

# Maman 11

Eyal Shukrun

November 7, 2020

שאלה 1

(א) 1.1

$$\alpha = 2 * 4 - 3 * \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 8 - 3 * 3$$

$$\alpha = 3 - 9$$

$$\alpha = 3 + 1$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

$$\beta = 2 * 2 - 3 * 4$$

$$\beta = 4 - 2$$

$$\beta = 2$$

(ב) 1.2

.1

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 = 5 * 3^{-1}$$

$$x^2 = 5 * 5$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = 5$$

2.

$$\begin{aligned} 6x^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\ 6x^2 + 2 &= 0 \\ 6x^2 &= -2 \\ x^2 &= 5 * 6^{-1} \\ x^2 &= 5 * 6 \\ x^2 &= 30 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \\ x &= \sqrt{9} \vee \sqrt{16} \\ x &= 3 \vee x = 4 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 5x + 4y + z &= 0 \\ 5x &= -4y - z \\ 5x &= 3y + 6z \\ x &= (3y + 6z) * 5^{-1} \\ x &= (3y + 6z) * 3 \\ x &= 9y + 18z \\ x &= 2y + 4z \\ x &= 2(y + 2z) \end{aligned}$$

קיים יותר מפתרון אחד, הפתרון הכללי הוא:

$$\{2t + 4s, t, s | t, s \in \mathbb{Z}_7\}$$

לפי תשובה 1.3.1, קיים  $7^2$  אפשרויות לקבוצה  $\{s, t | s, t \in \mathbb{Z}_7\}$ , לכן למשוואה הזאת יש 49 פתרונות.

## 2 שאלה 2

2.1 א)

על מנת לבדוק האם A הוא שדה, עלינו לבדוק את הנאים האלה:

1. A סגורה על  $\oplus$  ו-

נגדיר  $(a, 1), (b, 1) \in A$ , לכן בהכרח  $a, b \in R$ , ובגלל ש R שדה, אז גם  $a + b \in R$  ו-  $a * b \in R$ . נובע מזה ש  $(a + b, 1) \in A$  ו-  $(a * b, 1) \in A$ , לכן A סגורה על הפעולות האלו.

2.  $\oplus$  ו-  $*$  הן קיבוציות

$$\begin{aligned} (a, 1) \oplus ((b, 1) \oplus (c, 1)) &= (a, 1) \oplus (b + c, 1) = (a + b + c, 1) \\ ((a, 1) \oplus (b, 1)) \oplus (c, 1) &= (a + b, 1) \oplus (c, 1) = (a + b + c, 1) \end{aligned}$$

החיבור קיבוצי

$$\begin{aligned}(a, 1) * ((b, 1) * (c, 1)) &= (a, 1) * (bc, 1) = (abc, 1) \\ ((a, 1) * (b, 1)) * (c, 1) &= (ab, 1) * (c, 1) = (abc, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם קיבוצית

3.  $\oplus$  \* הן חילופיות

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (b, 1) &= (a + b, 1) \\ (b, 1) \oplus (a, 1) &= (b + a, 1) = (a + b, 1)\end{aligned}$$

החיבור חילופית

$$\begin{aligned}(a, 1) * (b, 1) &= (ab, 1) \\ (b, 1) * (a, 1) &= (ba, 1) = (ab, 1)\end{aligned}$$

הכפל גם חילופית

4. קיימים  $0_A$  ו  $1_A$  שונים אחד מהשני

$$\begin{aligned}(a, 1) \oplus (0_A, 1) &= (0_A, 1) \oplus (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 0_A + a &= a \\ \implies 0_A &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, 1) * (1_A, 1) &= (1_A, 1) * (a, 1) = (a, 1) \\ \implies 1_A * a &= a \\ \implies 1_A &= 1\end{aligned}$$

קיימים  $0_A$  ו  $1_A$  והם שונים אחד מהשני.

5. \* מתפלג על  $\oplus$

עלינו לבדוק כי

$$(1) \quad ((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) = ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1))$$

$$\begin{aligned}((a, 1) \oplus (b, 1)) * (c, 1) &= (a + b, 1) * (c, 1) \\ &= (c(a + b), 1) \\ &= (a * c + b * c, 1) \\ ((a, 1) * (c, 1)) \oplus ((b, 1) * (c, 1)) &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c, 1) \oplus (b * c, 1) \\ &= (a * c + b * c, 1)\end{aligned}$$

מ.ש.ל

6. כל איבר הפיך ביחס ל\* וכל איבר פרט ל- $0_A$  הפיך ביחס ל\*

$$(a, 1) \oplus (-a, 1) = (a + (-a), 1) = (0, 1)$$

$$(a, 1) * (a^{-1}, 1) = (a * a^{-1}, 1) = (1, 1)$$

אך  $a$  הוא איבר של  $R$

ולכל  $a \in R$  קיים  $-a \in R$  כך ש  $a + (-a) = 0$  וקיים  $a^{-1}$  (פרט ל  $a = 0$ ) כך ש  $a * a^{-1} = 1$   
 לכן לכל  $(a, 1)$  קיים  $(-a, 1) = -(a, 1)$  ופרט ל  $a = 0$  קיים  $(a^{-1}, 1) = (a, 1)^{-1}$

הוכחנו את כל התנאים מעלה, לכן  $(A, \oplus, *)$  הוא שדה.

2.2 (ב)

(1) כדי להוכיח שהפעולה חילופית, מספיק להוכיח ש  $a * b = b * a$ :

$$a * b = b * a$$

$$a + b - 2 = b + a - 2$$

$$a + b - 2 = a + b - 2$$

מ.ש.ל.

כדי להוכיח שהפעולה קיבוצית, מספיק להוכיח ש  $(a * b) * c = a * (b * c)$ :

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a + b - 2) + c - 2 = a + (b + c - 2) - 2$$

$$a + b + c - 4 = a + b + c - 4$$

מ.ש.ל.

הפעולה \* היא חילופית וקיבוצית

(2) נוכיח שקיים  $x \in R$ , איבר הניטרלי

$$a * x = x * a = a$$

$$a + x - 2 = a$$

$$x = a - a + 2$$

$$x = 2$$

מ.ש.ל.

קיים איבר ניטרלי לכל  $a \in R$  והוא 2.

2.3 (ג)

המשוואה הזאת נכונה ב- $Z_9$ :

$$3 * 3 = 0$$

אך משפט 1.2.6 טוען שאם  $ab = 0$  אז בהכרח  $a = 0$  או  $b = 0$ , לכן המשוואה הזאת עומדת בסתירה לתכונות של האיבר הנגדי,

### 3 שאלה 3

3.1 א

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2 * R_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_4 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3 * R_2 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] R_4 \rightarrow R_4 - 4 * R_3 \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{-R_4}{3} \end{array} \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_2 \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \end{array} \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 2 * R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4 \end{array}
\end{aligned}$$

מכיון שאין משתנה חופשי, למערכת הזאת יש פתרון יחיד מעל R והוא  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### 3.2 ב

נתחיל ישר משלב זה כי עד אז לא ביצענו שום פעולה אסורה מעל  $Z_3$ :

$$\begin{aligned}
&\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{mod } 3 \\
&\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 2 * R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow R_2 - 2 * R_3 \rightarrow R_4 - R_3$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x+t=0 &\Rightarrow x=-t \\ y+t=2 &\Rightarrow y=2-t \\ z+t=0 &\Rightarrow z=-t \end{aligned}$$

על  $Z_3$  יש משתנה חופשי אחד והוא  $t$  וכל שאר המשתנים קשוריים, לכן יש למערכת הזאת יותר מפתרון, הפתרון הכללי הוא:

$$\{-t, 2-t, -t, t\}$$

מכוון ש- $t$  הוא מספר ב- $Z_3$ , יש למערכת 3 פתרונות.

#### 4 שאלה 4

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 1-a \\ a & a & 1 & 6 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 &\rightarrow R_3 - a * R_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 6+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 4 \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_2 \rightarrow \frac{-R_2}{a} (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 2-a^2+a & 2+3a+a^2 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2-a^2+a} ((2-a^2+a) \neq 0 \Rightarrow a \neq -1, a \neq 2)$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & 1 & \frac{1+a}{a} & \frac{-4}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a+a^2}{2-a^2+a} \end{array} \right]$$

עבור  $a=2$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right]$$

מקבלים שורת סתירה, לכן אין פתרון.

עבור  $a=0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

אין פתרון

עבור  $a = -1$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

יש אין סוף פתרונות, הפתרון הכללי הוא:

$$\{s-10; 4; s\}$$

סיכום:

- יש פתרון יחיד עבור:  $a \neq 2, a \neq 0, a \neq -1$
- יש אין סוף פתרונות עבור:  $a = -1$  ופתרון הכללי הוא  $\{s-10; 4; s\}$
- אין פתרונות עבור:  $a = 2, a = 0$

## 5 שאלה 5

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3 * R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array} \\ \Rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \rightarrow \frac{R_3}{b} (b \neq 0) \end{array} \\ \Rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_4 \rightarrow \frac{R_4}{b-a} (b \neq a) \end{array} \\ \Rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 0 & 1 & b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{b-a} \end{array} \right] \end{aligned}$$

עבור  $b \neq 0$  ו- $b \neq a$  יש למערכת פתרון יחיד, נבדוק עכשיו את הערכים הבעייתיים.

עבור  $b = 0$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_4 \rightarrow -R_4 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \end{array} \\ \Rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{a} (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_1 \rightarrow R_1 - a * R_2$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 0 & -a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x + az = -a(a-1) \Rightarrow x = -a(a-1) - at$$

$$y = a - 1$$

$$z = t$$

$$w = \frac{1}{a}$$

אם  $a = 0$  אז  $R_3$  שורת סתירה, ואין פתרון  
אם  $a \neq 0$ , אז יש למערכת פתרון כללי, והוא:

$$\{-a(a-1) - at, a-1, t, \frac{1}{a}\}$$

עבור  $a = b$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right]$$

אם  $a \neq 1$  אז  $R_4$  שורת סתירה ואין פתרון, אחרת קיים אין סוף פתרונות למערכת, פתרון הכללי הוא:

$$\{1-t, t, 1+2t, t\}$$

סיכום:

אין פתרון:

$$a = b \neq 1 \bullet$$

פתרון יחיד:

$$b \neq 0 \bullet$$

$$a \neq b \bullet$$

אין סוף פתרונות:

$$\{-a(a-1) - at, a-1, t, \frac{1}{a}\} : b = 0 \wedge a \neq 0 \bullet$$

$$\{1-t, t, 1+2t, t\} : a = b = 1 \bullet$$