Eyal Shukrun

November 1, 2020

1 שאלה 1

- א - נכון
- ב - לא נכון
- ג - לא נכון
- ד - לא נכון
- ה - נכון
- ו - לא נכון
- ג - נכון
- ח - נכון

2 שאלה 2

3 שאלה 3

3.1 א

3.2 ב

מתוך ההנחה ש-$A^c\Delta B = A\Delta C$ נוכיח שנובע $C = B^c$. למען ההוכחה נשתמש בשני הוכחות:

- שאלה 38: $A\Delta U = A^c$
- שאלה 32: $B\Delta C \implies A\Delta B = A\Delta C$ והפעולה של הפרש סימטרי קיבוצית.

לפי שאלה 38: $A^c\Delta B = (A\Delta U)\Delta B$
לפי שאלה 32: $(A\Delta U)\Delta B = A\Delta(U\Delta B)$
שוב לפי 38: $A\Delta(U\Delta B) = A\Delta B^c$
הגענו לשוויון: $A\Delta B^c = A\Delta C$, לכן לפי שאלה 32 נובע כי $B^c = C \implies A\Delta B^c = A\Delta C$, שזה מה שהיה צריך להוכיח.

3.3 ג

מתוך הנחה ש-$x \in (A\cap B)\setminus C$, נובע כי $x \in (A\cap B)$ וכי $x \notin C$, אך לפי הגדרת ההפרש הסימטרי: $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, לכן בהכרח $x \notin A\Delta B$, כי $x \in (A\cap B)$.
מהנתון, $x \notin C$, לכן אין צורך לבדוק ש-$x \notin A\Delta C$ וש-$x \notin B\Delta C$.
הוכחנו ש-$x \in (A\cap B)\setminus C \implies x \notin A\Delta B\Delta C$.

4 שאלה 4

4.1 א

משמעות הקבוצה A_n^c היא: כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-n. לכן $\forall n \in N(A_0^c \subseteq A_n^c)$.
לפי הגדרת האיחוד: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c = A_0^c = N\setminus\{0\}$

4.2 ב

משמעות הקבוצה פה לא השתנה, אך הפעולה היא חיתוך ולא איחוד.
לכן רק איבר שנמצא בכל הקבוצות יהיה בחיתוך. אך לכל $x \in N$ קיים קבוצה A_x^c שמשמעותה $\{a \in N | a > x\}$ ולכן $x \notin A_x^c$.
מזה נובע ש־$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \varnothing$

4.3 ג

משמעות $(A_{2n} \setminus A_n)$ היא: כל האיברים מ־n ל־$2n$, בלשון אחר: $\{x \in N^* | n < x \leq 2n\}$, אפס הוא מיוחד מכוון ש־$0 = 2 * 0$, לכן אפשר להוציא אותו ממשמעות הכללי של הקבוצה, כי כמובן ש־$A_0 \setminus A_0$ היא קבוצה ריקה. לכל x פרט ל־1 אפשר למצוא $n \in N$ כך ש־$n < x \leq 2n$.
ולכן $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ מכילה את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ־1.
בלשון אחר: $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = N \setminus \{0,1\}$
לכן היא לא שווה לאחת מהקבוצות N , $N \setminus \{0\}$, $\varnothing$.

4.4 ד

כפי שכבר ראינו, A_n^c היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ־n, כלומר $x \in N | x > n$
ולפי הגדרת A: משמעות A_{n+1} היא כל המספרים הטבעיים מ־0 עד $n+1$, כלומר $\{x \in N | x \leq n+1\}$.
לכן לכל $n \in N$, $\{n+1\} = (A_{n+1} \cap A_n^c)$, ולכן לכל $x \in N^*$ קיים: $x \in (A_x \cap A_{x-1}^c)$.
לכן האיחוד הזה היא קבוצה של כל המספריים הטבעיים הגדולים מ־0, כלומר:
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = N \setminus \{0\}$$