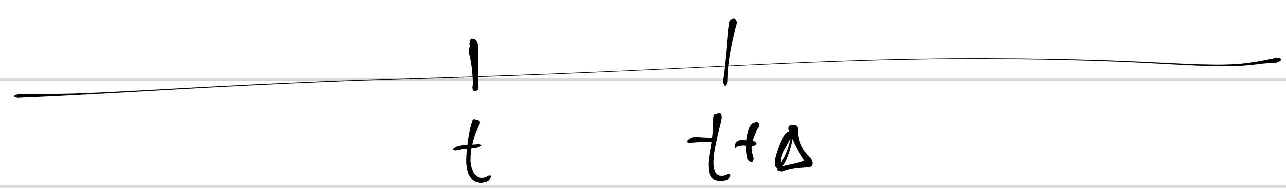
Привет!!

Весна! GARCH и приложения!

Value at Risk (сумма под риском)

X_t - стоим. портф. в t [₽]



$$S = X_{t+\Delta} - X_t \quad \left[\begin{matrix} + \text{ выгода} \\ - \text{ потери} \end{matrix}\right]$$

Var - variance (дисперсия)

VaR - value at risk (сумма под риском)

$$VaR_\alpha(S) = b \qquad \begin{matrix} VaR_{0.99}(S) \\ VaR_{0.01}(S) \end{matrix}$$

$$P(\underbrace{-S}_{\text{убыток}} \le b) = \alpha \qquad (+ \text{ величина убытка})$$

$$P(\text{убыток} \le b) = \alpha$$

$$VaR_{0.99}(S) = 10 \text{ млн ₽}$$

Если нас волнует оценивание VaR, то важно посчитать не только $E(S|\mathcal{F}_t)$, но и $Var(S|\mathcal{F}_t)$. (!)

Интуиция | Упр

$y_t \sim N(\mu; \sigma^2)$ и незав.

$y_1, \vdots, y_T$ набл

Маша знает σ^2

Вовочка не знает σ^2, но может оценить по прошлым данным

$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T} (y_i - \bar{y})^2}{T-1}$$

! $\hat{\sigma}^2$ м. быть $> \sigma^2$ и $< \sigma^2$

М и В строят 95% пред. инт для y_{T+1}.

(инт) а) какова вер-сть того, что у М интервал будет уже чем у В?

б) какие явные ф-лы?

в) что происходит при $T \to \infty$?

$$\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-1}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \ldots + y_T}{T}$$

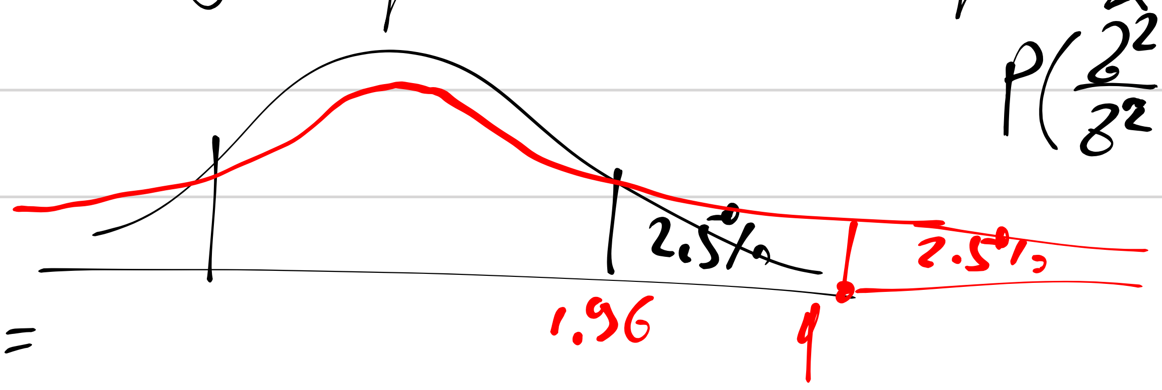
$$-1.96 \le \frac{y_{T+1} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T}}} \le 1.96 \qquad -q \le \frac{y_{T+1} - \bar{y}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{T}}} \le q$$

М PI $\left[\bar{y} - 1.96\sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T}}; \bar{y} + 1.96\sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T}}\right]$

В PI $\left[\bar{y} - q\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{T}}; \bar{y} + q \cdot \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{T}}\right]$

$P(L_M < L_B) = P\left(1.96\sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T}} < q\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{T}}\right) =$

$P\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{1.96}{q}\right)$



$$P(L_M < L_B) = P\left(\boxed{\frac{\hat{\sigma}^2 \cdot (T-1)}{\sigma^2}} \geq (T-1)\cdot \frac{1.96}{q}\right) =$$

χ^2_{T-1}

$T \geq 2$

$$= P\left(\chi^2_{T-1} \geq (T-1)\cdot \frac{1.96}{q}\right)$$

GARCH(1,1)

Does anything beat GARCH(1,1) model?

Шок контента: GARCH(1,1) - это частный случай белого шума!

(u_t) - б. шум!

$E(u_t) = 0$
$Var(u_t) = \sigma^2_u$
$Cov(u_t, u_s) = 0$
$t \neq s$

$u_t = \sigma_t \cdot V_t$ $\quad$ $V_t \sim N(0;1)$ и незав

σ_t - волатильность „растягивающий множитель"

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta\cdot\sigma^2_{t-1} + \gamma\cdot u^2_{t-1}$$

нет противоречия!

σ_t^2 - стац-ый процесс вида $\sigma_t^2 = d + \delta_1 \cdot u^2_{t-1} + \delta_2 \cdot u^2_{t-2} + \ldots$

ARMA(2,3)-GARCH(1,1)

$y_t \sim ARMA(2,3)$

$y_t = c + \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \alpha_2 \cdot y_{t-2} + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \beta_3 u_{t-3}$

u_t ~ б. шум. GARCH(1,1)

V_t незав от $u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$

V_t и σ_t незав

* конечные четв момент у σ_t

Упр. $(u_t) \sim GARCH(1,1)$ [полн. список данные]

$u_t = \sigma_t \cdot \nu_t$ $\quad \nu_t \sim N(0;1)$ незав

$$\sigma_t^2 = 3 + 0{,}2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0{,}3 \cdot u_{t-1}^2$$

а) $E(u_t)$? $Var(u_t)$? $Cov(u_t, u_{t+2})$? $Cov(u_t^2, u_{t+2}^2)$?

б) оцен-ки $\sigma_{100}^2 = 100$ $\quad u_{100} = 2$

постройте 95% PI для u_{101}, u_{102}

а) $E(u_t) = E(\sigma_t \cdot \nu_t) = E(\sigma_t)\underbrace{E(\nu_t)}_{0} = 0$

$Var(u_t) = E(u_t^2) = E(\sigma_t^2 \cdot \nu_t^2) =$
$= E(\sigma_t^2) \cdot \underbrace{E(\nu_t^2)}_{1} = E(\sigma_t^2) \cdot 1$

$\sigma_t^2 \leftarrow$ стац!

$$E(\sigma_t^2) = 3 + 0.2 \cdot E(\sigma_{t-1}^2) + 0{,}3\, E(u_{t-1}^2)$$

$$E(\sigma_t^2) = 3 + 0{,}2 \cdot E(\sigma_t^2) + 0{,}3\, E(\sigma_t^2)$$

$$E(\sigma_t^2) = \frac{3}{0.5} = 6$$

$Var(u_t) = 6 \cdot 1 = 6 \leftarrow$ постоянна

$\sigma_t^2 = Var(u_t \mid u_{t-1}, u_{t-2} \ldots) \leftarrow$ непост.

GARCH = generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity

$Cov(u_t, u_{t+2}) =$

$$= E(u_t \cdot u_{t+2}) - \underbrace{E(u_t) E(u_{t+2})}_{0} =$$

$$= E(\sigma_t \cdot v_t \cdot \sigma_{t+2} \cdot v_{t+2}) =$$

$$= E((\sigma_t \cdot v_t \cdot \sigma_{t+2}) \cdot (v_{t+2})) =$$

$$= E(\sigma_t \cdot v_t \cdot \sigma_{t+2}) E(v_{t+2}) =$$

$$= \ldots \cdot 0 = 0$$

$u_{t-1}, u_{t-2} \ldots \quad u_{t+1}, u_t, u_{t-1} \ldots$

δ) $Var(u_{t+1} \mid u_t, u_{t-1}, \ldots) =$

$$= Var(\sigma_{t+1} \cdot v_{t+1} \mid u_t, u_{t-1} \ldots) =$$

$$= \sigma^2_{t+1} \cdot Var(v_{t+1} \mid u_t, u_{t-1}, \ldots) =$$

$$= \sigma^2_{t+1} \cdot Var(v_{t+1}) = (3 + 0{,}2 \cdot \sigma_t^2 + 0{,}3 \cdot u_t^2) \cdot 1 =$$

$$= 3 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 4$$

$$E(u_{t+1} \mid u_t, \ldots) = \sigma_{t+1} \cdot E(v_{t+1} \mid u_t \ldots) =$$

$$= \sigma_{t+1} \cdot 0 = 0$$

PI : $\left[0 - 1.96 \cdot \sqrt{3 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 4}\,;\ 0 + 1.96 \cdot \sqrt{\ldots}\right]$

$v_t \sim N(0;1) \qquad u_t \not\sim N$