Привет :)!!

(!) $MA(q)$ – это процесс, который $\boxed{\text{можно}}$ представить в виде

$$y_t = c + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_q u_{t-q},$$

где $\alpha_q \neq 0$ и (u_t) – б. шум

простое наблюдение

(y_t) – стац. процесс

$$Cov(L y_t, y_s) = Cov(y_t, F y_s)$$

$L y_t = y_{t-1}$ $F y_t = y_{t+1}$

$$Cov(P(L)\cdot y_t, y_s) = Cov(y_t, P(F)\cdot y_s)$$

договорились:

$$\frac{1}{1-\alpha L} \overset{def}{=} (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)$$

$|\alpha| < 1$ для любого стац-го процесса.

$$Cov\left(\frac{1-0{,}3L}{1-0{,}3F} y_t, \frac{1-0{,}3L}{1-0{,}3F} y_s\right) =$$

$$= Cov\left(\frac{1}{1-0{,}3F} y_t, (1-0{,}3L) y_s\right) = Cov(y_t, y_s)$$

Теор-ма: Если (u_t) – б. шум, то $\frac{1-0{,}3L}{1-0{,}3F} \cdot u_t$ – б. шум.

$v_t =$

$$v_t = \frac{1-0{,}3L}{1-0{,}3F} u_t$$

б. шум!

$$h_t = \frac{1-0{,}3F}{1-0{,}3L} u_t =$$

$$= (1-0{,}3F)\cdot(1+0{,}3L+0{,}3^2L^2+\ldots)\cdot u_t =$$

$$h_t = -0{,}3\,u_{t+1} + (1-0{,}09)\cdot u_t + (\quad\quad)\,u_{t-1} + \ldots$$

не MA(2), не MA(1), не MA(7), это б. шум!

Упр

MA(1) $\quad y_t = 2 + u_t + 0{,}7\,u_{t-1}$

а) запишите этот же процесс в виде

$$y_t = 2 + v_t + ?\,v_{t-1} + ?\,v_{t-2} + ?\,v_{t-3} + \ldots,$$

где все коэфф-ты $\neq 0$, и v_t - б. шум!

б) запишите этот же процесс в виде

$$y_t = 2 + s_t + \alpha_1\cdot s_{t-1},$$ где

s_t - б. шум и $\alpha_1 \neq 0{,}7$

Про AR

(y_t) - неизв. последов-сть

$t \in \mathbb{Z}$

Мысль 1

$$y_t = 2 + 0{,}7 y_{t-1} + u_t$$

u_t - б. шум.

Это ур-ние!

[а ещё не процесс]

и оно имеет ∞ кол-во решений!

$E(y_0) = -3$
$Var(y_0) = 0$
$y_1 = 2 - 2{,}1 + u_1$
$E(y_1) = -0{,}1$
$Var(y_1) = \sigma_u^2$

$y_0 = -3 \rightarrow \ldots (y_t) \ldots$

$y_0 = 5 \rightarrow \ldots (y_t) \ldots$

$y_7 = 8 \rightarrow \ldots (y_t) \ldots$

$y_0 = u_0 + u_{56} \cdot \cos(u_{29}) \rightarrow \ldots (y_t) \ldots$

Мысль 2

$P(L) \cdot y_t = c + Q(L) \cdot u_t$, u_t - б. шум

и степень $P(L)$ хотя бы 1 (или больше), то нестац-х реш-ий ∞ много.

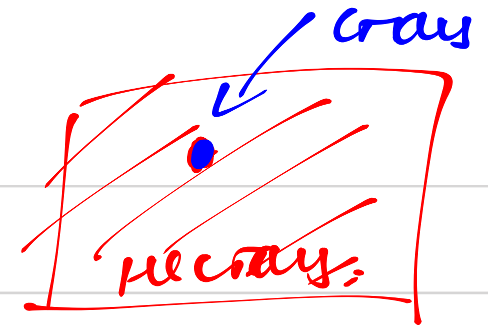
Теорема 3

[кроме (y_t)]

Мн-во стац-х решений ур-ния вида $P(L) \cdot y_t = Q(L) \cdot u_t + c$ не мен-ся если домножить/поделить ур-ие на $P(L)$ с корнями $|\ell| \neq 1$

как-бы удача

Ильино стр.



$$y_t = 2 + 0{,}7\, y_{t-1} + u_t$$

ур А

$$(1 - 0{,}7L)\cdot y_t = 2 + u_t$$

!

$$y_t = \frac{1}{1-0{,}7L}\cdot 2 + \frac{1}{1-0{,}7L}\cdot u_t$$

• стац. реш.

$L\cdot 2 = 2$

ур Б

$$\boxed{y_t = \frac{1}{1-0{,}7}\cdot 2 + (1 + 0{,}7L + 0{,}7^2L^2 + 0{,}7^3L^3 + \ldots)\cdot u_t}$$

$$y_0 = \frac{2}{0{,}3} + u_0 + 0{,}7u_{-1} + 0{,}7^2u_{-2} + \ldots$$

def. $\dfrac{1}{1-\alpha L} = (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)$

$|\alpha| < 1$

def.

$$\frac{1}{1-5L} = \frac{-1}{5L}\cdot\frac{1}{(1-0{,}2F)} = -\frac{1}{5}\cdot F\cdot\frac{1}{1-0{,}2F}$$

$$L\cdot F\cdot(y_t) = (y_t)$$

Упр.

(u_t) – б. шум.

$$y_t = 2\cdot y_{t-1} + 7 + u_t \quad \leftarrow \text{ур-ие на } (y_t)$$

а) сколько тут нестац. реш? ∞

б) сколько тут стац. реш? найдите, если одно.

$$y_t = 7 + 2y_{t-1} + u_t$$

$$(1-2L)y_t = 7 + u_t$$

$$(-2L)\left(1-\tfrac{1}{2}F\right)y_t = 7 + u_t$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}F\right)y_t = -3.5 - \tfrac{1}{2}u_{t+1}$$

$$y_t = \frac{-3.5}{1-\frac{1}{2}} + \left(1 + \tfrac{1}{2}F + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2F^2 + \dots\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}u_{t+1}\right)$$

$$y_0 = -7 - \tfrac{1}{2}u_1 - \tfrac{1}{4}u_2 - \tfrac{1}{8}u_3 - \dots$$

$$\boxed{y_t = -7 - \tfrac{1}{2}u_{t+1} - \tfrac{1}{4}u_{t+2} - \tfrac{1}{8}u_{t+3} - \dots}$$

Это $MA(\infty)$?

Первое впеч-ие! нет!

Da! можно записать в виде $y_t = -7 + v_t + ?v_{t-1} + \dots$

Упр. Запишите это решение в виде $y_t = -7 + v_t + ?v_{t-1} + \dots$ где v_t — б. шум.

$$y_t = \frac{-\frac{1}{2}F}{1-\frac{1}{2}F}\cdot u_t = \frac{-\frac{1}{2}F\cdot\left(1-\frac{1}{2}L\right)}{\left(1-\frac{1}{2}L\right)\left(1-\frac{1}{2}F\right)}u_t$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}L}\cdot v_t = \left(1 + \tfrac{1}{2}L + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2L^2 + \dots\right)\cdot v_t$$

где $v_t = -\frac{1}{2}F\dfrac{1-\frac{1}{2}L}{1-\frac{1}{2}F}\cdot u_t$

по утв-нию замеч-ия v_t — б. шум

Правильное опр-ие AR(p) процесса.

AR(p) процессом с ур-нем $P(L)\cdot y_t = c + u_t$ наз-ся стационарное решение этого ур-ия представимое в виде MA(∞) именно отн-но белого шума (u_t), упомянутого в ур-ии.

Теорема у ур-ия $P(L)y_t = c + u_t$ нет стац.-х решений, если есть у $P(L)$ корень с $|\lambda| = 1$.

Q. Когда стац-н AR(p) процесс?
A. Всегда по опр-нию!

Q. Какие ур-ия могут исп-ся для оп-ия AR(p) процесса?
A. Только если у $P(L)$ все корни $|\lambda| > 1$.

---

1 пар.

c d

Упр.
(А) $y_t = 7 + 2y_{t-1} + u_t$ $\quad (u_t)$ - б.шум
рассм-м стац. реш. этого ур-ия.

представьте ур-е вида
(Б) $y_t = c + b\cdot y_{t-1} + v_t$ где $|b| < 1$
v_t - б.шум.
у кот-рого ровно то же стац решение.