Maman 11

Eyal Shukrun

October 30, 2020

1 שאלה 1

1.1 א)

$$\alpha = 2*4-3*\frac{1}{2}$$
$$\alpha = 8-3*3$$
$$\alpha = 3-9$$
$$\alpha = 3-4$$
$$\alpha = 3+1$$
$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{2}{3}-\frac{3}{4}$$
$$\beta = 2*2-3*4$$
$$\beta = 4-2$$
$$\beta = 2$$

1.2 ב)

.1

$$3x^2 = 5$$
$$x^2 = 5*3^{-1}$$
$$x^2 = 5*5$$
$$x^2 = 25$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$

.2

$$\begin{aligned}
6x^2+\frac{1}{4} &= 0\\
6x^2+2 &= 0\\
6x^2 &= -2\\
x^2 &= 5*6^{-1}\\
x^2 &= 5*6\\
x^2 &= 30\\
x^2 &= 2\\
x &= \sqrt{2}\\
x &= \sqrt{9}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
&5x+4y+z=0\\
&5x=-4y-z\\
&5x=3y+6z\\
&x=(3y+6z)*5^{-1}\\
&x=(3y+6z)*3\\
&x=9y+18z\\
&x=2y+4z\\
&x=2(y+2z)
\end{aligned}$$

למשוואה הזאת יש 49 פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t+4s,t,s|t,s\in Z_7\}$$

2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה,עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגוהר על $\oplus$ ו$*$
נגדיר $(a,1),(b,1)\in A$, לכן בהכרח $a,b\in R$, ובגלל שR שדה, אז גם $a+b\in R$ ו־$a*b\in R$. נובע מזה ש $(a+b,1)\in A$ ו־$(a*b,1)\in A$, לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2. $\oplus$ ו$*$ הן קיבוציות

$$(a,1)\oplus((b,1)\oplus(c,1))=(a,1)\oplus(b+c,1)=(a+b+c,1)$$
$$((a,1)\oplus(b,1))\oplus(c,1)=(a+b,1)\oplus(c,1)=(a+b+c,1)$$

החיבור קיבוצית

$$
\begin{aligned}
(a,1)*((b,1)*(c,1)) = (a,1)*(bc,1) = (abc,1)\\
((a,1)*(b,1))*(c,1) = (ab,1)*(c,1) = (abc,1)
\end{aligned}
$$

הכפל גם קיבוצית

3. $\oplus$ ו־$*$ הן חילופיות

$$
\begin{aligned}
(a,1)\oplus(b,1) &= (a+b,1)\\
(b,1)\oplus(a,1) = (b+a,1) &= (a+b,1)
\end{aligned}
$$

החיבור חילופית

$$
\begin{aligned}
(a,1)*(b,1) &= (ab,1)\\
(b,1)*(a,1) = (ba,1) &= (ab,1)
\end{aligned}
$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים 0_A ו־1_A שונים אחד מהשני

$$
\begin{aligned}
&(a,1)\oplus(0_A,1) = (0_A,1)\oplus(a,1) = (a,1)\\
&\Longrightarrow 0_A + a = a\\
&\Longrightarrow 0_A = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a,1)*(1_A,1) = (1_A,1)*(a,1) = (a,1)\\
&\Longrightarrow 1_A * a = a\\
&\Longrightarrow 1_A = 1
\end{aligned}
$$

קיימים 0_A ו־1_A והם שונים אחד מהשני.

5. $*$ מתפלג על $\oplus$

עלינו לבדוק כי

$$((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) = ((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
((a,1)\oplus(b,1))*(c,1) &= (a+b,1)*(c,1)\\
&= (c(a+b),1)\\
&= (a*c+b*c,1)\\
((a,1)*(c,1))\oplus((b,1)*(c,1)) &= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\
&= (a*c,1)\oplus(b*c,1)\\
&= (a*c+b*c,1)
\end{aligned}
$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל$*$ וכל איבר פרט ל־0_A הפיך ביחס ל$*$

$$(a,1)\oplus(-a,1)=(a+(-a),1)=(0,1)$$
$$(a,1)*(a^{-1},1)=(a*a^{-1},1)=(1,1)$$

אך a הוא איבר של R
ולכל $a\in R$ קיים $-a\in R$ כך ש $a+(-a)=0$ וקיים (פרט ל $a=0$) a^{-1} כך ש $a*a^{-1}=1$
לכן לכל $(a,1)$ קיים $-(a,1)=(-(a),1)$ ופרט ל $a=0$ קיים $(a,1)^{-1}=(a^{-1},1)$

הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן $(A,\oplus,*)$ הוא שדה.

2.2 ב)

1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית , מספיק להוכיח ש $a*b=b*a$:

$$a*b=b*a$$
$$a+b-2=b+a-2$$
$$a+b-2=a+b-2$$

מ.ש.ל

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש $(a*b)*c=a*(b*c)$:

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$
$$(a+b-2)+c-2=a+(b+c-2)-2$$
$$a+b+c-4=a+b+c-4$$

מ.ש.ל

הפעולה $*$ היא חילופית וקיבוצית

2) נוכיח שקיים $x\in R$, איבר הניטרלי

$$a*x=x*a=a$$
$$a+x-2=a$$
$$x=a-a+2$$
$$x=2$$

מ.ש.ל

קיים איבר ניטרלי לכל $a\in R$ והוא 2.

2.3 ג)

המשוואה הזאת נכונה בZ_9:

$$3*3=0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם $ab=0$ אז בהכרח $a=0$ או $b=0$, לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי,

3 שאלה 3

3.1 א

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-2*R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&-1&1&0&1\\0&-1&0&-1&1\\0&-3&-1&-1&0\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_2\to -R_2\\R_3\to -R_3\\R_4\to -R_4\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&-1&0&-1\\0&1&0&1&-1\\0&3&1&1&0\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_3\to R_3-R_2\\R_4\to R_4-3*R_2\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&4&1&3\end{array}\right] \quad R_4\to R_4-4*R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&-3&3\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_1\to R_1-R_3\\R_4\to \frac{-R_4}{3}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}x+2y=1 &\implies x=1\\ y-z=-1 &\implies y=0\\ z+t=0 &\implies z=1\\ t=-1 &\implies t=-1\end{aligned}$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

3.2 ב

נתחיל ישר מ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&-1&0&-1\\0&1&0&1&-1\\0&3&1&1&0\end{array}\right] \quad \text{mod } 3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&2&0&2\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&0\end{array}\right] \quad R_3\to R_3-R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&2&0&2\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_4\to R_4-R_3\\R_1\to R_1-R_4\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&1\\0&1&2&0&2\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$x+2y=1 \implies x=2t$$
$$y+2z=2 \implies y=2+2t$$
$$z+t=0 \implies z=-t$$

על Z_3 יש למערכת הזאת אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t, 2+2t, -t, t\}$$

4 שאלה 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 1-a \\ a & a & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - a*R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 6+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-R_2}{a}(a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{R_3}{2-a^2+a}(2-a^2+a \neq 0 \implies a \neq -1, a \neq 2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a+a^2}{2-a^2+a} \end{array}\right]$$

אם $2+3a+a^2=0$ אז R_3 שורת סתירהת לכן $2+3a+a^2 \neq 0$, ו $a \neq -1$, $a \neq 2$.

אם $a=2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

אין פתרון

אם $a=0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

אין פתרון

אם $a=2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

R_4 שורת סתירה, לכן אין פתרון
אם $a=-1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

יש אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{s-10;4;s\}$$

סיכום:

- יש פתרון יחיד עבור: $a\neq -1$, $a\neq 2$, $a\neq 0$
- יש אין סוף פתרונות עבור: $a=-1$
- אין פתרונות עבור: $a=0$, $a=2$

5 שאלה 5

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3*R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b+1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_3 \to \frac{R_3}{b}(b\neq 0) \\ R_4 \to \frac{R_4}{b-a}(b\neq a) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b+1}{b-a} \end{array}\right]$$

עבור $b=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right]$$

אם $a=0$ אז R_4 שורת סתירה, ואין פתרון
אם $a\neq 0$, אז יש למערכת פתרון כללי, והוא:

$$\{a(1-s)-a^2;a-1;s;\frac{1}{a}\}$$

עבור $b=-1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

יש פתרון יחיד.

עבור $a=b$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

אם $a=-1$ אז R_4 שורת סתירה ואין פתרון, אחרת יש אין סוף פתרונות, ופתרון הכללי הוא:

$$\{-a^2+2aw+1; aw; 1-2w; w\}$$

סיכום:

אין פתרון:

- $b=0$ ו-$a=0$
- $b=-1$ ו-$a=-1$

פתרון יחיד:

- $b=-1$ (לכל a)

אין סוף פתרונות:

- $b=0$ ו-$a\neq 0$: $\{a(1-s)-a^2; a-1; s; \frac{1}{a}\}$
- $a\neq -1$ ו-$a=b$: $\{-a^2+2aw+1; aw; 1-2w; w\}$