

# Линал 2024

Ну я

19.01.2024

## Содержание

22. Серии векторов относительно линейного оператора (ЛО). Жорданова клетка. Вид матрицы ЛО в базисе из серий векторов. Понятие линейной независимости системы векторов над подпространством и его взаимосвязь с понятием линейной независимости. Примеры. 1
23. Теорема о существовании канонического базиса корневого подпространства линейного оператора. 2
29. Понятие функции от матрицы. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра. Пример вычисления функции от матрицы. 2
30. Теорема об общем виде интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра. 4

22. Серии векторов относительно линейного оператора (ЛО). Жорданова клетка. Вид матрицы ЛО в базисе из серий векторов. Понятие линейной независимости системы векторов над подпространством и его взаимосвязь с понятием линейной независимости. Примеры.

Последовательность векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  пространства  $R$  называется **серией** с собственным значением  $\lambda$  относительно преобразования  $A$ , если выполнены соотношения

$$a_1 \neq 0; Aa_1 = \lambda a_1, Aa_2 = \lambda a_2 + a_1, \dots, Aa_m = \lambda a_m + a_{m-1}$$

Теорема о приведении матрицы к жордановой форме:

Существует базис пространства  $R$ , состоящий из всех векторов одной или нескольких серий относительно преобразования  $A$ .

В построенном согласно теореме базисе преобразованию  $A$  соответствует некая новая матрица  $B = (b_j^i)$ , имеющая особо простую форму, называемую **жордановой**.

**Жорданова клетка** порядка  $m$  с собственным значением  $\lambda$  - квадратная матрица  $(b_j^i)$  порядка  $m$ , определяемая соотношениями

$$b_i^i = \lambda, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$b_{i+1}^i = 1, \quad i = 1, \dots, m-1;$$

$$b_j^i = 0, \quad j-i < 0, \quad j-i > 1,$$

т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Оказывается, что для каждой квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  можно подобрать такую невырожденную квадратную матрицу  $S$ , что матрица  $B = SAS^{-1}$ , получаемая из матрицы  $A$  путём трансформации матрицей  $S$ , имеет **жорданову форму**. Т.е. состоит из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по её главной диагонали, в то время как все элементы её, не входящие в жордановы клетки, равны нулю.

**23. Теорема о существовании канонического базиса корневого подпространства линейного оператора.**

**29. Понятие функции от матрицы. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра. Пример вычисления функции от матрицы.**

Пусть  $\Delta(x) = (x - \lambda_1)^{k_1}(x - \lambda_2)^{k_2} \dots (x - \lambda_r)^{k_r}$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$  - минимальный аннулирующий многочлен матрицы  $A$ , причем  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  - его попарно различные корни. Они же составляют совокупность всех собственных значений матрицы  $A$ .

Говорят, что **на спектре матрицы  $A$**  задана функция  $f$ , если каждому собственному

значению  $\lambda_i$  матрицы  $A$  поставлена в соответствие последовательность чисел

$$f^{(0)}(\lambda_i), f^{(1)}(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i), i = 1, \dots, r \quad (*)$$

Если  $f(z)$  - некоторая функция комплексного переменного  $z$ , то, понимая под числами  $(*)$  значение самой функции и её производных до порядка  $k_i - 1$  в точке  $\lambda_i$ , мы получаем функцию, заданную на спектре матрицы  $A$ . Если для двух функций комплексного переменного  $z$  значения  $(*)$  соответственно совпадают, то говорят, что эти две функции **совпадают на спектре матрицы  $A$** . Оказывается, что два многочлена  $g(z)$  и  $h(z)$  тогда и только тогда совпадают на спектре матрицы  $A$ , когда  $g(A) = h(A)$ .

### **Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра:**

Каковы бы ни были произвольно заданные числа  $(*)$ , всегда существует единственный многочлен  $\phi(z)$  степени  $\leq k - 1$ , значения которого на спектре матрицы  $A$  совпадают с числами  $(*)$ , т.е.

$$\phi^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), j = 0, \dots, k_i - 1, i = 1, \dots, r \quad (**)$$

(т.н. **интерполяционный многочлен**). При этом коэффициенты многочлена  $\phi(z)$  являются линейными функциями величин  $(*)$  и потому непрерывно зависят от них.

#### **Док-во:**

Положим  $d(z) = g(z) - h(z)$ . Если  $g(A) = h(A)$ , то  $d(A) = 0$ . Далее, если значения многочленов  $g(z)$  и  $h(z)$  на спектре матрицы  $A$  совпадают, то функция  $d(z)$  на спектре матрицы  $A$  обращается в нуль. Таким образом, чтобы доказать ту часть утверждения, которая относится к многочленам  $g(z)$  и  $h(z)$ , достаточно доказать, что многочлен  $d(z)$  тогда и только тогда аннулирует матрицу  $A$ , когда он обращается в нуль на спектре этой матрицы. Докажем это.

Допустим, что многочлен  $d(z)$  аннулирует матрицу  $A$ . Тогда он делится на многочлен  $\Delta(z)$  и потому имеет число  $\lambda_i$  своим корнем кратности не меньше  $k_i$ , а из этого следует, что он обращается в нуль на спектре матрицы  $A$ . Если многочлен  $d(z)$  обращается в нуль на спектре матрицы  $A$ , то он имеет число  $\lambda_i$  своим корнем кратности не меньше  $k_i$  и потому делится на многочлен  $\Delta(z)$ , откуда следует, что  $d(A) = 0$ .

Докажем теперь ту часть, которая относится к функции  $\phi(z)$ . Совокупность соотношений  $(**)$  можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена  $\phi(z)$  с  $k$  уравнениями и  $k$  неизвестными. Тогда для доказательства достаточно установить, что детерминант этой системы отличен от нуля, для чего достаточно доказать, что что в случае обращения в нуль правых частей этих уравнений решением будет лишь нулевой многочлен  $\phi(z)$ . В случае обращения в нуль правых частей уравнений  $(**)$  многочлен  $\phi(z)$  обращается в нуль на спектре матрицы  $A$  и потому в силу доказанного ранее делится на многочлен  $\Delta(z)$ , а так как он имеет степень не выше  $k - 1$ , то он тождественно равен нулю. Таким образом, теорема доказана.

Пример вычисления функции от матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(A) = e^A - ?$$

Решение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Степень многочлена 2, значит, интерполяционный многочлен линейный:

$$p(\lambda) = p_1\lambda + p_0$$

Приравниваем производные:

$$\begin{cases} f(2) = p(2) \\ f'(2) = p'(2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^2 = 2p_1 + p_0 \\ e^2 = p_1 \end{cases}$$

Получаем  $p(\lambda) = e^2\lambda - e^2$ . Тогда

$$f(A) = e^A = p(A) = e^2 * \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - e^2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**30. Теорема об общем виде интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра.**