

# Maman 11

Eyal Shukrun

October 30, 2020

1 שאלה 1

1.1 (א)

$$\alpha = 2 * 4 - 3 * \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 8 - 3 * 3$$

$$\alpha = 3 - 9$$

$$\alpha = 3 - 4$$

$$\alpha = 3 + 1$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

$$\beta = 2 * 2 - 3 * 4$$

$$\beta = 4 - 2$$

$$\beta = 2$$

1.2 (ב)

.1

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 = 5 * 3^{-1}$$

$$x^2 = 5 * 5$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

2.

$$\begin{aligned}6x^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\6x^2 + 2 &= 0 \\6x^2 &= -2 \\x^2 &= 5 * 6^{-1} \\x^2 &= 5 * 6 \\x^2 &= 30 \\x^2 &= 2 \\x &= \sqrt{2} \\x &= \sqrt{9} \\x &= 3\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}5x + 4y + z &= 0 \\5x &= -4y - z \\5x &= 3y + 6z \\x &= (3y + 6z) * 5^{-1} \\x &= (3y + 6z) * 3 \\x &= 9y + 18z \\x &= 2y + 4z \\x &= 2(y + 2z)\end{aligned}$$

למשוואה הזאת יש 49 פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t + 4s, t, s | t, s \in \mathbb{Z}_7\}$$

## 2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה, עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגורה על  $\oplus$  ו  $*$ .  
נגדיר  $(a, 1), (b, 1) \in A$ , לכן בהכרח  $a, b \in R$ , ובגלל ש  $R$  שדה, אז גם  $a + b \in R$  ו  $a * b \in R$ . נובע מזה ש  $(a + b, 1) \in A$  ו  $(a * b, 1) \in A$ , לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2.  $\oplus$  ו  $*$  הן קיבוציות

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus ((b, 1) \oplus (c, 1)) &= (a, 1) \oplus (b + c, 1) = (a + b + c, 1) \\((a, 1) \oplus (b, 1)) \oplus (c, 1) &= (a + b, 1) \oplus (c, 1) = (a + b + c, 1)\end{aligned}$$

החיבור קיבוצית

$$\begin{aligned}(a, 1) * ((b, 1) * (c, 1)) &= (a, 1) * (bc, 1) = (abc, 1) \\ ((a, 1) * (b, 1)) * (c, 1) &= (ab, 1) * (c, 1) = (abc, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם קיבוצית

3.  $\oplus$  \* הן חילופיות

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (b, 1) &= (a + b, 1) \\ (b, 1) \oplus (a, 1) &= (b + a, 1) = (a + b, 1)\end{aligned}$$

החיבור חילופית

$$\begin{aligned}(a, 1) * (b, 1) &= (ab, 1) \\ (b, 1) * (a, 1) &= (ba, 1) = (ab, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים  $0_A$  ו  $1_A$  שונים אחד מהשני

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (0_A, 1) &= (0_A, 1) \oplus (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 0_A + a &= a \\ \implies 0_A &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, 1) * (1_A, 1) &= (1_A, 1) * (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 1_A * a &= a \\ \implies 1_A &= 1\end{aligned}$$

קיימים  $0_A$  ו  $1_A$  והם שונים אחד מהשני.

5. \* מתפלג על  $\oplus$

עלינו לבדוק כי

$$(1) \quad ((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) = ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1))$$

$$\begin{aligned}((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) &= (a + b, 1) * (c, 1) \\ &= (c(a + b), 1) \\ &= (a * c + b * c, 1) \\ ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1)) &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c + b * c, 1)\end{aligned}$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל\* וכל איבר פרט ל- $0_A$  הפיך ביחס ל\*

$$(a, 1) \oplus (-a, 1) = (a + (-a), 1) = (0, 1)$$

$$(a, 1) * (a^{-1}, 1) = (a * a^{-1}, 1) = (1, 1)$$

אך  $a$  הוא איבר של  $R$   
 ולכל  $a \in R$  קיים  $-a \in R$  כך ש  $a + (-a) = 0$  וקיים  $a^{-1}$  (פרט ל  $a = 0$ ) כך ש  $a * a^{-1} = 1$   
 לכן לכל  $(a, 1)$  קיים  $(-a, 1) = -(a, 1)$  ופרט ל  $a = 0$  קיים  $(a^{-1}, 1) = (a, 1)^{-1}$

הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן  $(A, \oplus, *)$  הוא שדה.

## 2.2 (ב)

(1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית, מספיק להוכיח ש  $a * b = b * a$ :

$$a * b = b * a$$

$$a + b - 2 = b + a - 2$$

$$a + b - 2 = a + b - 2$$

מ.ש.ל.

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש  $(a * b) * c = a * (b * c)$ :

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a + b - 2) + c - 2 = a + (b + c - 2) - 2$$

$$a + b + c - 4 = a + b + c - 4$$

מ.ש.ל.

הפעולה \* היא חילופית וקיבוצית

(2) נוכיח שקיים  $x \in R$ , איבר הניטרלי

$$a * x = x * a = a$$

$$a + x - 2 = a$$

$$x = a - a + 2$$

$$x = 2$$

מ.ש.ל.

קיים איבר ניטרלי לכל  $a \in R$  והוא 2.

## 2.3 (ג)

המשוואה הזאת נכונה ב- $\mathbb{Z}_9$ :

$$3 * 3 = 0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם  $ab = 0$  אז בהכרח  $a = 0$  או  $b = 0$ , לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי.  
 לכן  $\mathbb{Z}_9$  לא שדה.

### 3 שאלה 3

3.1 א

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2 * R_1 \end{array} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_4 \end{array} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3 * R_2 \end{array} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} R_4 \rightarrow R_4 - 4 * R_3 \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{-R_4}{3} \end{array} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$x + 2y = 1 \implies x = 1$$

$$y - z = -1 \implies y = 0$$

$$z + t = 0 \implies z = 1$$

$$t = -1 \implies t = -1$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

3.2 ב

נתחיל ישר מ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \pmod{3}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x + 2y = 1 &\implies x = 2t \\ y + 2z = 2 &\implies y = 2 + 2t \\ z + t = 0 &\implies z = -t \end{aligned}$$

על  $Z_3$  יש למערכת הזאת אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t, 2 + 2t, -t, t\}$$

#### 4 שאלה 4

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 1-a \\ a & a & 1 & 6 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - a \cdot R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 6+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow \frac{-R_2}{a} (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2-a^2+a} (2-a^2+a \neq 0 \implies a \neq -1, a \neq 2)$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a+a^2}{2-a^2+a} \end{array} \right]$$

אם  $2+3a+a^2 = 0$  או  $R_3$  שורת סתירה לכן  $2+3a+a^2 \neq 0$  ו  $a \neq -1$ ,  $a \neq 2$ .

אם  $a = 2$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right]$$

אין פתרון

אם  $a = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

אין פתרון

אם  $a = -2$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

יש פתרון יחיד והוא  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

אם  $a = -1$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

יש אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{s - 10; 4; s\}$$

סיכום:

• יש פתרון יחיד עבור:  $a \neq -2, a \neq 0, a \neq 2, a \neq -1$

• יש אין סוף פתרונות עבור:  $a = -1$

• אין פתרונות עבור:  $a = 2, a = -2, a = 0$

## 5 שאלה 5

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3 * R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \rightarrow \frac{R_3}{b} (b \neq 0) \\ R_4 \rightarrow \frac{R_4}{b-a} (b \neq a) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b+1}{b-a} \end{array} \right]$$

עבור  $b = 0$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{array} \right]$$

אם  $a = 0$  אז  $R_4$  שורת סתירה, ואין פתרון  
אם  $a \neq 0$ , אז יש למערכת פתרון כללי, והוא:

$$\{a(1-s) - a^2; a-1; s; \frac{1}{a}\}$$

עבור  $b = -1$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

יש פתרון יחיד.

עבור  $a = b$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right]$$

אם  $a = -1$  אז  $R_4$  שורת סתירה ואין פתרון, אחרת יש אין סוף פתרונות, ופתרון הכללי הוא:

$$\{-a^2 + 2aw + 1; aw; 1 - 2w; w\}$$

סיכום:

אין פתרון:

$$\bullet a = 0 \text{ ו } b = 0$$

$$\bullet a = -1 \text{ ו } b = -1$$

פתרון יחיד:

$$\bullet b = -1 \text{ (לכל } a)$$

אין סוף פתרונות:

$$\bullet a \neq 0 \text{ ו } b = 0 : \{a(1-s) - a^2; a-1; s; \frac{1}{a}\}$$

$$\bullet a \neq -1 \text{ ו } a = b : \{-a^2 + 2aw + 1; aw; 1 - 2w; w\}$$