Линал 2024

Ну я

19.01.2024

Содержание

1. Определение унитарного и евклидова пространств. Примеры. Элементарные свойства скалярного произведения. Вид скалярного произведения в базисе.

V - линейное пространство над полем P, где P - либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Отображение

$$(,): V \times V \to P$$

называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет следующим аксиомам: для любых $x, y, z \in V$ и любого $\alpha \in P$

- 1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
- 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$
- 3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
- 4) $(x,x) \geq 0 \ \ \forall x \in V$,
  $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Число (x,y) называется **скалярным произведением векторов** x и y, аксиомы 1-4 называются **аксиомами скалярного произведения**.
Замечание: из 1) следует, что скалярный квадрат вещественен.

Евклидово пространство - вещественное ($P = \mathbb{R}$) линейное пространство со скалярным произведением.
Унитарное пространство - комплексное ($P = \mathbb{C}$) линейное пространство со скалярным произведением.

Примеры:

- V_n - геометрическое пространство, СП $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|cos\angle(\bar{a}, \bar{b})$
- арифметические пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, *естественные скалярные произведения:*

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n$$

- функциональное пространство $C[0,1]$, СП:

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Свойства СП, вытекающие из аксиом:

- 1°. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z), \ \forall x,y,z \in E \ (U)$.
- 2°. $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y), \ \forall x,y \in E \ (U), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$
- 3°. $(\theta, x) = (x, \theta) = 0, \ \forall x \in E \ (U)$.
- 4°. $(x,y) = 0, \ \forall y \in E \ (U) \Leftrightarrow x = \theta$.
- 5°. $\forall L \subset V = E \ (U) \ \ L = E \ (U)$

СП (x,y) векторов x, y линейно по первому аргументу, а в E - по обоим. $(1^\circ, 2^\circ)$

22. Серии векторов относительно линейного оператора (ЛО). Жорданова клетка. Вид матрицы ЛО в базисе из серий векторов. Понятие линейной независимости системы векторов над подпространством и его взаимосвязь с понятием линейной независимости. Примеры.

Последовательность векторов $\bar{a_1}, ..., \bar{a_m}$ пространства R называется **серией** с собственным значением λ относительно преобразования A, если выполнены соотношения

$$a_1 \neq 0;\ Aa_1 = \lambda a_1,\ Aa_2 = \lambda a_2 + a_1,\ ...,\ Aa_m = \lambda a_m + a_{m-1}$$

Теорема о приведении матрицы к жордановой форме:
Существует базис пространства R, состоящий из всех векторов одной или нескольких серий относительно преобразования A.

В построенном согласно теореме базисе преобразованию A соответствует некая новая матрица $B = (b^i_j)$, имеющая особо простую форму, называемую **жордановой**.
Жорданова клетка порядка m с собственным значением λ - квадратная матрица (b^i_j) порядка m, определяемая соотношениями
$b^i_i = \lambda,\ i = 1, ..., m;$
$b^i_{i+1} = 1,\ i = 1,\ ...,\ m-1;$
$b^i_j = 0,\ j - i < 0,\ j - i > 1,$
т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Оказывается, что для каждой квадратной матрицы A порядка n можно подобрать такую невырожденную квадратную матрицу S, что матрица $B = SAS^{-1}$, получаемая из матрицы A путём трансформации матрицей S, имеет **жорданову форму**. Т.е. *состоит из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по её главной диагонали, в то время как все элементы её, не входящие в жордановы клетки, равны нулю.*

23. Теорема о существовании канонического базиса корневого подпространства линейного оператора.

29. Понятие функции от матрицы. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра. Пример вычисления функции от матрицы.

Пусть $\Delta(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}...(x-\lambda_r)^{k_r}$, $k_i > 0$, $i = 1, ..., r$, $k_1 + k_2 + ... + k_r = k$ - минимальный аннулирующий многочлен матрицы A, причем $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ - его попарно различные корни. Они же составляют совокупность всех собственных значений матрицы A.
Говорят, что **на спектре матрицы** A задана функция f, если каждому собственному значению λ_i матрицы A поставлена в соответствие последовательность чисел

$$f^{(0)}(\lambda_i),\ f^{(1)}(\lambda_i),\ ...,\ f^{(k_i-1)}(\lambda_i),\ i = 1, ..., r \quad (*)$$

Если $f(z)$ - некоторая функция комплексного переменного z, то, понимая под числами (*) значение самой функции и её производных до порядка $k_i - 1$ в точке λ_i, мы получаем функцию, заданную на спектре матрицы A. Если для двух функций комплексного переменного z значения (*) соответственно совпадают, то говорят, что эти две функции **совпадают на спектре матрицы** A. Оказывается, что два многочлена $g(z)$ и $h(z)$ тогда и только тогда совпадают на спектре матрицы A, когда $g(A) = h(A)$.

Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра:
Каковы бы ни были произвольно заданные числа (*), всегда существует единственный многочлен $\phi(z)$ степени $\leq k-1$, значения которого на спектре матрицы A совпадают с числами (*), т.е.

$$\phi^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i),\ j = 0, ..., k_i - 1,\ i = 1, ..., r \quad (**)$$

(т.н. **интерполяционный многочлен**). При этом коэффициенты многочлена $\phi(z)$ являются линейными функциями величин (*) и потому непрерывно зависят от них.
Док-во:
Положим $d(z) = g(z) - h(z)$. Если $g(A) = h(A)$, то $d(A) = 0$. Далее, если значения многочленов $g(z)$ и $h(z)$ на спектре матрицы A совпадают, то функция $d(z)$ на спектре матрицы A обращается в нуль. Таким образом, чтобы доказать ту часть утверждения, которая относится к многочленам $g(z)$ и $h(z)$, достаточно доказать, что многочлен $d(z)$ тогда и только тогда аннулирует матрицу A, когда он обращается в нуль на спектре этой матрицы. Докажем это.

Допустим, что многочлен $d(z)$ аннулирует матрицу A. Тогда он делится на многочлен $\Delta(z)$ и потому имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i, а из этого следует, что он обращается в нуль на спектре матрицы A. Если многочлен $d(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A, то он имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i и потому делится на многочлен $\Delta(z)$, откуда следует, что $d(A) = 0$.
Докажем теперь ту часть, которая относится к функции $\phi(z)$. Совокупность соотношений (**) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена $\phi(z)$ с k уравнениями и k неизвестными. Тогда для доказательства достаточно установить, что детерминант этой системы отличен от нуля, для чего достаточно доказать, что что в случае обращения в нуль правых частей этих уравнений решением будет лишь нулевой многочлен $\phi(z)$. В случае обращения в нуль правых частей уравнений (**) многочлен $\phi(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A и потому в силу доказанного ранее делится на многочлен $\Delta(z)$, а так как он имеет степень не выше $k-1$, то он тождественно равен нулю. Таким образом, теорема доказана.

Пример вычисления функции от матрицы:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = e^A - ?$

Решение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Степень многочлена 2, значит, интерполяционный многочлен линейный:

$$p(\lambda) = p_1\lambda + p_0$$

Приравниваем производные:

$$\begin{cases} f(2) = p(2) \\ f^{'}(2) = p^{'}(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^2 = 2p_1 + p_0 \\ e^2 = p_1 \end{cases}$$

Получаем $p(\lambda) = e^2\lambda - e^2$. Тогда

$$f(A) = e^A = p(A) = e^2 * \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - e^2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^2 * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

30. Теорема об общем виде интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра.