Grundlagen der Bildverarbeitung

Übung 2 – Fourier Transformation I

Gurbandurdy Dovletov, M.Sc.

Raum: BC 414
Tel.: 0203-379-3583
Email: gurbandurdy.dovletov@uni-due.de

28. April 2022

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Open-Minded

Besprechung der Lösungen

- Übung 1
  - Aufgabe 1.1
  - Aufgabe 1.2
  - Aufgabe 1.3
  - Aufgabe 1.4
  - Aufgabe 1.5

Quiz

- Wie ist eine Impulsfunktion definiert?

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

IS

Open-Minded

Quiz

- Wie kann ein 2D Grauwertbild mithilfe von Impulsfunktionen dargestellt werden?

Quiz

- Wofür braucht man da die Gewichtung?

Quiz

- Wie würde das definierte Bild aussehen, wenn keine Gewichtung vorhanden (bzw. alle Gewichte gleich 1)?

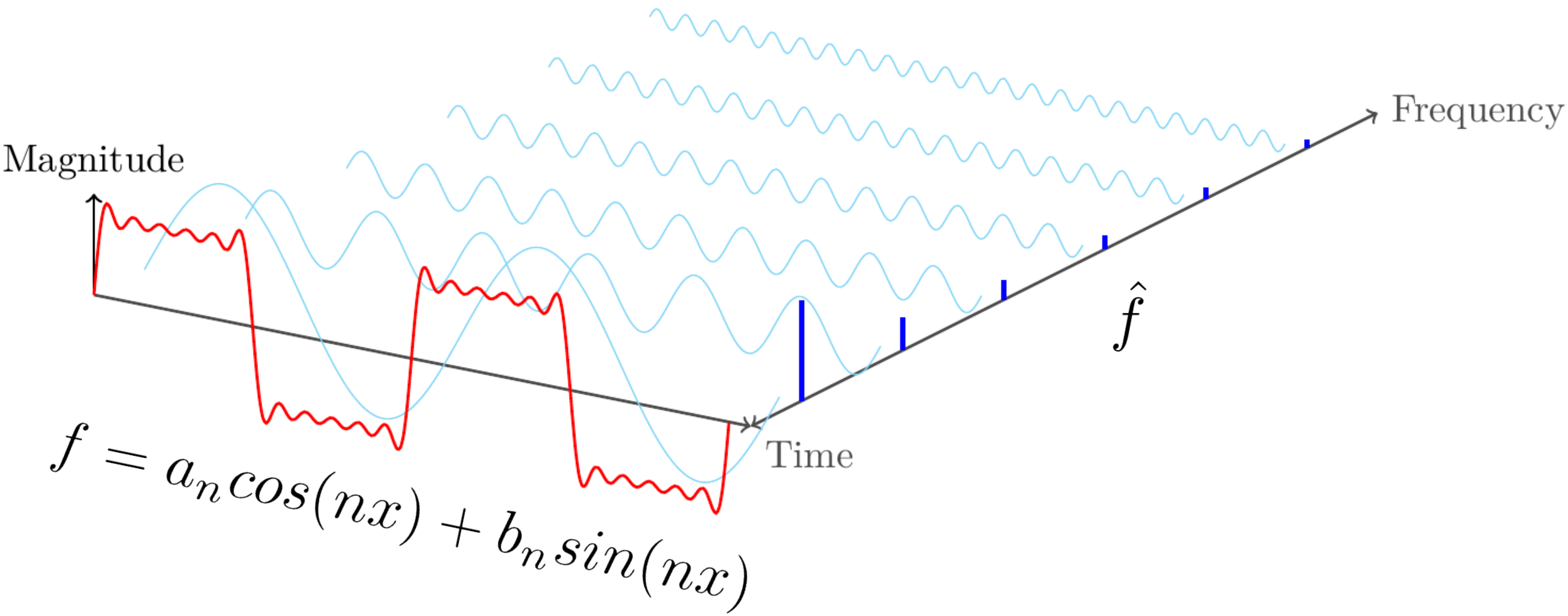
Quiz

- Was macht die Fourier Transformation (informelle Beschreibung reicht aus)?

Quiz

- Was macht die Fourier Transformation (informelle Beschreibung reicht aus)?
  - Mathematisch gesehen:
    - Abbildung von Abbildungen, die auf Ortsdomäne definiert sind, auf Abbildungen, die auf Frequenzdomäne definiert sind
  - Bildlich gesehen:
    - Dekomposition in unterschiedliche Signale mit konstanten Frequenzen
    - Transformierte beschreibt den Anteil der Frequenz im Eingangssignal

Quiz



https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform

Quiz

- Wie kann man ein digitales Bild mit der Fourier Transformation in 2D punktweise definieren?

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Open-Minded

Quiz

- Wie kann man ein digitales Bild mit der Fourier Transformation in 2D punktweise definieren?

$$f^{im}(x,y) := \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f_{im}^{fs}(u,v) \cdot e^{i2\pi\left(\frac{x \cdot u}{M} + \frac{y \cdot v}{N}\right)}$$

Quiz

- Wie kann man ein digitales Bild mit der Fourier Transformation in 2D punktweise definieren?

$$f^{im}(x,y) := \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f_{im}^{fs}(u,v) \cdot e^{i2\pi\left(\frac{x \cdot u}{M} + \frac{y \cdot v}{N}\right)}$$

Komplexe Zahlen

Komplexe Wellen

- Beachten Sie die Ähnlichkeit mit:

$$f^{im}(x,y) := \sum_{x_s=0}^{M-1} \sum_{y_t=0}^{N-1} w_{x_s,y_t} \cdot \delta_{x_s,y_t}(x,y)$$

Quiz

- Warum transformiert man überhaupt in den Frequenzraum?

Quiz

- Warum transformiert man überhaupt in den Frequenzraum?
  - Effizienzaspekt
  - Filteraspekt

  (s. spätere Vorlesung/Übung 3)

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

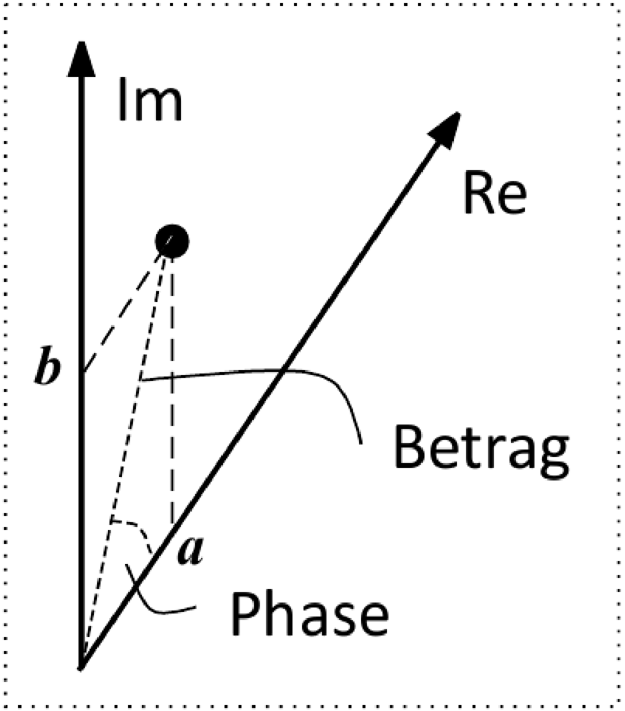
Open-Minded

Quiz

- Die Fourier Transformation bildet zunächst einmal in den Frequenzraum ab.
  Was haben Amplituden- und Phasenspektrum mit der ganzen Sache zu tun?

Theorie Einschub (Komplexe Zahlen)

- Komplexe Zahl: $a + ib$
- Betrag (Amplitude): $\sqrt{a^2 + b^2}$
- Phase: $arctan\left(\frac{b}{a}\right)$



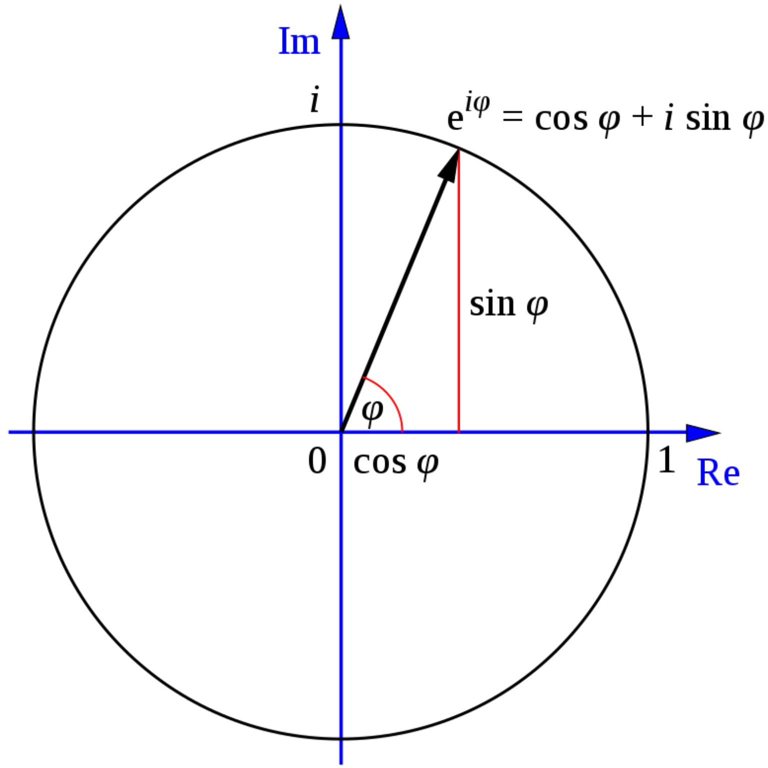
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Open-Minded

Theorie Einschub (Eulersche Formel)

$$a := 1 \cdot \cos(\varphi)$$

$$b := 1 \cdot \sin(\varphi)$$

Eulersche Formel



$$a + ib = 1 \cdot \cos(\varphi) + i1 \cdot \sin(\varphi) = 1 \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

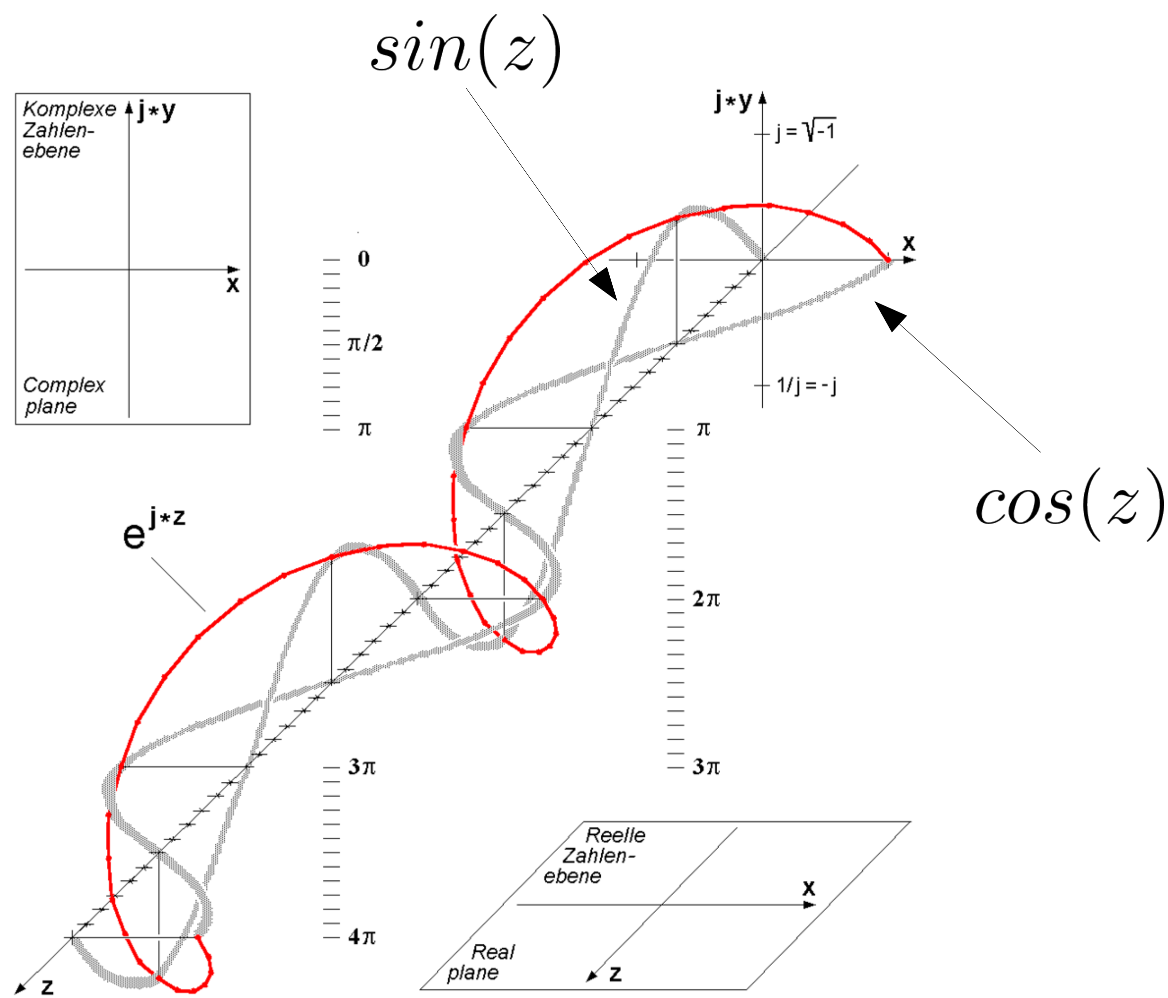
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Open-Minded

https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel

Theorie Einschub (Eulersche Formel)

$$e^{jz} = cos(z) + j \cdot sin(z)$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel

Quiz

- Wie ist die (diskrete) Fourier Transformation in 2D definiert?

Quiz

- Wie ist die (diskrete) Fourier Transformation in 2D definiert?

$$FT_{im}(u,v) := \frac{1}{M \cdot N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^{im}(x,y) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{x \cdot u}{M} + \frac{y \cdot v}{N}\right)}$$

$$f_{im}^{fs}(u,v) := FT_{im}(u,v)$$

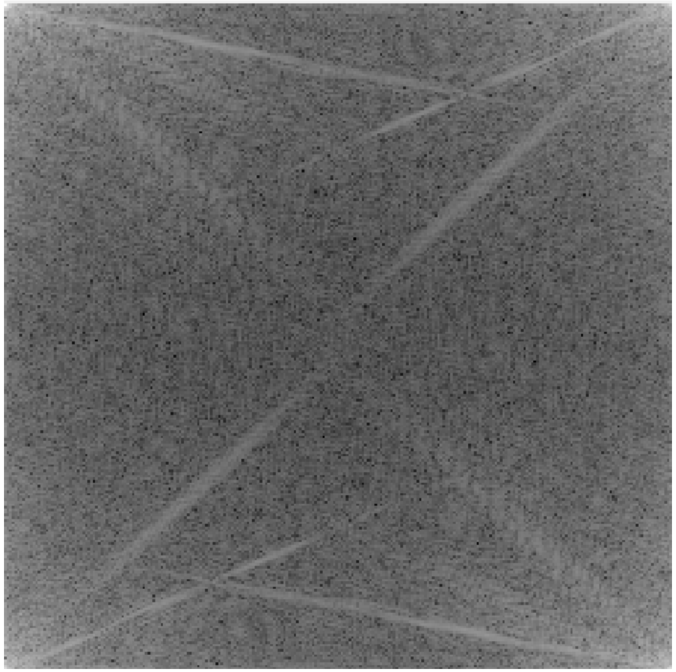
$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$$

$$e^{-ix} = cos(-x) + i \cdot sin(-x) = cos(x) - i \cdot sin(x)$$

Quiz

- Wenn mit Matlab die Fourier Transformierte eines Bildes berechnet wird, entsteht zunächst das Frequenzspektrum:

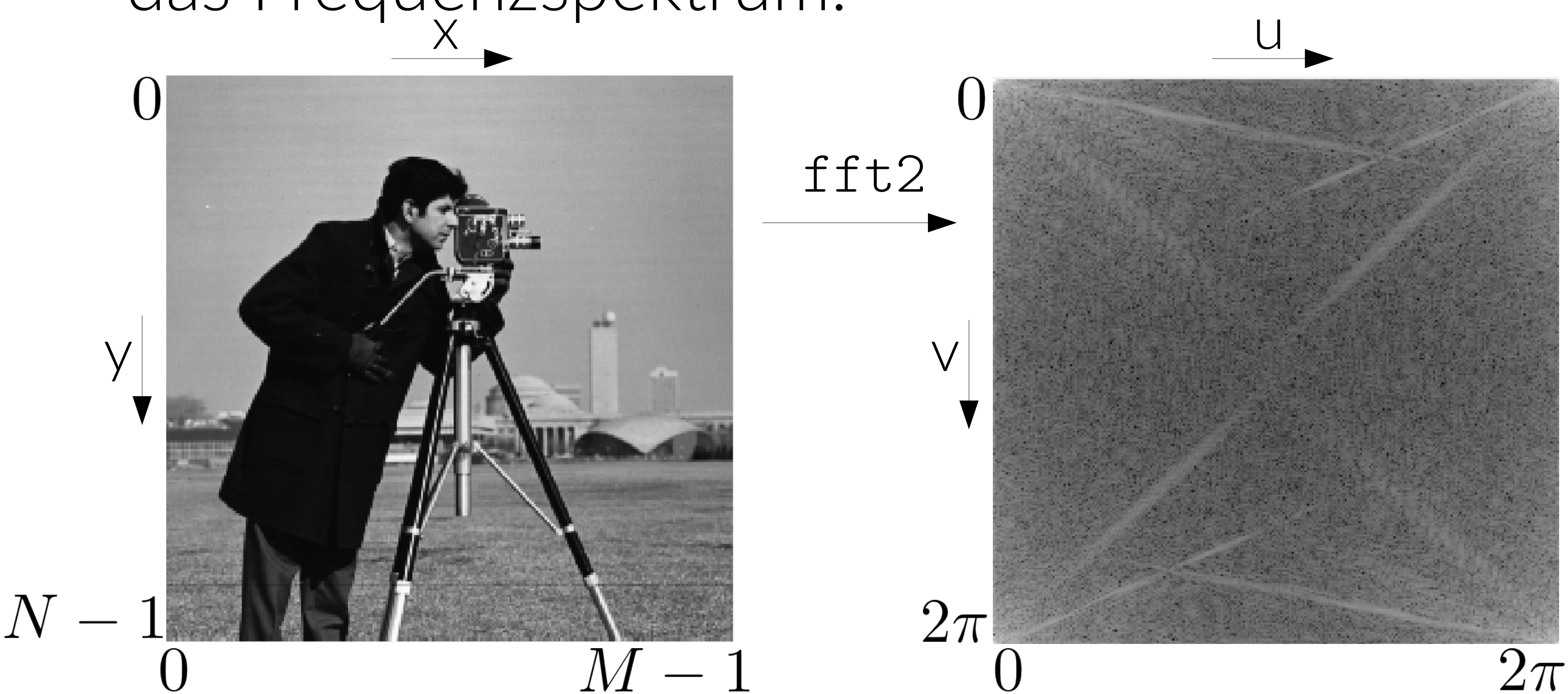
fft2



(log-Amplitudenspektrum)

Quiz

- Wenn mit Matlab die Fourier Transformierte eines Bildes berechnet wird, entsteht zunächst das Frequenzspektrum:



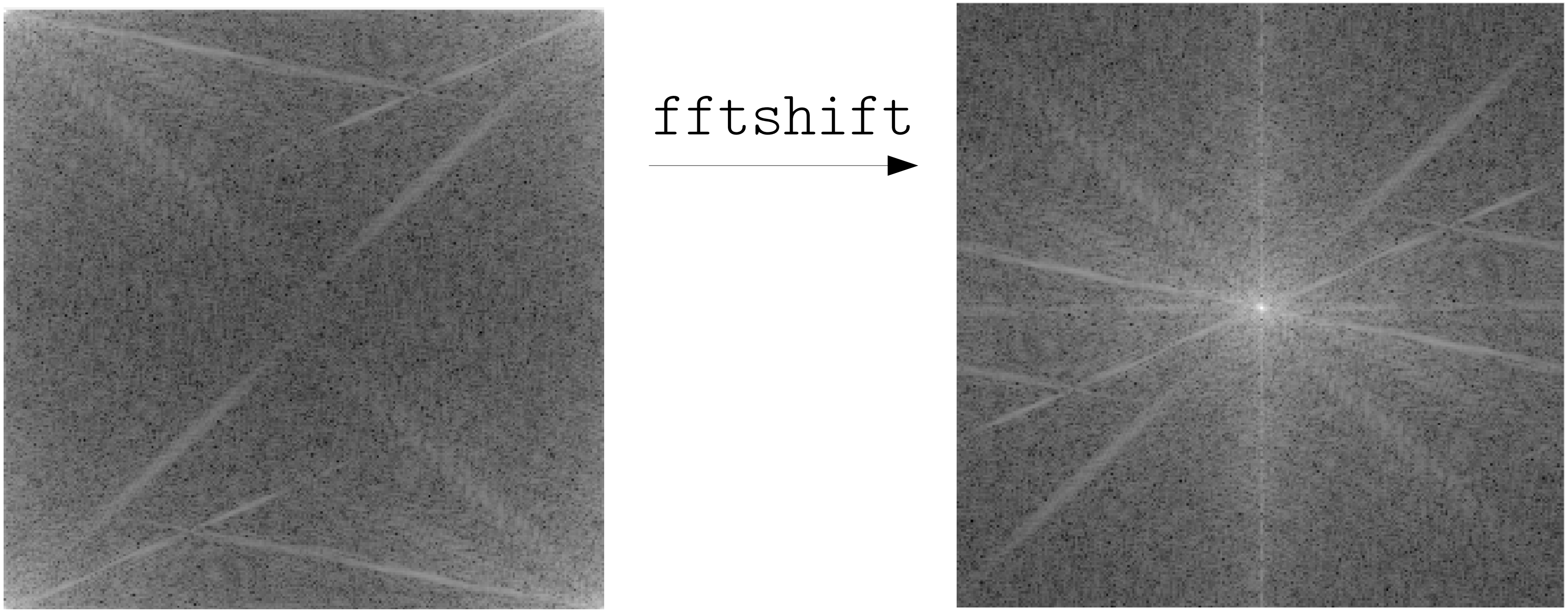
(log-Amplitudenspektrum)

Quiz

- Was macht `fftshift`?
- Aus welchen Gründen könnte es sinnvoller sein, sich diese Ansicht zu betrachten?

Quiz

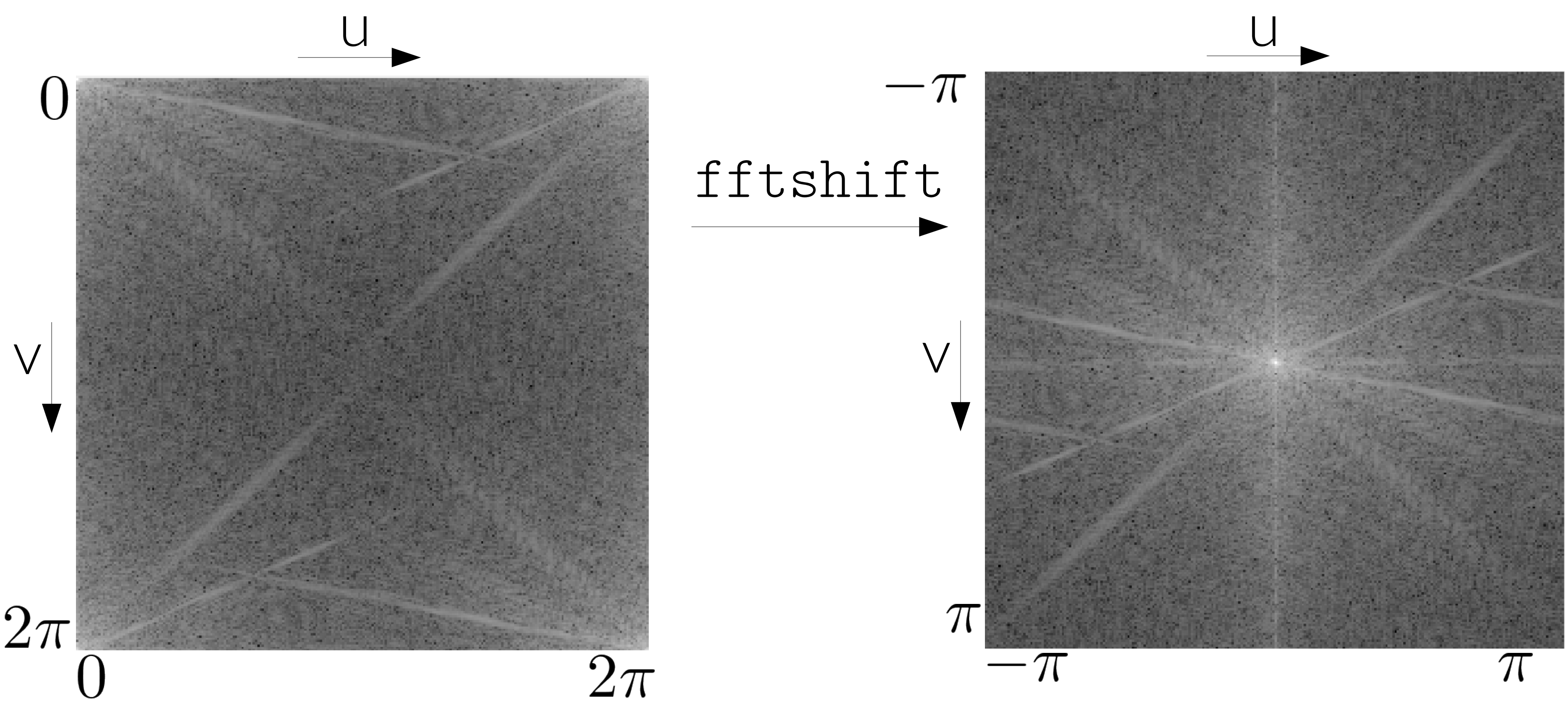
- Mit der Funktion `fftshift` erhält man dann:



(log-Amplitudenspektrum) (log-Amplitudenspektrum)

Quiz

- Mit der Funktion `fftshift` erhält man dann:



(log-Amplitudenspektrum) (log-Amplitudenspektrum)

Aufgabe 2.1a

- Schreiben Sie ein Skript, das folgende Operationen ausführt:
  - ein Binärbild mit folgenden Eigenschaften erzeugen:
    - Ortsauflösung: 100 x 100 px
    - Zentriertes, weißes Quadrat der Größe 30 x 30 px
  - die Fourier Transformierte mit der Funktion `fft2` berechnen
  - das Amplituden- und das Phasenspektrum anzeigen.
    - Nutzen Sie dazu die Matlab Funktionen `abs()`, `log()`, `angle()`

Aufgabe 2.1b

- Erzeugen Sie ein Binärbild wie in 2.1a, jedoch mit kleinerem Quadrat.
- Lassen Sie die Fourier Transformierte mit der Funktion `fft2` berechnen.
- Zeigen Sie das Amplituden- und das Phasenspektrum an.
- Wie wirkt sich die Größe des Quadrates auf die Spektren aus?

Aufgabe 2.1c

- Erzeugen Sie ein Binärbild wie in 2.1a, jedoch mit rotiertem Quadrat.
- Nutzen Sie dazu die Funktion `imrotate(img, deg)`
- Wie wirkt sich eine Rotation des weißen Quadrates auf die Spektren aus?

Aufgabe 2.1d

- Erzeugen Sie ein Binärbild wie in 2.1a, jedoch mit translatiertem Quadrat
  - Verschiebung des Quadrats um 30 Pixeln in beide Richtungen.
- Wie wirkt sich eine Translation des Quadrates auf die Spektren aus?