

Eyal Shukrun

November 7, 2020

## שאלה 1

- א - נכון
- ב - לא נכון
- ג - לא נכון
- ד - לא נכון
- ה - נכון
- ו - לא נכון
- ז - נכון
- ח - נכון

## שאלה 2

(א)

נוכיח את השוויון הזה בעזרת אלגברה של הקבוצות:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

לפי משפט 24.1:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C^c) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ A \cap (B \cap C^c)^c &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

לפי דה מורגן:

$$A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

לפי חוק הפילוג

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

משל

(ב)

מתוך הנחה ש- $\{A\} \subseteq P(B)$ , בהכרח  $A \in P(B)$  ולכן  $A$  היא תת-קבוצה של  $B$  (לפי הגדרה של הקבוצת החזקה).  
היחס  $\subseteq$  הוא טרנזיטיבי, כלומר כל תת-קבוצה של  $A$  גם תת-קבוצה של  $B$ .  
כדי להוכיח ש- $\{A\} \subseteq P(B) \implies P(A) \subseteq P(B)$ , נניח בשלילה ש- $P(A) \not\subseteq P(B)$ , ולכן קיים תת-קבוצה של  $A$  שהיא לא תת קבוצה של  $B$ , וזה עומד בסתירה עם הטענה מעל.  
לכן חייב להתקיים  $P(A) \subseteq P(B)$ .

(ג)

נניח בשלילה ש- $B \not\subseteq A \wedge A \not\subseteq B$ . נוכיח שקיים איבר ב- $P(A \cup B)$  שלא קיים ב- $P(A) \cup P(B)$ . מההנחה מעל נובע שקיים  $x \in A, y \in B$  כך ש- $x \notin B$  ו- $y \notin A$ . לפי הגדרת האיחוד:  $x, y \in A \cup B$ . לכן  $\{x, y\}$  היא תת-קבוצה של  $A \cup B$  ו- $\{x, y\} \in P(A \cup B)$ . אך מכיון ש- $x \notin B$  ברור כי  $\{x\} \notin P(B)$ , וחמשיבה דומה,  $\{y\} \notin P(A)$ . לכן  $\{x, y\} \notin A$  ו- $\{x, y\} \notin B$ , כלומר  $\{x, y\}$  לא תת-קבוצה של  $A$  או של  $B$ , ולכן  $\{x, y\} \notin P(A)$  ו- $\{x, y\} \notin P(B)$ , ולפי הגדרת האיחוד:  $\{x, y\} \notin P(A) \cup P(B)$ , קיבלנו סתירה עם הנתון, לכן הוכחנו ש- $B \subseteq A \vee A \subseteq B \implies P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ .

### שאלה 3

(א)

נניח בשלילה ש- $A \neq U$ , כלומר קיים  $x \notin A$ . נפשט את הטענה  $(A \cap B)^c \subseteq A$ :

לפי דה מורגן:

$$A^c \cup B^c \subseteq A$$

לפי משפט 12.1

$$A^c \cup B^c \subseteq A \implies A^c \subseteq A \wedge B^c \subseteq A$$

לכן

$$A^c \subseteq A$$

אך אם קיים  $x \notin A$  אז  $x \in A^c$ , ולכן  $A^c \not\subseteq A$ . קיבלנו פה סתירה, לכן אם  $(A \cap B)^c \subseteq A$  אז  $A = U$ .

(ב)

מתוך ההנחה ש- $A^c \Delta B = A \Delta C$  נוכיח ש- $C = B^c$ . למען ההוכחה נשתמש בשני הוכחות:

$$\bullet \text{ שאלה 38: } A \Delta U = A^c$$

$$\bullet \text{ שאלה 32: } A \Delta B = A \Delta C \implies B \Delta C$$

$$\text{לפי שאלה 38: } A^c \Delta B = (A \Delta U) \Delta B$$

$$\text{לפי שאלה 32: } (A \Delta U) \Delta B = A \Delta (U \Delta B)$$

$$\text{שוב לפי 38: } A \Delta (U \Delta B) = A \Delta B^c$$

הגענו לשוויון:  $A \Delta B^c = A \Delta C$ , לכן לפי שאלה 32 נובע כי  $B^c = C$ , שזה מה שהיה צריך להוכיח.

(ג)

מתוך הנחה ש- $x \in (A \cap B) \setminus C$  נובע כי  $x \in (A \cap B)$  וכי  $x \notin C$ , אך לפי הגדרת ההפרש הסימטרי:  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , לכן בהכרח  $x \notin A \Delta B$  כי  $x \in (A \cap B)$ .

לפי שאלה 32,  $A \Delta B \Delta C = (A \Delta B) \Delta C$ , לכן  $x \in (A \Delta B) \Delta C$  אם ורק אם  $x \in (A \Delta B)$  ו- $x \notin C$  או  $x \in (A \Delta B)$  ו- $x \in C$ . לכן  $x \in (A \Delta B) \Delta C \implies x \notin A \Delta B \Delta C$  ובהכרח  $x \notin (A \Delta B) \Delta C$ .

### שאלה 4

(א)

משמעות הקבוצה  $A_n^c$  היא: כל המספרים הטבעיים הגדולים מ- $n$ . לכן  $\forall n \in \mathbb{N} (A_n^c \subseteq A_0^c)$ .

$$\text{לפי הגדרת האיחוד: } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c = A_0^c = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(ב)

משמעות הקבוצה פה לא השתנה, אך הפעולה היא חיתוך ולא איחוד.  
לכן רק איבר שנמצא בכל הקבוצות יהיה בחיתוך. אך לכל  $x \in N$  קיים קבוצה  $A_x^c$  שמשמעותה  $\{a \in N | a > x\}$  ולכן  $x \notin A_x^c$ .  
מזה נובע ש- $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$

(ג)

משמעות  $(A_{2n} \setminus A_n)$  היא: כל האיברים מ- $n$  ל- $2n$ , בלשון אחר:  $\{x \in N^* | n < x \leq 2n\}$ , אפס הוא מיוחד מכיון ש- $0 = 2 * 0$ , לכן אפשר להוציא אותו ממשמעות הכללי של הקבוצה, כי כמובן ש- $A_0 \setminus A_0$  היא קבוצה ריקה. לכל  $x$  פרט ל-1 אפשר למצוא  $n \in N$  כך ש- $n < x \leq 2n$ .

ולכן  $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$  מכילה את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-1.

בלשון אחר:  $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = N \setminus \{0, 1\}$   
לכן היא לא שווה לאחת מהקבוצות  $N$ ,  $N \setminus \{0\}$ ,  $\emptyset$ .

(ד)

כפי שכבר ראינו,  $A_n^c$  היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ- $n$ , כלומר  $x \in N | x > n$ .  
ולפי הגדרת  $A$ : משמעות  $A_{n+1}$  היא כל המספרים הטבעיים מ-0 עד  $n+1$ , כלומר  $\{x \in N | x \leq n+1\}$ .

לכן לכל  $n \in N$ ,  $(A_{n+1} \cap A_n^c) = \{n+1\}$ , ולכן לכל  $x \in N^*$  קיים:  $x \in (A_x \cap A_{x-1}^c)$ .

לכן האיחוד הזה היא קבוצה של כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-0, כלומר:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = N \setminus \{0\}$$