

БДЗAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

Ну я

9 мая 2024 г.

Это нужно знать всем детям!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} = \cos z,$$

(радиусы сходимости этих рядов $R = \infty$);

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} z^n = (1+z)^\alpha \quad (R=1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \ln(z+1) \quad (R=1).$$

Оособо выделим частный случай

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (R=1).$$

Удобное обозначение:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

7. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в точке z_0 :

$$f(z) = \frac{2z}{\sqrt{4 - z^2}}, \quad z_0 = 0$$

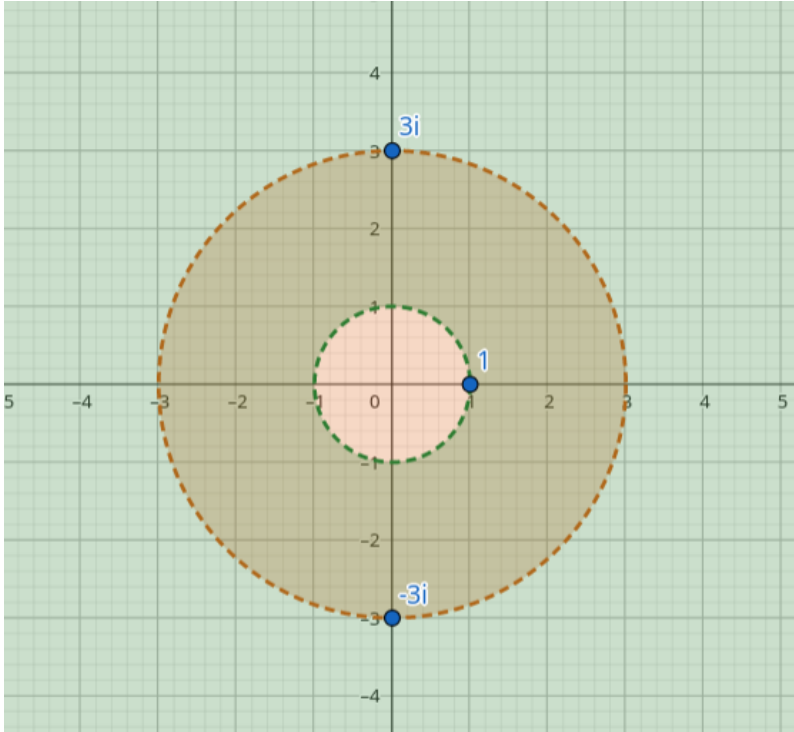
$$\begin{aligned} \frac{2z}{\sqrt{4-z^2}} &= \frac{z}{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}} = z * \left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-z^2)^n}{4^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n}} \end{aligned}$$

8. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в кольце $a < |z - z_0| < b$ и в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)}, \quad 1 < |z| < 3, \quad z = \infty$$

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)} = \frac{1}{5} \frac{1}{z-1} + \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right) \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1) в кольце



Точки $\pm 3i$ лежат вне кольца, потому что 2е слагаемое соответствует правильной части (раскладываем по степеням z); аналогично, точка 1 лежит внутри кольца и 1е слагаемое соответствует главной части (по степеням $\frac{1}{z}$).

$$f_1(z) = \frac{1}{5} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{5} \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{5} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

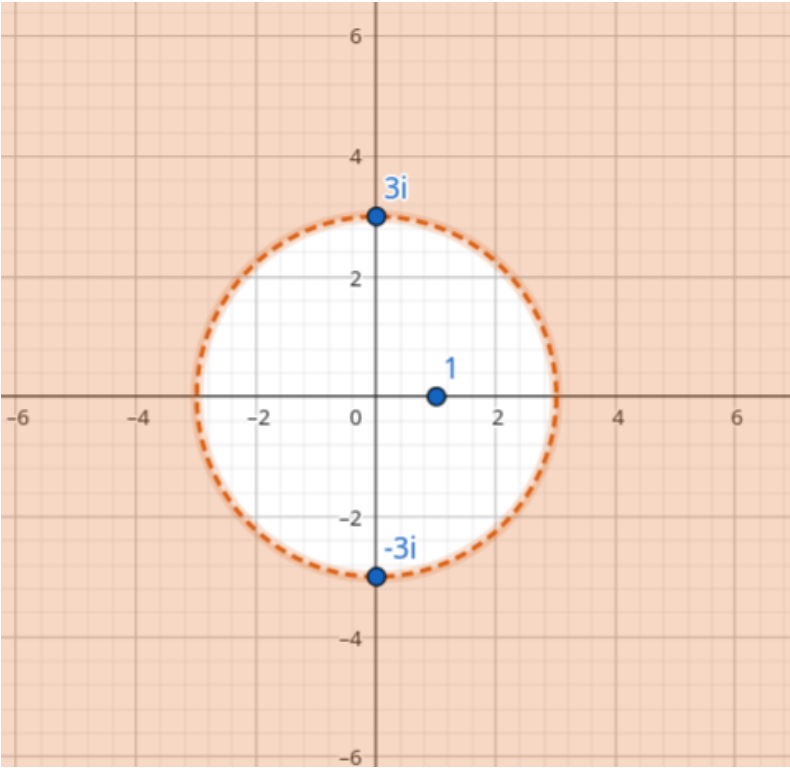
$$\begin{aligned} f_2(z) &= \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right) \frac{1}{z^2+9} = -\frac{1}{5} \frac{z-9}{z^2+9} = -\frac{1}{5} \left(\frac{1-3i}{2} \frac{1}{z+3i} + \frac{1+3i}{2} \frac{1}{z-3i} \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{1-3i}{6i} \frac{1}{1+\frac{z}{3i}} - \frac{1+3i}{6i} \frac{1}{1-\frac{z}{3i}} \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\right) \frac{1}{1+\frac{z}{3i}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) \frac{1}{1-\frac{z}{3i}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(3i)^n} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3i)^n} \right) = \\
&= -\frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n i^n}{3^n} \left(\left(-1 + \frac{1}{3}i \right) - (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3}i \right) \right)
\end{aligned}$$

Получим

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \left(-\frac{1}{10} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n i^n}{3^n} \left(\left(-1 + \frac{1}{3}i \right) - (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3}i \right) \right)$$

2) в окрестности бесконечности



Раскладываем по степеням $\frac{1}{z}$. Для этого преобразуем $f_2(z)$:

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= -\frac{1}{5} \left(\frac{1-3i}{2} \frac{1}{z+3i} + \frac{1+3i}{2} \frac{1}{z-3i} \right) = \\
&= -\frac{1}{5} \left(\frac{1-3i}{2} \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{3i}{z}} + \frac{1+3i}{2} \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3i}{z}} \right) = \\
&= -\frac{1}{10} \left((1-3i) \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{3i}{z}} + (1+3i) \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3i}{z}} \right) = \\
&= -\frac{1}{10} \left((1-3i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n i^n}{z^{n+1}} + (1+3i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n i^n}{z^{n+1}} \right) =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{10} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n i^n}{z^{n+1}} ((-1)^n (1 - 3i) + (1 + 3i)) \right)$$

Итого

$$\begin{aligned} f(z) = f_1(z) + f_2(z) &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \left(-\frac{1}{10} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n i^n}{z^{n+1}} ((-1)^n (1 - 3i) + (1 + 3i)) \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{10} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} (-2 + 3^n i^n ((-1)^n (1 - 3i) + (1 + 3i))) \end{aligned}$$

9. Найти все особые точки аналитической функции, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности:

$$f(z) = \frac{1}{z - 1 + e^{-z}} + \cos \frac{1}{z - 1}$$

Важно знать:

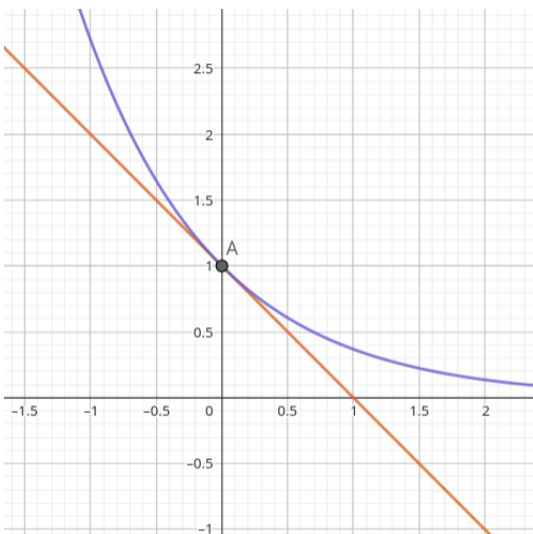
$$z_0 = 0:$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Изолированные особые точки:

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$z - 1 + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow 1 - z = e^{-z} \Rightarrow z = 0$$



(если на бумаге, то вручную то же самое чертить - по графику видно, что там ровно одна точка)

$$z \rightarrow 1: f(z) = \frac{1}{z - 1 + \left(\frac{1}{e}\right) e^{1-z}} + \cos \frac{1}{1 - z} =$$

$$= \frac{1}{-(1-z) + \left(\frac{1}{e}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

Главная часть содержит бесконечно много членов, поэтому $z = 1$ - существенно особая точка.

$$z \rightarrow 0 : \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z-1+e^{-z}} + \cos \frac{1}{z-1} \right) = \infty$$

Таким образом, $z = 0$ - полюс. Найдём порядок полюса. Для этого нам придется ввести вспомогательную функцию $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ и считать её производные, пока не получим не 0 или пока не съедет крыша. Я этим не хочу заниматься, поэтому давайте лучше разложим в ряд.