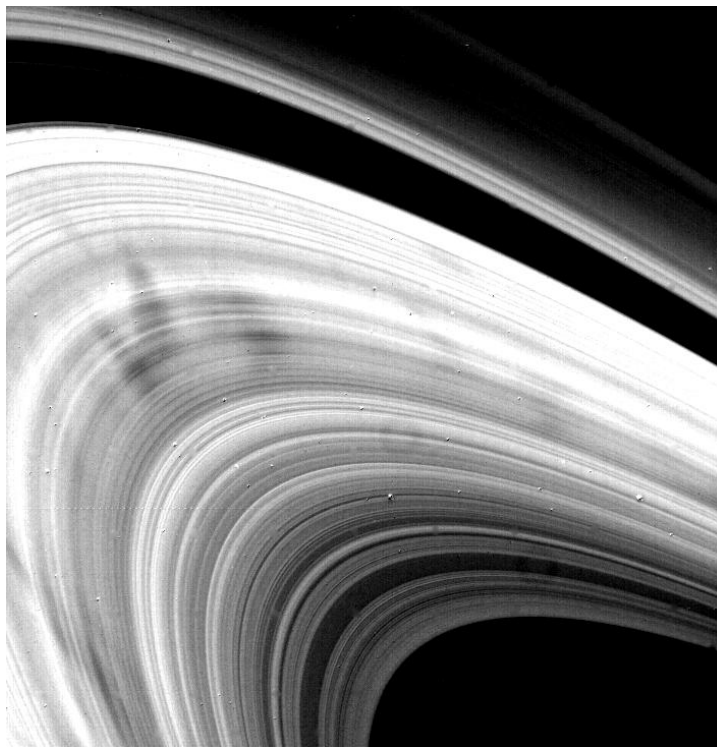


Max-Planck-Institut für Kernphysik
Saupfercheckweg 1
69117 Heidelberg

Himmelsmechanik

Celestial Mechanics

Sascha Kempf



TU Braunschweig
Sommersemester 2004

Literatur

Text books

- C.D. Murray und S.F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics* (Camebridge University Press, Camebridge)
- J.M.A. Danby (1988). *Fundamentals of Celestial Mechanics* (Willmann-Bell, Richmond)
- D. Brouwer und G.M. Clemence (1961). *Methods of Celestial Mechanics* (Academic Press, New York)
- A.E. Roy (1988). *Orbital Motion* (Adam Hilger, Bristol)
- O. Montenbruck (2001). *Grundlagen der Ephemeridenrechnung* (Sterne und Weltraum, Heidelberg)
- A. Guthmann (2000). *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung* (Spektrum, Heidelberg)
- H. Buerius (1966). *Vorlesung über Himmelsmechanik* (BI, Mannheim)
- C. L. Siegel (1956). *Vorlesung über Himmelsmechanik* (Springer, Berlin)
- E. Grün, B. Gustafson, S. Dermott und H. Fechtig (Ed.) (2001). *Interplanetary Dust* (Springer, Heidelberg)
- L.D. Landau und E.M. Lifschitz (1997). *Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 1, Mechanik* (Harry Deutsch Verlag)

1 Der Ursprung der Himmelsmechanik

The origin of the Celestial Mechanics

Die Himmelsmechanik ist die älteste wissenschaftliche Disziplin der Menschen und hat ihren Ursprung in astrologische Überlegungen. Die Antike kannte 7 bewegliche Himmelskörper. Da Sonne und Mond das Leben der Menschen unmittelbar beeinflussten, folgte man für die weiteren "Wandelsterne" eine wesentlich subtilere Auswirkung.

408 - 347 v. Chr.: **Eudoxus von Cnidus** führte erstmals ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Planetenbewegung ein (Sphärenmodell).

~ 290 v. Chr.: **Aristyllus** und **Timocharis** fertigen in Alexandria anhand ihrer Präzisionsmessungen den ersten Sternkatalog an.

320 - 250 v. Chr.: **Aristarch** beschrieb, wie die Entfernung der Sonne durch Beobachtung von Sonnenfinsternissen, Mondfinsternissen und der Zeit des Halbmondes bestimmt werden kann. Er folgerte, dass die Sonne größer als die Erde sei und schlug deshalb die Sonne als Zentrum vor.

The celestial mechanics is the oldest natural science of humankind and originated from astrological considerations. The antiquity knew seven celestial bodies performing an apparent motion on the sky. Since of the great importance of Sun and Moon for the daily life it was concluded that the influence of the other "planets" is more subtle.

408 - 347 BC: **Eudoxus von Cnidus** was the first who introduced a mathematical model to describe the orbital motion of the planets.

~ 290 BC: **Aristillus** and **Timocharis** prepared the first star catalogue based on their precise astronomical observations.

310 - 230 BC: **Aristarchus** described a method to determine the distance between Earth and Sun based upon solar eclipses, lunar eclipses, and the time of crescent. He concluded that the Sun is greater than the Moon. For this reason he proposed the Sun to be at the centre of the solar system.

276 - 194 v. Chr.: **Eratosthenes** führte in Alexandria die Arbeit von Aristyllus und Timocharis fort und stellte einen Katalog mit 700 Sternen auf. Weiterhin bestimmte er den Erdumfang und zeigte, daß Eudoxos' Sphähremodell die Planetenbewegung nicht exakt beschreibt.

262 - 190 v. Chr.: **Apollonius von Perga** führte das Konzept der Epizyklen zur Erklärung der scheinbaren Planetenbewegung ein.

190 - 120 v. Chr.: **Hipparch** war der größte Astronom des Altertums. Er bestimmte als Erster die Präzession der Äquinoktien mit 1° pro Jahrhundert. Weiterhin zeigte er, daß die Lage der Erdachse nicht raumstabil ist.

85 - 165: **Claudius Ptolemäus** war der Autor des einflußreichsten Buchs des Altertums - des "Almagest" (die "Große Zusammenstellung"). Das Buch faßte das vollständige Wissen der griechischen Astronomie zusammen und enthielt die Formulierung eines geozentrischen Weltbilds, welches bis zur Kopernikanischen Wende als das allein richtige angesehen wurde.

276 - 194 BC: **Eratosthenes**. He calculated the Earth' circumference and showed that Eudoxos' model does not describe the planetary motions exactly.

262 - 190 BC: **Apollonius of Perga** introduced the concept of epicycles to explain the apparent motion of the planets.

190 - 120 BC: **Hipparchus** is considered the greatest astronomical observer of the antiquity. He was the first to measure the precession of the equinoxes of 1° per century. He also showed that the Earth's axis is not fixed in space.

85 - 165: **Ptolemy** was the athour of the most influential book of the antiquity - the "Almagest" (the "Great Treatease"). This book compiled the complete knowledge of the greek astronomy and included a geocentric model which was the prevailing view until the Copernican revolution.

2 Das 2-Körper-Problem

The Two-Body-Problem

2.1 Bahngleichung

Orbital position

Betrachten wir die Bewegung der zweier gravitativ wechselwirkender Körper m_1 und m_2 an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Da die potentielle Energie U der beiden Körper nur von ihrem Abstand abhängt, lautet ihre LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

mit $U(r) = -Gm_1m_2r^{-1}$ und der Gravitationskonstante $G = 6.67260 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

Legt man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt, d.h. $\mathbf{r}_1m_1 + \mathbf{r}_2m_2 = 0$, ergibt sich

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (2.1)$$

Hier sind $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ der Abstandsvektor der beiden Körper und $m = m_1m_2/m_1 + m_2$ die reduzierte Masse. Aus der Definition des Koordinatensystems folgt dann

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

Let us consider the motion of two gravitationally interacting bodies m_1 and m_2 located at \mathbf{r}_1 and \mathbf{r}_2 . Since the potential energy depends only upon the separation between the bodies the Lagrangian is given by

where $U(r) = -Gm_1m_2r^{-1}$ and $G = 6.67260 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ is the gravitational constant.

Choosing the coordinate system to be centred at the centre of mass, i.e. $\mathbf{r}_1m_1 + \mathbf{r}_2m_2 = 0$, leads to

Here, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ and $m = m_1m_2/m_1 + m_2$ are denoting the separation vector of m_1 and m_2 and their reduced mass, respectively. It follows from the definition of the coordinate system that

Das Problem der relativen Bewegung zweier Körper wurde formal auf das Problem der Bewegung eines Körpers der Masse m in dem Zentralfeld $U(r)$ zurückgeführt.

Zentralfeldprobleme haben die wichtige Eigenschaft, daß hier der auf das Zentrum bezogene Drehimpuls \mathbf{J} erhalten bleibt, weshalb der Bahnvektor \mathbf{r} des Teilchens stets in der Ebene senkrecht zu \mathbf{J} bleibt. Dies kann man auch folgendermaßen sehen: Bestimmt man aus Gl. (2.1) die auf m wirkende Kraft $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ und bildet das Vektorprodukt mit \mathbf{r} , ergibt sich $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ und nach Integration $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$. Folglich steht der Ortsvektor \mathbf{r} stets senkrecht auf dem konstanten Vector \mathbf{c} .

Es ist folglich ausreichend, die Bewegung eines Teilchens in der Ebene zu betrachten. Nach Einführung von Polarkoordinaten r, θ bezogen auf das Feldzentrum (dem sogenannten Baryzentrum) lautet die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r},$$

wobei $\mu = G(m_1 + m_2)$. L enthält θ nicht in expliziter Form - θ ist eine *zyklische* Koordinate. Das bedeutet, daß für den zugehörigen Impuls p_θ das Bewegungsintegral

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (2.3)$$

Formally, the problem of the relative motion between two bodies was reduced to treat the motion of a body with the mass m within a central field $U(r)$.

For motions within a central field the spin \mathbf{J} measured with respect to the field centre is conserved. This implies that the *motion is constrained to the plane perpendicular to \mathbf{J}* . This can be seen as follows: Deriving the force $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ acting on m via Eq. (2.1) and taking the vector product with \mathbf{r} one yields $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$. Integrating this expression gives $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$. Thus, the position vector \mathbf{r} is always perpendicular to the constant vector \mathbf{c} .

Thus, it is sufficient to consider the motion of a particle within a 2D plane. After introducing polar coordinates with the respect to the field centre (the so-called barycentre) the Lagrangian writes as

with $\mu = G(m_1 + m_2)$. Since L does not depend upon θ explicitly, θ is a so-called *cyclic* coordinate. This means that the corresponding general momentum p_θ

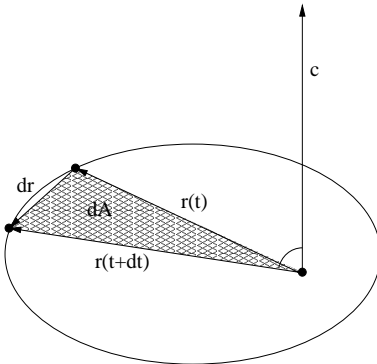


Figure 2.1: Zusammenhang zwischen dem Drehimpulserhalts und der Konstanz der Flächengeschwindigkeit \dot{A} .

Relationship between the conservation of the orbital spin and the conservation of the areal velocity \dot{A} .

	e	p	E	
Kreis	0	a	< 0	circle
Ellipse	$0 \dots 1$	$a(1 - e^2)$	< 0	ellipse
Parabel	1	$2q$	0	parabola
Hyperbel	> 1	$a(e^2 - 1)$	> 0	hyperbola

Table 2.1: Parameter der Kegelschnitte.

Parameters of the conics.

existiert. Hieraus folgt nun unmittelbar der KEPLERSche Flächensatz:

is a constant of motion. This finding immediately implies KEPLER's second law:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = 2m \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{2} r \cdot r d\theta \right) = 2m\dot{A} = \text{const.} \quad (2.4)$$

Der Ausdruck $dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$ ist die Sektorfläche, welche vom Radiusvektor innerhalb des Zeitintervalls dt überstrichen wird. Folglich gilt: *Der Radiusvektor eines Massenpunktes überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Here, the expression $dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$ is the sector area swept out by the radius vector in a time dt . Hence: *equal areas are swept out in equal times.*

Die Trajektorie des Körpers erhält man am einfachsten aus den Erhaltungssätzen den Drehimpuls und für die Energie

The body's trajectory is obtained at simplest by starting with the conservation laws for the orbital spin and for the energy

$$E = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} \quad (2.5)$$

ausgeht. Aus dem letzten Ausdruck erhält man

The last expression gives

$$dt = \left[\frac{2}{m} \left(E + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.6)$$

und aus Gl. (2.3) folgt nach Einsetzen von dt

and using Gl. (2.3), we can write

$$d\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} dt = \frac{p_\theta}{mr^2} \left[\frac{2}{m} \left(E + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.7)$$

und nach Integration

and after integration

$$\theta = \arccos \left(\left[\frac{p_\theta}{r} - \frac{m^2 \mu}{p_\theta} \right] \left[2mE + \frac{m^4 \mu^2}{p_\theta^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right) + \text{const.} \quad (2.8)$$

Hieraus folgt die Bahngleichung des KEPLER-Problems

From here follows the orbit equation of the KEPLER problem

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (2.9)$$

wobei

where

$$p = \frac{p_\theta^2}{m^2 \mu} \quad \text{und} \quad e = \left(1 + \frac{2E p_\theta^2}{m^3 \mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

das sogenannte *semilatus rectum* und die Exzentrizität der Bahn bezeichnen. Die Phase ϖ wird als *Länge des Perizentrums* sowie θ als *wahre Länge* bezeichnet. Der Winkel $f = \theta - \varpi$ ist die *wahre Anomalie*.

are the so-called *semilatus rectum* and the eccentricity of the orbit. The phase ϖ and θ are called the *longitude of the pericentre* and *true anomaly*, respectively. The angle $f = \theta - \varpi$ is the *true anomaly*.

Gl. (2.9) ist die Gleichung eines Kegelschnittes mit dem Koordinatenursprung im Brennpunkt. Für $E < 0$ bewegt sich der Körper auf einer Ellipse, während für $E > 0$ die Trajektorie eine Hyperbel sowie für $E = 0$ eine Parabel ist (siehe Tab. (2.1)).

Eq. (2.9) is the general equation of a conic with the origin of the coordinate system in its focus. For $E < 0$ the body moves in a elliptical orbit while for $E > 0$ a hyperbola results and for $E = 0$ a parabola results (see Tab. (2.1)).

2.2 Die elliptische Bahn

The elliptic orbit

Bewegt sich der Körper auf einer Ellipse, so überstreicht sein Ortsvektor während eines Umlaufs die Fläche $A = \pi ab$, wobei a und $b = a\sqrt{1-e^2}$ die große bzw. kleine Ellipsenhalfachse sind. Damit folgt aus dem Flächensatz (2.4) und Gl. (2.10) das dritte KEPLERSche Gesetz:

The area swept out by the radius vector of a body moving in an elliptic orbit per revolution is $A = \pi ab$, where a and $b = a\sqrt{1-e^2}$ are the semimajor axis and the semiminor axis, respectively. Hence by Eq. (2.4) and (2.10), it follows KEPLER's third law:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 = \frac{m^3 \mu^2 \pi^2}{2|E|^3}. \quad (2.11)$$

Eine wichtige Schlußfolgerung ist, daß die Umlaufzeit T nur von der Energie des Körpers abhängt. Die Energie wiederum ist nur eine Funktion der großen Halbachse

This is an important relationship that shows that the orbital period T depends only upon the energy of the body. The energy, on the other hand, is only a function of the semi-major axis

$$E = -\frac{\mu m}{2a}. \quad (2.12)$$

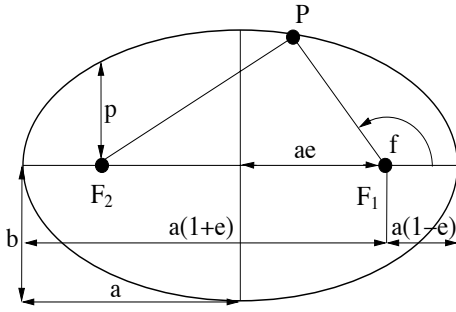


Figure 2.2: Der Ursprung der elliptischen Bahn befindet sich in einem der beiden Brennpunkte F_1 oder F_2 . Für jeden beliebigen Bahnpunkt P ist die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant ($F_1P + F_2P = 2a$).

The origin of the elliptic orbit is one of the foci F_1 or F_2 . For any point P on the elliptic orbit is the sum of the distances to the focal points a constant value ($F_1P + F_2P = 2a$).

Wirken auf den Körper zusätzliche *konervative* Kräfte ein, so *bleibt die große Halbachse a seiner Bahn erhalten* (siehe Beispiel)!

As a consequence, the semi-major axis is preserved as long as there are only *conservative* forces acting on the body (see example)!

Der Energieerhalt des Systems bedingt das $E = m(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r})$, woraus die Beziehung für die Geschwindigkeit folgt

From the energy conservation of the system follows that $E = m(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r})$, what gives the relation for the body's velocity

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.13)$$

Offensichtlich ist die Geschwindigkeit im Perizentrum

It is seen that at pericentre,

$$v_p^2 = v^2(a(1-e)) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \quad (2.14)$$

am größten und im Apozentrum

is greatest, while at apocentre,

$$v_a^2 = v^2(a(1+e)) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right) \quad (2.15)$$

am kleinsten.

is least.

Für die folgenden Anwendungen ist eine weitere Bewegungsgröße nützlich. Pro Umlaufperiode T vergrößert sich θ um 2π , weshalb man eine "mittlere" Winkelgeschwindigkeit – die sogenannte *mittlere Bewegung* als

For what follows, another quantity is useful to characterise the orbital motion. Since the angle θ grows by 2π per orbital period, an "average" angular velocity – the so-called *mean motion* – can be defined as

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

definieren kann. Daher gilt

Thus,

$$\mu = n^2 a^3 \quad \text{und} \quad \frac{p\theta}{m} = h = na^2 \sqrt{1-e^2}. \quad (2.16)$$

2.2.1 Bestimmung der Planetenmasse

KEPLERs drittes Gesetz erlaubt die Masse eines Planeten aus seinen Orbitalparametern zu bestimmen, falls der Planet von einem (künstlichen oder natürlichen) Mond umkreist wird. Die Masse des Zentralkörpers sei $M \gg m_{planet}$ und die Mondmasse m_{mond} sei gegen die Planetenmasse m_{planet} vernachlässigbar. Dann folgt aus Eq. (2.11), daß

$$G(M + m_{planet}) \approx GM = n_{planet}^2 a_{planet}^3 \quad \text{und} \quad G(m_{planet} + m_{mond}) \approx Gm_{planet} = n_{mond}^2 a_{mond}^3,$$

und daher

Determination of a planet's mass

For any planet that possesses a satellite, either natural or artificial, may its mass determined from the satellite's orbit by means of KEPLER's third law. Let the mass of the central object be $M \gg m_{planet}$, and the satellite's mass m_{mond} may be neglected compared with the planet's mass m_{planet} . Then it follows from Eq. (2.11) that

and hence

$$m_{planet} \approx M \left(\frac{a_{mond}}{a_{planet}} \right)^3 \left(\frac{n_{planet}}{n_{mond}} \right)^2. \quad (2.17)$$

2.2.2 Baryzentrische Orbits

Bisher betrachteten wir die Relativbewegung $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ der Massen m_1 und m_2 , welche auf ein 1-Körper-Problem zurückgeführt wurde. Nun sollen die Bahnen der Massenpunkte des 2-Körper-Problems bezogen auf den Massenmittelpunkt – das *Baryzentrum* – untersucht werden. Wir erinnern, daß für diese Wahl des Koordinatenursprungs $\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 = 0$ gilt. Folglich liegt der Massenmittelpunkt immer auf der Verbindungslinie von m_1 und m_2 . Offensichtlich benötigen beide Körper die gleiche Zeit für einen Umlauf. Daher sind auch ihre mittleren Bewegungen identisch, obgleich es ihre großen Halbachsen nicht sind. Denn aus Eq. (2.2) folgt daß

Barycentric orbits

So far we considered only the relative motion of the masses m_1 and m_2 which corresponds with an 1-body-problem. Now the orbits of the 2-body-problem is studied with respect to their centre of mass, the *barycentre*. Recall that for a centre of mass coordinate system $\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 = 0$. Therefore, the centre of mass lies always on the line connecting m_1 and m_2 . Obviously, each mass needs the same time to orbit the centre of mass. Consequently, their mean motions are equal, although their semimajor axes are not. Since it follows from Eq. (2.2) that

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a,$$

aber auch

but also

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h = na_1^2 \sqrt{1 - e^2} \quad \text{und} \quad h_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h = na_2^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Folglich sind die Exzentrizitäten der Bahnen identisch und somit die Ellipsen ähnlich.

Thus, the eccentricities of the orbits are equal and hence the ellipses are similar.

2.2.3 KEPLER-Gleichung

KEPLER's equation

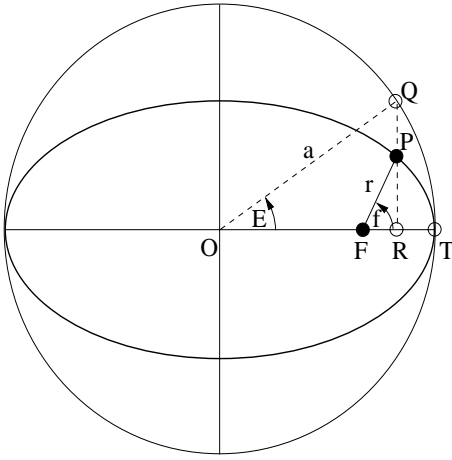


Figure 2.3: Zusammenhang zwischen der *wahren Anomalie* f und der *exzentrischen Anomalie* E . Die KEPLER-Ellipse ist von einem Kreis mit dem Radius a umschrieben, welcher der großen Halbachse der Ellipse entspricht. Zum Zeitpunkt τ des Perizentrumdurchgangs befand sich der Körper in T, zum Zeitpunkt t in P.

Relation between the *true anomaly* f and the *eccentric anomaly* E . The radius a of the circumscribed circle is equal to the semimajor axis of the KEPLER ellipse. At the time of pericentre passage, τ , the body is at T, while at the time t the body is at P.

Wir wollen nun die Position des Körpers zu einer gegebenen Zeit bestimmen. Die Bahngleichung des 2-Körper-Problems (2.9) hängt nicht explizit von der Zeit ab; wir benötigen daher einen Ausdruck für die Zeitabhängigkeit der wahren Anomalie f . Nehmen wir an, daß der Körper das Perizentrum zum Zeitpunkt τ passiert und sich zur Zeit t im Punkt P befindet (siehe Abb. 2.3). Während des Zeitraums $t - \tau$ hat er dann die Fläche A_{FTP} überstrichen. Für das Verhältnis zwischen A_{FTP} zur Gesamtfläche πab der Ellipse gilt dann aufgrund des dritten KEPLERSchen Gesetzes

We now determine the body's location to a given time. The obtained equation 2.9 for the orbital position does not depend explicitly from the time. Thus, we need to find an expression for the time-dependence of the true anomaly f . Let τ be the time of the pericentre passage; and let P be the body's position at the time t (see Fig. 2.3). During the period $t - \tau$, an area A_{FTP} has been swept out by the radius vector. Since of KEPLER's third law the ratio of A_{FTP} and the total area πab of the ellipse is given by

$$A_{FTP} = \frac{\pi ab(t - \tau)}{T} = \frac{1}{2} abn(t - \tau) = \frac{1}{2} abM,$$

wobei $M = n(t - \tau)$ die *mittlere Anomalie* bezeichnet.

where $M = n(t - \tau)$ is the *mean anomaly*.

Die Fläche A_{FTP} wird nun als Anteil an dem Kreissegment A_{OTQ} des der Ellipse umschriebenen *exzentrischen Kreises* ausgedrückt:

Now we express the area A_{FTP} as a fraction of the sector A_{OTQ} of the eccentric circle circumscribed to the ellipse:

$$A_{FTP} = A_{FRP} + A_{RTP} = A_{FRP} + \frac{b}{a} A_{RTQ}.$$

Für den letzten Schritt wurde genutzt, daß zwischen Ellipsen und umschriebenen Kreisen die Beziehung $\overline{RP}/\overline{RQ} = b/a$ gilt. Nun folgt weiter, daß

In the last step we made use of the property $\overline{RP}/\overline{RQ} = b/a$ of ellipses and eccentric circles. Now

$$A_{FTP} = A_{FRP} + \frac{b}{a} (A_{OAQ} - A_{ORQ}) = \frac{1}{2} r^2 \sin f \cos f + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \sin E \cos E \right). \quad (2.18)$$

Wir benötigen nun noch die Beziehung zwischen der wahren Anomalie und dem Winkel E - der *exzentrischen Anomalie*. Es gilt, daß

Now we need to know the relationship between the true anomaly f and the angle E - the so-called *eccentric anomaly*. Since

$$\overline{FR} = r \cos f = \overline{OR} - \overline{OF} = a \cos E - ae, \quad (2.19)$$

sowie wiederum aus der Beziehung $\overline{RP}/\overline{RQ} = b/a$ and due to the aforementioned property $\overline{RP}/\overline{RQ} = b/a$

$$r \sin f = b \sin E = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.20)$$

Die Summe der Quadrate von Gl. (2.19) und (2.20) ergibt dann

By adding the squares of Eq. (2.19) und (2.20) we have

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.21)$$

und nach Einsetzen der elliptischen Bahngleichung (2.9) erhält man die gesuchte Beziehung zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie

and after using the definition of the elliptic orbit (2.9) we have the desired relation between the true anomaly and the eccentric anomaly

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Durch Benutzen der trigonometrischen Beziehung für Doppelwinkel erhält die Beziehung ihre endgültige Darstellung

Finally, using the double angle formulae this relation can be written as

$$\tan \frac{f}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.22)$$

Nach Einsetzen der Beziehung in Gl. (2.18) erhalten wir die sogenannte KEPLER-Gleichung

After substituting the relation into Eq. (2.18) we yield the so-called KEPLER-equation

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E. \quad (2.23)$$

Um die Position des Körpers zur Zeit $M = n(t - \tau)$ zu bestimmen, berechnet man aus der KEPLER-Gleichung (2.23) die entsprechende exzentrische Anomalie E und bestimmt hiermit den Abstand r mittels Eq. (2.21).

To determine the body's position at the time $M = n(t - \tau)$ one finds the eccentric anomaly E from the KEPLER-equation (2.23) and use then Eq. (2.21) to find the distance r .

2.2.4 Wie löst man die KEPLER-Gleichung?

How to solve KEPLER's equation?

Die KEPLER-Gleichung ist transzendental, weshalb geschlossene analytische Lösungen nicht gefunden werden können. Es wurden aber zahlreiche iterative und numerische Lösungsverfahren entwickelt. Betrachten wir zuerst den iterativen Ansatz

KEPLER's equation cannot be solved analytically since this equation is transcendental. However, a large number of iterative and numerical solutions have been developed. As an example for an iterative method we consider the ansatz

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i \quad i = 0 \dots \infty$$

und dem Startwert $E_0 = M$. Wir nutzen die Winkelbeziehung

with $E_0 = M$ as the first approximation. Using the formula

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

sowie die Taylorreihen

and the series expansions

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

und finden eine Sinus-FOURIERreihe für E

we obtain a FOURIER sine series for E .

$$\begin{aligned} E_0 &= M \\ E_1 &= M + e \sin M \\ E_2 &= M + e \sin(M + e \sin M) \approx M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(2M) + O(e^3) \\ E_3 &= M + (e - \frac{1}{8}e^3) \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(2M) + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M + O(e^4) \\ &\vdots \\ E_\infty &= M + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(e) \sin(nM). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Koeffizienten b_n der Sinus-FOURIERreihe für eine ungerade Funktion $f(x)$ haben die Darstellung

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx,$$

weshalb für $f(M) = E(M) - M = e \sin M$ folgt

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e \sin E \sin nM dM = \frac{2}{n\pi} \left\{ \underbrace{-e \sin E \cos nM \Big|_0^\pi}_0 - \underbrace{\int_0^\pi \cos nM dM}_0 + \int_0^\pi \cos nM dE \right\},$$

und nach Ersetzen von M durch die KEP-
LERgleichung

$$b_n = \frac{2}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - ne \sin E) dE = \frac{2}{n} J_n(ne).$$

$J_n(x)$ ist die n -te *Besselfunktion*

$J_n(x)$ is the n -th *Bessel function*

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad n \in \mathbb{N},$$

deren ersten Ordnungen lauten:

The first couple of orders are

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + O(x^6), \\ J_1(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 + O(x^7), \\ J_2(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + O(x^6), \\ J_3(x) &= \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{786}x^5 + O(x^7). \end{aligned}$$

Unter Benutzung von Gl.(2.24) findet man nützliche Reihendarstellungen von weiteren, häufig genutzten Ausdrücken. Im weiteren werden einige von ihnen ohne Herleitung angegeben (diese findet man beispielsweise in Murray & Dermott (1999)):

Using Eq.(2.24) one obtains a number of useful series expansions of frequently used expressions. Here, we just list some of them without any reasoning (the interested reader is referred to Murray & Dermott (1999)):

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2M) + \frac{3}{8}e^3(\cos M - \cos 3M) + O(e^4) \quad (2.25)$$

$$f - M = 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{1}{4}e^3 \left(\frac{13}{3} \sin 3M - \sin M \right) + O(e^4) \quad (2.26)$$

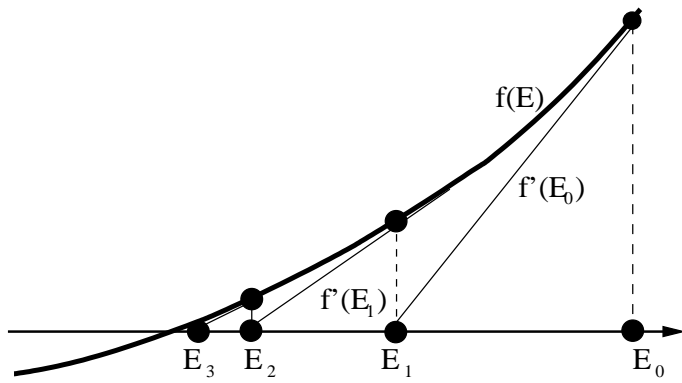


Figure 2.4: *Newton-Raphson*-Verfahren zur numerischen Lösung von $f(E) = 0$. Der verbesserte Wert E_{i+1} ist dann durch den Schnittpunkt der Tangente in $f(E_i)$ mit der Abzisse gegeben. Offensichtlich konvergiert das Verfahren für hinreichend gutmütige Funktionen $f(E)$ (wie die KEPLER-Gleichung) rasch gegen die gesuchte Nullstelle.

Newton-Raphson method for solving $f(E) = 0$ numerically. The improved solution E_{i+1} is given by the point of intersection of the tangent at $f(E_i)$ with the abscissa. Obviously the method converges rapidly for reasonable functions $f(E)$ (as the KEPLER equation).

$$\begin{aligned} \sin f &= \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) \\ &\quad + e^3 \left(\frac{4}{3} \sin 4M - \frac{7}{6} \sin 2M \right) + O(e^4) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \cos f &= \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9}{8}e^2(\cos 3M - \cos M) \\ &\quad + \frac{4}{3}e^3(\cos 4M - \cos 2M) + O(e^4). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Bitte beachten Sie, daß die Fourier-Reihe (2.24) für $e > 0.6627434$ divergent ist. Numerische Verfahren leiden nicht unter dieser Beschränkung. Als bekanntestes (und auch einfachstes) Beispiel betrachten wir das *Newton-Raphson*-Verfahren (siehe Abb. 2.4), welches die Lösung E_∞ als Nullstelle von $f(E) = E - e \sin E - M = 0$ ermittelt. Nach Entwicklung von $f(E)$ um die Stelle E_i in eine *Taylor*-Reihe

$$f(E_i + \delta) \approx f(E_i) + f'(E_i)\delta + O(\delta^2) = 0$$

findet man unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(\delta^2)$ das iterative Schema

$$E_i + \delta = E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} \quad i = 1 \dots \infty. \quad (2.29)$$

Abb. 2.4 veranschaulicht die geometrische Interpretation dieser Methode.

Please keep in mind that the Fourier series (2.24) diverges for values of $e > 0.6627434$. Numerical methods, however, are not affected by this limitation. Now we discuss the *Newton-Raphson* method as the most prominent (and the most simple) example of a numerical solution. Here, we express the solution E_∞ as the root of $f(E) = E - e \sin E - M = 0$. By expanding $f(E)$ into a *Taylor* series around E

and by ignoring terms beyond the linear one obtains the iterative scheme

Fig. 2.4 depicts the geometrical interpretation of this method.

2.2.5 Berechnung von Ort und Geschwindigkeit mittels f - und g -Funktionen

Calculation of position and velocity by f and g functions

Wir wollen nun eine weitere Darstellung des Ortes \mathbf{r} und der Geschwindigkeit \mathbf{v} für die elliptische Bahn betrachten. Es seien $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ und $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ der Ort und die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_0 . Dann existieren skalare Funktionen $f(t, t_0)$ und $g(t, t_0)$, daß

$$r_x(t) = f(t, t_0)r_{x0} + g(t, t_0)\dot{r}_{x0} \quad \text{und} \quad r_y(t) = f(t, t_0)r_{y0} + g(t, t_0)\dot{r}_{y0},$$

und folglich

$$f(t, t_0) = \frac{r_x\dot{r}_{y0} - r_y\dot{r}_{x0}}{r_{x0}\dot{r}_{y0} - r_{y0}\dot{r}_{x0}} \quad \text{und} \quad g(t, t_0) = \frac{r_y r_{x0} - r_x r_{y0}}{r_{x0}\dot{r}_{y0} - r_{y0}\dot{r}_{x0}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich unter Nutzung von $\cos f = r_x/r$ und $\sin f = r_y/r$ als Funktionen der exzentrischen Anomalie E ausdrücken:

$$f(t, t_0) = ar_0^{-1} [\cos(E - E_0) - 1] + 1, \quad (2.30)$$

$$g(t, t_0) = n^{-1} [\sin(E - E_0) - (E - E_0)] + t - t_0. \quad (2.31)$$

Der Zusammenhang zwischen der f - und g -Funktion und der Bahngeschwindigkeit ist

$$v_x(t) = \dot{f}(t, t_0)r_{x0} + \dot{g}(t, t_0)v_{x0} \quad \text{und} \quad v_y(t) = \dot{f}(t, t_0)r_{y0} + \dot{g}(t, t_0)v_{y0}$$

mit

$$\dot{f}(t, t_0) = -a^2 n (rr_0)^{-1} \sin(E - E_0), \quad (2.32)$$

$$\dot{g}(t, t_0) = ar^{-1} [\cos(E - E_0) - 1] + 1. \quad (2.33)$$

Der große Vorteil der f - und g -Funktionen ist, daß sie *unabhängig von der Wahl des Referenzsystems* sind.

Now we consider a simpler way to calculate the position and the velocity of an object in Keplerian motion. Let $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ and $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ be the position vector and the velocity vector of the object at time t_0 . Then there are scalar functions $f(t, t_0)$ and $g(t, t_0)$, so that we can write

and hence

Using $\cos f = r_x/r$ and $\sin f = r_y/r$ the equations given above can be expressed as functions of the eccentric anomaly E

The relationship between the f and g function and the velocity is

with

The major advantage of the f and g function is that they are *independent of the reference system* used to express the vectors.

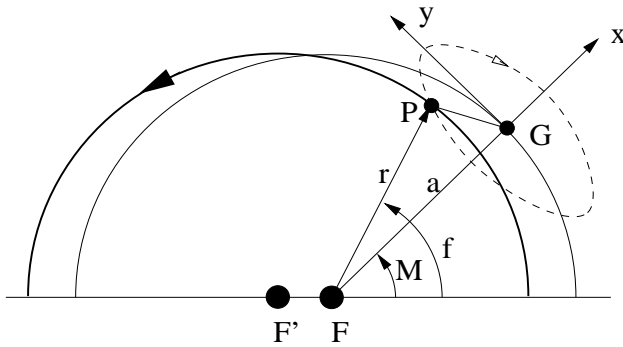


Figure 2.5: Das Gyrationszentrum G bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit n auf dem Kreis um den Ellipsenbrennpunkt F. In der Gyrationszentrumsnäherung rotiert dann der Körper P auf einer 2:1-Ellipse um G.

The guiding centre G moves on a circle centred on the focus F of the elliptical orbit. In the guiding centre approximation, the body at P rotates with constant angular velocity n around G on a 2:1 ellipse.

2.2.6 Gyrationszentrumsnäherung

Die Behandlung der KEPLERbahn ist recht umständlich. Ist die Exzentrizität der untersuchten Bahn jedoch nur sehr klein, ermöglicht die *Gyrationszentrumsnäherung* eine erhebliche mathematische Vereinfachung des Problems. Diese Näherung ist eng mit der Ptolemäischen Beschreibung der Planetenbewegung durch versetzte Kreise verwandt.

Der Körper bewege sich auf einer schwachexzentrischen Ellipse mit der großen Halbachse a um den Brennpunkt F. Wir führen nun ein Koordinatensystem ein, welches auf einer Kreisbahn mit dem Radius a um F mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit gegeben durch die mittlere Bewegung n des Körpers rotiert (siehe Abb. 2.5). Den Ursprung dieses Koordinatensystems bezeichnet man als *Gyrationszentrum* G. In diesem System hat der Körper die Koordinaten

$$x = r \cos(f - M) - a \approx -ae \cos M \quad \text{und} \quad y = r \sin(f - M) \approx 2ae \sin M,$$

wobei wir die erste Ordnung der elliptische Entwicklung (2.26) für $f - M$ benutzt haben.

Guiding centre approximation

Calculating KEPLER orbits is a circumstantial task. For the description of slightly eccentric orbits, however, it is useful to resort to approximations as the *guided centre approximation* since the involved mathematics is much simpler. The approximation is closely related to Ptolemy's description of the orbital motion by displaced circles.

Suppose an object moving in a slightly elliptic orbit with the semi-major axis a about the focus F . Now we introduce a reference frame that rotates about F in a circle of radius a with a constant angular velocity equal to the object's mean motion n (see Fig. 2.5). The origin G of this reference frame is called the *guiding centre*. The coordinates of the body in this reference frame are

where we used the linear terms of the elliptic expansion (2.26) for $f - M$.

Hieraus folgt, daß

Hence

$$\frac{x^2}{(ae)^2} + \frac{y^2}{(2ae)^2} \approx 1.$$

Dies bedeutet, daß sich der Körper in dieser Näherung auf einer Ellipse mit der großen Halbachse $2ae$ und der kleinen Halbachse ae mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n um G bewegt. Die Näherung ist von der Ordnung e .

This result means that the body moves in an ellipse of semi-major axis $2ae$ and semi-minor axis ae about G with constant angular velocity n . This approximation is of the order e .

2.2.7 Die Bahnelemente

The orbital elements

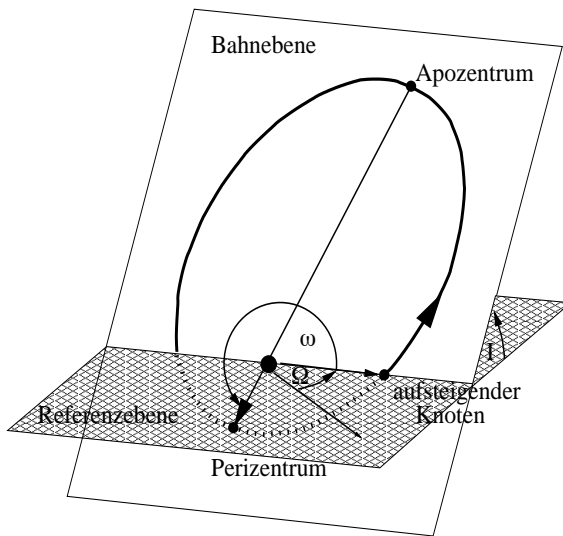


Figure 2.6: Zur Definition der Parameter einer 3D-Bahn bezüglich einer Referenzebene. Die Schnittlinie der Bahnebene mit der Referenzebene ist die Knotenlinie, der Winkel I zwischen Referenzebene und Bahnebene ist die *Inklination*, der Winkel ω zwischen Knotenlinie und Perizentrum ist *Argument des Perizentrums* und der Winkel Ω zwischen der Referenzrichtung und der Knotenlinie ist die *Länge des aufsteigenden Knotens*.

Definition of the parameters of a 3D orbit with respect to a reference plane. The line of intersection between the reference plane and the orbital plane is called *line of nodes*, the angle I between the reference plane and the orbital plane is the *inclination*, the angle ω between the line of nodes and the pericentre is the *argument of the pericentre*, and the angle Ω between the reference line and the line of nodes is the *longitude of the ascending node*.

Da sich die Planeten nicht in einer gemeinsamen Ebene bewegen, müssen deren Bahnen im dreidimensionalen Raum bezüglich einer Referenzebene beschrieben werden. Hierzu werden 6 Bahnelemente benötigt (zur geometrischen Definition siehe Abb. 2.6); für eine elliptische Bahn sind das a , e , I , Ω , ω und der Zeitpunkt des Perizentrumdurchgangs τ .

Since the orbital planes of the planets do not coincide we have to describe their orbits in space with respect to a common reference plane. There are 6 orbital elements needed to specify an elliptic orbit in space: a , e , I , Ω , ω and the time of pericentre passage τ (their definitions are given in Fig. 2.6).

Für den Fall eines *heliocentrischen* Koordinatensystems wählt man üblicherweise die *Eklip-tik* (d.h. die Bahnebene der Erde) als Referenzebene und den *Frühlingspunkt* als Referenzrichtung. Die Position des Körpers auf einer elliptischen Bahn in dem räumlichen Koordinatensystem ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin(\omega + f) \sin I \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

In case of a heliocentric coordinate system one usually chooses the *ecliptic* (the plane of the Earth's orbit) as reference plane and the direction of the *vernal equinox* as reference line. The coordinates of a body moving in an elliptic orbit in the reference system are

2.3 Bahnstörungen

Perturbed orbits

Häufig möchte man den Einfluß von Störkräften auf die Bahn eines Körpers untersuchen. Im Rahmen des 2-Körper-Problems bestimmen der Ort und die Geschwindigkeit des Körpers die 6 Bahnelemente eindeutig. Man stelle sich nun vor, daß eine Störkraft kurzzeitig auf den Körper einwirkt, wodurch die Position und Geschwindigkeit des Körpers etwas verändert wird. Offensichtlich wird sich der Körper danach auf einer neuen Bahn mit neuen, konstanten Bahnelementen, den sogenannten *oskulierenden Elementen* (von lateinisch *osculare* – küssen), bewegen. Die folgende Ableitung der oskulierenden Elemente folgt der Arbeit von J. Burns 1976, *Am. J. Phys.* **44**.

In many applications in solar system dynamics additional small forces are acting on a body moving in an approximately elliptical orbit. Such forces might be considered as perturbations. Recall that in the framework of the 2-body-problem the 6 orbital elements of an object are uniquely constrained by its position and velocity. Now suppose that an perturbing force is acting shortly on the body causing a small change of its velocity and position. Afterwards, the body is moving in a new orbit characterised by new orbital elements, the so-called *osculating elements* (from Latin *osculare* – to kiss). The deviation of the osculating elements given here is based upon the paper by J. Burns 1976, *Am. J. Phys.* **44**.

$\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ seien Einheitsvektoren parallel und normal zum Radiusvektor \mathbf{r} und $\hat{\mathbf{z}}$ sei der Einheitsvektor senkrecht zur Bahnebene. Weiterhin sei die kleine störende Kraft $d\mathbf{F} = R\hat{\mathbf{r}} + T\hat{\boldsymbol{\theta}} + Z\hat{\mathbf{z}}$. Die Änderung der reduzierten Energie $C = E/m$ ist dann unter Benutzung von Gl. (2.12)

Let $\hat{\mathbf{r}}$ and $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ denote unit vectors parallel and perpendicular to the radius vector \mathbf{r} and $\hat{\mathbf{z}}$ denotes the unit vector perpendicular to the orbital plane. Furthermore, let $d\mathbf{F} = R\hat{\mathbf{r}} + T\hat{\boldsymbol{\theta}} + Z\hat{\mathbf{z}}$ be the small disturbing force. Using Eq. (2.12) the change of the reduced energy $C = E/m$ is

$$\dot{C} = \dot{\mathbf{r}}d\mathbf{F} = \dot{r}R + r\dot{\boldsymbol{\theta}}T = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a}.$$

Die Ausdrücke für \dot{r} und $\dot{\theta} = \dot{f}$ in obiger Gleichung findet man durch Differenzieren von Gl. (2.9) und erhält

$$\dot{a} = 2 \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} (Re \sin f + T(1 + \cos f)). \quad (2.35)$$

Das bedeutet, daß nur Kräfte parallel zur Bahnebene die große Halbachse verändern können. Aus Gl. (2.12) und (2.16) ergibt sich, daß

The expressions for \dot{r} and $\dot{\theta} = \dot{f}$ in the equation above are obtained by differentiating Eq. (2.9), and thus

This implies that only forces acting parallel to the orbital plane can change the semi-major axis. From Eq. (2.12) and (2.16) follows that

$$e^2 = 1 + 2h^2 C \mu^{-2}, \quad (2.36)$$

und deshalb berechnet sich die Änderung der Exzentrizität

and hence, the rate of change of eccentricity calculates as

$$\dot{e} = \frac{e^2 - 1}{2e} \left(2 \frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{C}}{C} \right). \quad (2.37)$$

Die Änderung des reduzierten Drehimpulses \mathbf{h} entspricht dem angelegten Moment, d.h. $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = rT\hat{\mathbf{z}} - rN\hat{\theta}$. Da der Term $rN\hat{\theta}$ nur die Richtung von \mathbf{h} verändert, aber dessen Länge erhält, folgt $\dot{h} = rT$. Nach Einsetzen der gefundenen Ausdrücke für \dot{h} , C , \dot{C} und \dot{a} in Gl. (2.37) findet man

The rate of change of the reduced angular momentum equals the applied moment, i.e. $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = rT\hat{\mathbf{z}} - rN\hat{\theta}$. The $rN\hat{\theta}$ component only affects the direction of \mathbf{h} , but not its magnitude, what implies $\dot{h} = rT$. After substituting the found expressions for \dot{h} , C , \dot{C} and \dot{a} into Eq. (2.37) one yields

$$\dot{e} = (a\mu^{-1}(1-e^2))^{1/2} (R \sin f + T(\cos f + \cos E)). \quad (2.38)$$

Folglich kann auch die Exzentrizität nur durch Kräfte parallel zur Bahnebene verändert werden. Wir benötigen nun die Komponenten von \mathbf{h}

Thus, as for a the eccentricity can only be changed by forces parallel to the orbital plane. We now need the components of \mathbf{h}

$$h_x = +\text{sign}(h_z) h \sin I \sin \Omega \quad (2.39)$$

$$h_y = -\text{sign}(h_z) h \sin I \cos \Omega \quad (2.40)$$

$$h_z = h \cos I \quad (2.41)$$

sowie von $\dot{\mathbf{h}}$

and of $\dot{\mathbf{h}}$

$$\dot{h}_x = r(T \sin I \sin \Omega + N \sin(\omega + f) \cos \Omega + N \cos(\omega + f) \cos I \sin \Omega) \quad (2.42)$$

$$\dot{h}_y = r(-T \sin I \cos \Omega + N \sin(\omega + f) \sin \Omega - N \cos(\omega + f) \cos I \sin \Omega) \quad (2.43)$$

$$\dot{h}_z = r(T \cos I - N \cos(\omega + f) \sin I). \quad (2.44)$$

im Referenzkoordinatensystem (X, Y, Z) . Die Ableitung von Gl. (2.39) ist

$$\dot{I} = \frac{\dot{h}/h - \dot{h}_z/h_z}{\sqrt{(h/h_z)^2 - 1}}$$

und nach Einsetzen der Gln. (2.42 - 2.44) erhält man die Beziehung für die Änderung der Inklination

$$\dot{I} = \frac{rN \cos(\omega + f)}{h}. \quad (2.45)$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die Inklination nur durch Kräfte normal zur Bahnebene verändert werden kann. Der Quotient von Gl. (2.42) und (2.43) liefert eine Beziehung für die Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = \arctan(-h_x/h_y)$. Dessen Änderung ist dann

$$\dot{\Omega} = \frac{h_x \dot{h}_y - h_y \dot{h}_x}{h^2 - h_z^2} = \frac{\sin \Omega \dot{h}_y + \cos \Omega \dot{h}_x}{h \sin I}.$$

Nach Einsetzen von Gl. (2.9), (2.16), (2.42) und (2.43) erhält man die endgültige Beziehung für $\dot{\Omega}$

$$\dot{\Omega} = \frac{rN \sin(\omega + f)}{h \sin f}. \quad (2.46)$$

Zur Herleitung des Ausdrucks für $\dot{\omega}$ ersetzen wir in der Bahngleichung (2.9) e durch Gl. (2.36) und h durch Gl. (2.16) und erhalten

$$h^2 = \mu R \left(1 + \sqrt{1 + 2Ch^2 \mu^{-2}} \cos(\theta - \omega) \right) \quad \text{mit} \quad \theta = \omega + f. \quad (2.47)$$

Die zeitliche Änderung von Gl. (2.47) aufgrund der äußeren Kraft $d\mathbf{F}$ ist

expressed within the reference coordinate system (X, Y, Z) . Differentiating Eq. (2.39) gives

and after substituting Eqn. (2.42 - 2.44) one yields the rate of change of the inclination

This equation implies that the inclination can only be changed by forces perpendicular to the orbital plane. Dividing Eq. (2.42) by Eq. (2.43) yields an relation for the longitude of the ascending node $\Omega = \arctan(-h_x/h_y)$. Its rate of change is then

By substituting the Eqn. (2.9), (2.16), (2.42), and (2.43) one finally obtains the relation for $\dot{\Omega}$

To derive an expression for $\dot{\omega}$ we express in the orbit equation (2.9) e by Eq. (2.36) and h by Eq. (2.16) and have

The time derivative of Eq. (2.47) due to the applied disturbing force $d\mathbf{F}$ is

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= 2h\dot{h} \frac{r^{-1} + C(e\mu)^{-1} \cos(\theta - \omega)}{e\mu \sin(\theta - \omega)} + \dot{\theta} - \frac{e^2 \mu^2 \dot{C} \cot(\theta - \omega)}{h^2} \\ &= e^{-1} \sqrt{a\mu^{-1}(1 - e^2)} \left(-R \cos f + T \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) - \dot{\Omega} \cos I. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die Gleichung für die Änderung des Zeitpunkts des Perizentrumdurchgangs erhält man durch Differenzieren der KEPLER-Gleichung (2.23):

Finally, the equation for the rate of change of the time of pericentre passage is obtained by differentiating KEPLER's equation (2.23):

$$\dot{\tau} = \left[3(\tau - t) \sqrt{\frac{a}{\mu(1-e^2)}} e \sin f + a^2 \mu^{-1} (1-e^2) \left(\frac{2}{1+e \cos f} - \frac{\cos f}{e} \right) \right] R + \left[3(\tau - t) \sqrt{\frac{a}{\mu(1-e^2)}} (1+e \cos f) + a^2 \mu^{-1} (1-e^2) \left(\frac{\sin f (2+e \cos f)}{e(1+e \cos f)} \right) \right] T. \quad (2.49)$$

Beachten Sie, daß auch der Zeitpunkt des Perizentrumdurchgangs nur durch Kräfte parallel zur Bahnebene beeinflußt werden kann.

Note that also the time of pericentre passage can only be changed by forces within the orbital plane.

2.4 Beispiel: Saturns E-Ring

Example: Saturn's E ring

Saturns E-Ring (Abb. 2.7) ist das größte Ringsystem des Sonnensystems. Die radiale Ausdehnung des Rings ist zwischen 3 bis 8 R_S (Saturnradius, $R_S = 60330\text{km}$), die optische Tiefe zeigt ein ausgeprägtes Maximum in der Umgebung der Bahn des Eismondes *Enceladus*. Erstaunlicherweise besteht der E-Ring fast ausschließlich aus $1\mu\text{m}$ großen Teilchen (Showalter, Cuzzi und Larson 1991 *Icarus* **94**). Das Maximum der optischen Tiefe in der Nähe der Enceladus-Bahn deutet darauf hin, daß dieser Mond die Quelle des Rings ist. Allerdings produzieren Eismonde Staubteilchen mit einer breiten Massenverteilung, was erstmal im Widerspruch zu der beobachteten engen Massenverteilung steht.

Saturn's E ring is the largest ring system of the solar system. The radial extent of the ring is from 3 to 8 R_S (Saturn's radius, $R_S = 60330\text{km}$). The optical depth shows a pronounced maximum around the orbit of the icy moon *Enceladus*. Remarkably, the ring is composed mainly of particles with $1\mu\text{m}$ radii (Showalter, Cuzzi & Larson 1991 *Icarus* **94**). The maximum of the optical depth in the vicinity of Enceladus' orbit hints that this moon is the source of the ring particles. Icy moons, however, are known to produce particles with a broad mass range, what seems to be a contradiction with the observed narrow mass distribution.

1991 schlugen Horányi, Burns und Hamilton (*Icarus* **97**) einen Mechanismus vor, der zumindest einige Aspekte des E-Rings erklären kann.

In 1991 Horányi, Burns & Hamilton (*Icarus* **97**) proposed a mechanism explaining at least some aspects of the E ring.

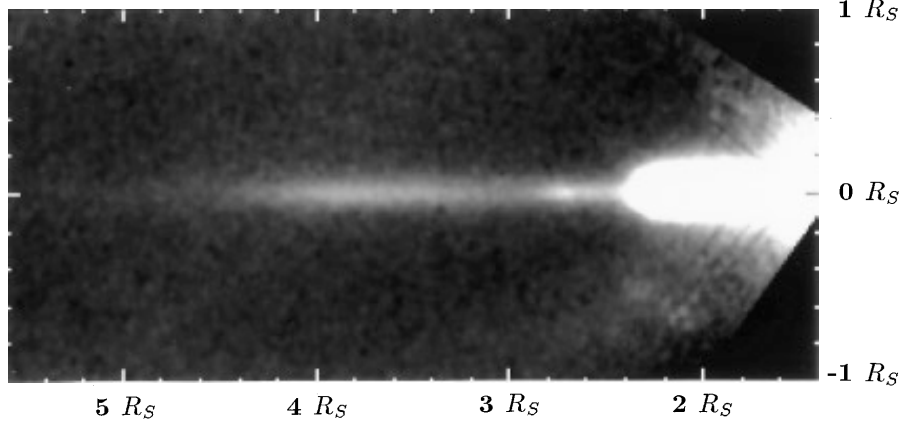


Figure 2.7: Saturns E- und G-Ring aufgenommen mit dem Keck-Teleskop bei einer Wellenlänge von $2.26\mu\text{m}$ (de Pater u. Mit. 1996, *Icarus* **121**).

Image of Saturn's E and G rings, taken with the Keck telescope at a wavelength of $2.26\mu\text{m}$ (de Pater et al. 1996, *Icarus* **121**).

Sie betrachteten die Teilchenbewegung innerhalb der Ringebene (d.h. $I = 0$), und betrachteten als Störkräfte das Gravitationsmoment $J_2 = 0.01667$ aufgrund der Abflachung des Saturns, den Strahlungsdruck der Sonne sowie die Lorentzkraft. Da nur die Form der Bahn untersucht werden soll, sind zu ihrer Beschreibung 3 oskulierende Elemente ausreichend: die große Halbachse a , die Exzentrizität e und die Länge des Perizentrums ω . Für schwachexzentrische Bahnen vereinfachen sich die Gl. (2.35), (2.37) und (2.46) zu

They restricted the motion of the ring particles to the ring plane (i.e. $I = 0$), and considered only forces due to Saturn's oblateness ($J_2 = 0.01667$), due to solar radiation pressure, and the Lorentz force as perturbations. Since we are only interested in the shape of the orbits 3 osculating elements are sufficient to describe the evolution of a ring particle orbit: the semi-major axis a , the eccentricity e , and the longitude of the pericentre ω . For small eccentricities, the Eq. (2.35), (2.37) and (2.46) can be simplified as

$$\langle \dot{a} \rangle = 0 \quad (2.50)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = \beta \sin \omega \quad (2.51)$$

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \frac{\beta}{e} \cos \omega + \gamma. \quad (2.52)$$

Das Symbol $\langle \rangle$ deutet an, daß die Ausdrücke über einen Umlauf gemittelt wurden. β ist eine Funktion des spezifischen Drehimpulses h und des Strahlungsdrucks, und γ ist die Präzessionsrate des Perizentrums in Abwesenheit des Strahlungsdrucks. Gl. (2.50) besagt, daß a erhalten bleibt (das ist auch nicht weiter verwunderlich, da alle Kräfte konservativ sind).

The symbol $\langle \rangle$ indicates that the expressions were averaged over one orbital period. β is a function of the specific angular momentum h and of the radiation pressure. γ is the rate of precession of the pericentre in absence of radiation pressure. Eq. (2.50) implies the conservation of a (what is no surprise since all perturbing forces are conservative.)

3 Das beschränkte 3-Körper-Problem The restricted Three-Body-Problem

3.1 Bewegungsgleichungen Equations of motion

Die Bewegung zweier Körper um ihr Massenzentrum wird durch die KEPLERtheorie geschlossen dargestellt; für die gravitativ gebundene Bewegung dreier Körper ist dies allgemein nicht möglich. Dies gelingt nicht einmal für Probleme, in welchen die Masse des dritten Körpers vernachlässigt werden darf und somit die Bewegung der beiden anderen Körper von diesem unbeeinflusst ist. Unter der zusätzlichen Annahme, daß sich die beiden "massiven" Körper *auf Kreisbahnen um ihren Massenmittelpunkt* bewegen, wird das Problem hinreichend vereinfacht – wir sprechen dann vom *beschränkten Dreikörperproblem*.

Um die Formulierung des Problems zu vereinfachen, definieren wir die Masseneinheit so, daß $\mu = G(m_1 + m_2) = \mu_1 + \mu_2 = 1$ gilt. Die Bewegung von m_1 und m_2 wird durch das Zweikörperproblem beschrieben; folglich rotieren sie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $n = a^{-2/3}$ um ihren Massenmittelpunkt, wobei a ihr Abstand ist (siehe Kap. 2.2.2).

The KEPLER theory provides a closed solution for the motion of two bodies about their common centre of mass. It is impossible to achieve such a solution for the problem of the gravitational interaction of three bodies. In fact, it is even not possible to obtain a closed solution when the third is small enough to neglect its influence onto the motion of the two other masses. To make progress, one often simplifies the problem further by assuming that the two "massive" bodies move in coplanar, circular orbits about their centre of mass. This is called the *circular, restricted, three-body problem*.

For the sake of simplicity we chose the mass unit such that $\mu = G(m_1 + m_2) = \mu_1 + \mu_2 = 1$. The motion of m_1 and m_2 is given by the *two-body-problem*. Thus, they orbit about their centre of mass at constant angular velocity $n = a^{-2/3}$, where a is the separation of the two bodies (see Sec. 2.2.2).

Es ist deshalb naheliegend, die Bewegung der Masse m_3 in einem um den Massenmittelpunkt mit n rotierenden *synodischen* Koordinatensystem (x, y, z) zu untersuchen, in welchem die Positionen der Massen m_1 und m_2 ortsfest sind. Die x-Achse soll auf der Verbindungslinie von m_1 und m_2 liegen. Weiterhin wählen wir die Längeneinheit so, daß der Abstand der beiden Massenpunkte eins ist. Die Koordinaten von m_1 und m_2 sind dann $(-\mu_2, 0, 0)$ sowie $(\mu_1, 0, 0)$. Durch diese Wahl folgt auch $n = 1$.

Die Bewegungsgleichungen für m_3 im inertialen – *siderischen* – Koordinatensystem (ξ, η, ζ) lauten

Thus, it is natural to consider the motion of m_3 within a coordinate system (x, y, z) rotating at n about the centre of mass. This has the advantage that within the *synodic* coordinate system the locations of m_1 and m_2 are fixed. The direction of the abscissa is chosen to be aligned with the line connecting m_1 and m_2 . We define the length unit such that the separation of m_1 and m_2 equals 1. Then, the coordinates of the two bodies are $(-\mu_2, 0, 0)$ and $(\mu_1, 0, 0)$. It further follows that $n = 1$.

The equations of motion for m_3 within inertial, *siderial* coordinates (ξ, η, ζ) are

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \quad (3.2)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}, \quad (3.3)$$

wobei r_1 und r_2 die Abstände von m_1 und m_2 zu m_3 sind. Der Zusammenhang zwischen den synodischen und siderischen Koordinaten ist

where r_1 and r_2 are the distances between m_1 and m_3 , and between m_2 and m_3 , respectively. The relation between the siderial and the synodic coordinates is

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Hieraus berechnet man durch zweimaliges Ableiten die Beschleunigungen im siderischen System und findet nach Einsetzen in die Gl. 3.1-3.3

We obtain the accelerations within the sideric system by differentiating this relation twice and find after inserting them into Eqs. 3.1-3.3

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos t - (\ddot{y} - 2\dot{x} - y) \sin t = \left\{ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right\} \cos t + \left\{ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right\} y \sin t \quad (3.5)$$

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin t + (\ddot{y} - 2\dot{x} - y) \cos t = \left\{ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right\} \sin t - \left\{ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right\} y \cos t \quad (3.6)$$

$$\ddot{z} = - \left\{ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right\} z. \quad (3.7)$$

Hieraus erhalten wir:

We yield

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= - \left\{ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right\} && \text{durch Gl. (3.5) } \cdot \cos t + \text{Gl. (3.6) } \cdot \sin t \\ \ddot{y} - 2\dot{x} - y &= - \left\{ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right\} y && \text{durch Gl. (3.6) } \cdot \cos t - \text{Gl. (3.5) } \cdot \sin t. \end{aligned}$$

Wir drücken abschließend die Beschleunigungen als Gradient einer skalaren Funktion (*Pseudopotential*)

If we finally express the accelerations as the gradient of a scalar function (a pseudo potential)

$$U(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}_{\text{Zentrifugalpotential}} + \underbrace{\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}}_{\text{Gravitationspotential}} = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 \quad (3.8)$$

aus und erhalten die Bewegungsgleichungen des beschränkten Dreikörperproblems:

we obtain the equations of motion of the *restricted, circular three-body-problem*

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \partial_x U, \quad (3.9)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = \partial_y U, \quad (3.10)$$

$$\ddot{z} = \partial_z U. \quad (3.11)$$

3.1.1 Das Jacobiintegral

The Jacobi integral

Aufgrund unserer Voraussetzungen vermag m_3 die Bewegung der Massen m_1 und m_2 nicht beeinflussen. Daher ist offensichtlich weder der Energieerhalt noch der Drehimpulserhalt gegeben. Es läßt sich allerdings ein Bewegungsintegral finden, welches dem Energieintegral äquivalent ist. Hierzu multipliziert man Gl. (3.9) mit \dot{x} , Gl. (3.10) mit \dot{y} und Gl. (3.11) mit \dot{z} , addiert die Ergebnisse

Due to our assumption does m_3 not affect the motion of m_1 and m_2 . Consequently, neither the angular momentum nor the energy is conserved. However, it is possible to find an integral of motion corresponding with an energy integral. If we multiply Eq. (3.9) with \dot{x} , Eq. (3.10) with \dot{y} , and Eq. (3.11) with \dot{z} and add the results we get

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \partial_x U \dot{x} + \partial_y U \dot{y} + \partial_z U \dot{z} = \frac{dU}{dt}$$

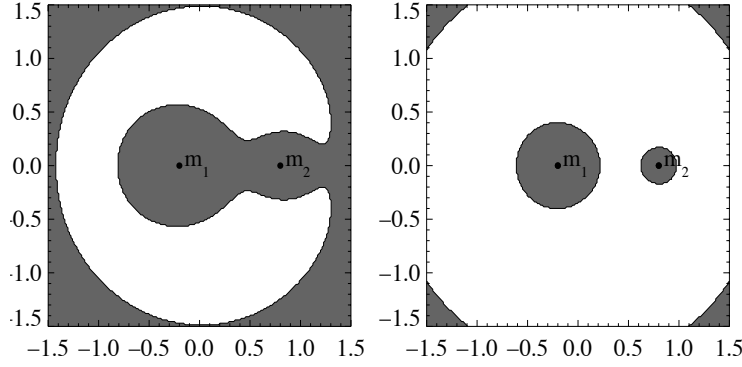


Figure 3.1: Ausgeschlossene Bereiche (weiß) für die Bewegung von m_3 um m_1 und m_2 ($\mu_2 = 0.2$) mit $C_J = 3.5$ (links) und $C_J = 4.5$ (rechts).

Excluded areas (white) for the motion of m_3 about m_1 and m_2 ($\mu_2 = 0.2$) for the cases $C_J = 3.5$ (left) and $C_J = 4.5$ (right).

und erhält nach Integration

and yield after integration

$$v^2 - 2U = -C_J. \quad (3.12)$$

Das JACOBIintegral C_J ist das *einzige* Bewegungsintegral des beschränkten Dreikörperproblems. Folglich kann die Lösung dieses Problems nicht in geschlossener analytischer Form angegeben werden. In siderischen Koordinaten lautet das JACOBIintegral

The JACOBI integral C_J is the *only* integral of the motion of the restricted three-body problem. Thus, the solution of the problem cannot be given in closed form. In the siderial system the JACOBI integral writes as

$$\underbrace{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right)}_{E/2} - 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = -C_J, \quad (3.13)$$

wobei $\mathbf{n} = (0, 0, n)$ und $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ der reduzierte Drehimpulsvektor ist. Da dieser nicht erhalten bleibt, ist auch die reduzierte mechanische Energie E hier keine Erhaltungsgröße.

where $\mathbf{n} = (0, 0, n)$ and $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ is the reduced angular momentum vector. Since \mathbf{h} is not conserved, the reduced mechanical energy E is not conserved as well.

Mittels des JACOBIintegrals kann jedoch untersucht werden, in welchen Bereichen die Masse m_3 prinzipiell angetroffen werden kann. Offensichtlich ist dies nur dort möglich, wo $C_J \geq 2U$ erfüllt ist, da anderenfalls die Geschwindigkeit imaginär ist. Für $v = 0$ beschreibt Gl. (3.12) für einen gegebenen Wert von C_J eine Hyperfläche – die HILLschen Grenzfläche (welche symmetrisch zur x-y-Ebene und zur x-z-Ebene ist) – deren Schnitt mit der Bahnebene die *Nullgeschwindigkeitskurven* definieren.

The JACOBI integral is valuable in gaining information about regions in which the body m_3 can be found. Obviously this is only possible where $C_J \geq 2U$, since otherwise the velocity would be complex. For $v = 0$ and a given value for C_J Eq. (3.12) describes a hyper surface, called HILL's limiting surface (which is symmetric to the x-y-plane and to the x-z-plane). The intersections of the HILL surface with the orbital plane defines the *zero velocity curves*.

Die HILLSchen Grenzflächen trennen Gebiete, innerhalb deren eine Bewegung von m_3 möglich ist, von solchen, wo dies ausgeschlossen ist (siehe Abb. 3.1). Beispielsweise kann in der rechten Abbildung die Probemasse niemals den Bereich um m_1 verlassen und danach m_2 umkreisen.

HILL surfaces are separating regions in which the motion of m_3 is possible from such where m_3 is excluded (see Fig. 3.1). As an example let us consider the left plot. In this case, a test particle orbiting m_1 cannot leave this region and start to orbit m_2 .

3.1.2 Das TISSERAND-Kriterium

The TISSERAND criterion

Im allgemeinen werden die Bahnelemente eines Kometen während eines dichten Vorbeiflugs an einem Planeten verändert; das entsprechende JACOBIintegral bleibt jedoch erhalten. Dies erlaubt es, eine Beziehung zwischen den Bahnelementen eines Kometen vor einem dichten Vorbeiflug und nach dem Vorbeiflug zu finden. In der siderischen Darstellung (3.13) des JACOBIintegrals ersetzen wir $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ durch $h \cos I = \sqrt{a(1-e^2)}$, wobei I die Inklination der Kometenbahnebene bezogen auf die Planetenbahnebene ist. In großer Entfernung vom störenden Planeten wird die Kometenbewegung um die Sonne durch das Zweikörperproblem beschrieben; daher gilt in guter Näherung Gl. (2.13), d.h. $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2/r - 1/a$ als auch $1/r_2 \ll 1$. Aufgrund von $\mu_2 \ll 1$ vernachlässigen wir den μ_2 -Term in Gl. (3.13) und erhalten

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} \cos I \approx \text{const.}$$

Somit sind die Bahnelemente des Kometen nach dem Vorbeiflug näherungsweise mit denen vor dem Vorbeiflug durch das TISSERAND-Kriterium

$$\frac{1}{2a'} + \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos I' = \frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} \cos I \quad (3.14)$$

verknüpft.

The orbital elements of a comet after a close approach to a planet will be changed. Its JACOBI integral, however, will remain unaffected. This property allows to derive a relation between the orbital elements of a comet before and after a close encounter. To achieve this, we replace $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ in Eq. (3.13) by $h \cos I = \sqrt{a(1-e^2)}$, where I is the inclination of the comet's orbital plane with respect to the planet's orbital plane. The motion of the comet about the sun is described by the two-body-problem as long as its distance from the disturbing planet is large. Thus, before (and after) the encounter we are allowed to use Gl. (2.13), i.e. $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2/r - 1/a$. As another consequence of that, $1/r_2 \ll 1$. Since $\mu_2 \ll 1$ we can furthermore neglect the μ_2 term in Eq. (3.13) and have

Thus, the orbital elements of the comet before the encounter are approximately related to its elements after the encounter by

This relation is known as the TISSERAND criterion.

3.1.3 Gleichgewichtspunkte

Equilibrium points

Wir wollen nun solche Konfigurationen untersuchen, in welchen die Bewegung der Masse m_3 im synodischen System stationär ist. Solche Gleichgewichtspunkte werden als LAGRANGEpunkte bezeichnet. Die Stationarität erfordert, daß $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ (die Bewegung sei auf die Bahnebene beschränkt). Die Bewegungsgleichungen (3.9) und (3.10) lauten dann

$$\nabla U = 0, \quad (3.15)$$

und nach Berechnung der partiellen Ableitungen des Potentials

and by evaluating the partial derivatives of the potential we have

$$\mu_1(1 - r_1^{-3})(x + \mu_2) + \mu_2(1 - r_2^{-3})(x - \mu_1) = 0 \quad (3.16)$$

$$\mu_1(1 - r_1^{-3})y + \mu_2(1 - r_2^{-3})y = 0. \quad (3.17)$$

Wir untersuchen zuerst die triviale Lösung $1 - r_1^{-3} = 1 - r_2^{-3} = 0$. Hieraus folgt dann, daß $r_1 = r_2 = 1$. Daher beschreibt diese Lösung zwei Gleichgewichtspunkte, welche jeweils mit m_1 und m_2 ein *gleichseitiges* Dreieck bilden. Ihre Koordinaten erhält man aus der Definition von r_1 und r_2

At first we consider the trivial solution $1 - r_1^{-3} = 1 - r_2^{-3} = 0$, so that $r_1 = r_2 = 1$. Thus, this solution describes two equilibrium points each forming a *equilateral triangle* with m_1 and m_2 . Using the definitions for r_1 and r_2

$$r_1^2 = 1 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = 1 = (x - \mu_1)^2 + y^2, \quad (3.18)$$

woraus folgt

we get the coordinates of the two points

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2 \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.19)$$

Diese LAGRANGEpunkte bezeichnet man als *Dreieckspunkte* L_4 und L_5 (üblicherweise nennt man den führenden Dreieckspunkt L_4). Es existieren keine weiteren LAGRANGEpunkte außerhalb der x-Achse.

Those LAGRANGIAN points are known as the *triangular points* L_4 and L_5 (by convention the leading point is denoted by L_4). There are no other LAGRANGIAN points off the x-axis.

Wir suchen nun mögliche Gleichgewichtspunkte auf der x -Achse. Hierfür existieren drei mögliche Konfigurationen: zwischen m_1 und m_2 (L_1), rechts von m_2 (L_2) und links von m_1 (L_3).

We now turn to consider equilibrium points lying on the x -axis. There are three possible configurations: between m_1 and m_2 (L_1), outside of m_2 (L_2), and outside of m_1 (L_3).

Im L_1 gilt $r_1 + r_2 = 1$ und deshalb $r_1 = x + \mu_2$ und $r_2 = -x + \mu_1$. Aus Gl. (3.16) folgt dann die Beziehung

At the L_1 we have $r_1 + r_2 = 1$ and thus $r_1 = x + \mu_2$ and $r_2 = -x + \mu_1$. From Gl. (3.16) follows then the relation

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{1 - r_2 - \frac{1}{3}r_2^3}{(1 + r_2 + r_2^2)(1 - r_2)^3},$$

welche näherungsweise durch

which is approximately solved by

$$r_2 = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5), \quad \alpha^3 = \frac{\mu_2}{3\mu_1} \quad (3.20)$$

gelöst wird.

Im L_2 gilt $r_1 - r_2 = 1$ und deshalb $r_1 = x + \mu_2$ und $r_2 = x - \mu_1$. Aus Gl. (3.16) folgt dann die Beziehung

At the L_2 we have $r_1 - r_2 = 1$ and thus $r_1 = x + \mu_2$ and $r_2 = x - \mu_1$. From Gl. (3.16) follows then the relation

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{1 + r_2 + \frac{1}{3}r_2^3}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)},$$

welche näherungsweise durch

which is approximately solved by

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \quad (3.21)$$

gelöst wird.

Im L_3 gilt $r_2 - r_1 = 1$ und deshalb $r_1 = -x - \mu_2$ und $r_2 = -x + \mu_1$. Aus Gl. (3.16) folgt dann die Beziehung für r_1

At the L_3 we have $r_2 - r_1 = 1$ and thus $r_1 = -x - \mu_2$ and $r_2 = -x + \mu_1$. From Gl. (3.16) follows then the relation for r_1

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1 - r_1^3)(1 + r_1)^2}{r_1^3(r_1^2 + 3r_1 + 3)},$$

welche näherungsweise durch

which is approximately solved by

$$r_2 = 2 - \frac{7}{12}\beta + \frac{7}{12}\beta^2 - \frac{13223}{20736}\beta^3 + O(\beta^4), \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (3.22)$$

gelöst wird.

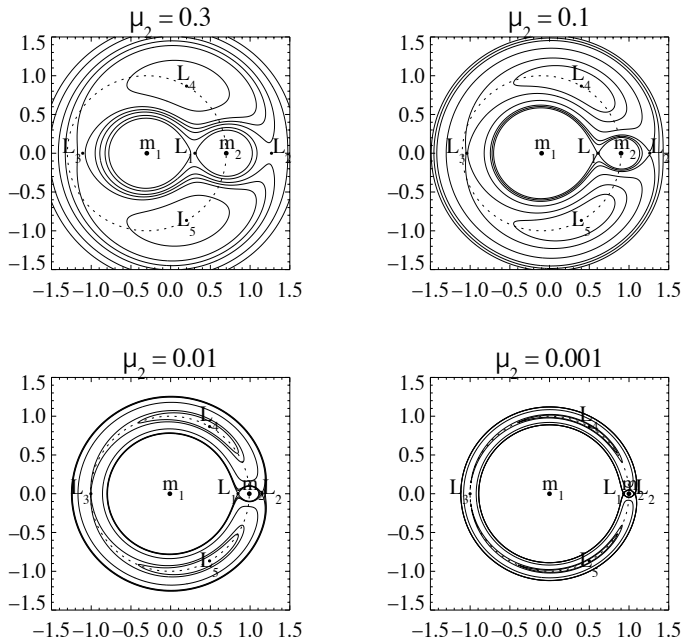


Figure 3.2: Lage der LAGRANGEPunkte für vier verschiedene Werte von μ_2 . Die gepunktete Linie markiert einen Kreis mit dem Radius 1 (d.h. mit dem Abstand zwischen m_1 und m_2) um die Masse m_1 . Die vollen Linien markieren Nullgeschwindigkeitskurven für einige Werte von C_J . Beachten Sie, daß für alle Planeten-Mond-Systeme in unserem Sonnensystem $\mu_2 \leq 0.01$ (außer für Pluto-Charon: $\mu_2 = 0.1$).

Location of the LAGRANGIAN points for 4 values of μ_2 . The dotted line denotes a circle with the radius 1 (i.e. the distance between m_1 and m_2) centred at m_1 . The solid lines mark zero velocity curves for some values of C_J . Please note, that for all planet-moon systems in our solar system $\mu_2 \leq 0.01$ (except for Pluto-Charon: $\mu_2 = 0.1$).

Abbildung 3.2 zeigt die Lage der LAGRANGEPunkte für einige realistische Werte von μ_2 . Für $\mu_2 \rightarrow 0$ nähert sich der L_3 dicht dem Einheitskreis um m_1 an und L_1 und L_2 werden nahezu äquidistant bezüglich m_2 . Diese symmetrische Konfiguration ist für alle Planeten-Mond-Systeme des Sonnensystems gegeben.

In Fig. 3.2 the location of the LAGRANGIAN points is shown for some realistic values of μ_2 . For $\mu_2 \rightarrow 0$ the L_3 is approaching the unit circle centred on the centre of mass. Furthermore, L_1 and L_2 become almost equidistant with respect to m_2 . This symmetric configuration holds for all planet-moon-systems of the solar system.

3.1.4 Stabilität der LAGRANGEPunkte

Wir kennen nun die Lage der Gleichgewichtspunkte; wir wissen jedoch nicht, ob die Bewegung von m_3 in einem solchen Punkt dynamisch stabil ist. Dies kann man ermitteln, indem man die Reaktion von m_3 auf kleine Störungen aus der Gleichgewichtslage untersucht. Hierzu linearisieren wir die Gl. (3.9) und (3.10) in der Umgebung eines Gleichgewichtspunkts.

Stability of the LAGRANGIAN points

We now know the location of the equilibrium points. We do not know, however, whether the motion of m_3 situated at such a point is dynamically stable. Therefore, one needs to examine how the test particle reacts on a small displacement from its equilibrium configuration. To achieve this we linearise the Eq. (3.9) and (3.10) in the vicinity of an equilibrium point.

Der Gleichgewichtspunkt habe die Koordinaten (x_0, y_0) und die kleine Störung sei (X, Y) . Dann folgt nach Entwicklung des Potentials in eine TAYLORreihe und nach Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme

$$\begin{aligned} \underbrace{\ddot{x}_0 - 2\ddot{y}_0}_{0 \text{ wg. Gl. (3.15)}} + \ddot{X} - 2\ddot{Y} = \partial_x U \approx \underbrace{\partial_x U|_0}_{0 \text{ wg. Gl. (3.15)}} + X\partial_x\partial_x U|_0 + Y\partial_y\partial_x U|_0 = XU_{xx} + YU_{xy}, \\ \underbrace{\ddot{y}_0 + 2\ddot{x}_0}_{0 \text{ wg. Gl. (3.15)}} + \ddot{Y} + 2\ddot{X} = \partial_y U \approx \underbrace{\partial_y U|_0}_{0 \text{ wg. Gl. (3.15)}} + Y\partial_y\partial_y U|_0 + X\partial_x\partial_y U|_0 = YU_{yy} + XU_{yx}, \end{aligned}$$

wobei wir die symbolische Schreibweise $\partial_i\partial_j U|_0 = U_{ij}$ benutzt haben. Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für die Störungen formulieren wir nun in ein System erster Ordnung um

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

oder in Matrixschreibweise $\dot{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}$. Um das Differentialgleichungssystem zu entkoppeln, definieren wir nun eine Matrix $\hat{\mathbf{B}}$, deren Spalten durch die Eigenvektoren von $\hat{\mathbf{A}}$ gebildet werden, und vereinbaren weiterhin, daß $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{X}$. Dann läßt sich leicht zeigen, daß gilt

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \mathbf{Z}, \quad (3.24)$$

wobei $\lambda_1 \dots \lambda_4$ die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}$ sind. Gl.(3.24) ist ein System entkoppelter Differentialgleichungen der Form $\dot{Z}_i = \lambda_i Z_i$, deren Lösung elementar ist:

$$Z_i = c_i e^{\lambda_i t} \quad i = 1 \dots 4. \quad (3.25)$$

Die Koeffizienten c_i müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Aufgrund von $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{X}$ ist dann der Lösungsvektor von Gl. (3.23)

The equilibrium point may have the coordinates (x_0, y_0) and the small displacement may denoted by (X, Y) . If we expand the potential into a TAYLOR series and neglect all non-linear terms, we have

where we used the symbolic notation $\partial_i\partial_j U|_0 = U_{ij}$. Now we transform this system of second-order differential equations into a system of first-order differential equations by

or by writing the equations in matrix form $\dot{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}$. To decouple the system of differential equations we define a matrix $\hat{\mathbf{B}}$ whose columns are the eigenvectors of $\hat{\mathbf{A}}$. If we define that $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{X}$ it can be easily shown that

where $\lambda_1 \dots \lambda_4$ are the eigenvalues of $\hat{\mathbf{A}}$. We now have a system of uncoupled differential equations of the type $\dot{Z}_i = \lambda_i Z_i$ which are solved by

The coefficients c_i have to be determined from the initial values. Since of $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{X}$ the solution of Eq. (3.23) is

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_1 e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Jede Komponente des Lösungsvektors ist somit eine Linearkombination der Komponenten von \mathbf{Z} , d.h. von der Form $X_i = \sum d_i \exp(\lambda_i t)$. Die Eigenwerte sind im allgemeinen komplex $\lambda_i = j_i + ik_i$. Die rein imaginären Anteile der Eigenwerte beschreiben Oszillationen um den Gleichgewichtspunkt, während die realen Anteile der Eigenwerte zum exponentielle Wachsen oder Dämpfen der Störungen führt. Hat folglich wenigstens ein Eigenwert einen positiven Realteil, so wird der entsprechende Exponentialterm unbegrenzt wachsen und der Gleichgewichtspunkt ist instabil. *Zur Bestimmung der Stabilität ist es deshalb ausreichend, die Eigenwerte von Gl. (3.23) zu untersuchen.*

Each component of the solution is a linear combination of the components of \mathbf{Z} , i.e. of the form $X_i = \sum d_i \exp(\lambda_i t)$. The eigenvalues can be complex $\lambda_i = j_i + ik_i$. The imaginary part of the eigenvalue results in oscillations about the equilibrium point, while the real part of the eigenvalue causes either an exponential growth or an exponential damping of the perturbation. Thus, if there is an eigenvalue with a positive real part then the corresponding term will grow exponentially, and the equilibrium point is unstable. *Therefore, to determine the stability it is sufficient to examine the eigenvalues of Gl. (3.23).*

Die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}$ sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $|\hat{\mathbf{A}} - \lambda \hat{\mathbf{E}}| = 0$:

The eigenvalues of $\hat{\mathbf{A}}$ are the solutions of the characteristic equation $|\hat{\mathbf{A}} - \lambda \hat{\mathbf{E}}| = 0$:

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0.$$

Dieses Polynom vierten Grades ist zugleich eine quadratische Gleichung für λ^2 , deren Lösungen lauten

This is a quartic equation, but is also a quadratic equation in λ^2 . Hence,

$$\begin{aligned} \lambda_a^2 &= \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) - \frac{1}{2} \left\{ (U_{xx} + U_{yy} - 4)^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_b^2 &= \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) + \frac{1}{2} \left\{ (U_{xx} + U_{yy} - 4)^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Daher sind die Eigenwerte des Problems von der allgemeinen Form $(+\lambda_a, -\lambda_a, +\lambda_b, -\lambda_b)$. Dieses Ergebnis verschärft das obige Stabilitätskriterium, da zu einem Eigenwert $\lambda_i = j_a + ik_a$ mit $j_a < 0$ immer ein zweiter Eigenwert $\lambda_j = -j_a - ik_a$ existiert. Daher erfordert *Stabilität, daß alle Eigenwerte rein imaginär sind.*

Thus, the eigenvalues of our problem are of the general form $(+\lambda_a, -\lambda_a, +\lambda_b, -\lambda_b)$. This finding leads to a even stronger stability criterion as the previous one, since an eigenvalue $\lambda_i = j_a + ik_a$ with $j_a < 0$ will always be matched by a second eigenvalue with $\lambda_j = -j_a - ik_a$. Thus, *stability requires that all eigenvalues are purely imaginary.*

Wir nutzen nun die allgemeine Eigenschaft eines Polynoms, daß das Produkt seiner Wurzeln dem konstanten Glied entspricht:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \lambda_a^2 \lambda_b^2 = U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2.$$

Für rein imaginäre Eigenwerte muß dann $\lambda_a^2 < 0$ und $\lambda_b^2 < 0$ erfüllt sein, woraus wir eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Stabilität erhalten

$$U_{xx} U_{yy} > U_{xy}^2. \quad (3.28)$$

Man kann leicht zeigen, daß diese Bedingung für die *kolinearen* Punkte L_1, L_2 und L_3 für keinen Wert von μ_2 erfüllt wird. *Die kolinearen LAGRANGEpunkte sind instabil.*

Wir untersuchen nun die Stabilität der beiden *Dreieckspunkte* L_4 und L_5 . Für diese sind $U_{xx} = \frac{3}{4}$, $U_{yy} = \frac{9}{4}$ und $U_{xy} = \pm \frac{3}{4}(1 - 2\mu_2)$ und Gl. (3.27) lautet nun

$$\lambda_{a,b} = 2^{-\frac{1}{2}} \left\{ -1 \pm \left\{ 1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

λ_a und λ_b sind nur dann gleichzeitig rein imaginär, falls $0 \leq 1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) \leq 1$. Daher lautet die Stabilitätsbedingung für L_4 und L_5 (im Sinne der hier genutzten *linearen Analyse*), daß

$$\mu_2 \leq 0.0385. \quad (3.30)$$

Wir betrachten abschließend die Bewegung des Testteilchens in der Umgebung eines Dreieckspunkts. Die Lösung von Gl. (3.23) für den stabilen Fall ist

$$\begin{aligned} X(t) &= 2a_1 \cos |\lambda_a|t + 2a_2 \cos |\lambda_b|t - 2b_1 \sin |\lambda_a|t - 2b_2 \sin |\lambda_b|t, \\ Y(t) &= 2c_1 \cos |\lambda_a|t + 2c_2 \cos |\lambda_b|t - 2d_1 \sin |\lambda_a|t - 2d_2 \sin |\lambda_b|t. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Im stabilen Fall ist $\mu_2 \ll 1$, und daher sind nun die Eigenwerte Gl. (3.29) in guter Näherung

$$\lambda_a \approx \left\{ -1 + \frac{27}{4}\mu_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \lambda_b \approx \left\{ -\frac{27}{4}\mu_2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

We now make use of the property of polynomials that the product of its roots equals its constant term. Hence,

If the eigenvalues are purely imaginary we have $\lambda_a^2 < 0$ and $\lambda_b^2 < 0$. From this follows a necessary (but not sufficient) condition for stability.

It can be easily shown that in the colinear case this condition is never fulfilled regardless of the value of μ_2 . *The colinear LAGRANGIAN points are unstable.*

We now examine the stability of the two *triangular* points L_4 and L_5 . In this case $U_{xx} = \frac{3}{4}$, $U_{yy} = \frac{9}{4}$, and $U_{xy} = \pm \frac{3}{4}(1 - 2\mu_2)$. Eq. (3.27) then becomes

λ_a and λ_b are only simultaneously purely imaginary if $0 \leq 1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) \leq 1$. Thus, the stability condition for L_4 and L_5 (in the sense of the applied *linear analysis*) is

Finally, we turn our attention to the motion of the test particle in the vicinity of a triangular point. The stable solution of Eq. (3.23) is given by

Die Gl. (3.31) beschreiben die Überlagerung von zwei Oszillationen um den Gleichgewichtspunkt: eine Oszillation mit der Periode $2\pi/|\lambda_a| \approx 2\pi$ (d.h. nahezu mit der Rotationsperiode von m_2 um m_1) und eine Oszillation mit der Periode $2\pi/|\lambda_b| \gg 2\pi$, die sogenannte *Libration*.

Eq. (3.31) describes the superposition of two oscillations about the equilibrium point: one oscillation with the period $2\pi/|\lambda_a| \approx 2\pi$ (i.e. close to the orbital period of m_2 w.r.t. m_1), and one oscillation with the period $2\pi/|\lambda_b| \gg 2\pi$, called *libration*.

3.1.5 Kaulquappen- und Hufeisenorbits

Tadpole and Horseshoe orbits

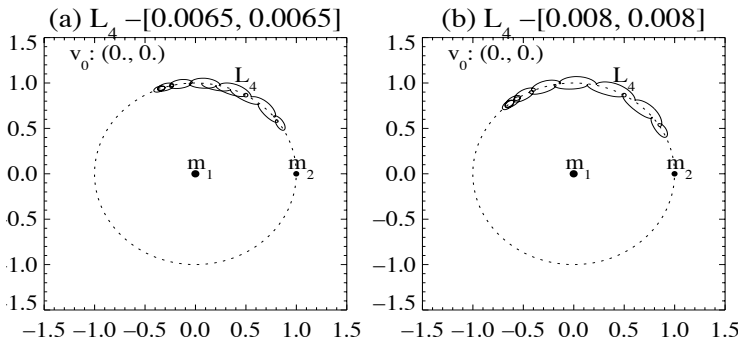


Figure 3.3: Beispiele für quasi-periodische Kaulquappenorbits um den L_4 für $\mu_2 = 10^{-3}$.

Examples for quasi-periodic tadpole orbits about the L_4 for $\mu_2 = 10^{-3}$. The orbits were followed for 15 revolutions of m_2 about m_1 .

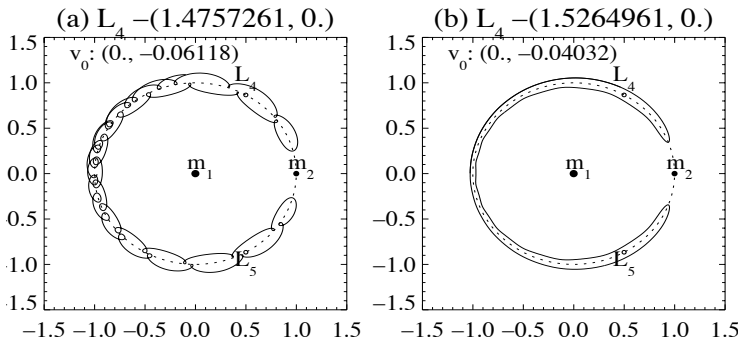


Figure 3.4: Beispiele für quasi-periodische Hufeisenorbits um den L_4 für $\mu_2 = 9.53875 \cdot 10^{-4}$. Es wurden 35 Orbits von m_2 um m_1 verfolgt (Taylor 1981, A&A 103).

Examples for quasi-periodic horseshoe orbits about the L_4 for $\mu_2 = 9.53875 \cdot 10^{-4}$. The orbits were followed for 35 revolutions of m_2 about m_1 (Taylor 1981, A&A 103).