Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Anton Korobeynikov
anton@korobeynikov.info

22 февраля 2017 г.

Одномерные интегралы

- Убедиться, что интеграл сходится
- Реализовать процедуру интегрирования методом Монте-Карло для произвольной интегрирующей плотности
- Для случая конечных пределов проверить порядок сходимости процедуры Монте-Карло для равномерной интегрирующей плотности
- Подобрать несколько интегрирующих плотностей и выбрать из них оптимальную с точки зрения скорости сходимости и дисперсии оценки. Обосновать результат.

Варианты

1. $$\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + e^{-x}\right) dx$$

2. $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin\left(x + e^{-x}\right) dx$$

3. $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin\left(x + e^{-x}\right) dx$$

4. $$\int\limits_0^1 \frac{\cos\left(x + x^2\right)}{x + \sqrt[3]{x}} dx$$

5. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\tan x} \cdot \sin\left(x + e^{-x}\right) dx$$

6. $$\int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x + e^{-x}\right)}{\sqrt{x}} dx$$

7.

$$\int_0^{\pi} e^{-\cos(x+\tan x)}\,dx$$

8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\tan x}+\cos e^{-x}}\,dx$$

9.

$$\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sin\sqrt{x}+x^2}\,dx$$

10.

$$\int_0^{1} \tan x\cdot\log x\,dx$$

11.

$$\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}+\log\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\cos^2 x}\,dx$$

12.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tan x}\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{1+x^3}}\right)dx$$

13.

$$\int_0^{1} e^{\cos x}\log x\,dx$$

14.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$$

15.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\tan\frac{\pi}{8}\sqrt{x}}{1-e^{x^2-\sqrt{x}}}\,dx$$

16.

$$\int_0^{e} \frac{\cos x^{\pi}-e\log\left(1+20\sqrt{x}\right)}{\sqrt[6]{x}}\,dx$$

17.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\sqrt[\sqrt{2}]{x}}\,dx$$

18.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\pi x}{\pi\sqrt{x}}e^{-x}\,dx$$

19.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x}} e^{-x^3}\, dx$$

20.

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^2 \cos x\, (1-2x)^{\pi}}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$$

21.

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{1+x^e}\, dx$$

Многомерные интегралы

- Убедиться, что интеграл сходится
- Реализовать процедуру многомерного Монте-Карло интегрирования для произвольной линейно-ограниченной области с равномерной интегрирующей плотностью
- Вычислить интеграл методом Монте-Карло двумя способами: «в лоб» и через замену переменных области интегрирования к параллелепипеду («коробке»), или каким-либо иным «разумным» методом (например, за счет выбора зависимых случайных величин).

Варианты

22.

$$\frac{4}{\pi} \iiint\limits_{\substack{x>0\\ a<y<bx\\ 0<z<cx}} x^{-2} e^{-px^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz$$

23.

$$\frac{4}{\pi} \iiint\limits_{\substack{x>0\\ 0<t<bx\\ z>cx}} e^{b^2x^2-t^2-z^2}\, dx\, dt\, dz$$

24.

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iiint\limits_{\substack{x>0\\ t>bx\\ v>cx}} \frac{\sin t}{t} e^{-v^2}\, dx\, dv\, dt$$

25.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\substack{x>0\\ 0<t<cx}} x^{-p-1} e^{-t^2}\, dx\, dt$$

26.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\substack{x>0\\ 0<t<cx+b}} e^{-px-t^2}\, dx\, dt$$

27.

$$\iiiint\limits_{\substack{x_1+x_2+x_3+x_4<1\\ x_i>0}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} x_3^{p_3-1} x_4^{p_4-1} e^{10^{-3} \frac{x_1x_2x_3x_4}{1+x_1x_2x_3x_4}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

28.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iiint\limits_{\substack{x>0 \\ y>0 \\ 0<z<axy}} \frac{1}{y^3} e^{-px-\frac{q}{y^2}-z^2}\, dx\, dy\, dz$$