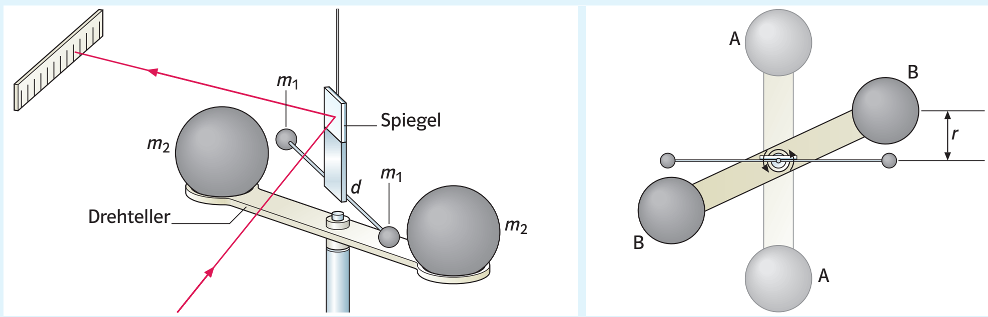
Das Gravitationsgesetz

V1 **B1** zeigt das Prinzip eines Versuches zur Messung der Anziehungskräfte zwischen Bleikugeln: An einem dünnen Draht hängt eine waagerechte Stange mit zwei kleinen Bleikugeln an den Enden. In gleicher Höhe stehen ihnen zwei große Bleikugeln auf einem Drehgestell gegenüber. Sie lassen sich mit dem Gestell in verschiedene Positionen bezüglich der kleinen Kugeln schwenken. Ein Gehäuse schützt die Anordnung vor Luftzug. Ein Spiegel, der in der Mitte der Stange mit den kleinen Kugeln befestigt ist, lenkt einen Lichtstrahl auf eine entfernte Skala.
Der am Spiegel reflektierte Lichtstrahl macht sehr kleine Drehungen messbar.

Befinden sich die großen Kugeln in Position A, so ist keine Bewegung feststellbar, schwenkt man sie in Position B, so beginnen die kleinen Kugeln sich zu den großen hin zu bewegen.



B1 Prinzip der Drehwaage mit je zwei Kugeln mit kleiner bzw. großer Masse

Massenanziehung Die Grundgleichung der Mechanik war Kepler nicht bekannt, sodass er die Bewegung der Planeten nicht mit Hilfe von Kräften erklären konnte. Er hatte zwar schon vermutet, dass zwischen Sonne und Planeten Kräfte wirken, doch erst Isaac Newton führte diesen Gedanken in einer Theorie aus. Newton hat in seinem Buch „Die mathematischen Prinzipien der Naturlehre“ den Fall eines Apfels und die elliptische Bahn der Erde um die Sonne untersucht und auf die gleiche Ursache zurückgeführt. Er nannte die verursachenden Kräfte **Gravitationskräfte**.

Zur Untersuchung dieser Kräfte nahm er vereinfachend an, dass sich die Planeten mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen. Wegen der geringen Abweichung der Planetenbahnen von der Kreisform erschien ihm diese Näherung zulässig. Sie erlaubt es, die Gesetze für die Kreisbewegung zu verwenden. Damit ein Planet mit der Masse m_1 eine Kreisbahn mit dem Radius r um die Sonne beschreibt, muss auf den Planeten ständig eine Zentripetalkraft

$$F = m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

wirken. T bezeichnet die Umlaufzeit des Planeten.

Nach dem 3. Kepler'schen Gesetz ist der Quotient aus T^2 und r^3 konstant.

$$\frac{T^2}{r^3} = k \quad \text{bzw.} \quad T^2 = k \cdot r^3$$

Damit ergibt sich für die Zentripetalkraft:

$$F = m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{k \cdot r^3} \cdot r = C \cdot \frac{m_1}{r^2} \quad \text{mit} \quad C = \frac{4\pi^2}{k}$$

Wie k hängt auch C von dem Zentralkörper ab, um den die Planeten kreisen. Maßgebliche Größe für die Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet ist neben dem Abstand r der Mittelpunkte beider Körper ihre Masse. Newton postulierte daher auch, dass die Zentripetalkraft eine Folge der Eigenschaft „Masse“ der Körper ist.
Der Betrag der Zentripetalkraft wird von beiden Massen abhängen. Folglich ist es sinnvoll, neben der Masse m_1 des Planeten die Masse m_2 des Zentralkörpers Sonne in die Beziehung aufzunehmen, indem man für die Konstante $C = \gamma \cdot m_2$ setzt. γ ist eine neue Konstante.

Newton nahm weiterhin an, dass sowohl die Gewichtskraft eines Körpers auf der Erde als auch die Zentripetalkraft der Sonne auf einen Planeten Gravitationskräfte sind. Diese Verallgemeinerungen Newtons führen zu einem Naturgesetz, das man das **Newton'sche Gravitationsgesetz** nennt:

● **Zwei beliebige kugelförmige homogene Körper mit den Massen m_1 und m_2 üben im Abstand r gleich große, entgegengesetzt gerichtete Gravitationskräfte aufeinander aus. Für deren Betrag gilt:**

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit} \quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Die **Gravitationskonstante** γ ist eine universelle Konstante; sie hängt nicht von den Massen der beiden Körper ab. r ist der Abstand der Mittelpunkte beider Körper.

Messung der Gravitationskonstanten Für zwei Körper mit je 1 kg Masse errechnet sich beim Abstand $r = 1\,\mathrm{m}$ eine wechselseitige Anziehungskraft von $F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$. Diese Kraft ist so klein, dass Newton ihre Messung und damit die Bestimmung der Gravitationskonstanten γ im Labor für unmöglich hielt. Erst 1798, also mehr als 100 Jahre nach der Entdeckung des Gravitationsgesetzes, gelang dies dem Engländer **Henry Cavendish**.
B1 zeigt das Prinzip der von Cavendish benutzten Drehwaage. Geringste Bewegungen der kleinen Kugeln werden hier durch den Ausschlag eines Lichtzeigers vergrößert sichtbar. Die Kugeln werden paarweise durch die zwischen ihnen wirkenden Kräfte beschleunigt. Wegen ihrer viel größeren Masse ist die Bewegung der großen Kugeln nicht zu beobachten.

Während der Messzeit bewegen sich die kleinen Kugeln nur um eine kleine Strecke, sodass der Abstand zu den großen Kugeln als konstant angesehen werden kann. Daher kann von einer konstanten Kraft und einer konstanten Beschleunigung ausgegangen werden. Damit gilt das Zeit-Weg-Gesetz $s = a \cdot t^2/2$, wobei s die Weglänge ist, die eine kleine Kugel in der Zeitspanne t zurücklegt.
Wenn die kleine Kugel die sehr kleine Wegstrecke s zurücklegt, bewegt sich die Lichtmarke auf der Skala um die messbare Weglänge x. Aus der in Grafik **B1** wiedergegebenen Geometrie der Versuchsanordnung ergeben sich die Zusammenhänge:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{l} = \frac{s}{d}, \quad \text{das heißt, es ist:} \quad s = \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot d}{l}$$

$$\text{Wegen} \quad a = 2 \cdot \frac{s}{t^2} \quad \text{ergibt sich:} \quad a = \frac{x \cdot d}{l \cdot t^2}$$

$$\text{Aus} \quad m_1 \cdot a = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{folgt:} \quad \gamma = \frac{a \cdot r^2}{m_2}$$

Für $d = 0{,}05\,\mathrm{m}$ und $l = 10\,\mathrm{m}$ ergeben sich z. B. folgende Messwerte:

t in s	15	30	45
x in 10^{-3} m	2,0	7,0	16,0
a in $10^{-8}\,\mathrm{m/s^2}$	4,4	3,9	4,0

Für $r = 0{,}045\,\mathrm{m}$, $m_2 = 1{,}46\,\mathrm{kg}$ und den Mittelwert $a = 4{,}1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/s^2}$ aus einer Messreihe wird $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$.

Die Ursache für die Gewichtskraft Die Gewichtskraft, die an der Erdoberfläche auf einen Körper der Masse m wirkt, ist die Folge der Gravitationskräfte zwischen Körper und Erde (Masse m_E):

$$m \cdot g = \gamma \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2}, \quad \text{also:} \quad g = \frac{\gamma \cdot m_E}{r_E^2}$$

Der Wert von g ist bekannt: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Damit lässt sich die Erdmasse m_E bei bekanntem Erdradius r_E und bekanntem γ bestimmen.

Der Mond der Masse m_M erfährt von der Erde im Abstand $r_M = 60 \cdot r_E$ zur Erde die Gravitationskraft:

$$m_M \cdot a = \gamma \cdot \frac{m_E \cdot m_M}{(60 \cdot r_E)^2}, \quad \text{d. h.:} \quad a = \frac{\gamma \cdot m_E}{(60 \cdot r_E)^2}$$

Das Verhältnis $g : a$ ist demnach $3600 : 1$.
Mit den bekannten Werten für den Radius der Mondbahn ($r_M = 384\,000\,\mathrm{km}$) und der Umlaufzeit ($T = 27{,}3$ Tage) ergibt sich als Zentripetalbeschleunigung:

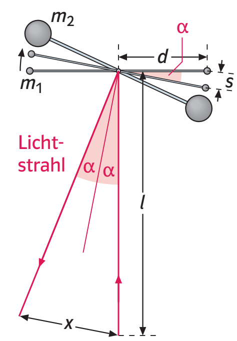
$$a_Z = \omega^2 \cdot r_M = \left(\frac{2\pi}{T^2}\right)^2 \cdot r_M = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Für diese Zentripetalbeschleunigung $a_Z = a$ gilt in der Tat $3600 \cdot a = g$.
Die Hypothese, dass dieselbe Kraft sowohl in Erdnähe für die Gewichtskraft von Körpern als auch im Mondabstand für die Zentripetalkraft der Mondbahn gültig ist, hat schon Newton mit diesem Beispiel erläutert.

A1 ◒ Begründen Sie die Lösungsansätze und die Rechnungen zur Bestimmung von γ. Werten Sie die zugehörige Messreihe aus.

A2 ○ Bestimmen Sie die Gravitationskraft zwischen Erde und Sonne.

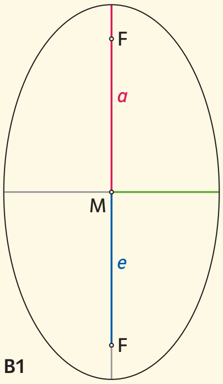
A3 ◒ Stellen Sie sich vor, die Gravitationskonstante würde ihren Betrag plötzlich ändern. Was würden Sie erwarten, wenn sie um eine Zehnerpotenz abnähme? Was, wenn sie um den Faktor 10 zunähme?



B1 Drehwaage

Exkurs

Planetenbewegung



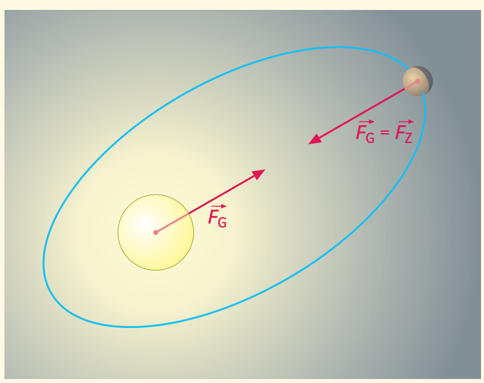
B1

Die meisten Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich auf Ellipsenbahnen, die kaum von einer Kreisbahn zu unterscheiden sind. Die Abweichung von einer Kreisbahn wird durch die numerische Exzentrizität ε beschrieben; diese berechnet sich nach $\varepsilon = e/a$, wobei e die Entfernung des Brennpunktes der Ellipse von ihrem Mittelpunkt und a ihre große Halbachse ist (→ **B1**). Für die Bahn der Erde um die Sonne beträgt die numerische Exzentrizität 0,017, d.h., Brennpunkte und Mittelpunkt dieser Ellipse fallen fast zusammen. Nur bei Merkur und dem Kleinplaneten Pluto* hat man merkliche Abweichungen von einer Kreisbahn (→ **B2**). Die folgenden Berechnungen gehen von einer Kreisbahn aus. Die für die Bahn eines Planeten der Masse m_P nötige Zentripetalkraft F_Z wird von der wechselseitigen Gravitationskraft zwischen Planet und Sonne aufgebracht, d.h., die Kraft, die ein Planet durch die Masse der Sonne erfährt, zwingt ihn auf die Kreisbahn (→ **B4**).

Bahn	ε
Kreis	0
Merkur	0,205
Venus	0,0067
Erde	0,017
Mars	0,094
Jupiter	0,049
Saturn	0,056
Uranus	0,046
Neptun	0,011
Pluto*	0,244

B2

*Pluto zählt seit August 2006 nicht mehr zu den Planeten.



B4

Aus der Bedingung, dass die Zentripetalkraft gleich der Gravitationskraft ist, ergibt sich:

$$m_P \cdot \omega^2 \cdot r = \gamma \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{r^2}$$

Dabei sind m_P und m_S die Massen von Planet und Sonne, ω die Winkelgeschwindigkeit des Planeten, r der Radius der Kreisbahn und γ die Gravitationskonstante. Aus dieser Gleichung kürzt sich die Planetenmasse heraus; ersetzt man die Winkelgeschwindigkeit durch $2\pi/T$, wobei T die Umlaufdauer des Planeten ist, so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = \gamma \cdot \frac{m_S}{r^2}$$

und daraus durch Umformung

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{\gamma \cdot m_S}$$

B3 Fernseh-Satellit

Da auf der rechten Seite nur Zahlen und Größen vorkommen, die unabhängig vom jeweiligen Planeten sind, ist dieser Ausdruck eine für alle Planeten gleiche Konstante. Ersetzt man den Bahnradius durch die große Halbachse a, so beschreibt diese Gleichung genau das dritte Kepler'sche Gesetz. Diese Konstante gilt allgemein für alle Objekte, die durch die von der Sonne ausgeübte Gravitationskraft auf eine Bahn um die Sonne gezwungen werden, wie z.B. auch die Asteroiden, das sind kleinere Himmelskörper, die sich hauptsächlich zwischen der Mars- und der Jupiterbahn bewegen, oder auch die periodisch wiederkehrenden Kometen.

Das dritte Kepler'sche Gesetz lässt sich auf alle Systeme verallgemeinern, bei denen Körper bedingt durch die Gravitationskraft auf Bahnen um einen Zentralkörper kreisen. Beispielsweise wird die Erde als Zentralkörper vom Mond und inzwischen von einer Vielzahl künstlicher Satelliten umkreist (→ **B3**). Für die Umlaufdauer T und den Bahnradius r dieser Körper gilt in diesem System die Beziehung

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{\gamma \cdot m_E}$$

Diese Gleichung erhält man aus dem gleichen Ansatz wie für die Planetenbewegung um die Sonne; statt der Masse der Sonne steht jetzt die Masse der Erde m_E in der Gleichung.

Bestimmte Satelliten wie z.B. Fernseh- oder GPS-Satelliten (→ **B3**) sollen sich immer über demselben Punkt der Erdoberfläche befinden. Ihre Umlaufdauer muss dann genauso groß sein wie die Dauer einer Drehung der Erde um ihre Achse, nämlich ca. 24 h, das sind 86 400 Sekunden. (Tatsächlich beträgt die Dauer einer Erddrehung 23 h 56 min 4 s). Für einen solchen geostationären Satelliten ergibt sich dann eine Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400\,\text{s}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{s}}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{\gamma \cdot m_E}$$

und der bekannten Masse der Erde ($m_E = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$) kann dann der Bahnradius eines geostationären Satelliten errechnet werden. Man erhält $r = 4{,}2 \cdot 10^6\,\text{m} = 42\,000\,\text{km}$. Damit muss ein solcher Satellit in einer Höhe von etwa 36 000 km über der Erdoberfläche kreisen.

Punktweise Berechnung von Planetenbahnen

Methoden

Bevor Sie diese Seite durcharbeiten, sollten Sie sich ein handelsübliches Programm zur Tabellenkalkulation besorgen und die Bedienung mit Texteingabe und Formeln sowie die Wiedergabe der Berechnungen in Diagrammen beherrschen.

Physiker versuchen, eine größere Zahl von Erscheinungen dadurch zu beschreiben, dass betrachtet wird, was allen gemeinsam ist. So kommt es zu einfachen Gesetzen, etwa $s(t) = a/2 \cdot t^2$. Soll aber beim freien Fall der Luftwiderstand berücksichtigt werden, so ist $a = g - k \cdot v^2$. Hieraus ist nur schwer ein $s(t)$-Gesetz zu gewinnen.

Kennt man nun zu einem Zeitpunkt die Größen s, v und a, so können schrittweise weitere Werte berechnet werden. Als Beispiel soll die Bahn eines Planeten mit der Masse m um einen ruhend gedachten Zentralkörper mit der Masse M berechnet werden. Das im ersten Kapitel beschriebene Euler-Verfahren soll hier verbessert werden.

Beim Euler-Verfahren geht man davon aus, dass die Geschwindigkeit im betrachteten Zeitintervall konstant ist. Tatsächlich ist sie aber zu Beginn eine andere als am Ende. Diese Ungenauigkeit gleicht das **Halbschritt-Verfahren** aus, indem es mit der Geschwindigkeit in der Mitte des Zeitintervalls rechnet (→ **B3**).
Zweckmäßigerweise legt man die (ruhende) Sonne in den Ursprung des Koordinatensystems. Die Durchführung der Rechnungen lässt sich mit einer **Tabellenkalkulation** organisieren. Aus dem Gravitationsgesetz folgt für die Kraft, die auf den Planeten wirkt:

$$F = m \cdot a = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Daraus folgt (→ **B1**):

$$a = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} = -\frac{C}{r^2} \quad \text{mit} \quad C = \gamma \cdot M \quad \text{und}$$

$$a_x = a \cdot \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad a_y = a \cdot \frac{y}{r}$$

Zum Zeitpunkt t habe der Planet den Ort $P_{alt}(x_{alt} \mid y_{alt})$, zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ den Ort $P_{neu}(x_{neu} \mid y_{neu})$. Mit den gewählten Bezeichnungen gilt

$$x_{neu} = x_{alt} + v_{x(alt + \Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad \text{und}$$

$$y_{neu} = y_{alt} + v_{y(alt + \Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad \text{sowie}$$

$$r_{neu} = \sqrt{(x_{neu}^2 + y_{neu}^2)}$$

Daraus folgt:

$$a_{x,\,neu} = -\frac{C \cdot x_{neu}}{r_{neu}^3} \quad \text{und} \quad a_{y,\,neu} = -\frac{C \cdot y_{neu}}{r_{neu}^3}$$

Die Geschwindigkeit in der Mitte des nächsten Zeitintervalles ist

$$v_{x(neu + \Delta t/2)} = v_{x(alt + \Delta t/2)} + a_{x,\,neu} \cdot \Delta t \quad \text{und}$$

$$v_{y(neu + \Delta t/2)} = v_{y(alt + \Delta t/2)} + a_{y,\,neu} \cdot \Delta t.$$

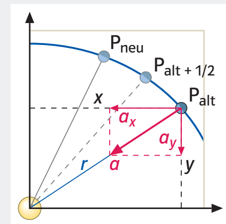
Mit den Anfangswerten $v_{x(0)}$ und $v_{y(0)}$ der beiden Geschwindigkeitskomponenten gewinnt man die entsprechenden Werte für den Zeitpunkt $\Delta t/2$ zu

$$v_{x(0 + \Delta t/2)} = v_{x(0)} + a_{x(0)} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$v_{y(0 + \Delta t/2)} = v_{y(0)} + a_{y(0)} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

A1 ● Bauen Sie das in Tabelle **B1** gezeigte Rechenblatt nach. Die Anfangswerte finden Sie im Tabellenkopf.

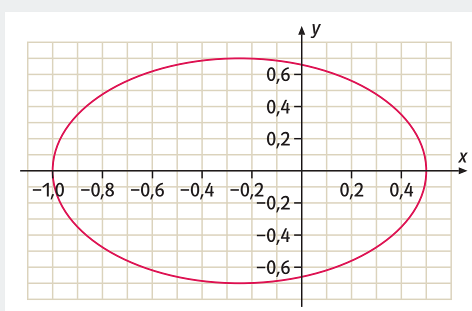
A2 ◒ Weisen Sie nach, dass sich, wenn nur der Anfangswert für v_y durch $\sqrt{2}$ ersetzt wird, eine Kreisbahn ergibt.



B3 Bewegung im Gravitationsfeld

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bewegung im Gravitationsfeld							
2	x(0) = 0,5		vx(0) = 0		vx(Δt/2) = −0,04		C = 1	
3	y(0) = 0		vy(0) = 1,63		vy(Δt/2) = 1,63		Δt = 0,02	
4								
5	t	x(t)	y(t)	r(t)	ax(t)	ay(t)	vx(t+Δt/2)	vy(t+Δt/2)
6	0	0,5	0	0,5	−4	0	−0,04	1,63
7	0,02	0,4992	0,0326	0,50026	−3,9873	−0,26039	−0,11975	1,62479
8	0,04	0,49681	0,0651	0,50105	−3,94947	−0,51749	−0,19874	1,61444
9	0,06	0,49283	0,09738	0,50236	−3,88734	−0,76815	−0,27648	1,59908
10	0,08	0,4873	0,12937	0,50418	−3,80224	−1,0094	−0,35253	1,57889
11	0,1	0,48025	0,16094	0,5065	−3,69595	−1,23861	−0,42645	1,55412
12	0,12	0,47172	0,19203	0,50931	−3,57061	−1,45351	−0,49786	1,52505
13	0,14	0,46176	0,22253	0,51259	−3,42862	−1,65228	−0,56643	1,492

B1 Rechenblatt mit Halbschrittverfahren zur Gravitationsbewegung. Die Größen sind relativ, ohne Einheiten und der Einfachheit halber wurde $C = 1$ gesetzt.



B2 Kepler'sche Ellipsenbahn nach der Tabellenkalkulation