2024

Кбр кыш

00.00.2024

Содержание

Введение

Дифференциальные уравнения делятся на:
- ОДУ $f(x), f^{'}(x), \ldots, f^{n}(x)$
- УРЧП $f(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, ..., \frac{\partial f^{n}}{\partial z}$

Часть I

ОДУ первого порядка

1 Основные понятия ОДУ

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ).
F - известная функция,
x - независимая переменная,
$y(x)$ - искомая функция.

Порядок ОДУ (1) - наивысший порядок производной неизвестной функции $y(x)$, входящий в уравнение.
Примеры:
1) $y^{'} + y^2 ln(x) = 1$ - первого порядка

2) $xy^{(3)} + \frac{1}{x}y^4 = 0$ - третьего порядка

Обозначения:

- $< a, b >$: $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ (возможны $\pm\infty$ для открытого конца)
- $R^m_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ - вещественное евклидово пространство переменнных $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- $C(D)$ - множество функций, непрерывных в области D
- $C^n(D)$ - множество функций, имеющих в области D непрерывные производные до n-го порядка включительно

Опр.:
Пусть $D \subset R^{n+2}_{x,y,y^{'},\ldots,y^{(n)}},\ F \in C(D)$.
Частное решение ОДУ (1) - функция $y = \phi(x)$:
1) $\phi(x) \in C^n(< a, b >)$
2) $(x, \phi(x), \phi^{'}(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \in D \ \ \forall x \in < a, b >$
3) $F(x, \phi(x), \phi^{'}(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0 \ \ \forall x \in < a, b >$

Пример: $y^{''} + y = 0$
Решения:
1) $y = sinx$ 2) $y = 2cosx$ 3) $y = c_1 sinx$ 4) $y = c_2 cosx$ 5) $y = c_1 sinx + c_2 cosx \ \ \forall c_1, c_2$
ОДУ может иметь бесконечно много решений.
Зам.: решение ОДУ не обязательно должно быть записано в явной форме; оно может быть записано в неявной форме $\phi(x, y) = 0$ или в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Пример:
$2xdx + 2ydy = 0$
$d(x^2) + d(y^2) = 0$
$d(x^2 + y^2) = 0$
$x^2 + y^2 = c$ - неявная форма,

$$\begin{cases} x = \sqrt{c}\ cost \\ y = \sqrt{c}\ sint \end{cases}$$

- параметрическая форма

Опр.:
График решения $y = f(x)$ на плоскости Oxy называется интегральной кривой уравнения (1).
Опр.:
(1) - уравнение, не разрешимое относительно старшей производной.
Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{'}, \dots, y^{n-1}) \tag{2}$$

- уравнение n-го порядка, разрешимое относительно старшей производной.
Уравнение 1-го порядка

$$y^{'} = f(x, y) \tag{3}$$

- ОДУ, разрешимое относительно производной.

Задано (3), $f(x, y)$ определена на $D \subset R^2_{x,y}$
Постановка задачи Коши: найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (частное решение)

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

x_0, y_0 - заданные числа, $(x_0, y_0) \in D$ - начальные данные (данные Коши)

TODO: геометрическая интепретация задачи Коши + примеры к ней

Примеры:
1) Скорость распада радия пропорциональна его массе.

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m \quad (*)$$

$\alpha = const > 0$ - коэффициент распада

$$m = ce^{-\alpha t} : \frac{dm}{dt} = -\alpha ce^{-\alpha t} = -\alpha m$$
$$m(0) = m_0 \Rightarrow m_0 = ce^0 = c$$
$$m = m_0 e^{-\alpha t}$$

2) Гармонические колебания любой природы

$$y^{''} + \omega^2 y = 0$$

$$y = c_1 \; cos\omega x + c_2 \; sin\omega x$$

Начальные условия (положение и скорость):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1\ cos\omega x_0 + c_2\ sin\omega x_0 = y_0 \\ -c_1\omega\ sin\omega x_0 + c_2\omega\ cos\omega x_0 = y_0^{'} \end{cases}$$

Теорема Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} cos\omega x_0 & sin\omega x_0 \\ -\omega sin\omega x_0 & \omega cos\omega x_0 \end{vmatrix} = \omega(sin^2\omega x_0 + cos^2\omega x_0) = \omega \neq 0$

Пусть в (3) $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(D), D \subset R^2_{x,y}$
Опр.: Общее решение ОДУ (3) - решение вида $y = \phi(x, c)$, зависящее от произвольной постоянной c, из которого любое ЧР этого уравнения может быть получено надлежащим выбором значения постоянной c (также: совокупность всех частных решений).
Опр.: соотношение вида

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{5}$$

называется общим интегралом ОДУ (3), если функция y, найденная из (5), задаёт общее решение (3). Если в соотношении (5) c принимает конкретное значение, то это соотношение называется частным интегралом ОДУ (3).
Пример:

$$y^{'} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$3y^2dy = 2xdx$$

$y^3 = x^2 + C$ - общий интеграл
при $C = 1\ \ y^3 = x^2 + 1$ - частный интеграл
$y = \sqrt[3]{x^2 + C}$ - общее решение, $y \neq 0$

2 Теорема существования и единственности

Т. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

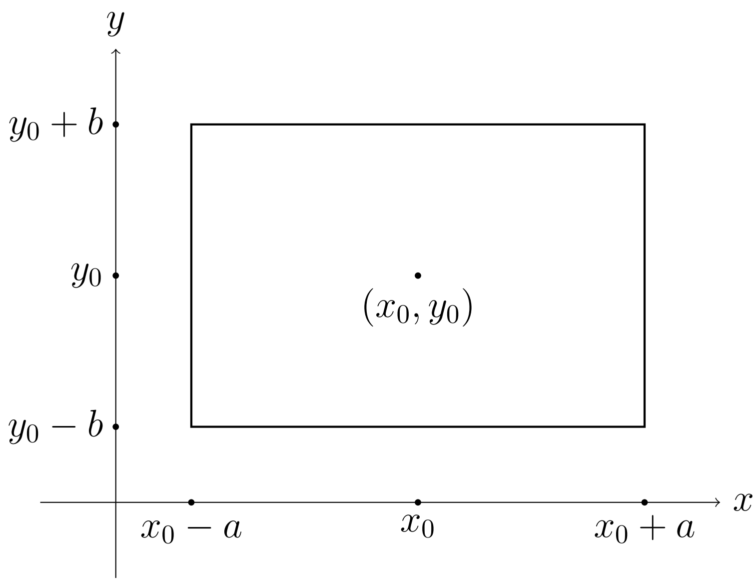
и удовлетворяет в Π условию Липшица по аргументу y

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, L = const$$

Тогда $\exists! y = f(x)$, решающая задачу Коши (3), (4):

$$\begin{cases} y^{'} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$.



Зам.1: нельзя утверждать, что решение есть на $[x_0 - a, x_0 + a]$.
Зам.2: условие Липшица может быть заменено более грубым, но зато более легко проверяемым условием ограничения модуля частной производной $|\frac{\partial f}{\partial y}| \le L$ в Π.
По теореме Лагранжа

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y^{'}(x,y)|\ |y_1 - y_2|$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Но: к примеру, $f(x,y) = |y|$ в 0 не дифференцируема, а условие Липшица выполняется.
Зам.3: Продолжимость решения зависит от задачи.

Дальше я не поняла, да оно мб и не понадобится.