Projet de Modélisation SAT : Solitaire

Maximilien Laenen, Nathan Pembe Lemlin, Axelle Perez.

9 décembre 2021

1 Passage de M à M'

1.1 Définition des variables

La première chose à faire est de définir nos variables.

Une première variable est $X_{i,j,t}$ qui est vraie si, à un instant t, une bille se trouve dans la case (i,j), respectivement les lignes et les colonnes, avec $(i,j) \in \{0,...,n-1\}^2$ et $t \in \{0,...,B-B'\}$ (B étant le nombre de billes de M et B' étant le nombre de billes de M'). En effet, il faut effectuer autant de coups que la différence entre le nombre de billes de M et le nombre de bille de M'.

Au départ, le nombre de billes est équivalent au nombre de 1 dans la matrice M (c'est-à-dire le nombre d'éléments de la matrice M auquel on retire les -1, qui dénotent l'absence de cases et les 0, qui dénotent une case vide).

Une deuxième variable est $C_{i,j,t,d}$ qui est vraie lorsqu'une bille placée dans la case (i,j) est déplacée dans la direction d, à l'instant t avec $d \in \{U,D,L,R\}$.

1.2 Modélisation des contraintes

1.2.1 Configuration initiale

Il faut définir notre configuration initiale, c'est-à-dire exprimer qu'il ne peut pas y avoir de billes en dehors du plateau (avec P l'ensemble des cases de notre plateau de jeu) :

$$\bigwedge_{t\in\{0,\ldots,B-B'\}} \bigwedge_{(i,j)\notin P} (\neg x_{i,j,t})$$

Il faut également prendre en compte l'emplacement des billes et des cases vides dans notre configuration initiale (c'est-à-dire, s'il y a une bille à l'emplacement (i,j) à l'instant 0). Pour ce qui est des billes présentes sur le plateau, il faut ajouter la variable X_{ij0}. Ensuite pour signaler l'absence de bille, il faut ajouter la variable $\neg X_{ij0}$.

1.2.2 Un seul mouvement à la fois

Il faut aussi préciser qu'il n'est possible que d'effectuer un coup à la fois : "*Si un mouvement est effectué, alors aucun autre mouvement n'est effectué au même instant.*"
Ceci se modélise de la façon suivante :

$$\bigwedge_{\substack{t\in\{0,\ldots,B-B'\},\\ (i,j,d)\neq(i',j',d')}} (c_{i,j,t,d} \rightarrow \neg c_{i',j',t,d'})$$

$$\bigwedge_{\substack{t\in\{0,\ldots,B-B'\},\\ (i,j,d)\neq(i',j',d')}} (\neg c_{i,j,t,d} \vee \neg c_{i',j',t,d'})$$

1.2.3 Les cases non-affectées restent inchangées

D'autre part, les autres cases (c'est-à-dire celles qui ne sont pas affectées par le coup joué) doivent évidemment rester inchangées (c'est-à-dire qu'elles restent dans le même état d'un instant à l'autre) : "*Si un mouvement est effectué, alors les cases non-concernées restent équivalentes*"

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2,\\ t\in\{0,..,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} \left(c_{i,j,t,d} \rightarrow \bigwedge_{\substack{(i',j')\in\{0,\ldots,n-1\}^2,\\ (i,j)\neq(i',j'),\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (x_{i',j',t} \leftrightarrow x_{i',j',t+1})\right)$$

$$\bigwedge_{\substack{(i,j),(i',j')\in\{0,\ldots,n-1\}^2,\\ (i,j)\neq(i',j'),\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} \left((\neg c_{i,j,t,d} \vee \neg x_{i',j',t} \vee x_{i',j',t+1}\right) \wedge \left(\neg c_{i,j,t,d} \vee x_{i',j',t} \vee \neg x_{i',j',t+1})\right)$$

1.2.4 Mise à jour des variables en fonction des mouvements

Maintenant, il reste à définir comment prendre en compte les coups joués dans notre configuration, c'est-à-dire mettre à jour la position de nos billes (Xi, j, t) en fonction des coups joués (Ci, j, t, d).

La formule la plus intuitive qui en découle est qu'il n'est pas possible de déplacer une bille qui ne se trouvait pas dans la case concernée par le coup : "*Si un mouvement est effectué, alors il y a une bille*"

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} (c_{i,j,t,d} \rightarrow x_{i,j,t})$$

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} (\neg c_{i,j,t,d} \vee x_{i,j,t})$$

De plus, une fois que l'on a deplacé la bille qui se trouvait en (i, j) alors il n'y a évidemment plus de bille dans cette case à l'instant suivant : "*Si un mouvement est effectué, alors il n'y a plus de bille à l'instant suivant*"

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} (c_{i,j,t,d} \rightarrow \neg x_{i,j,t+1})$$

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2\\ t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\},d\in\{U,D,L,R\}}} (\neg c_{i,j,t,d} \vee \neg x_{i,j,t+1})$$

Si un mouvement est effectué dans une direction, les 3 billes qui sont impactées doivent changées. Cette formule se modélise pour les 4 directions possibles et sera détaillée pour la direction "UP" : "*Si un mouvement est effectué vers le haut, alors il y a une bille une case au dessus et il n'y a pas de bille deux cases au dessus. L'instant suivant, il n'y a pas de bille une case au dessus et il y a une bille deux cases au dessus.*"

Cependant, cette formule ne sera correcte que si les cases $i - 1$ et $i - 2$ se trouve dans le plateau.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{2,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} \left(c_{i,j,t,U} \rightarrow (x_{i-1jt} \wedge \neg x_{i-2jt} \wedge \neg x_{i-1jt+1} \wedge x_{i-2jt+1})\right)$$

La mise en forme normale conjonctive nous créé donc quatres clauses distincte.

1. Il y a une bille une case au dessus

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{2,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (\neg c_{i,j,t,U} \vee x_{i-1jt})$$

2. Il n'y a pas de bille deux cases au dessus

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{2,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (\neg c_{i,j,t,U} \vee \neg x_{i-2jt})$$

3. Il n'y a plus de bille une case au dessus un instant plus tard

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{2,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (\neg c_{i,j,t,U} \vee \neg x_{i-1jt+1})$$

4. Il y a une bille deux cases au desssus un instant plus tard

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{2,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (\neg c_{i,j,t,U} \vee x_{i-2jt+1})$$

Ces clauses doivent être exécutées pour chaque direction de mouvement. C'est-à-dire,
- "up" $\rightarrow$ i-1 et i-2
- "right" $\rightarrow$ j+1 et j+2
- "down" $\rightarrow$ i+1 et i+2
- "left" $\rightarrow$ j-1 et j-2

1.2.5 Un changement est le résultat d'un mouvement

Il faut dorénavant modéliser le fait que si une case change d'état (passe de 0 à 1 ou de 1 à 0), que c'est un mouvement qui l'a affecté.

Nous pouvons d'ores et déjà séparés cette modélisation en deux parties :
- Le cas où une bille apparait ($0 \rightarrow 1$)
- Le cas où une bille disparait ($1 \rightarrow 0$)

"*Si une bille apparait d'un instant à l'autre, alors c'est qu'elle est la destination d'un mouvement*"

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} ((\neg x_{i,j,t} \wedge x_{i,j,t+1}) \rightarrow (c_{i+2,j,t,U} \vee c_{i,j-2,t,R} \vee c_{i-2,j,t,D} \vee c_{i,j+2,t,L}))$$

Mise en forme normale conjonctive, cela nous créé une grande clause reprennant chaque élément. Encore une fois, il faut bien entendu vérifier que chaque élément se trouve dans le plateau (i+2, i+1, ...) afin de pouvoir ajouter chaque partie de clause.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} (x_{i,j,t} \vee \neg x_{i,j,t+1} \vee c_{i+2,j,t,U} \vee c_{i,j-2,t,R} \vee c_{i-2,j,t,D} \vee c_{i,j+2,t,L})$$

"*Si une bille disparait d'un instant à l'autre, alors c'est qu'elle est la source ou l'intermédiaire d'un mouvement*"

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} ((x_{i,j,t} \wedge \neg x_{i,j,t+1}) \rightarrow (c_{i,j,t,U} \vee c_{i,j,t,R} \vee c_{i,j,t,D} \vee c_{i,j,t,L} \vee$$

$$c_{i+1,j,t,U} \vee c_{i,j-1,t,R} \vee c_{i-1,j,t,D} \vee c_{i,j+1,t,L}))$$

Comme précédemment, il suffit de prendre chaque partie se trouvant à droite de l'implication et de l'ajouter en disjonction à la partie de gauche mise en disjonction également.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,(B-B')-1\}}} \big(\neg x_{i,j,t} \vee x_{i,j,t+1} \vee c_{i,j,t,U} \vee c_{i,j,t,R} \vee c_{i,j,t,D} \vee c_{i,j,t,L} \vee c_{i+1,j,t,U} \vee c_{i,j-1,t,R} \vee c_{i-1,j,t,D} \vee c_{i,j+1,t,L}\big)$$

1.2.6 Coups interdits

Pour toute valeur de i inférieure à 2, on ne peut pas effectuer de mouvement "UP" à partir de cette case car nous sortirions du plateau de jeu.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,B-B'\}}} \neg c_{i,j,t,U}$$

Pour toute valeur de i supérieure à (n-1)-2, on ne peut pas effectuer de mouvement "DOWN" à partir de cette case.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{n-2,n-1\},\\ j\in\{0,\ldots,n-1\},t\in\{0,\ldots,B-B'\}}} \neg c_{i,j,t,D}$$

Pour toute valeur de j inférieure à 2, on ne peut pas effectuer de mouvement "LEFT" à partir de cette case.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{0,1\},t\in\{0,\ldots,B-B'\}}} \neg c_{i,j,t,L}$$

Pour toute valeur de j supérieure à (n-1)-2, on ne peut pas effectuer de mouvement "RIGHT" à partir de cette case.

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{0,\ldots,n-1\},\\ j\in\{n-2,n-1\},t\in\{0,\ldots,B-B'\}}} \neg c_{i,j,t,R}$$

1.2.7 Configuration finale

M' est un instant spécifique de la résolution de M, ainsi, pour que le jeu du solitaire s'arrête, il faut qu'à l'instant $B - B'$, on dispose de billes dans la même configuration de M'.

Il nous suffira de prendre toutes ces formules en conjonction afin de toutes les satisfaire.

2 Implémentation Python via PySAT

Tout d'abord, il faut noter que les matrices ne sont pas nécessairement carrées. i sera donc destinée au nombre de ligne (équivalente à la hauteur) et j sera assignée au nombre de colonnes (équivalente à la largeur).

Notre implémentation peut être lancée directement via la commande :

```
python3 test.py
```

Notre fonction "solution" possède 3 modes de fonctionnements :

- Classique (mode=1) : C'est le mode dans lequel il faut fournir une matrice M et une matrice M'
- Résolution du jeu (une bille de fin) (mode=2) : Prends en entrée une matrice ne contenant qu'un seul trou et résouds le jeu du solitaire
- Résolution avec la contrainte que la bille de fin se trouve à l'emplacement du trou de départ (mode=3) : Encore une fois, ce mode ne prends en entrée qu'une matrice

```
solution(m, m2)
solution(m, m2, mode=1) # Même chose que sans l'argument
solution(m, mode=2)
solution(m, mode=3)
```

Cependant, il est totalement possible d'omettre le mode pour le première question. Le fichier de base fourni doit fonctionner.

3 Dernière bille à l'emplacement initial

De même, notons que les matrices ne sont pas nécessairement carrées.

Ici, on a $t \in \{0, ..., B-1\}$ (B étant le nombre de billes de M, c'est-à-dire le nombre de "1" dans M). On adapte donc les clauses pour cet ensemble.

Il faut ici adapter la formule de la configuration finale. Si il n'y a pas de bille dans la case (i, j) à l'instant $t = 0$, alors il y a une bille dans cette case au dernier instant et il n'y a pas de bille dans toutes les autres cases au dernier instant.

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\dots,n-1\}^2,(i',j')\in\{0,\dots,n-1\}^2,\\(i,j)\neq(i',j'),t\in\{0,\dots,B-1\}}} \left(\neg x_{i,j,0} \rightarrow \left(x_{i,j,B-1} \wedge \neg x_{i',j',B-1}\right)\right)$$

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\dots,n-1\}^2,(i',j')\in\{0,\dots,n-1\}^2,\\(i,j)\neq(i',j'),t\in\{0,\dots,B-1\}}} \left(\left(x_{i,j,0} \vee x_{i,j,B-1}\right) \wedge \left(x_{i,j,0} \vee \neg x_{i',j',B-1}\right)\right)$$

4 Dernière bille unique

De même, notons que les matrices ne sont pas nécessairement carrées.

Ici, on a $t \in \{0, ..., B-1\}$ (B étant le nombre de billes de M, c'est-à-dire le nombre de "1" dans M). On adapte donc les clauses pour cet ensemble.

La condition pour que le jeu du solitaire s'arrête est qu'il reste une bille, la formule suivante est donc fausse lorsqu'il y a une bille dans deux cases différentes.

"*S'il y a une bille au dernier instant, alors il n'y en a pas d'autre*"

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2,\\ (i,j)\neq(i',j')}} \left(x_{i,j,(B-1)} \rightarrow \neg x_{i',j',(B-1)}\right)$$

$$\bigwedge_{\substack{(i,j)\in\{0,\ldots,n-1\}^2,\\ (i,j)\neq(i',j')}} \left(\neg x_{i,j,(B-1)} \vee \neg x_{i',j',(B-1)}\right)$$

5 Toutes les possibilités

Afin de tester toutes les possibilités de disposition initiale pour un plateau de jeu, il suffit de fournir chaque disposition à la solution implémentée à la question 3. Pour ce faire, notre implémentation prends une matrice ne contenant que des 1 et des -1 et place le trou à chaque position possible avant de le fournir au solveur SAT.

Si le solveur renvois donc "True", alors c'est que le positionnement de la bille à cette endroit rends la résolution possible. Il nous suffit donc de boucler sur toutes les possibilités et d'ajouter un 1 dans la matrice de résultat si cela est possible et d'ajouter un 0 si cela n'est pas possible.