Зачем мне эти sin и cos?

?

① $\sin\frac{kt}{m}$, $\cos\frac{kt}{m}$ — предикторы в модели

② $\boxed{\text{преобразование Фурье — визуализации}}$

③ sin, cos для описания сезонности в модели состояние-наблюдение.

$y_1, y_2, y_3, \dots$ — недельные данные (частота)

1 неделя c_1

2 неделя c_2

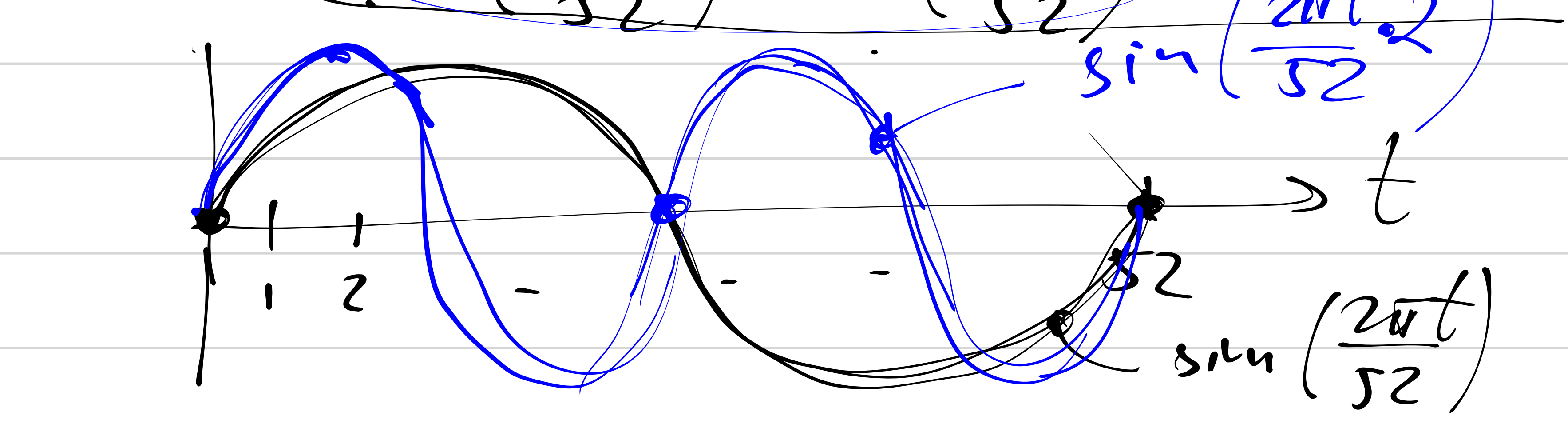
$\vdots$

52 неделя c_{54}

54 коэфф. расточительно!

$$\begin{cases} y_t = c + \underbrace{\boxed{\sin,\ \cos}}_{s_t} + z_t \\ z_t \sim ARMA(p,q) \end{cases}$$

$$s_t = ?\sin\left(\frac{2\pi t}{52}\right) + ?\cos\left(\frac{2\pi t}{52}\right) + ?\sin\left(\frac{2\pi t\cdot 2}{52}\right) + ?\cos\left(\frac{2\pi t \cdot 2}{52}\right)$$

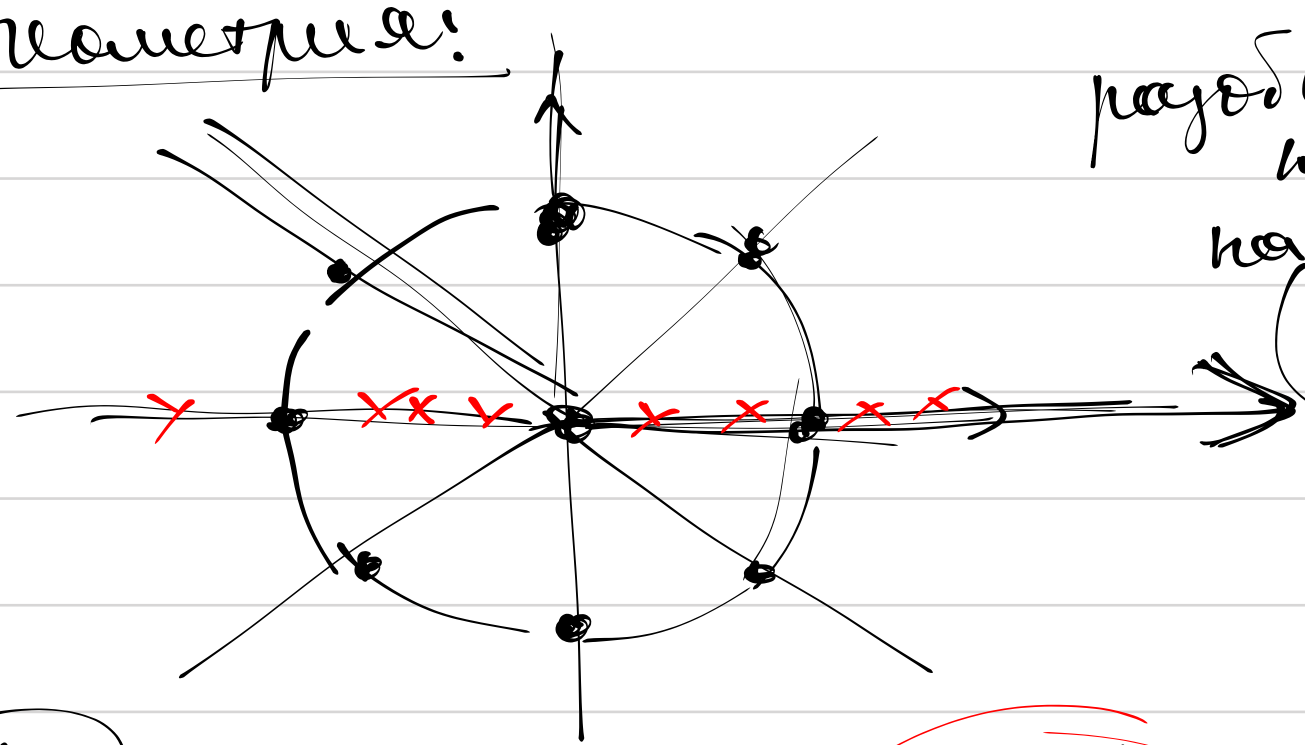


Дискретное преобразование Фурье

$x_0, x_1, \ldots\ldots x_{n-1}$ $(\in \mathbb{R})$

$X_0, X_1, \ldots\ldots X_{n-1}$ $(\in \mathbb{C})$

геометрия!



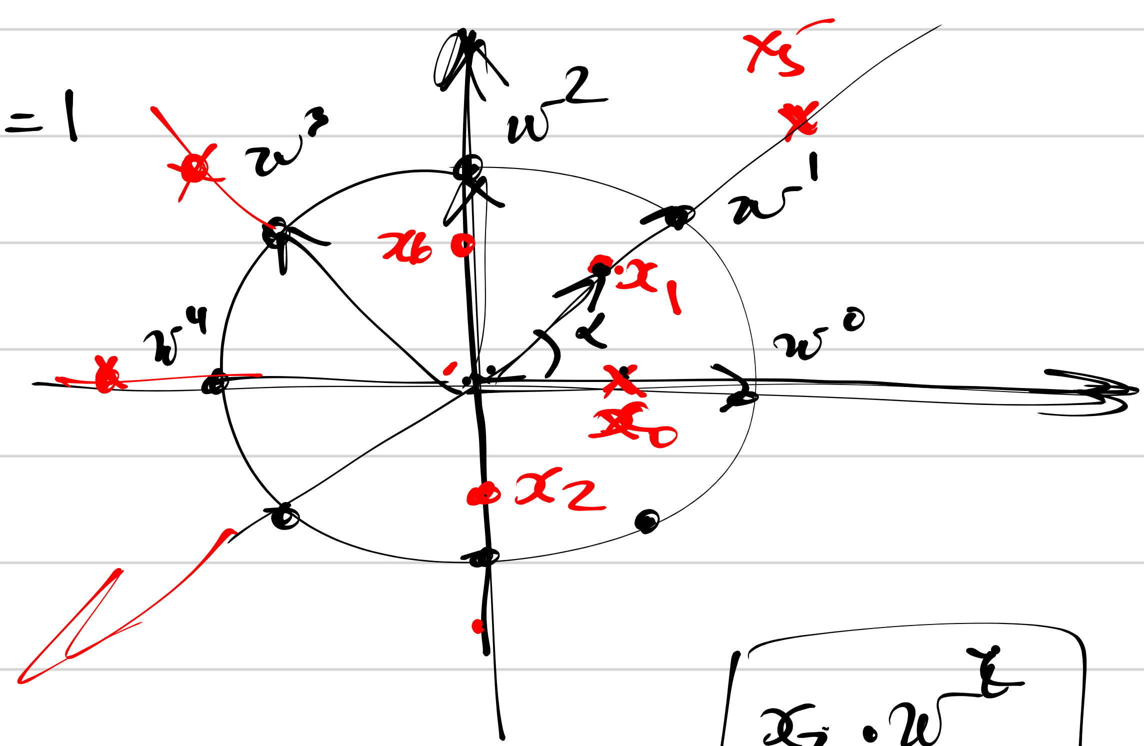
разобьём круг на n частей $(n=8)$

1. X_0

$k=0.$ $\quad X_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\tau=0}^{n-1} x_\tau \in \mathbb{R}$

X_1

$k=1$



$N=8$

$\alpha = \frac{2\pi}{8}$

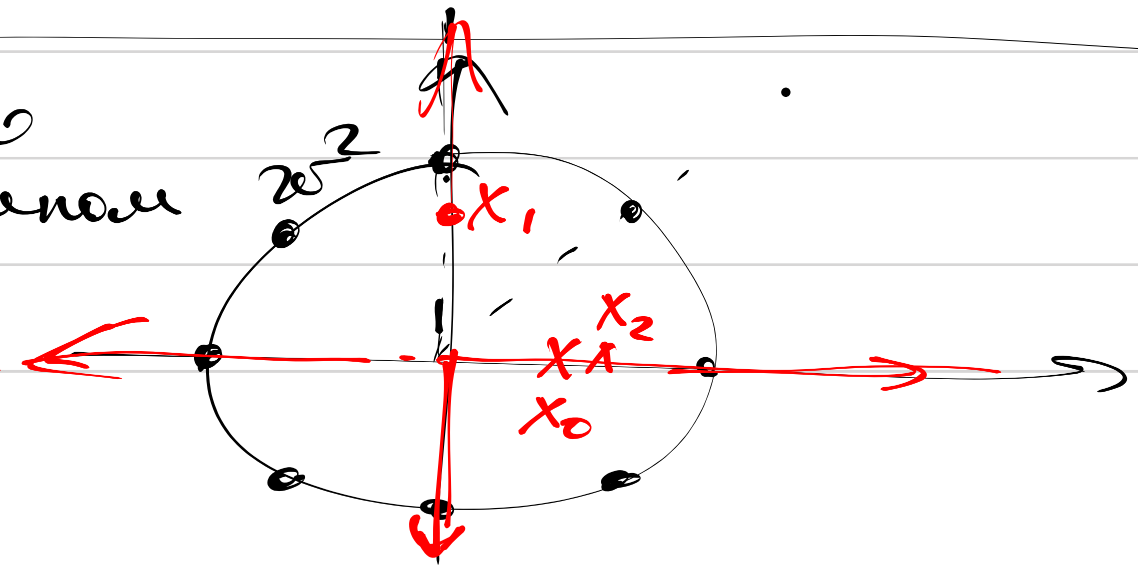
$w = 1 \exp\left(i\,\frac{2\pi}{8}\right)$

$\boxed{x_\tau \cdot w^\tau}$

$$X_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\tau=0}^{n-1} x_\tau \cdot w^\tau \in \mathbb{C}$$

X_2 шагаю с темпом

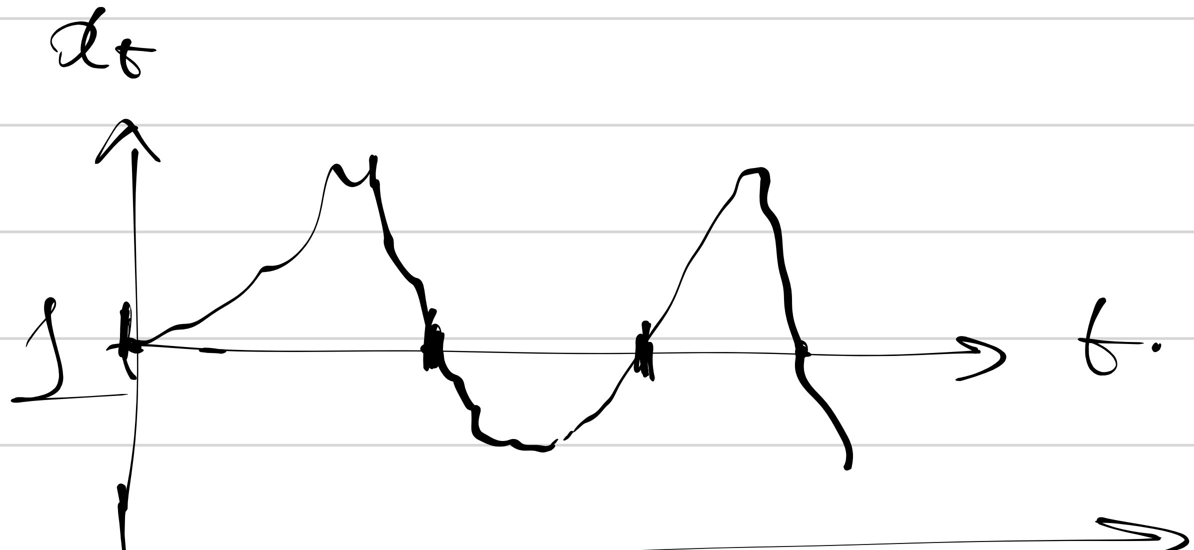
$w^2 = 1 \cdot \exp\left(i\,\frac{2\pi}{8} \cdot 2\right)$



$$w = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

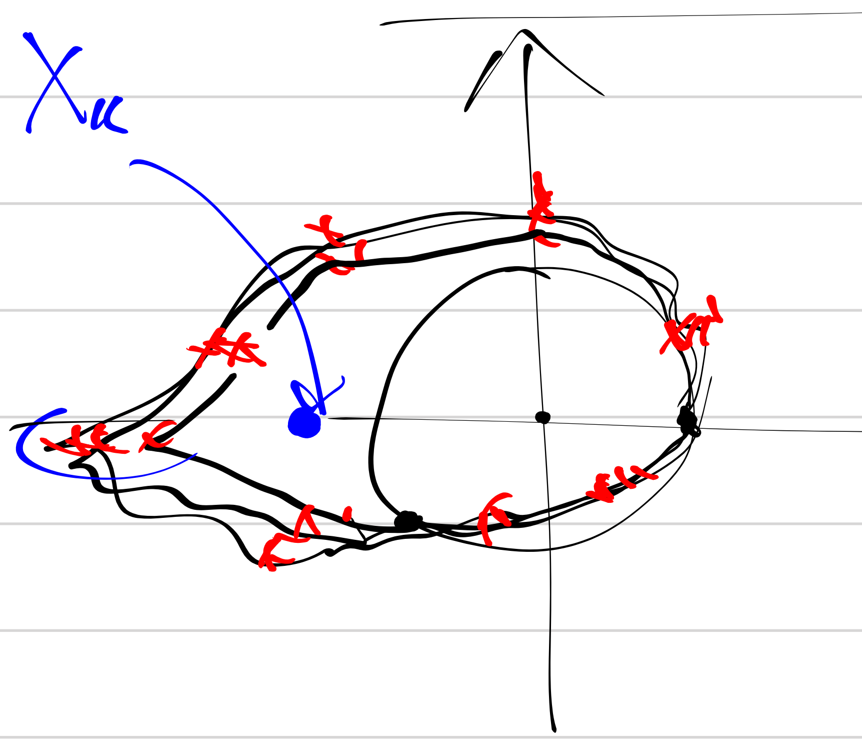
$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{n-1} x_t \cdot \left(w^{-k}\right)^t$$

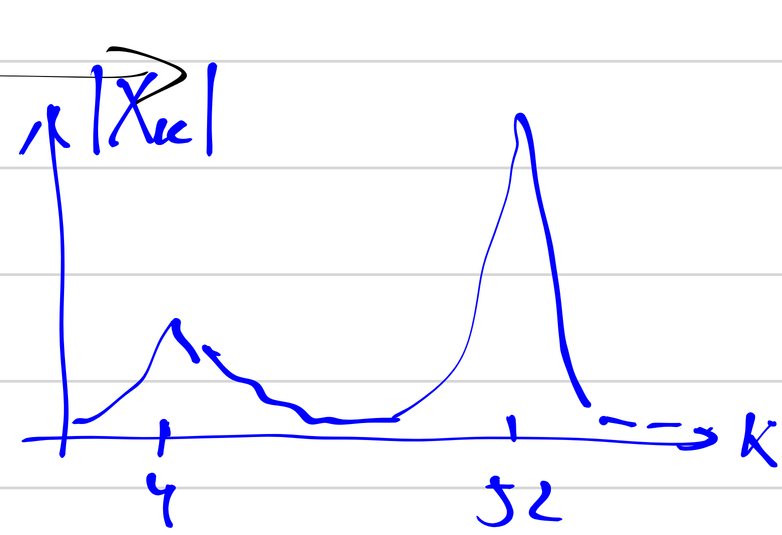
$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$



будет такое k.

один период цикла будет соотв-ть одной намотке на окр-сть.





$$x_0 \; \dots \; x_{n-1}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$X_0 \; \dots \; X_{n-1}$$

$$w^{kr} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}kr\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}kr\right)$$

$$X_k = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} x_r \cdot \left(w^k\right)^r \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$X = F \cdot x$$

$$x = F^{-1} \cdot X$$

$$x_k = \sum_{r=0}^{n-1} X_r \cdot \left(\frac{1}{w^k}\right)^r \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

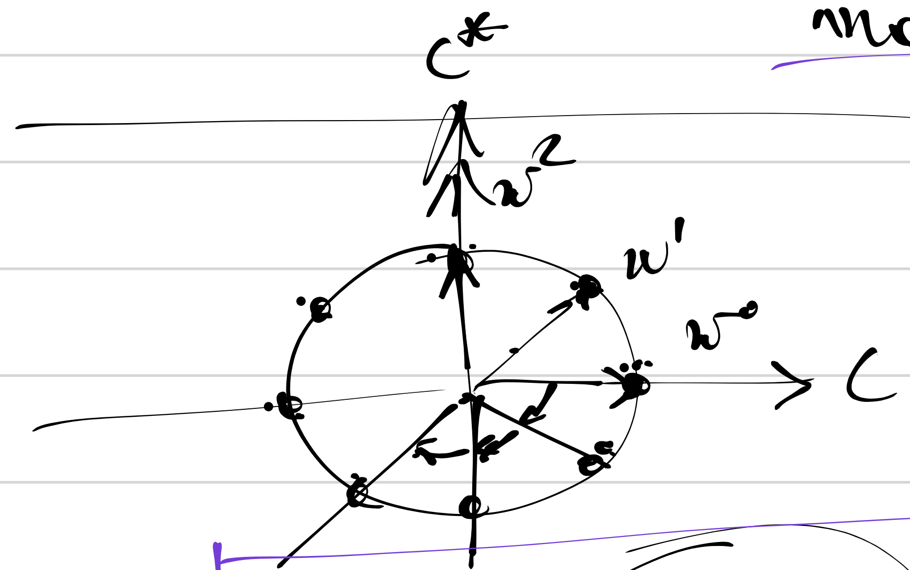
комплекс.

разложение в ряды

$$\boxed{\sum \xi \sin\left(\frac{2\pi}{n}kr\right) + \sum \xi \cos\left(\frac{2\pi}{n}kr\right)}$$

$$\sum \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{m}\right) + \sum \beta_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{m}\right) \quad !!$$

UCM – unobserved component model

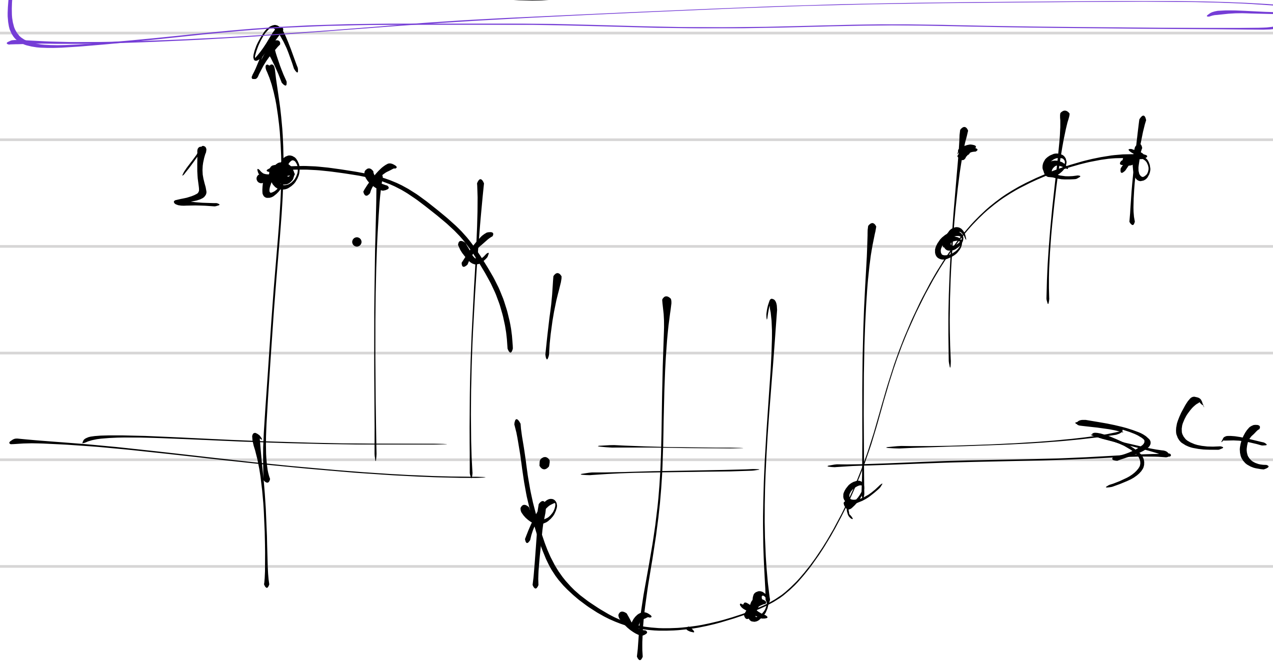


$$\begin{pmatrix} c_t^{(1)} \\ c_t^{*(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{t-1}^{(1)} \\ c_{t-1}^{*(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ w_t^* \end{pmatrix}$$

нужное

$N(0;\sigma_w^2)$

$N(0;\sigma_{w^*}^2)$



тренды

ц. (без тр.) (сумма по разным λ)

ARMA(p,q)

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + c_t + \beta\cdot x_t + \varepsilon_t$$

$$c_t = c_t^{(1)} + c_t^{(2)} + c_t^{(3)} + \ldots + c_t^{(p)}$$

[ост. с док-ей statsmodels]

$\lambda_1 = \frac{2\pi}{m}$ $\lambda_2 = \frac{2\pi}{m}\cdot 2$ $\lambda_3 = \frac{2\pi}{m}\cdot 3$ . . . .