

Eyal Shukrun

November 7, 2020

שאלה 1

- א - נכון
- ב - לא נכון
- ג - לא נכון
- ד - לא נכון
- ה - נכון
- ו - לא נכון
- ז - נכון
- ח - נכון

שאלה 2

(א)

נוכיח את השוויון הזה בעזרת אלגברה של הקבוצות:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

לפי משפט 24.1:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C^c) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ A \cap (B \cap C^c)^c &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

לפי דה מורגן:

$$A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

לפי חוק הפילוג

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

משל

(ב)

מתוך הנחה ש- $\{A\} \subseteq P(B)$, בהכרח $A \in P(B)$ ולכן A היא תת-קבוצה של B (לפי הגדרה של הקבוצת החזקה).
היחס \subseteq הוא טרנזיטיבי, כלומר כל תת-קבוצה של A גם תת-קבוצה של B .
כדי להוכיח ש- $\{A\} \subseteq P(B) \implies P(A) \subseteq P(B)$, נניח בשלילה ש- $P(A) \not\subseteq P(B)$, ולכן קיים תת-קבוצה של A שהיא לא תת קבוצה של B , וזה עומד בסתירה עם הטענה מעל.
לכן חייב להתקיים $P(A) \subseteq P(B)$.

(ג)

נניח בשלילה ש- $B \not\subseteq A \wedge A \not\subseteq B$. נוכיח שקיים איבר ב- $P(A \cup B)$ שלא קיים ב- $P(A) \cup P(B)$. מההנחה מעל נובע שקיים $x \in A, y \in B$ כך ש- $x \notin B$ ו- $y \notin A$. לפי הגדרת האיחוד: $x, y \in A \cup B$. לכן $\{x, y\}$ היא תת-קבוצה של $A \cup B$ ו- $\{x, y\} \in P(A \cup B)$. אך מכיון ש- $x \notin B$ ברור כי $\{x\} \notin P(B)$, וחמשיבה דומה, $\{y\} \notin P(A)$. לכן $\{x, y\} \notin A$ ו- $\{x, y\} \notin B$, כלומר $\{x, y\}$ לא תת-קבוצה של A או של B , ולכן $\{x, y\} \notin P(A)$ ו- $\{x, y\} \notin P(B)$, ולפי הגדרת האיחוד: $\{x, y\} \notin P(A) \cup P(B)$, קיבלנו סתירה עם הנתון, לכן הוכחנו ש- $B \subseteq A \vee A \subseteq B \implies P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

שאלה 3

(א)

נניח בשלילה ש- $A \neq U$, כלומר קיים $x \notin A$. נפשט את הטענה $(A \cap B)^c \subseteq A$:

לפי דה מורגן:

$$A^c \cup B^c \subseteq A$$

לפי משפט 12.1

$$A^c \cup B^c \subseteq A \implies A^c \subseteq A \wedge B^c \subseteq A$$

לכן

$$A^c \subseteq A$$

אך אם קיים $x \notin A$ אז $x \in A^c$, ולכן $A^c \not\subseteq A$. קיבלנו פה סתירה, לכן אם $(A \cap B)^c \subseteq A$ אז $A = U$.

(ב)

מתוך ההנחה ש- $A^c \Delta B = A \Delta C$ נוכיח ש- $C = B^c$. למען ההוכחה נשתמש בשני הוכחות:

$$\bullet \text{ שאלה 38: } A \Delta U = A^c$$

$$\bullet \text{ שאלה 32: } A \Delta B = A \Delta C \implies B \Delta C$$

$$\text{לפי שאלה 38: } A^c \Delta B = (A \Delta U) \Delta B$$

$$\text{לפי שאלה 32: } (A \Delta U) \Delta B = A \Delta (U \Delta B)$$

$$\text{שוב לפי 38: } A \Delta (U \Delta B) = A \Delta B^c$$

הגענו לשוויון: $A \Delta B^c = A \Delta C$, לכן לפי שאלה 32 נובע כי $B^c = C$, שזה מה שהיה צריך להוכיח.

(ג)

מתוך הנחה ש- $x \in (A \cap B) \setminus C$ נובע כי $x \in (A \cap B)$ וכי $x \notin C$, אך לפי הגדרת ההפרש הסימטרי: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, לכן בהכרח $x \notin A \Delta B$ כי $x \in (A \cap B)$.

לפי שאלה 32, $A \Delta B \Delta C = (A \Delta B) \Delta C$, לכן $x \in (A \Delta B) \Delta C$ אם ורק אם $x \in (A \Delta B)$ ו- $x \notin C$ או $x \in (A \Delta B)$ ו- $x \in C$. לכן $x \in (A \Delta B) \Delta C \implies x \notin A \Delta B \Delta C$ ובהכרח $x \notin (A \Delta B) \Delta C$.

שאלה 4

(א)

משמעות הקבוצה A_n^c היא: כל המספרים הטבעיים הגדולים מ- n . לכן $\forall n \in \mathbb{N} (A_n^c \subseteq A_0^c)$.

$$\text{לפי הגדרת האיחוד: } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c = A_0^c = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(ב)

משמעות הקבוצה פה לא השתנה, אך הפעולה היא חיתוך ולא איחוד.
לכן רק איבר שנמצא בכל הקבוצות יהיה בחיתוך. אך לכל $x \in N$ קיים קבוצה A_x^c שמשמעותה $\{a \in N | a > x\}$ ולכן $x \notin A_x^c$.
מזה נובע ש- $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$

(ג)

משמעות $(A_{2n} \setminus A_n)$ היא: כל האיברים מ- n ל- $2n$, בלשון אחר: $\{x \in N^* | n < x \leq 2n\}$, אפס הוא מיוחד מכיון ש- $0 = 2 * 0$, לכן אפשר להוציא אותו ממשמעות הכללי של הקבוצה, כי כמובן ש- $A_0 \setminus A_0$ היא קבוצה ריקה. לכל x פרט ל-1 אפשר למצוא $n \in N$ כך ש- $n < x \leq 2n$.

ולכן $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ מכילה את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-1.

בלשון אחר: $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = N \setminus \{0, 1\}$
לכן היא לא שווה לאחת מהקבוצות N , $N \setminus \{0\}$, \emptyset .

(ד)

כפי שכבר ראינו, A_n^c היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ- n , כלומר $x \in N | x > n$.
ולפי הגדרת A : משמעות A_{n+1} היא כל המספרים הטבעיים מ-0 עד $n+1$, כלומר $\{x \in N | x \leq n+1\}$.
לכן לכל $n \in N$, $(A_{n+1} \cap A_n^c) = \{n+1\}$, ולכן לכל $x \in N^*$ קיים: $x \in (A_x \cap A_{x-1}^c)$.
לכן האיחוד הזה היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-0, כלומר:
 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = N \setminus \{0\}$