

# Fonctions

Eyal Shukrun

October 30, 2020

Une fonction est définie par trois choses:

- Un ensemble de départ
- Un ensemble d'arrivée
- Une équation

## 1 Définitions

### 1.1 Ensemble de définition

Soit  $\mathbb{D} = \{1, 2, -2, 4, 5\}$  et  $f(x) = x^2$

Pour chaque élément  $a$  de  $\mathbb{D}$  il existe  $a^2 \in \mathbb{R}$

Ici,  $\mathbb{D}$  est considéré comme le **תחום הגדרה או תחום** de  $f(x)$  (l'ensemble des inputs, ou l'ensemble de départ) et  $\mathbb{R}$  est appelé **טווח** (l'ensemble des outputs, ou ensemble d'arrivée).

### 1.2 Image

$f(x)$  est l'image (**התמונה**) de  $x$  a travers  $f$ .

L'ensemble des outputs est l'image de  $f$  elle même (par exemple, pour  $f(x) = x^2$  définie sur  $\{2, -2, 3, 5, 7\}$ ,  $\{4, 9, 25, 49\}$  est l'image).

L'image d'une fonction est comprise dans son domaine d'arrivée.

## 2 Définir une fonction

### 2.1 Grâce à ses domaines de départ et d'arrivée

On peut définir une fonction en définissant son domaine de départ et les points qui lui correspondent.

Par exemple, pour la fonction  $f(x) = x^2$  définie sur  $\{-2, 2, 3, 4, 5\}$ :

### 2.1.1 Avec un tableau

Départ	-2	2	3	4	5
Arrivée	4	4	9	16	25

### 2.1.2 Avec des couples ordonnés

Le premier chiffre du couple correspond à l'input et le deuxième à l'output:

$$f = \{(-2, 4), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

**Remarque:** On note ce groupe  $f$  car il représente la fonction  $f$ .

**Remarque:** Si une fonction  $f$  est définie de  $\mathbb{D}$  à  $T$  ( $f : D \rightarrow T$ ), et que  $S$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{D}$  ( $S \subseteq D$ ), alors l'image de  $S$  par  $f$  est écrite  $f(S)$ .  $f(S)$  contient toutes les images des éléments de  $S$  par  $f$ .

**Attention:** Pour qu'un ensemble de couples ordonnés soit représentatif d'une fonction, il est impératif de ne pas trouver deux tuples avec le même premier élément.

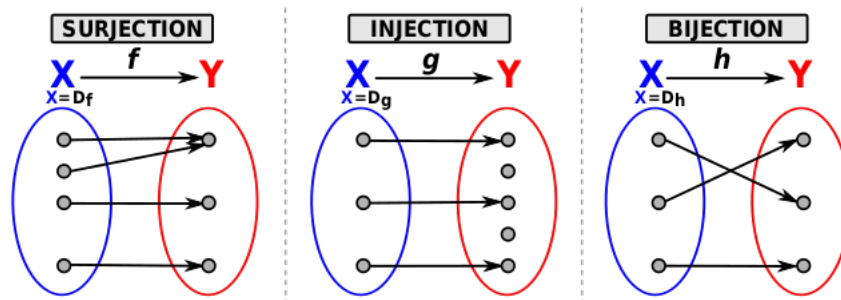
### 2.2 Avec une équation

Pour définir une fonction, une équation n'est pas suffisante, il faut aussi préciser son domaine de définition.

$$f : Z \rightarrow Z$$

$$f(x) = x^2 + 7x - 15$$

## 3 Fonctions bijectives, surjectives et injectives



### 3.1 Fonctions bijectives

Une fonction bijective (פונקציה חד-חד ערכית) est une fonction qui n'a qu'un seul input par output.

### 3.2 Fonctions surjectives

Une fonction surjective est une fonction pour laquelle chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ, cela implique que  $f : A \rightarrow B \Rightarrow f(A) = B$

## 4 Démonstrations

### 4.1 Prouver qu'une fonction est bijective

Pour prouver qu'une fonction est bijective, il suffit de prouver que:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

### 4.2 Prouver que l'image d'une fonction appartient a un ensemble

Soit:

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow R \\ f(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Prouver que  $f(R) = R$ :

**1. Prouver que  $f(R) \subseteq R$ , il n'y a rien a prouver.**

**2. Prouver que  $R \subseteq f(R)$ :**

Soit  $y \in R$ , prouvons que  $y \in f(R)$

C'est a dire prouvons qu'il existe  $x \in R$  tel que  $f(x) \in R$ .

C'est a dire prouvons qu'il existe pour tout  $x \in R$   $f(x) = y$

$$\begin{aligned} x &= 2\left(y + \frac{1}{2}\right) \\ x &= 2y + 1 \\ f(x) &= f(2y + 1) \\ f(2y + 1) &= \frac{1}{2}(2y + 1) - \frac{1}{2} \\ f(2y + 1) &= y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ f(2y + 1) &= y \end{aligned}$$

## 5 Composition de fonctions

Soit une fonction  $f$  et une fonction  $g$ , tel que l'ensemble d'arrivée de  $f$  est compris dans l'ensemble de départ de  $g$ . Il existe donc une nouvelle fonction  $g(f(x))$ , qui est

une composition de  $f$  et  $g$ , notée  $g \circ f$ .

**Remarque:**  $g \circ f$  n'est pas pareil que  $f \circ g$ , l'ordre compte (l'input rentre dans la fonction la plus à droite d'abord).

## 6 Fonctions inverses

Soit  $f$  une fonction bijective (pour chaque output, il n'existe qu'un seul input), existe-t'il une fonction permettant de passer d'une output à l'input qui lui correspond ?

C'est le principe de la fonction inverse (פונקציה הפוכה), notée  $f^{-1}$ .

Ainsi,  $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

On peut aussi dire que  $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in F\}$

### 6.1 Fonction identité

Une fonction identité (פונקציית זהות) est une fonction dont chaque input est son propre output.

Ainsi, la fonction  $f^{-1} \circ f$  est une fonction identité.

**Remarque:** Pour tout  $f : S \rightarrow D$ ,  $f^{-1} \circ f = I_S$  ( $I_S$  est la fonction identité)