Relación ejercicios tema 1 2024

Ignacio Fernández Contreras

ifcau3z@uma.es
Planificación de Proyectos y Análisis de Riesgos. E.T.S Informática.

1. Ejercicio 1

a) Maximizar $x_1 + 5x_2$, S.A.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolución por el método gráfico

Paso 1: Despejamos x_2 en todas las restricciones para obtener un par de puntos y poder trazar las rectas correspondientes.

Primera restricción:

$$x_2 \leq 4 + 2x_1$$

Puntos:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 4, \\ x_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 6. \end{aligned}$$

Segunda restricción:

$$x_2 \leq 1 + x_1$$

Puntos:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 1, \\ x_1 = 4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 5. \end{aligned}$$

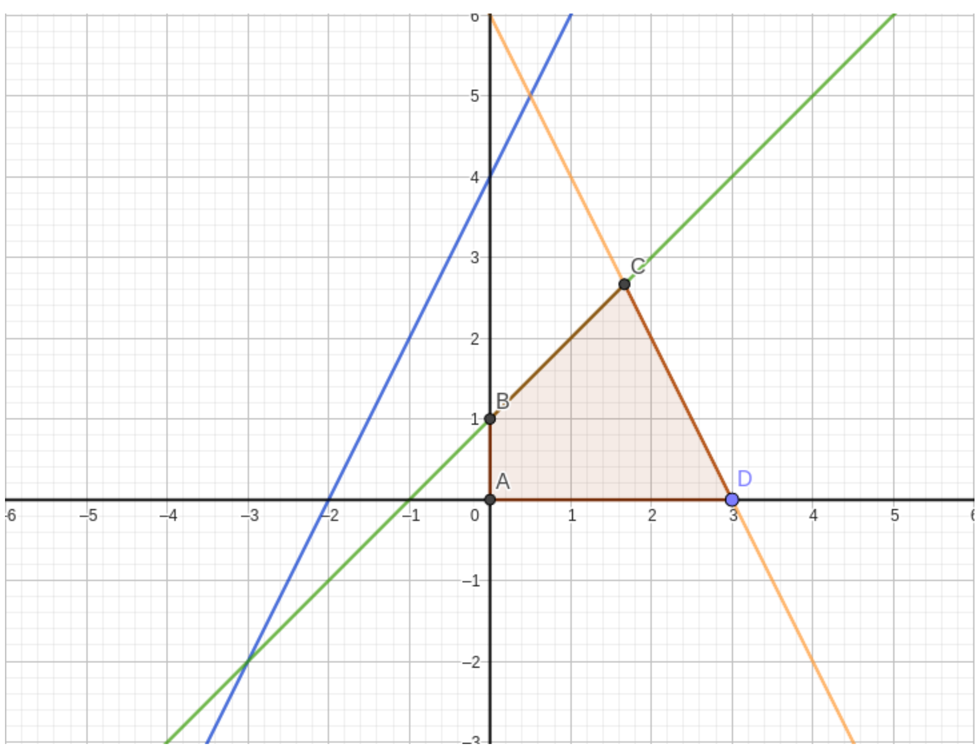
Tercera restricción:

$$x_2 \leq 6 - 2x_1$$

Puntos:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 6, \\ x_1 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

Dibujamos la gráfica con las rectas obtenidas:



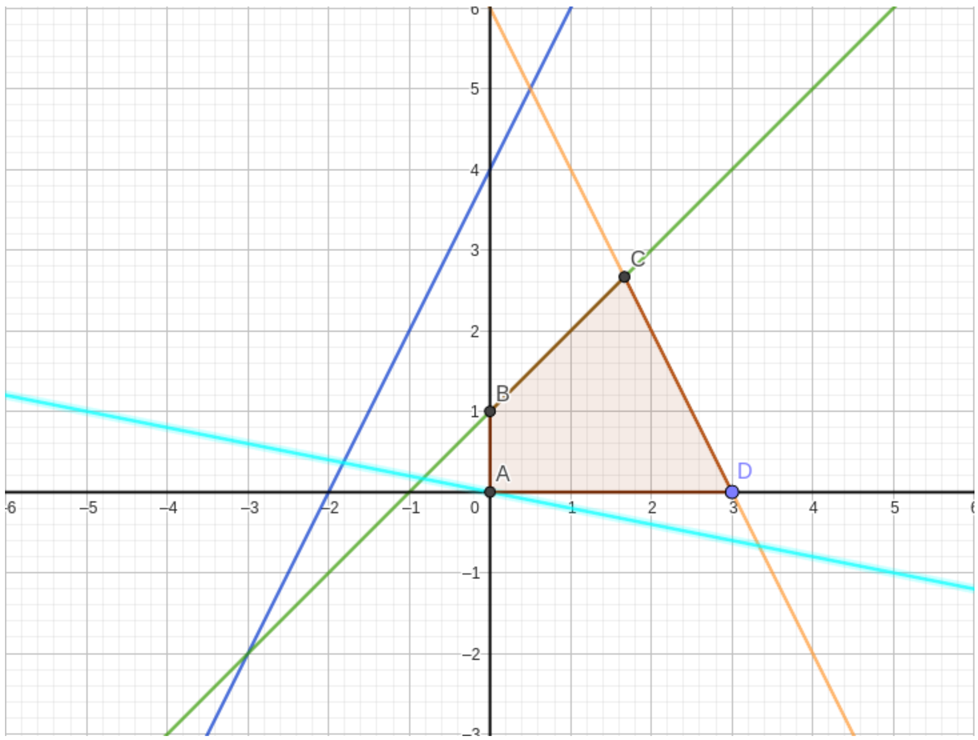
Dibujar una recta con valor función objetivo constante

$$x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{x_1}{5}$$

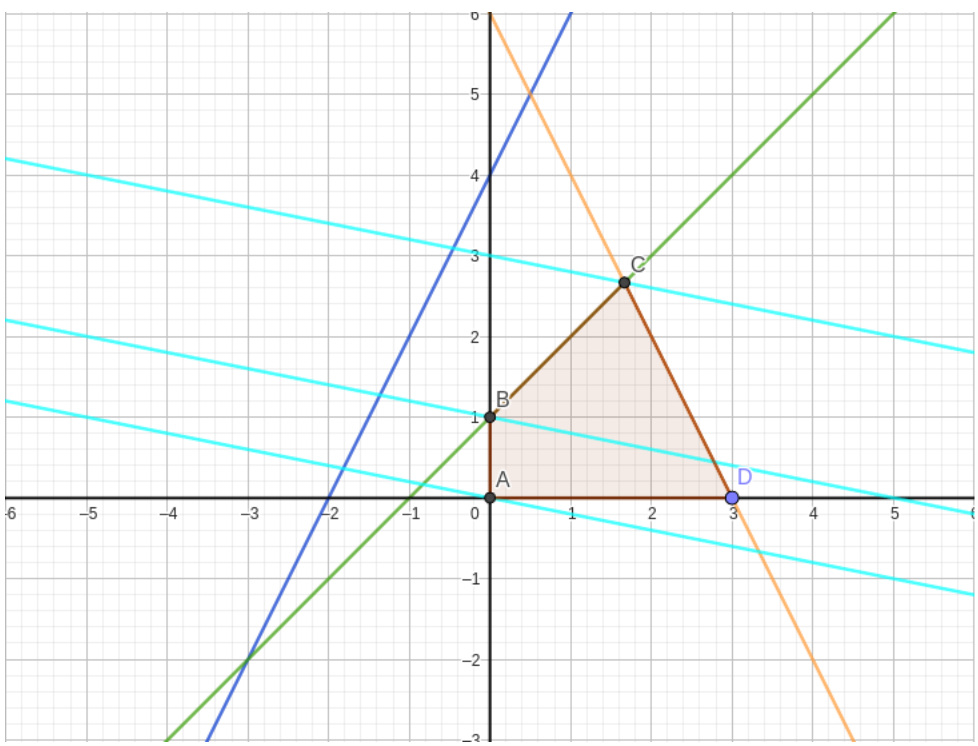
Puntos:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0, \\ x_1 = 5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -1. \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los puntos, trazamos las paralelas a esta recta objetivo.



Hacemos lo mismo, haciendo una paralela sobre la recta original (z_0) en cada uno de los puntos de corte de nuestra región.



Obteniendo los siguientes puntos:

$$\mathrm{B} = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$$
$$\mathrm{C} = (3{,}0)$$
$$\mathrm{D} = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}\right)$$

Donde obtenemos la siguiente tabla, con los puntos de corte de la sección:

	(x_1, x_2)	$z = x_1 + 5x_2$
B	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$z = \frac{1}{2}$
C	(3, 0)	$z = 3$
D	$\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$	$z = \frac{5}{3} + 5\frac{8}{3} = 15$

Este problema tiene una única solución óptima, donde el valor objetivo es 15 en el punto de corte $\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Resolución por el método SIMPLEX
Maximizar:

$$z = x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$-2x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 = 6$$

	Cj	1	5	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	-2	1	1	0	0	4
0	S2	1	**1**	0	1	0	3
0	S3	2	1	0	0	1	6
	Z	-1	-5	0	0	0	0

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: x_2 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: S_2 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).

It.1	Cj	1	5	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	-1	0	1	-1	0	3
5	X2	-1	1	0	1	0	1
0	S3	**3**	0	0	-1	1	5
	Z	-6	0	0	5	0	5

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: x_1 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: S_3 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).

It.2	Cj	1	5	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	0	0	1	-4/3	1/3	14/3
5	X2	0	1	0	2/3	1/3	8/3
1	X1	1	0	0	-1/3	1/3	5/3
	Z	0	0	0	3	2	15

Solución óptima en $Z = 15$, con valores:

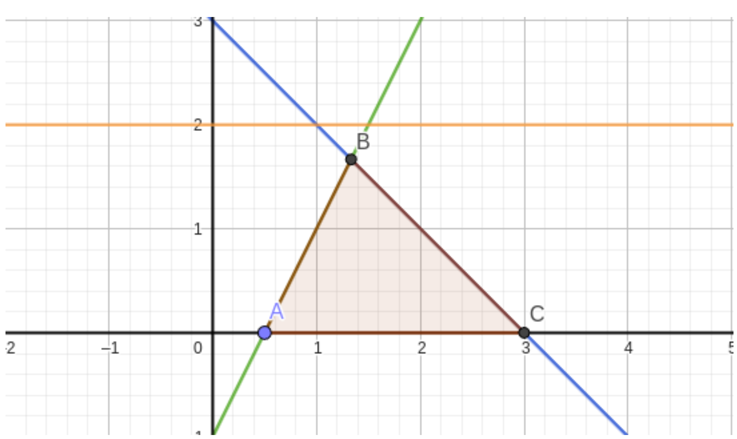
$$x_1 = 5/3$$
$$x_2 = 8/3$$
$$S_1 = 14/3$$
$$S_2 = 0$$
$$S_3 = 0$$

b) Minimizar $x_1 - x_2$, S.A.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1, \\ \mathrm{x}_2 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolución por el método gráfico

Paso 1: Despejamos x_2 en todas las restricciones para obtener un par de puntos y poder trazar las rectas correspondientes.

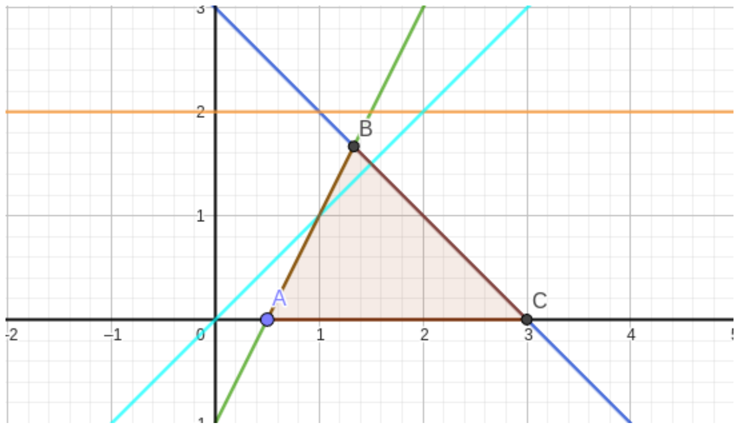


Dibujar una recta con valor función objetivo constante

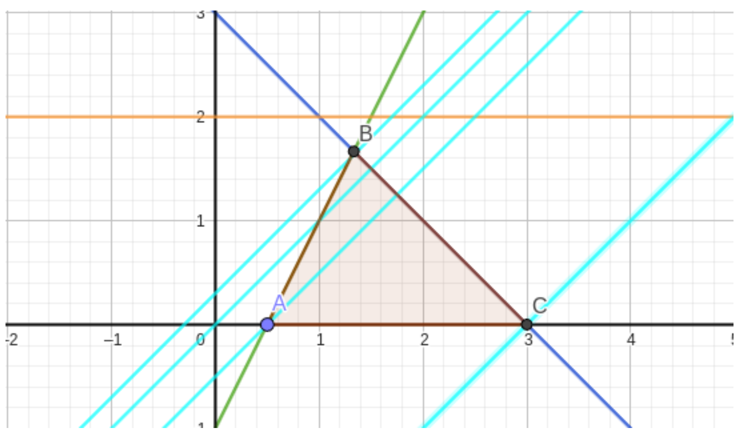
Puntos:

$$x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0, \\ x_1 = 4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 4. \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los puntos, trazamos las paralelas a esta recta objetivo.



Hacemos lo mismo, haciendo una paralela sobre la recta original (z_0) en cada uno de los puntos de corte de nuestra región.



Obteniendo los siguientes puntos:

$$\text{A} = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$$
$$\text{B} = (3{,}0)$$
$$\text{C} = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}\right)$$

Donde obtenemos la siguiente tabla, con los puntos de corte de la sección:

	(x_1, x_2)	$z = x_1 - x_2$
B	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$z = \frac{1}{2}$
C	(3, 0)	$z = 3$
D	$\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$z = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$

Cuadro 1. Valores de (x_1, x_2) y su correspondiente $z = x_1 - x_2$

Este problema tiene una única solución óptima, donde el valor objetivo es 3 en el punto de corte $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Resolución por el método SIMPLEX
Minimizar:

$$z = 0x_1 + 0x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + A1$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- $x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0A1 = 3$
- $2x_1 - x_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + A1 = 1$
- $0x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0A1 = 2$

Matriz inicial primera fase:

F1 T1	Cj	0	0	0	0	0	1	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	A1	R
0	S1	1	1	1	0	0	0	3
1	S2	**2**	-1	0	-1	0	1	1
0	S3	0	1	0	0	1	0	2
	Z	2	-1	0	-1	0	0	1

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: x_1 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: A_1 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).

Iteración 1:

F1 T1	Cj	0	0	0	0	0	1	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	A1	R
0	S1	0	3/2	1	1/2	0	-1/2	5/2
0	X1	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	1/2
0	S3	0	1	0	0	1	0	2
	Z	0	0	0	0	0	-1	0

Acaba la primera fase
Matriz segunda fase:

F1 T1	Cj	1	-1	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	0	**3/2**	1	1/2	0	5/2
1	X1	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2
0	S3	0	1	0	0	1	2
	Z	0	1/2	0	-1/2	0	1/2

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: X_2 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: S_1 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).
- El elemento pivote es 1/2

Solución óptima en $Z = -1/3$, con valores:

F1 T1	Cj	1	-1	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
-1	X2	0	1	2/3	1/3	0	5/3
1	X1	1	0	1/3	-1/3	0	4/3
0	S3	0	0	-2/3	-1/3	1	1/3
	Z	0	0	-1/3	-2/3	0	**-1/3**

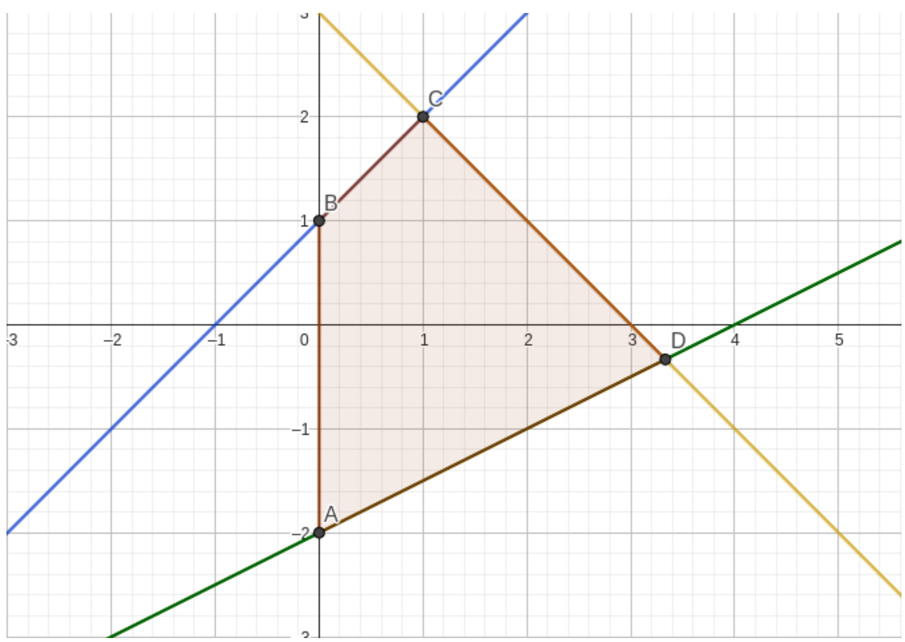
$$x_1 = 4/3$$
$$x_2 = 5/3$$
$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 0$$
$$S_3 = 1/3$$

c) Maximizar $x_1 + x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 3,$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \text{ r.n.s (no restringida en signo).}$$

Resolución por el método gráfico

Paso 1: Despejamos x_2 en todas las restricciones para obtener un par de puntos y poder trazar las rectas correspondientes.



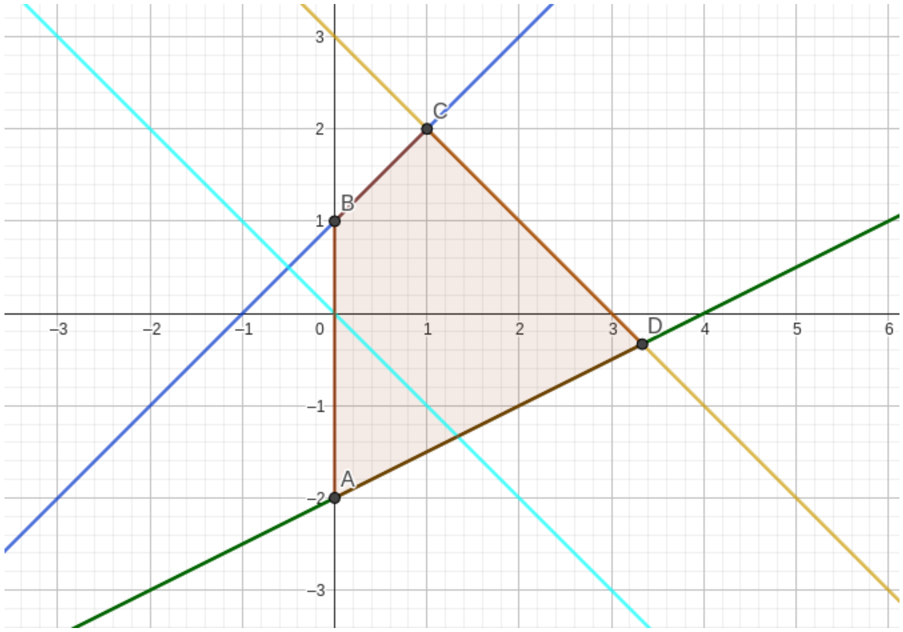
Dibujar una recta con valor función objetivo constante

$$x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_1$$

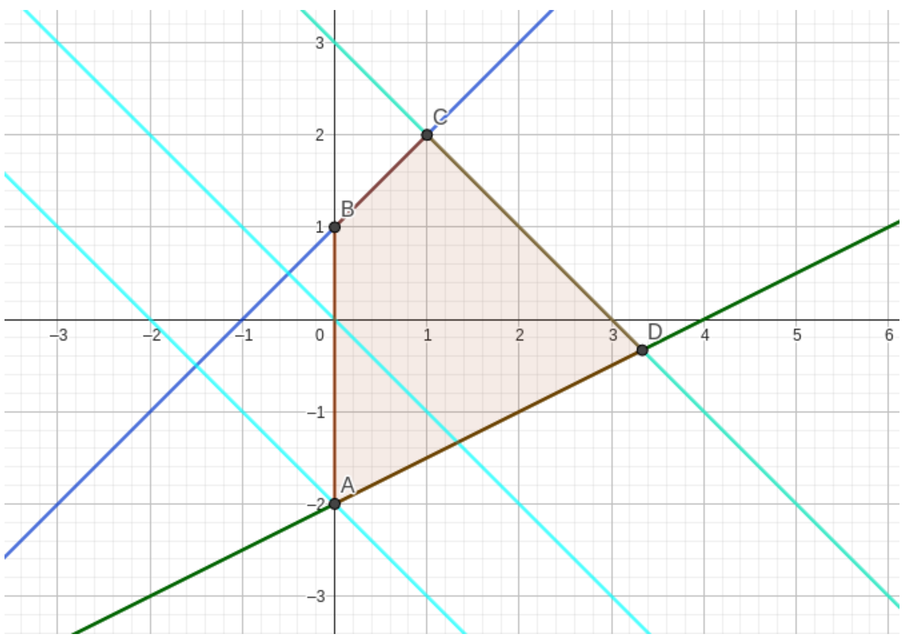
Puntos:

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0,$$
$$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3.$$

Una vez obtenidos los puntos, trazamos las paralelas a esta recta objetivo.



Hacemos lo mismo, haciendo una paralela sobre la recta original (z_0) en cada uno de los puntos de corte de nuestra región.



Obteniendo los siguientes puntos:

$$\text{A} = (0, -3)$$
$$\text{B} = (0{,}1)$$
$$\text{C} = (1, 2)$$
$$\text{D} = \left(\tfrac{10}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

Donde obtenemos la siguiente tabla, con los puntos de corte de la sección:

Este problema no tiene una única solución óptima, una de sus posibles soluciones es donde el valor objetivo es 3 en el punto de corte (0,-3)

	(x_1, x_2)	$z = x_1 + x_2$
A	$(0, -3)$	$z = -3$
B	(0, 1)	$z = 1$
C	$(1, 2)$	$z = 1 + 2 = 3$
D	$\left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right)$	$z = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$

Resolución por el método SIMPLEX
Maximizar:

$$z = x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- $-x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0A1 = 1$
- $x_1 + x_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + A1 = 3$
- $1x_1 - 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0A1 = 4$

	Cj	1	1	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	-1	1	1	0	0	1
0	S2	**1**	1	0	1	0	3
0	S3	1	-2	0	0	1	4
	Z	-1	-1	0	0	0	0

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: x_1 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: S_2 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).

Iteración 1:

	Cj	1	1	0	0	0	
Cb	Base	x1	x2	S1	S2	S3	R
0	S1	0	2	1	1	0	4
1	X1	1	1	0	1	0	3
0	S3	0	-3	0	-1	1	1
	Z	0	0	0	1	0	**3**

Nos encontramos en un punto óptimo y hay variables no básicas con costes reducidos igual a 0, por lo que existen múltiples valores para las variables de decisión que permiten obtener el valor óptimo de z = 3, los cuáles están contenidos en el segmento de la recta $x_1 + x_2 = 3$, una de las soluciones es:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 0$$
$$S_1 = 4$$
$$S_2 = 0$$
$$S_3 = 1$$

2. Ejercicio 5

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \text{S.A.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ & x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1 - 3x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

2.1. Resuelva este problema mediante el método del simplex.

Restricciones:

- 1X1 + 1X2 + 1X3 + 1S1 + 0S2 + 0S3 = 10
- 1X1 - 1X2 + 0X3 + 0S1 + 1S2 + 0S3 = 5
- 1X1 + 0X2 - 1X3 + 0S1 + 0S2 + 1S3 = 5

	Cj	1	-2	3	0	0	0	
Cb	Base	X1	X2	X3	S1	S2	S3	R
0	S1	1	1	**1**	1	0	0	10
0	S2	1	-1	0	0	1	0	5
0	S3	1	0	-1	0	0	1	5
	Z	-1	2	-3	0	0	0	0

- **Condición de parada**: No para, dado que hay valores negativos en la fila Z.
- **Entra**: x_3 (posee el valor más bajo en su columna).
- **Sale**: S_1 (al hacer la división entre el valor correspondiente en cada fila de la columna pivote entre R, cogemos el valor estrictamente positivo más pequeño).

IT 1	Cj	1	-2	3	0	0	0	
Cb	Base	X1	X2	X3	S1	S2	S3	R
3	X3	1	1	1	1	0	0	10
0	S2	1	-1	0	0	1	0	5
0	S3	2	1	0	1	0	1	15
	Z	2	5	0	3	0	0	30

Solución óptima en $Z = 30$, con valores:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 10$$
$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 5$$
$$S_3 = 15$$