_1e_z$
$v = x_2e_x + y_2e_y + z_2e_z$
$u \bullet v = (u = x_1e_x + y_1e_y + z_1e_z) \bullet (x_2e_x + y_2e_y + z_2e_z) =$
$= x_1x_2e_x \bullet e_x + x_1y_2e_x \bullet e_y + x_1z_2e_x \bullet e_z + y_1x_2e_y \bullet e_x + y_1y_2e_y \bullet e_y + y_1z_2e_y \bullet e_z + z_1x_2z_x \bullet e_x + z_1y_2e_z \bullet e_y + z_1z_2e_z \bullet e_z$
$= x_1x_2||e_x||^2 + y_1y_2||e_y||^2 + z_1z_2||e_z||^2$

<u>**Ex**</u>: Beräkna vinkeln mellan $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning</u>: Låt α vara vinkeln. Då är
$u \bullet v = ||u||\ ||v||cos(\alpha)$

Vi vet att $u \bullet v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 1 = 6 + 4 + 3 = 13$

$||u|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{2 + 1 + 9} = \sqrt{14}$
$||v|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$
Alltså: $cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{||u||||v||} = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2}\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$
Därför är $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$

2.2.3 Sats 1.42

Om $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en högerorienterad ON-bas.

$u \times v = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$

<u>**Ex**</u>: Bestäm en vektor som är ortogonal mot både $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

<u>Lösning</u>: Vi vet att $u \times v$ är ortogonal mot u och v.

$u \times v = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

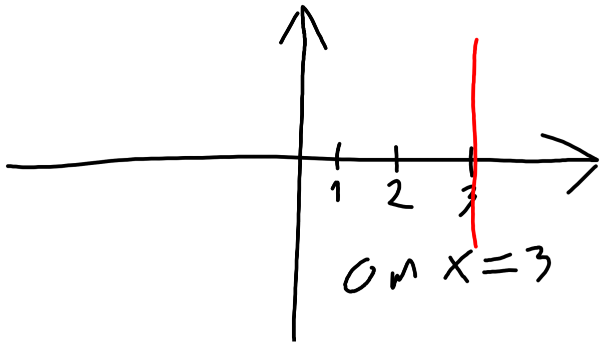
2.3 Linjer och Plan

2.3.1 Linjer men inte Plan

Samtliga linjer i planet går att beskriva med en ekvation.

$$Ax + By + C = 0$$

Om $B \neq 0$ så är det samma sak som
$By = -C - Ax \Leftarrow y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$ så typ $y = kx + m$.



Vad är x=3 för linje? Här är B=0!
y-axeln beskrivs av ekvationen $x = 0$

Hur bestäms en linje?
En linje bestäms av en punkt P_0 tillsammans med en riktningsvektor v.
Linjen ges då av alla x, y så att
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_0 + tv$
Om vi har en linje given av $Ax + By + C = 0$, hur hittar vi en riktningsvektor?

2.4 Missing information here, please fill in later!

Vektorn $\binom{0}{-C/B} - \binom{-C/A}{0} = \binom{C/A}{-C/B}$ är en riktningsvektor. Men då är även $\frac{AB}{C}\binom{C/A}{-C/B} = \binom{B}{-A}$ är n riktningsvektor.
Men då är $m = \binom{A}{B}$ en normal!
Varför
Jo, $\binom{B}{-A} \bullet \binom{A}{B} = BA + (-A)B = 0$

En linje beskriven av ekvationen $Ax + By + C = 0$ har $n = \binom{A}{B}$ som normal.
Vektorn $\binom{B}{-A}$ är en riktningsvektor.

Ex En linje ges av $x = 1 + t$, $y = 3 + 2t$
Skriv linjen på normalform.

Lösning Vi vill bli av med t!
$t = x - 1$
$2t = y - 3 \Leftrightarrow t = \frac{y-3}{2}$
Alltså $1 - x = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$
Vi ser att $\binom{2}{1}$ är en normal.

2.5 Plan i rummet

Ett plan bestäms av en punkt och två icke-parallella vektorer som ligger i planet. Men ett plan bestäms också av en punkt samt en normalvektor. Vi kan exempelvis välja $u \times v$ som normal.
Planets ekvation på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Antag att $n = (A, B, C)$ är en normal till planet. Då är (x, y, z) en punkt i planet $\Leftrightarrow n \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y = 0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - (A_{x0} + B_{y0} + C_{z0}) = 0$$

Alltså: Planet ges av $Ax + By + Cz + D = 0$ där $n = (A, B, C)$ är en normal till planet. Detta är planets ekvation på normalform.

<u>Ex</u> Punkterna $P = (1, 2, 3), P = (0, 4, 5), R = (3, 3, 8)$ ligger på ett plan. Skriv ned planets ekvation på parameterform och normalform.
<u>Lösning</u> Har vi tre punkter kan vi ta vektorerna från $P \to Q = u$ och $P \to R = v$
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} = (0, 4, 5) - (1, 2, 3) = (-1, 2, 2)$
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{0R} - \overrightarrow{0P} = (3, 3, 8) - (1, 2, 3) = (2, 1, 5)$
Finns c så att $(-1, 2, 2) = c(2, 1, 5)$? -nej, men hade det funnits hade planets ekvation inte gått att hitta med enbart de punkterna
Planet på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$
$x = 1 - s + 2t$
$y = 2 + 2s + t$
$z = 3 + 2s + 5t$

En normal ges av $n = u \times v = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

Planet ges av $8x + 9y - 5z + D = 0$ men vad är D? Punkten $P = (1, 2, 3)$ ligger på planet, så sätt in i ekvationen.
$8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow 26 - 15 + D = 0 \Leftrightarrow D = -11$
Planets ekvation på normalform; $8x + 9y - 5z - 11 = 0$

2.6 Avstånd från en punkt till en linje

Antag att vi har en linje L och en punkt P så att P inte ligger på linjen.
Beräkna det minsta avståndet mellan punkten och linjen.

Tag R på linjen och låt Q vara den punkt på L som är närmast P. Då är $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP_L}$
d distans från P til Q.
$d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RQ}|| = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}||$

<u>Ex</u> Beräkna avståndet från $P = (1, 1, 1)$ till linjen L som ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Lösning</u> Låt $R = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1)$
En riktningsvektor för linjen är $v = (0,1,2)$, då är $\overrightarrow{RP_L} = \frac{\overrightarrow{RP} \bullet v}{v \bullet v} v = \frac{(0,1,1)\bullet(0,1,2)}{(0,1,2)\bullet(0,1,2)}(0,1,2) = \frac{1+2}{1+2}(0,1,2) = \frac{3}{5}(0,1,2)$
$d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}|| = ||(0,1,1) - \frac{3}{5}(0,1,2)|| = ||(0, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5})|| = \sqrt{0^2 + (\frac{2}{5})^2 + (\frac{-1}{5})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{4+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

2.7 Avståndet från en punkt till ett plan

Låt π vara ett plan givet av $Ax + By + Cz + D = 0$ och $P = (x, y, z)$ någon punkt.
Tag $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet.
N är en linje som är normal till π
$d = ||\overrightarrow{P_0P_N}|| = \frac{||\overrightarrow{P_0P} \bullet n||}{||n||} = \frac{||(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\bullet(A,B,C)||}{||(A,B,C)||} = \frac{||Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)||}{||(A,B,C)||} = \frac{||Ax+By+Cz+D||}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
Alltså Avståndet från $P = (x, y, z)$ till planet $Ax + By + Cz + D = 0$ ges av $d = \frac{||Ax+By+Cz+D||}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Lecture No. 3

Vecka 3

3.1 Matrisoperationer

Definition En matris är ett tvådimensionellt fält av reella tal. Om matrisen har m rader och n kolumner sägs det vara en $(m \times n)$-matris, alternativt en matris av typ $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriser av samma typ adderas komponentvis. Exempelvis: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+8 \\ 4+6 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ Matriser av olika typer adderas inte.

Vi har sett exempel på matriser i Kolumnvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En matris på formen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ är en radvektor.

3.1.1 Addition och multiplikation med matriser

Produkter av matriser och reella tal

Produkten av en matris med ett reellt tal definieras också ”komponentvis”. Exempelvis:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Definition Givet en 3×3-matris

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

och en kolumnvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ definierar vi deras produkt som

$$Av = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3$$

Exempelvis $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ MER HÄR, KOLLA INSPELNING

3.1.2 Proposition 2.11

1. $A + B = B + A$
2. $A(u + v) = Au + Av$
3. $(A + B)v = Av + Bv$
4. $A(cv) = c(Av) = (cA)v$

Beviset lämnas $=/$.

Produkter av matriser

<u>Definition</u> Låt A och B vara 3×3-matriser och $B = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$ Vi definierar produkten av A och B genom

$$AB = A\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

På samma sätt för 2×2-matriser.

<u>Ex</u> Låt $A = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$. Beräkna AB och BA.

$$AB = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ 34\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\ 54\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix}10 & 14\\ 34 & 54\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} & 3\\ 7 = & \begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\ 52\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 20\\ 28 & 52\end{pmatrix}$$

3.1.3 Proposition 2.14

Låt A och B vara $n \times n$-matriser där A på position (i,j) har talet a_{ij} och B på position (i,j) har talet b_{ij}. Låt $C = AB$ och låt c_{ij} vara talet för C på position (i,j). Då blir $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Låt os använda Proposition 2.14 för att beräkna AB från exemplet ovan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 34 & 54 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Proposition 2.16

Låt A,B,C vara $n \times n$-matriser

1. $A(cB) = c(AB) = (cA)B$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $A(Bv) = (AB)v$
5. $A(BC) = (AB)C$

Beviset lämnas =/.
Kom ihåg att $AB \neq BA$!

<u>Definition</u> Givet en $m \times n$-matris A så ges dess <u>transponat</u>, A^t, av den $n \times m$-matris av att $a^t_{ij} = a_{ji}$.
<u>Ex</u> Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ då är $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$
<u>Definition</u> En $n \times n$-matris A sägs vara <u>symmetrisk</u> om $A = A^t$
<u>Ex</u> Matriserna $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ -1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ är symmetriska.

3.1.5 Proposition 2.21

Låt A,B vara $n \times n$-matriser.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(cA)^t = cA^t$
4. $(AB^t = B^tA^t$

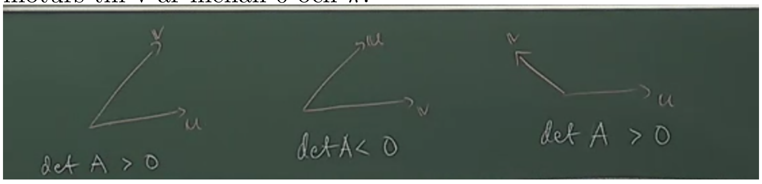
3.2 Determinanter

<u>Definition</u> Givet en 2×2-matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ låter vi dess <u>determinant</u> vara $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
<u>Ex</u> Om $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ då är det $A \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2$

Om vi låter $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ då är arean av parallellogrammet som u och v spänner 2.

3.2.1 Sats 2.24

Låt $A = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och låt D vara parallellogrammet som spänns av u och v. Då är $|det(A)| = area(D)$. Dessutom är $det(A) > 0$ om och endast om vinkeln mellan u och v då u vrids moturs till v är mellan 0 och π.



<u>Bevis</u> Vad är area(D)? Låt L vara en linje som är ortogonal mot $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

Då är $r = \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ en riktningsvektor för L ty $r \cdot u = 0$.
area(D)=basen·höjden.
basen=$||u||$. höjden=$||v_L||$
Alltså: $area(D) = ||u|| \cdot ||v_L|| = ||u|| \cdot ||\frac{v \cdot r}{r \cdot r} r|| = ||u|| \frac{|v \cdot r|}{||r||^2} ||r|| = \frac{||u||}{||r||} |v \cdot r| = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{c^2+(-a)^2}} |(b,d) \bullet (c,-a)| =$
$|bc - da| = |ad - bc| = |det(A)|$
Mattias lämnar det sista påståendet. ■

<u>Definition</u> Låt $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. Då ges dess determinant av $def(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$
$x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - x_2(y_1 z_3 - z_1 y_3) + x_3(y_1 z_2 - z_1 y_2)$
En minnesregel för kryssprodukt:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; e_x, e_y, e_z$$

Då ges $u \times v = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_x(u_2 v_3 - v_2 u_3) - e_y(u_1 v_3 - v_1 u_3) + e_z(u_1 v_2 - v_1 u_2)$

3.3 Determinanter del 2

Determinanten av en 2×2-matris
$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
$|det(uv)|$ =arean av parallellogrammet som spänns upp av u och v.

3.3.1 Proposition 2.28

Låt u,v,w vara vektorer i rummet och låt $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$. Då är $det(A) = (u \times v) \bullet w$.
Beviset av detta är i princip minnesregeln ovan.

3.3.2 Sats 2.29

Låt $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ där u,v,w är vektorer i rummet och låt V vara volymen av parallellepipeden som spänns av u,v,w. Då är $det(A) = \{^{V}_{-V}$ beroende på om matrisen är höger- eller vänsterorienterat.
Beviset lämnas.

<u>Ex</u>: Låt $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ !` \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Avgör om (u,v,w) är högerorienterat.
<u>Lösning</u>:

$$det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 2 + 4 - 12 = -6$$

(u,v,w) är vänsterorienterat.

3.3.3 Proposition 2.31

Låt u, v, w, w_1, w_2 vara vektorer i rummet.

1. $\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
2. $\begin{vmatrix} cu & v & w \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} u & v & w \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} u & v & w \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v & u & w \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w & v & u \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} u & v & w_1 + w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v & w_2 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} u & u & v \end{vmatrix} = 0$
6. $det(A^t) = det(A)$

3.4 Matrisinvers

Definition En $n \times n$-matris I kallas för en matrisidentitet om $AI = A = IA$ för alla $n \times n$-matriser A.
En $n \times n$-matris B sägs vara en invers till A om $AB = I = BA$
För tal är 1 identiteten och inversen av ett tal$a \neq 0$ är $\frac{1}{a}$
För 2×2-matriser är $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och för 3×3-matriser är $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Om en matris A har en invers är denna unik, det kan ej existera mer än en invers per matris. Inversen betecknas A^{-1} om den finns.

3.4.1 Sats 2.36

En 2×2-matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har en invers om och endast om $det(A) \neq 0$.

Har A en invers är den $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bevis:

Antag att $det(A) \neq 0$.
Då är $A(\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}) = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} ad-bc & ba-ba \\ cd-dc & da-cb \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det(A) & 0 \\ 0 & det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Då är alltså $\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ invesen till A.

Antag att $det(A) = 0$. Eftersom determinanten är arean som spänns av kolumnvektorerna så är kolumnvektorerna i detta fall parallella. $A = \begin{pmatrix} u & ku \end{pmatrix}$
VI antar, för att få en motsättning, att det finns en invers $B = \begin{pmatrix} - & v^t & - \\ - & w^t & - \end{pmatrix}$
Då är $BA = \begin{pmatrix} - & v^t & - \\ - & w^t & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ u & ku \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^t \cdot u & kv^t \cdot u \\ w^t \cdot u & kw^t \cdot u \end{pmatrix}$ men också $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Speciellt är $w^t \cdot u = 0$ men $kw^t \cdot u = 1$ vilket är omöjligt. Därför finns det ingen invers.

3.5 Geometriska linjära avbildningar

3.5.1 Linjära avbildningar

Definition Låt V samt W vara mängder av vektorer. En funktion $f : V \to W$ sägs vara en linjär avbildning om $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ för alla $v_1, v_2 \in V$ dessutom $f(cv) = cf(v)$ för alla $v \in V, c \in \mathbb{R}$

Ex: Låt V vara någon mängd av vektorer (linje, plan, rum) och låt $a \in \mathbb{R}$. Vi definierar en funktion $f : V \to V$ genom $f(v) = av$
Då är f linjär!
Varför? $f(v_1 + v_2) = a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 = f(v_1) + f(v_2)$
$f(cv) = a(cv) = c(av) = cf(v)$

Ex: Låt $V = \mathbb{R}$ och $f(x) = x^2$.
Då är f inte linjär.
Varför? $f(cx) = (cx)^2 = c^2x^2 \neq c(x^2) = cf(x)$ Därför är inte f linjär.

Ex: Låt V vara planet, alternativt rummet, och säg att vi har fixerat ett koordinatsystem så att vektorer kan skrivas som $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$. Låt A vara en matris. Då är funktionen $f : V \to V$ given av $f(v) = Av$ en linjär avbildning.
Varför?$f(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = f(v_1) + f(v_2)$-
$f(cv) = A(cv) = cAv = cf(v)$.

Ex: Om $f : V \to W$ är linjär, då är $f(\mathbb{O}) = 0$
Lösning: Vi har att $f(v + v) = f(2v) = 2f(v)$.

Lecture No. 4

Vecka 4

4.1 Repetition

L linjär om $L(u+v) = L(u) + L(v)$
$L(cv) = cL(v)$

Om A är en matris då är funktionen $f_A(u) = Au$
Om L är linjär är $L(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$
Ex Jordan Ellenberg - "*The power of Mathematical Thinking*"
Inför valet i USA sa Daniel Mitchell; varför försöker Obama göra USA mer svenskt när Sverige strävar mot att bli mer Amerikanskt.

4.2 Linjära avbildningar

Bassatsen (Avsnitt 3.3)

4.2.1 Sats 3.11

Låt V vara planet eller rummet.

Om $f : V \to V$ är en linjär avbildning så är $f = f_A$, där $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_x) & f(e_y) & f(e_z) \\ | & | & | \end{pmatrix}$

Bevis

Låt $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$. Eftersom f är linjär så får vi $f(v) = f(v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z) =$

$v_x f(e_x) + v_y f(e_y) + v_z f(e_z) = \begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) & f(e_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = Av$

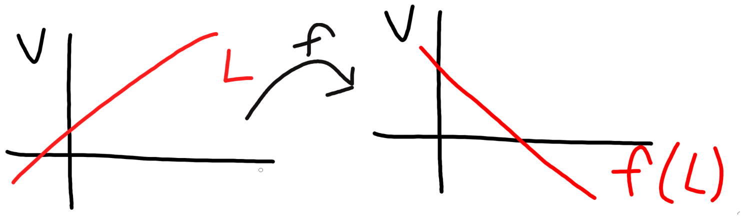
4.2.2 Sats 3.12

Varje linjjär avbildning är en matrisavbildning och varje matrisavbildning är en linjär avbildning.

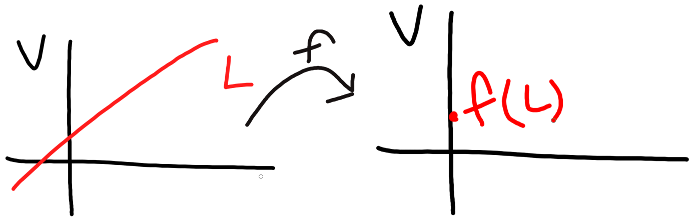
4.3 Geometrin hos linjära avbildningar

4.3.1 Proposition 3.14

Låt $f : V \to V$ vara en linjär avbildning och låt $L \subseteq V$ vara en linje.
Då är $f(L)$ en linje eller en punkt.
Alternativ 1:



Alternativ 2:



Bevis Skriv linjen på formen $x_0 + tv$.
Då ges $f(L)$ av alla punkter(vektorer) av $f(x_0 + tv) = f(x_0) + tf(v)$ vilket beskriver en linje om $f(v) \neq \mathbb{O}$
Om $f(v) = \mathbb{O}$ då är $f(L) = f(x_0)$

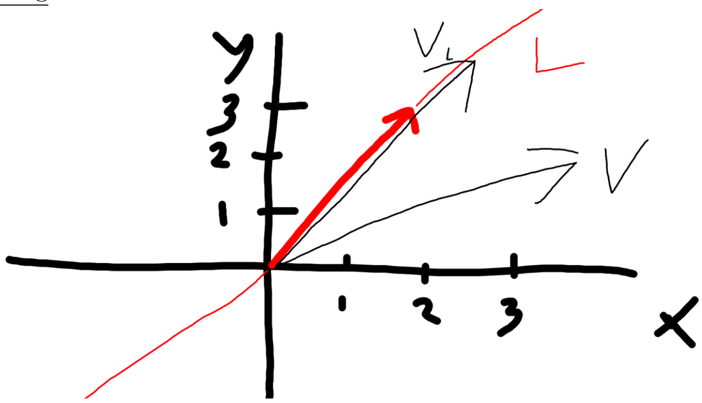
4.3.2 Proposition 3.16

Ortogonal projektion på en linje är en linjär avbildning.
Bevis Låt r vara en riktningsvektor för linjen. För en allmän vektor v ges den ortogonala projektionen på L av $f(v) = \frac{v \bullet r}{r \bullet r} r$

Visa nu att $f(u + v) = f(u) + f(v)$
$f(cv) = cf(v)$

Ex Låt L vara en linje med riktningsvektor $r = \binom{2}{3}$.
Bestäm matrisen för ortogonal projektion på L.

Lösning



Matrisen ges av $A = \begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) \end{pmatrix}$ där f är den ortogonala projektionen på L.

$$f(e_x) = \frac{e_x \bullet r}{r \bullet r} r = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{2}{13} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$f(e_y) = \frac{e_y \bullet r}{r \bullet r} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{13} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Alltså är $A = \begin{pmatrix} | & | \\ f(e_x) & f(e_y) \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \bullet 2 & 3 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3 & 3 \bullet 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

4.3.3 Exempel linjära avbildningar

Ex

Beskriv geometriskt vad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är för linjär avbildning.

Lösning Låt f vara den linjära avbildningen.

Då är $f(e_x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $f(e_y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Detta innebär att oavsett vilken vektor v kommer Av föja x-axeln. Dvs. detta är en ortogonal projektion på x-axeln.

På samma sätt är $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonal projektion på y-axeln och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonal projektion på z-axeln (i rummet).

Ex

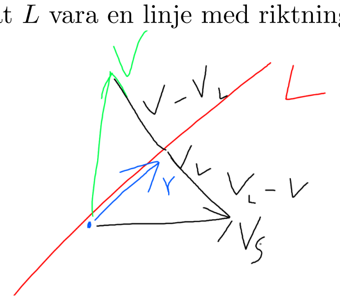
Beskriv vilken linjär avbildning $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bestämmer.

Lösning Om f är den linjära avbildningen så $f(e_x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e_y$ och $f(e_y) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = e_x$.

Så f byter plats på basvektorerna.

Ex (Spegling)

Låt L vara en linje med riktningsvektor r genom origo.



V_s är speglingen av v i linjen L.

$v_s = v_L + v_L - v = 2v_l - v = 2\frac{v \bullet r}{r \bullet r} r - v$

Låt $r = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Då är $(e_x)_s = 2\frac{e_x \bullet r}{r \bullet r} r - e_x = 2\frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{4}{13} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

$\frac{1}{13}(\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$
$(e_y)_s = 2\frac{e_y \bullet r}{r \bullet r}r - e_y = 2\frac{3}{13}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{13}(\begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\13\end{pmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$
Matrisen för speglingen är $A_s = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5 & 12\\12 & 5\end{pmatrix}$

4.3.4 Proposition 3.18

Rotation β radianer moturs runt origo är en linjär avbildning vars matris ges av $A = \begin{pmatrix}cos\beta & -sin\beta\\sin\beta & cos\beta\end{pmatrix}$
Beviset använder additionsformlerna för de trigonometriska funktionerna.

Ex

Låt f vara rotation $\frac{\pi}{4}$ moturs runt origo.
Beräkna matrisen till f.
Lösning
$f(e_x) = \begin{pmatrix}cos(\frac{\pi}{4})\\sin(\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}$
$f(e_y) = \begin{pmatrix}-sin(\frac{\pi}{4})\\cos(\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}$
Matrisen ges av $A_f = \begin{pmatrix}cos(\frac{\pi}{4}) & -sin(\frac{\pi}{4})\\sin(\frac{\pi}{4}) & cos(\frac{\pi}{4})\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

4.4 Sammansatta avbildningar

4.4.1 Proposition 3.22

Låt $f : V \to W$ och $g : W \to V$ vara linjära avbildningar som ges av A respektive B.
Då är $fog : W \to W$ och $gof : V \to V$ linjära avbildningar med matriser $fog : AB$ och $gof : BA$
Eftersom vi vet att i allmänhet så är $AB \neq BA$ gäller att $fog \neq gof$.
Exempelvis är resultatet inte samma om vi roterar och sedan projicerar som om vi först projicerade och efteråt roterade.

4.4.2 Proposition 3.26

Låt $f : V \to V$ vara en linjär avbildning med matrisen A. Då är f inverterbar om och endast om A är inverterbar.
Om f är inverterbar då är f^{-1} linjär och dess matris är A^{-1}-

Ex

Rotation är en inverterbar linjär avbildning.
Lösning/bevis Rotation β radianer moturs ges av $A = \begin{pmatrix}cos\beta & -sin\beta\\sin\beta & cos\beta\end{pmatrix}$
$det(A) = cos^2\beta + sin^2\beta = 1 \neq 0$
Därför är A inverterbar, alltså är rotation inverterbar.
$A^{-1} = \begin{pmatrix}cos\beta & sin\beta\\-sin\beta & cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos(-\beta) & -sin(-\beta)\\sin(-\beta) & cos(-\beta)\end{pmatrix}$

4.5 Repetition

<u>Bassatsen</u>: Om $f : V \to V$ är linjär är dess matris $A = \begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) & f(e_z) \end{pmatrix}$

4.6 Linjära avbildningar

Linjära avbildningar $\Leftrightarrow$ matriser.

Exempel på linjära avbildningar:

- × Ortogonal projektion på en linje
- × Rotation på en linje
- × Spegling

Sammansatta avbildningar:
Om $f : V \to W, g : W \to V$ är linjära med matriser A och B är sammansättningarna också linjära.

- × $fog : W \to W$
- × $gof : V \to V$

En linjär avbildning $f : V \to W$ med matrisen A är inverterbar $\Leftrightarrow$ A är inverterbar.
Matrisen till f^{-1} är A^{-1}.

Ex

Låt f vara först ortogonal projektion på $2x + y + 3z = 0$ och sedan rotation av yz-planet $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs runt origo.
Hitta matrisen till f
<u>Lösning</u>: Projektionen. Låt P vara matrisen till projektionen.
$v_\pi = v - v_n = v - \frac{v \bullet n}{n \bullet n} n$
Vi kan välja $n = (2, 1, 3)$.
Vi tar reda på $(e_x)_\pi, (e_y)_\pi, (e_z)_\pi$

$$(e_x)_\pi = e_x - \frac{e_x \bullet n}{n \bullet n} n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(1,0,0)\bullet(2,1,3)}{(2,1,3)\bullet(2,1,3)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(e_y)_\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(e_z)_\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matrisen ges av $P = \begin{pmatrix} (e_x)_\pi & (e_y)_\pi & (e_z)_\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ -2 & -13 & -3 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Rotationen: Låt R vara matrisen till rotationen.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{\pi}{3} & -sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & sin\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen till f ges av $RP = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ -2 & -13 & -3 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 20 & -4 & -12 \\ -2 + 6\sqrt{3} & -13 + 3\sqrt{3} & -3 - 5\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} - 6 & -13\sqrt{3} - 3 & -3\sqrt{3} + 5 \end{pmatrix}$

4.7 Area- och volymförändringar

4.7.1 Sats 3.29

Antag att D är ett "Snällt och hyggligt" område i planet. Låt d' vara bilden av D under den linjära avbildningen med matris A. Då är $\frac{area(D')}{area(D)} = |det(A)|$

Ex

Låt D vara en rektangel i planet och låt R vara en rotation.
Vad är arean av $R(D)$? (Samma som bilden av $D = D'$)
Vi tycker att arean av D' är densamma som den av D, men hur bevisas det?

Rotationer ges av $R = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$ och $detR = cos^2\beta + sin^2\beta = 1$ så enligt sats 3.29 är $\frac{area(D')}{area(D)} = 1$

Ex

Hur förändras arean av ett område under avbildningarna
$A\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
Enligt sats 3.29 så ges areaförändringen av determinanten:

$$detA = a, detB = b, detC = ab$$

4.7.2 Sats 3.31

Antag att D är ett "snällt och hyggligt" område i rummet och låt D' vara bilden av D under en linjär avbildning med matris A. Då är $\frac{Volym(D')}{Volym(D)} = |detA|$

4.8 Affina avbildningar

Låt V vara planet eller rummet och låt b vara en vektor i V. Avbildningen $t_b(v) = b + v$ kallas translationen med b. Den är inte linjär!

En funktion på formen $f(v) = Av + b$ sägs vara en affin avbildning. Affina avbildningar liknar linjära avbildningar, de avbildar linjer på linjer eller punkter.
Sammansättningen av affina avbildningar är affin. Varje linjär avbildning är också en affin avbildning, dock är inte motsatsen sann.

Enda skillnaden mellan linjära och affina avbildningar är att affina avbildningar inte har kravet att $f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$.

Ex

$f(x) = kx + m$ är affin, om $m = 0$ är den också linjär.

4.9 Rummet R^n

4.9.1 Vektorer av allmän dimension (Avs. 4.1)

Definition En vektor av dimension n, n-vektor, v är en n-tupel av reella tal och vi skriver $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Mängden av alla n-vektorer är $\mathbb{R}^n$

Vi låter:

- $u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$
- $cv = c \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$
- $u \bullet v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$
- $||v|| = || \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} || = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

Två vektorer u och v är parallella om $u = cv$ för något $c \neq 0$
Två vektorer u och v är ortogonala om $u \bullet v = 0$
Vinkeln β mellan u och v är det unika tal så att $cos\beta = \frac{u \bullet v}{||u||||v||}$ $0 \leq \beta \leq \pi$

Vi får räkneregler såsom

4.9.2 Proposition 4.5

- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- och så vidare

Pythagoras sats gäller:
u och v är ortogonala $\Leftrightarrow ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

En vektor på formen $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$ är en linjärkombination av $v_1, v_2, \cdots, v_m$.

Standardbasen för $\mathbb{R}^n$ ges av $e_1, e_2, \cdots, e_n$ där $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.9.3 Sats 4.11

Varje vektor i $\mathbb{R}^n$ går att skriva som en unik linjärkombination av $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \cdots, \overline{e_2}$

$$\begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_m} \end{pmatrix} = \overline{v_1 e_1} + \overline{v_2 e_2} + \cdots + \overline{v_n e_n}$$

Lecture No. 5

Vecka 5

5.1 Repetition

Vektorer i en godtycklig dimension är en n-tupel av tal, skrivs Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Mängden av alla n-vektorer är $\mathbb{R}^n$

Vi kan addera och multiplicera en vektor med ett tal.

Skalärprodukten av två n-vektorer $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

Längden av en vektor $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

Vinkeln mellan två vektorer $cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{||u||||v||}$ $0 \leq \alpha \leq \pi$

u,v ortogonala om $u \bullet v = 0$.

Pythagoras sats; u,v ortogonala $\Leftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m$ är en linjärkombination av vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_m$

Standardbasen $e_1, e_2, \cdots, e_n$

Varje vektor v kan skrivas som en unik linjärkombination av $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Om $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ då $v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$

5.2 Matriser av godtycklig storlek

Definition

En $m \times n$-matris är ett tvådimensionellt fält med reella tal som har m rader och n kolumner.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Addition av matriser samt multiplikation med tal fungerar precis som tidigare.

Om A är en matris med talet a_{ij} på plats (i,j) så är A^t, transponatet av A, matrisen med talet a_{ji} på plats (i,j).

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Om A är $m \times n$-matris så är A^t $n \times m$-matris.

Definition

Om A är en $m \times n$-matris och v är en n-vektor så låter vi $Av = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$ $v_1 a_1 + v_2 a_2 + \cdots + v_n a_n$

Observera: Av är en m-vektor.

Definition

Om A är en $m \times n$-matris och B är en $n \times p$-matris så låter vi $AB = A \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{pmatrix}$ Observera att AB är en $m \times p$-matris.

5.2.1 Proposition 4.21

Låt A vara $m \times n$-matris och B vara $n \times p$-matris och låt även $C = AB$. Då ges c_{ij} (elementet på plats (i,j)) av $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

5.2.2 Proposition 4.23

Om $A = \begin{pmatrix} r_1^t \\ r_2^t \\ \vdots \\ r_m^t \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ Då är $AB = \begin{pmatrix} r_1^t \bullet b_1 & r_1^t \bullet b_2 & \cdots & r_1^t \bullet b_p \\ r_2^t \bullet b_1 & r_2^t \bullet b_2 & \cdots & r_2^t \bullet b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m^t \bullet b_1 & r_m^t \bullet b_2 & \cdots & r_m^t \bullet b_p \end{pmatrix}$

Det finns flera naturliga räkneregler för addition och multiplikation av matriser men fortfarande är $AB \neq BA$ i allmänhet.

5.2.3 4.25

Matrisen $I_n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ är en identitetsmatris för $n \times n$-matriser, dvs om A är en $n \times n$-matris så är $AI_n = A = I_n A$.

5.2.4 Inverser

En $n \times n$-atris B är en invers till $n \times n$-matrisen A om $AB = I_n = BA$.
Om det finns en invers så är denna unik, så vi kan prata om inversen till A (om den finns).

5.2.5 Proposition 4.27

Om $A_1, A_2, \cdots, A_m$ är inverterbara så är $A_1 A_2 \cdots A_m$ inverterbar och $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

5.3 Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara linjär om $f(u+v) = f(u) + f(v)$ samt $f(cv) = cf(v)$ för alla $u, v \in \mathbb{R}^n$ för alla $c \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$

Givet en $m \times n$-matris A så får vi en linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genom $f_A(v) = Av$ Vi tänker ofta på matrisen som avbildningen och struntar då i notationen f_A

5.3.1 Sats (Bassatsen)

Om $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning så är f en matrisavbildning med matrisen $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_m) \end{pmatrix}$.

Ex

Ortogonal projektion på en linje.
I $\mathbb{R}^n$ ges en linje fortfarande av två punkter, alternativt en punkt och en riktningsvektor $r \neq 0$.
Om linjen går genom origo så kan vi välja origo som utgångspunkten och behöver i sådana fall enbart en riktningsvektor. Den ortogonala projektionen av en vektor $v \in \mathbb{R}^n$ på en linje L med riktningsvektor r ges av $f_L(v) = \frac{v \bullet r}{r \bullet r} r$. Funktionen f_L är linjär.

Matrisen till f_L ges av $A = \begin{pmatrix} \frac{e_1 \bullet r}{r \bullet r} r & \frac{e_2 \bullet r}{r \bullet r} r & \cdots & \frac{e_n \bullet r}{r \bullet r} r \end{pmatrix}$
Avbildningen A är alltså en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ men Av ligger på linjen L för varje $v \in \mathbb{R}^n$.

5.4 Linjära ekvationssystem

5.4.1 Linjära ekvationer och matriser

En ekvation på formen $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ där $a_1, a_2, \cdots a_n$ och b är reella tal och vi letar efter $x_1, x_2, \cdots, x_n$ kallas för en linjär ekvation med n variabler/okända.

Ex

$3x = 2$ Lös ekvationen
Lösning: $3x = 2 \Leftrightarrow x = 2/3$
När har $ax = b$ lösningar? -Om $a \neq 0$ så är $x = b/a$ den enda lösningen.
Är $a = 0$ så är ekvationen $0 = b$ vilket betyder att om $b \neq 0$ finns inga lösningar.
Om $b = 0$ då är alla reella tal x lösningar.

Om $a \neq 0$ så beksriver $ax = b$ en punkt!
Ekvationen $a_1x_+a_2y = b$ beskriver en linje (i planet).
Ekvationen $a_1x + a_2y + a_3z = b$ beskriver ett plan (i rummet).

Om vi har flera linjära ekvationer som ska vara uppfyllda:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Har vi ett ekvationssystem med linjära ekvationer.
Vi har m ekvationer och n variabler.

Om vi sätter koefficienterna a_{ij} i en matris A och låter $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ så är ekvationssystemet ekvivalent med $Ax = b$.

Ex

Lös:
$x3y = 1$
$2x - y = 2$

Lösning
$x + 3y = 1$
$2x - y = 2$
$\Leftrightarrow$
$x + 3y = 1$
$-7y = 0$
$\Leftrightarrow$
$x = 1$
$y = 0$

Ex

Lös:
$2x + 3y = 2$
$4x + 6y = 5$
Lösning $2x + 3y = 2$
$4x + 6y = 5$
$\Leftrightarrow$
$2x + 3y = 2$
$0 = 1$
Ekvationssystemet saknar lösningar.

Ex

Lös:
$3x + 2y + x = 0$
$3x + 3y + 2z = 1$
$-3x - y = 0$

Lösning $3x + 2y + z = 0$
$3x + 3y + 2z = 1$
$-3x - y = 1$
$\Leftrightarrow$
$3x + 2y + z = 0$
$y + z = 1$
$y + z = 1$
$\Leftrightarrow$
Låt $z = t$
$3x + 2y = -t$

$y = 1 - t$
$z = t$
$\Leftrightarrow$
$3x = -2y - t = -2(1-t) - t = -2 + t$
$y = 1 - t$
$z = t$
Lösningarna ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.4.2 Proposition 5.2

Antag att A är en inverterbar matris. Då har det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ den unika lösningen $x = A^{-1}b$

5.5 Gausselimination

5.5.1 Definition

Givet ett ekvationssystem $Ax = b$ så kallar vi matrisen $T = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ för totalmatrisen.

5.5.2 Definition

Givet ett ekvationssystem $Ax = b$ eller en totalmatris T kallas följande för <u>elementära radoperationer</u>:

1. Att byta plats på två rader.
2. Multiplicera en rad med ett nollskilt tal.
3. Addera en multipel av en rad på en annan rad.

5.6 Repetition

Ett linjärt ekvationssystem är ett system av linjjärära ekvationer, ex:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$
$\Leftrightarrow Ax = b$
Om A är inverterbar så finns en unik lösning $x = A^{-1}b$
Det kan finnas $0 \to \infty$ många lösningar.
Har vi ett ekvationssystem $Ax = b$ kallas matriser $T = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ för <u>totalmatrisen</u>.

5.7 Gausselimination, take 2

5.7.1 Användningsområde

En metod för att lösa ett linjärt ekvationssystem.

5.7.2 Definition

Givet ett ekvationssystem $Ax = b$ eller en totalmatris T kallas följande för elementära radoperationer:

1. Att byta plats på två rader.
2. Multiplicera en rad med ett nollskilt tal.
3. Addera en multipel av en rad på en annan rad.

Ex

Lös:

$$\begin{array}{llll} \text{-x} & & \text{+z} & \text{=3} \\ \text{-2x} & \text{-y} & \text{+5z} & \text{=-1} \\ \text{2x} & \text{+y} & & \text{=1} \end{array}$$

Lösning: Totalmatrisen ges av:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = -3 \\ y = 7 \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

5.7.3 Proposition 5.9

Om T är totalmatrisen till ett linjärt ekvationssystem och$S$ fås från T med en elementäraär radoperation så har S och T samma lösningar.

5.7.4 Trappstegsform definition

En matris sådan att varje rad har fler inledande nollor ä raden ovan är på trappstegsform.

5.7.5 Pivotelement definition

Det första nollskillda elementet på en rad kallas för ett pivotelement.

5.7.6 Fri kolumn definition

En kolumn som ej innehåller ett pivotelement kallas för en fri kolumn.
Dock inte den sista kolumnen i en totalmatris.

Ex

Skriv $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -9 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix}$ på trappstegsform.

Lösning:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -9 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & -9 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

5.7.7 Proposition 5.13

Varje matris kan reduceras till trappstegsform med hjälp av elementära radoperationer.

5.7.8 Proposition 5.16

Antag att ett ekvationssystem har reducerats till en totalmatrisn T på trappstegsform m.h.a. elementära radoperationer. För lösningarna gäller:

1. Om det finns ett pivotelement i den sista kolumnen saknas lösningar.
2. Om det inte finns pivotelement i sista kolumnen finns det lösningar man får fram genom att:
   a) Sätta alla variabler som svarar mot fria kolumner till parametrar.
   b) Börja i sista raden, gå uppåt, lös succesivt ut variablerna som svarar mot pivotelement.

Det finns oändligt många lösningar om det finns fria kolumner, annars finns det en unik lösning.

5.8 Kvadratiska system

5.8.1 Sats 5.20

Låt T vara totalmatrisen reducerad till trappstegsform för systemet $Ax = b$. Följande är ekvivalent:

1. Det finns en unik lösning till $Ax = b$ för alla b.
2. T saknar fria kolumner.

Om 1&2 inte gäller har $Ax = b$ 0 eller ∞ antal lösningar.

5.8.2 Sats 5.28

Om A är kvadratisk så är följande ekvivalent.

1. $Ax = b$ har en unik lösning för alla b.
2. Man kan reducera A till identitetsmatrisen m. h. a. elementära radoperationer.
3. A är inverterbar.

Är A inverterbar så är lösningen till $Ax = b$ $x = A^{-1}b$

Om vi sätter A och identitetsmatrisen I_n i en stor matris $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ och reducerar den till $\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix}$ med hjälp av elementära radoperationer då är $B = A^{-1}$.
Om vi misslyckas med detta är inte A inverterbar.

Ex

Lecture No. 6

Vecka 6

6.1 Repetition

Ett linjärt ekvationssystem har antingen:

i Inga lösningar

ii En unik lösning

iii Ett oändligt antal lösningar

Om vi har reducerat totalmatrisen för ett ekvationssystem m.h.a. elementära radoperationer så gäller att ekvationssystement har:

1. Inga lösningar $\Leftrightarrow$ pivotelement i sista kolumnen.
2. En unik lösning $\Leftrightarrow$ Inga fria kolumner (inte pivotelement i sista kolumnen)
3. Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow$ Det finns fria kolumner (inte pivotelement i sista kolumnen)

För ett kvadratiskt system $Ax = b$ gäller att :

1. unik lösning $\Leftrightarrow det(aA) \neq 0 \ \forall b$
2. Om $det(A) \neq 0$ så är $x = A^{-1}b$

6.2 Homogena ekvationssystem

6.2.1 Definition

Ett ekvationssystem där högerledet är 0 kallas homogent.

Vi tittar på ekvationssystemet so mser ut typ:

$$x + y + z = 0$$
$$2x + 3y + z = 0$$
$$x - y + 2z = 0$$

En lösning ges av $x = y = z = 0$, men vi vill hitta alla lösningar.

6.2.2 Proposition 5.31

Ekvationssystemet $Ax = 0$ har alltid lösningen x=0.
Det finns fler lösningar om och endast om när vi reducerar totalmatrisen får fria kolumner.

6.2.3 Proposition 5.33

Om x_p löser $Ax = b$ då ges alla lösningar till $Ax = b$ av $x = x_p + x_h$ där x_h är en lösning till $Ax = 0$.
Bevis: Om x_p och x löser $Ax = b$ gäller att $A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$ alltså löser $x - x_p$ ekvationen $Ax = 0$.

Ex

Systemet $x + y + z = 2$
$x + 2y + 2z = 3$
$2x + 3y + 3z = 5$

Har en lösning $x = 1, y = 1, z = 0$. Hitta samtliga!

Lösning Enligt Proposition 5.33 kan vi lösa det homogena systemet:

$$\begin{aligned} &x + y + z = 0 \\ &x + 2y + 2z = 0 \\ &2x + 3y + 3z = 0 \end{aligned}$$

Totalmatrisen: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Vi vill reducera totalmatrisen; får $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Det finns m.a.o. inga pivotelement i sista kolumnen $\Rightarrow$ det finns lösningar.
Vi sätter $z = t$
$\Leftrightarrow$
$x = 0$
$y = -t$
$z = t$
Detta är lösningarna till det homogena systemet. Samtliga lösningar till det urprungliga systemet ges av:
$x = 1$
$y = 1 - t$
$z = 0 + t$

6.3 Överbestämda ekvationssystem

Vi tittar nu på ekvationssystem med fler ekvationer än variabler. Vi förväntar oss i allmänhet att dessa saknar lösningar. Vi vill alltså lösa $Ax = b$ men det kanske inte går. Då vill vi istället göra $r(x) = Ax - b$ så litet som möjligt.

6.3.1 Proposition 5.36

Lösningen till $A^tAx = A^tb$ gör att $r(x) = Ax - b$ är ”så liten som möjligt”.
Minsta kvadratmetoden
Observera att om A är en $m \times n$-matris så är A^t en $n \times m$-matris och A^tA är då en $n \times n$-matris.

Ex

Hitta den linje $y = kx + m$ som närmast passar punkterna $(1,1),(3,2)$ och $(4,5)$
Lösning: Vi vill att $k+m=1$ om $x=1$, $3k+m=2$ om $x=3$ och $4k+m=5$ om $x=4$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\binom{k}{m} = b$. Men $A\binom{k}{m}$ saknar lösningar så vi tittar istället på $A^tA\binom{k}{m} = A^tb$

$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

$A^tb = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$

Vi löser $A^tA\binom{k}{m} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 26 & 8 & 27 \\ 8 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ (Insert magic formula here) Svar: $k = \frac{27+\frac{8\cdot 4}{7}}{26}, m = \frac{-4}{7}$

6.4 Determinanter

För 2×2- och 3×3-matriser har vi sett att

(1) $det(I_n) = 1$

(2) determinanten är linjär i varje kolumn: $det(A_1, a_2, \cdots, ba_k + c\hat{a}_k, \cdots, a_n) = bdet(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots, a_n)$

(3) Om två kolumner är likadana så är determinanten 0.

6.4.1 Definion/sats

För $n \times n$-matrise är determinanten den unika funktion sådan att:

1. $det(I_n) = 1$
2. determinanten är linjär i varje kolumn.
3. Om två kolumner är likadana så är determinanten 0.

6.4.2 Proposition 6.4

Antag att evi gör en elementär radoperation på $n \times n$-matrisen A och får matrisen B. Då gäller:

(a) Om vi bytt plats på två rader är $det(B) = -det(A)$

(b) Har vi multiplicerat en rad med ett tal c är $det(B) = cdet(A)$

(c) Har vi adderat en multipel av en rad på en annan är $det(B) = det(A)$

6.4.3 Sats 6.5

Antag att A är över- eller undertriangulär (dvs bara nollor ovan eller under diagonalen). Då är $det(A) = a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n}$.

Ex

Beräkna determinanten av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Lösning: $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ do some maths here $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & \frac{208}{6} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot8\cdot13}{208} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) \cdot$
$\frac{6\cdot8\cdot13}{208} = 8 \cdot 13^2$

6.5 Konstruktion av determinanter

En bijektiv funktion från $\{1, 2, \cdots, n\}$ till $\{1, 2, \cdots, n\}$ kallas för en permutation.
Exempelvis är π som ges av $\pi(k) = l, \pi(l) = k, \pi(i) = i$, $\forall i \in$ mängd där $i \neq k, l$ en permutation.
En sådan permutation kallas för en omkastning. Varje permutation går att skriva som en seria av omkastningar. Vi definierar signaturen av en permutation π som $\epsilon(\pi) = (-1)^k$där k är antalet omkastningar som π går att skriva som.
Signaturen är -1, alternativt 1. (Man behöver visa att signaturen är väldefinierad).
Signaturen av en omkastning är -1. Signaturen av identitetspermutationen är 1.

Determinanten av $n \times n$-matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ges av $det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \epsilon(\pi) a_1\pi(1) a_2\pi(2) a \cdots a_n\pi(n)$

6.6 Repetition

Determinanten är definierad för $n \times n$-matriser och

1. $det(a_1 \cdots a_k \hat{a}_k \cdots a_n) = det(a_1 \cdots a_k \cdots a_n) + det(a_1 \cdots \hat{a}_k \cdots a_n)$
2. $det(a_1 \cdots ca_k \cdots a_n) = cdet(a_1 \cdots a_k \cdots a_n)$
3. Om två kolumner är likadana är determinanten noll.

6.7 Permutationer

En permutation π är en bijektiv funktion $\pi : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$
Varje permutation går att skriva som en sammansättning av omkastningar.
En omkastning är en permutation som enbart byter plats på två tal.
Vi låt $\epsilon(\pi) = (-1)^k$ där k är antalet omkastningar som π går att skriva som.

$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \epsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

6.7.1 Proposition 6.17

Om A är en inversmatris då är $det(A^t) = det(A)$

6.7.2 Proposition 6.19

$detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar.
Detta följer av vad vi har gjort för ekvationssystem.

6.7.3 Sats 6.22

Om A, B är $n \times n$-matriser så är $det(AB) = det(A)det(B)$.
För att visa detta är det trevligast att använda egenskaperna $(1) - (3)$

6.7.4 Proposition 6.23

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Bevis

$det(AA^{-1}) = det(I_n) = 1 = det(A)det(A^{-1})$

Med hjälp av permutationer kan vi beräkna $n \times n$-determinanter som en summa av $(n-1) \times (n-1)$-determinanter.
Givet en $n \times n$-matris A betecknar vi med A_{ij} $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fås av A genom att ta birt rad i och kolumn j.
Determinanten av A kan beräknas genom att expandera längs en rad/kolumn.
Längs en rad k:

$$det(A) = (-1)^{k+1}a_{k1}det(A_{k1}) + (-1)^{k+2}a_{k2}det(A_{k2}) + \cdots + (-1)^{k+n}a_{kn}det(A_{kn})$$

Längs en kolumn k:

$$det(A) = (-1)^{k+1}a_{1,k}det(a_{1,k}) + (-1)^{k+2}a_{2,k}det(a_{2,k}) + \cdots + (-1)^{k+n}a_{n,k}det(a_{n,k})$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

6.8 Baser

Vi har kallat $e_1, e_2, \cdots, e_n$ för standardbasen för $\mathbb{R}^n$.
Nu ska vi gå igenom mer vad en bas är.

6.8.1 Definition linjära oberoende

Vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_n$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara <u>linjärt oberoende</u> om $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

Ex

Låt $v_1 = v$ vara någon vektor och $v_2 = 0$. Då är $0v_1 + 2v_2 = 0$, så v_1 och v_2 är inte linjärt oberoende, de är <u>linjärt beroende</u>.

6.8.2 Proposition 7.3

$v_1, v_2 \neq 0$ är linjärt oberoende om och endast om v_1, v_2 är parallella.

Bevis

Om v_1, v_2 är parallella finns $c \neq 0$ så att $v_1 = cv_2$. Alltså är $1v_1 - cv_2 = 0$ så v_1, v_2 är linjärt beroende. Å andra sidan, om v_1, v_2 är linjärt beroende finns c_1, c_2 inte båda noll så att $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$. Vi kan anta att $c \neq 0$ och alltså är $v_1 = \frac{c_2}{c_1} v_2$ vilket ger att v_1, v_2 är parallella.

6.8.3 Proposition 7.4

Vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_n$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ En av vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_n$ går att skriva som en linjär kombination av de andra.

6.8.4 Proposition 7.6

Låt $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_n$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $(v_1, v_2, \cdots, v_n)x = 0$ har bara lösningen $x = 0$

Om $detA \neq 0 \Leftrightarrow$ Varje ekvationssystem $Ax = b$ har en unik lösning. $(x = A^{-1}b)$.
Speciellt har $Ax = 0$ en unik lösning vilken är $x = 0$.
Om vi använder detta på $A = (v_1, v_2, v_3)$ så får vi att v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende.

6.8.5 Definition Basen

Låt $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.
$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ sägs vara en bas om och endast om vektorerna är linjärt oberoende samt att varje $v \in V$ är en linjär kombination av $v_1, v_2, \cdots, v_m$.

Lecture No. 7

Vecka 7

7.1 Repetition

Vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_m$ i valfritt universum är linjärt oberoende om $c_1v_1, +c_2v_2 + \cdots + c_mv_m = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_m = 0$.
$v_1, v_2, \cdots, v_m$ är en bas för V om varje vektor $v \in V$ går att skriva som en unik linjärkombination av $v_1, v_2, \cdots, v_m$.
$v = c_1, + \cdots + c_mv_m$
Om varje v ska gå att skriva som en linjärkombination av dessa vektorer måste det existera tillräckligt många vektorer i basen för att kunna konstruera samtliga vektorer, vi måste samtidigt ta tillräckligt få för att det enbart ska existera en linjärkombination som leder till den specifika vektorn.

7.2 Baser, fortsättning

7.2.1 Sats 7.13

$v_1, \cdots, v_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$.
Vektorerna $v_1, \cdots, v_r$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Ax = b$ har en unik lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$.

7.2.2 Sats 7.14

$v_1, v_2, \cdots, v_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Vektorerna $v_1, v_2, \cdots, v_r$ utgör en bas $\Leftrightarrow r = n$ och $v_1, v_2, \cdots, v_r$ ska vara linjärt oberoende.

7.2.3 Definition dimension

En mängd vektorer v sägs ha <u>dimension n</u> om varje bas för v innehåller n vektorer.

7.2.4 Sats 7.16

Lå tA vara en $n \times n$-matris.
Följande påstående är ekvivalenta:

1. $Ax = b$ har en unik lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$.
2. Varje reduktion av A till en trappstegsmatris med hjälp av elementära radoperationer saknar fria kolumner.
3. Det går att reducera A till identitetsmatrisen.
4. A är inverterbar.
5. $det(A) \neq 0$
6. Kolumnerna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.
7. $det(A) = det(A^t) \neq 0$
8. Raderna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

7.3 Baser i $\mathbb{R}^n$

Vi ska nu skriva vektorer med koordinater i olika baser.
Vi är i $\mathbb{R}^n$. Låt $e_1, e_2, \cdots, e_n$ vara standardbasen. Antag att $f_1, f_2, \cdots, f_n$ är ytterligare en bas.

Em vektor $x \in \mathbb{R}^n$ går att skriva $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \bullet x_F$

Där x_F är kolumnvektorn som innehåller koordinaterna för x i basen $f_1, f_2, \cdots f_n$.

Alltså:
$x = F x_F$

Vad är koordinaterna i basen $f_1, f_2, \cdots, f_n$?
$x_F = F^{-1} x$

Ex

Låt $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (I standardbasen).
Skriv koordinaterna för v i basen
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösning

Kontrollera att f_1, f_2, f_3 är en bas: Det är tre vektorer.
$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) - 1(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 2 - 3 = -1 \neq 0$
$det \neq 0 \Leftrightarrow$ Kolumnerna utgör en bas.

Vi vill hitta x_1, x_2, x_3 så att $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$

Vi löser detta ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Alltså } v_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.3.1 Sats 7.19

Antag att $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ och $G = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ där $f_1, f_2, \cdots, f_n$ och $g_1, g_2, \cdots, g_n$ är baser för $\mathbb{R}^n$

Då gäller att

- $Gx_G = Fx_F$
- $x_G = G^{-1}Fx_F$
- $x_F = F^{-1}Gx_G$

7.4 Linjäraavbildningar och basbyten

Hur ser matrisen ut för en linjär abildning om vi väljer andra baser änd standardbasen?

7.4.1 Sats 7.22

Låt $G = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{pmatrix}$ där $g_1, \cdots, g_m$ är en bas för $\mathbb{R}^m$.
Låt $G = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ där $h_1, \cdots, h_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.
Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning. Då ges matrisen til f relativt baserna H och G av $A_{H\to G} = \begin{pmatrix} f(h_1)_G & f(h_2)_G & \cdots & f(h_n)_G \end{pmatrix}$.

Ett specialfall av satsen ges av att $m = n$ samt $G = H$. Det vill säga att att vi har en linjär avbildning som går från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ och vi vill uttrycka den i basen H

7.4.2 Sats 7.25

Om $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$ där $g_1, g_2, \cdots, g_n$ utgör en bas och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning så blir matrisen relativt G given av $A_G = G^{-1}A_EG$ där A_E är matrisen relativt standardbasen.

Kom ihåg $x_E = Gx_G$.

7.5 ON-matriser och ON-baser

7.5.1 Definition ON-bas

En bas sägs vara en ON-bas om basvektorerna är ortogonala och av längd 1.

7.5.2 Definition Isometri

En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för en isometri om $||f(x)|| = ||x||$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$

7.5.3 Proposition 7.34

Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri gäller att $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ för ala $x, y \in \mathbb{R}^n$
Alltså bevarar isometrier även vinklar mellan vektorer.

7.5.4 Definition ON-matris

Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri kallas matrisen till f för en ON-matris.

7.5.5 Sats 7.35

A är en ON-matris $\Leftrightarrow$ Kolumnerna i A utgör en ON-bas.

7.5.6 Sats 7.37

A är en ON-matris $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.

7.6 Egenvärden och egenvektorer

7.6.1 Definition egenvektor

Låt A vara en $n \times n$-matris. En vektor $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ kallas för en <u>egenvektor till A</u> om det finns et tal λ så att $Av = \lambda v$.

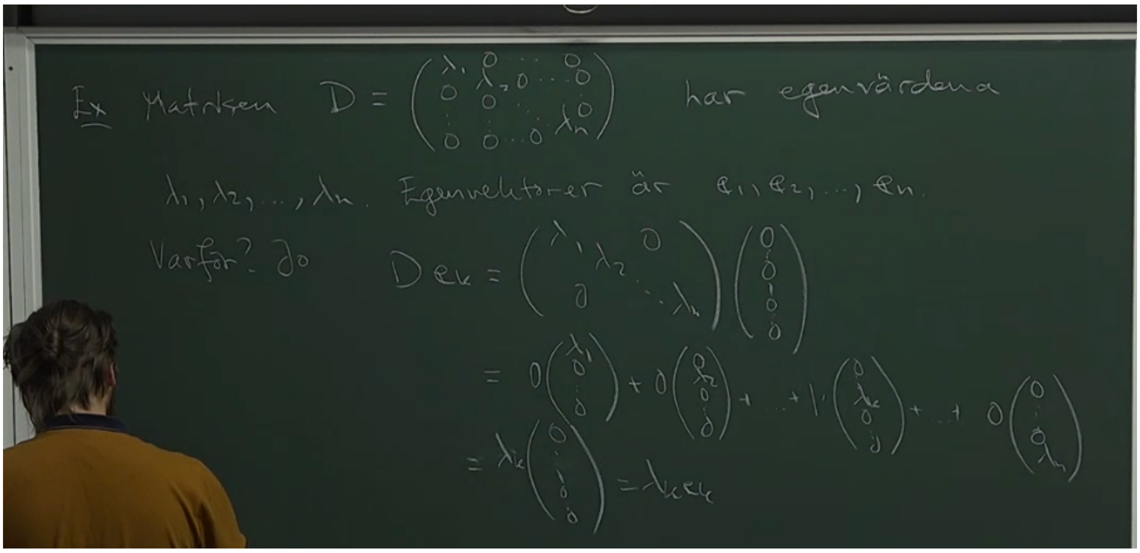
Talet λ kallas för <u>egenvärdet till egenvektorn v</u>.

7.7 Repetition

7.7.1 Allmänna basbyten

Låt $g_1, g_2, \cdots, g_n$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$
låt $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$
Om Aär en $n \times n$-matris gäller att $A_E = GA_GG^{-1}$ (Important tydligen)
$v \neq 0$ är en egenvektor för matrisen A om det finns ett egenvärde λ för v så att $A_v = \lambda v$

Ex



7.8 Egenvärden

7.8.1 Proposition 8.6

Om v är en egenvektor med egenvärde λ till A så är även cv där $c \neq 0$ en egenvektor med egenvärde λ

Bevis

$A(cv) = cA(v) = c\lambda v = \lambda(cv)$

7.8.2 Sats 8.8

Om v är en egenvektor med egenvärde λför matrisen A så är v en egenvektor med egenvärde λ^n till matrisen A^n (med positivt λ)
Om A är inverterbar då gäller $A^m v = \lambda^m v$ även för negativa λ. Speciellt gäller att $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$

För att visa detta kan man börja med: $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$

7.9 Beräkning av egenvärden och egenvektorer

Om $Av = \lambda v$gäller så går det att skriva om till $Av - \lambda v = 0$ eller $(A - \lambda I_n)v = 0$, eftersom $v \neq 0$ betyder detta att ekvationen $(A - \lambda I_n)v = 0$ har icke-triviala (nollskillda) lösningar.

Detta innebär att det finns icketriviala lösningar $\Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0$.

Vi vill hitta λ så att $det(A - \lambda I_n) = 0$ är ett egenvärde.

Uttrycket $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$är ett polynom, kallas det karakteristiska polynomet för A.

$p(\lambda)$ har grad n om A är $n \times n$-matris.

Om λär ett egenvärde ges egenvektorerna till λav icketriviala lösningar till ekvationssystemet ovan.

Ex

Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hitta egenvärdena till A.

Lösning: Vi tittar på $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = (-1-\lambda)(2-\lambda)$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

Låt oss hitta egenvektorer till $\lambda = 2$

Vi löser $(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Låt $y = t$. Då är $x = t$ så $v = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.9.1 Viktigt att tänka på

SEr man att en lösning är på väg att bli komplex, avbryt, vi struntar i dessa under kursens gång. Ta enbart vara på de reella lösningarna.

7.10 Spektralsatser

spektralsatser anger att vissa matriser går att diagonalisera.

7.10.1 Sats 8.14

Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.

7.10.2 (följd)Sats 8.15

Om vi har en kvadratisk matris med k olika egenvärden har åtminstone k linjärt skiljda egenvektorer. Speciellt så har en $n \times n$-matris med n olika egenvärden en bas av egenvektorer.

7.10.3 Sats 8.16-.17

a) En symmetrisk matris har enbart reella lösningar till $p(\lambda) = 0$ där $p(\lambda)$ är det karakteristiska polynomet.

b) Egenvektorer till olika egenvärden, för en symmetrisk matris, är ortogonala.

7.10.4 Sats 8.18

Spektralsatsen för symmetriska matriser

Låt A vara en $n \times n$-matris. Då gäller att A har n ortogonala egenvektorer. $\Leftrightarrow A$ är symmetrisk.

7.11 Diagonalisering

7.11.1 Sats 8.20

Låt Avara en $n \times n$-matris.
Det finns en diagonal matris D och en invers matris P så att $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A$ har $n$linjärt oberoende egenvektorer.

Om det första påståendet gäller sägs Avara diagonaliserbar.

För att hitta D och P gör vi följande:
Hitta egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ med egenvektorer $v_1, v_2, \cdots, v_n$

Sedan låter vi $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$

7.11.2 Sats 8.22

Låt A vara en $n \times n$-matris.
Det finns en diagonal matris D och en matris P så att $A = PDP^t \Leftrightarrow A$ är symmetrisk.
(Är A symmetrisk gäller att $P^t = P^{-1}$)

Lecture No. 8

Vecka 7

8.1 Repetition

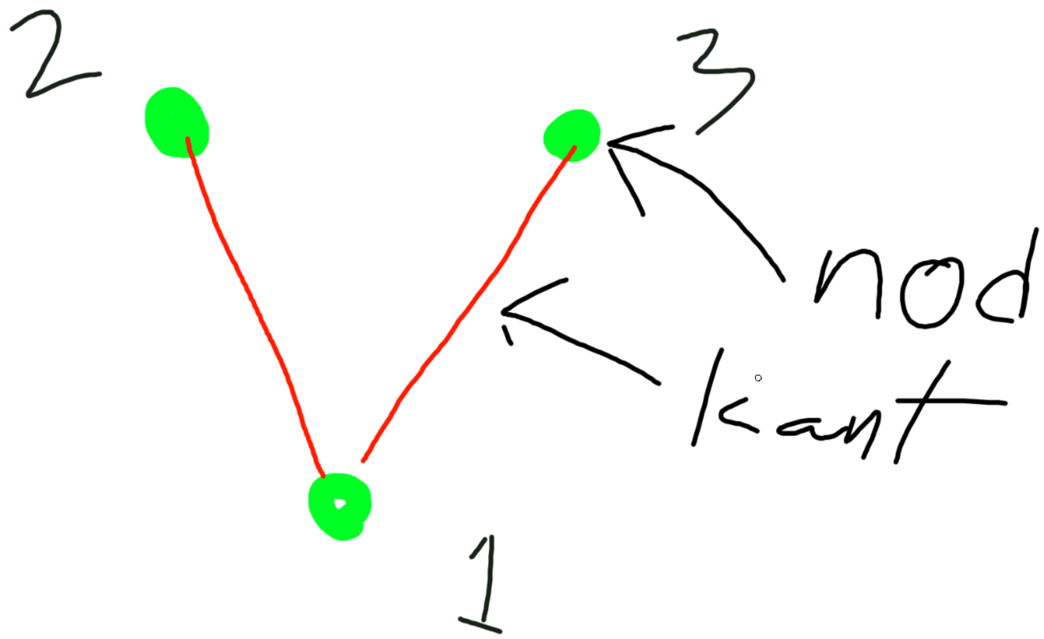
Egenvektorer som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende. Bevis? inte nu =/.
Om A är symmetrisk har egenvärden skilda från varandra ortogonala egenvektorer.
A symmetriskt $\Leftrightarrow$ A har n ortogonala egenvektorer.
A är diagonaliserbart med $A = PDP^{-1}$ om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.
Vi kan välja att $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
Om A är symmetriskt så är A diagonaliserbar $A = PDP^t$ där D är diagonal och P är en ON-matris (dvs $P^{-1} = P^t$)
Tredjegradspolynom är svåra, men finns det heltalsrötter så delar de den konstanta termen.

8.2 Grafer

8.2.1 Definition graf

En graf $G = (V, E)$ består av två mängder där V är noder och E är kanter mellan noderna.

Ex

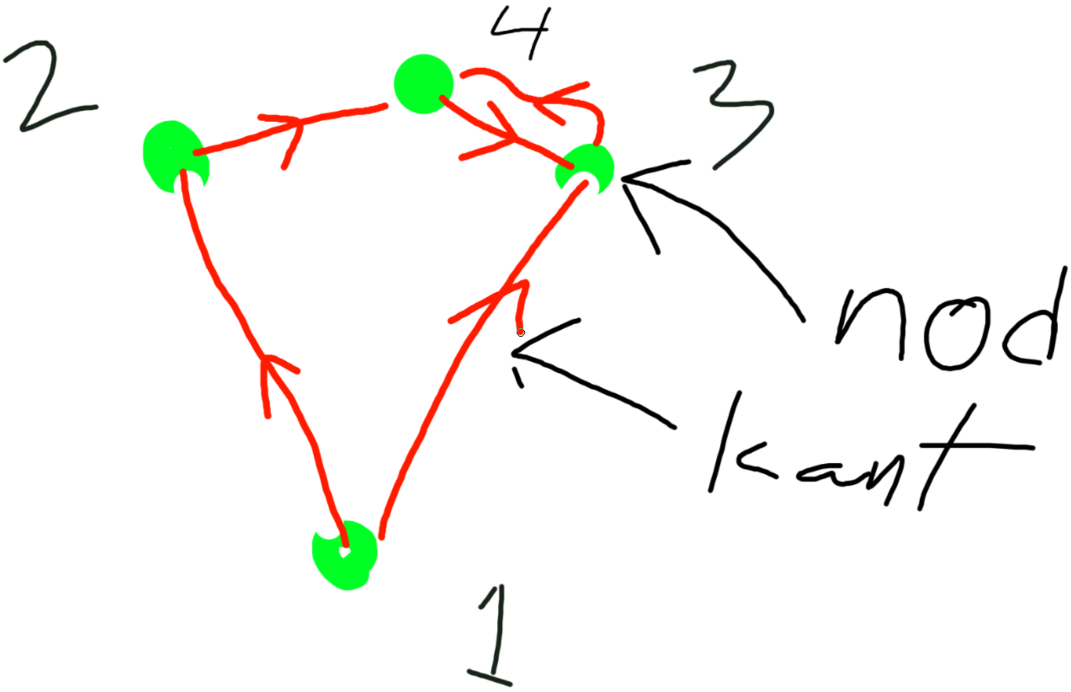


8.2.2 Definition grad

Graden av en nod v är antalet kanter med noden, $d(v)$.

8.2.3 Definition riktad graf

En riktad grraf G består av två mängder $G = (V, E)$ där V är noder och E är kanter.
Nu är E en mängd av ordnade par av noder.



8.2.4 Definition väg

En väg av längd k mellan nod A och B är en lista av kanter $e_1, e_2, \cdots, e_k$ där $A \in e_1$ och $B \in e_k$
Vägen sägs vara enkel om varje nod finns i högst två av kanterna.
OM $A = B$ kallas vägen för en cykel.
Om det finns en väg mellan samtliga noder sägs grafen vara sammanhängande

8.2.5 Sats 9.14

Om det finns en väg mellan två noder finns det en enkel väg.

8.2.6 Sats 9.15

Om en graf har $n$noder har en enkel väg högst n kanter.

8.3 Grannmatriser

8.3.1 Definition grannmatris

Om $G = (V, E)$ är en graf med n noder ges grannmatrisen till G av $n \times n$-matrisen A som på plats (i, j) ges av $a_{i,j} = \{^{1}_{0}$, annars $\{i, j\} \in E$.
Om G är en riktad graf ges grannmatrisen A av den matris som på plats (i, j) är $a_{i,j} = \{^{1}_{0}$, annars $\{i, j\} \in E$.

8.3.2 Sats 9.19

Om A är grannmatrisen till en graf så är elementet (i, j) i A^k antalet vägar av längd k från nod i till nod j.

8.3.3 Sats 9.20

Det finns en väg från nod i tll nod $j \Leftrightarrow$ element (i, j) i A^k inte är noll för något k

8.3.4 Sats 9.21

Det finns en väg från nod i till nod $j \Leftrightarrow$ element (i, j) i $\sum_{k=1}^{n} A^k$ inte är noll.

8.3.5 Sats 9.22

Grafen G är sammanhängande $\Leftrightarrow$ Varje element i $\sum_{k=1}^{n} A^k$ är nollskilt.

8.4 Slumpvandringar på grafer

Antag att vi har en graf $G = (V, E)$ och att vi startar i någon nod v. Vi går till en nod som har en kant med 4j 4 med sannolikhet $\frac{1}{d(v)}$ Fortsätter vi såhär får man en s.k. Slumpvandring.

8.4.1 Definition

Givet en grannmatris A låter vi M vara den matris som på plats (i, j) ges av $m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}}$
Det här kommer att ge att $m_{i,1} + m_{i,z} + \cdots + m_{i,n} = 1$

8.4.2 Sats 9.27

Element (i, j) i M^k är sannolikheten att vi befinner oss i nod j om vi började i nod i och har tagit oss k steg.

Om x^t är en radvektor med positiva element vars summa är 1 kallas x^t för en fördelningsvektor.
Detta ska tolkas som att $x^t = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, vi startar på nod i med sannolikhet xi.

8.4.3 Sats 9.27 - part 2

Uttrycket $x^t M^k$ är sannolikheten att vi befinner oss i en viss nod efter k steg.