

# Grafika

Beke Ambrus

May 24, 2022

## Geometriák és algebrák

### Euklidészi síkgeometria

Pontok

Vektorok

Egyenes

- Paraméteres egyenlet
- Implicit egyenlet
- Távolság
- Szög

### Gömbi geometria

### Hiperbolikus geometria

### Poincaré diszk

### Projektív geometria

### Műveletek vektorokkal

- Összeadás
  - Eltolás
- Kivonás
  - $a-b \Rightarrow b$ -ből  $a$ -ba mutató vektor
- Skalárral való szorzás
  - Egyik vektor vetülete a másikra  $\cdot$  másik hossza
- Kereszt szorzat
  - Egyik vektor vetülete a másikra merőleges síkra
  - Sakktábla szabály

### Gradiens

Maximális növekedés iránya és rátája

Merőleges az irányvektorral

## Differenciál geometria

### Görbület

$$\frac{N \cdot r''}{r'^2}$$

# Geometriai modellezés

## Pontok definíciója

## Segítő műveletek

$$Távolság : |p - q|$$

$$Merőleges : p \cdot q = 0$$

$$Párhuzamos : p \times q = 0$$

$$Vetület : v^0 \cdot p$$

## Egyenes

Egyenes implicit egyenlete

$$n * (r \cdot p) = 0$$

$$n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

## Kör

Ugyanakkora távolság egy ponttól

$$|r - c| = R$$

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$$

## Ellipszis

Ugyanakkora legyen a távolság összege 2 ponttól (fókuszponttól)

$$|r - f_1| + |r - f_2| = C$$

## Hiperbola

Ugyanakkora legyen a távolság különbsége két ponttól

$$|r - f_1| - |r - f_2| = C$$

## Parabola

Azon pontok halmaza, amelynek a ponttól mér távolsága megegyezik egy egyenestől mért távolsággal

$$|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$$

## Kvadratikus görbék általános alakja

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 3a_{33}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Görbék

### Egyenes

- Parametrikus egyenlet
- Egy állandó sebességű mozgás

$$x(t) = x_0 + v_x t, y(t) = y_0 + v_y t, z(t) = z_0 + v_z t$$

Kör

$$x(t) = c_x + R \cos(t) y(t) = c_y + R \sin(t) t \in [0, 2\pi)$$

## Szabadformájú görbék

### Lagrange interpoláció

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$
$$r(t) = \sum_i L_i(t) r_i$$

### Hermite interpoláció

- nem csak helyet adunk meg hanem:
  - Sebesség ( $r'$ )
  - Gyorsulás ( $r''$ )
- Ami a számításhoz kell:
  - $t_i$  időpillanat
  - $p_i = r(t_i)$  pont
  - $v_i = \dot{r}(t_i)$  sebesség vektor
  - $t_{i+1}$  időpillanat
  - $p_{i+1} = r(t_{i+1})$  pont
  - $v_{i+1} = \dot{r}(t_{i+1})$  sebesség vektor

$$r(t) = a_3(t - t_i)^3 + a_2(t - t_i)^2 + a_1(t - t_i) + a_0$$

$$\dot{r}(t) = 3a_3(t - t_i)^2 + 2a_2(t - t_i) + a_1$$

$$r(t_i) = a_0 = p_i$$

$$r(t_{i+1}) = a_3(t_{i+1} - t_i)^3 + a_2(t_{i+1} - t_i)^2 + a_1(t_{i+1} - t_i) + a_0 = p_{i+1}$$

$$\dot{r}(t_i) = a_1 = v_i$$

$$\dot{r}(t_{i+1}) = 3a_3(t_{i+1} - t_i)^2 + 2a_2(t_{i+1} - t_i) + a_1 = v_{i+1}$$

Az egyenletek megoldása:

$$a_0 = p_i$$

$$a_1 = v_i$$

$$a_2 = \frac{3(p_{i+1} - p_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(v_{i+1} + 2v_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$a_3 = \frac{2(p_i - p_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(v_{i+1} - v_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2}$$

### Bezier approximáció

- $B_i(t)$  : ne oszcilláljon

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) r_i$$

### Catmull-Rom spline

$$v_i = \frac{1}{2} \left( \frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

### Felületek

- Explicit:  $z = h(x, y)$  (magasságmező)
- Implicit:  $f(x, y, z) = 0$

- Gömb
  - \*  $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$
- Sík
  - \*  $ax + by + cz + d = 0$
- Parametrikus
  - $x = x(u, v)$
  - $y = y(u, v)$
  - $z = z(u, v)$
  - Gömb:
    - \*  $x(u, v) = c_x + R \cos(u) \sin(v)$
    - \*  $y(u, v) = c_y + R \sin(u) \sin(v)$
    - \*  $z(u, v) = c_z + R \cos(v)$
    - \*  $u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi)$
    - \*

### Implicit felületek

**Gömb**  $|r - c| = R$

**Henger**  $|r - (p + v^0 \cdot ((r - p) \cdot v^0))| = R$

**Ellipszoid**  $|r - f_1| + |r - f_2| = C$

**Hiperboloid**  $|r - f_1| - |r - f_2| = C$

**Paraboloid**  $|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$

### Általános kvadratikus alak

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Transzformációk

Affin transzformáció - Párhuzamost is egyenest tartó - Eltolás, elforgatás, nyújtás, nyírás, tükrözés

Minden ilyen transzformáció kifejezhető egy mátrix szorzással, amelyben a sorok rendre a bázisvektorok és az origó:

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} i'_x & i'_y & 0 \\ j'_x & j'_y & 0 \\ o'_x & o'_y & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

### 2D forgatás

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

### 3D eltolás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

## 3D skálázás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

## Projektív sík

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

### Euklidészi pont

$$(x, y) \Rightarrow [x, y, 1]$$

### Homogén pont

$$(x, y) \Rightarrow [x \cdot w, y \cdot w, w] = [X, Y, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

### Projektív egyenes

- Euklideszi egyenes, Descartes koords
  - $n_x x + n_y y + c = 0$
- Euklideszi egyenes, homogén koords
  - $n_x \frac{X}{w} + n_y \frac{Y}{w} + c = 0$
- Euklideszi egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0, w \neq 0$
- Projektív egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0$
- Projektív egyenes mátrixokkal:
  - $[X, Y, w] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ c \end{bmatrix} = 0$

### Metszés és illeszkedés

- Pontokra illeszthető egyenes
  - $p_1 \times p_2$
- Egyenesek metszéspontja
  - $l_1 \times l_2$
- p ponton átmenő L egyenesre merőleges
  - $p \times L$

## Projektív tér

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

### Euklidészi pont

$$(x, y, z) \Rightarrow [x, y, z, 1]$$

## Homogén pont

$$(x, y) => [x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w] = [X, Y, Z, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, z = \frac{Z}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, Z, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

## Egyenes paraméteres egyenlete

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, Z_2, w_2]t$$

## Sík implicit egyenlete:

$$n_x X + n_y Y + n_z Z + dw = 0$$

## Középpontos vetítés

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z, z/d]$$

És innen homogén osztással megkaphatjuk a descartes koordinátákat

## Kvaterniók

$$q = [s, x, y, z] = [s, d] = s + xi + yj + zk$$

Gyakorlatilag egy 4 dimenziós vektor

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- $ij = k$
- $ji = -k$
- $jk = i$
- $kj = -i$
- $ki = j$
- $ik = -j$

$$\text{Szorzás} - [s_1, d_1] \cdot [s_2, d_2] = [s_1 s_2 - d_1 d_2, s_1 d_2 + s_2 d_1 + d_1 \times d_2]$$

$$\text{Inverz} - q^{-1} = \frac{[s, -d]}{|q|^2}$$

$$\text{Forgatás} - q = [\cos(\alpha/2), d \sin(\alpha/2)], |d| = 1 - q \cdot [0, u] \cdot q^{-1} = [0, v] - v, \text{ az } u \text{ elforgatottja a } d \text{ körül } \alpha \text{-val}$$

Pont:

$$z_p = x_p + y_p i = Re^{i\alpha} = R \cos \alpha + i R \sin \alpha$$

- Eltolás:

$$- z'_p = z_p + z_t$$

- Skálázás:

$$- z_s = s, z'_p \cdot z_s$$

- Forgatva nyújtás

$$- z'_p \cdot z_s$$

## 2D képszintézis

1. Referencia helyzet
2. Vektorizálás
  1. Ponttal szakaszokkal és háromszögekkel közelítünk
3. Modellezési transzformáció
  1. Világ koordináta rendszer
  2. Elviszi a saját helyére az alkazatot
  3. Itt van az ablak is amit innentől kezdve viszünk magunkkal
4. Kamera transzformáció
  1.  $(-1,-1)(1,1)$  sarokpontba tarszformáljuk a kamerát és minden mást is vele
  2. normalizált eszközkordinátarendszer / vágási koordináta rendszer
5. Vágás
6. nézeti transzformáció
  1. Átmegyünk fizikai képernyő koordináta rendszer
  2. Figyeleme vesszük a képernyő tényleges méretét
7. Raszterizáció
  1. Melyik pixeleket kell beszínezni