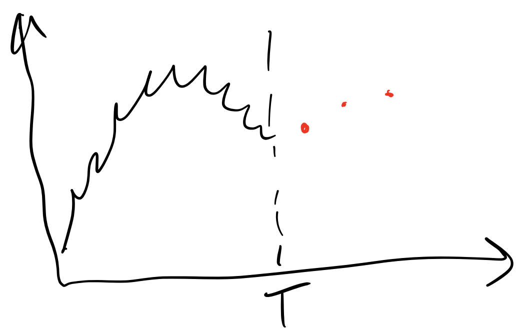
AR(p) - процесс

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$



ε_t - WN

$E(\varepsilon_t) = 0$

$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = 0 \ \forall s \neq 0$

AR(2)

$$y_{T+1} = \beta_0 + \beta_1 y_T + \beta_2 y_{T-1} + \varepsilon_{T+1}$$

$$E(\widehat{y_{T+1}} | I_T) = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 y_T + \hat\beta_2 y_{T-1}$$

$$Var(y_{T+1} | I_T) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$y_{T+2} = \beta_0 + \beta_1 y_{T+1} + \beta_2 y_T + \varepsilon_{T+2}$$

$$E(\widehat{y_{T+2}} | I_T) = \beta_0 + \beta_1 E(y_{T+1} | I_T) + \beta_2 y_T =$$

$$= \underbrace{\hat\beta_0 + \hat\beta_1 \hat\beta_0 + \hat\beta_1^2 y_T + \hat\beta_1 \hat\beta_2 y_{T-1} + \hat\beta_2 y_T}_{} =$$

$$Var(y_{T+2} | I_T) = \beta_1^2 Var(y_{T+1} | I_T) + \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = (1 + \beta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\hat y_{T+h} | I_T) \xrightarrow[h \to \infty]{} \hat\mu$$

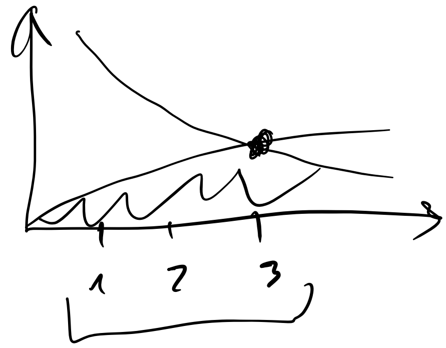
$\mu = \beta_0 + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu$

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\beta_0}{1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}}$$

ARMA(P, Q)

$P(L) y_t = Q(L) \varepsilon_t + c \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$y_t = 0{,}5\, y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}2\, \varepsilon_{t-1}$



ARMA(p, q)

3 representations

1) $\underbrace{(1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_p L^p)}_{P(L)} y_t = c + \underbrace{(1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_q L^q)}_{Q(L)} \varepsilon_t$

2) AR-representation

$$\frac{P(L)}{Q(L)} = \underbrace{1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots}_{} = \pi(L)$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_q} + \pi_1 y_{t-1} + \ldots + \varepsilon_t$$

2) MA-representation

$$\frac{Q(L)}{P(L)} = 1 + \psi_1 L + \ldots = \psi(L)$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \beta_1 - \ldots - \beta_p} + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} \ldots$$

Стационарность
ARMA(p, q)

ARMA - ур-е $\quad P(L)$ степени ≥ 1

$$P(L) y_t = c + Q(L) \varepsilon_t$$

1) $P(L)$ и $Q(L)$ не имеют общих корней.

То: 1) ∞ кол-во решений

2) Если и только если у AR-полинома все корни $!= 1$ $\Rightarrow \exists!$ стац. решение

3) Если и только если все корни > 1 $\Rightarrow \exists!$ стаб решение

2) $P(L)$ и $Q(L)$ имеют общие корни:

То:

1) ∞ кол-во решений

2) Если $c = 0$, сократим обе полинома и вернёмся к случаю 1

3) Если $c \neq 0$ и среди общих корней есть $\lambda = 1$, то стац решений нет

4) Если $c \neq 0$ и $\lambda_i \neq 1$ $\forall i$, то сократим и к случаю 1

1) $y_t = 2 + 0{,}5 y_{t-1} + \varepsilon_t$

$(1 - 0{,}5 L) y_t = 2 + \varepsilon_t$

$1 - 0{,}5\lambda = 0$

$\lambda = 2 > 1$

$y_t = \frac{2}{1 - 0{,}5} + \frac{\varepsilon_t}{1 - 0{,}5L}$

$y_t = 4 + \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2} + \dots$

2) $y_t = 2 + 2y_{t-1} + \varepsilon_t$

$1 - 2\lambda = 0$ $\qquad y_t = \frac{2}{1-2} + \frac{\varepsilon_t}{1-2L}$

$\lambda = \frac{1}{2} < 1$

$y_t = -2 - 0{,}5\,\varepsilon_{t+1} - 0{,}25\,\varepsilon_{t+2} + 0{,}5^3\,\varepsilon_{t+3} \ldots$

$\frac{\varepsilon_t}{1-2L} = \frac{\varepsilon_t}{-2L(1-\frac{1}{2L})} = \varepsilon_t \cdot -\frac{1}{2}F \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2}F)} =$

$=$

3) $\overset{c=0}{y_t = y_{t-1}} + \varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2}$

$(1-L)\,y_t = (1 - 0{,}5L - 0{,}5L^2)\,\varepsilon_t$

$1 - 0{,}5\lambda - 0{,}5\lambda^2$

$D = 0{,}25 + 2$

$\lambda_1 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5}{-2} = 1$

$\lambda_2 = \frac{-0{,}5 + 1{,}5}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\cancel{(1-L)}\,y_t = \cancel{(1-L)}(1-0{,}5L)\,\varepsilon_t$

$y_t = (1-0{,}5L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1}$