

Maman 11

Eyal Shukrun

November 7, 2020

שאלה 1

(א) 1.1

$$\alpha = 2 * 4 - 3 * \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 8 - 3 * 3$$

$$\alpha = 3 - 9$$

$$\alpha = 3 + 1$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

$$\beta = 2 * 2 - 3 * 4$$

$$\beta = 4 - 2$$

$$\beta = 2$$

(ב) 1.2

.1

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 = 5 * 3^{-1}$$

$$x^2 = 5 * 5$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = 5$$

2.

$$\begin{aligned}
 6x^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\
 6x^2 + 2 &= 0 \\
 6x^2 &= -2 \\
 x^2 &= 5 * 6^{-1} \\
 x^2 &= 5 * 6 \\
 x^2 &= 30 \\
 x^2 &= 2 \\
 x &= \sqrt{2} \\
 x &= \sqrt{9} \vee \sqrt{16} \\
 x &= 3 \vee x = 4
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 5x + 4y + z &= 0 \\
 5x &= -4y - z \\
 5x &= 3y + 6z \\
 x &= (3y + 6z) * 5^{-1} \\
 x &= (3y + 6z) * 3 \\
 x &= 9y + 18z \\
 x &= 2y + 4z \\
 x &= 2(y + 2z)
 \end{aligned}$$

קיים יותר מפתרון אחד, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t + 4s, t, s | t, s \in \mathbb{Z}_7\}$$

לפי תשובה 1.3.1, קיים 7^2 אפשרויות לקבוצה $\{s, t | s, t \in \mathbb{Z}_7\}$, לכן למשוואה הזאת יש 49 פתרונות.

2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה, עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגורה על \oplus ו-

נגדיר $(a, 1), (b, 1) \in A$, לכן בהכרח $a, b \in R$, ובגלל ש R שדה, אז גם $a + b \in R$ ו- $a * b \in R$. נובע מזה ש $(a + b, 1) \in A$ ו- $(a * b, 1) \in A$, לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2. \oplus ו- * הן קיבוציות

$$\begin{aligned}
 (a, 1) \oplus ((b, 1) \oplus (c, 1)) &= (a, 1) \oplus (b + c, 1) = (a + b + c, 1) \\
 ((a, 1) \oplus (b, 1)) \oplus (c, 1) &= (a + b, 1) \oplus (c, 1) = (a + b + c, 1)
 \end{aligned}$$

החיבור קיבוצי

$$\begin{aligned}(a, 1) * ((b, 1) * (c, 1)) &= (a, 1) * (bc, 1) = (abc, 1) \\ ((a, 1) * (b, 1)) * (c, 1) &= (ab, 1) * (c, 1) = (abc, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם קיבוצית

3. \oplus * הן חילופיות

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (b, 1) &= (a + b, 1) \\ (b, 1) \oplus (a, 1) &= (b + a, 1) = (a + b, 1)\end{aligned}$$

החיבור חילופית

$$\begin{aligned}(a, 1) * (b, 1) &= (ab, 1) \\ (b, 1) * (a, 1) &= (ba, 1) = (ab, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים 0_A ו 1_A שונים אחד מהשני

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (0_A, 1) &= (0_A, 1) \oplus (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 0_A + a &= a \\ \implies 0_A &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, 1) * (1_A, 1) &= (1_A, 1) * (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 1_A * a &= a \\ \implies 1_A &= 1\end{aligned}$$

קיימים 0_A ו 1_A והם שונים אחד מהשני.

5. * מתפלג על \oplus

עלינו לבדוק כי

$$(1) \quad ((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) = ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1))$$

$$\begin{aligned}((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) &= (a + b, 1) * (c, 1) \\ &= (c(a + b), 1) \\ &= (a * c + b * c, 1) \\ ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1)) &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c + b * c, 1)\end{aligned}$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל* וכל איבר פרט ל- 0_A הפיך ביחס ל*

$$(a, 1) \oplus (-a, 1) = (a + (-a), 1) = (0, 1)$$

$$(a, 1) * (a^{-1}, 1) = (a * a^{-1}, 1) = (1, 1)$$

אך a הוא איבר של R

ולכל $a \in R$ קיים $-a \in R$ כך ש $a + (-a) = 0$ וקיים a^{-1} (פרט ל $a = 0$) כך ש $a * a^{-1} = 1$
 לכן לכל $(a, 1)$ קיים $(-a, 1) = -(a, 1)$ ופרט ל $a = 0$ קיים $(a^{-1}, 1) = (a, 1)^{-1}$

הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן $(A, \oplus, *)$ הוא שדה.

2.2 (ב)

(1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית, מספיק להוכיח ש $a * b = b * a$:

$$a * b = b * a$$

$$a + b - 2 = b + a - 2$$

$$a + b - 2 = a + b - 2$$

מ.ש.ל.

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש $(a * b) * c = a * (b * c)$:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a + b - 2) + c - 2 = a + (b + c - 2) - 2$$

$$a + b + c - 4 = a + b + c - 4$$

מ.ש.ל.

הפעולה * היא חילופית וקיבוצית

(2) נוכיח שקיים $x \in R$, איבר הניטרלי

$$a * x = x * a = a$$

$$a + x - 2 = a$$

$$x = a - a + 2$$

$$x = 2$$

מ.ש.ל.

קיים איבר ניטרלי לכל $a \in R$ והוא 2.

2.3 (ג)

המשוואה הזאת נכונה ב- Z_9 :

$$3 * 3 = 0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם $ab = 0$ אז בהכרח $a = 0$ או $b = 0$, לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי,

3 שאלה 3

3.1 א

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2 * R_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_4 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3 * R_2 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] R_4 \rightarrow R_4 - 4 * R_3 \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{-R_4}{3} \end{array} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_2 \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \end{array}
\end{aligned}$$

מכיון שאין משתנה חופשי, למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.2 ב

נתחיל ישר משלב זה כי עד אז לא ביצענו שום פעולה אסורה מעל Z_3 :

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{mod } 3 \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow R_2 - 2 * R_3 \rightarrow R_4 - R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x+t=0 &\Rightarrow x=-t \\ y+t=2 &\Rightarrow y=2-t \\ z+t=0 &\Rightarrow z=-t \end{aligned}$$

על Z_3 יש משתנה חופשי אחד והוא t וכל שאר המשתנים קשוריים, לכן יש למערכת הזאת יותר מפתרון, הפתרון הכללי הוא:

$$\{-t, 2-t, -t, t\}$$

מכוון ש- t הוא מספר ב- Z_3 , יש למערכת 3 פתרונות.

4 שאלה 4

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 1-a \\ a & a & 1 & 6 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 &\rightarrow R_3 - a * R_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 6+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow \frac{-R_2}{a} (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2-a^2+a} ((2-a^2+a) \neq 0 \Rightarrow a \neq -1, a \neq 2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a+a^2}{2-a^2+a} \end{array} \right]$$

עבור $a=2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right]$$

מקבלים שורת סתירה, לכן אין פתרון.

עבור $a=0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

אין פתרון

עבור $a = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

יש אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{s - 10; 4; s\}$$

סיכום:

- יש פתרון יחיד עבור: $a \neq 2, a \neq 0, a \neq -1$
- יש אין סוף פתרונות עבור: $a = -1$ ופתרון הכללי הוא $\{s - 10; 4; s\}$
- אין פתרונות עבור: $a = 2, a = 0$

5 שאלה 5

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3 * R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array} \right] R_3 \rightarrow \frac{R_3}{b} (b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array} \right] R_4 \rightarrow \frac{R_4}{b-a} (b \neq a)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{b-a} \end{array} \right]$$

עבור $b \neq 0$ ו- $b \neq a$ יש למערכת פתרון יחיד, נבדוק עכשיו את הערכים הבעייתיים.

עבור $b = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_4 \rightarrow -R_4 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{a} (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_1 \rightarrow R_1 - a * R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 0 & -a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x + az = -a(a-1) \Rightarrow x = -a(a-1) - at$$

$$y = a - 1$$

$$z = t$$

$$w = \frac{1}{a}$$

אם $a = 0$ אז R_3 שורת סתירה, ואין פתרון
אם $a \neq 0$, אז יש למערכת פתרון כללי, והוא:

$$\{-a(a-1) - at, a-1, t, \frac{1}{a}\}$$

עבור $a = b$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right]$$

אם $a \neq 1$ אז R_4 היא שורת סתירה, נחשב עבור $a = 1$:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}x - w = 1 &\implies x = 1 + w \\y - w = 0 &\implies y = t \\z + 2w = 1 &\implies z = 1 - 2t \\w &= t\end{aligned}$$

אם $a \neq 1$ אז R_4 שורת סתירה ואין פתרון, אחרת קיים אין סוף פתרונות למערכת, פתרון הכללי הוא:

$$\{1+t, t, 1-2t, t\}$$

סיכום:

אין פתרון:

$$a = b \neq 1 \bullet$$

פתרון יחיד:

$$b \neq 0 \bullet$$

$$a \neq b \bullet$$

אין סוף פתרונות:

$$\{-a(a-1)-at, a-1, t, \frac{1}{a}\} : b=0 \wedge a \neq 0 \bullet$$

$$\{1+t, t, 1-2t, t\} : a=b=1 \bullet$$