Ура! Всё видно ли?
Слышно?

29 октября 2020. Вр. ряды.

Поехали!

В прошлый раз

MA (moving average)

$$y_t = 7 + \varepsilon_t + 0{,}3\varepsilon_{t-1} + 0{,}5\varepsilon_{t-2}$$

$[\varepsilon_t$ – б. шум$]$

есть ур-ие $\Longrightarrow$ можем посчитать корр $Corr(y_t, y_{t-k})$

В этот раз AR, ARMA

AR – процесс авторегрессии
auto regression.

Мой вывод:

AR-процесс — компактный способ записать «длинный» MA-процесс.

---

def $\boxed{AR(p)\text{-ур-ие}}$

AR-ур-ие ↗
↘ AR-процесс

$$y_t = c + u_t + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \ldots + \beta_k y_{t-k}$$

(u_t) — б. шум

AR-процесс = AR(p)-ур-ие + нач-ые условия.

Пример:

$$y_t = 6 + \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t \qquad \boxed{u_t \sim \text{б. шум.}}$$

a) $y_0 = 0$? Будет (y_t) стац-м?

b) $y_0 = 12$ будет (y_t) стац-м?

c) $y_0 = 12 + u_0 + \frac{1}{2} u_{-1} + \frac{1}{4} u_{-2} + \frac{1}{8} u_{-3} + \ldots$ —//— ?

Стац-сть:

$$\boxed{\begin{aligned} &E(y_t) = \text{const} \\ &cov(y_t, y_{t-s}) = \gamma_s \end{aligned}}$$

$$E(y_0) = E(0) = 0$$

$$E(y_1) = E\left(6 + \frac{0}{2} + u_1\right) = 6$$

$$\begin{cases} y_t = 6 + \dfrac{y_{t-1}}{2} + u_t \\ y_0 = 12 \end{cases}$$

стац-н ли?

$$E(y_t) = 6 + \frac{E(y_{t-1})}{2} + 0$$

$$E(y_0) = E(12) = 12$$

$$E(y_1) = 6 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12$$

$$E(y_2) = 6 + \frac{12}{2} = 12 \ \ldots$$

$$Var(y_t) = Cov(y_t, y_{t-0}) = \gamma_0$$

$$Var(y_0) = Var(12) = 0$$

$$Var(y_1) = Var\left(6 + \frac{12}{2} + u_1\right) = Var(u_1) = \sigma_u^2$$

c) $y_t = 6 + \frac{1}{2} y_{t-1} + u_t$

$$y_0 = 12 + \underbrace{u_0 + \frac{1}{2}u_{-1} + \frac{1}{2}u_{-2} + \ldots\ldots}$$

$$y_1 = 12 + u_1 + \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{4}u_{-1} + \frac{1}{8}u_{-2} + \ldots$$

б. шум!
$E(u_t) = 0$
$Var(u_t) = \sigma_u^2$
$Cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$

$$E(y_t) = 12 \qquad Var(y_t) = \sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\sigma^2 + \ldots =$$

$$= \frac{\sigma^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Cov(y_t, y_{t-2}) = \underbrace{\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \ldots\right)}$$

(y_t) - стац.

$$y_t = 12 + u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{4}u_{t-2} + \frac{1}{8}u_{t-3} + \frac{1}{16}u_{t-4} + \ldots$$

$$y_{t-2} = 12 + u_{t-2} + \frac{1}{2}u_{t-3} + \frac{1}{4}u_{t-4} + \frac{1}{8}u_{t-5} + \ldots$$

AR(p) - ур-ие $p \geq 1$

* решений (процессов) ∞ кол-во
* ∞ решений не стац-ны.

AR(p) - ур-ие u_t - б. шум

$$\boxed{y_t = c + u_t + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p}}$$

Хар-ое ур-ие: $y_t = \lambda^t$

$$\lambda^t = \beta_1 \lambda^{t-1} + \dots + \beta_p \lambda^{t-p}$$

Хар-ое ур-ие. $\boxed{\lambda^p = \beta_1 \lambda^{p-1} + \dots + \beta_p \lambda^0}$

* если у хар-го ур-ия нет корня $\lambda = 1$, то стац-ное решение существует и единственно.
* если у хар-го ур-ия есть корень $\lambda = 1$, то стац-х нет.

! Нужно где есть аккуратно !

цель:
→ прогноз. вперед
→ интерпретир-ть

u_t - случ шоки, происх-ие в t в эк-ке.

Свойство: $\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$ некорр-ны $\{y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} \dots\}$

* если все корни хар-го ур-ия $|\lambda_i| < 1$, то стац-ое решение существует, единственно и оно имеет вид:

$$y_t = c + u_t + ?u_{t-1} + ?u_{t-2} + ?u_{t-3} + \ldots$$

* если все $|\lambda_i| > 1$, то стац. решение будет иметь вид

$$y_t = c + ?u_{t+1} + ?u_{t+2} + ?u_{t+3} + \ldots$$

Как оцен-ся $AR(p)$-процесс?

— МНК. : $AR(2)$
→ MaxLik.

$$\boxed{y_t = c + \beta_1 \cdot y_{t-1} + \beta_2 \cdot y_{t-2} + u}$$

	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}
$t=1$	?	NA	NA
$t=2$	?	?	NA
	?	?	?
	?	?	?
	?	?	?
	?	?	?

зависим. регрессоры в МНК.

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2$

$\to$ max Lik. $\qquad\qquad\qquad$ AR(2)

$$\ln f(y_1, \dots, y_n) \to \max_{\sigma^2, \beta_1, \beta_2}$$

$$\ln f(y_1, y_2) + \underline{\ln f(y_3 | y_1, y_2)} + \ln f(y_4 | y_1, y_2, y_3) + \dots + \ln f(y_n | y_1, y_2 \dots y_{n-1}) \to \max_\theta$$

стартовое /особое/ $\qquad$ типичное!

$$\theta = (\sigma^2, \beta_1, \beta_2)$$

усл. ожид $\qquad$ даёт случ-сть

$$y_t = \boxed{c + \beta_1 \cdot y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2}} + u_t$$

$u_i \sim$ нез $N(0; \sigma^2)$

$$[y_3 | y_1, y_2] \sim N(c + \beta_1 y_2 + \beta_2 y_1 ; \sigma^2)$$

$\to$ (стац. реш, $\forall |\lambda_i| < 1$) $\Rightarrow u_t$ не зав от y_{t-1}, y_{t-2}

$$f(y_3 | y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_3 - c - \beta_1 y_2 - \beta_2 y_1)^2}{\sigma^2}\right)$$

зависит от $y_1\ y_2, y_3,\ \beta_1, \beta_2, \sigma^2 \to \max$

особое слагаемое:

AR(2)-ур-ие /стац. решение с $\forall |\lambda_i| < 1$/ $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ $E(y_t) = \mu_y(c, \beta_1, \beta_2)$,

$Var(y_t) = \sigma_y^2(\sigma_u^2, \beta_1, \beta_2)$

$Cov(y_t, y_{t-1}) = \gamma_1(\sigma_u^2, \beta_1, \beta_2)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}\right)$$

ф-ции от $c, \beta_1, \beta_2, \sigma_u^2$

Итого:

AR(p) – ур-ия
AR(p) – процесс

док-во:

→ Uncart. Time series"

прогнозы: / интерв / ($\lambda = 0{,}7$) [стац. реш-ие]

$$y_t = 2 + 0{,}7 y_{t-1} + u_t \qquad u_t \sim N(0;9)$$

$y_{200} = 5$ PI для y_{201}?

$$y_{201} \mid (y_{200} = 5) = 2 + 0.7 \cdot 5 + u_{201}$$

$$E(y_{201} \mid y_{200} = 5) = 2 + 0{,}7 \cdot 5 + 0 = 5.5$$

$$Var(y_{201} \mid y_{200} = 5) = Var(u_{201} \mid y_{200} = 5) =$$

$$= Var(u_{201}) = 9$$

PI 95% для y_{201}: $[5.5 - 1.96\sqrt{9};\ 5.5 + 1.96\sqrt{9}]$

$$\boxed{\text{Maxlik} \to \hat{\theta},\ \to se(\hat{\theta})} \to$$

CI 95%

$[\hat{\theta} - 1.96 se(\hat{\theta}); \hat{\theta} + 1.96 se(\hat{\theta})]$

$H_0: \theta = 7$ $\boxed{7 \in [CI]?}$

$H_A: \theta \neq 7$

$$\begin{cases} u_t \sim N(0;3) \text{ незав} \\ y_0 = 0 \\ y_t = 6 + \frac{y_{t-1}}{2} + u_t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E(y_t)? \\ Var(y_t)? \end{matrix}$$

AR(1) ур-ие