L8. Тесты / автоматич. выбор модели:

~30 мод ETS

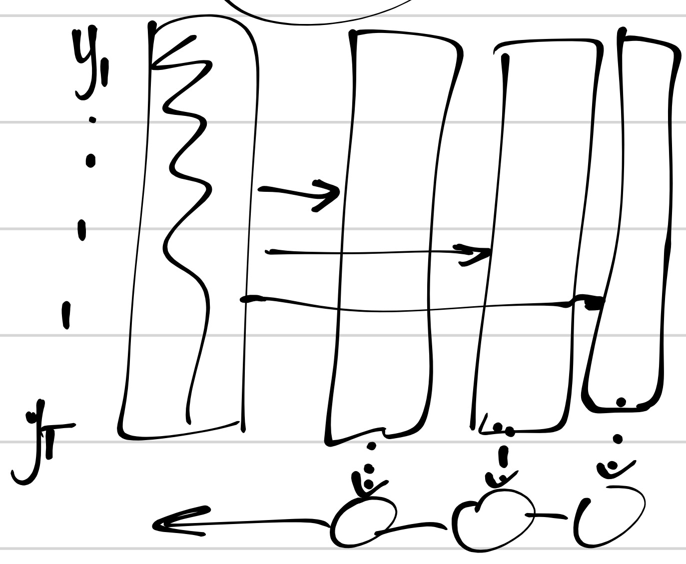
ARIMA ~∞ мод.

идейная!

Упр. ETS(AAN) – частный случай какой ARIMA?

$$
\begin{cases}
y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\
l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\
b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\
u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав} \\
l_0, b_0 \text{ – старт. пол.}
\end{cases}
$$

STL



$l_0, b_0, \sigma^2, \alpha, \beta$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \sim N\left(\ldots ; \ldots \right)$$

$$\Delta y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t - (l_{t-2} + b_{t-2} + u_{t-1})$$

$$\Delta y_t = b_{t-2} + \alpha u_{t-1} + \beta u_{t-1} + u_t - u_{t-1}$$

$$\Delta^2 y_t = \beta \cdot u_{t-2} + u_t - u_{t-1} + (\alpha + \beta - 1)\cdot(-u_{t-1} + u_{t-2})$$

$$\boxed{\Delta^2 y_t} \sim MA(2) \text{ – стац.}$$

$$y_t \sim ARIMA(0, 2, 2)$$

$$y_t \sim ETS(AAN) \Rightarrow \Delta^2 y_t \sim MA(2)$$

β, α, σ^2

$$\ln f(y_1 \ldots y_T \mid \Theta_{ETS}) \to \max_{\Theta_{ETS}}$$

$\alpha, \beta, \sigma^2, l_0, b_0$

$$\ln f(y_3, y_4 \ldots y_T \mid y_1, y_2, \Theta_{MA}) \to \max_{\Theta_{MA}}$$

Как выбрать модель?

1. CV → скользящим окном
   → растущим окном

+ универсальная
− медленная

2. „на глазок" − на графики прогнозов
   − на графики остатков.

3. AIC

$$AIC = 2k - 2\ln L$$

+ быстрый
− не универс-ый

можно ср-ть

$\ln(y_1 \ldots y_T \mid \theta_A)$ vs $\ln(y_1 \ldots y_T \mid \theta_B)$

$\ln(y_2 \ldots y_T \mid y_1, \theta_A)$ vs $\ln(y_2 \ldots y_T \mid y_1, \theta_B)$

ETS

·корректно сравнить по AIC

ARIMA

ARMA

AIC

ловушка?

AR(1)

стац-рин. этого ур-ия

$y_t = \beta \cdot y_{t-1} + u_t$ → $E(y_1) = 0$ → $Var(y_1) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ − незав.

честный ML

$\ln f(y_1 \ldots y_T \mid \theta) \to \max$ $\quad \theta = \binom{\beta}{\sigma^2}$

$\ln f(y_1 \mid \theta) + \ln f(y_2 \mid y_1, \theta) + \ln f(y_3 \mid \ldots) + \ldots$

$y_1 \sim N\left(0; \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right)$

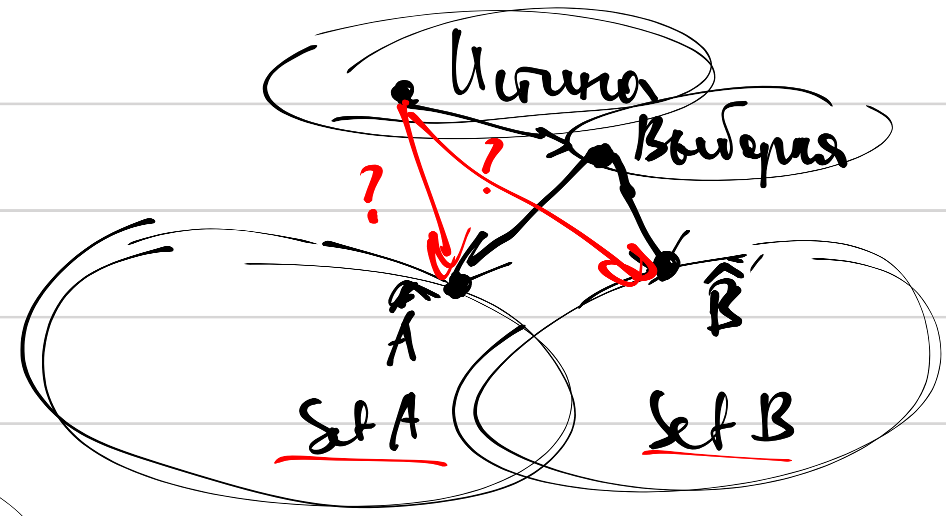
упрощение.

$$\begin{cases} \hat{y}_t = \hat{\beta} \cdot y_{t-1} \quad (OLS) \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (y_t - \hat{\beta} y_{t-1})^2}{T} \end{cases}$$

ARMA(2,3) vs ARMA(1,2) — AIC ok

ARIMA(2,1,3) vs ARMA(2,3) — AIC fails

4. Тесты



Все тесты.

В H_0 истина попадает в рассм-ое мн-во моделей.

ADF_0, ADF_c, ADF_{ct}

$KPSS_c$, $KPSS_{ct}$

PP, ...

$\Delta = 1 - L$

$1 - l = 0$

$l = 1$

Тесты на ед-ый корень.

ADF_c

$$\Delta y_t = c + \beta \cdot y_{t-1} + \delta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \ldots + \delta_p \cdot \Delta y_{t-p} + u_t$$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$, незав.

Augmented Dickey Fuller

H_0: $\beta = 0$

Δy_t – $AR(p)$ процесс отн-но (u_t):

→ Δy_t – стац-н

→ Δy_t выр-ся как $MA(\infty)$ отн. (u_t)

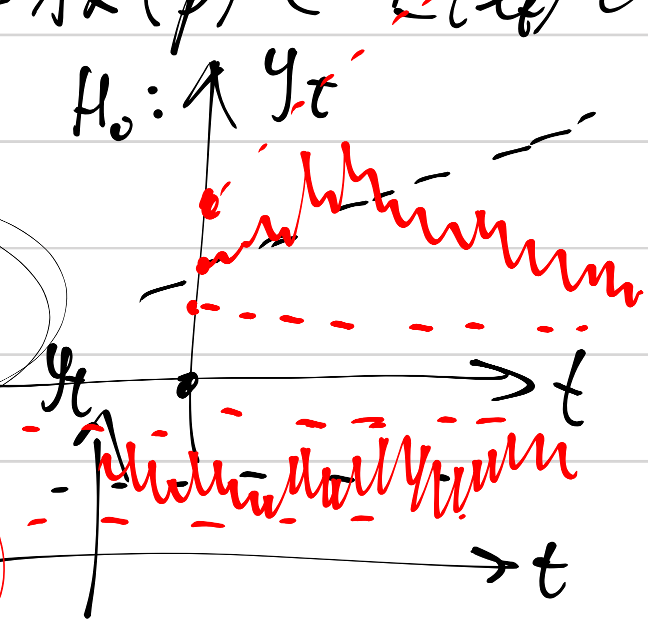
$$\Delta y_t = \mu + x_t \qquad x_t \sim AR(p) \text{ с } E(x_t) = 0$$

$$y_t \sim ARIMA(p, 1, 0)$$

$$y_t = (y_0 + t \cdot \mu) + \sum_{i=1}^{t} x_i$$

H_A: $\beta < 0$

$y_t \sim AR(p+1)$ процесс отн-но (u_t)



H_0:
$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} x_i$

H_A
$y_t \sim AR(p+1)$
$c\ E(y_t)=0$

ADF_0
$$\Delta y_t = \beta \cdot y_{t-1} + \delta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \delta_p \cdot \Delta y_{t-p} + u_t$$

ADF_{ct}
$$\Delta y_t = c + g \cdot t + \beta \cdot y_{t-1} + \delta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \delta_p \cdot \Delta y_{t-p} + u_t$$

H_A:

H_0:
$$y_t = y_0 + \mu t + V \cdot t^2 + \sum_{i=1}^{t} x_i \qquad x_i \sim AR(p) \quad c\ E(x_i)=0$$
$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot t + x_t$$

Упр
$$\Delta y_t = 5 + 6t + 0{,}3\Delta y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot t + x_t \qquad x_t \sim AR(1) \quad c\ E(x_t)=0$$
α_1, α_2?

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + x_t = 5 + 6t + 0{,}3(\alpha_1 + \alpha_2(t-1) + x_{t-1}) + u_t$$

α_1, α_2?

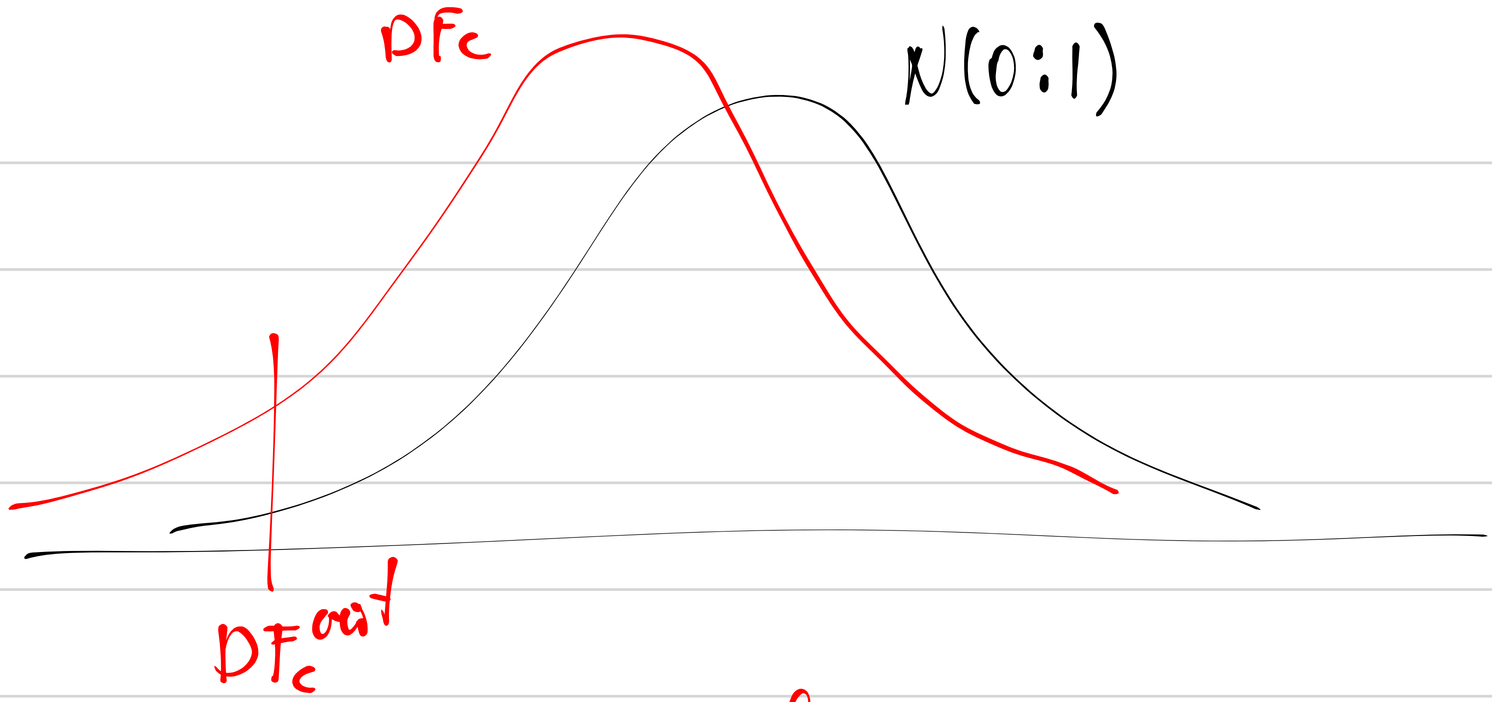
Алгоритм ADF_c

шаг 1

OLS $\widehat{\Delta y_t} = \hat{c} + \hat{\beta} \cdot y_{t-1} + \hat{\delta}_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \hat{\delta}_p \Delta y_{t-p}$

шаг 2.
$$ADF = \frac{\hat{\beta} - 0}{se(\hat{\beta})}$$

При верной H_0 $\quad ADF \xrightarrow{dist} DF_c$



H_0 отвергается | H_0 не отвергается