БДЗААААААААААААААААААААААААААААА

Ну я

12 мая 2024 г.

Это нужно знать всем детям!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin z;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}=\cos z,$$

(радиусы сходимости этих рядов $R=\infty$);

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha+n-1)}{n!}z^n=(1+z)^{\alpha}\quad (R=1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n=\ln(z+1)\quad (R=1).$$

Особо выделим частный случай

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\quad (R=1).$$

Удобное обозначение:

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

7. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в точке z_0:

$$f(z)=\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}},\ z_0=0$$

$$\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}=z\ *\ \left(1-\frac{z^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\left(-z^2\right)^n}{4^n}=$$

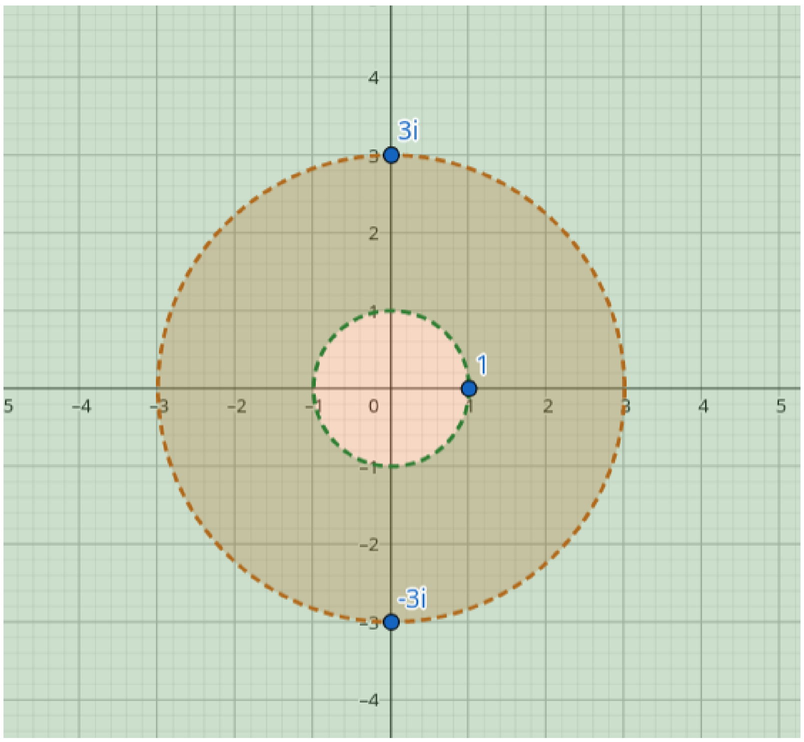
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n}}$$

8. Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в кольце $a < |z - z_0| < b$ и в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)},\ 1 < |z| < 3,\ z = \infty$$

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z^2+9)} = \frac{1}{5}\ \frac{1}{z-1} + \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right)\ \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1) в кольце



Точки $\pm 3i$ лежат вне кольца, потому 2е слагаемое соответствует правильной части (раскладываем по степеням z); аналогично, точка 1 лежит внутри кольца и 1е слагаемое соответствует главной части (по степеням $\frac{1}{z}$).

$$f_1(z) = \frac{1}{5}\ \frac{1}{z-1} = \frac{1}{5}\ \frac{1}{z}\ \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{5}\ \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$f_2(z) = \left(-\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}\right)\ \frac{1}{z^2+9} = -\frac{1}{5}\ \frac{z-9}{z^2+9} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1-3i}{2}\ \frac{1}{z+3i} + \frac{1+3i}{2}\ \frac{1}{z-3i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1-3i}{6i}\ \frac{1}{1+\frac{z}{3i}} - \frac{1+3i}{6i}\ \frac{1}{1-\frac{z}{3i}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\right)\ \frac{1}{1+\frac{z}{3i}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right)\ \frac{1}{1-\frac{z}{3i}}\right) =$$

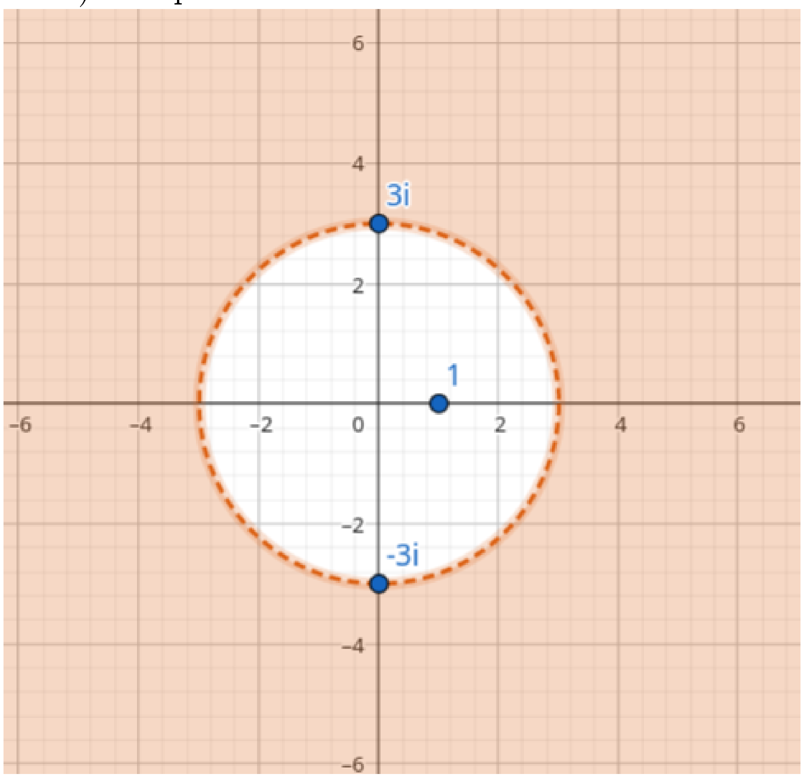
$$= -\frac{1}{5}\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}i\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(3i)^n}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}\right)=$$

$$= -\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n i^n}{3^n}\left(\left(-1+\frac{1}{3}i\right)-(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}i\right)\right)$$

Получим

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\left(-\frac{1}{10}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n i^n}{3^n}\left(\left(-1+\frac{1}{3}i\right)-(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}i\right)\right)$$

2) в окрестности бесконечности



Раскладываем по степеням $\frac{1}{z}$. Для этого преобразуем $f_2(z)$:

$$f_2(z) = -\frac{1}{5}\left(\frac{1-3i}{2}\,\frac{1}{z+3i}+\frac{1+3i}{2}\,\frac{1}{z-3i}\right)=$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1-3i}{2}\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{3i}{z}}+\frac{1+3i}{2}\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{3i}{z}}\right)=$$

$$= -\frac{1}{10}\left((1-3i)\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{3i}{z}}+(1+3i)\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{3i}{z}}\right)=$$

$$= -\frac{1}{10}\left((1-3i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n i^n}{z^{n+1}}+(1+3i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n i^n}{z^{n+1}}\right)=$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n i^n}{z^{n+1}}((-1)^n(1-3i)+(1+3i))\right)$$

Итого

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \left(-\frac{1}{10}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n i^n}{z^{n+1}}((-1)^n(1-3i)+(1+3i))\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{10}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\left(-2+3^n i^n((-1)^n(1-3i)+(1+3i))\right)$$

9. Найти все особые точки аналитической функции, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности:

$$f(z) = \frac{1}{z-1+e^{-z}} + \cos\frac{1}{z-1}$$

Важно знать:

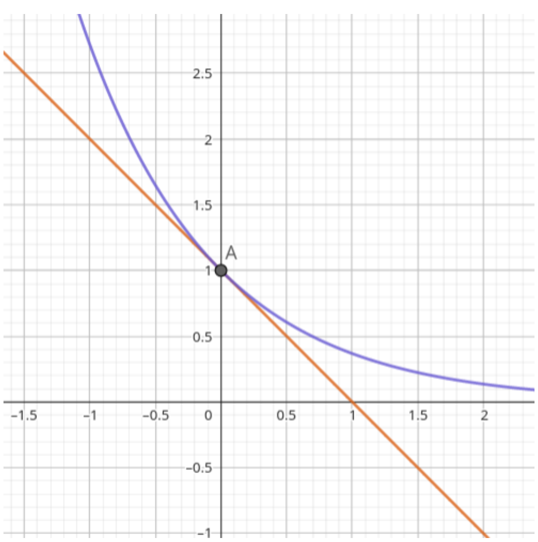
$z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Изолированные особые точки:

$$z-1=0 => z=1$$

$$z-1+e^{-z}=0 <=> 1-z=e^{-z} => z=0$$



(если на бумаге, то вручную то же самое чертить - по графику видно, что там ровно одна точка)

$$z \to 1: \ f(z) = \frac{1}{z - 1 + \left(\frac{1}{e}\right) e^{1-z}} + \cos\frac{1}{1-z} =$$

$$= \frac{1}{-(1-z) + \left(\frac{1}{e}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^n}{n!}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

Главная часть содержит бесконечно много членов, поэтому $z = 1$ - существенно особая точка.

$$z \to 0: \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-1+e^{-z}} + \cos\frac{1}{z-1}\right) = \infty$$

Таким образом, $z = 0$ - полюс. Найдём порядок полюса. Для этого заметим, что $\cos\frac{1}{z-1}$ при $z \to 0$ стремится тупо к константе, поэтому можем оставить для рассмотрения только $f_1(z) = \frac{1}{z-1+e^{-z}}$. Для поиска полюса рассмотрим обратную к ней, воспользуясь вот такой вот теормемой:

Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 называют *полюсом порядка n* $(n \geqslant 1)$ функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$. В случае $n = 1$ полюс называют *простым*.

Кароче,

$$\phi(z) = z - 1 + e^{-z}, \ \phi(z=0) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\phi'(z) = 1 - e^{-z}, \ \phi'(z=0) = 1 - 1 = 0$$

$$\phi''(z) = e^{-z}, \ \phi''(z=0) = 1 \neq 0$$

Таким образом, $z = 0$ - полюс 2го порядка.

Теперь $z = \infty$.

$$z \to \infty: \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z-1+e^{-z}} + \cos\frac{1}{z-1}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z-1+0} + \cos\frac{1}{z-1}\right) =$$

$$= 0 + \cos 0 = 1$$

Т.е. бесконечность - устранимая особая точка.

10. Найти вычеты относительно всех изолированных особых точек (включая $z = \infty$) функции:

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{e^{iz} - 1} + z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

Итак, $z = 0$.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin 2z}{e^{iz}-1} + z^2 e^{\frac{1}{z}}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{e^{iz}-1} + \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^{-2}}\right) =< \frac{0}{0} + \frac{\infty}{\infty} >=$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2}{ie^{iz}} + \frac{-\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}}{-\frac{2}{z^3}}\right) = \frac{2}{i} + \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\frac{1}{z}} =< \frac{2}{i} + \frac{1}{2}\frac{\infty}{\infty} >= \frac{2}{i} + \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}}{-\frac{1}{z^2}} = \infty$$

Получился полюс. Очень жаль. Теперь придётся искать коэффициент перед первым главным членом, так как это и есть вычет по определению. К счастью, для этого есть формула, так что нам просто нужно найти порядок полюса.