Espaces vectoriels

Eyal Shukrun

October 28, 2020

1 Rappel

Soit deux vecteurs a et b et un scalaire f.

- $a + b = (a_1 + b + 1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
- $a * f = (a_1 * f, a_2 * f, \ldots, a_n * f)$

2 Espace vectoriel

L'ensemble des n-uples (**יות-n**, ensemble des groupes de taille n) d'un champ F est noté F^n. F^n est un espace vectoriel, c'est a dire un ensemble de vecteurs que l'on peut additioner entre eux et multiplier par un scalaire.

2.1 Proprietés

1. Si **a** et **b** sont des nuples de F et f un scalaire de F alors $a + b \in F$ et $a * f \in F$

2.2 Vecteurs

Défini par sa longueur et sa direction.

2.2.1 Proprietés

1. Additionner deux vecteur (a_1, a_2) et (b_1, b_2): (a_1+b_1, a_2+b_2). Le resultat est le vecteur qui lest relie la queue de a a la tete de b. Le resultat de $a - b$ est le vecteur qui relie leurs deux tètes.

2. Multiplier un vecteur (a_1, a_2) par un scalaire t: $(a_1 * t, a_2 * t)$. Le résultat allonge ou raccourcit le vecteur, si $t < 0$ alors le vecteur change de direction.

2.3 Representation graphique de combinaisons linéaires

Nous ne parlerons ici que de systèmes linéaires a 2 ou 3 inconnues (car ils se représentent en 2D ou 3D).

2.3.1 Intuition [p.169]

Si on prend un vecteur a dans un plan en 3D, disons $(1, 1, 1)$, nous avons donc une flèche. Si on le multiplie par 2, la flèche devient 2 fois plus longue, ainsi si on trace tous les points qui sont touchés par $t * a$ en faisant varier t, on obtient une droite.

Maintenant, prenons un vecteur x qui est l'addition de deux vecteurs $a + b$ (pas equivalents), disons $a = (1, 0, 0)$ et $b = (0, 1, 0)$, et faisons varier ces deux vecteurs, ainsi $x = t * a + s * b$, on sait deja que $t * a$ est une droite (et que $s * b$ aussi), pour chaque point sur la droite, on peut donc faire varier s pour toucher n'importe quel point sur la droite $s * b$. Si on dessine tous les points pour chaque valeurs de t et chaque valeurs de s, on obtient un plan.

Si on ajoute un troisième vecteur a cette somme, et que $x = t*a+s*b+r*c$, en faisant varier t, s et r nous pourrons être capables de toucher n'importe quel point dans l'espace.

Attention, pour pouvoir jouer avec un vecteur, il faut qu'il ait un coefficient variable. Par exemple, le vecteur $x = t * a + s * b + c$ n'est qu'un plan, avec un shift de c, car c ne peut pas varier, tout comme $x = t * a + b$ n'est qu'une droite.

On peut donc connaitre la representation graphique des solutions d'une equation grace a sa matrice escalier et a son nombre de lignes non-zeros. Plus il y a de lignes non-zeros, moins il y a de solutions (car plus de contraintes). Ainsi pour un système a 3 inconnues:

1. Si elle n'a qu'une ligne non-zeros, la solution est un plan.

2. Si elle a deux lignes non-zeros, la solution est une droite.

3. Si elle a trois lignes non-zeros, la solution est un point.

4. Si toutes ses lignes sont des zeros, alors n'importe quel vecteur resoud l'équation, donc la solution est tout l'espace.

Évidemment, tout plan ou droite en plus de 3 dimensions a les mêmes propriétés. Plus généralement, une droite est exprimée sous la forme $t * a$ (a est un vecteur) et un plan sous la forme $t * a + s * b$ (a et b sont des vecteurs), ce plan est appelé le *span* (**הפרש**) de a et b.[p.173]

2.4 Combinaisons linéaires

Une combinaison linéaire est la somme de plusieurs vecteurs, eux mêmes multipliés par des coefficients, ainsi soit s_n des scalaires et a_n des vecteurs, la combinaison linéaire s'exprime comme ceci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i * s_i \tag{1}$$

2.4.1 Combinaison de solutions d'un système

Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sont n solutions d'un système **homogène**, alors pour chaque solution, on peut la multiplier par un scalaire, cela donnera toujours 0. Donc pour tout vecteur $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $(s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n)$ est aussi une solution.

Si d'un autre coté on a un système linéaire, le vecteur b est une combinaison linéaire des vecteurs $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et des coefficients $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (les x, y, z etc..).[p.180]

2.4.2 Vecteur indépendants (תלות לינארית)

Deux vecteurs a et b (ou plus) sont independants si on peut trouver des coefficients de combinaisons **non egaux a 0** tel que $\alpha * a + \beta * b = \mathbf{0}$. Si les scalaires sont 0 alors les vecteurs ne sont pas independants (**תלוי לינארית**).

Pour verifier si des vecteurs sont independants, les mettre dans une matrice a la verticale (la colonne des solutions est une colonne de 0). Si il y a plus d'une solution (donc si il y a des mishtanim hofshiim), ils sont indépendants (sinon, cela veut dire que la seule solution est la solution triviale).

Géométriquement parlant, des vecteurs indépendants ne sont pas dans la même direction (pas superposes).