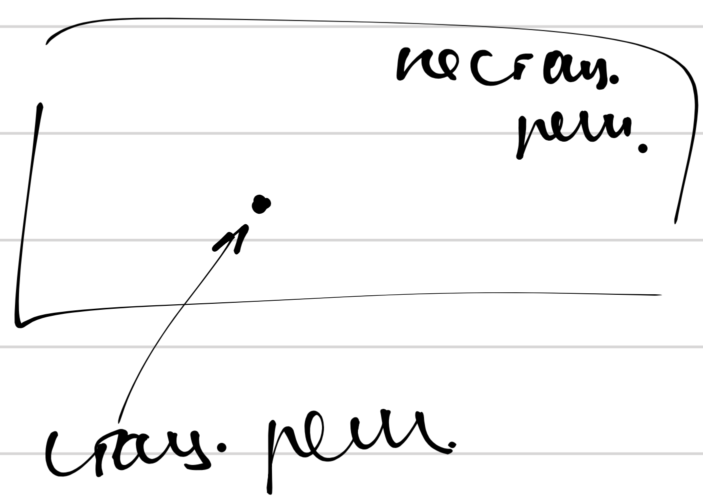
привет !

ARIMA

(!) ур-ие - ещё не процесс

$y_t = 0.5 y_{t-1} + u_t$, u_t - б. шум.



(!) можно один и тот же процесс записать как решение разных ур-ий

$y_t = 0.5 y_{t-1} + u_t$

$y_t = \frac{1}{1-0.5L} u_t = u_t + 0.5 u_{t-1} + 0.5^2 u_{t-2} + \ldots$

u_t - б. шум

$y_t = 2 \cdot y_{t-1} + v_t$

$y_t = \frac{1}{1-2L} v_t = -\frac{1}{2} F (1 + 0.5F + 0.5^2 F^2 \ldots) \cdot v_t$

v_t - б. шум.

$$y_t = \frac{1}{1-0.5L} \cdot u_t = \frac{1}{1-2L} \cdot v_t$$

$$\frac{1}{1-0.5L} \cdot u_t = \frac{1}{-2L} \left(\frac{1}{1-0.5F} \right) \cdot v_t$$

$$u_t = (1-0.5L) \cdot \frac{1}{-2} \cdot F \cdot \left(\frac{1}{1-0.5F} \right) \cdot v_t$$

Теорема: если $|\alpha| < 1$ и u_t - б. шум, то $\frac{1-\alpha L}{1-\alpha F} \cdot u_t$ тоже б. шум.

Опр. (y_t) — это $AR(p)$ процесс отн. по б. шума (u_t), если

$y_t - 0{,}12 y_{t-1} + 0{,}06 y_{t-2} = u_t + 8$

$(1 - 0{,}12L + 0{,}06L^2)\, y_t = u_t + 8$

① (y_t) это решение ур-ия

$$P(L)\cdot y_t = u_t + c \qquad \deg P(L) = p$$
$$\boxed{P(0) = 1}$$

$\boxed{\text{② } (y_t) \text{ предст. как } MA(\infty) \text{ отн-но } (u_t). \quad y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} \ldots\ldots}$

② $\Rightarrow$ $AR(p)$ стац-н!

②, ① $\Rightarrow$ не любое ур-ие в ①.

①, ② $\Rightarrow$ корни $P(L)$ от-ся $|\ell| > 1$.

Опр (y_t) ARMA(p,q) процесс отн-но б. шума (u_t) если.

①
$$P(L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + C$$
$$\deg P = p \qquad \deg Q = q \qquad P(0) = 1$$
$$Q(0) = 1$$

P и Q взаимно просты (нет общ. корней)

$\boxed{\text{② } (y_t) \text{ предст. как } MA(\infty) \text{ отн-но } (u_t). \quad y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} \ldots\ldots}$

② $\Rightarrow$ ARMA(p,q) стац-н!

②, ① $\Rightarrow$ не любое ур-ие в ①.

①, ② $\Rightarrow$ корни $P(L)$ от-ся $|\ell| > 1$.

ARMA(1,1) отн-но (u_t)

$$\boxed{(1-\beta L)\cdot y_t = (1+\alpha L)\cdot u_t + c}$$

$u_t \sim N(0;\, \sigma^2)$ незав.

пар-ры: $\alpha,\ \beta,\ c,\ \sigma^2$

Упр. y_t – ARMA(1,1) процесс отн-но (u_t) б. шума

$$y_t = 0{,}3\, y_{t-1} + u_t + 0{,}2\, u_{t-1}$$ ← обратим.

ARMA(1,1)

прив-те другое ур-ие, реш-м к-го явл-ся тот же y_t.

$$\underbrace{(1-0{,}3L)}\cdot y_t = (1+0{,}2L)\,u_t$$

$$(1-0{,}3L)\cdot y_t = (1+0{,}2F)\,\boxed{\frac{(1+0{,}2L)}{(1+0{,}2F)}\cdot u_t}$$ v_t

$$(1-0{,}3L)\, y_t = (1+0{,}2F)\cdot v_t$$

$$(1-0{,}3L)\cdot y_t = 0{,}2F\,(1+5L)\cdot v_t \qquad V_t = 0{,}2\, v_{t+1}$$

$$(1-0{,}3L)\cdot y_t = (1+5L)\cdot V_t$$

$$y_t = 0{,}3\, y_{t-1} + V_t + 5V_{t-1}$$, где V_t – б.шум ← не обратим.

Опр.-ие (есть вар-ции! Vaart „lectures on time series")

$\boxed{y_t \sim ARMA(p,q) \text{ отн-но } (u_t)}$ обратим, если

[y_t - стац-н, y_t вар-ся как $MA(\infty)$ отн-но u_t]

u_t можно пр-ть в виде $MA(\infty)$ отн-но y_t.

$u_t = c + y_t + \delta_1 y_{t-1} + \delta_2 y_{t-2} + \delta_3 y_{t-3} + \dots$

Теорема.

Если y_t обр. $ARMA(p,q)$ отн-но б. шума (u_t) с ур-ем $P(L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + c$, то все корни $Q(l)$ по модулю $|l| > 1$.

Теорема

Любой $ARMA(p,q)$ процесс отн-но (u_t) с ур-ем $P(L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + c$ без $|l| = 1$ у полинома $Q(L)$ допускает единств-нную обратимую запись.

ARIMA процессы.

В реальности много нестац-х процессов.

Бывает:

y_t - не стац-н

Δy_t - стац-н

y_t - не стац.

Δy_t - не стац.

$\Delta^2 y_t$ - стац

Опр. Если $\Delta y_t \sim ARMA(p,q)$ отн-но б. шума (u_t) с ур-нием
$$P(L)\cdot \Delta y_t = Q(L)\cdot u_t + c$$
[осторожно!]
$$P(L)\cdot(\Delta y_t - \mu) = Q(L)\cdot u_t$$
то $(y_t) \sim \underline{ARIMA(p,\boxed{1},q)}$ отн-но б. шума (u_t) с ур-нием
$$P(L)\cdot(1-L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + c$$

ARIMA = Auto Regressive | Integrated Moving Average

Опр $(y_t) \sim ARIMA(p,d,q)$ отн-но б. шума (u_t) с ур-нием $P(L)\cdot(1-L)^d\cdot y_t = Q(L)u_t + c$, если
$$\Delta^d y_t \sim ARMA(p,q) \text{ отн-но } (u_t)$$
с ур-нием $P(L)\cdot\Delta^d y_t = Q(L)\cdot u_t + c$.

На практ $y_t \sim ARIMA(3,2,4)$
$$z_t = \Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$$
$$z_t \sim ARMA(3,4)$$

ARIMA должна быть экономной!

---

26 пар-в.

$y_t \sim ARIMA(12,1,12)$
$$\Delta y_t \sim ARMA(12,12)$$
$$\Delta y_t = c + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_{12} u_{t-12} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \beta_{12}\Delta y_{t-12}$$
$$u_t \sim N(0;\sigma^2)$$

Опр $SARMA(p,q)(P,Q)[12]$ - стац. ар ARMA(a,b) отн-но (u_t) к-рую можно с меньшим числом пар-в переписать в виде

$$P_{non}(L)\cdot P_{seas}(L^{12})\cdot y_t = Q_{non}(L)\cdot Q_{seas}(L^{12})u_t + c$$

где $\deg P_{non} = p$
$\deg P_{seas} = P$
$\deg Q_{non} = q$
$\deg Q_{seas} = Q$.

$SARMA(2,1)(1,2)[12]$ — ARMA(14, 25) с огранич. на коэфф

ar, ma, sar, sma

$$\underbrace{(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2)}_{ar}\cdot\underbrace{(1-\delta_1\cdot L^{12})}_{sar}\cdot y_t = \underbrace{(1+\alpha_1 L)}_{ma}\cdot\underbrace{(1+\theta_1 L^{12}+\theta_2 L^{24})}_{sma}\cdot u_t + c$$

$\boxed{\text{Опр}}$ $y_t \sim SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)[12]$

$$\Delta^d\cdot\Delta_{12}^D\cdot y_t \sim SARMA(p,q)(P,Q)[12]$$

$\Delta = 1-L$ $\quad$ $\Delta_{12} = 1-L^{12}$ $\quad$ $\Delta_{12}\cdot y_t = y_t - y_{t-12}$

$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

обычно:
$d\in\{0,1,2\}$
$D\in\{0,1\}$

как выбрать?
1. медл / универс CV.
2. быстр / менее универс AIC
3. быстр / менее универс ADF, KPSS...

→ автом алгоритм Хайндмана-Хиндмана

$\boxed{\text{MIDAS}}$