Eyal Shukrun

November 7, 2020

שאלה 1

- א - נכון
- ב - לא נכון
- ג - לא נכון
- ד - לא נכון
- ה - נכון
- ו - לא נכון
- ג - נכון
- ח - נכון

שאלה 2

א)

נוכיח את השוויון הזה בעזרת אלגברה של הקבוצות:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

לפי משפט 24.1:

$$A \setminus (B \cap C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap (B \cap C^c)^c = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

לפי דה מורגן:

$$A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

לפי חוק הפילוג

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

משל

ב)

מתוך הנחה ש־$\{A\} \subseteq P(B)$, בהכרח $A \in P(B)$ ולכן A היא תת־קבוצה של B (לפי הגדרה של הקבוצת החזקה).
היחס $\subseteq$ הוא טרנזיטיבי, כלומר כל תת־קבוצה של A גם תת־קבוצה של B.
כדי להוכיח ש־$\{A\} \subseteq P(B) \implies P(A) \subseteq P(B)$, נניח בשלילה ש־$P(A) \not\subseteq P(B)$, ולכן קיים תת־קבוצה של A שהיא לא תת קבוצה של B, וזה עומד בסתירה עם הטענה מעל.
לכן חייב להתקיים $P(A) \subseteq P(B)$.

ג)

נניח בשלילה ש־$B \nsubseteq A \wedge A \nsubseteq B$. נוכיח שקיים איבר ב־$P(A\cup B)$ שלא קיים ב־$P(A)\cup P(B)$.
מההנחה מעל נובע שקיים $x\in A, y\in B$ כך ש־$x\notin B$ ו־$y\notin A$.
לפי הגדרת האיחוד: $x,y\in A\cup B$. לכן $\{x,y\}$ היא תת־קבוצה של $A\cup B$ ו־$\{x,y\}\in P(A\cup B)$.
אך מכוון ש־$x\notin B$, ברור כי $\{x\}\notin P(B)$, וחמשיבה דומה, $\{y\}\notin P(A)$.
לכן $\{x,y\}\nsubseteq A$ ו־$\{x,y\}\nsubseteq B$, כלומר $\{x,y\}$ לא תת־קבוצה של A או של B, ולכן $\{x,y\}\notin P(A)$ ו־$\{x,y\}\notin P(B)$, ולפי הגדרת האיחוד: $\{x,y\}\notin P(A)\cup P(B)$, קיבלנו סתירה עם הנתון, לכן הוכחנו ש־$B\subseteq A\vee A\subseteq B \implies P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

שאלה 3

א)

נניח בשלילה ש־$A\neq U$, כלומר קיים $x\notin A$.
נפשט את הטענה $(A\cap B)^c\subseteq A$:

לפי דה מורגן:

$$A^c\cup B^c\subseteq A$$

לפי משפט 12.1

$$A^c\cup B^c\subseteq A \implies A^c\subseteq A\wedge B^c\subseteq A$$

לכן

$$A^c\subseteq A$$

אך אם קיים $x\notin A$ אז $x\in A^c$, ולכן $A^c\nsubseteq A$. קילבנו פה סתירה, לכן אם $(A\cap B)^c\subseteq A$ אז $A=U$.

ב)

מתוך ההנחה ש־$A^c\Delta B=A\Delta C$ נוכיח ש־$C=B^c$.
למען ההוכחה נשתמש בשני הוכחות:

- שאלה 38: $A\Delta U=A^c$
- שאלה 32: $B\Delta C \implies A\Delta B=A\Delta C$ והפעולה של הפרש סימטרי קיבוצית.

לפי שאלה 38: $A^c\Delta B=(A\Delta U)\Delta B$
לפי שאלה 32: $(A\Delta U)\Delta B=A\Delta(U\Delta B)$
שוב לפי 38: $A\Delta(U\Delta B)=A\Delta B^c$
הגענו לשוויון: $A\Delta B^c=A\Delta C$, לכן לפי שאלה 32 נובע כי $B^c=C \implies A\Delta B^c=A\Delta C$, שזה מה שהיה צריך להוכיח.

ג)

מתוך הנחה ש־$x\in(A\cap B)\setminus C$, נובע כי $x\in(A\cap B)$ וכי $x\notin C$, אך לפי הגדרת ההפרש הסימטרי: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, לכן בהכרח $x\notin A\Delta B$, כי $x\in(A\cap B)$.
לפי שאלה 32א, $A\Delta B\Delta C=(A\Delta B)\Delta C$, לכן $x\in(A\Delta B)\Delta C$ אם ורק אם $x\in(A\Delta B)\wedge x\notin C$ או $x\in C\wedge x\notin(A\Delta B)$.
כבר הוכחנו ש־$x\notin(A\Delta B)$ וש־$x\notin C$ לכן לא יתכן אף מצב דלעיל, ובהכרח $x\notin A\Delta B\Delta C \implies x\in(A\cap B)\setminus C$.

שאלה 4

א)

משמעות הקבוצה A_n^c היא: כל המספרים הטבעיים הגדולים מ־n. לכן $\forall n\in N(A_n^c\subseteq A_0^c)$.
לפי הגדרת האיחוד: $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n^c=A_0^c=N\setminus\{0\}$

ב)

משמעות הקבוצה פה לא השתנה, אך הפעולה היא חיתוך ולא איחוד.
לכן רק איבר שנמצא בכל הקבוצות יהיה בחיתוך. אך לכל $x \in N$ קיים קבוצה A_x^c שמשמעותה $\{a \in N | a > x\}$ ולכן $x \notin A_x^c$.
מזה נובע ש־$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \varnothing$

ג)

משמעות $(A_{2n} \setminus A_n)$ היא: כל האיברים מ־n ל־$2n$, בלשון אחר: $\{x \in N^* | n < x \leq 2n\}$, אפס הוא מיוחד מכוון ש־$0 = 2 * 0$, לכן אפשר להוציא אותו ממשמעות הכללי של הקבוצה, כי כמובן ש־$A_0 \setminus A_0$ היא קבוצה ריקה. לכל x פרט ל־1 אפשר למצוא $n \in N$ כך ש־$n < x \leq 2n$.
ולכן $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ מכילה את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ־1.
בלשון אחר: $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = N \setminus \{0, 1\}$
לכן היא לא שווה לאחת מהקבוצות N , $N \setminus \{0\}$, $\varnothing$.

ד)

כפי שכבר ראינו, A_n^c היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ־n, כלומר $x \in N | x > n$
ולפי הגדרת A: משמעות A_{n+1} היא כל המספרים הטבעיים מ־0 עד $n+1$, כלומר $\{x \in N | x \leq n+1\}$.
לכן לכל $n \in N$, $\{n+1\} = (A_{n+1} \cap A_n^c)$, ולכן לכל $x \in N^*$ קיים: $x \in (A_x \cap A_{x-1}^c)$.
לכן האיחוד הזה היא קבוצה של כל המספריים הטבעיים הגדולים מ־0, כלומר:
$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = N \setminus \{0\}$