Вычисление интегралов методом Монте-Карло

422 группа

Tue 21 Feb 2017

Содержание

1 Общая схема

Пусть $\nu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ — конечный заряд на пространстве $(D, \mathscr{A})$. Найдем $J = \nu(D)$. Для этого введем $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) \to (D, \mathscr{A})$ — случайную величина с распределением $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\xi$, причем $\nu \prec \mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd}
(D,\mathscr{A}) \arrow[r, "\nu", "\mathcal{P}_\xi"'] & (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}) \\
(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}) \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "m\circ\xi=\eta"']
\end{tikzcd}$$

Значит существует производная Радона-Никодима

$$m = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mathcal{P}} : D \to \bar{\mathbb{R}},$$

т.е. такая функция $m(x)$, что

$$\int_A m \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_A \mathrm{d}\nu = \nu(A), \quad \forall A \in \mathscr{A}.$$

J может быть найдена как

$$J = \mathsf{E} m(\xi) = \int_\Omega m(\xi) \, \mathrm{d}\mathsf{P} = \int_D m(x) \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_D \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mathcal{P}} \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_D \mathrm{d}\nu = \nu(D).$$

По ЗБЧ может быть найдена оценка $\hat{J}_n$: если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i.i.d., то

$$\hat{J}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m(\xi_i) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E} m(\xi) = J.$$

2 Вычисление интеграла

Посчитаем интеграл

$$\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\lambda.$$

Автоматически, $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\lambda$ и $\nu \prec \lambda$. Пусть также $\mathrm{d}\mathcal{P} = p\,\mathrm{d}\lambda$, то есть $\mathcal{P} \prec \lambda$. Таким образом, мера $\mathcal{P}$ и заряд ν абсолютно непрерывны относительно третьей меры λ. Тогда для существования $m = \mathrm{d}\nu/\,\mathrm{d}\mathcal{P}$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda\{x : f(x) \neq 0 \,\&\, p(x) = 0\} = 0$, при этом

$$m(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mathcal{P}} = \frac{f\,\mathrm{d}\lambda}{p\,\mathrm{d}\lambda} = \frac{f(x)}{p(x)}.$$

Таким образом,

$$\hat{J}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}.$$

3 Вычисление дисперсии

Так как

$$\mathsf{D}m(\xi) = \mathsf{E}m^2(\xi) - (\mathsf{E}m(\xi))^2 = \mathsf{E}m^2(\xi) - J^2,$$

то

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^2(\xi_i) - \hat{J}_n^2.$$

4 Асимптотический доверительный интервал

Построение доверительного интервала

$$\mathsf{P}\left(\left|\hat{J}_n - J\right| \leq \epsilon\right) = 1 - \gamma.$$

По ЦПТ,

$$\frac{\sum \xi_i - \sum \mathsf{E}\xi_i}{\sqrt{\sum_i \mathsf{D}\xi_i}} = \frac{\sum \xi_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sqrt{n}\frac{1/n \cdot \sum \xi_i - \mu}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\hat{J}_n - J\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1),$$

откуда

$$\mathsf{P}\left(-x \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\hat{J}_n - J\right) \leq x\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi(x) - \Phi(-x) = 1 - \gamma \iff x = x_\gamma,$$

и

$$\mathsf{P}\left(-x_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \hat{J}_n - J \leq x_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

откуда доверительный интервал имеет вид

$$J \in \left(\hat{J}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\gamma; \hat{J}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\gamma\right).$$

Неизвестную σ можно заменить на выборочный стандарт s_n.

5 Трудоемкость

Найдем такое $n_0 : \forall n \geq n_0\ \mathsf{P}\left(\left|\hat{J}_n - J\right| \leq \epsilon\right) = 1 - \gamma$:

$$x_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}} = \epsilon \implies n_0 = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}x_\gamma^2.$$

Итого, скорость сходимости $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$. Для реального применения непригодны, потому что содержат неизвестную σ. ЦПТ выдерживает подстановку состоятельную оценку дисперсии.

6 Доверительный интервал через теорему Донскер

... Объединение доверительных интервалов не является доверительным интервалом для траектории ...

$$\hat{J}_n = \frac{(n-1)\hat{J}_{n-1} + m(\xi_n)}{n}$$

Для таких вещей есть аналог ЦПТ: Пусть есть $x_1, \dots x_n$ i.i.d с $\mu = \mathsf{E}x_i, \sigma^2 = \mathsf{D}x_i$. Переведем $\hat{J}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ в интервал [0,1] :

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\lfloor nt \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} x_i, \quad t \in [0,1].$$

Справедлива теорема Донскер:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\sim} W(t),$$

где $W(t)$ — Броуновский мост. Как и ЦПТ, выдерживает замену σ на $\tilde{s}$. $\hat{J}_n = \delta_n(1)$, $x_i = m(\xi_i)$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} (x_i - \delta(1)) - \underbrace{J}_{\mu} + J = \frac{1}{\sqrt{n}\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} (x_i - J) - \frac{\lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}\tilde{s}} \left(\hat{J}_n - J \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} W(t) + tU, \quad U \sim \mathrm{N}(0,1)$$

(«броуновский мост со сносом»). Аналог доверительных интервалов для процессов:

$$\left(\delta_n(1) - \frac{\tilde{s}\sqrt{n}}{\lfloor nt \rfloor} U^{**}(t), \delta_n(1) + \frac{\tilde{s}\sqrt{n}}{\lfloor nt \rfloor} U^{**}(t) \right),$$

для 95%-го доверительного интервала можно взять

$$U^{**}(t) = a + b\sqrt{t}, \quad a = 0.1, b = 3.15.$$