2024

Кбр кыш

00.00.2024

Содержание

Введение

Дифференциальные уравнения делятся на:
- ОДУ $f(x), f^{'}(x), \ldots, f^{n}(x)$
- УРЧП $f(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, ..., \frac{\partial f^{n}}{\partial z}$

Часть I
ОДУ первого порядка

1 Основные понятия ОДУ

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ).
F - известная функция,
x - независимая переменная,
$y(x)$ - искомая функция.

Порядок ОДУ (1) - наивысший порядок производной неизвестной функции $y(x)$, входящий в уравнение.
Примеры:

1) $y^{'} + y^2 ln(x) = 1$ - первого порядка

2) $xy^{(3)} + \frac{1}{x} y^4 = 0$ - третьего порядка

Обозначения:

- $< a, b >$: $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ (возможны $\pm\infty$ для открытого конца)
- $R^m_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ - вещественное евклидово пространство переменнных $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- $C(D)$ - множество функций, непрерывных в области D
- $C^n(D)$ - множество функций, имеющих в области D непрерывные производные до n-го порядка включительно

Опр.:
Пусть $D \subset R^{n+2}_{x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}}, \; F \in C(D)$.
Частное решение ОДУ (1) - функция $y = \phi(x)$:
1) $\phi(x) \in C^n(< a, b >)$
2) $(x, \phi(x), \phi^{'}(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \in D \;\; \forall x \in < a, b >$
3) $F(x, \phi(x), \phi^{'}(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0 \;\; \forall x \in < a, b >$

Пример: $y^{''} + y = 0$
Решения:
1) $y = sinx$ 2) $y = 2cosx$ 3) $y = c_1 sinx$ 4) $y = c_2 cosx$ 5) $y = c_1 sinx + c_2 cosx \;\; \forall c_1, c_2$
ОДУ может иметь бесконечно много решений.
Зам.: решение ОДУ не обязательно должно быть записано в явной форме; оно может быть записано в неявной форме $\phi(x, y) = 0$ или в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Пример:
$2xdx + 2ydy = 0$
$d(x^2) + d(y^2) = 0$
$d(x^2 + y^2) = 0$
$x^2 + y^2 = c$ - неявная форма,

$$\begin{cases} x = \sqrt{c}\, cost \\ y = \sqrt{c}\, sint \end{cases}$$

- параметрическая форма