Grafika

Beke Ambrus

May 24, 2022

\begin{multicols}{2} # Geometriák és algebrák

Görék görbülete

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Főgörbületi irányok

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = a_{min} \cdot a_{max}$$

Vektroalgebra

Összeadás

Eltolás

$$v = v_1 + v_2(kom, asszoc)$$

Kivonás

Egyik vektorból a másikba mutató vektor

$$v = v_1 - v_2$$

Skálázás

$$v_1 = \alpha v(dist)$$

Skalár szorzat

Egyik vetkor vetülete a másikra * másik hossza

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1||v_2|cos(\alpha)$$

Metrika

- $v \cdot v = |v|^2$
- $|v| = \sqrt{v \cdot v}$
- $v^0 = v/\sqrt{v \cdot v}$
- $v_1 \cdot v_2/|v_1||v_2| = cos(\alpha)$
- Ha két vektor merőleges, a skalárszorzatuk nulla
- Egyik vetkor vetülete a másikra * másik hossza

Vektor kereszt szorzat

Egyik vektor vetülete a másikra merőleges síkra
Sakktábla szabály

$$|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2|sin(\alpha)$$

- Nem asszociatív
- Disztributív

$$v_1 \times v_2 = (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) \times (x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) =$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)e_1 - (z_2x_1 - z_1x_2)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 =$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Gradiens

Maximális növekedés iránya és rátája
Merőleges az irányvektorral

Differenciál geometria

Síkgörbék érintője

T^0 Érintő egység vektor
N^0 Normál egységvektor
$(N_x, N_y) = (-T_y, T_x)$ A két vektor merőleges egymásra

Görbület

$$\frac{N * r''}{r'^2}$$

Paraméteres felületek normálvektora

$$N(U,V) = \frac{\delta r(u,v)}{\delta u} \times \frac{\delta r(u,v)}{\delta v}$$

I. fundamentális forma

Mekkorát lépünk a skon, ha u Δu-val és v Δv-vel változik?

$$\Delta s^2 = \Delta s \cdot \Delta s = r_u'^2 \Delta u^2 + 2r_u' \cdot r_v' \Delta u \Delta v + r_v'^2 \Delta v^2$$

$$\Delta s^2 = [\Delta u \Delta v] \begin{bmatrix} r_u' \cdot r_u' & r_u' \cdot r_v' \\ r_u' \cdot r_v' & r_v' \cdot r_v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

II. Fundametális forma

Mennyire távolodunk a síktól, ha u Δu-val és v Δv-vel változik?

$$h(\Delta u, \Delta v) = \frac{1}{2}[\Delta u \Delta v] \begin{bmatrix} N \cdot r_{uu}'' & N \cdot r_{uv}'' \\ N \cdot r_{uv}'' & N \cdot r_{vv}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

Geometriai modellezés

Pontok definíciója

Segítő műveletek

$$Távolság : |p - q|$$
$$Merőleges : p \cdot q = 0$$
$$Párhuzamos : p \times q = 0$$
$$Vetület : v^0 \cdot p$$

Egyenes

Egyenes implicit egyenlete

$$n * (r \cdot p) = 0$$
$$n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) = 0$$
$$ax + by + c = 0$$

Kör

Ugyanakkora távolság egy ponttól

$$|r - c| = R$$
$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$$

Ellipszis

Ugyanakkora legyen a távolság összege 2 ponttól (fókuszponttól)

$$|r - f_1| + |r - f_2| = C$$

Hiperbola

Ugyanakkora legyen a távolság külöbsége két ponttól

$$|r - f_1| - |r - f_2| = C$$

Parabola

Azon pontok halamaza, amelynek a ponttól mér távolsága megyezik egy egyenestől mért távolsággal

$$|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$$

Kvadratikus görbék álltalános alakja

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 3a_{33}$$
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Görbék

Egyenes

- Parametrikus egyenlet
- Egy állandó sebességű mozgás

$$x(t) = x_0 + v_x t y(t) = y_0 + v_y t z(t) = z_0 + v_z t$$

Kör

$$x(t) = c_x + Rcos(t)y(t) = c_y + Rsin(t)t \in [0, 2\pi)$$

Szabadformájú görbék

Lagrange interpoláió

$$L_i(t) = \frac{\prod_{i \neq j}(t - t_j)}{\prod_{i \neq j}(t_i - t_j)}$$

$$r(t) = \sum_i L_i(t) r_i$$

Hermite interpoláció

- Nem csak helyet adunk meg hanem:
  - Sebesség (r’)
  - Gyorsulás (r’ ’)
- Ami a számításhoz kell:
  - t_i időpillanat
  - $p_i = r(t_i)$ pont
  - $v_i = \dot{r}(t_i)$ sebesség vektor
  - t_{i+1} időpillanat
  - $p_{i+1} = r(t_{i+1})$ pont
  - $v_{i+1} = \dot{r}(t_{i+1})$ sebesség vektor

$r(t) = a_3(t - t_i)^3 + a_2(t - t_i)^2 + a_1(t - t_i) + a_0$
$\dot{r}(t) = 3a_3(t - t_i)^2 + 2a_2(t - t_i) + a_1$

$r(t_i) = a_0 = p_i$
$r(t_i + 1) = a_3(t_{i+1} - t_i)^3 + a_2(t_{i+1} - t_i)^2 + a_1(t_{i+1} - t_i) + a_0 = p_{i+1}$
$\dot{r}(t_i) = a_1 = v_i$
$\dot{r}(t_i + 1) = 3a_3(t_{i+1} - t_i)^2 + 2a_2(t_{i+i} - t_i) + a_1 = v_{i+1}$

Az egyenletek megoldása:
$a_0 = p_i$
$a_1 = v_i$
$a_2 = \frac{3(p_{i+1} - p_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(v_{i+1} + 2v_i)}{t_{i+1} - t_i}$
$a_3 = \frac{2(p_i - p_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(v_{i+1} + v_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2}$

Bezier approximácio

- $B_i(t)$: ne oszcilláljon

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i(t) r_i$$

Catmull-Rom spline

$$v_i = \frac{1}{2}\left(\frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)$$

Felületek

- Explicit: $z = h(x, y)$ (magasságmező)

- Implicit: $f(x, y, z) = 0$

- Gömb
  - $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$
- Sík
  - $ax + by + cz + d = 0$

- Parametrikus
  - $x = x(u, v)$
  - $y = y(u, v)$
  - $z = z(u, v)$
  - Gömb:
    - $x(u, v) = c_x + Rcos(u)sin(v)$
    - $y(u, v) = c_y + Rsin(u)sin(v)$
    - $z(u, v) = c_z + Rcos(v)$
    - $u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi)$
    -

Implicit felületek

Gömb $|r - c| = R$

Henger $|r - (p + v^0 \cdot ((r - p) \cdot v^0))|$=R

Ellipszoid $|r - f_1| + |r - f_2| = C$

Hiperboloid $|r - f_1| - |r - f_2| = C$

Paraboloid $|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$

Álltalános kvadratikus alak

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1]Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transzformációk

Affin transzformáció - Párhuzamost ls egyenest tartó - Eltolás, elforgatás,nyújtás, nyírás, tükrözés

Minden ilyen transzformáció kifejezhető egy mátrix szorzással, amelyben a sorok rendre a bázisvektorok és az origo:

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} i'_x & i'_y & 0 \\ j'_x & j'_y & 0 \\ o'_x & o'_y & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

2D forgatás

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ -sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

3D eltolás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

3D skálázás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

Projektív sík

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

Euklidészi pont

$$(x, y) => [x, y, 1]$$

Homogén pont

$$(x, y) => [x \cdot w, y \cdot w, w] = [X, Y, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

Projektív egyenes

- Euklideszi egyenes, Descartes koords
  - $n_x x + n_y y + c = 0$
- Euklideszi egyenes, homogén koords
  - $n_x \frac{X}{w} + n_y \frac{Y}{w} + c = 0$
- Euklideszi egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0, w \neq 0$
- Projektív egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0$
- Projektív egyenes mátrixokkal:
  - $[X, Y, w] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ c \end{bmatrix} = 0$

Metszés és illeszkedés

- Pontokra illeszthető egyenes
  - $p_1 \times p_2$
- Egyenesek metszéspontja
  - $l_1 \times l_2$
- p ponton átmenő L egyenesre merőleges
  - $p \times L$

Projektív tér

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

Euklidészi pont

$$(x, y, z) => [x, y, z, 1]$$

Homogén pont

$$(x, y) => [x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w] = [X, Y, Z, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, z = \frac{Z}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, Z, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

Egyenes paraméteres egyenlete

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, Z_2, w_2]t$$

Sík implicit egyenlete:

$$n_x X + n_y Y + n_z Z + dw = 0$$

Középpontos vetítés

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z, z/d]$$

És innen homogén osztással megkaphatjuk a descartes koordinátákat

Kvaterniók

$q = [s, x, y, z] = [s, d] = s + xi + yj + zk$
Gyakorlatilag egy 4 dimenziós vektor
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- $ij = k$
- $ji = -k$
- $jk = i$
- $kj = -i$
- $ki = j$
- $ik = -j$

Szorzás - $[s_1, d_1] \cdot [s_2, d_2] = [s_1 s_2 - d_1 d_2, s_1 d_2 + s_2 d_1 + d_1 \times d_2]$

Inverz - $q^{-1} = \frac{[s, -d]}{|q|2}$

Forgatás - $q = [cos(\alpha/2), dsin(\alpha/2)], |d| = 1$ - $q \cdot [0, u] \cdot q^{-1} = [0, v]$ - v, az u elforgatottja a d körül alpha-val

Pont
- $z_p = x_p + y_p i = Re^{i\alpha} = Rcos\alpha + iRsin\alpha$

Műveletek

- Eltolás:

- $z_p' = z_p + z_t$

- Skálázás:
  - $z_s = s, z_p' \cdot z_s$

- Forgatva nyújtás
  - $z_p' \cdot z_s$

2D képszintézis

1. Referencia helyzet
2. Vektorizálás
   1. Ponttal szakaszokkal és háromszögekkel közelítünk
3. Modellezési transzformáció (M)
   1. Világ koordináta rendszer
   2. Elviszi a saját helyére az alkazatot
   3. Itt van az ablak is amit innentől kezdve viszünk magunkkal
4. Kamera transzformáció (VP)
   1. (-1,-1)(1,1) sarokpontba tarszformáljuk a kamerát és minden mást is vele
   2. normalizált eszközkoordinátarendszer / vágási koordináta rendszer
5. Vágás
6. nézeti transzformáció
   1. Átmegyünk fizikai képernyő koordináta rendszer
   2. Figyeleme vesszük a képernyő tényleges méretét
7. Raszterizáció
   1. Melyik pixeleket kell beszínezni

Vektorizáció

Görbék

Diszkrét pontokra vizsgáljuk a pontok helyét

Sokszögek

Minden 4+ csúcsú ***egyszerű*** sokszögnek van diagonálja, azaz mindegyik felbontható diagonálok mentén.

Fülek Ha p_i fül, ha $p_{i-1} <-> p_{i+1}$ diagonál
Szakasz - szakasz metszéssel vizsgálható, h diagonál-e

Modell

Beállítjuk az éppen vizsgűált objektum helyét orientációját és nagyságát, a korábban már említett, forgatés, eltolás, skálázás műveletekkel.

View transzformáció

A (c_x, c_y) középpontú kamera ablakot és minden mást az origo-ba transzformálunk.

$$[x_{world}, y_{world}, z_{world}, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_x & -c_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_{cam}, y_{cam}, z_{cam}, 1]$$

Projekció

A (w_x, w_y)oldalhosszúságú ablak ra illesztjük a kamera nézetünket, így kapjuk a normalizált eszköz koordináta nézetet (ndc)

$$[x_{cam}, y_{cam}, z_{cam}, 1] \begin{bmatrix} 2/w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/w_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]$$

Vágás

Félsíkokra vágunk az ablak mind a 4 oldalán.
Vágás homogén koordinátákkal:

$-1 < x = X/w < 1$
$-1 < y = Y/w < 1$
$-1 < z = Z/w < 1$

HA $w > 0$
$-w < X < w$
$-w < Y < w$
$-w < Z < w$

HA $w < 0$
$-w > X > w$
$-w > Y > w$
$-w > Z > w$

Viewport transzmormáció

1. Eltolunk $(0, 0)$ és $(2, 2)$-be
2. Skálázunk a kívánt ablakméretre
3. Osztunk 2 vel
4. Eltolunk a végleges helyre az ablakon

$x_{pix} = v_w(x_{ndc} + 1)/2 + v_x$
$y_{pix} = v_h(y_{ndc} + 1)/2 + v_y$
$z_{pix} = (z_{ndc} + 1)/2$

Raszterizáció

Pixelekkel való közelítés

Szakasz effektív rajzolás:
$y(x) = mx + b = y(x - 1) + m$

Háromszög raszterizálás - Pásztázunk - mekgeressük a beléő meg a kiléő pontot - közöttük színezzük a háromszöget

OpenGL

1. Virtuális világ
2. Vektorizáljuk
3. Modell T
4. View T (kamera)
5. Projekció T (kamera)
6. Vágás
7. ViewPort T
8. Raszterizálás
9. Pixel feldolgozá (fragment shader)
10. Rasztertár

\begin{multicols}