Привет !! Слышно ли ?
Видно ?

2020-11-05 Врем. ряды !!

ARMA + ARIMA + сезонность !!

ARMA – процесс.

Упр $(\forall t)$ $y_t = 3 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t$ ← ур-ие

(y_t) стац. решение

$y_t = c + u_t + ?u_{t-1} + ?u_{t-2} + \ldots$ ← нет прошл. y_t

стр 1 подст-ть и подобрать коэф-ты.

стр 2

$c + u_{t-2} + ?u_{t-3} + \ldots$

$y_t = 3 + 0{,}4\left(3 + 0{,}4\, y_{t-2} + u_{t-1}\right) + u_t =$

$1 \cdot u_t$

$0{,}4 \cdot u_{t-1}$

$= 3 + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}4^2 \cdot 3 + \boxed{0{,}4^3 \cdot y_{t-3}} + 0{,}4^2 u_{t-2} + 0{,}4 \cdot u_{t-1} + u_t$

$E\left(0{,}4^k \cdot y_{t-k}\right) \to 0$ $\quad Var\left(0{,}4^k y_{t-k}\right) \to 0$

$= \frac{3}{1-0{,}4} + u_t + 0{,}4^1 u_{t-1} + 0{,}4^2 u_{t-2} + \ldots$

стр 3 приравнивать E, Var, Cov ...

$y_t = 3 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t$

$E(y_t) = 3 + 0{,}4\, E(y_{t-1}) + 0$

$E(y_t) = \frac{3}{1-0{,}4} = c$

про долгоср. пред. интервал

текущая инфо бесполезна $[E(y_t)-1.96\cdot\sqrt{Var(y_t)};\ E(y_t)+1.96\cdot\sqrt{Var(y_t)}]$

сделать на h шагов

$h \to \infty$

$\alpha_k = 0{,}4^k$

$h >> 0$

$$y_t = c + 1\cdot u_t + 0{,}4 u_{t-1} + \ldots$$

$$y_{t+h} = c + u_{t+h} + 0{,}4\cdot u_{t+h-1} + \ldots + [?\cdot u_t + ? u_{t-1} + \ldots]$$

$\boxed{\text{ARMA - ур-ие}}$ $\qquad L(y_t) = (y_{t-1})$

ARMA(p,q)

$$y_t = \varphi + \beta_1 y_{t-1} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_q u_{t-q}$$

ARMA(p,q) – процесс
- * подходит в ARMA(p,q) ур-ие.
- * стац-ый процесс

Vaiart, Tsay, ...

$$y_t = 5 + 0.6\, y_{t-1} + u_t + 0{,}2 u_{t-1}, \quad u_t \sim N(0, 9) \text{ незав.}$$

y_t - стац решение ур-ия.

4 параметра

ARMA(p,q) ур-ие.

$A(L)$ - лаговый полином

$\tilde{A}(\lambda) = A\left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\lambda^p$

← характ. полином

Если:

$$A(L)\cdot(y_t - \mu) = B(L)\cdot u_t$$

$u_t \sim$ б. шум

$A(L)$ - полином степени p $\quad p \geq 1$

$B(L)$ - полином степени q

$A(L)$ и $B(L)$ несократимы

то:

* нестац-х решений бесконечное кол-во.
* стац-го решения нет если $A(1)=0$ (или $\tilde{A}(1)=0$).
* стац-ое решение единственно, если $A(1)\neq 0$ / или $\tilde{A}(1)\neq 0$/
* стац-ое решение предст-мо в виде $y_t = \mu + u_t + ?u_{t-1} + ?u_{t-2} + ?u_{t-3} + \ldots$ если все корни лагового $A(\cdot)$ полинома $|\ell|>1$ / если все корни хар-го $\tilde{A}(\cdot)$ полинома $|\lambda|<1$/

$$y_t = 6 + 0{,}3y_{t-1} - 0{,}02y_{t-2} + u_t + 0{,}4u_{t-1}$$

$L\cdot 6 = 6$

$$A(L)\cdot(y_t - \mu) = B(L)\cdot u_t$$

$$y_t - 0{,}3y_{t-1} + 0{,}02y_{t-2} - 6 = u_t + 0{,}4u_{t-1}$$

$$(1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2)y_t - 6 = (1 + 0{,}4L)\cdot u_t$$

$$\underbrace{(1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2)}_{A(L)}\left(y_t - \frac{6}{0{,}72}\right) = (1 + 0{,}4L)u_t$$

лаговый многочлен

$$A(L) = 1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2$$

$$\lambda^2 \cdot A\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \tilde{A}(\lambda)$$

уберём конст и случайность

$$y_t = 0{,}3 y_{t-1} - 0.02 y_{t-2}$$

ищем решение вида

$$y_t = \lambda^t$$

$$\lambda^t = 0{,}3\lambda^{t-1} - 0{,}02\lambda^{t-2}$$

$$\tilde{A}(\lambda) = \boxed{1 \cdot \lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}02} = 0$$

характ-ий многочлен

ARIMA (p, d, q) - ур-ие. $d \geq 1$

$$\boxed{A(L) \cdot (1-L)^d \cdot (y_t - \mu) = B(L) \cdot u_t}$$

$u_t \sim$ б. шум

$A(L)$ – многочлен степ p

$B(L)$ – многочлен степ q

$(1-L)^d \cdot A(L)$ и $B(L)$ не имеют общих корней

$A(L)$ не имеет ед. корней

ARIMA (p, d, q) - процесс

* решение ур-ие.
* $\underbrace{(1-L)^d \cdot (y_t - \mu)}_{= z_t}$ – стац. процесс.

$$A(L) \cdot z_t = B(L) \cdot u_t$$

$y_t \sim$ ARIMA (p, d, q) процесс

$(1-L)^d y_t = z_t \sim$ ARMA (p, q) процесс.

Пример: $t \geq 1$ $u_t \sim N(0; \sigma^2)$ ~ну

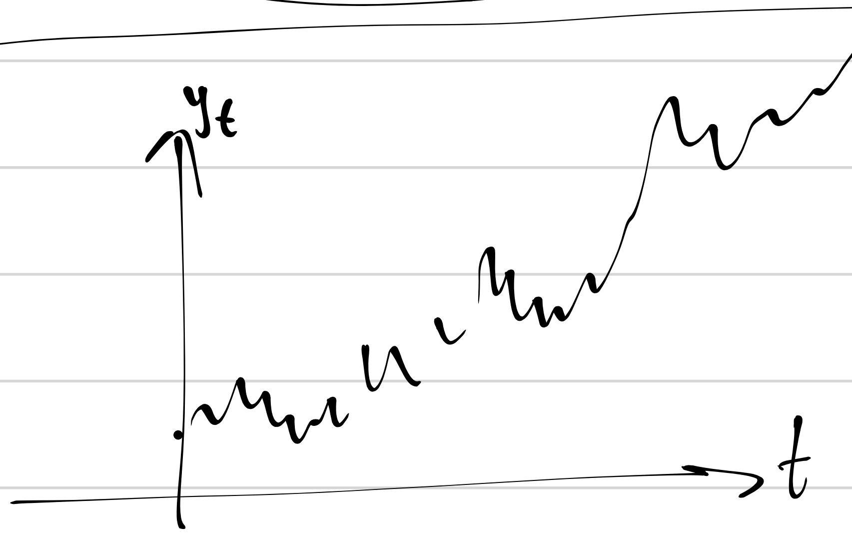
$$y_t = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_t$$

y_t – стац? $E(y_t) = 0$

$Var(y_t) = t \cdot \sigma^2$

y_t – не стац.

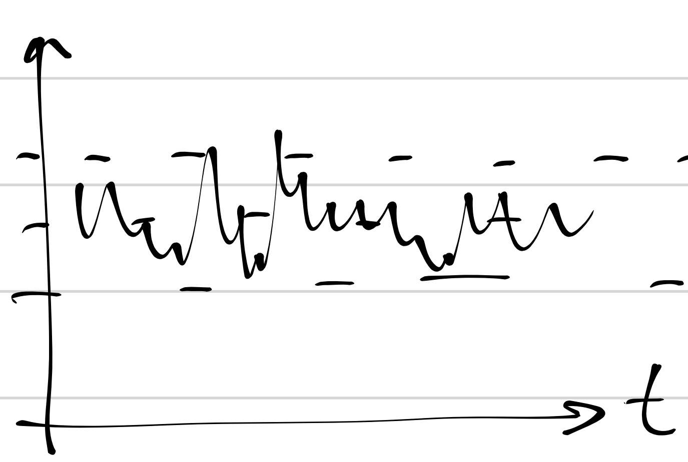
$z_t = (1-L) \cdot y_t = y_t - y_{t-1} = u_t$ стац-но!



– не стац.

$\Delta = 1 - L$

$z_t = (1-L) y_t = \Delta y_t$



$y_t \sim ARIMA(2,1,3)$

$z_t \sim ARMA(2,3)$

Как учесть сезонность?

периодичность $m = 12$ (для примера)

$$L^{12} y_t = y_{t-12}$$

$$\Delta_{12} = 1 - L^{12} \qquad \Delta_{12} y_t = y_t - y_{t-12}$$

ARIMA: ур-ие.

$$A(L) \cdot (1-L)^d (y_t - \mu) = B(L) \cdot u_t$$

SARIMA: -ур-ие

$$A(L) \cdot A_s(L^{12}) \cdot (1-L)^d \cdot (1-L^{12})^{d_s} \cdot (y_t - \mu) =$$

$$= B(L) \cdot B_s(L^{12}) \cdot u_t$$

SARIMA - процесс $(p, d, q)(p_s, d_s, q_s)$

* y_t - решение ур-ие
* $z_t = (1-L)^d \cdot (1-L^{12})^{d_s} \cdot (y_t - \mu)$ ← стац-ен

Маша !! пример.

!! → SARIMA $(1,0,1)(1,0,1)$ ← нет $(1-L)$, $(1-L^{12})$

$$\overbrace{(1-0{,}3L)}^{A(L)} \cdot \overbrace{(1-0.9L^{12})}^{A_s(L^{12})} \cdot (y_t - 5) = \underbrace{(1+0{,}4L)}_{B(L)} \cdot \underbrace{(1+0.6L^{12})}_{B_s(L^{12})} u_t$$

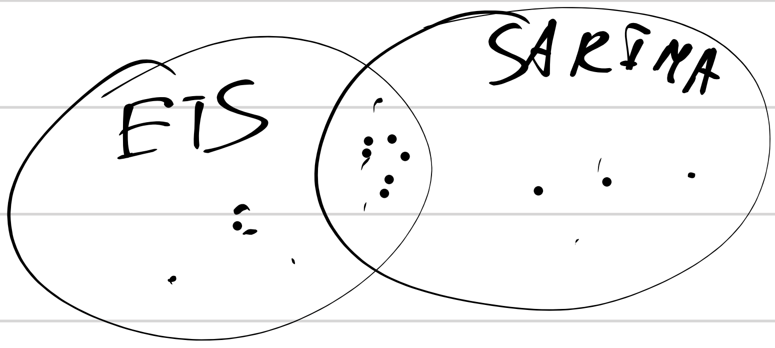
$u_t \sim N(0; 9)$

$$y_t - 0{,}3y_{t-1} - 0{,}9y_{t-12} + 0{,}27y_{t-13} - 0{,}35 = u_t + 0{,}4u_{t-1} + 0{,}6u_{t-12} + 0{,}24u_{t-13}$$

$\boxed{\text{Max Lik}}$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_t \end{pmatrix} ; \; Cov_z \right)$$

зависит от коэф-в ур-ния.



Упр. Представьте ETS(ANN) как ARIMA.

тренд

сез

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \end{cases} \qquad \Delta = 1 - L$$

$$\Delta y_t = \Delta l_{t-1} + \Delta u_t$$

$$y_t - y_{t-1} = l_{t-1} - l_{t-2} + u_t - u_{t-1}$$

$$y_t - y_{t-1} = \alpha u_{t-1} + u_t - u_{t-1}$$

$$(1-L) \cdot y_t = u_t + (\alpha - 1) \cdot u_{t-1}$$

$$\boxed{(1-L) \cdot y_t = (1 - (\alpha - 1) \cdot L) \cdot u_t}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1 \\ p=0}}{A(L)} \cdot \underset{d=1}{(1-L)^d} \, y_t = B(L) \quad \text{степ } 1 = q$$

$$ETS(ANN) \sim ARIMA(0,1,1)$$

Историческая традиция

$\boxed{ARMA(1,1)}$

выдача компа

AR: 0,7

MA: 0,2

коэфф. с минусом

$$(1-0{,}7L)\cdot y_t = (1+0{,}2L)\cdot u_t$$

с плюсом.

$$\hat{y}_t = 0{,}7 y_{t-1} + u_t + 0{,}2 u_{t-1}$$

AR(2)

AR_1: −0,4

AR_2: 0,03

$$\hat{y}_t = -0{,}4\, y_{t-1} + 0{,}03\, y_{t-2} + u_t$$

$$(1+0{,}4L-0{,}03L^2)\, y_t = u_t$$

ARMA

ARIMA

SARIMA

– как выбрать?

* сравнение прогнозов за пределами обуч. выборки.
* тесты на наличие ед. корня.

AR(2)

$$(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2)\cdot(y_t-\mu) = u_t$$

$$\max_{\theta} l(\theta) \Rightarrow \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \hat{\mu},\ \hat{\sigma}^2 \quad (\text{MaxLik})$$

$ARMA(1,1) \rightarrow$ MaxLik $\hat{\theta}$

$AR(2) \rightarrow$ MaxLik $\hat{\theta}$

$MA(4) \rightarrow$ MaxLik $\hat{\theta}$

$ARIMA(1,1,1) \rightarrow$ MaxLik $\hat{\theta}$

→ прогнозы на тест. выборку

→ CV

→ тесты

→ AIC