Лабораторная работа №1
Климов Даниил, В-10.

Исходная последовательность:

$x_n = \arcsin\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{6n-5}{2n+4}$

Заметим, что $\arcsin\frac{1+(-1)^n}{2}$ принимает одно из двух значений $\{0;\frac{\pi}{2}\}$. Поэтому можем разбить последовательность x_n на две подпоследовательности:

$$x_n = \begin{cases} x_{2k-1} = 0 \\ x_{2k} = \frac{12k-5}{4k+4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(3-\frac{17}{4k+4}\right) \end{cases} ;\ k\in N$$

Часть 1. Аналитический метод

1). $\measuredangle\ x_{2k-1}$:

Последовательность $x_{2k-1}=0$ (const) очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$

$\measuredangle\ x_{2k}$: $\frac{\pi}{2}\left(3-\frac{17}{4(k+1)}\right)\nearrow$ при росте k и $\frac{\pi}{2}\left(3-\frac{17}{4(k+1)}\right) < 3\cdot\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\left(3-\underbrace{\frac{17}{(k+1)\cdot 4}}_{\to 0}\right) = \frac{3\pi}{2}$ по теор. Вейерштрасса

Пусть L – множество частичных пределов
Тогда $L = \{0;\frac{3\pi}{2}\}$ и $\Rightarrow x_n$ – не сходится

2). $\measuredangle\ x_{2k-1}$:

т.к. $x_{2k-1} = const = 0$:

$\inf x_{2k-1} = \sup x_{2k-1} = \overline{\lim}\, x_{2k-1} = \underline{\lim}\, x_{2k-1} = 0$

$\measuredangle\ x_{2k}$:

$\inf x_{2k} = \min x_{2k}$ т.к. $x_{2k}\nearrow$

$\inf x_{2k} = x_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{8} = \underline{\lim}\, x_{2k}$

$\frac{\pi}{2}\cdot\left(3-\frac{17}{4k+4}\right) < \frac{\pi}{2}\cdot\left(3-\frac{1}{k}\right) < \frac{\pi}{2}\cdot 3$

очевидно, что $\sup x_{2k} = 3 = \overline{\lim} x_{2k}$

$\measuredangle\ x_n$:

$\overline{\lim} x_n = \sup x_n = \max(\sup x_{2k-1}, \sup x_{2k}) = \sup x_{2k} = 3$

$\underline{\lim} x_n = \inf x_n = \min(\inf x_{2k-1}, \inf x_{2k}) = \inf_{2k-1} = 0$

3). $\min x_n = x_{2k-1} = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

$\overline{\exists} \max x_n$ т.к. x_{2k} монотонно возрастает

4). Определение предела A для x_n:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \ |x_n - A| < \varepsilon$

$\measuredangle\ x_{2k-1}$: $|x_n - 0| < \varepsilon$

$|0 - 0| < \varepsilon \Rightarrow n_0 \in \mathbb{N}$ и $\lim_{2k-1} = 0$

Исходный код программы на Python 3.11:

```
from cmath import pi
from matplotlib import pyplot as plt


def sequence_value(*, number):
    return pi / 2 * (6 * number - 5) / (2 * number + 4) if number % 2 == 0 else 0


def get_graphic_of_sequence(*, sequence):
    """
    graphic of the sequence
    :param sequence: sequence
    :return: picture
    """
    plt.figure(figsize=(20, 8), dpi=80)
    plt.title("график последовательности")
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("значение члена последовательности")
    for point in range(1, len(sequence)):
        if point % 2 == 0:
            plt.scatter(point, sequence[point], color='red', s=100)
        else:
            plt.scatter(point, sequence[point], color='blue', s=100)
    plt.hlines(3 * pi / 2, 0, len(sequence), colors='black')
    plt.annotate('supremum and superior limit = 3/2 * pi', xy=(0, 3 * pi / 2), xytext=(0, 3 * pi / 2 + 0.05))
    plt.hlines(0, 0, len(sequence), colors='black')
    plt.annotate('infinum and inferior limit = 0', xy=(0, 0), xytext=(0, 0.2))
    # plt.show()
    plt.savefig('original_sequence.png', bbox_inches='tight')
```

```
def get_graphic_of_subsequence(*, sequence):
    """
    k0 = [(17*pi)/(8*epsilon)]+1
    graphic of the subsequence
    :param sequence: subsequence
    :return:
    """
    epsilon = 0.0001
    plt.figure(figsize=(20, 8), dpi=80)
    plt.title("график подпоследовательности x_2k")
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("значение члена подпоследовательности")
    k0 = (round((17 * pi) / (8 * epsilon)) + 1) * 2
    plt.xlim(k0 - 10, k0 + 200)
    plt.ylim(3 * pi / 2 - 0.001, 3 * pi / 2 + 0.001)
    for point in range(k0, k0 + 200, 2):
        plt.scatter(point, sequence_value(number=point), color='blue', s=100)
    plt.hlines(3 * pi / 2, 0, k0 + 200, colors='black')
    plt.annotate('superior limit = 3/2 * pi', xy=(k0, 3 * pi / 2), xytext=(k0, 3 * pi / 2 + 0.0001))
    plt.annotate(f'k0 = [(17*pi)/(8*ε)]+1 = {k0}', xy=(k0, 3 * pi / 2), xytext=(k0, 3 * pi / 2 - 0.0002))
    plt.annotate(f'epsilon={epsilon}', xy=(k0, 3 * pi / 2), xytext=(k0, 3 * pi / 2 - 0.0004))
    plt.savefig('subsequence.png', bbox_inches='tight')


def get_graphic_of_supremum(*, sequence, epsilon):
    """
    graphic of supremum
    :param sequence:
    :param epsilon:
    :return:
    """
    plt.figure(figsize=(20, 8), dpi=80)
```

```
    plt.title("график супремума")
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("значение члена последовательности")
    m = 0
    while True:
        m += 1
        if sequence_value(number=m) > 3 * pi / 2 - epsilon:
            break
    plt.xlim(m - 10, m + 200)
    plt.ylim(3 * pi / 2 - 0.001, 3 * pi / 2 + 0.001)
    for point in range(m, m + 200, 2):
        plt.scatter(point, sequence_value(number=point), color='blue', s=100)
    plt.hlines(3 * pi / 2, 0, m + 200, colors='black')
    plt.annotate('supremum = 3/2 * pi', xy=(m, 3 * pi / 2), xytext=(m, 3 * pi / 2 + 0.0001))
    plt.annotate(f'm = {m}', xy=(m, 3 * pi / 2), xytext=(m, 3 * pi / 2 - 0.0002))
    plt.annotate(f'epsilon={epsilon}', xy=(m, 3 * pi / 2), xytext=(m, 3 * pi / 2 - 0.0004))
    plt.savefig('supremum.png', bbox_inches='tight')


def main():
    original_sequence = [sequence_value(number=n) for n in range(101)]
    get_graphic_of_sequence(sequence=original_sequence)
    get_graphic_of_subsequence(sequence=original_sequence)
    get_graphic_of_supremum(sequence=original_sequence, epsilon=0.0001)


if __name__ == '__main__':
    main()
```