

2024

Кбр кыш

00.00.2024

## Содержание

|   |                      |   |
|---|----------------------|---|
| I | ОДУ первого порядка  | 1 |
| 1 | Основные понятия ОДУ | 1 |

## Введение

Дифференциальные уравнения делятся на:

- ОДУ  $f(x), f'(x), \dots, f^n(x)$
- УРЧП  $f(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial z}$

## Часть I

# ОДУ первого порядка

## 1 Основные понятия ОДУ

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ).

$F$  - известная функция,

$x$  - независимая переменная,

$y(x)$  - искомая функция.

Порядок ОДУ (1) - наивысший порядок производной неизвестной функции  $y(x)$ , входящий в уравнение.

Примеры:

1)  $y' + y^2 \ln(x) = 1$  - первого порядка

2)  $xy^{(3)} + \frac{1}{x}y^4 = 0$  - третьего порядка

Обозначения:

- $< a, b >: (a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$  (возможны  $\pm\infty$  для открытого конца)
- $R_{x_1, x_2, \dots, x_n}^m$  - вещественное евклидово пространство переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- $C(D)$  - множество функций, непрерывных в области  $D$
- $C^n(D)$  - множество функций, имеющих в области  $D$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно

Опр.:

Пусть  $D \subset R_{x, y, y', \dots, y^{(n)}}^{n+2}$ ,  $F \in C(D)$ .

Частное решение ОДУ (1) - функция  $y = \phi(x)$ :

- 1)  $\phi(x) \in C^n(< a, b >)$
- 2)  $(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) \in D \quad \forall x \in < a, b >$
- 3)  $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in < a, b >$

Пример:  $y'' + y = 0$

Решения:

1)  $y = \sin x$  2)  $y = 2\cos x$  3)  $y = c_1 \sin x$  4)  $y = c_2 \cos x$  5)  $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \forall c_1, c_2$

ОДУ может иметь бесконечно много решений.

Зам.: решение ОДУ не обязательно должно быть записано в явной форме; оно может быть записано в неявной форме  $\phi(x, y) = 0$  или в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Пример:

$$2x dx + 2y dy = 0$$

$$d(x^2) + d(y^2) = 0$$

$$d(x^2 + y^2) = 0$$

$x^2 + y^2 = c$  - неявная форма,

$$\begin{cases} x = \sqrt{c} \cos t \\ y = \sqrt{c} \sin t \end{cases}$$

- параметрическая форма

Опр.:

График решения  $y = f(x)$  на плоскости  $Oxy$  называется интегральной кривой уравнения (1).

Опр.:

(1) - уравнение, не разрешимое относительно старшей производной.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (2)$$

- уравнение  $n$ -го порядка, разрешимое относительно старшей производной.

Уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

- ОДУ, разрешимое относительно производной.

Задано (3),  $f(x, y)$  определена на  $D \subset R_{x,y}^2$

Постановка задачи Коши: найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (частное решение)

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

$x_0, y_0$  - заданные числа,  $(x_0, y_0) \in D$  - начальные данные (данные Коши)

TODO: геометрическая интерпретация задачи Коши + примеры к ней

Примеры:

1) Скорость распада радия пропорциональна его массе.

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m \quad (*)$$

$\alpha = const > 0$  - коэффициент распада

WORK IN PROGRESS