Eyal Shukrun

November 1, 2020

1 Vocabulaire

1.1 Angles

Aigu - חדה
Obtu - קהה

2 Fonctions trigonometriques

2.1 sohcahtoa

$\sin = \frac{opposé}{hypothénuse}$

$\cos = \frac{adjacent}{hypothénuse}$

$tan = \frac{opposé}{adjacent}$

2.2 cotangeante

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\tan \alpha = \cot(90 - \alpha)$

2.3 Valeurs courantes

α	30°	45 °	60 °
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.4 Relations entre les fonctions d'un meme angle

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
Démonstration:

$$\begin{aligned} &\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \\ \Leftrightarrow &\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2} \qquad \qquad Pythagorus : a^2+b^2=c^2 \\ \Leftrightarrow &\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} \\ \Leftrightarrow &\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

2) $\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$ and $\tan\alpha = \cot(90-\alpha)$

3) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4) $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

5) $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

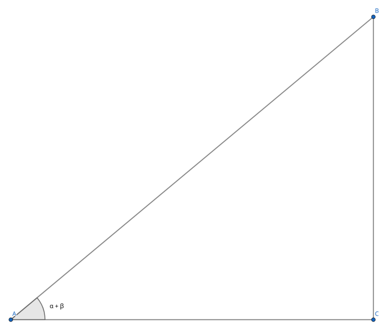
2.5 Relations entre deux angles différents

Soit α et β deux angles aigus d'un triangle rectangle (ainsi $\alpha+\beta < 90°$).

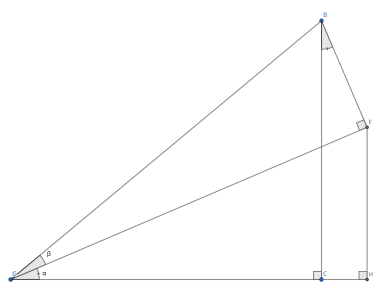
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Démonstration:

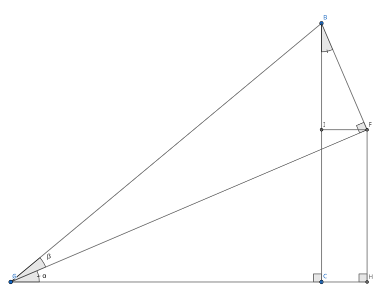
Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 1$ et $\sphericalangle A = \alpha + \beta$:



Séparons l'angle $\sphericalangle A$ en deux (α et β).
Nous pouvons ainsi creer deux nouveaux triangles rectangles, ABF et AHF.
ACFG est composé de deux triangles semblables, donc $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BAC = \alpha$.



Relions maintenant le point F a BC, créant un nouveau triangle rectangle BIF (comme du biff)



Puisque AB = 1:

$$\mathrm{BF} = \sin\beta \tag{3}$$

$$\mathrm{AF} = \cos\beta \tag{4}$$

$$\cos(\alpha + beta) = \mathrm{AC} \tag{5}$$

$$\sin(\alpha + beta) = \mathrm{BC} \tag{6}$$

$$\mathrm{AH} = \cos\alpha * AF \Rightarrow \mathrm{AH} = \cos\alpha * \cos\beta \tag{7}$$

$$\mathrm{IF} = \sin\alpha * \mathrm{BF} \Rightarrow \sin\alpha * \sin\beta \tag{8}$$

Prouvons que $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \mathrm{BC} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \mathrm{BI} + \mathrm{FH}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BF}} \Rightarrow \mathrm{BI} = \cos\alpha * \mathrm{BF} \\
\sin\alpha &= \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{AF}} \Rightarrow \mathrm{FH} = \sin\alpha * \mathrm{AF}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{BF} &= \sin\beta \\
\mathrm{AF} &= \cos\beta
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{BI} &= \cos\alpha * \sin\beta \\
\mathrm{FH} &= \sin\alpha * \cos\beta
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

De la même manière:

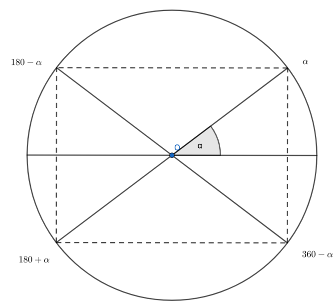
$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \mathrm{AC} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \mathrm{AH} - \mathrm{IF} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Les soustractions reviennent juste a inverser le signe du milieu:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

3 Angles $> 90°$

Les fonctions cos et sin ne se définissent que pour $0 < \alpha < 90$
Pour calculer ces fonctions sur des angles en dehors de ces limites, il faut d'abord les ramener dans ces limites.
Puisque cos et sin sont des fonctions de cercle, il existe une symétrie.



Ainsi par exemple pour tout angle α: $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$.
Les seuls cas ou la valeur n'est pas transformée en négatif sont:

- $\cos(360 - \alpha)$
- $\sin(180 - \alpha)$
- $\tan(180 + \alpha)$
- $\cot(180 + \alpha)$

4 Radians

Dans un cercle, on mesure un angle en radians selon la longueur de l'arc qu'il forme. Sa valeur en radians est égale a la longueur de l'arc divisée par le rayon $\frac{l}{R}$ tandis que sa valeur en degrés est définie par la longueur de l'arc divisée par 360 $\frac{l}{360}$.
Ainsi pour passer d'un angle de α degrés a sa valeur x en radians, ou l'inverse, il existe l'équation suivante:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360} \tag{9}$$

4.1 Fonctions trigonométriques en radians

Les relations entre les fonctions restent évidemment les mêmes.

Pour chaque angle x, il existe un angle symétrique $\frac{\pi}{2} - x$ a l'intérieur du cadran qui inverse le sin et le cos.

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$
$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Idem pour tan et cot.
Remarque perso: Ajouter $\frac{\pi}{2}$ a x revient a tourner le cercle de 90°vers la gauche.

Puisque c'est un cercle, ajouter 2π a x revient au même point, et ajouter π a x le fait passer a son opposé dans le cercle, donc:

$$\sin(2\pi k + x) = \sin(x)$$
$$\cos(2\pi k + x) = \cos(x)$$

$$\tan(\pi k + x) = \tan(x)$$
$$\cot(\pi k + x) = \cot(x)$$

4.2 Conversions courantes

α	0°	30°	45 °	60 °	90 °
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

4.3 Symétrie

1) $\pi + x$: Symétrie diagonale
2) $\pi - x$: Symétrie verticale

3) $2\pi - x$: Symétrie horizontale

5 Autres formules

5.1 Avec un angle

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

5.2 Avec deux angles

Additions:
Pour les sinus: $2 * \sin * \cos$, les signes de la fraction s'inversent si c'est un -

$$\sin x + \sin y = 2 * \sin(\frac{x+y}{2}) * \cos(\frac{x-y}{2})$$
$$\sin x - \sin y = 2 * \sin(\frac{x-y}{2}) * \cos(\frac{x+y}{2})$$

Pour les cos: $2 * \cos * \cos$ si +, $2 * \sin * \sin$ si -, les signes ne s'inversent pas

$$\cos x + \cos y = 2 * \cos(\frac{x+y}{2}) * \cos(\frac{x-y}{2})$$
$$\cos x - \cos y = 2 * \sin(\frac{x+y}{2}) * \sin(\frac{x-y}{2})$$

Multiplications:
$\sin x * \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ $\sin x * \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
$\cos x * \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$