Лекция 5

ETS модели — нестац-ные.

Упр $y_t \sim ETS(AAA)$ (y_t) нестац

$\Delta^2 y_t \sim$ стац.

$$\begin{cases} E(y_t) = \mu \\ Var(y_t) = \sigma_y^2 \\ Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k \end{cases}$$

Опр
Стац. процесс (y_t) наз-ся предсказ-м (линейно предсказ-м) (deterministic), если его можно зап-ть в виде

$$\boxed{y_t = \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k}}$$

Пример.

$$y_t = u_1 \cos t + u_2 \sin t$$

u_1, u_2 незав $N(0;1)$

$Var(y_t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
$E(y_t) = 0$
$Cov(y_t, y_{t-k}) = \dots = \gamma_k$

Теорема Вольда.

Если (y_t) - стац. процесс, то его можно представить в виде:

Сходимость:
- по вер-сти
- по распр-ию
- почти наверно?

$$y_t = \mu_y + a_t + b_t, \quad \text{где}$$

$a_t = u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots$, $u_t \sim$ б. шум.

∞ пар-в.

b_t - предсказ-емый.

и $\sum \alpha_i^2 < \infty$

(a_t) и (b_t) некорр.

Стац. пр

б. шум

df $(u_t) \sim$ б. шум

$$E(u_t) = 0$$
$$Var(u_t) = \sigma_u^2$$
$$Cov(u_t, u_s) = 0 \text{ при } t \neq s$$

Q Как оценить ∞ кол-во α_i?

A. Никак!!

Либо считать, что начиная с нек-го они равны 0, либо предп-ть простую стр-ру.

Опр. MA(k) процесс - процесс (y_t) пред-мый в виде

$$y_t = \mu_y + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \dots + \alpha_k u_{t-k},$$

$(u_t) \sim$ б. шум.

Зачастую $u_t \sim N(0; \sigma^2)$ незав.

MA(k) в ARIMA sktime!

def MA(∞) y_t наз-ся MA(∞), если его можно пр-ть в виде

$$y_t = \mu_y + u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots, \text{ где}$$

(u_t) - б. шум, и $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty\right)$

Теор. если (x_t) - стац-ный и $\sum \alpha_i^2 < \infty$, то

$$y_t = \mu_y + x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots = \mu_y + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_{t-i}, \quad \alpha_0 = 1$$

тоже стац-ный процесс.

Шок-контент! MA(∞) и был белым шумом!

L можно применять к $\forall$ пр-с стац

для стац-х опр-но

$$L \cdot y_t = y_{t-1}$$

$$(1 + 0{,}3L + 0{,}3^2L^2 + 0{,}3^3L^3 + 0{,}3^4L^4 + \dots) \cdot y_t$$

Опр. если $|\alpha| < 1$

$$\frac{1}{1-\alpha L} \stackrel{def}{=} (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \dots)$$

этот оп-р можно применять ко всем стац-м процессам (и ещё к нек-м другим).

$$F y_t = y_{t+1} \qquad L y_t = y_{t-1}$$

Упр. (u_t) - б. шум.

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3\ldots$$

$$y_t = \frac{1-0,2F}{1-0,2L}\cdot u_t =$$

1а) Выпишите ф-лу для y_t.

а) правда ли, что y_t стац? (+)

б) — // — y_t это б. шум? (+)

в) — // — y_t это MA(∞)? (+)

г) — // — y_t это MA(∞) отн-но (u_t)? (−)

$$= (1-0,2F)\cdot\left(1+0,2L+0,2^2L^2+0,2^3L^3\ldots\right)u_t =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(0,2L)^i$$

$$y_t = -0,2u_{t+1} + (1-0,2^2)u_t + (0,2-0,2^3)u_{t-1} + \ldots$$

$$y_{t-1} = -0,2u_t + (1-0,2^2)u_{t-1} + (0,2-0,2^3)u_{t-2} \ldots$$

$FL = LF$

$L\cdot L = LL$

$FF = FF$

$$Cov(y_t, y_{t-1}) = -0,2\cdot(1-0,2^2)\cdot\sigma_u^2 + (1-0,2^2)\cdot(0,2-0,2^3)\sigma_u^2 + (0,2-0,2^3)(0,2^2-0,2^4)\sigma_u^2 + \ldots$$

остальные $\times 0,2^2$

$$= -0,2(1-0,2^2) + \frac{(1-0,2^2)\cdot 0,2\cancel{(1-0,2^2)}}{\cancel{1-0,2^2}} = 0$$

в) $y_t = 0 + 1\cdot y_t + 0\cdot y_{t-1} + 0\cdot y_{t-2}\ldots$, где y_t - б. шум

г) нет, так u_{t+1} вх-т в y_t

Упр.

$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$ $\qquad u_t \sim N(0; \sigma^2)$ незав-мы

б) а) $f(y)$?

Q. Зачем?

A. По-моему, прикольно!

skYtime $\dfrac{\text{хочу } MA(1)}{\text{хочу } MA(2)}$

2б) $E(y)$ $\quad Var(y)$?

$$E(y) = \begin{pmatrix} E(y_1) \\ \vdots \\ E(y_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$

u_t н.б. шуми

$$Var(y) = \begin{pmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1, y_2) & \dots \\ Cov(y_2, y_1) & Var(y_2) & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & \dots & Var(y_T) \end{pmatrix} = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\alpha_1^2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1+\alpha_1^2 & \alpha_1 & & 0 \\ 0 & & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & \end{pmatrix}$$

$Cov(y_1, y_3) = 0$

$$Cov(y_1, y_2) = Cov(\mu + u_1 + \alpha_1 u_0,\ \mu + u_2 + \alpha_1 u_1) = \alpha_1 \cdot \sigma^2$$

$\Sigma = Var(y)$

а) $$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (y - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (y - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

ML: 3 пар-ра: $\mu, \alpha_1, \sigma_u^2$

Опр. частная корреляция

$$pCorr(S, M;\ R_1, R_2 \ldots R_k) =$$

↑ partial.

$$= Corr(S^*, M^*),$$ где

S^* - это S „очищенная" от $R_1 \ldots R_k$

$$S^* = S - \alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 - \ldots \alpha_k \cdot R_k,$$ где

$\alpha_1 \ldots \alpha_k$ выбраны так, чтобы

$$Cov(S^*, R_i) = 0$$

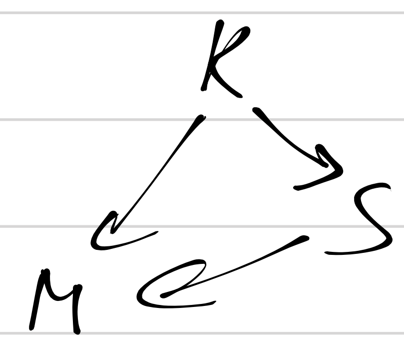
M^* - это M „очищ-ая" от $R_1 \ldots R_k$

инт.

S_i	M_i	R_i
0	0	10млн
1	0	⋮
0	0	
1	1	
1	1	
0	0	
0	0	
0	0	
0	0	1
0	0	
0	0	

$$\boxed{Corr(S_i, M_i) > 0}$$

$$Corr(S_i, M_i;\ R_i) < 0$$



Опр. Для стац-го пр-сса определена частная автокор-ая ф-ция

$$\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t-k};\ y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_{t-k+1})$$