

# Espaces vectoriels

Eyal Shukrun

October 30, 2020

## 1 Rappel

Soit deux vecteurs  $a$  et  $b$  et un scalaire  $f$ .

- $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
- $a * f = (a_1 * f, a_2 * f, \dots, a_n * f)$

## 2 Espace vectoriel

L'ensemble des  $n$ -uplets ( $\mathbb{F}^n$ , ensemble des groupes de taille  $n$ ) d'un champ  $F$  est noté  $F^n$ .  $F^n$  est un espace vectoriel, c'est à dire un ensemble de vecteurs que l'on peut additionner entre eux et multiplier par un scalaire.

### 2.1 Propriétés

1. Si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont des nuples de  $F$  et  $f$  un scalaire de  $F$  alors  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in F$  et  $\mathbf{a} * f \in F$

### 2.2 Vecteurs

Défini par sa longueur et sa direction.

#### 2.2.1 Propriétés

1. Additionner deux vecteur  $(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$ :  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ . Le resultat est le vecteur qui relie la queue de  $a$  a la tete de  $b$ . Le resultat de  $a - b$  est le vecteur qui relie leurs deux tetes.

2. Multiplier un vecteur  $(a_1, a_2)$  par un scalaire  $t$ :  $(a_1 * t, a_2 * t)$ . Le résultat allonge ou raccourcit le vecteur, si  $t < 0$  alors le vecteur change de direction.

## 2.3 Représentation graphique de combinaisons linéaires

Nous ne parlerons ici que de systèmes linéaires à 2 ou 3 inconnues (car ils se représentent en 2D ou 3D).

### 2.3.1 Intuition <sup>[p.169]</sup>

Si on prend un vecteur  $a$  dans un plan en 3D, disons  $(1, 1, 1)$ , nous avons donc une flèche. Si on le multiplie par 2, la flèche devient 2 fois plus longue, ainsi si on trace tous les points qui sont touchés par  $t * a$  en faisant varier  $t$ , on obtient une droite.

Maintenant, prenons un vecteur  $x$  qui est l'addition de deux vecteurs  $a + b$  (pas équivalents), disons  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (0, 1, 0)$ , et faisons varier ces deux vecteurs, ainsi  $x = t * a + s * b$ , on sait déjà que  $t * a$  est une droite (et que  $s * b$  aussi), pour chaque point sur la droite, on peut donc faire varier  $s$  pour toucher n'importe quel point sur la droite  $s * b$ . Si on dessine tous les points pour chaque valeurs de  $t$  et chaque valeurs de  $s$ , on obtient un plan.

Si on ajoute un troisième vecteur à cette somme, et que  $x = t * a + s * b + r * c$ , en faisant varier  $t$ ,  $s$  et  $r$  nous pourrions être capables de toucher n'importe quel point dans l'espace.

Attention, pour pouvoir jouer avec un vecteur, il faut qu'il ait un coefficient variable. Par exemple, le vecteur  $x = t * a + s * b + c$  n'est qu'un plan, avec un shift de  $c$ , car  $c$  ne peut pas varier, tout comme  $x = t * a + b$  n'est qu'une droite.

On peut donc connaître la représentation graphique des solutions d'une équation grâce à sa matrice échelonnée et à son nombre de lignes non-zéros. Plus il y a de lignes non-zéros, moins il y a de solutions (car plus de contraintes). Visuellement, le nombre de lignes zéros correspond au nombre de vecteurs que l'on peut faire varier. Ainsi pour un système à 3 inconnues:

1. Si elle n'a qu'une ligne non-zéros, la solution est un plan.
2. Si elle a deux lignes non-zéros, la solution est une droite.
3. Si elle a trois lignes non-zéros, la solution est un point.

4. Si toutes ses lignes sont des zéros, alors n'importe quel vecteur résout l'équation, donc la solution est tout l'espace.

Évidemment, tout plan ou droite en plus de 3 dimensions a les mêmes propriétés. Plus généralement, une droite est exprimée sous la forme  $t * a$  ( $a$  est un vecteur) et un plan sous la forme  $t * a + s * b$  ( $a$  et  $b$  sont des vecteurs), ce plan est appelé le *span* (הפרש) de  $a$  et  $b$ .<sup>[p.173]</sup>

## 2.4 Combinaisons linéaires

Une combinaison linéaire est la somme de plusieurs vecteurs, eux mêmes multipliés par des coefficients, ainsi soit  $s_n$  des scalaires et  $a_n$  des vecteurs, la combinaison linéaire s'exprime comme ceci:

$$\sum_{i=1}^n a_i * s_i \quad (1)$$

### 2.4.1 Combinaison de solutions d'un système

Si  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sont  $n$  solutions d'un système **homogène**, alors pour chaque solution, on peut la multiplier par un scalaire, cela donnera toujours 0. Donc pour tout vecteur  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $(s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n)$  est aussi une solution.

Si d'un autre côté on a un système linéaire, le vecteur  $b$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et des coefficients  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  (les  $x$ ,  $y$ ,  $z$  etc..).<sup>[p.180]</sup>

### 2.4.2 Vecteur indépendants (תלות לינארית)

Deux vecteurs  $a$  et  $b$  (ou plus) sont indépendants si  $\alpha * a + \beta * b = \mathbf{0}$  s'obtient uniquement avec des coefficients de combinaisons égaux à 0. Si au moins un scalaire n'est pas 0 alors les vecteurs ne sont pas indépendants (תלוי לינארית).

Pour vérifier si des vecteurs sont indépendants, les mettre dans une matrice à la verticale (la colonne des solutions est une colonne de 0). Si il y a plus d'une solution (donc si il y a des *mishtanim hofshiim*), ils ne sont pas indépendants (sinon, cela veut dire que la seule solution est la solution triviale et qu'ils sont indépendants).

Géométriquement parlant, des vecteurs indépendants ne sont pas dans la même direction (pas superposés), car si deux vecteurs sont superposés, on peut revenir à 0 en soustrayant l'un à l'autre, si ils ne sont pas dans la même direction, on ne peut pas les faire revenir à 0.

Dans un groupe de vecteurs, il suffit qu'un seul ne soit pas indépendant des autres pour que tout le groupe soit dépendant. Il en découle que:

- Un groupe de vecteurs qui contient un sous groupe dépendant est lui aussi dépendant, et un sous groupe d'un groupe indépendant est lui aussi indépendant.<sup>[p.186]</sup>
- Des vecteurs  $a_1, \dots, a_k$  d'un espace  $F^n$  sont forcément dépendants si  $k > n$ , et si ils sont indépendants alors forcément  $k \leq n$  (car si il y a plus de vecteurs que de dimensions, et vu que l'on peut toucher n'importe quel point avec les  $n$  dimensions, on pourra forcément toucher le dernier vecteur).<sup>[p.189]</sup>

## 3 Base vectorielle

### 3.1 Base standard

La base standard (בסיס הסטנדרטי) d'un espace vectoriel composée de  $e_1, e_2, \dots, e_n$  est l'ensemble des vecteurs de base d'un espace (vecteur avec un seul 1 et que des 0). La position du 1 dans le vecteur est l'index du  $e$ , par exemple, dans  $F^5$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ . Le span d'une base correspond à l'espace vectoriel entier ( $F^n$  הבסיס הסטנדרטי פורש את  $F^n$ ).

N'importe quel point de l'espace est une combinaison de la base standard.

### 3.2 Base

Si une suite (ou un ensemble) de vecteurs  $a_1, \dots, a_k$  span un espace  $F^n$ , alors  $k \geq n$ , et si en plus cette série est indépendante alors  $k = n$ .<sup>[p.192]</sup>

Donc si une suite de  $n$  vecteurs (ou un ensemble de  $n$  vecteurs différents) span un espace ou est indépendante, alors c'est la base de  $F^n$ . Une série de vecteurs qui span un espace est appelée la base ordonnée (בסיס סדור)<sup>[p.193]</sup>

L'ensemble des vecteurs de la série est appelé base (בסיס) si il est indépendant

et qu'il span l'espace.

Un ensemble d exactement  $n$  vecteurs indépendants span forcément  $F^n$  (pas vrai si  $k \neq n$ ).<sup>[p.194]</sup>

Dans chaque base de  $F^n$  il y a exactement  $n$  vecteurs différents.

Chaque vecteur de  $F^n$  correspond a une seule et unique combinaison de la base (la suite, pas l'ensemble, car l'ensemble n'est pas ordonné).

### 3.2.1 Difference entre une suite et un ensemble

Dans un ensemble, il ne peut pas y avoir de doublon, donc pour tout vecteur  $v \neq 0$ , l'ensemble  $v, v$  est indépendant, mais la suite  $v, v$  ne l'est pas. Il n'y a donc pas de difference sauf si deux elements sont égaux.

### 3.2.2 Prouver qu'un ensemble de vecteurs est une base

Pour prouver qu'un ensemble (ou une suite) de vecteurs est une base il faut montrer que n'importe quel vecteur  $b$  est une combinaison linéaire de ces vecteurs (voir p.195), ou montrer que le système homogène n'a pas de solution non triviale (en verifiant si sa matrice réduite est équivalente a la matrice identité, voir p.196).

## 3.3 Parallèle avec des systèmes

Les vecteurs de la base d'un espace forment un système homogène a solution triviale:

$$s_1 * a_1 + \dots + s_n * a_n = 0 \quad (2)$$

Donc il n'existe qu'une seule et unique solution au système  $s_1 * a_1 + \dots + s_n * a_n = b$ <sup>[p.198]</sup>