

# Groups Theory

Eyal Shukrun

November 5, 2020

## 1 Groupes Universels

### 1.1 Reels ( $\mathbb{R}$ )

Tous les nombres réels.

### 1.2 Rationels ( $\mathbb{Q}$ )

Tous les nombres qui peuvent être exprimés en fraction.

### 1.3 Integers ( $\mathbb{Z}$ )

Tous les nombres entiers.

### 1.4 Naturels ( $\mathbb{N}$ )

Tous les nombres entiers positifs.

**Ainsi:**  $\mathbb{R} > \mathbb{Q} > \mathbb{Z} > \mathbb{N}$

## 2 Notations

### 2.1 Est compris dans

Si un élément  $a$  est compris dans un ensemble  $E$ , cela se note  $a \in E$ .

## 2.2 Implications

Si deux éléments ont un rapport logique (si A alors B), on utilise les flèches afin de le noter:

Si A alors B:  $A \Rightarrow B$

Si B alors A:  $A \Leftarrow B$

Double implication:  $A \leftrightarrow B$

## 3 Definitions

### 3.1 Groupe vide ( $\emptyset$ )

Il n'existe qu'un seul groupe vide, noté  $\emptyset$ , il ne contient aucun élément.

### 3.2 Ensembles égaux

$A = B$  si tous les éléments de A sont présents dans B et inversement.

**Attention:** Le nombre d'occurrences n'importe pas.

### 3.3 Ensemble compris

On dit que A est compris dans B si tous les éléments de A se trouvent dans B.

*Notation:*  $A \subseteq B$

Ainsi, si  $A \subseteq B$ , alors  $a \in B$

A est strictement compris dans B si  $A \subseteq B$  et  $A \neq B$

*Notation:*  $A \subset B$

### 3.4 Operations

Une operation peut se produire uniquement entre deux ensembles, pas entre un ensemble et un élément.

### 3.4.1 L'intersection

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble de nombres se trouvant dans A et dans B.

*Notation:*  $A \cap B$

### 3.4.2 L'union

L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble de nombres se trouvant soit dans A soit dans B, soit dans les deux.

*Notation:*  $A \cup B$

## 3.5 Ensembles Étrangers

Deux ensembles sont dits étrangers si  $A \cap B = \emptyset$

## 3.6 Couples ordonnés

Un couple ordonné est un groupe **ordonné** de deux nombres, il se note  $(a, b)$ .

**Attention:**  $(a, b) \neq (b, a)$ .

Ainsi:  $(a, b) = (c, d)$  uniquement si  $a = c$  et  $b = d$

.

## 3.7 Multiplication Cartesienne

La multiplication cartésienne de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les couples ordonnés  $(x, y)$  tel que  $x \in A$  et  $y \in B$ .

Ainsi:  $A * B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

## 3.8 Power Set

Le power set d'un ensemble A est l'ensemble des sous ensembles de A.

*Notation:*  $P(A)$

**Attention:** Les éléments de  $P(A)$  sont eux mêmes des ensembles.

**Attention:**  $P(A)$  contient toujours  $\emptyset$ .

## 4 Propriétés

### 4.1 Unions et Intersections

Si  $A \subseteq B$ , alors:

$$A \cap C \subseteq B \cap C.$$

$$A \cup C \subseteq B \cup C.$$

Si  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq C$ , alors  $A \subseteq C$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## 5 Démonstrations

### 5.1 $A \subseteq B$

Pour prouver que  $A \subseteq B$ , il faut prouver que n'importe quel élément  $a$  contenu dans  $A$  est aussi contenu dans  $B$ .

Ainsi: Il faut prouver que  $a \in A \Rightarrow a \in B$ .

### 5.2 $A = B$

Pour prouver que  $A = B$ , il faut prouver que  $A \subseteq B$  et que  $B \subseteq A$ .

### 5.3 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

Soit  $a \in A \cap C$ , prouvons que  $a \in B \cap C$ .

Si  $a \in A \cap C$ , alors  $a \in A$  et  $a \in C$ .

Mais puisque  $A \subseteq B$ , alors  $a \in B$ .

Ainsi, puisque  $a \in B$  et  $a \in C$ ,  $a \in B \cap C$ .

Donc  $A \cap C \subseteq B \cap C$ .

#### 5.4 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

Soit  $a \in A \cup C$ , prouvons que  $a \in B \cup C$ .

Si  $a \in A \cup C$ , alors  $a \in A$  ou  $a \in C$ .

Dans le cas ou  $a \in C$ , alors  $a \in B \cup C$ .

Dans le cas ou  $a \in A$ , puisque  $A \subseteq B$  alors  $a \in B$ .

Ainsi  $a \in B \subseteq B \cup C$ .

Donc  $A \cup C \subseteq B \cup C$

#### 5.5 $R \subseteq S \Rightarrow R \cap S = R$

Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, il faut démontrer que chaque élément du premier est présent dans le deuxième.

Ainsi, prouvons que:

1)  $R \cap S \subseteq R$

2)  $R \subseteq R \cap S$

1) soit  $a \in R \cap S$ , alors  $a \in R$  et  $a \in S$ , donc  $a \in R$ , et  $R \cap S \subseteq R$ .

2) soit  $a \in R$ , puisque  $R \subseteq S$ , alors  $a \in S$ , ainsi  $a \in R$  et  $a \in S$ , donc  $a \in R \cap S$ , et  $R \subseteq R \cap S$ .

Ainsi,  $R \cap S = R$ .

#### 5.6 $R \subseteq S \Rightarrow R \cup S = S$

Prouvons que:

1)  $R \cup S \subseteq S$

2)  $S \subseteq R \cup S$

1) Soit  $a \in R \cup S$ , alors  $a \in S$  ou  $a \in R$ , si  $a \in S$ , il n'y a rien à démontrer, si  $a \in R$ , puisque  $R \subseteq S$ , alors  $a \in S$ , donc  $R \cup S \subseteq S$ .

2) Soit  $a \in S$ , alors par la définition de l'union,  $a \in R \cup S$ , donc  $S \subseteq R \cup S$ .

Ainsi:  $R \cup S = S$ .

**FIN.**