ETS — модель   Error – Trend – Seasonality

Цель:

→ прогнозировать

→ разложить ряд на составляющие.

ETS(AAA) A = additive   ETS(MAN)

$\uparrow\uparrow\uparrow$ M = multiplicative   ETS(ANN)

ETS N = no

нач. условия:

$b_0, l_0, S_0, S_{-1}, S_{-2}, ... S_{-11}$

$\begin{cases} y_t - \text{наблюдаемый ряд} \\ y_t = \boxed{l_{t-1} + b_{t-1}} + \boxed{S_{t-12}} + \boxed{u_t} \\ (u_t) \sim N(0; \delta^2), \text{ независ} \end{cases}$

ограничен:

$S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_{-11} = 0$

— источник случ-сти

уравнения:

$\begin{cases} l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ S_t = S_{t-12} + \gamma \cdot u_t \end{cases}$

⟸ тренд / сглаженный & сезонир-сть / level

текущий наклон тренд

y_t ... t

сезонная сост-ая

Вопр) Сколько своб-х пар-ров оценивается в ETS(AAA)?

17 : $\delta^2, \alpha, \beta, \gamma, l_0, b_0, S_0, S_1 .... S_{-10}$

S_{-11} находится

из $\sum\limits_{i=0}^{-11} S_i = 0$

общая схема

$\text{пок.}_t = \text{пок.}_{t-...} + \text{случ}$
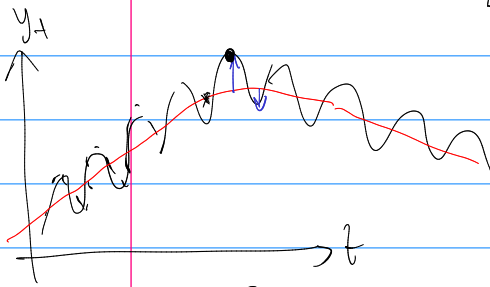
$\begin{pmatrix} l_t \\ b_t \\ S_t \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} l_{t-1} \\ b_{t-1} \\ S_{t-12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot u_t$
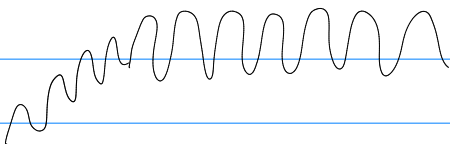
17 пар   R надо — не судьба

3-4 года норм.

① пар-ра | демоши → прогноза ?

② пар-ра | данные → демоши ?

③ данные → оц-ть пар-ры ? Maxlik.

---

① $\boxed{\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}}$ $\delta^2 = 16$ $s_{89} = +2$ $s_{90} = -3$ $\ell_{100} = 20$ $b_{100} = 2$

$\underline{95\% \ PI \ для \ y_{101} \ и \ y_{102} \ от \ момента \ вр-и \ 100.}$

$$F_t = \delta(y_t, y_{t-1}, \dots) =$$
$$= \delta(y_t, y_{t-1}, \dots, \ell_t, \ell_{t-1}, \dots b_t, b_{t-1}, \dots$$
$$s_t, s_{t-1}, \dots)$$

идея:

$\boxed{будущее}$ = предсказу- + непредсказуемая часть
емая часть

$y_{101} = \boxed{\ell_{100} + b_{100} + s_{89}} + \boxed{u_{101}}$ ← все зависит от F_{100}

y_t - наблюдаемый ряд
$y_t = \boxed{\ell_{t-1} + b_{t-1}} + \boxed{s_{t-12}} + \boxed{u_t}$
$(u_t) \sim N(\boxed{0}, \delta^2)$, незав

↳ шум-вое в t=100

$E(y_{101} | F_{100}) = \ell_{100} + b_{100} + s_{89} + \underbrace{E(u_{101} | F_{100})}_{\parallel}$

$E(u_{101}) = 0$

уравнения:
$\boxed{\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t}$
$\boxed{b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t}$
$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t$

$Var(y_{101} | F_{100}) = Var(u_{101} | F_{100}) = Var(u_{101}) = \delta^2$

$(y_{101} | F_{100}) \sim N(\ell_{100} + b_{100} + s_{89} ; \ \delta^2)$

$95\% \ PI \ для \ y_{101} \quad [\ell_{100} + b_{100} + s_{89} - 1.96\sqrt{\delta^2} ; \ \ell_{100} + b_{100} + s_{89} + 1.96\sqrt{\delta^2}]$

$[20 + 2 + 2 - 1.96\sqrt{16} ; \ 20 + 2 + 2 - 1.96\sqrt{16}]$

$y_{102} = \ell_{101} + b_{101} + s_{90} + u_{102} = (\ell_{100} + b_{100} + \alpha \cdot u_{101}) + (b_{100} + \beta u_{101}) + s_{90} +$
$+ u_{102} = \ell_{100} + 2b_{100} + s_{90} + (\alpha + \beta) u_{101} + u_{102}$

$(y_{102} | F_{100}) \sim N(\ell_{100} + 2b_{100} + s_{90} ; \ \underline{(\alpha + \beta)^2 \cdot \delta^2 + \delta^2})$

$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$
$\delta^2 = 16$

$PI \quad [20 + 2 \cdot 2 + (-3) - 1.96\sqrt{16 + 16} ; \ 21 + 1.96\sqrt{32}]$

⫫

| пар-ры | | данные | ⟶ | декомпозиц. |

l_0, b_0 — константы (оценив-ся с помощью Max-Lik)

$\left.\begin{array}{l} l_1 \ b_1 \\ l_2 \ l_2 \end{array}\right\}$ случ. величина

пар-ры | $l_0 = 10 \quad b_0 = 4 \qquad \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2} \qquad \delta^2 = 16$

$s_0, s_1, s_{2...} \ s_{-5} = +2$
$s_{-6}, s_{-7}, ... s_{-11} = \boxed{-2}$

t	y_t	u_t	b_t	s_t	l_t
$t=0$	NA	NA	4	②	10
$t=1$	14	2	5	-1	15
$t=2$	18	0	5	-2	20
$t=3$	20				

$\begin{pmatrix} l_1, l_2, l_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ s_1, s_2, s_3 \end{pmatrix}$?

$l_2 = l_1 + b_1 + \alpha u_2 = 20$

y_t — наблюдаемый ряд
$y_t = \boxed{l_{t-1} + b_{t-1}} + \boxed{s_{t-12}} + \boxed{u_t}$
$(u_t) \sim N(0; \delta^2)$, незав

Ⅰ $\boxed{u_t = y_t - l_{t-1} - b_{t-1} - s_{t-12}}$
$u_1 = 14 - 10 - 4 - (-2) = 2$

$s_1 = s_{-11} + \frac{1}{2} \cdot u_1 = -2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

$l_1 = l_0 + b_0 + \frac{1}{2} \cdot u_1 = 15$
$\quad \underset{10}{\|} \quad \underset{4}{\|} \quad \underset{2}{\|}$

рекурсия:
Ⅱ $\boxed{l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t}$
$\boxed{b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t}$ $\qquad <$
$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t$

$\boxed{u_1} \to \boxed{b_1, l_1, s_1} \to \boxed{u_2} \to \boxed{b_2, l_2, s_2} \to ...$

$u_2 = 18 - 15 - 5 - (-2) = 0$

③ | данные | ⟶ | оценим пар-в. |

$\ln L = \ln f(y_1, ..., y_T) = \ln f(y_1) + \ln f(y_2 | y_1) + \ln f(y_3 | y_2, y_1) + ...$
$\qquad\qquad\qquad + ... \ln f(y_T | y_{T-1}, ...)$

$(y_t | y_{t-1}, y_{t-2} ...) \sim N(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12}; \ \delta^2)$

$\ln f(y_t | y_{t-1}, ...) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\delta^2) - \frac{1}{2\delta^2}\left(y_t - (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12})\right)^2$

$$\ln L = \ln f(y_1, \dots y_T) = \underline{\ln f(y_1)} + \underline{\ln f(y_2 | y_1)} + \underline{\ln f(y_3, y_2, y_1)} + \dots$$
$$+ \dots \ln f(y_T | y_{t-1}, \dots)$$

$\Big\{$ парам $y_1 \dots y_T$

$$(y_t | y_{t-1}, y_{t-2} \dots) \sim N\left(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t+12}; \; \delta^2\right)$$

$$\ln f(y_t | y_{t-1}, \dots) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi \delta^2) - \frac{1}{2\delta^2}\left(y_t - (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t+12})\right)^2$$

$$\ln f(y_1) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi \delta^2) - \frac{1}{2\delta^2} \cdot \left(y_1 - (l_0 + b_0 + s_{-11})\right)^2$$

$$\ln f(y_2 | y_1) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi \delta^2) - \frac{1}{2\delta^2}\left(y_2 - (l_1 + b_1 + s_{-10})\right)^2, \; \text{где}$$

$$l_1 = l_0 + b_0 + \alpha \cdot u_1 = l_0 + b_0 + \alpha(y_1 - l_0 - b_0 - s_{-11})$$
$$b_1 = b_0 + \beta \cdot u_1 = b_0 + \beta(y_1 - l_0 - b_0 - s_{-11})$$

$$\ln f(y_3 | y_2, y_1) =$$

Если модели описывают $\ln L$ для одного вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$

то можно сравнивать модели по AIC

$$AIC = -2\ln L + 2 \cdot k$$

число своб. пер.

макс
лог — правдоп.

ETS(A-A-A) $k = 17$

$\Big\{$ информ. критерий аппроксимирующий кросс-валидацию на 1 шаг вперёд по MSE