БДЗАААААААААААААААААААААААААААААА

Ну я

8 мая 2024 г.

Это нужно знать всем детям!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin z; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}=\cos z,$$

(радиусы сходимости этих рядов $R=\infty$);

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha+n-1)}{n!}z^n=(1+z)^{\alpha} \quad (R=1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n=\ln(z+1) \quad (R=1).$$

Особо выделим частный случай

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z} \quad (R=1).$$

Удобное обозначение:

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

7. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в точке z_0:

$$f(z)=\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}},\ z_0=0$$

$$\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}=z * \left(1-\frac{z^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\left(-z^2\right)^n}{4^n}=$$

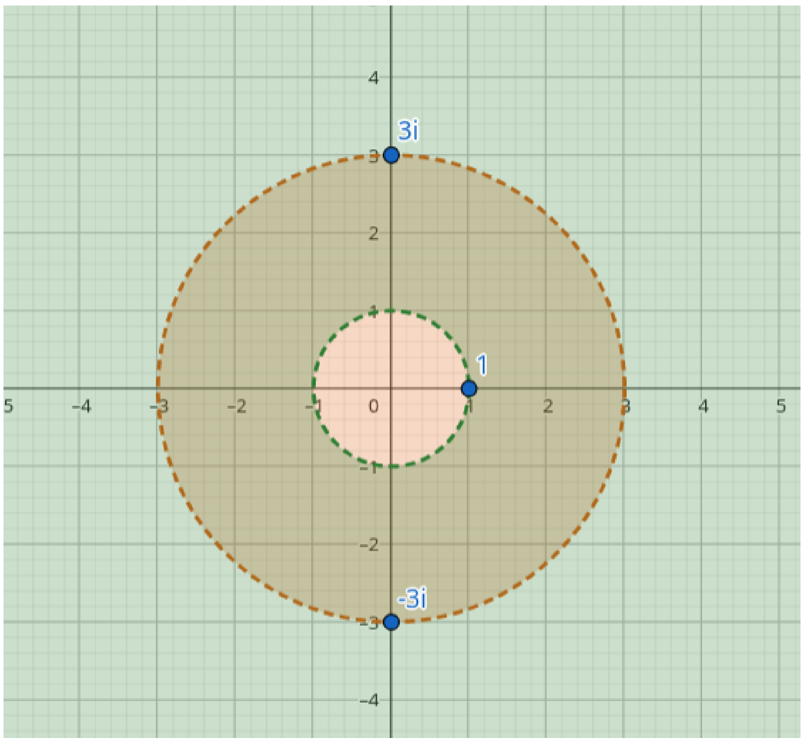
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n}}$$

8. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в кольце $a < |z - z_0| < b$ и в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)},\ 1 < |z| < 3,\ z = \infty$$

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)} = \frac{1}{5}\ \frac{1}{z-1} + \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right)\ \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1) в кольце



Точки $\pm 3i$ лежат вне кольца, потому 2е слагаемое соответствует правильной части (раскладываем по степеням $(z-1)$); аналогично, точка 1 лежит внутри кольца и 1е слагаемое соответствует главной части (по степеням $\frac{1}{z-1}$).

$$f_2(z) = \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right)\ \frac{1}{z^2+9} = -\frac{1}{5}\ \frac{z-9}{z^2+9} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1+3i}{2}\ \frac{1}{z+3i} + \frac{1-3i}{2}\ \frac{1}{z-3i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1+3i}{2}\ \frac{1}{z-1+(1+3i)} + \frac{1-3i}{2}\ \frac{1}{z-1+(1-3i)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{1+\frac{z-1}{1+3i}} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{z-1}{1-3i}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+3i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(1-3i)^n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left(\frac{(-1)^n}{(1+3i)^n}+\frac{1}{(1-3i)^n}\right)$$

Получим

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \left(-\frac{1}{10}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left(\frac{(-1)^n}{(1+3i)^n}+\frac{1}{(1-3i)^n}\right)+\frac{1}{5}\,\frac{1}{z-1}$$