2020-12-10 Четверг

Фильтр Калмана.

Врем. ряды.

Ура !!

идея 1

ARIMA
ETS
UCM
....

} – частный случай модели состояние-наблюдение (пространства состояний)

[State-space model.]

набл пер-ая. y_t (вектор) /наблюдение/

Скрытая пер-ая x_t вектор /состояние/

напр.

x_t – факт. положен. машины

y_t – сырые данные с gps

$$\begin{cases} x_t = F \cdot x_{t-1} + \underset{\sim}{v_t} \\ y_t = G \cdot x_t + \underline{w_t} \end{cases}$$

(эволюция состояния)

(как зав-т набл от сост-ия)

F, G - пост м-цы.

(F_t, G_t но они известны в t)

к моменту t!

набл $1, y_0, y_1, y_2, \ldots y_t$

$$H_t = \mathrm{Span}(1, y_0, y_1 \ldots y_t)$$

v_t не зав от прошлого: $x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3} \ldots$
$w_{t-1}, w_{t-2}, w_{t-3} \ldots$

w_t не зав от $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$
$v_{t-1}, v_{t-2}, v_{t-3} \ldots$

$E(v_t) = 0 \quad E(w_t) = 0$

Упр. Любую нашу модель зап-ть как модель пр-ва сост-ий.

AR(2) $\longrightarrow$ State-space model.

$$y_t = \phi_1 \cdot \underline{y_{t-1}} + \phi_2 \cdot \underline{y_{t-2}} + u_t$$

/стац/ y_t не зав от $u_{t+1}, u_{t+2} \ldots$

в SSM запрещён лаг $t2$, но разрешены вектора.

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

$$x_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} \text{ - состояние}$$

$$\boxed{y_t = [1 \ \ 0] \cdot \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + 0}$$

$(y_t = G \cdot \underset{\sim}{x_t} + w_t)$

State-space model

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[r] \arrow[d] & x_3 \arrow[r] \arrow[d] & x_4 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& y_1 & y_2 & y_3 & y_4 &
\end{tikzcd}$$

$x_t = F\cdot x_{t-1} + v_t$ $\qquad$ $y_t = G\cdot x_t + w_t$

θ – вектор парам-в модели

$F(\theta)$ $\qquad$ $Var(v_t)$ зав-т от θ

$G(\theta)$ $\qquad$ $Var(w_t)$ —//— θ

$Cov(v_t, w_t)$ —//— θ

θ? maxlik $\qquad$ $\max\limits_{\theta} \ell(y_1, y_2, y_3 \dots y_n \mid y_0, \theta)$

ℓ = логар-м правд-ия.

$\to \hat{\theta}_{ML} \to$ прогноз-ы

$$f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n \mid y_0, \theta) =$$
$$= f(y_1 \mid y_0, \theta) \cdot f(y_2 \mid y_1, y_0, \theta) \cdot$$
$$\cdot f(y_3 \mid y_2, y_1, y_0, \theta) \cdot \dots$$
$$\dots \cdot f(y_n \mid y_{n-1}, y_{n-2}, \dots y_0, \theta)$$

$\ln[\dots]$

$\ell = \ln f$ $\qquad$ условная лог ф. правд.

$$\ell(y_1 \dots y_n \mid y_0, \theta) =$$
$$= \ell(y_1 \mid y_0, \theta) + \ell(y_2 \mid y_1, y_0, \theta) + \dots$$

обычно: $y \sim N(?;?)$ совм. норм. распр.

$$\ell(y_i \mid y_{i-1}, y_{i-2} \ldots y_0, \theta)$$

в этом случае распр-ие опр-ся

$$E(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2} \ldots y_0, \theta)$$

и $Var(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2} \ldots y_0, \theta)$.

будем учиться считать эти штуки !!

Если их умеем считать, то умеем для зад-го θ и y_0 находить $\ell(y_1 \ldots y_n \mid y_0, \theta)$.

Фильтр Калмана.

(с высоты птичьего полёта.)

обозн: $H_t = \text{Span}\{1, y_0, y_1 \ldots y_t\}$

Π_t = проектор на H_t.

$\theta = 7$ KF

$\Pi_0 y_1 \to \Pi_1 y_2 \to \Pi_2 y_3 \to \ldots \ldots$ $\ell = -3$

$\theta = 8$ KF

$\ell = -5$

$\theta = 6$ KF

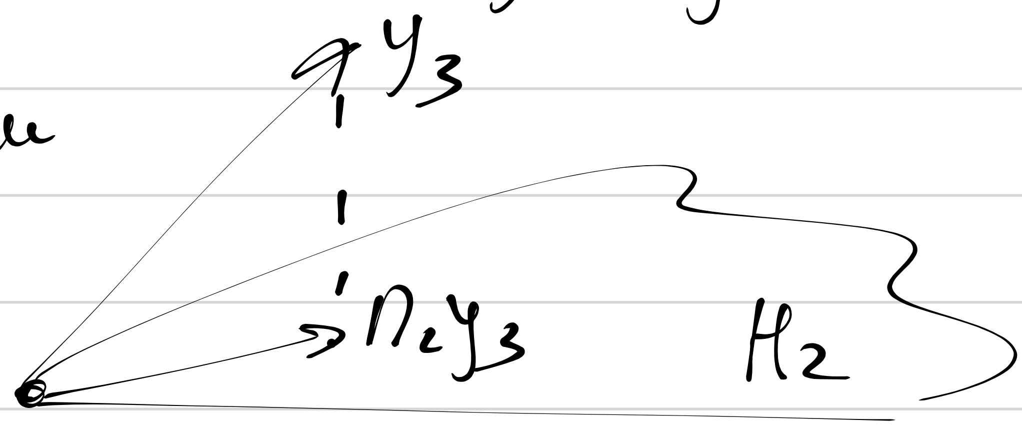
$\ell = -2$

Чтобы посчитать значение ф. прав-ия в нек-ой точке Θ мы запускаем ит-ую проц-ру Фильтр Калмана

$H_t = \mathrm{Span}\{1, y_0, y_1, \ldots, y_t\}$

Π_t — проектор (действие) на H_t

$\Pi_2 \underbrace{y_3}_{\text{кого проец-м}} = ?\cdot 1 + ?\, y_0 + ?\, y_1 + ?\, y_2$



$\Pi_t\, \text{Слок} = E(\text{Слок} \mid y_0, y_1, y_2 \ldots y_t)$

Основная.

$$\to \underbrace{\begin{pmatrix} \Pi_{t-1}\, x_{t-1} \\ Var(\Pi_{t-1}\, x_{t-1}) \\ Var(x_{t-1}) \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow[\text{у } x \text{ сдв. индекс}]{\text{easy. Step 1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Pi_{t-1}\, x_t \\ Var(\Pi_{t-1}\, x_t) \\ Var(x_t) \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow[\text{у } \Pi \text{ сдв. индекс}]{\text{hard Step 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Pi_t\, x_t \\ Var(\Pi_t\, x_t) \\ Var(x_t) \end{pmatrix}}_{C} \to$$

$y_t = G\cdot x_t + w_t$

Сост: $\to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to$

набл: $y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5$

Знаем.

A → B   B → C

A → B

ур.1 $\quad x_t = F\cdot x_{t-1} + v_t$

$$\Pi_{t-1}\, x_t = \Pi_{t-1}(F x_{t-1}) + \Pi_{t-1}\cdot v_t$$

$$\boxed{\Pi_{t-1}\, x_t} = \boxed{F\cdot \Pi_{t-1}\cdot x_{t-1}} + 0$$

ур.2 $\quad \Pi_2\, x_2 = 7y_0 + 8y_1 + 9y_2$

$$\Pi_2\, x_3 = 7\cdot F y_0 + 8 F y_1 + 9 F y_2$$

$$Var(\Pi_{t-1}\, x_t) = \underbrace{Var(F\,\Pi_{t-1}\cdot x_{t-1})}_{\text{с транспон}} =$$

$$= F\cdot Var(\Pi_{t-1}\, x_{t-1})\cdot F^T$$

ур.3 $\quad Var(x_t) = Var(F x_{t-1} + v_t) =$

$$= Var(F x_{t-1}) + Var(v_t) = F\, Var(x_{t-1}) F^T + Var(v_t)$$

$B \Rightarrow C$

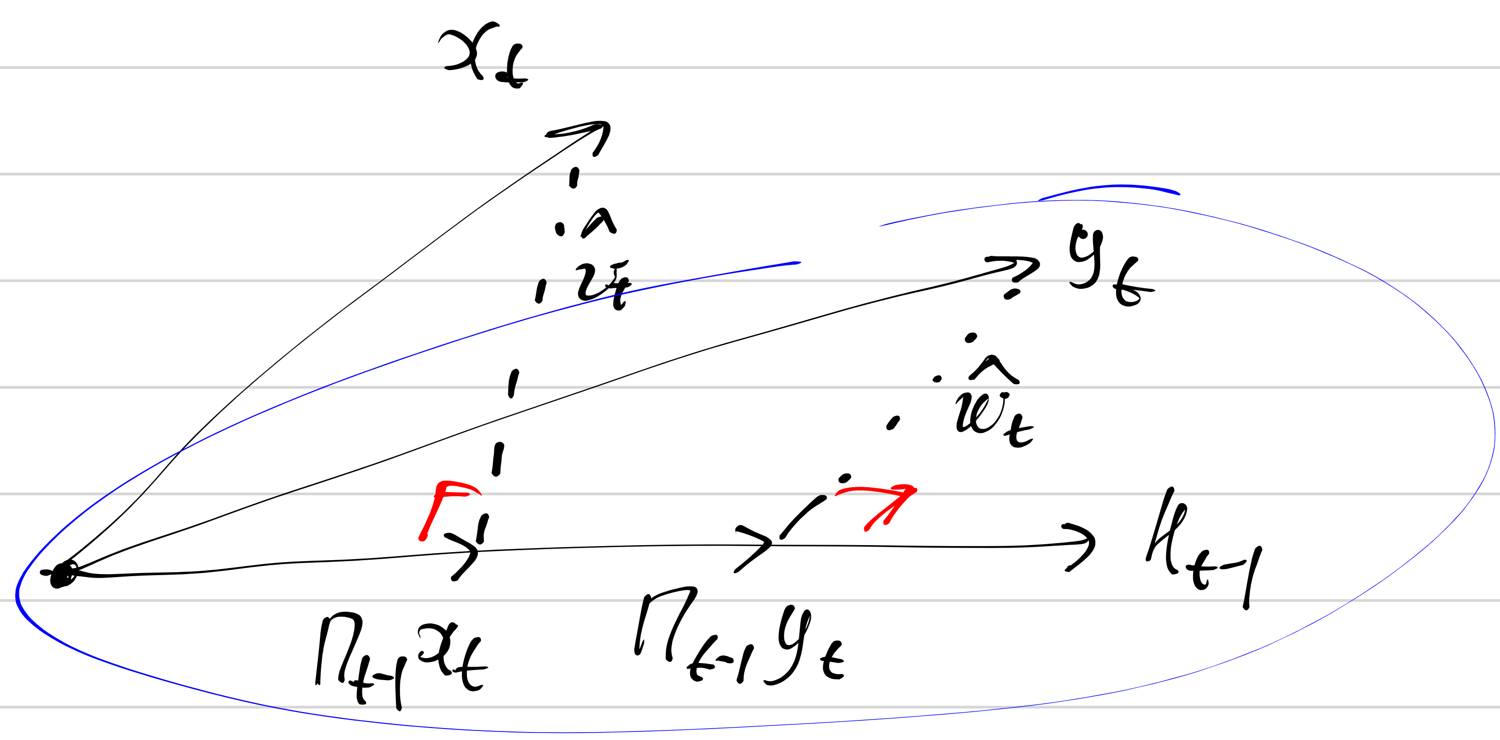
ур 3 очевидно !!

B. $\longrightarrow$ C

$\Pi_{t-1} x_t$ $\qquad\qquad$ $\Pi_t x_t$

$Var(\Pi_{t-1} x_t) \longrightarrow Var(\Pi_t x_t)$

$Var(x_t)$ $\qquad$!! $\qquad$ $Var(x_t)$



$$\begin{cases} x_t = F x_{t-1} + v_t \\ y_t = G x_t + w_t \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_t &= \Pi_{t-1} x_t + \hat{v}_t \\ y_t &= \Pi_{t-1} y_t + \hat{w}_t \end{aligned}$$

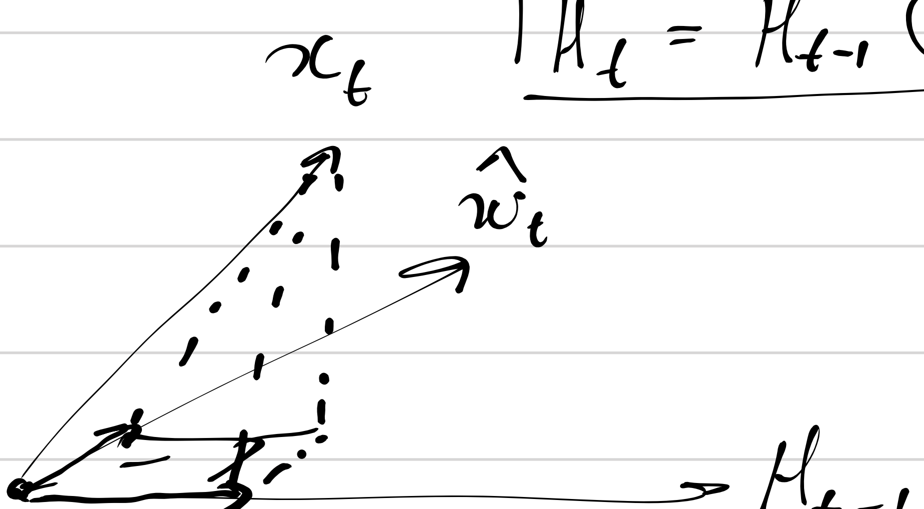
см. на карт

$$H_t = H_{t-1} + \mathrm{Span}(y_t) = H_{t-1} + \mathrm{Span}(\hat{w}_t)$$

$\hat{w}_t \perp H_{t-1}$

ур. 1

$$\boxed{H_t = H_{t-1} \oplus \mathrm{Span}(\hat{w}_t)}$$



$$\Pi_t x_t = \underbrace{\Pi_{t-1} x_t}_{изв} + \underline{\Pi_{\hat{w}_t} \cdot x_t}$$

[на сл.] (отложим)

Ур 2 $(B \to C)$

$$\mathrm{Var}(\Pi_t x_t) = \mathrm{Var}(\underbrace{\Pi_{t-1} x_t}_{\in H_{t-1}} + \underbrace{\Pi_{\hat{w}_t} \cdot x_t}_{\in \mathrm{Span}(\hat{w}_t)}) =$$

$$= \underbrace{\mathrm{Var}(\Pi_{t-1} x_t)}_{\text{посчитано на пред. ит-ции}} + \underbrace{\mathrm{Var}(\Pi_{\hat{w}_t} x_t)}_{\text{посчитаем}}$$

Что осталось недосчитать?

(осн св)

$\boxed{\Lambda_t \ ?}$

$\to \Pi_{\hat{w}_t} x_t \ ? = \Lambda_t \cdot x_t$

$\to \mathrm{Var}(\Pi_{\hat{w}} x_t) ? = \Lambda_t \cdot \mathrm{Var}(x_t) \cdot \Lambda_t^T$

В след:

$\boxed{\Lambda_t ?}$ $\boxed{\text{как проводить иниц?}}$

$\boxed{\text{AR(2) – на примере?}}$