Relación ejercicios tema 5 2024

Ignacio Fernández Contreras

ifcau3z@uma.es
Planificación de Proyectos y Análisis de Riesgos. E.T.S Informática.

1. Ejercicio 6

Muestre como usar nímeros aleatorios uniforme entre 0 y 1 para obtener un valor correspondiente a variables aleatorias que sigan las siguientes distribuciones de probabilidad:

a. Una variable aleatoria discreta X cuyo valor puede ser 1,2,3 ó 4 con probabilidades respectivas 1/3, 1/4, 1/6 y 1/4.
b. Una variable aleatoria continua X normalmente distribuida con media 5 y desviación típica 3 (N(5,3)).

1.1. Apartado a

Generación de una Variable Aleatoria Discreta Queremos generar una variable aleatoria discreta X que puede tomar los valores $1, 2, 3$ o 4 con las siguientes probabilidades:

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{4}.$$

Paso 1: Función F
La función de distribución acumulada $F(x)$ de la variable aleatoria X es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{12} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{11}{12} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Paso 2: Generación de la variable aleatoria con números uniformes
Generamos un número aleatorio $U \sim U[0, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } U < \frac{1}{3}, \\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{12}, \\ 3 & \text{si } \frac{7}{12} \leq x < \frac{11}{12}, \\ 4 & \text{si } x \geq \frac{11}{12}. \end{cases}$$

De esta manera, podemos generar valores de la variable aleatoria discreta U utilizando números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1]$ y asignando los valores de X según las probabilidades acumuladas especificadas.

1.2. Apartado b

Sabemos que si $\sum_{i=1}^{n} U_i$ es la suma de n variables aleatorias uniformemente distribuidas $U_i \sim U[0, 1]$, entonces, por el teorema central del límite, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}\right).$$

Luego, centramos y escalamos:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \sim N(0, 1).$$

2. Para transformar esta variable $Z \sim N(0,1)$ a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, utilizamos la fórmula:

$$X = \mu + \sigma Z.$$

En nuestro caso, queremos $X \sim N(5,3)$, por lo que $\mu = 5$ y $\sigma = 3$. Así, tenemos:

$$X = 5 + 3 \cdot Z.$$

3. Sustituyendo la expresión de Z:

$$X = 5 + 3 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}.$$

4. Simplificando la expresión:

$$X = 5 + 3 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}.$$

5. Para que la varianza sea 9 (es decir, $\sigma = 3$), seleccionamos $n = 36$. Entonces, tenemos:

$$X = 5 + 3 \cdot \left(\sum_{i=1}^{36} U_i - 18 \right).$$

Así, la variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(5,3)$.