Линал 2024

Ну я

19.01.2024

Содержание

22. Серии векторов относительно линейного оператора (ЛО). Жорданова клетка. Вид матрицы ЛО в базисе из серий векторов. Понятие линейной независимости системы векторов над подпространством и его взаимосвязь с понятием линейной независимости. Примеры.

Последовательность векторов $\bar{a_1}, ..., \bar{a_m}$ пространства R называется **серией** с собственным значением λ относительно преобразования A, если выполнены соотношения

$$a_1 \neq 0;\ Aa_1 = \lambda a_1,\ Aa_2 = \lambda a_2 + a_1,\ ...,\ Aa_m = \lambda a_m + a_{m-1}$$

Теорема о приведении матрицы к жордановой форме:

Существует базис пространства R, состоящий из всех векторов одной или нескольких серий относительно преобразования A.

В построенном согласно теореме базисе преобразованию A соответствует некая новая матрица $B = (b^i_j)$, имеющая особо простую форму, называемую **жордановой**.
Жорданова клетка порядка m с собственным значением λ - квадратная матрица (b^i_j) порядка m, определяемая соотношениями
$b^i_i = \lambda,\ i = 1, ..., m;$
$b^i_{i+1} = 1,\ i = 1,\ ...,\ m-1;$
$b^i_j = 0,\ j-i<0,\ j-i>1,$
т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Оказывается, что для каждой квадратной матрицы A порядка n можно подобрать такую невырожденную квадратную матрицу S, что матрица $B = SAS^{-1}$, получаемая из матрицы A путём трансформации матрицей S, имеет **жорданову форму**. Т.е. *состоит из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по её главной диагонали, в то время как все элементы её, не входящие в жордановы клетки, равны нулю.*

23. Теорема о существовании канонического базиса корневого подпространства линейного оператора.

29. Понятие функции от матрицы. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра. Пример вычисления функции от матрицы.

Пусть $\Delta(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}...(x-\lambda_r)^{k_r},\ k_i > 0,\ i = 1, ..., r,\ k_1 + k_2 + ... + k_r = k$ - минимальный аннулирующий многочлен матрицы A, причем $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ - его попарно различные корни. Они же составляют совокупность всех собственных значений матрицы A.
Говорят, что **на спектре матрицы** A задана функция f, если каждому собственному

значению λ_i матрицы A поставлена в соответствие последовательность чисел

$$f^{(0)}(\lambda_i),\ f^{(1)}(\lambda_i),\ \ldots,\ f^{(k_i-1)}(\lambda_i),\ i=1,\ldots,r\quad (*)$$

Если $f(z)$ - некоторая функция комплексного переменного z, то, понимая под числами (*) значение самой функции и её производных до порядка k_i-1 в точке λ_i, мы получаем функцию, заданную на спектре матрицы A. Если для двух функций комплексного переменного z значения (*) соответственно совпадают, то говорят, что эти две функции **совпадают на спектре матрицы** A. Оказывается, что два многочлена $g(z)$ и $h(z)$ тогда и только тогда совпадают на спектре матрицы A, когда $g(A)=h(A)$.

Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра:
Каковы бы ни были произвольно заданные числа (*), всегда существует единственный многочлен $\phi(z)$ степени $\leq k-1$, значения которого на спектре матрицы A совпадают с числами (*), т.е.

$$\phi^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i),\ j=0,\ldots,k_i-1,\ i=1,\ldots,r\quad (**)$$

(т.н. **интерполяционный многочлен**). При этом коэффициенты многочлена $\phi(z)$ являются линейными функциями величин (*) и потому непрерывно зависят от них.
Док-во:
Положим $d(z)=g(z)-h(z)$. Если $g(A)=h(A)$, то $d(A)=0$. Далее, если значения многочленов $g(z)$ и $h(z)$ на спектре матрицы A совпадают, то функция $d(z)$ на спектре матрицы A обращается в нуль. Таким образом, чтобы доказать ту часть утверждения, которая относится к многочленам $g(z)$ и $h(z)$, достаточно доказать, что многочлен $d(z)$ тогда и только тогда аннулирует матрицу A, когда он обращается в нуль на спектре этой матрицы. Докажем это.
Допустим, что многочлен $d(z)$ аннулирует матрицу A. Тогда он делится на многочлен $\Delta(z)$ и потому имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i, а из этого следует, что он обращается в нуль на спектре матрицы A. Если многочлен $d(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A, то он имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i и потому делится на многочлен $\Delta(z)$, откуда следует, что $d(A)=0$.
Докажем теперь ту часть, которая относится к функции $\phi(z)$. Совокупность соотношений (**) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена $\phi(z)$ с k уравнениями и k неизвестными. Тогда для доказательства достаточно установить, что детерминант этой системы отличен от нуля, для чего достаточно доказать, что что в случае обращения в нуль правых частей этих уравнений решением будет лишь нулевой многочлен $\phi(z)$. В случае обращения в нуль правых частей уравнений (**) многочлен $\phi(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A и потому в силу доказанного ранее делится на многочлен $\Delta(z)$, а так как он имеет степень не выше $k-1$, то он тождественно равен нулю. Таким образом, теорема доказана.

Пример вычисления функции от матрицы:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; f(A) = e^A - ?$

Решение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Степень многочлена 2, значит, интерполяционный многочлен линейный:

$$p(\lambda) = p_1\lambda + p_0$$

Приравниваем производные:

$$\begin{cases} f(2) = p(2) \\ f^{'}(2) = p^{'}(2) \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} e^2 = 2p_1 + p_0 \\ e^2 = p_1 \end{cases}$$

Получаем $p(\lambda) = e^2\lambda - e^2$. Тогда

$$f(A) = e^A = p(A) = e^2 * \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - e^2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^2 * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

30. Теорема об общем виде интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра.