Maman 11

Eyal Shukrun

November 4, 2020

1 שאלה 1

1.1 א)

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2*4-3*\frac{1}{2} \\
\alpha &= 8-3*3 \\
\alpha &= 3-9 \\
\alpha &= 3+1 \\
\alpha &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2}{3}-\frac{3}{4} \\
\beta &= 2*2-3*4 \\
\beta &= 4-2 \\
\beta &= 2
\end{aligned}$$

1.2 ב)

.1

$$\begin{aligned}
3x^2 &= 5 \\
x^2 &= 5*3^{-1} \\
x^2 &= 5*5 \\
x^2 &= 25 \\
x^2 &= 4 \\
x = 2 &\vee x = 5
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}6x^2+\frac{1}{4}&=0\\6x^2+2&=0\\6x^2&=-2\\x^2&=5*6^{-1}\\x^2&=5*6\\x^2&=30\\x^2&=2\\x&=\sqrt{2}\\x&=\sqrt{9}\vee\sqrt{16}\\x&=3\vee x=4\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}&5x+4y+z=0\\&5x=-4y-z\\&5x=3y+6z\\&x=(3y+6z)*5^{-1}\\&x=(3y+6z)*3\\&x=9y+18z\\&x=2y+4z\\&x=2(y+2z)\end{aligned}$$

קיים יותר מפתרון אחד, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t+4s,t,s|t,s\in Z_7\}$$

לפי תשובה 1.3.1, קיים 7^2 אפשרויות לקבוצה $\{s,t|s,t\in Z_7\}$, לכן למשוואה הזאת יש 49 פתרונות.

2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה,עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגוהר על $\oplus$ ו-$*$
   נגדיר $(a,1),(b,1)\in A$, לכן בהכרח $a,b\in R$, ובגלל שR שדה, אז גם $a+b\in R$ ו־$a*b\in R$. נובע מזה ש $(a+b,1)\in A$ ו־$(a*b,1)\in A$, לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2. $\oplus$ ו-$*$ הן קיבוציות

$$(a,1)\oplus((b,1)\oplus(c,1))=(a,1)\oplus(b+c,1)=(a+b+c,1)$$
$$((a,1)\oplus(b,1))\oplus(c,1)=(a+b,1)\oplus(c,1)=(a+b+c,1)$$

החיבור קיבוצית

$$(a,1)*((b,1)*(c,1)) = (a,1)*(bc,1) = (abc,1)$$
$$((a,1)*(b,1))*(c,1) = (ab,1)*(c,1) = (abc,1)$$

הכפל גם קיבוצית

3. $\oplus$ ו־$*$ הן חילופיות

$$(a,1)\oplus(b,1) = (a+b,1)$$
$$(b,1)\oplus(a,1) = (b+a,1) = (a+b,1)$$

החיבור חילופית

$$(a,1)*(b,1) = (ab,1)$$
$$(b,1)*(a,1) = (ba,1) = (ab,1)$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים 0_A ו־1_A שונים אחד מהשני

$$\begin{aligned}&(a,1)\oplus(0_A,1) = (0_A,1)\oplus(a,1) = (a,1)\\ &\Longrightarrow 0_A + a = a\\ &\Longrightarrow 0_A = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a,1)*(1_A,1) = (1_A,1)*(a,1) = (a,1)\\ &\Longrightarrow 1_A * a = a\\ &\Longrightarrow 1_A = 1\end{aligned}$$

קיימים 0_A ו־1_A והם שונים אחד מהשני.

5. $*$ מתפלג על $\oplus$

עלינו לבדוק כי

$$((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) = ((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) &= (a+b,1)*(c,1)\\ &= (c(a+b),1)\\ &= (a*c+b*c,1)\\ ((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) &= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\ &= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\ &= (a*c+b*c,1)\end{aligned}$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל$*$ וכל איבר פרט ל־0_A הפיך ביחס ל$*$

$$(a,1)\oplus(-a,1)=(a+(-a),1)=(0,1)$$
$$(a,1)*(a^{-1},1)=(a*a^{-1},1)=(1,1)$$

אך a הוא איבר של R
ולכל $a\in R$ קיים $-a\in R$ כך ש $a+(-a)=0$ וקיים (פרט ל $a=0$) a^{-1} כך ש $a*a^{-1}=1$
לכן לכל $(a,1)$ קיים $-(a,1)=(-(a),1)$ ופרט ל $a=0$ קיים $(a,1)^{-1}=(a^{-1},1)$

$\boxed{\text{הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן } (A,\oplus,*) \text{ הוא שדה.}}$

2.2 ב)

1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית , מספיק להוכיח ש $a*b=b*a$:

$$a*b=b*a$$
$$a+b-2=b+a-2$$
$$a+b-2=a+b-2$$

מ.ש.ל

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש $(a*b)*c=a*(b*c)$:

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$
$$(a+b-2)+c-2=a+(b+c-2)-2$$
$$a+b+c-4=a+b+c-4$$

מ.ש.ל

$\boxed{\text{הפעולה } * \text{ היא חילופית וקיבוצית}}$

2) נוכיח שקיים $x\in R$, איבר הניטרלי

$$a*x=x*a=a$$
$$a+x-2=a$$
$$x=a-a+2$$
$$x=2$$

מ.ש.ל

$\boxed{\text{קיים איבר ניטרלי לכל } a\in R \text{ והוא } 2.}$

2.3 ג)

המשוואה הזאת נכונה בZ_9:

$$3*3=0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם $ab=0$ אז בהכרח $a=0$ או $b=0$, לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי,

3 שאלה 3

3.1 א

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-2*R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to -R_3 \\ R_4 \to -R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3 * R_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad R_4 \to R_4 - 4 * R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to \frac{-R_4}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - 2 * R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 2 * R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \to R_2 - R_4 \\ R_3 \to R_3 - R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \to R_2 - R_4 \\ R_3 \to R_3 - R_4 \end{array}$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.2 ב

נתחיל ישר משלב זה כי עד אז לא ביצענו שום פעולה אסורה מעל Z_3:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{mod } 3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_4 \to R_4 - R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x+2y=1 &\implies x=2t \\ y+2z=2 &\implies y=2+2t \\ z+t=0 &\implies z=-t \end{aligned}$$

על Z_3 יש למערכת הזאת יותר מפתורון אחד, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t, 2+2t, -t, t\}$$

מכוון ש־t הוא מספר ב־ Z_3, יש למערכת 3 פתרונות.

4 שאלה 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 1-a \\ a & a & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - a*R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 6+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-R_2}{a}(a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{R_3}{2-a^2+a}((2-a^2+a) \neq 0 \implies a \neq -1, a \neq 2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a+a^2}{2-a^2+a} \end{array}\right]$$

עבור $a=2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

מקבלים שורת סתירה, לכן אין פתרון.
עבור $a=0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

אין פתרון

עבור $a=-1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

יש אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{s-10;4;s\}$$

סיכום:

- יש פתרון יחיד עבור: $a\neq -1$, $a\neq 0$
- יש אין סוף פתרונות עבור: $a=-1$ ופתרון הכללי הוא $\{s-10;4;s\}$
- אין פתרונות עבור: $a=0$, $a=2$

5 שאלה 5

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-3*R_1 \\ R_4\to R_4-R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array}\right] \quad R_3\to \frac{R_3}{b}(b\neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array}\right] \quad R_4\to \frac{R_4}{b-a}(b\neq a)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{b-a} \end{array}\right]$$

עבור $b\neq 0$ ו־$b\neq a$ יש למערכת פתרון יחיד, נבדוק עכשיו את הערכים הבעיתיים.

עבור $b=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_4\to -R_4 \\ R_3\leftrightarrow R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1\to R_1-R_3 \\ R_2\to R_2-R_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{R_3}{a}(a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - a * R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 0 & -a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x + az = -a(a-1) &\implies x = -a(a-1) - at \\ y &= a-1 \\ z &= t \\ w &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

אם $a = 0$ אז R_3 שורת סתירה, ואין פתרון
אם $a \neq 0$, אז יש למערכת פתרון כללי, והוא:

$$\{-a(a-1) - at, a-1, t, \frac{1}{a}\}$$

עבור $a = b$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right]$$

אם $a \neq 1$ אז R_4 שורת סתירה ואין פתרון, אחרת קיים אין סוף פתרונות למערכת, פתרון הכללי הוא:

$$\{1-t, t, 1+2t, t\}$$

סיכום:

אין פתרון:

- $a = b \neq 1$

פתרון יחיד:

- $b \neq 0$
- $a \neq b$

אין סוף פתרונות:

- $b = 0 \wedge a \neq 0$: $\{-a(a-1) - at, a-1, t, \frac{1}{a}\}$
- $a = b = 1$: $\{1-t, t, 1+2t, t\}$