Привет !!

Копулы

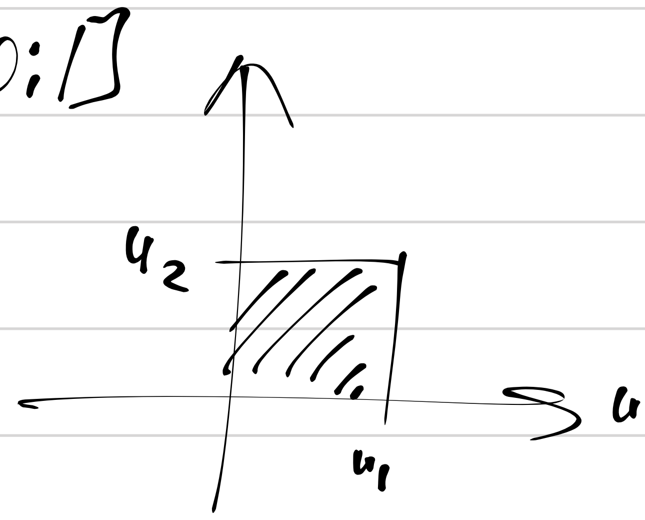
def копула $C(u_1, u_2 \dots u_n)$ — многом. ф-ция распр-ия в-н $U_1, U_2 \dots U_n$ т.что $U_i \sim U[0;1]$.

пример. $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$ $\quad (u_1, u_2 \in [0;1])$

def. ф. распр-ия: U_1, U_2 $\quad P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) = C(u_1, u_2)$

Упр. $U_1 = U_2 \sim U[0;1]$

$C(u_1, u_2) \Leftarrow$



$$= P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) =$$

$$= P(U_1 \le u_1, U_1 \le u_2) = P(U_1 \le \min(u_1, u_2)) =$$

$$= \min(u_1, u_2)$$

Упр. $U_1 = 1 - U_2 \sim U[0;1]$

$$C(u_1, u_2) \overset{?}{=} P(U_1 \le u_1, 1 - U_1 \le u_2) =$$

$$= P(U_1 \le u_1, U_1 \ge 1 - u_2) =$$

$$= \max(1 - u_1 - u_2, 0)$$

Теорема (Sklar)

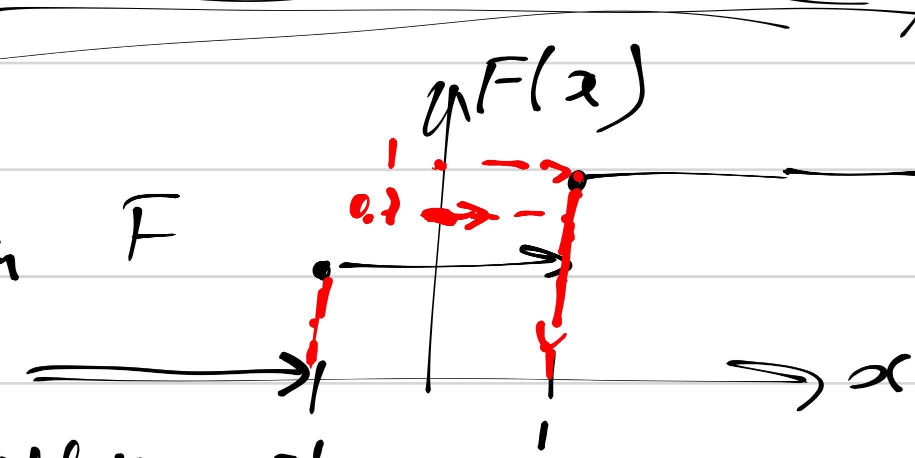
Если у век-ра $(X_1, X_2 \dots X_d)$ совм ф-ция расп F, а индив. ые ф-ции расп-ия $F_1, F_2, \dots F_d$ то сущ-ет связей копула C $\quad F_1(t) = P(X_1 \le t)$

т. что

$$F(F^{-1}(u_1) \dots F^{-1}(u_d)) = C(u_1, u_2, u_3 \dots u_d)$$

$$F(x_1, x_2, \dots x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots F_d(x_d))$$

Что такое F^{-1}? Если F (обобщаем)



доопределяем

$$F^{-1}(q) = \operatorname{Inf}\{x \mid F(x) \ge q\}$$

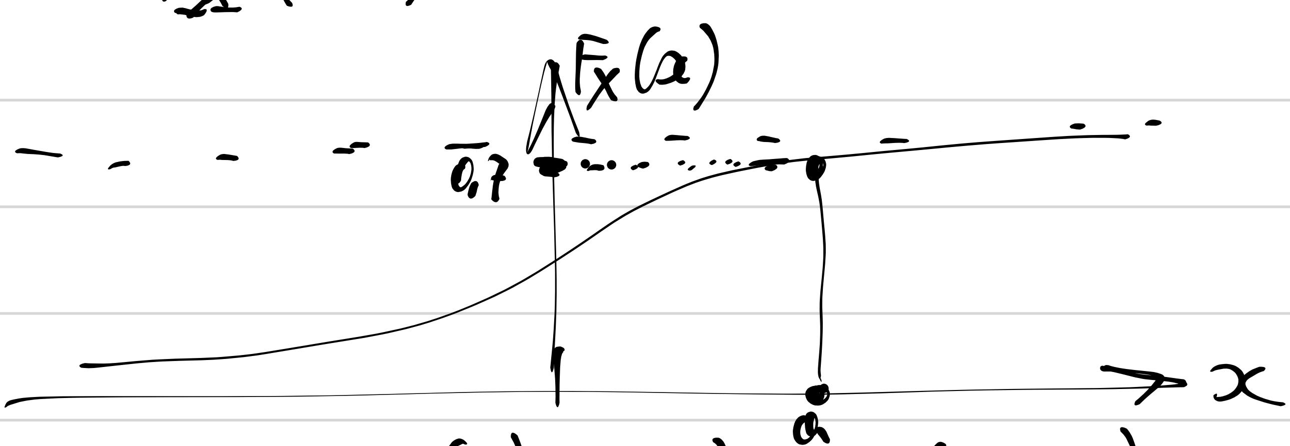
суть идеи!

(если F непр, то C единственна).

В одну сторону

$X \sim$ a.c. непр. сл. вел.

$F_X(X)$? $\sim U[0;1]$ $\quad$! АА-просты



$$P(F_X(X) \le 0{,}7) = P(X \le a) = F(a) = 0{,}7$$

Упр.

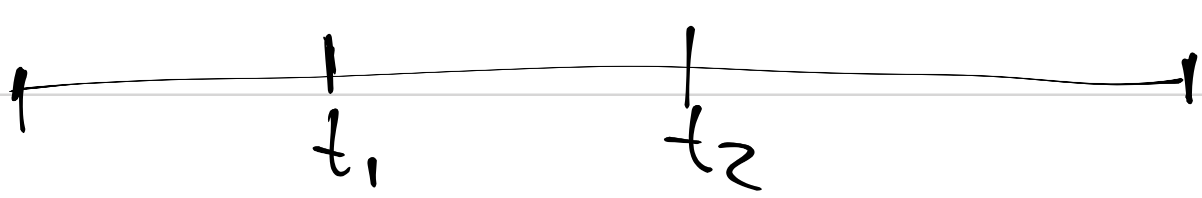
X_1, X_2, X_3 ~ незав $\quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & t \in [0;1] \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

$L = \min(X_1, X_2) \qquad R = \min(X_2, X_3)$

C для L, R ?

$$F_L(t) = P(L \leq t) =$$
$$= P(\min(X_1, X_2) \leq t) =$$
$$= 1 - P(\min(X_1, X_2) > t) =$$
$$= 1 - P(X_1 > t, X_2 > t) =$$
$$= 1 - (1 - t^2)^2 = 2t^2 - t^4$$
$$F_R(t) = 2t^2 - t^4$$

$$F_{L,R}(t_1, t_2) = P(\min(X_1, X_2) \leq t_1, \min(X_2, X_3) \leq t_2)$$



Благ-и Донам лень !!

$L = \max(X_1, X_2), \qquad R = \max(X_1, X_2)$

$$F_L(t) = P(\max \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t) = t^4$$
$$F_R(t) = t^4$$

$\min^2(t_1, t_2)$

$$F(t_1, t_2) = P(L \leq t_1, R \leq t_2) =$$
$$= P(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_1, X_2 \leq t_2, X_3 \leq t_2) =$$
$$= t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \min(t_1^2, t_2^2)$$

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \min(x_1^2, x_2^2) = C(x_1^4, x_2^4)$$

$$C(u_1, u_2) = \sqrt{u_1}\sqrt{u_2} \cdot \min(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$$

$$P(U_1 \le u_1) = C(u_1, 1) = \sqrt{u_1} \cdot \sqrt{u_1} = u_1$$

$$P(U_1 \le 1) = 1$$
$$P(U_2 \le 1) = 1$$

Форм. ые требования к C.

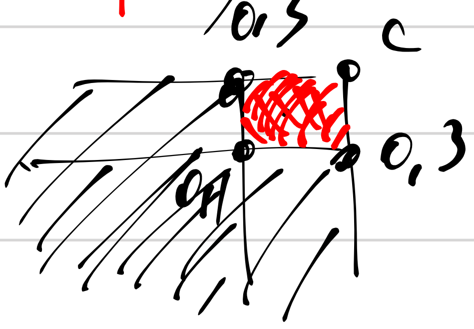
Опр. ф-ция C м. быть копулой если.

1) $C(1, 1, 1, 1, u_i, 1, 1 \dots 1) = u_i$

2) мон. не уб-т по каждому аргументу $\forall u = (u_1 \dots u_d)$

3) Вер-сть попасть в каждую область ≥ 0

$c - 0{,}3 - 0{,}3 + 0{,}1 \ge 0$



Теор. $X_1, \dots, X_d$ - абс. непр. и $h_1, \dots h_d$ - строго мон. ф-ции.

То C для $X_1 \dots X_d$ совп-т с копулой для $h_1(X_1), h_2(X_2) \dots h_d(X_d)$.

док-во $\quad Y_i = h_i(X_i)$

$$F_Y(y_1, y_2) = \underline{C_Y(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2))}$$

$$F_X(x_1, x_2) = C_X(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

цель: $C_Y = C_X$

$$F_{Y_1}(y_1) = P(Y_1 \le y_1) = P(X_1 \le h_1^{-1}(y_1)) =$$
$$= F_{X_1}(h_1^{-1}(y_1))$$

$$\underline{F_Y(y_1, y_2)} = C_Y(F_{X_1}(h_1^{-1}(y_1)), F_{X_2}(h_2^{-1}(y_2)))$$

$$P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) = P(X_1 \le h_1^{-1}(y_1), X_2 \le h_2^{-1}(y_2)) =$$
$$= F_X(h_1^{-1}(y_1), h_2^{-1}(y_2))$$

обозначим $\quad x_i = h_i^{-1}(y_i)$

$$F_X(x_1, x_2) = \underline{C_Y}(\underline{F_{X_1}(x_1)}, \underline{F_{X_2}(x_2)})$$

$$C(-2, -3) = 0$$
$$C(5, 6) = 1$$

Теорема

док-во. $P(U_1 \le u_1 \dots U_d \le u_d) \le P(U_i \le u_i) = u_i$

$$C(u_1, u_2 \dots u_d) \le \underbrace{\min(u_1, u_2 \dots u_d)}$$

копула для $U_1 = U_2 = \dots U_d$

док-во: $\boxed{d = 2}$

$$\left.\begin{array}{l} C(u_1, u_2) \le C(1, u_2) = u_2 \\ C(u_1, u_2) \le C(u_1, 1) = u_1 \end{array}\right| \Rightarrow C \le \min(u_1, u_2)$$

"Devil is in the tails"

def. Гауссовская копула.

$$X_1, X_2, \dots, X_d \sim N(0;1)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \sim N(0; \Sigma)$$

вектор мат. ож.   ков = корр м-ца

$$\Phi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_d) = C^{Gauss}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d))$$

Упр $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = \rho$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$C^{Gauss}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? $\varphi(0) = \frac{1}{2} = P(X_i \le 0)$

$$\boxed{\Phi_{\Sigma}(0, 0) = C^{Gauss}(\varphi(0), \varphi(0))}$$

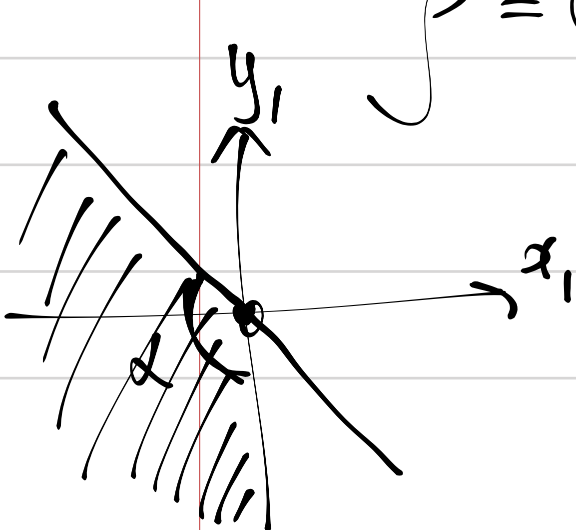
$$= P(X_1 \le 0, X_2 \le 0) \stackrel{?}{=} \frac{\alpha(\rho)}{2\pi}$$

$X_1, Y_1 \sim$ нез $N(0;1)$

$$X_2 = \alpha X_1 + \beta \cdot Y_1$$

$$1 = \mathrm{Var}(X_2) = \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\rho = \mathrm{Cov}(X_2, X_1) = \mathrm{Cov}(\alpha X_1 + \beta Y_1, X_1) = \alpha$$



$\{X_1 \le 0, X_2 \le 0\}$

$$X_2 = \rho \cdot X_1 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot Y_1$$

$$\boxed{\begin{cases} X_1 \le 0, \\ \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Y_1 \le 0 \end{cases}}$$

$$Y_1 \le -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} X_1$$