Maman 11

Eyal Shukrun

October 30, 2020

1 שאלה 1

1.1 א)

$$\alpha = 2 * 4 - 3 * \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 8 - 3 * 3$$
$$\alpha = 3 - 9$$
$$\alpha = 3 - 4$$
$$\alpha = 3 + 1$$
$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$
$$\beta = 2 * 2 - 3 * 4$$
$$\beta = 4 - 2$$
$$\beta = 2$$

1.2 ב)

.1

$$3x^2 = 5$$
$$x^2 = 5 * 3^{-1}$$
$$x^2 = 5 * 5$$
$$x^2 = 25$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$

.2

$$6x^2+\frac{1}{4}=0$$
$$6x^2+2=0$$
$$6x^2=-2$$
$$x^2=5*6^{-1}$$
$$x^2=5*6$$
$$x^2=30$$
$$x^2=2$$
$$x=\sqrt{2}$$
$$x=\sqrt{9}$$
$$x=3$$

.3

$$5x+4y+z=0$$
$$5x=-4y-z$$
$$5x=3y+6z$$
$$x=(3y+6z)*5^{-1}$$
$$x=(3y+6z)*3$$
$$x=9y+18z$$
$$x=2y+4z$$
$$x=2(y+2z)$$

למשוואה הזאת יש 49 פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t+4s,t,s|t,s\in Z_7\}$$

2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה,עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגוהר על $\oplus$ ו-$*$
נגדיר $(a,1),(b,1)\in A$, לכן בהכרח $a,b\in R$, ובגלל שR שדה, אז גם $a+b\in R$ ו־$a*b\in R$. נובע מזה ש $(a+b,1)\in A$ ו־$(a*b,1)\in A$, לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2. $\oplus$ ו-$*$ הן קיבוציות

$$(a,1)\oplus((b,1)\oplus(c,1))=(a,1)\oplus(b+c,1)=(a+b+c,1)$$
$$((a,1)\oplus(b,1))\oplus(c,1)=(a+b,1)\oplus(c,1)=(a+b+c,1)$$

החיבור קיבוצית

$$(a,1)*((b,1)*(c,1)) = (a,1)*(bc,1) = (abc,1)$$
$$((a,1)*(b,1))*(c,1) = (ab,1)*(c,1) = (abc,1)$$

הכפל גם קיבוצית

3. $\bigoplus$ ו־$*$ הן חילופיות

$$(a,1)\oplus(b,1) = (a+b,1)$$
$$(b,1)\oplus(a,1) = (b+a,1) = (a+b,1)$$

החיבור חילופית

$$(a,1)*(b,1) = (ab,1)$$
$$(b,1)*(a,1) = (ba,1) = (ab,1)$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים 0_A ו־1_A שונים אחד מהשני

$$(a,1)\oplus(0_A,1) = (0_A,1)\oplus(a,1) = (a,1)$$
$$\Longrightarrow 0_A + a = a$$
$$\Longrightarrow 0_A = 0$$

$$(a,1)*(1_A,1) = (1_A,1)*(a,1) = (a,1)$$
$$\Longrightarrow 1_A * a = a$$
$$\Longrightarrow 1_A = 1$$

קיימים 0_A ו־1_A והם שונים אחד מהשני.

5. $*$ מתפלג על $\bigoplus$

עלינו לבדוק כי

$$((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) = ((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) &= (a+b,1)*(c,1)\\ &= (c(a+b),1)\\ &= (a*c+b*c,1)\\ ((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) &= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\ &= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\ &= (a*c+b*c,1)\end{aligned}$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל$*$ וכל איבר פרט ל־0_A הפיך ביחס ל$*$

$$(a,1)\oplus(-a,1)=(a+(-a),1)=(0,1)$$
$$(a,1)*(a^{-1},1)=(a*a^{-1},1)=(1,1)$$

אך a הוא איבר של R
ולכל $a\in R$ קיים $-a\in R$ כך ש $a+(-a)=0$ וקיים (פרט ל $a=0$) a^{-1} כך ש $a*a^{-1}=1$
לכן לכל $(a,1)$ קיים $-(a,1)=(-(a),1)$ ופרט ל $a=0$ קיים $(a,1)^{-1}=(a^{-1},1)$

הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן $(A,\oplus,*)$ הוא שדה.

2.2 ב)

1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית , מספיק להוכיח ש $a*b=b*a$:

$$a*b=b*a$$
$$a+b-2=b+a-2$$
$$a+b-2=a+b-2$$

מ.ש.ל

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש $(a*b)*c=a*(b*c)$:

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$
$$(a+b-2)+c-2=a+(b+c-2)-2$$
$$a+b+c-4=a+b+c-4$$

מ.ש.ל

הפעולה $*$ היא חילופית וקיבוצית

2) נוכיח שקיים $x\in R$, איבר הניטרלי

$$a*x=x*a=a$$
$$a+x-2=a$$
$$x=a-a+2$$
$$x=2$$

מ.ש.ל

קיים איבר ניטרלי לכל $a\in R$ והוא 2.

2.3 ג)

המשוואה הזאת נכונה בZ_9:

$$3*3=0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם $ab=0$ אז בהכרח $a=0$ או $b=0$, לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי,

3 שאלה 3

3.1 א

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\1&1&2&1&2\\1&1&1&0&2\\2&1&1&1&2\end{array}\right]\quad\begin{array}{l}\\R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-2*R_1\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to -R_3 \\ R_4 \to -R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3 * R_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad R_4 \to R_4 - 4 * R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to \frac{-R_4}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x + 2y = 1 &\implies x = 1 \\ y - z = -1 &\implies y = 0 \\ z + t = 0 &\implies z = 1 \\ t = -1 &\implies t = -1 \end{aligned}$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.2 ב

נתחיל ישר מ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{mod } 3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_4 \to R_4 - R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$