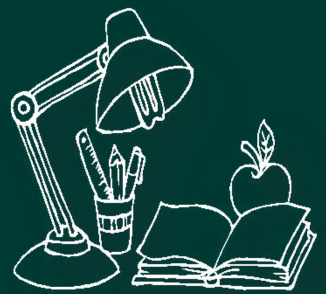
2022年10月份成人高考入学考试

高等数学（一）通关资料

主讲人：张老师



一、极限

考点1：极限的四则运算法则

1. 利用极限的四则运算法则求极限

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$$1.\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$$

$$2.\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=AB$$

$$3.\text{当}\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0,\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[c.f(x)\right]=c.\lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

一、极限

考点2：无穷小量和无穷大量定义及关系

1.无穷小量概念：

如果当自变量$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时，函数f（x）的极限值为零，则称在该变化过程中，f（x）为无穷小量，简称无穷小，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0（或\lim_{x \to \infty} f（x）= 0）$$

在微积分中，常用希腊字母α，β，γ来表示无穷小量.

2.无穷大量概念

如果当自变量$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时，函数$f(x)$的绝对值可以变得充分大（即无限得增大），则称在该变化过程中，$f(x)$为无穷大量.记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

两者关系：

在同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量

反之，如果$f(x)$为无穷小量，且$f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量

一、极限

考点3：无穷小量性质及比较

1.无穷小量的性质.

（1）有限个无穷小量的和 、差、积仍为无穷小量.

（2）无穷小量与有界之量 的积仍为无穷小量.

2.无穷小量的比较.

设α和β是同一过程中的无穷小 量，

即$\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$

（1）如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小量.

（2）如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称$\alpha$是与$\beta$同阶的无穷小量.

（3）如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C=1$，则称$\alpha$是与$\beta$等价无穷小量，记作 α等价于β.

（4）如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小量.

一、极限

考点4：等价无穷小

1.如果α_1、α_2、β_1、β_2都是同一变化过程中的无穷小量，

且$\alpha_1 \sim \beta_1$，$\alpha_2 \sim \beta_2$

则$\lim \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$

这个定理说明，两个无穷小量之比的极限，可以用与它们等价的无穷小量之比的极限来代替以后我们可以用这个方法来求两个无穷小量之比的极限，此方法可叫做等价无穷小代替法

常用等价无穷小：

当$x \to 0$时，$x \sim \sin x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1$

$\sim \tan x, 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^{\upsilon} - 1 \sim \upsilon x$（$\upsilon$为实常数，$\upsilon \neq 0$）

一、极限

考点5：**两个重要极限**

特殊极限一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

特殊极限二：

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

二、连续

考点1：**函数在某一点的连续**

定义1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果有自变量Δx（初值为x_0）趋近于0时，相应的函数改变量Δy也趋近于0，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

定义2：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限值存在，且等于x_0处的函数值$f(x_0)$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续.

定义3：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的左右极限存在且等于函数值$f(x_0)$，即

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续.

二、连续

考点2：**函数间断点**

定义：如果函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称点x_0为$f(x)$的一个间断点.由函数在某点连续的定 义可知，如果函数$f(x)$在点x_0处有下列三种情况之一，则点x_0是$f(x)$的一个间断点：

(1) 在点x_0处，$f(x)$没有定义。

(2) 在点x_0处，$f(x)$的极限不存在。

(3) 虽然点x_0处$f(x)$有定义，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

三、导数

（一）导数定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若自变量x在点x_0处的改变量为Δx（$x_0+\Delta x$仍在该领域内）.函数$y=f(x)$相应地有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则此极限值为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数.

记作$y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$.

即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

三、导数

（二）基本初等函数的导数公式

1. $(c)' = 0$

2. $(x^{a})' = ax^{a-1}$

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a > 0, 且\ a \neq 1)$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5. $(a^{x})' = a^{x}\ln a$

6. $(e^{x})' = e^{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

8. $(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

三、导数

（二）基本初等函数的导数公式

$9.(\sec x)' = \sec x.\tan x$/ $(\csc x)' = -\csc x.\cot x$

$10.(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$

$11.(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$

$12.(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$13.(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

三、导数

（三）导数的四则运算公式

$$1.(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2.(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$3.(cu)' = cu'(c\text{为常数})$$

$$4.\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}(v \neq 0)$$

三、导数

（四）复合函数求导

如果函数u = α（x）在点x处可导，函数$y = f$（u）在对应点u处也可导，则复合函数$y = f[\alpha$（x）$]$在点x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y'_x = y'_u . u'_x$$

$$\{f[\alpha(x)]\}' = f'(u)\,\mathrm{u}'(x)$$

解题思路：

(1) 找出复合框架，$y = f(u), u = f(x)$

$y = f(u), u = f(v), v = f(x)$

(2) 分别求导相乘

三、导数

（五）参数方程表示的函数求导法则

一般的，如果参数方程

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

确定了y为x的函数，在计算此类由参数方程

所确定的导数时，不需要先消去参数t后再进行求导.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

三、导数

（六）隐函数的求导

解析法表示函数通常有两种：

(1).$y = f(x)$ 来表示的，称之为显函数。

如 $y = \sin wx$， $y = e^x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(2).x与y之间的函数关系是由一个方程 $F(x, y) = 0$ 来确定这种称之为隐函数，

如 $2x + y^3 - 1 = 0$， $xy - e^x + e^y = 0$

对于隐函数的求导通常做法：

可直接在方程 $F(x, y) = 0$ 的两端同时对x求导，而把y视为中间变量，利用复合函数求导法即可。

(特殊情况：对数求导法时，先两边同时取对数，再求解）

一、求导方法

（七）对数函数求导法

利用对数函数的运算性质可以将原来的函数两边同时取对数后化简然后利用隐函数求导法或复合求导法求导，因此称为对数求导法

通常解决函数类型为：

$y = u(x)^{v(x)}$

步骤为：

(1) 两边同时取对数得

$\ln y = vx.\ln u(x)$

(2)两边同时对x求导得到

$$\frac{1}{y}.y' = v'(x).\ln u(x) + \frac{vx.u'(x)}{u(x)}$$

三、导数

（八）高阶求导

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，那么就称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，相应地 $f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数 .二阶导数记为

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2} \text{或} \frac{d^2f}{dx^2}$$

$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]' \text{或} \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

四、微分

（一）微分公式和微分法则

微分公式：

(1)d（c）= 0（c为常数）（2）$d(x^a) = ax^{a-1}dx$

$(3)\ d(a^x) = a^x \ln a dx \ (a > 0, 且\ a \neq 1)$

$(4)\ d(e^x) = e^x dx. (5)\ d \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} dx \ (a > 0, 且\ a \neq 1)$

$(6)\ d(\ln x) = \dfrac{1}{x} dx. (7)\ d(\sin x) = \cos x dx$

$(8)\ d(\cos x) = -\sin x dx$

函数的和、差、积、商　　　微分运算公式

设 $u = u(x), v = v(x)$ 可微分，则

$d(cu) = cdu$（c为常数）；　　$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(uv) = vdu + udv; d(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0)$

五、导数应用

（一）洛必达求导

如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$与$F(x)$

都趋于零或都趋于无穷大，则称$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{F(x)}$

为未定型极限，并分别简记为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”.

洛必达法则是求未定型极限的一种有效方法。

其它类型未定式:$0.\infty$；$\infty - \infty$也可以变形

为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”来求解

五、导数应用

（二）曲线的切线方程与法线方程

若函数$y=f(x)$在点x_0处可导，由导数的几何意义，知$f'(x_0)$表示过曲线上点$M(x_0，f(x_0))$的切线斜率，所以，过曲线上点$M(x_0，f(x_0))$的切线方程为：

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线的斜率为$-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

五、导数应用

（三）函数单调性判断

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导.

1.如果在区间(a,b)内$f'(x)>0$,则函数$f(x)$在区间(a,b)内是递增的;

2.如果在区间(a,b)内$f'(x)<0$,则函数$f(x)$在区间(a,b)内是递减的。

注：$f(x)$在个别点处$f'(x)=0$不影响$f(x)$的单调性.

五、导数的应用

（四）函数的极值

1.极值的第一充分条件

设$f(x)$在x_0的某领域内可导.

(1) 若$x<x_0$时，$f'(x)>0$，$x>x_0$，$f'(x)<0$时则称x_0为极大值点，$f(x_0)$为极大值

(2) 若$x<x_0$时，$f'(x)<0$，$x>x_0$，$f'(x)>0$时则称x_0为极小值点，$f(x_0)$为极小值

(3) 如果$f'(x)$在x_0两侧的符号相同，那么x_0不是极值点。

2.极值的第二充分条件

设函数$y=f(x)$在x_0处存在二阶导数，且$f'(x)=0$，则

(1) 若$f''(x_0)<0$，$f(x_0)$为极大值，x_0为极大值点；

(2) 若$f''(x_0)>0$，$f(x_0)$为极小值，x_0为极小值点；

(3) 若$f''(x_0)=0$，此方法不能判定x_0是否为极值点，而改用极值第一充分条件来判定。

五、导数的应用

（四）函数的极值

极值存在的必要条件：

设函数$f(x)$在x_0可导，且在点x_0处取得极值，则必有$f'(x_0)=0$，称满足$f'(x_0)=0$的点为函数$f(x)$的驻点，

由此可知，可导函数的极值点必为驻点。

五、导数的应用

（五）曲线的凹凸性及拐点

曲线凹凸性的判别法：

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在（a,b）内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在（a,b）内，$f''(x)>0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

(2) 若在（a,b）内，$f''(x)<0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

曲线的拐点：

在连续的曲线上的凹弧与凸弧之间的分界点称为曲线的拐点。

五、导数的应用

（六）曲线的水平渐近线与铅直渐近线

定义：

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则

称直线 $\mathrm{y}=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则

称直线 $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

六、不定积分

（一）原函数

区间上$f(x)$的原函数的全体，称为$f(x)$在I上的不定积分

记为$\int f(x)\mathrm{dx}$.

如果F（x）为$f(x)$的一个原函数，则有

$\int f(x)\mathrm{dx}=F(x)+C$，其中$C$为任意常数.

六、不定积分

（二）不定积分

区间上$f(x)$的原函数的全体，称为$f(x)$在I上的不定积分

记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

如果F（x）为$f(x)$的一个原函数，则有

$\int f(x)\mathrm{d}x = F$（x）$+C$，其中C为任意常数.

六、不定积分

（三）不定积分的性质

(1) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$

(2) $\int dF(x) = F(x) + C$, $\int F'(x)dx = F(x) + C$

(3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$（$k$为常数）

(4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

六、不定积分

（四）基本积分公式

$$(1)\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$$

$$(2)\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$(3)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$$

$$(4)\int e^x dx = e^x + C$$

$$(5)\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6)\int \cos x dx = \sin x + C$$

六、不定积分

（四）基本积分公式

$$(7)\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$(8)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

六、不定积分

（五）求不定积分的两种常用方法：

一、换元积分法（凑微分法）

设$f(\mathrm{u})$有原函数$F(\mathrm{u})$，且$\mathrm{u}=v(x)$,则$F[v(x)]$是$f[v(x)]v'(x)$的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx = F[v(x)]+C$$

二、分部积分法

设u、v都是x的可微函数，则有

$$\int udv = uv - \int vdu$$

七、定积分

（一）定积分的定义

$\int_a^b f(x)dx$

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量,$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

七、定积分

（二）定积分的注意点

注意：

(1) 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的符号无关，即应有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt.$

(2) 定积分$\int_a^b f(x)dx$中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分的符号，即

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

特别地有

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

七、定积分

（三）定积分的性质

1.常数可以提到积分号之外，即若k为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和

即有

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

可以推广到有限个函数的代数和的情况.

3.定积分的可加性：如果积分区间$[a,b]$被点c分成两个小区间$[a,c]$与$[c,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4.如果在区间$[a,b]$上，总有$f(x) \le g(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

七、定积分

（四）牛顿——莱布尼茨公式

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

（五）定积分的几何意义

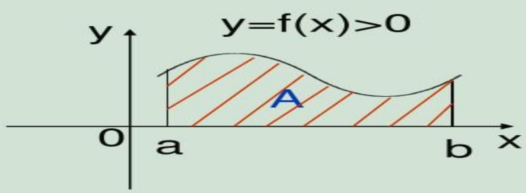
(1) 当$f(x) \geq 0$时，定积分$\int_a^b f(x)dx$表示由连续曲线$y = f(x)$,直线$x = a, x = b(a < b)$和x轴所围成的曲边梯形$aABb$的面积S，即$S = \int_a^b f(x)dx$

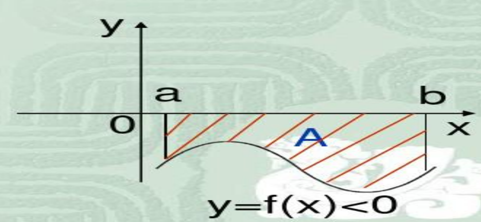
(2)当$f(x) \leq 0$时，曲边梯形$aABb$的面积S如图2.

即$S = -\int_a^b f(x)dx$

$$1.\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A & f(x) \geq 0 \\ -A & f(x) < 0 \end{cases}$$

A表示以y=f(X)为曲边的曲边梯形面积





七、定积分

（五）定积分的几何意义——求平面图形面积

（1）由$y=f(x),x=a,x=b(a<b)$及x轴所围成的封闭平面图形的面积S:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

(2)由$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$x=a,x=b(a<b)$所围成的封闭平面图形的面积S:

$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|dx$$

（3）由$x=\vartheta(y),y=c,y=d(c<d)$及$y$轴所围成的封闭平面图形的面积$S$:

$$S=\int_c^d |\vartheta(y)|dy$$

(4)由$x=\vartheta_1(y),x=\vartheta_2(y),y=c,y=d(c<d)$所围成的封闭平面图形的面积$S$:

$$S=\int_c^d |\vartheta_2(y)-\vartheta_1(y)|dy$$

(5)由$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$所围成的封闭平面图形的面积S:

先求两条曲线的交点，只需求解方程组:$\begin{cases} y=f_1(x) \\ y=f_2(x) \end{cases}$，得出交点中$x$的最小值，记为$a$,及交点中$x$的最大值，记为$b$，则

$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|dx$$

七、定积分

（五）定积分的几何意义——求旋转体体积

（1）曲线段$y=f(x),a\le x\le b$绕Ox轴旋转所得旋转体体积 V_x:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

(2)曲边梯形$y=f(x)$，$x=a,x=b(a<b)$及Ox轴所围成的图形绕Ox轴旋转所得旋转体体积 V_x:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

（3）曲线段$x=\vartheta(y)$，$c\le x\le d(c<d)$绕Oy轴旋转所得旋转体体积 V_y:

$$V_y=\pi\int_c^d \vartheta^2(y)dy$$

(4)曲边梯形$x=\vartheta(y)$，$y=c,y=d(c<d)$及Oy轴所围成的图形绕Oy轴旋转所得旋转体体积 V_y:

$$V_y=\pi\int_c^d \vartheta^2(y)dy$$

七、定积分

（五）定积分的几何意义——求旋转体体积

(5)由$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$x=a, x=b(a<b)$所围成的封闭图形绕Ox轴旋转所得旋转体体积 V_x：

$$V_x=\pi\int_a^b\left|f_2^{\ 2}(x)-f_1^{\ 2}(x)\right|dx$$

(6)由$x=\vartheta_1(y)$，$x=\vartheta_2(y)$，$y=c, y=d(c<d)$所围成的图形绕Oy轴旋转所得旋转体体积 V_y：

$$V_y=\pi\int_c^d\left|\vartheta_2^{\ 2}(y)-\vartheta_1^{\ 2}(y)\right|dy$$

八、多元函数

（一）多元函数定义

定义：设D为xOy平面上的一个区域，如果对于D上的每一点P（x, y），变量z依照某一规律f有唯一确定的数值与之对应，则称z为x, y的函数，记作$z = f(x, y)$

类似的可以定义三元函数，记作$u = f(x, y, z)$

二元及二元以上的函数统称多元函数.

八、多元函数

（二）偏导数

偏导数的求法：

求二元函数$z=f(x,y)$对x和y的偏导数，并不需要新的方法，当求$f(x,y)$对x的偏导数时，只要将二元函数中的y看成是常数，而对x求导数就行了.

同理，求$f(x,y)$对y的偏导数时，只要将二元函数中的x看成是常数，而对y求导数就行了.

如果要求$f(x,y)$在点（x_0,y_0）处的偏导数，只需在偏导函数中将$x=x_0$，$y=y_0$带入即可。

八、多元函数

（三）二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y)$$

称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 为 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 .

八、多元函数

（四）二元函数极值

解题思路：设函数 $z=f(x,y)$在点（x_0,y_0)的某邻域内连续，有一阶和二阶连 续偏导数，且

$f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$

又设

$f''_{xx}(x_0,y_0)=A, f''_{xy}(x_0,y_0)=B, f''_{yy}(x_0,y_0)=C$

则（1）当$B^2-AC<0$时，函数$f(x,y)$在点（x_0,y_0)处取得极值，且当$A<0$时时有极大值，当 $A>0$时有极小值.

（2）$B^2-AC>0$时，函数$f(x,y)$在点（x_0,y_0)处无极值.

（3）$B^2-AC=0$时，函数$f(x,y)$在点（x_0,y_0)处极值不能确定.

八、多元函数

（五）全微分

全微分 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

一元函数$y=f(x)$在点x处可导与可微是等价的 。

二元函数$z=f(x，y)$可微与偏导数存在的关 系是：

函数$z=f(x，y)$在点$(x，y)$处可微的必要条件是偏 导数

$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$存在。可微的充分条件 是$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续。

类似地，若三元函数 $u=f(x,y,z)$可微，则

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

九、常微分方程

（一）一阶微分方程

（1）可分离变量的解法

（2）一阶线性微分方程

$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的解法，可用公式法求解

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

九、常微分方程

（二）二阶线性微分方程

$y'' + py' + qy = 0$的通解形式

特征方程$r^2 + pr + q = 0$的根r_1, r_2

(1)$\Delta = p^2 - 4q > 0$,两个不等的实根r_1, r_2，$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2)$\Delta = p^2 - 4q = 0$,两个相等的实根r_1, r_2，$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$

(3)$\Delta = p^2 - 4q < 0$,一对共轭复根$r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i$，$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

若$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$为对应的齐次方程的通 解，y^*为非齐次方程的特解

则$C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$为非齐次方程的通解

九、无穷级数

（一）定义：设有数列 $\{u_n\}(n=1,2,\ldots)$, 称表达式 $u_1+u_2+\ldots$
$u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为无穷级数，简称级数 ，而称$u_1$为首项，
u_n为级数的一般项。

（二）收敛与发散

如果数列$\{S_n\}$有极限，即 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

极限值S称为级数的和，或者说 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛收敛于 S，

记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$.反之，若极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数发散 。

九、无穷级数

（三）收敛级数的必要条件

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，由此可知：

若$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$一定发散

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0$，级数的收敛性不能判断，如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，

级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛。

（四）绝对收敛与条件收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$一定收敛，此时$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$称为绝对收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，但级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，此时收敛为条件收敛

九、无穷级数

（五）判定方法

1.比较判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}_n$皆为正项级数，且 $0 \le u_n \le \mathrm{v}_n$（$n = 1,2,\ldots n$).则

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛。

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}_n$必发散。

2.比值判别法（达朗贝尔 判别法）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则$\begin{cases} \rho < 1\text{时收敛} \\ \rho > 1\text{时发散} \\ \rho = 1\text{时不定} \end{cases}$

如果u_n常有因子 n，用这种方法判别正项 级数的收敛性比较方便

九、无穷级数

（六）收敛半径

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径的求法

(1）对于不缺项的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,则

$$收敛半径R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ 0, \rho = +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \end{cases}$$

九、无穷级数

（六）收敛半径

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径的求法

(2)对于缺项的幂级数 .如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$，令$u_n = a_n x^{2n}, u_{n+1} = a_{n+1} x^{2(n+1)}$,

考察$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right| = \rho x^2$

则当$\rho x^2 < 1$，级数收敛，可知

$$\text{收敛半径 } R = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty，\quad \rho = 0 \\ 0，\quad \rho = +\infty \end{cases}$$

十、向量代数与空间解析几何

（一）空间直线方程

直线的标准方程：

过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于向量$s=\{m, n, p\}$的直线方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

称为直线的标准式方程（又称点向式方程，对称式方程）

常数$s=\{m, n, p\}$为所给直线的方向向量。

十、向量代数与空间解析几何

（二）曲面方程

（1）球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

（2）椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（3）圆柱面：$x^2+y^2=R^2$

（4）椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

（5）双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

（6）抛物柱面：$x^2-2py=0(p>0)$

（7）旋转抛物面：$z=x^2+y^2$

（8）圆锥面：$x^2+y^2-z^2=0$

祝考试顺利！