FACULTAD DE INGENIERÍA

NOTAS DE CLASE MATEMÁTICAS I

Docente: Alvaro Andrés Quintero Orego / 2022-1

UNIDAD 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA

Objetivos de la unidad

* Clasificar un número de acuerdo al conjunto al que pertenece.
* Aplicar propiedades de los números reales en la solución de ejercicios.
* Resolver problemas con valor absoluto.
* Enunciar las propiedades de la potenciación y la radicación para la simplificación de expresiones algebraicas.
* Realizar operaciones entre expresiones algebraicas.
* Enunciar los productos notables más usados.
* Enunciar los diferentes casos de factorización.
* Realizar suma y resta de expresiones fraccionarias usando el mínimo común denominador
* Racionalizar expresiones fraccionarias.

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Tal vez medir y contar fueron algunas de las actividades realizadas por el hombre. Debieron pasar muchos siglos para que el hombre tuviera un concepto abstracto de número. Esta primera sección estará dedicada a realizar un repaso rápido al análisis de las propiedades y características más importantes de los números.

1.1.1. Conjuntos Numéricos

El primer conjunto de números son los naturales, los usamos para contar

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Nota: los tres puntos al final del conjunto se llaman **elipsis** e indica que el conjunto es infinito.

El conjunto de los naturales extendidos, los naturales más el cero

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Nota: $\mathbb{N}_0$ se denomina el conjunto de los enteros no negativos

Algunas operaciones no se pueden hacer en los naturales $3 - 4 = -1$? Así que fue necesario ampliar este conjunto al de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}_0 = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Algunas operaciones no se pueden resolver en los enteros $5/2 = 2.5$?.

Luego viene el conjunto de los racionales

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} = \{\ldots, -2, -3/2, 0, 1/8, 2/7, 4, \ldots\}$$

Los racionales son un conjunto **denso**, lo cual significa que entre dos números racionales cualquiera siempre habrá otro número racional. Observe que esta propiedad no la cumplen los números enteros.

Nota: el conjunto de los racionales incluye a los naturales y a los enteros

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

En el conjunto de los racionales se diferencian dos subconjuntos:

- Los enteros: 0, 1, 3, -4, etc.
- Las fracciones propiamante dichas: $5/2$, $2/5$, $-7/4$, $\ldots$

Los números racionales tienen la característica de poder ser representados como decimales infinitos periódicos, así:

$$-2 = -2.00000\ldots = -2.\overline{0}$$

$$-\frac{3}{2} = -1.500000\ldots = -1.5\overline{0}$$

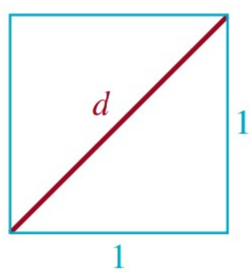
$$\frac{2}{7} = 0.285714285714\ldots = 0.\overline{285714}$$

En todos los casos anteriores existe en la representación decimal una parte que se repite, que se denomina el periodo. Se acostumbra escribir estos números con la parte periódica expresada una sola vez colocando una barra sobre ella.

El conjunto de números racionales no es suficiente para resolver ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo, no hay un número racional p/q para el que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Así, no podemos utilizar un número racional para para describir la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario



Por el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud d debe cumplir que

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

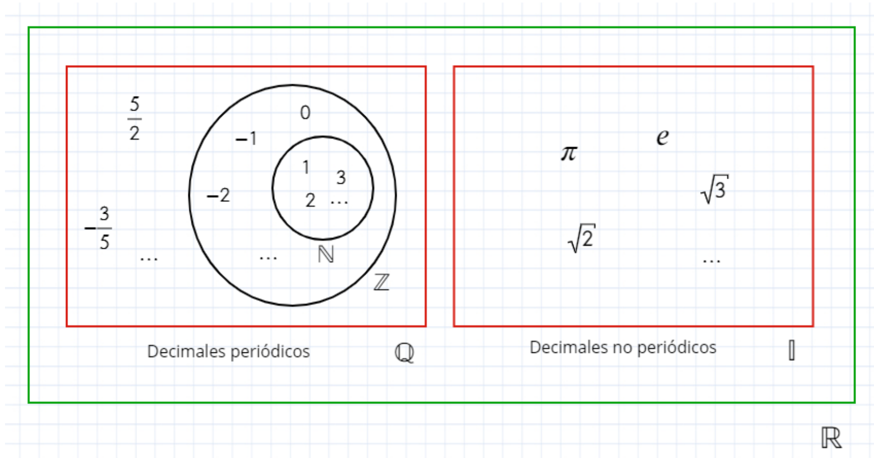
Escribimos entonces $d = \sqrt{2}$ y llamamos a d la "raíz cuadrada de 2". Como acabamos de indicar $\sqrt{2}$ no es un número racional. Vale la pena entonces preguntarnos: ¿si $\sqrt{2}$ no es racional, entonces que tipo de número es?. A estos números los denominamos **irracionales**, es decir, el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros. La característica principal de los números irracionales es que su expresión decimal corresponde a decimales no periódicos:

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots; \qquad \sqrt{2}; \qquad e$$

Este ultimo conjunto se denomina los irracionales $\mathbb{I}$ y se define como el conjunto de decimales no periódicos.

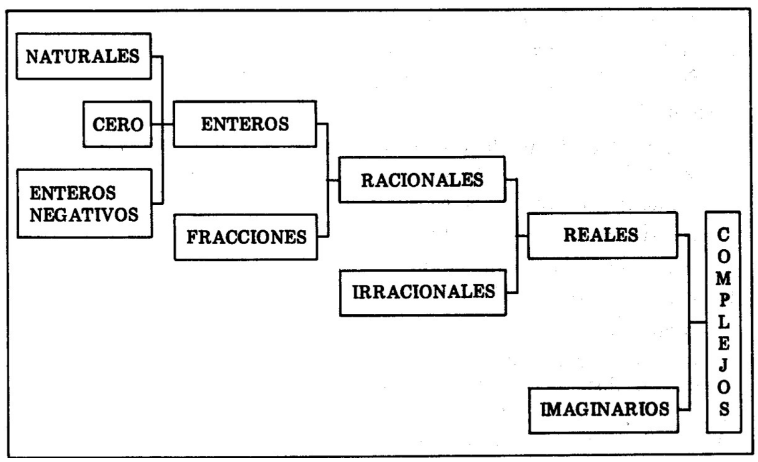
Reuniendo los racionales y los irracionales formamos el conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



En los números reales no puede hallar $\sqrt{-1} = i$ y el conjunto se denomina los complejos $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



1.1.2. Porcentajes

Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como porcentajes; por ejemplo, 8% quiere decir $\dfrac{8}{100}$ o 0.08. En general, $b\%$ significa "b partes de 100", y es otra forma de escribir $\dfrac{b}{100}$. Un modo sencillo de convertir un número decimal en porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%. Por ejemplo

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios. Cuando una cantidad aumenta, el porcentaje de incremento se da por

$$\frac{\text{Cantidad de aumento}}{\text{Cantidad original}} \times 100\%$$

De igual forma, cuando una cantidad disminuye, el porcentaje de decrecimiento está dado por

$$\frac{\text{Cantidad de decrecimiento}}{\text{Cantidad original}} \times 100\%$$

Ejemplo 1

La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1750 a 1700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución

La cantidad de decrecimiento es $1750 - 1700 = 50$. Como la cantidad original es 1750, el porcentaje de decrecimiento fue

$$\frac{50}{1750} \approx 0.0285714 = 0.0285714 \times 100\% \approx 2.86\%$$

Luego, el porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%.

■

Ejemplo 2

¿Cuál es el precio de oferta de un balón de voleibol si el precio normal es de U28.60 y hay 25% de descuento?

Solución

Como se ofrece 25% de descuento, el precio de oferta será de 75% del precio normal, o

$$(0.75)(28.60) = 21.45$$

Es decir, el precio del balón con el descuento será de U$\$21.45$

■

1.1.3. Sistema de los números reales

El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de los números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para dar respuestas a preguntas matemáticas. Vamos a enunciar las **propiedades básicas** de los números reales respecto a la suma y el producto.

Definición 1.1. **Propiedades básicas de los números reales**

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. **Propiedad clausurativa (cerradura)**: La suma y el producto de números reales es otro número real. (se dice que el conjunto de los números reales bajo la suma y el producto es cerrado)

$$a + b \in \mathbb{R} \qquad\qquad a \times b \in \mathbb{R}$$

2. **Propiedad conmutativa**:

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \times b = b \times a$$

3. **Propiedad asociativa**:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad\qquad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

4. **Elementos neutros**: Existe el 0 y el 1 $\in \mathbb{R}$ tales que

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad\qquad 1 \times a = a \times 1 = a$$

5. **Inverso aditivo**: todo número real a tiene un inverso aditivo, $-a$, tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

6. **Inverso multiplicativo**: Todo número real a, excepto el cero, tienen un inverso multiplicativo denotado por $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ tal que

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$$

El inverso multiplicativo también se denomina el **recíproco** de a.

Nota: Para denotar el producto de dos números reales, en general, no es necesario usar el símbolo $\times$, simplemente escribimos ab, es decir $a \times b = ab$.

Ejemplo 3

a) El inverso aditivo de 4 es -4; el inverso aditivo de $-3/2$ es $3/2$; el inverso aditivo 0 es 0

b) El inverso multiplicativo de 2 es $2^{-1} = 1/2$ pues

$$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

c) El inverso multiplicativo de $\dfrac{3}{2}$ es $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2}{3}$ pues

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

Nota: el inverso multiplicativo no cambia signo. Por ejemplo el inverso de -4 es

$$(-4)^{-1} = -\frac{1}{4}$$

■

La **propiedad distributiva** de los números reales combina las dos operaciones de suma y producto. De ahora en adelante escribiremos $a \times b = ab$.

Definición 1.2. **Propiedad distributiva del producto sobre la suma**

7. **Propiedad distributiva**:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad\qquad (a+b)c = ac + bc$$

La propiedad distributiva se puede extender para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

Ejemplo 4

1. $2(x+y) = 2x + 2y$
2. $(x+y)(z+w) = (x+y)z + (x+y)w = xz + yz + xw + yw$
3. $(x+2) + [-(x+2)] = 0$

4 $(y+z)\dfrac{1}{y+z} = 1$, si $y + z \neq 0$

■

Es posible definir las operaciones de **diferencia** y **división** en términos de la suma y el producto respectivamente.

Definición 1.3. **Diferencia y división**

Para los números reales a y b, la **diferencia** $a - b$ se define como

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, o división, $a \div b$, se define así

$$a \div b = \frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) = a(b)^{-1}$$

En el cociente a/b, a se llama numerador y b denominador. Con frecuencia, el cociente de dos números reales a/b se denomina fracción. Tenga en cuenta que $a \div b$ o a/b no está definido cuando $b = 0$. Por tanto, $a/0$ no está definido para ningún número real a.

Muchas propiedades adicionales de los números reales pueden derivarse de las propiedades básicas.

Teorema 1.1. **Propiedades adicionales**

8. **Propiedad de las igualdades**: si a, b y c son números reales y si $a = b$, entonces

$$a + c = b + c \qquad\qquad ac = bc$$

En una igualdad se puede sumar o multiplicar por la misma cantidad a ambos lados y la igualdad se conserva.

9. **Propiedades de la multiplicación por cero**: si a y b son números reales, entonces
   i. $a \times 0 = 0 \times a = 0$
   ii. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambas
10. **Propiedades de cancelación**:
   i. Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$
   ii. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, siempre que $c \neq 0$ y $b \neq 0$

Notas:

- Observe como la propiedad 8 implica que también se podrá restar o dividir por la misma cantidad (siempre que sea diferente de cero para la división) y la igualdad se conserva. Si $a = b$, tenemos

$$a - c = b - c \qquad\qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0$$

- Como veremos más adelante la propiedad 9 es muy importante para resolver ecuaciones. Por ejemplo, si $x(x+1) = 0$, podemos concluir que $x = 0$ o bien que $x + 1 = 0$.

- En la propiedad 10 es importante resaltar que sólo se pueden cancelar **factores**. Es muy común que se cometa el siguiente error

$$\frac{a+b}{b} \neq a$$

Ejemplo 5

1. Si $2x = 2y$, entonces $x = y$
2. $\dfrac{36}{27} = \dfrac{4 \times 9}{3 \times 9} = \dfrac{4}{3}$
3. $\dfrac{x(x+4)}{x} = x + 4$
4. $\dfrac{xy + zy}{y} = \dfrac{y(x+z)}{y} = x + z$

■

Teorema 1.2. **Propiedades adicionales**

11. **Propiedades de la resta y ley de los signos**:
    i. $-(-a) = a$
    ii. $-(ab) = (-a)(b) = a(-b)$
    iii. $-a = (-1)a$
    iv. $(-a)(-b) = ab$

Como hemos mencionado, todas estas propiedades adicionales de los números reales pueden demostrarse usando las propiedades básicas. A manera de ilustración, vamos a demostrar la propiedad 11iii) y 11iv).

Demostración 11iii)

$1 + (-1) = 0$	Definición de inverso aditivo
$[1 + (-1)] \times a = 0 \times a$	Propiedad de las igualdades
$1 \times a + (-1) \times a = 0 \times a$	Propiedad distributiva
$a + (-1) \times a = 0$	Elemento neutro y producto por cero
$a + (-1) \times a - a = 0 - a$	Resta de a en ambos lados
$0 + (-1) \times a = 0 + (-a)$	Definición de inverso aditivo y resta
$(-1) \times a = -a$	Elemento neutro

■

Ahora bien, usando esta propiedad podemos demostrar la 11iv)

Demostración 11iv)

$(-a)(-b) = [(-1)a][(-1)b]$	Propiedad 11iii)
$(-a)(-b) = (-1)(-1)ab$	Propiedad conmutativa
$(-a)(-b) = -(-1)ab$	Propiedad 11iii)
$(-a)(-b) = (1)ab$	Propiedad 11i)
$(-a)(-b) = ab$	Elemento neutro

■

Ejemplo 6

Simplifique

$$-(4 + x - y)$$

Solución

En vista de la propiedad 11iii) tenemos

$$-(4 + x - y) = (-1)(4 + x - y)$$

Entonces, por la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} -(4 + x - y) =& (-1)(4 + x - y) \\ =& (-1)4 + (-1)x + (-1)(-y) \\ =& -4 - x + y \end{aligned}$$

■

Seguramente ya estará familiarizado con la siguiente lista de propiedades de las fracciones.

Teorema 1.3. **Fracciones**

12. **Fracciones equivalentes**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{si y solo si} \qquad ad = bc$$

13. **Ley de signos**:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

14. **Adición y sustracción**:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. **Multiplicación**:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

15. **División**:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \qquad c \neq 0$$

Ejemplo 7

El inverso multiplicativo, o recíproco, de $\frac{2}{3}$ es

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

■

Teorema 1.4. **División por cero**

16. **División de cero y división por cero**

i. $0 \div b = \frac{0}{b} = 0, \quad b \neq 0$

ii. $a \div 0 = \frac{a}{0}$ es indefinido, $a \neq 0$

iii. $0 \div 0 = \frac{0}{0}$ es indefinido.

Ejemplo 8

Evalúe las siguientes expresiones

1. $(-x)(-y) = xy$
2. $\frac{-(-a)}{-b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
3. $\frac{2(u+v)}{2v} = \frac{u+v}{v}$

4. $\dfrac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \dfrac{y}{\frac{17}{20}} = y\dfrac{20}{17} = \dfrac{20y}{17}$

5. $\dfrac{w}{2-(5-3)} = \dfrac{w}{2-2} = \dfrac{w}{0}$ no definido

■

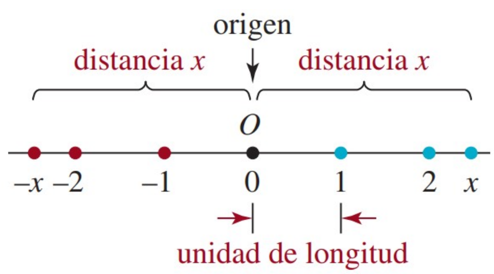
1.2. LA RECTA DE LOS NÚMEROS REALES

1.2.1. Introducción

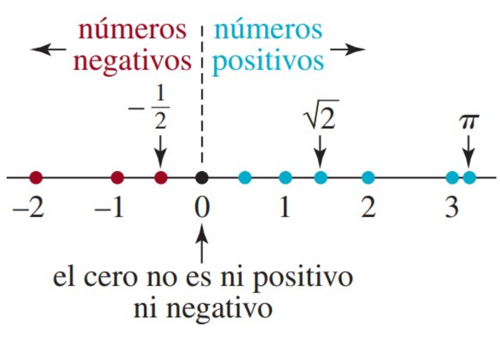
Para dos números reales distintos a y b, siempre hay un tercer número real entre ellos; por ejemplo, su promedio $(a+b)/2$ es el punto medio entre ellos. Asimismo, para dos puntos distintos de A y B en una recta, hay siempre un tercer punto entre ellos; por ejemplo, el punto medio M del segmento de recta AB. Hay muchas similitudes como ésta entre el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales y el conjunto de puntos en una recta que indican el uso de una recta para "describir" el conjunto de los números reales.

1.2.2. La Recta Real

Dada cualquier recta, escogemos un punto O sobre ella para representar el número 0. Este punto en particular se llama origen. Si ahora seleccionamos un segmento de recta de longitud uno, como se muestra en la figura, cada número real positivo x puede representarse con un punto a una distancia x a la derecha del origen. De igual forma, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la izquierda del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de puntos de una recta, llamada **recta de los números reales** o **recta numérica real**.



Para cualquier punto P dado en la recta numérica, el número p, que corresponde a ese punto, se llama coordenada de P. Así, el conjunto $\mathbb{R}^-$ de los números reales negativos, consiste en las coordenadas de puntos a la izquierda del origen; por su parte, el conjunto $\mathbb{R}^+$ de números reales positivos está formado por las coordenadas de puntos a la derecha del origen, y el número 0 es la coordenada del origen O.



1.2.3. Menor que y mayor que

Dos números reales a y b, con $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que**. Tenemos la definición siguiente.

Definición 1.4. **Menor que**

Se dice que el número real a es menor que b, lo que se escribe $a < b$, si y sólo si la diferencia $b-a$ es positiva.

Si a es menor que b, entonces de forma equivalente podemos decir que b es mayor que a, lo que se escribe $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

Ejemplo 9

Usando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\dfrac{22}{7}$

Solución

A partir de la expresión decimal de cada número tenemos

$$\pi = 3.1415\ldots \qquad \text{y} \qquad \frac{22}{7} = 3.1428\ldots$$

por tanto

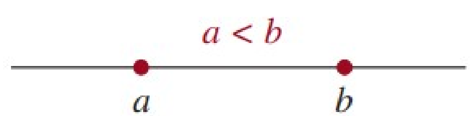
$$\frac{22}{7} - \pi = (3.1428\ldots) - (3.1515\ldots) = 0.001\ldots$$

Puesto que esta diferencia es positiva, concluimos que $\dfrac{22}{7} > \pi$

■

1.2.4. Desigualdades

La recta de los números reales es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b. Como se muestra en la figura



Se dice que el número a es **menor que** el número b, y escribimos $a < b$, siempre que el número a se sitúe a la izquierda del número b en la recta numérica. De forma equivalente, como el número b se sitúa a la derecha de a en la recta numérica, decimos que b es **mayor que** a y escribimos $b > a$. Por ejemplo, $4 < 9$ o equivalentemente $9 > 4$. También empleamos la notación $a \leq b$ si el número a es **menor o igual** al número b. Así mismo, $b \geq a$ significa que b es **mayor o igual** a a. Por ejemplo, $2 \leq 5$ puesto que $2 < 5$. Además, $4 \geq 4$ porque $4 = 4$.

Para dos números reales cualesquiera a y b, sólo una de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b$$

La propiedad anterior se llama **ley de tricotomía**.

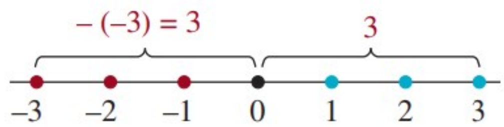
Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad** y expresiones como $a < b$ se llaman **desigualdades**. Así mismo, una desigualdad de la forma $a < b$ se denomina **desigualdad estricta**, en tanto que una desigualdad como $b \geq a$ se denomina **desigualdad no estricta**.

Teorema 1.5. **Propiedad transitiva**

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

1.2.5. Valor absoluto

También podemos utilizar la recta de los números reales para presentar la distancia. Como se muestra en la figura, la distancia del punto 3 al origen es de 3 unidades, y la distancia del punto -3 al origen es de 3, o $-(-3)$, unidades.



En general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen se describe mediante la noción del **valor absoluto** de un número real.

Definición 1.5. **Valor absoluto**

Para cualquier número real a, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 10

$$|5| = 5; \quad |-2| = -(-2) = 2; \quad |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

■

Es un error común pensar que $-y$ representa un número negativo simplemente por el signo menos. Hemos de destacar que si y representa un número negativo, entonces el negativo de y, es decir, $-y$ es un número positivo. Por tanto, si y es negativo, entonces $|y| = -y$.

Describiremos las propiedades del valor absoluto en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. **Propiedades del valor absoluto**

Sean x e y números reales, entonces

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|xy|=|x||y|$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
5. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
6. $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdad triangular)

Ejemplo 11

$$|(-8)(-4)| = |-8||-4|$$
$$|32| = 8 \times 4$$
$$32 = 32$$

■

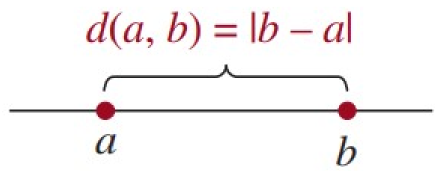
Ejemplo 12

$$|8-2| = |8+(-2)| \leq |8| + |-2|$$
$$|6| \leq 8+2$$
$$6 \leq 10$$

■

1.2.6. Distancia entre dos puntos

El concepto de valor absoluto no sólo describe la distancia de un punto al origen; también es útil para hallar la distancia que hay entre dos puntos en la recta numérica. Puesto que deseamos describir la distancia como una cantidad positiva, restamos una coordenada de la otra y luego obtenemos el valor absoluto de la diferencia.



Definición 1.6. **Distancia en la recta de los números reales**

Si a y b son dos puntos en la recta de los números reales, la **distancia** de a a b está dada por

$$d(a, b) = |b - a|$$

Ejemplo 13

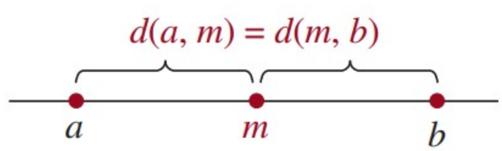
1. La distancia de -5 a 2 es
$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = |7| = 7$$
2. La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es
$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}$$

■

1.2.7. Coordenada del punto medio

La definición 1.6 sirve para hallar una expresión para el punto medio de un segmento de recta. El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

$$m = \frac{a + b}{2}$$



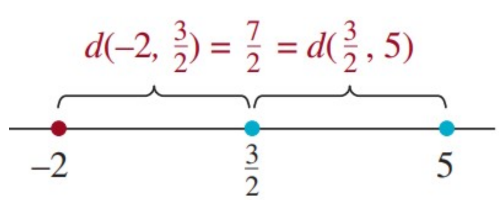
Ejemplo 14

Hallar el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2.

Solución

De acuerdo a la fórmula de punto medio tenemos

$$\frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

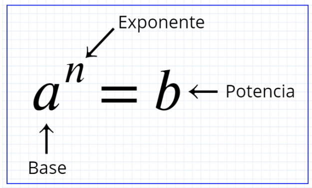


■

1.3. EXPONENTES ENTEROS

1.3.1. Introducción

Sabemos que la mejor forma de escribir una suma repetida como $x+x+x+x$ es $4x$. Así mismo, la mejor forma de escribir un producto repetido como $x \cdot x \cdot x \cdot x$ es usando **exponentes**. En esta sección vamos a dar un repaso a la operación llamada potenciación y a sus propiedades. Comenzamos con la definición de "x a la n potencia"



Definición 1.7. **Potencia entera positiva de x**

Para cualquier número real a y cualquier entero positivo n, el símbolo x^n representa el producto de n factores de x. Es decir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} = b$$

Se dice que b es la n-ésima potencia de a

Ejemplo 15

1. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
2. $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
3. $(2x)^3 = (2x)(2x)(2x) = 8x^3$

■

Esta definición es válida si el exponente $n > 0$, pero qué pasa si el exponente es negativo?. Las potencias negativas se definen a continuación.

Definición 1.8. **Potencias enteras negativas de a**

Para cualquier número real a que no sea cero y cualquier entero positivo n, el símbolo a^{-n} representa el recíproco del producto de n factores de a. Es decir,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Con $a \neq 0$

Ejemplo 16

1. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{1}{8}$
2. $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{10000}} = 10000$

■

Ahora bien, y qué pasará si el exponente es cero? Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.7. **Exponente cero**

Para todo número real a, diferente de cero, se cumple que $a^0 = 1$

Es importante resaltar que 0^0 no está definido.

1.3.2. Propiedades de los exponentes

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes**.

Teorema 1.8. **Leyes de los exponentes enteros**

Sean a y b números reales y m y n enteros. Entonces

i. **Producto de potencias de la misma base**

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

ii. **Potencia de una potencia**

$$(a^n)^m = a^{mn}$$

iii. **Potencia de un producto**

$$(ab)^n = a^n b^n$$

iv. **Cociente de potencias de la misma base**

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

v. **Potencia de un cociente**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Siempre que cada expresión represente un número real.

Ejemplo 17

1. $10^4 \cdot 10^2 = 10^{4+2} = 10^6$
2. $(-2)^3(-2)^2 = (-2)^5$
3. $(x)(x^2)(x^4) = x^7$
4. $\dfrac{m^5}{m^3} = m^{5-3} = m^2$
5. $\dfrac{x^2y^3}{x^3y^2} = \dfrac{y^{3-2}}{x^{3-2}} = \dfrac{y}{x}$
6. $[(-1)^2]^4 = (-1)^8 = 1$
7. $(r^4)^2 = r^8$
8. $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 x^3 = \dfrac{1}{8}x^3$
9. $(-2kxy)^8 = (-2)^8k^8x^8y^8 = 256k^8x^8y^8$

■

Debemos ser muy cuidadosos con las propiedades de los exponentes y no cometer errores comunes como los siguientes

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

$$\frac{1}{x^{-m}+y^{-n}} \neq x^m + y^n$$

Las leyes de los exponentes son importantes para simplificar expresiones, veamos.

Ejemplo 18

Simplificar

$$\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^2$$

Solución

Aplicamos propiedades de los exponentes

$$\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^2 = \frac{(xy^2)^2}{(z^3)^2} = \frac{x^2y^4}{z^6}$$

■

Ejemplo 19

Simplificar

$$\frac{1}{2^{-3}+3^{-2}}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los exponentes

$$\frac{1}{2^{-3}+3^{-2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}} = \frac{1}{\dfrac{17}{72}} = \frac{72}{17}$$

■

Veamos la demostración de $a^0 = 1$.

<u>Demostración</u>:

$$a^0 = a^{n-n} = a^n a^{-n} = a^n \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1; \qquad a \neq 0$$

■

Ejemplo 20

Simplifique

$$(y^3x^2)(-3x^2y^{-3})^{-3}(2x^{-2}y^5)^2$$

Solución

Aplicamos propiedades de los exponentes

$$\begin{aligned}
(y^3x^2)(-3x^2y^{-3})^{-3}(2x^{-2}y^5)^2 =& y^3x^2(-3)^{-3}(x^2)^{-3}(y^{-3})^{-3}2^2(x^{-2})^2(y^5)^2 \\
=& y^3x^2\frac{1}{(-3)^3}x^{-6}y^9 4x^{-4}y^{10} \\
=& \frac{4}{-27}x^{-8}y^{22} \\
=& -\frac{4}{27}\frac{1}{x^8}y^{22} \\
=& -\frac{4y^{22}}{27x^8}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 21

Simplifique

$$\frac{a^{-2}b^{-2}}{(a^{-1}b^{-1})^2}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los exponentes

$$\frac{a^{-2}b^{-2}}{(a^{-1}b^{-1})^2} = \frac{a^{-2}b^{-2}}{a^{-2}b^{-2}} = 1$$

■

1.3.3. Notación Científica

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma práctica. Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n$$

donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en **notación científica**. Por ejemplo,

$$1000000 = 1 \times 10^6 = 10^6 \qquad \text{y} \qquad 0.0000000537 = 5.37 \times 10^{-8}$$

La notación científica es más útil en química y física, donde suelen presentarse números muy grandes o muy pequeños.

$$92900000 = 9.29 \times 10^7 \qquad \text{y} \qquad 0.000000000251 = 2.51 \times 10^{-10}$$

Estos números son la distancia media de la Tierra al Sol expresada en millas y la vida media de una partícula lambda en segundos, respectivamente. Sin duda es más fácil escribir y recordar números como éstos cuando se dan en notación científica.

Ejemplo 22

Hallar el valor de

$$\frac{(4000)^3(1000000)}{(20000000)^5}$$

Solución

Escribimos cada número en notación científica

$$\frac{(4 \times 10^3)^3(1 \times 10^6)}{(2 \times 10^7)^5} = \frac{(4^3)(10^9)(10^6)}{(2^5)(10^{35})} = \frac{64(10^{15})}{32(10^{35})} = 2 \times 10^{-20}$$

Ejemplo 23

Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año de la Tierra (365.25 días). La velocidad de la luz es 3.00×10^5 kilómetros por segundo. Halle la distancia de un año luz en kilómetros y en millas (aproximar a la tercera cifra decimal).

Solución

Para determinar la distancia de un año luz en kilómetros multiplicamos la velocidad de la luz en kilómetros por segundo por el número de segundos en un año de la Tierra. Primero hacemos la conversión de un año de la Tierra en segundos:

$$\text{1 año de la tierra} \approx 365.25 \times 24\frac{\text{horas}}{\text{día}} \times 60\frac{\text{minutos}}{\text{hora}} \times 60\frac{\text{segundos}}{\text{minuto}}$$

entonces

$$3.00 \times 10^5 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 = 94672800 \times 10^5 = 9.47 \times 10^7 \times 10^5 = 9.47 \times 10^{12}$$

Por tanto la distancia de un año luz en kilómetros es 9.47×10^{12} km. Ahora bien, $1\ km = 6.21 \times 10^{-1}\ mi$, por tanto, la distancia en millas será

$$9.47 \times 10^{12} = 9.47 \times 10^{12}\ km \times \frac{6.21 \times 10^{-1}\ mi}{1\ km} = 5.88 \times 10^{12}\ mi$$

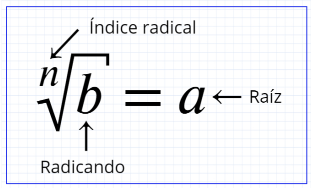
■

1.4. RADICALES

1.4.1. Introducción

Muchos problemas en las ciencias, los negocios o la ingeniería conducen a planteamientos como $s^2 = 25$ o $x^3 = 64$. Los números que satisfacen estas ecuaciones exponenciales se denominan **raíces**.

En esta sección repasaremos la definición y las propiedades de las **raíces n-ésimas principales** de un número real a, donde n es un entero positivo.



Definición 1.9. **Raíz n-ésima principal**

Supóngase que b es un número real y $n \geq 2$ es un entero positivo.

i. Si $b > 0$, entonces la **raíz n-ésima principal** $\sqrt[n]{b}$ es el número a positivo tal que $b = a^n$

ii. Si $b < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces la **raíz n-ésima principal** $\sqrt[n]{b}$ es un número b negativo tal que $b = a^n$

iii. Si $b < 0$ y n es un entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{b}$ no es un número real.

iv. Si $b = 0$, entonces $\sqrt[n]{b} = 0$

1.4.2. Terminología

Observe que hay dos raíces cuadradas de 25 porque

$$(-5)^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad 5^2 = 25$$

Por convención, el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada principal, que es un número real **no negativo**. Así, $\sqrt{25} = 5$

En general podríamos afirmar que

$$\sqrt[n]{b} = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^n = b$$

previas las consideraciones establecidas en la definición 1.9

Generalmente cuando el índice radical es $n = 2$ se omite del radical; por eso, escribimos $\sqrt{25}$ en lugar de $\sqrt[2]{25}$. Cuando $n = 2$, decimos que $\sqrt{x}$ es la **raíz cuadrada** de x y cuando $n = 3$, decimos que $\sqrt[3]{x}$ es la **raíz cúbica** de x. Si el índice n es un entero positivo impar, se puede demostrar que para cualquier valor de x hay exactamente una raíz n-ésima real de x. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

Si el índice n es un entero positivo par y x es positivo, entonces hay dos raíces reales n-ésimas de x. Sin embargo, el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz n-ésima positiva (principal); denotamos la raíz n-ésima negativa mediante $-\sqrt[n]{x}$. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{4} = -2$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad --\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3}$$

Si n es par y x es negativo, no hay raíz n-ésima real de x.

Ejemplo 24

Hallar

1. $\sqrt{100} = 10$ pues $10^2 = 100$
2. $\sqrt[3]{-64} = -4$ pues $(-4)^3 = -64$
3. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ pues $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

■

1.4.3. Propiedades de la radicación

Las propiedades siguientes se emplean frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

Teorema 1.9. **Leyes de los radicales**

Sean m y n enteros positivos, x y y números reales. Entonces

i. **Potencia n-ésima de la raíz n-ésima**

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

ii. **Raíz n-ésima de la potencia n-ésima**

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x|, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

iii. **Raíz de un producto**

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

iv. **Raíz de un cociente**

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

v. **Raíz de una raíz**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

siempre que los radicales representen números reales.

Nota: es muy común que se cometa el siguiente error

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 25

1. $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}} = \sqrt[21]{x^{21}} = x$

2. $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{|x|}{5}$

3. $\sqrt[3]{27y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{y^6} = \sqrt[3]{3^3}\,\sqrt[3]{(y^2)^3} = 3y^2$

4. $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{(3abc^2)^3 3b^2} = 3abc^2\,\sqrt[3]{3b^2}$

5. $\left(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{r}\right)^5 = \left(\sqrt[5]{rs}\right)^5 = rs$

■

Ejemplo 26

Simplificar

$$\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2$$

Solución

Aplicamos propiedades de los radicales

$$\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt{8x^3}}\right)^2 = \sqrt{8x^3}$$

■

Ejemplo 27

Simplificar

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{3a^2} \times 4\sqrt[3]{9ab^3}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los radicales

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{3a^2} \times 4\sqrt[3]{9ab^3} = \frac{12}{8}\sqrt[3]{3a^2 9ab^3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{27a^3b^3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{a^3}\,\sqrt[3]{b^3} = \frac{9}{2}ab$$

■

Ejemplo 28

Simplificar

$$\frac{\sqrt{48x^3y}}{4\sqrt{3xy^3}}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los radicales

$$\frac{\sqrt{48x^3y}}{4\sqrt{3xy^3}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{48x^3y}{3xy^3}} = \frac{1}{4}\sqrt{16x^2y^{-2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16x^2}{y^2}} = \frac{1}{4}\frac{4|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

■

Ejemplo 29

Simplificar

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los radicales

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}} = \sqrt{x-1}, \qquad x+1 \neq 0$$

■

1.4.4. Racionalización

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de una fracción, decimos que estamos **racionalizando**. En álgebra normalmente racionalizamos el denominador, pero en cálculo a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación de la fracción por 1 escrito en forma especial.

Caso 1: La expresión a racionalizar tiene un solo término.

Racionalizar el denominador

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Racionalizar el numerador

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{5} = \frac{\sqrt[3]{6}}{5}\frac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \frac{\sqrt[3]{6^3}}{5\sqrt[3]{36}} = \frac{6}{5\sqrt[3]{36}}$$

Caso 2. La expresión a racionalizar tiene dos términos que involucran raíces cuadradas. Si una fracción contiene una expresión como $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ y su conjugado $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ no contiene radicales, veamos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) =& \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\ =&\sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{y}\sqrt{y}\\ =&(\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - (-\sqrt{y})^2\\ =&x-y\end{aligned}$$

Ejemplo 30

Racionalice el denominador de

$$\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

Solución

$$\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

■

En general, para racionalizar una suma de raíces cuadradas, se debe multiplicar por la expresión conjugada, si es $a+b$, su conjugada será $a-b$.

Ejemplo 31

Racionalizar el denominador de

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

Solución

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2} = \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} = \sqrt{x}+\sqrt{a}$$

■

Ejemplo 32

Racionalizar el denominador de

$$\frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}} &= \frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}\,\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{2x-3})^2} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3})}{x+1-(2x-3)} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3})}{-x+4} \\
&= \frac{(x+5)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3})}{4-x}
\end{aligned}
$$

■

1.5. EXPONENTES RACIONALES

1.5.1. Introducción

El concepto de la raíz n-ésima de un número nos permite ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales; y, como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Definición 1.10. **Potencia racional de x**

Supóngase que x es un número real y que $n \geq 2$ es un número entero positivo.

i. Si $\sqrt[n]{x}$ existe, entonces

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

ii. Si $\sqrt[n]{x}$ existe y m es cualquier entero tal que m/n está en su expresión mínima, entonces

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt{x^m}\right)^n$$

Ejemplo 33

Evaluar

1. $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$
2. $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$

■

Ejemplo 34

Evaluar

1. $(0.09)^{5/2} = [(0.09)^{1/2}]^5 = (\sqrt{0.09})^5 = (\sqrt{0.3^2})^5 = (0.3)^5 = 0.00243$
2. $(-27)^{-4/3} = [(-27)^{1/3}]^{-4} = [\sqrt[3]{-27}]^{-4} = (-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$

■

Ejemplo 35

De acuerdo a la definición 1.10 se establece la igualdad

$$(125)^{2/3} = [(125)^{1/3}]^2 = [(125)^2]^{1/3}$$

Sin embargo observe que es más fácil evaluar la expresión mediante

$$[(125)^{1/3}]^2 = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$$

que mediante

$$[(125)^2]^{1/3} = \sqrt[3]{15625} = 25$$

Esta última operación podría requerir el uso de calculadora o la descomposición en factores primos de 15625. ■

Ejemplo 36

Compare los resultados en

1. $x^{m/n}$
2. $(x^m)^{1/n}$
3. $(x^{1/n})^m$

para $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$

Solución

Sustituimos en cada expresión y comparamos los resultados

1. $x^{m/n} = (-9)^{2/2} = (-9)^1 = -9$
2. $(x^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$
3. $(x^{1/n})^m = [(-9)^{1/2}]^2 = (\sqrt{-9})^2$, no es un número real.

■

1.5.2. Leyes de los exponentes racionales

Las leyes de los exponentes presentadas para los exponentes enteros en el teorema 1.8 también son verdaderas para los exponentes racionales.

Teorema 1.10. **Leyes de los exponentes racionales**

Sean a y b números reales y s y r números racionales. Entonces

i. **Producto de potencias de la misma base**

$$a^s a^r = a^{s+r}$$

ii. **Potencia de una potencia**

$$(a^s)^r = a^{sr}$$

iii. **Potencia de un producto**

$$(ab)^s = a^s b^s$$

iv. **Cociente de potencias de la misma base**

$$\frac{a^s}{a^s} = a^{s-r}$$

v. **Potencia de un cociente**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Siempre que cada expresión represente un número real.

Como veremos en los ejemplos próximos, estas leyes permiten simplificar expresiones algebraicas. Consideraremos que todas las variables, representan números positivos, de modo que todas las potencias racionales están definidas.

Ejemplo 37

Simplificar

1. $(3x^{1/2})(2x^{1/5}) = 6x^{1/2}x^{1/5} = 6x^{7/10}$

2. $(a^2b^{-8})^{1/4} = (a^2)^{1/4}(b^{-8})^{1/4} = a^{1/2}b^{-2} = \dfrac{a^{1/2}}{b^2}$

3. $\left(\dfrac{3x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 = \dfrac{(3x^{3/4})}{(y^{1/3})^3} = \dfrac{3^3x^{9/4}}{y} = \dfrac{27x^{9/4}}{y}$

■

Ejemplo 38

Simplifique

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$$

Solución

Aplicamos las propiedades de los exponentes

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right)\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \frac{50r^0}{s^{7/6}} = \frac{50}{s^{7/6}}$$

■

Ejemplo 39

Simplifique $(8000000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}}$

Solución

Escribimos los números en notación científica y usamos las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(8000000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}} =& (8\times 10^6)^{2/3}(1\times 10^{-4}r^8t^{12})^{1/4}\\ =& 8^{2/3}(10^6)^{2/3}(10^{-4})^{1/4}(r^8)^{1/4}(t^{12})^{1/4}\\ =& (\sqrt[3]{8})^2(10^4)(10^{-1})r^2t^3\\ =& 4\times 10^3r^2t^3\\ =& 4000r^2t^3\end{aligned}$$

■

1.6. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.6.1. Introducción

Una combinación de números, variables y signos de agrupación, con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, se denomina expresión algebraica (EA). Ya hemos usado expresiones algebraicas en las secciones anteriores. Los siguientes son ejemplos de EA

$$-2ab^2 + 5x - \sqrt{2}y^2, \qquad x^2y^3 + 6x^3y^3, \qquad \sqrt{3r+5s^2}, \qquad \frac{x+y}{x^2+2y}$$

Nota: expresiones como

$$\cos^2\theta; \quad \log_2(x+1); \quad e^{x^2}$$

se denominan expresiones trascendentes.

A veces una expresión algebraica representa un número real sólo para ciertos valores de una variable. Por ejemplo, al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables están restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama **dominio de la variable**. Por tanto, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

1.6.2. Términos en una EA

En una EA cada una de los bloques separados por un $+$ o un $-$ se denominan términos de la expresión. Cuando en una expresión aparecen radicales, cocientes o factores, estos se consideran como un solo término, veamos:

$$x^2 + \sqrt{x+y} \qquad \text{2 términos}$$

$$34xy + \frac{5x^2}{x^2+y^2} + 1 \qquad \text{3 términos}$$

$$(x+4)(x-3) + \sqrt[3]{x^2-2x} + \frac{1}{x+1} - 2x \qquad \text{4 términos}$$

Definamos ahora que son términos semejantes.

Definición 1.11. **Términos Semejantes**

Dos o más términos son semejantes si estos difieren solo en su coeficiente

Nota: dos términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Ejemplo 40

Determine cuáles de las siguientes expresiones son semejantes

$$4x^2y^3 \ \text{ y } \ -6x^2y^3; \qquad \frac{1}{2}mnp^{-1} \ \text{ y } \ 2nmp^{-1}; \qquad 4xy^2 \ \text{ y } \ -3x^2y$$

Solución

$$4x^2y^3; \qquad -6x^2y^3 \qquad \text{Términos semejantes}$$

$$\frac{1}{2}mnp^{-1}; \qquad 2nmp^{-1} \qquad \text{Términos semejantes}$$

$$4xy^2; \qquad -3x^2y \qquad \text{No son términos semejantes}$$

■

Reducción de términos semejantes

Cuando debemos simplificar varios términos en una EA debemos aplicar la **reducción de términos semejantes** usando la propiedad distributiva de los número reales.

Ejemplo 41

Reducir la expresión $84x^2y + 5x^2y$

Solución

$$84x^2y + 5x^2y = (84+5)x^2y = 89x^2y$$

■

Nota: Al reducir términos semejantes se operan los coeficientes y se deja la MISMA parte literal.

Ejemplo 42

Reducir las siguientes expresiones

1. $-3ab^2 - 14ab^2 - 5ab^2 = -22ab^2$
2. $18x^2y + 5xy^2 - 20x^2y - 4xy^2 + 3x^2y^2 = -2x^2y + xy^2 + 3x^2y^2$

■

Ejemplo 43

Suprimir los signos de agrupación y reducir términos semejantes

$$3x - (2xy - 3y^2) + \{y - [2xy - (x^2 + 3y) + 2y^2]\}$$

Solución

Aplicamos propiedades de los números reales.

$$\begin{aligned} 3x - (2xy - 3y^2) + \{y - [2xy - (x^2 + 3y) + 2y^2] &= 3x - 2xy + 3y^2 + \{y - [2xy - x^2 - 3y + 2y^2]\} \\ &= 3x - 2xy + 3y^2 + y - 2xy + x^2 + 3y - 2y^2 \\ &= 3x - 4xy + y^2 + 4y + x^2 \end{aligned}$$

■

1.6.3. Operaciones con Expresiones Algebraicas

Las expresiones algebraicas se pueden operar haciendo uso de las propiedades de los números reales, leyes de los exponentes y reducción de términos semejantes. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 44

Reduzca

1. $(4a^2 - 3b^2) - (7ab + b^2) - (5a^2 + 6ab + 10b^2)$

$$(4a^2 - 3b^2) - (7ab + b^2) - (5a^2 + 6ab + 10b^2) = 4a^2 - 3b^2 - 7ab - b^2 - 5a^2 - 6ab - 10b^2$$

$$= -a^2 - 14b^2 - 13ab$$

2. $3a^2b\left(\frac{1}{4}a^3bc^2 - 4ab^4c^3 + 8\right)$

$$3a^2b\left(\frac{1}{4}a^3bc^2 - 4ab^4c^3 + 8\right) = 3a^2b\left(\frac{1}{4}a^3bc^2\right) - 3a^2b(4ab^4c^3) + 3a^2b(8)$$

$$= \frac{3}{4}a^5b^2c^2 - 12a^3b^5c^3 + 24a^2b$$

3. $(a^2 + 2b)(3a^2 + 4b + 1)$

$$(a^2 + 2b)(3a^2 + 4b + 1) = 3a^4 + 4a^2b + a^2 + 6a^2b + 8b^2 + 2b$$

$$= 3a^4 + 10a^2b + a^2 + 8b^2 + 2b$$

4. $(9x^2 + 1)(x^2 - 3)(x^2 + 2x)$

$$(9x^2 + 1)(x^2 - 3)(x^2 + 2x) = (9x^4 - 27x^2 + x^2 - 3)(x^2 + 2x)$$

$$= (9x^4 - 26x^2 - 3)(x^2 + 2x) = 9x^6 + 18x^5 - 26x^4 - 52x^3 - 3x^2 - 6x$$

$\blacksquare$

1.6.4. Productos Notables

Existen algunos productos cuyos resultados se pueden determinar fácilmente siguiendo ciertas reglas y aparecen con mucha regularidad en nuestros cursos de matemáticas.

1. El cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

de donde

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una suma es: el cuadrado del primer término más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 45

Calcule

$$(3x^3 + 8y^4)^2$$

Solución

Aplicamos el producto notable

$$(3x^3 + 8y^4)^2 = (3x^3)^2 + 2(3x^3)(8y^4) + (8y^4)^2 = 9x^6 + 48x^3y^4 + 64y^8$$

$\blacksquare$

2. El cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es: el cuadrado del primer término menos dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 46

Expanda utilizando el producto notable anterior.

$$(3x^2y^3 - 9x^6y^2)^2$$

Solución

Usamos el cuadrado de una diferencia

$$\begin{aligned}(3x^2y^3 - 9x^6y^2)^2 &= (3x^2y^3)^2 - 2(3x^2y^3)(9x^6y^2) + (9x^6y^2)^2 \\ &= 9x^4y^6 - 54x^8y^5 + 81x^{12}y^4\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. El cubo de una suma

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

de donde

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término más 3 veces el cuadrado del primero por el segundo más tres veces el primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejemplo 47

Expandir usando el producto notable

$$(3m^2n^4 + 2mn^3)^3$$

Solución

Usamos el producto notable anterior

$$\begin{aligned}(3m^2n^4 + 2mn^3)^3 =& (3m^2n^4)^3 + 3(3m^2n^4)^2(2mn^3) + 3(3m^2n^4)(2mn^3)^2 + (2mn^3)^3\\ =& 27m^6n^{12} + 3(9m^4n^8)(2mn^3) + 3(3m^2n^4)(4m^2n^6) + 8m^3n^9\\ =& 27m^6n^{12} + 54m^5n^{11} + 36m^4n^{10} + 8m^3n^9\end{aligned}$$

■

4. El cubo de una diferencia

$$\begin{aligned}(a-b)^3 =& a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ =& a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

de donde

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo 48

Expandir

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 3y^{-1}\right)^3$$

Solución

Usamos el cubo de una diferencia

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x^2 - 3y^{-1}\right)^3 =& \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2(3y^{-1}) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)(3y^{-1})^2 - (3y^{-1})^3\\ =& \frac{1}{8}x^6 - \frac{9}{4}x^4y^{-1} + \frac{27}{2}x^2y^{-2} - 27y^{-3}\end{aligned}$$

■

5. Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ejemplo 49

Expandir usando el producto el notable

1. $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$
2. $(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2}) = y^2 - (\sqrt{2})^2 = y^2 - 2$
3. $\left(8xy + \frac{1}{3}x^2y\right)\left(8xy - \frac{1}{3}x^2y\right) = (8xy)^2 - \left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2 = 64x^2y^2 - \frac{1}{9}x^4y^2$

■

1.6.5. Polinomios

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales y vale la pena estudiarlas un poco más. Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma ax^n, donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama coeficiente del monomio y n se denomina el grado. Por ejemplo, $17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17 y la constante -5 es un monomio de grado 0.

La suma de dos monomios recibe el nombre de **binomio**. La suma de tres monomios se llama **trinomio**. Por ejemplo,

$$3x - 2 \qquad \text{y} \qquad x^3 + 6x$$

son binomios, mientras que

$$4x^2 - 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad 8x^4 + x^2 - 4x$$

son trinomios.

Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la definición siguiente.

Definición 1.12. **Polinomio**

Un **polinomio de grado** n **en la variable** x es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1, \ldots n$ son números reales.

La expresión anterior se llama **forma estánda**r de un polinomio; es decir, el polinomio se escribe en las potencias decrecientes de x. Por supuesto, no es necesario que todas las potencias estén presentes en un polinomio; algunos de los coeficientes pueden ser cero.

Puesto que un polinomio en x representa un número real para cualquier número real x, el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. Los monomios a_ix^i en el polinomio se llaman términos del polinomio, y el coeficiente a_n de la potencia más alta de x se llama coeficiente principal.

Ejemplo 50

Identificar grado y coeficiente principal de

$$-6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$$

Solución

En el polinomio el grado es 5 y el coeficiente principal es -6.

■

El número a_0 se llama **término independiente** y puede ser cero como en $6x^2 - x$. Además, un polinomio que tenga sólo el término independiente se dice que es de **grado cero**.

Los polinomios pueden clasificarse según sus grados, aunque al polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según se presenta en la tabla siguiente

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	2	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	2	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$x^n - 1$

En cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo

$$x^{-1} + x - 1 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2x^{1/2} + 6$$

no son polinomios, sin embargo

$$\frac{1}{3}x^2 + 4 \qquad \text{y} \qquad 0.5x^3 + \sqrt{6}x^2 - \pi x + 9$$

si son polinomios, pues sobre los coeficientes no hay restricciones y pueden ser números reales.

Ejemplo 51

Determine cuáles expresiones son polinomios. Si la expresión es polinomio indique grado y coeficiente principal.

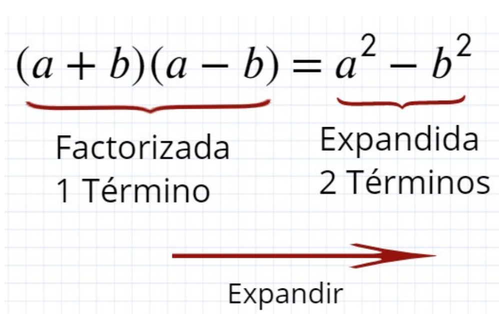
1. $x^2 + \sqrt{x} - 1$. No es polinomio
2. $\sqrt{2} - x + 3x^2 - 17x^8$. Si es polinomio, grado 8, coeficiente principal -17
3. $7x^5 - x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-2}$. No es polinomio
4. $x^4 - x^2$. Si es polinomio, grado 4, coeficiente principal 1

■

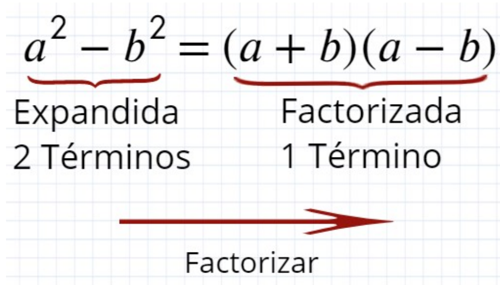
1.7. FACTORIZACION

1.7.1. Introducción

Expandir una expresión algebraica es usar las propiedades de los números reales y las operaciones entre expresiones para escribir ésta como una suma de varios términos.



El procedimiento inverso de la expansión es la **factorización**, el cual consiste en escribir una expresión algebraica como el producto de factores y en un sólo término.



Al factorizar, a veces podemos sustituir una expresión complicada por un producto de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x+1)(x-2)(x+3)$$

La factorización resulta muy útil para simplificar expresiones y es particularmente útil para resolver ecuaciones, como veremos más adelante.

Podríamos confundir una expresión que se encuentre factorizada con una que no, veamos un ejemplo.

Ejemplo 52

Observe las siguientes expresiones

$$(3x+2)(x-5) \qquad \text{Factorizada (un sólo término)}$$

$$(4x-1)(y+6)+(x+2) \qquad \text{No factorizada (dos términos)}$$

■

Ilustraremos a continuación los diferentes casos de factorización.

1.7.2. Factor común

En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

Un factor común es un factor que aparece en todos los **términos** de la expresión.

Ejemplo 53

Factorice

1. $2x^3 + 6x^2 - 10 = 2(x^3 + 3x^2 - 5)$
2. $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$
3. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$

■

Agrupación

Cuando los términos de una expresión no tienen un factor común, aún podrían factorizarse agrupando los términos de manera apropiada.

Ejemplo 54

Factorizar agrupando términos

1. $ac + bc + ad + bd(ac + bc) + (ad + bd) = c(a+b) + d(a+b) = (a+b)(c+d)$
2. $x^2 - a^2 + x - a^2x = (x^2 + x) + (-a^2 - a^2x) = x(x+1) - a^2(1+x) = (x+1)(x-a^2)$

■

1.7.3. Trinomio cuadrado perfecto

Sabemos que

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

Ahora bien

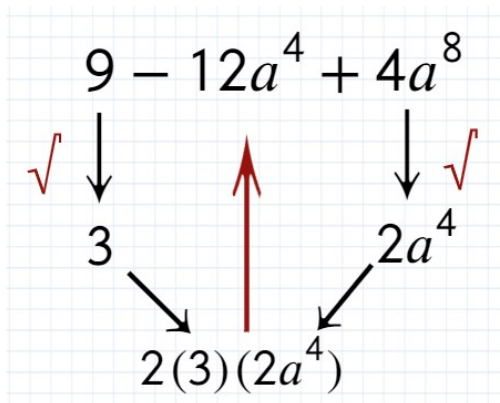
$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

La expresión $A^2 \pm 2AB + B^2$ se denomina un trinomio cuadrado perfecto y es el resultado de expandir el cuadrado de un binomio. Cómo determinar que un trinomio es cuadrado perfecto? Ilustremos el procedimiento con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 55

Factorizar

$$81 - 108a^4 + 36a^8 = 9(9 - 12a^4 + 4a^8) = 9(3 - 2a^4)^2$$



Para determinar si un trinomio es cuadrado perfecto primero ordenamos el polinomio, luego tomamos la raíz cuadrada del primero y del tercer término, si el término central coincide con el doble producto de las dos raíces anteriores, nuestra expresión será trinomio cuadrado perfecto.

■

Ejemplo 56

Factorizar

$$9a^2 + 30ab^2 + 25b^4$$

Solución

Nuestra expresión corresponde a un trinomio cuadrado perfecto. Por tanto

$$9a^2 + 30ab^2 + 25b^4 = (3a + 5b^2)^2$$

■

Ejemplo 57

Las siguientes expresiones también son trinomios cuadrados perfectos.

1. $2x^2 + 6\sqrt{2}xy + 9y^2 = (\sqrt{2}x + 3y)^2$
2. $x^4 + x^2y^2 + \dfrac{y^4}{4} = \left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{2}y^2\right)^2$

■

1.7.4. Diferencia de cuadrados

Sabemos que

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

Ahora bien

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

Ejemplo 58

Factorizar

1. $x^2-9=(x-3)(x+3)$
2. $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

∎

Ejemplo 59

Factorizar

$$z^8-w^8$$

Solución

Usamos la diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} z^8-w^8 =&(z^4-w^4)(z^4+w^4)\\ =&(z^2-w^2)(z^2+w^2)(z^4+w^4)\\ =&(z-w)(z+w)(z^2+w^2)(z^4+w^4) \end{aligned}$$

∎

Ejemplo 60

Factorizar

$$(3x+5)^2-(2x-1)^2$$

Solución

Factorizamos

$$\begin{aligned} (3x+5)^2-(2x-1)^2 =&[(3x+5)+(2x-1)][(3x+5)-(2x-1)]\\ =&[3x+5+2x-1][3x+5-2x+1]\\ =&(5x+4)(x+6) \end{aligned}$$

∎

Ejemplo 61

Factorizar

$$(x^2+2x+1)-(y^2+8y+16)$$

Solución

Procedemos así

$$\begin{aligned} (x^2+2x+1)-(y^2+8y+16) =&(x+1)^2-(y+4)^2\\ =&[(x+1)+(y+4)][(x+1)-(y+4)]\\ =&(x+1+y+4)(x+1-y-4)=(x+y+5)(x-y-3) \end{aligned}$$

∎

1.7.5. Suma y diferencia de cubos

Dos fórmulas más de factorización para polinomios cúbicos.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

La **suma de cubos** se factoriza así: raíz cúbica del primer termino más raiz cúbica del segundo término por el cuadrado del primer término menos el primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

La **diferencia de cubos** se factoriza así: raíz cúbica del primer termino menos raiz cúbica del segundo término por el cuadrado del primer término más el primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 62

Factorizar

1. $8a^3 + 27b^6 = (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$
2. $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

■

1.7.6. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Consideremos

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + (3 + 4)x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

Ahora bien, vamos a factorizar

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

Observe que $(4)(3) = 12$ y $4 + 3 = 7$.

En general

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n); \qquad mn = c \quad \text{y} \quad m + n = b$$

Notas:

1. En el primer paréntesis se ubica el signo del segundo término; en el segundo paréntesis se coloca el producto de los signos del segundo y tercer término.

2. Siempre ubicar el número más grande en el primer paréntesis.

Ejemplo 63

Factorizar

1. $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$
2. $x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$
3. $x^2 - 9x + 14 = (x - 7)(x - 2)$
4. $x^2 + 4x - 192 = (x + 16)(x - 12)$
5. $x^2 - 13x - 8 = (x-?)(x+?)$

■

Nota: El ejemplo 5 nos indica que no siempre es posible factorizar un trinomio en los números enteros.

Ejemplo 64

Factorizar completamente

$$x^4 - 8x^2 + 12$$

Solución

Aplicamos el caso de factorización anterior

$$\begin{aligned} x^4-8x^2+12 &= (\underbrace{x^2}_{y})^2-8(\underbrace{x^2}_{y})+12 \\ &= y^2-8y+12=(y-6)(y-2)=(x^2-6)(x^2-2) \\ &= (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

■

1.7.7. Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Ilustraremos este caso de factorización a través de un ejemplo.

Ejemplo 65

Factorizar

$$6x^2-5x-4$$

Solución

Buscamos dos números cuyo producto sea $(6)(-4)=-24$ y cuya suma sea -5. Los números son -8 y 3 y con ellos divido el término de la mitad y agrupo buscando factores comunes así

$$\begin{aligned} 6x^2-5x-4 &= 6x^2-8x+3x-4=(6x^2-8x)+(3x-4) \\ &= 2x(3x-4)+(3x-4)=(3x-4)(2x+1) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 66

Factorizar

$$2p^2+7p+5$$

Solución

Buscamos dos números cuyo producto sea 10 y cuya suma es 7; los números son 2 y 5

$$2p^2+7p+5=(2p^2+2p)+(5p+5)=2p(p+1)+5(p+1)=(p+1)(2p+5)$$

■

1.7.8. División de polinomios

División de monomios

El procedimiento se realiza de la siguiente forma

1. Ley de los signos como en el producto
2. Dividir los coeficientes
3. Buscamos bases iguales y restamos los exponentes

Ejemplo 67

Revolver

1. $a^6 \div a^2=\dfrac{a^6}{a^2}=a^{6-2}=a^4$
2. $\dfrac{-12x^8y^2z^5}{4x^5y^5z^3}=-3x^{8-5}y^{2-5}z^{5-3}=-3x^3y^{-3}z^2=\dfrac{-3x^3z^2}{y^3}$
3. $\dfrac{-5m^2n}{-2mn^3p^2}=\dfrac{5m}{2n^2p^2}$

■

División de un polinomio entre un monomio
Para realizar esta operación se divide cada término del numerador entre el denominador y se aplica el procedimiento antes descrito.

Ejemplo 68

Dividir

$$\frac{\frac{3}{4}x^5 - 5m^2 + x^{-2}m}{\frac{2}{3}x^2m^3}$$

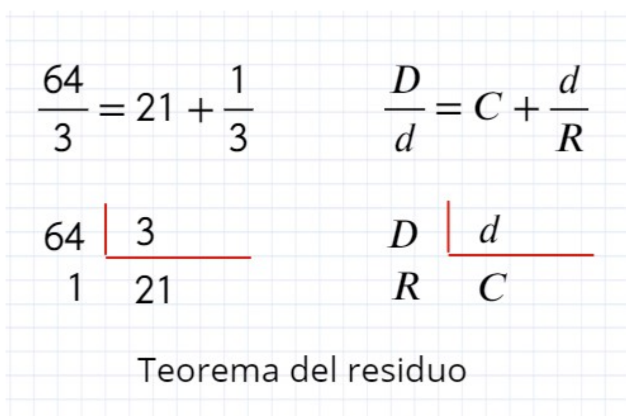
Solución

Procedemos así

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{4}x^5 - 5m^2 + x^{-2}m}{\frac{2}{3}x^2m^3} &= \frac{\frac{3}{4}x^5}{\frac{2}{3}x^2m^3} - \frac{5m^2}{\frac{2}{3}x^2m^3} + \frac{x^{-2}m}{\frac{2}{3}x^2m^3}\\ &= \frac{9x^3}{8m^3} - \frac{15}{2x^2m} + \frac{3}{2x^4m^2}\end{aligned}$$

■

División de polinomios (División larga)
Recordemos un poco acerca de la división



Para dividir dos polinomios se realizan los siguientes pasos:

1. Ordenar los polinomios descendentemente, dejando los espacios para aquellos términos que no aparezcan en el dividendo.
2. Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y colocar el resultado en el cociente.
3. Multiplico por cada término del divisor y resto de los términos correspondientes en el dividendo.
4. Vuelvo a repetir desde el paso 2 hasta que el grado del residuo sea más pequeño que el grado del divisor.

Ejemplo 69

$$\frac{6x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 10x + 1}{2x^2 + x + 4}$$

Solución

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +7x^3 & +12x^2 & +10x & +1 & 2x^2+x+4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & -3x^3 & -12x^2 & & & 3x^2+2x-1 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & & +10x & +1 & \\
 & -4x^3 & -2x^2 & -8x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +2x & +1 & \\
 & & 2x^2 & +x & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +5 &
\end{array}
$$

$$\frac{6x^4+7x^3+12x^2+10x+1}{2x^2+x+4} = 3x^2+2x-1+\frac{3x+5}{2x^2+x+4}$$

■

Ejercicio

Resolver

$$\frac{x^3}{x+1}$$

1.7.9. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas

$$\frac{3x^2+4a}{x+1}, \qquad \frac{\sqrt{x^3-1}+4x}{\sqrt[3]{x+7}}, \qquad \frac{\frac{1}{x^2}+\sqrt{3}x}{\frac{2}{x+5}}$$

Nota: suponemos en todas las expresiones que los denominadores son diferentes de cero.

Simplificación de fracciones

El principio fundamental para simplificar una fracción es la factorización

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B}{C}$$

$$\frac{A+B}{B} \neq A$$

Nota: solo se cancelan factores

Ejemplo 70

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$$

Solución

Factorizamos y luego cancelamos

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

Suponemos que $x-3 \neq 0$

■

Ejemplo 71

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{4x^2+7x}{x^2}$$

Solución

Factorizamos y cancelamos

$$\frac{4x^2+7x}{x^2}=\frac{x(4x+7)}{x^2}=\frac{4x+7}{x}, \qquad x\neq 0$$

■

Mínimo común denominador
Para sumar fracciones algebraicas estas deben tener el mismo denominador

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$$

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}\neq\frac{A+C}{B+B}=\frac{A+C}{2B}$$

$$\frac{A}{B}+\frac{A}{C}\neq\frac{A}{B+C}$$

Para sumar o restar expresiones racionales procedemos exactamente como cuando sumamos o restamos fracciones. Primero debemos hallar un común denominador. Aunque cualquier común denominador servirá, el trabajo será menor si usamos el **mínimo común denominador (mcd)**, el cual se encuentra mediante la factorización completa de cada denominador y la formación de un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto con el cual ocurra en cualquier denominador individual.

Ejemplo 72

$$\frac{2x-1}{x+3}+\frac{x^2}{3x-1}$$

Solución

Primero encontramos el mcd $(x+3)(3x-1)$. Igualamos los denominadores de ambas fracciones con el mcd

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+3}+\frac{x^2}{3x-1}&=\frac{(2x-1)(3x-1)}{(x+3)(3x-1)}+\frac{x^2(x+3)}{(3x-1)(x+3)}\\&=\frac{6x^2-2x-3x+1}{(x+3)(3x-1)}+\frac{x^3+3x^2}{(x+3)(3x-1)}\\&=\frac{x^3+9x^2-5x+1}{(x+3)(3x-1)}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 73

Realizar y simplificar

$$\frac{x}{x+3}+\frac{5x^2}{x^2-9}$$

Solución

Factorizo los denominadores

$$\frac{x}{x+3}+\frac{5x^2}{x^2-9}=\frac{x}{x+3}+\frac{5x^2}{(x-3)(x+3)}$$

el mcd de los denominadores $(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+3}+\frac{5x^2}{(x-3)(x+3)} =& \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}+\frac{5x^2}{(x-3)(x+3)}\\ =& \frac{x^2-3x+5x^2}{(x-3)(x+3)}=\frac{6x^2-3x}{(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 74

Realizar y simplificar

$$\frac{4}{x^2-3x-4}+\frac{3}{x^2-16}-\frac{7}{x^2+5x+4}$$

Solución

Factorizar los denominadores

$$\frac{4}{x^2-3x-4}+\frac{3}{x^2-16}-\frac{7}{x^2+5x+4}=\frac{4}{(x-4)(x+1)}+\frac{3}{(x-4)(x+4)}-\frac{7}{(x+4)(x+1)}$$

el mcd es $(x-4)(x+1)(x+4)$

$$\begin{aligned}&\frac{4}{(x-4)(x+1)}+\frac{3}{(x-4)(x+4)}-\frac{7}{(x+4)(x+1)}=\\ =&\frac{4(x+4)}{(x-4)(x+1)(x+4)}+\frac{3(x+1)}{(x+4)(x-4)(x+1)}-\frac{7(x-4)}{(x+4)(x+1)(x-4)}\\ =&\frac{4x+16+3x+3-7x+28}{(x-4)(x+1)(x+4)}\\ =&\frac{4x+16+3x+3-7x+28}{(x-4)(x+1)(x+4)}\\ =&\frac{47}{(x-4)(x+1)(x+4)}\end{aligned}$$

■

1.7.10. Multiplicación y división de fracciones

La multiplicación y la división de fracciones son operaciones más sencillas que la suma

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 75

Resolver y simplificar

$$\left(\frac{x^2-y^2}{4y}\right)\left(\frac{2y}{x+y}\right)$$

Solución

$$\left(\frac{x^2-y^2}{4y}\right)\left(\frac{2y}{x+y}\right)=\frac{(x^2-y^2)2y}{4y(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)2y}{4y(x+y)}=\frac{2y(x-y)}{4y}=\frac{x-y}{2}$$

■

Ejemplo 76

Resolver y simplificar

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \div \frac{x^2+1}{x+4}$$

Solución

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \div \frac{x^2+1}{x+4} = \frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \cdot \frac{x+4}{x^2+1} = \frac{(x^2+5x+6)(x+4)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{(x+3)(x+2)(x+4)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Como no hay factores comunes la expresión queda así.

■

Ejemplo 77

Resuelva y simplifique

$$\frac{\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{3x}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{3x}} &= \frac{\dfrac{2x-4-3x+9}{(x-3)(x-2)}}{\dfrac{x-5}{3x}} \\
&= \frac{\dfrac{-x+5}{(x-3)(x-2)}}{\dfrac{x-5}{3x}} \\
&= \frac{3x(-x+5)}{(x-3)(x-2)(x-5)} \\
&= \frac{-3x(x-5)}{(x-3)(x-2)(x-5)} \\
&= \frac{-3x}{(x-3)(x-2)}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio

Comprobar

$$\frac{r^3+8}{r^2+4r+4} \times \frac{r^2-2r}{8-2r-r^2} \div \frac{r^3-2r^2+4r}{r+4} = -\frac{1}{r+2}$$

Ejemplo 78

Combine

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$$

y simplifique la expresión resultante.

Solución

Primero encontramos el mcd y luego sumamos

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

Si lo deseamos, podemos racionalizar el denominador

$$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}}{xy}$$

■

El siguiente ejemplos ilustra cómo simplificar ciertos tipos de expresiones fraccionarias que se presentan en cálculo.

Ejemplo 79

Combine

$$(2x)(x-1)^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}x^2$$

y simplifique la expresión fraccionaria resultante.

Solución

Simplifiquemos

$$\begin{aligned}(2x)(x-1)^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}x^2 =& (2x)(x-1)^{1/2} + \frac{x^2}{(x-1)^{1/2}} \\ =& \frac{4x(x-1)}{2(x-1)^{1/2}} + \frac{x^2}{2(x-1)^{1/2}} \\ =& \frac{4x^2-4x+x^2}{2(x-1)^{1/2}} \\ =& \frac{5x^2-4x}{2(x-1)^{1/2}}\end{aligned}$$

■

EJERCICIOS UNIDAD 1

1. Clasifique los siguientes números de acuerdo a los conjuntos numéricos descritos en clase

   (a) $-\sqrt{4}$
   (b) $7.\underline{25}$
   (c) $\sqrt{7}$
   (d) π
   (e) $3-\dfrac{1}{2}$
   (f) $-e$
   (g) 16
   (h) $-\sqrt{8}+3$

2. **Matemáticas antiguas** El papiro Rhind (c. 1650 a.C.), adquirido por el egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind en 1858, se considera uno de los mejores ejemplos de las matemáticas egipcias. En él, los egipcios utilizaron $(\frac{16}{9})^2$ como valor de π. ¿Es la aproximación mayor o menor que π? Demuestre que el error al utilizar esta aproximación es menor que 1% de π

3. Explique: la suma de un número irracional y un número racional debe ser irracional

4. Explique: ¿la suma de dos números irracionales es necesariamente irracional? (De un ejemplo)

5. Simplifique las siguientes expresiones usando las propiedades de los números reales

   (a) $(-5)(-3)(-2)$
   (b) $-4(3-6)$
   (c) $2(x-y)+4x$
   (d) $5(7x-2y)-4(3y-2x)$
   (e) $x(-y)(-z)$
   (f) $(-2)(-x)(x+3)$
   (g) $x(-2)(-x-4)$
   (h) $-x(x-2)+2(x-1)$
   (i) $-2(-3x)(-2y+1)-(-y)(4-5x)$
   (j) $4[2(x+1)-3]$
   (k) $x[3(x-2)-2x+1]$
   (l) $(-3x)^{-1}(6+2x)$
   (m) $(-xy)^{-1}(2x-3y)$
   (n) $(xy)^{-1}(x+y)$

6. Evalúe cada una de las siguientes expresiones. Escriba las respuestas en los términos más simples.

   (a) $\left(\dfrac{14x}{15y}\right)\left(\dfrac{25y}{24}\right)$
   (b) $\left(\dfrac{14}{3}\right)\div\left(\dfrac{6}{15}\right)$
   (c) $\left(\dfrac{12}{25}\cdot\dfrac{15}{7}\right)\div\dfrac{20}{7}$
   (d) $(2x)\div\left(\dfrac{3xy}{5}\right)$
   (e) $\left(\dfrac{5x}{2}\cdot\dfrac{3y}{4}\right)\div\left(\dfrac{x^2y}{12}\right)$
   (f) $8xy\div\left(\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{2x}{5y}\right)$
   (g) $\left(\dfrac{2xt}{3}\div\dfrac{x}{4t}\right)\div\dfrac{2t}{3}$
   (h) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}$
   (i) $\dfrac{a}{6b}-\dfrac{a}{2b}$
   (j) $\dfrac{a}{6b}+\dfrac{2a}{9b}$

(k) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$

(l) $\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{2}\right)$

(m) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{5}\right)\div\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)$

(n) $\dfrac{7x-\dfrac{2x}{3}}{15y-\dfrac{y}{3}}$

(o) $\dfrac{\left(\dfrac{5p}{2q}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right)+\dfrac{p^2}{8q}}{4p+\dfrac{p}{12}}$

(p) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{2a}{3b}\right)\div\left(\dfrac{3x}{8}\div\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{4}\right)$

7. Evalúe cada expresión (en cada caso elimine el valor absoluto)

(a) $\left|\sqrt{5}-5\right|$

(b) $\left||-6|-|-4|\right|$

(c) $-1-\left|1-|-1|\right|$

(d) $|6.28-2\pi|$

(e) $|(-2)6|$

(f) $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$

(g) $\left|\dfrac{7-12}{12-7}\right|$

(h) $|\sqrt{7}-4.123|$

8. Escriba cada expresion sin usar el símbolo de valor absoluto

(a) $|-h|$ si h es negativo

(b) $|x-2|$ si $x>2$

(c) $|5-x|$ si $x<5$

(d) $|x-y|-|y-x|$

(e) $\dfrac{|x-y|}{|y-x|}$

(f) $\dfrac{z}{|-z|}$ con $z>0$

9. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a-b|\leq|a|+|b|$

10. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a-b|\geq|a|-|b|$

11. En los siguientes problemas, m es el punto medio del segmento de recta que une a a (el punto final a la izquierda) y b (el punto final de la derecha). Utilice las condiciones dadas para hallar los valores indicados

(a) $m=5$, $d(a,m)=3$; a, b

(b) $m=2$, $d(a,b)=7$; a, b

(c) $m=\sqrt{2}$, $d(a,b)=1$; a, b

(d) $a=4$, $d(a,m)=\pi$; b, m

(e) $b=-3$, $d(a,b)=\sqrt{2}$; a, m

(f) $b=-\dfrac{3}{2}$, $d(a,b)=\dfrac{1}{2}$; a, m

12. Evalúe cada expresión

(a) $2^{-1}-2^{1}$

(b) $\dfrac{2^{-2}}{3^{-3}}$

(c) $\dfrac{2^{-1}-3^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}}$

(d) $\dfrac{(-1)^5-2^6}{(-1)^{-1}}$

(e) $\dfrac{0^1}{1^0}$

(f) $\dfrac{(1-1)^0}{1^0}$

13. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo

(a) $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

(b) $\dfrac{35y^8x^5}{-21y^{-1}x^9}$

(c) $(4x^2y^{-1})^3$

(d) $\dfrac{-x^5(y^2)^3}{(xy)^2}$

(e) $\dfrac{(-4x^5y^{-2})^3}{x^7y^{-3}}$

(f) $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$

(g) $\left(\dfrac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1}$

(h) $(-x^2y^4)^3(x^3y^{-1})^2$

(i) $\dfrac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}$

(j) $(xy)^{-1}(x^{-1}+y^{-1})$

(k) $(a^{-2}+b^{-2})^{-1}$

(l) $\dfrac{(x^{-3}y^4)^3}{(-3x^2y^{-2})^2}$

(m) $\dfrac{75}{15}\,\dfrac{a^{-11}by^{-16}c^{-22}bc^2}{a^{-12}b^{-15}c^{-20}a}$

(n) $\dfrac{(2^3)(3^2)(4^4)(27^3)(25^2)}{(8^2)(9^2)(5^4)}$

14. Escriba los números dados en notación científica

(a) 1050000 y 0.0000105

(b) 341000000 y 0.00341

(c) 1200000000 y 0.000000000120

(d) 825600 y 0.0008256

15. Escriba los números dados en forma decimal

(a) 3.25×10^7 y 3.25×10^{-5}

(b) 4.02×10^{10} y 4.02×10^{-4}

(c) 9.87×10^{-17} y 9.87×10^{12}

(d) 1.423×10^5 y 1.423×10^{-4}

16. Use calculadora para realizar la operación. Escriba la respuesta en notación científica usando cinco dígitos significativos

(a) $(0.90324)(0.0005432)$

(b) $\dfrac{0.2315}{(5480)^2}$

(c) $(2.75 \times 10^3)(3.0 \times 10^{10})$

(d) $\dfrac{8.25 \times 10^{-12}}{3.01 \times 10^{12}}$

17. **Población** La estimación de la población de China en 2009 era de 133500000. Escriba esta cifra en notación científica.

18. **Población** Si la tasa de crecimiento anual promedio de la población de China es de 1.4%, use la información proporcionada en el problema anterior para calcular la población de China en 2010 y en 2020. Escriba sus respuestas en notación científica.

19. **PIB** El producto interno bruto (pib) es una medida básica de la producción económica total de un país. En octubre de 2009 se pronosticó que el pib de Estados Unidos ascendería a 14.261 billones de dólares. Escriba este número en forma decimal y en notación científica

20. **Velocidad promedio** El Pioneer 10, una sonda del espacio profundo, tardó 21 meses en viajar de Marte a Júpiter. Si la distancia de Marte a Júpiter es de 998 millones de kilómetros, calcule la velocidad promedio del Pioneer 10 en kilómetros por hora (suponga que hay 30.4 días en un mes).

21. Simplifique los siguientes radicales

(a) $\sqrt[5]{100000}$

(b) $\sqrt[4]{0.0001}$

(c) $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{16}}{16z^{18}}}$

(d) $\sqrt{8x^2yz^2}\sqrt{yzw}\sqrt{2zw^3}$

(e) $\sqrt[4]{16x^5}\,\sqrt[4]{2x^3y^4}$

(f) $\dfrac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{49a}\sqrt{7b^4}}$

(g) $\dfrac{\sqrt[4]{4xy}\,\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

(h) $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

(i) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}$

(j) $\sqrt{x^3\sqrt{(x^2y)^2}}$

(k) $(-\sqrt{xyz^5})^2$

(l) $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{-27x}{xy^3}}\right)^3$

(m) $\sqrt[4]{(-4r^2s^6)^2}$

(n) $\sqrt{\dfrac{-16x^2}{-8x^{-2}}}$

(o) $\sqrt[10]{x^{70}y^{20}z^{30}}$

(p) $\dfrac{a^3\sqrt[4]{ab}\sqrt{ab}b^3}{\sqrt[5]{a^2b^4}a^{-1/2}b^{3/2}}$

22. Racionalice el denominador de la expresión

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

23. Racionalice el numerador de la expresión

(a) $\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$

(b) $\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

(d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

24. **Satélite terrestre** Si un satélite da vueltas alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $r = 6.70 \times 10^6$ m, halle su velocidad v si $v = R\sqrt{g/r}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de nuestro planeta. Use los valores $R = 6.40 \times 10^6$ m y $g = 9.8$ m/s^2.

25. **Relatividad** De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a velocidad v es dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de $0.6c$ si su masa en reposo es 9.1×10^{-31} kg

26. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo

(a) $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{z^{-1/6}y^{2/3}}\right)^6$

(b) $\left(5x^{2/3}(x^{4/3})^{1/4}\right)^3$

(c) $\dfrac{(a^{-1/3}b^{2/9}c^{1/6})^9}{(a^{1/6}b^{-2/3})^6}$

(d) $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{3/10}}{x^{-2/5}y^{1/2}}\right)^{-10}$

(e) $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{x^{-3/2}}\right)\left(\dfrac{1}{4x}\right)^{-1/2}$

(f) $\left(\dfrac{-x^{1/2}y^{1/4}}{8x^2y^4}\right)^{1/3}$

27. Simplifique las siguientes expresiones

(a) $7\sqrt{450}-4\sqrt{320}+3\sqrt{80}-5\sqrt{800}$

(b) $\left(\dfrac{a+b}{c-d}\right)^3\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^2\left(\dfrac{c-d}{a+b}\right)^4$

(c) $3\sqrt[3]{108}+\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{625}+\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{1715}-4\sqrt[3]{32}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{5}$

(d) $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+(2a-2b)\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$

(e) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\,\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$

(f) $\left(x^{2/3}+2^{1/3}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$

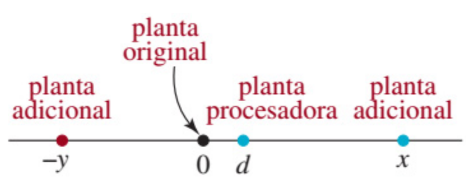
28. **Movimiento del péndulo** En un péndulo sencillo el periodo requerido para una oscilación completa es de aproximadamente $T\approx 2\pi(L/g)^{1/2}$, donde L es la longitud de la cuerda del péndulo y g es la constante gravitacional. Use una calculadora para aproximar el periodo de un péndulo con una cuerda de 10 pulgadas si el valor de g es de 32 ft/s^2.

29. **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados Celsius está dada por

$$v=\frac{1087(273+t)^{1/2}}{16.52}$$

Use una calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20 C

30. **Distancia de envío** Una compañía que poseía una planta manufacturera cerca de un río compró dos plantas manufactureras adicionales, una a x millas río arriba y la otra a y millas río abajo. Ahora la compañía desea construir una planta procesadora ubicada de manera que la distancia total para el embarque desde la planta procesadora hasta las tres plantas manufactureras sea mínima. Use la desigualdad triangular para demostrar que la planta procesadora debe construirse en el mismo sitio de la primera planta manufacturera. [Pista: piense que las plantas están situadas en 0, x e $-y$ en la recta numérica, vea la figura]. Mediante valores absolutos, halle una expresión para la distancia total de envío si la planta procesadora se coloca en el punto d.



31. **Lo que vendrá** Las computadoras futuras podrían ser fotónicas (es decir, que operan mediante señales de luz) más que electrónicas. La velocidad de la luz (3×10^{10} cm/s) será un factor limitante para el tamaño y la velocidad de tales computadoras. Suponga que una señal debe ir de un elemento de una computadora

fotónica a otro en un nanosegundo (1×10^{-9} s); ¿cuál es la distancia máxima posible entre estas dos computadoras? [Pista: ¿cuánto viaja la luz en un nanosegundo?]. Dé su repuesta en centímetros y en pulgadas (1 pulgada $\approx$ 2.5 cm).

32. **Cuadros de una película de cine** Una de las películas más largas jamás hechas es una película inglesa de 1970 que corre durante 48 horas. Suponiendo que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, aproxime el número total de cuadros de esta película. Exprese su respuesta en forma científica

33. **Población de ganado** Un ranchero tiene 750 cabezas de ganado formado por 400 adultos (de 2 años o más), 150 de un año y 200 becerros. La siguiente información se conoce acerca de esta especie particular. Cada primavera una hembra adulta tiene un solo becerro y 75% de estos becerros sobrevivirá el primer año. Los porcentajes anuales de supervivencia de animales de un año y de adultos es 80% y 90%, respectivamente. La proporción macho-hembra es uno en todas las clases de edad. Estime la población de cada clase de edad en la última primavera, en la siguiente primavera.

34. **Área de superficie corporal** El área de superficie corporal S de una persona (en pies cuadrados) se puede aproximar con
$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725}$$
donde la estatura h está en pulgadas y el peso w en libras

    (a) Estime S para una persona que mide 6 pies de alto y pesa 175 libras.

    (b) Si una persona mide 5 pies 6 pulgadas de estatura, ¿qué efecto tiene sobre S un aumento de 10% en el peso?