

# Grafika

Beke Ambrus

May 24, 2022

## Geometriák és algebrák

### Görék görbülete

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Főgörbületi irányok

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = a_{min} \cdot a_{max}$$

### Vektroalgebra

#### Összeadás

Eltolás

$$v = v_1 + v_2 (kom, asszoc)$$

#### Kivonás

Egyik vektorból a másikba mutató vektor

$$v = v_1 - v_2$$

#### Skálázás

$$v_1 = \alpha v (dist)$$

#### Skalár szorzat

Egyik vektor vetülete a másikra \* másik hossza

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| |v_2| \cos(\alpha)$$

#### Metrika

- $v \cdot v = |v|^2$
- $|v| = \sqrt{v \cdot v}$
- $v^0 = v / \sqrt{v \cdot v}$
- $v_1 \cdot v_2 / |v_1| |v_2| = \cos(\alpha)$
- Ha két vektor merőleges, a skalárszorzatuk nulla
- Egyik vektor vetülete a másikra \* másik hossza

## Vektor keresztszorzat

Egyik vektor vetülete a másikra merőleges síkra  
Sakktábla szabály

$$|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2|\sin(\alpha)$$

- Nem asszociatív
- Disztributív

$$v_1 \times v_2 = (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) \times (x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) =$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)e_1 - (z_2x_1 - z_1x_2)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 =$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

## Gradiens

Maximális növekedés iránya és rátája  
Merőleges az irányvektorral

## Differenciál geometria

### Síkgörbék érintője

$T^0$  Érintő egységvektor

$N^0$  Normál egységvektor

$(N_x, N_y) = (-T_y, T_x)$  A két vektor merőleges egymásra

### Görbület

$$\frac{N * r''}{r'^2}$$

### Paraméteres felületek normálvektora

$$N(U, V) = \frac{\delta r(u, v)}{\delta u} \times \frac{\delta r(u, v)}{\delta v}$$

## I. fundamentális forma

Mekkora lépünk a skon, ha  $u$   $\Delta u$ -val és  $v$   $\Delta v$ -vel változik?

$$\Delta s^2 = \Delta s \cdot \Delta s = r_u'^2 \Delta u^2 + 2r_u' \cdot r_v' \Delta u \Delta v + r_v'^2 \Delta v^2$$

$$\Delta s^2 = [\Delta u \Delta v] \begin{bmatrix} r_u' \cdot r_u' & r_u' \cdot r_v' \\ r_v' \cdot r_u' & r_v' \cdot r_v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

## II. Fundametális forma

Mennyire távolodunk a síktól, ha  $u$   $\Delta u$ -val és  $v$   $\Delta v$ -vel változik?

$$h(\Delta u, \Delta v) = \frac{1}{2} [\Delta u \Delta v] \begin{bmatrix} N \cdot r_{uu}'' & N \cdot r_{uv}'' \\ N \cdot r_{uv}'' & N \cdot r_{vv}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

## Görbület

$$S = II \cdot I^{-1}$$

## Geometriai modellezés

### Pontok definíciója

### Segítő műveletek

$$Távolság : |p - q|$$

$$Merőleges : p \cdot q = 0$$

$$Párhuzamos : p \times q = 0$$

$$Vetület : v^0 \cdot p$$

### Egyenes

Egyenes implicit egyenlete

$$n * (r \cdot p) = 0$$

$$n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

### Kör

Ugyanakkora távolság egy ponttól

$$|r - c| = R$$

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$$

### Ellipszis

Ugyanakkora legyen a távolság összege 2 ponttól (fókuszponttól)

$$|r - f_1| + |r - f_2| = C$$

### Hiperbola

Ugyanakkora legyen a távolság különbsége két ponttól

$$|r - f_1| - |r - f_2| = C$$

### Parabola

Azon pontok halmaza, amelynek a ponttól mér távolsága megegyezik egy egyenestől mért távolsággal

$$|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$$

### Kvadratikus görbék általános alakja

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 3a_{33}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Görbék

### Egyenes

- Parametrikus egyenlet
- Egy állandó sebességű mozgás

$$x(t) = x_0 + v_x t, y(t) = y_0 + v_y t, z(t) = z_0 + v_z t$$

### Kör

$$x(t) = c_x + R \cos(t), y(t) = c_y + R \sin(t), t \in [0, 2\pi)$$

## Szabadformájú görbék

### Lagrange interpoláció

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$
$$r(t) = \sum_i L_i(t) r_i$$

### Hermite interpoláció

- Nem csak helyet adunk meg hanem:
  - Sebesség ( $r'$ )
  - Gyorsulás ( $r''$ )
- Ami a számításhoz kell:
  - $t_i$  időpillanat
  - $p_i = r(t_i)$  pont
  - $v_i = \dot{r}(t_i)$  sebesség vektor
  - $t_{i+1}$  időpillanat
  - $p_{i+1} = r(t_{i+1})$  pont
  - $v_{i+1} = \dot{r}(t_{i+1})$  sebesség vektor

$$r(t) = a_3(t - t_i)^3 + a_2(t - t_i)^2 + a_1(t - t_i) + a_0$$

$$\dot{r}(t) = 3a_3(t - t_i)^2 + 2a_2(t - t_i) + a_1$$

$$r(t_i) = a_0 = p_i$$

$$r(t_{i+1}) = a_3(t_{i+1} - t_i)^3 + a_2(t_{i+1} - t_i)^2 + a_1(t_{i+1} - t_i) + a_0 = p_{i+1}$$

$$\dot{r}(t_i) = a_1 = v_i$$

$$\dot{r}(t_{i+1}) = 3a_3(t_{i+1} - t_i)^2 + 2a_2(t_{i+1} - t_i) + a_1 = v_{i+1}$$

Az egyenletek megoldása:

$$a_0 = p_i$$

$$a_1 = v_i$$

$$a_2 = \frac{3(p_{i+1} - p_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(v_{i+1} + 2v_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$a_3 = \frac{2(p_i - p_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(v_{i+1} - v_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2}$$

### Bezier approximáció

- $B_i(t)$  : ne oszcilláljon

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) r_i$$

## Catmull-Rom spline

$$v_i = \frac{1}{2} \left( \frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

## Felületek

- Explicit:  $z = h(x, y)$  (magasságmező)
- Implicit:  $f(x, y, z) = 0$ 
  - Gömb
    - \*  $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$
  - Sík
    - \*  $ax + by + cz + d = 0$
- Parametrikus
  - $x = x(u, v)$
  - $y = y(u, v)$
  - $z = z(u, v)$
  - Gömb:
    - \*  $x(u, v) = c_x + R \cos(u) \sin(v)$
    - \*  $y(u, v) = c_y + R \sin(u) \sin(v)$
    - \*  $z(u, v) = c_z + R \cos(v)$
    - \*  $u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi)$
    - \*

### Implicit felületek

**Gömb**  $|r - c| = R$

**Henger**  $|r - (p + v^0 \cdot ((r - p) \cdot v^0))| = R$

**Ellipszoid**  $|r - f_1| + |r - f_2| = C$

**Hiperboloid**  $|r - f_1| - |r - f_2| = C$

**Paraboloid**  $|r - f| = |n^0 \cdot (r - p)|$

### Általános kvadratikus alak

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Transzformációk

Affin transzformáció - Párhuzamost is egyenest tartó - Eltolás, elforgatás, nyújtás, nyírás, tükrözés

Minden ilyen transzformáció kifejezhető egy mátrix szorzással, amelyben a sorok rendre a bázisvektorok és az origó:

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} i'_x & i'_y & 0 \\ j'_x & j'_y & 0 \\ o'_x & o'_y & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

## 2D forgatás

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', 1]$$

## 3D eltolás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

## 3D skálázás

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x', y', z', 1]$$

## Projektív sík

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

### Euklidészi pont

$$(x, y) \Rightarrow [x, y, 1]$$

### Homogén pont

$$(x, y) \Rightarrow [x \cdot w, y \cdot w, w] = [X, Y, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

## Projektív egyenes

- Euklideszi egyenes, Descartes koords
  - $n_x x + n_y y + c = 0$
- Euklideszi egyenes, homogén koords
  - $n_x \frac{X}{w} + n_y \frac{Y}{w} + c = 0$
- Euklideszi egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0, w \neq 0$
- Projektív egyenes
  - $n_x X + n_y Y + cw = 0$
- Projektív egyenes mátrixokkal:

$$- [X, Y, w] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ c \end{bmatrix} = 0$$

## Metszés és illeszkedés

- Pontokra illeszthető egyenes
  - $p_1 \times p_2$
- Egyenesek metszéspontja
  - $l_1 \times l_2$
- p ponton átmenő L egyenesre merőleges
  - $p \times L$

## Projektív tér

Homogén koordinátákkal számszerűsíthetjük a végtelent

### Euklidészi pont

$$(x, y, z) \Rightarrow [x, y, z, 1]$$

### Homogén pont

$$(x, y) \Rightarrow [x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w] = [X, Y, Z, w]$$

Homogén osztással, visszatérhetünk az Euklidészi térbe:

$$x = \frac{X}{w}, y = \frac{Y}{w}, z = \frac{Z}{w}, w \neq 0$$

Ideális pont:

$$[X, Y, Z, 0]$$

Itt találkoznak a végtelenben az egyenesek

### Egyenes paraméteres egyenlete

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, Z_2, w_2]t$$

### Sík implicit egyenlete:

$$n_x X + n_y Y + n_z Z + dw = 0$$

### Középpontos vetítés

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z, z/d]$$

És innen homogén osztással megkaphatjuk a descartes koordinátákat

## Kvaterniók

$$q = [s, x, y, z] = [s, d] = s + xi + yj + zk$$

Gyakorlatilag egy 4 dimenziós vektor

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$-ij = k$$

$$-ji = -k$$

$$-jk = i$$

$$-kj = -i$$

- $ki = j$
- $ik = -j$

Szorzás -  $[s_1, d_1] \cdot [s_2, d_2] = [s_1 s_2 - d_1 d_2, s_1 d_2 + s_2 d_1 + d_1 \times d_2]$

Inverz -  $q^{-1} = \frac{[s, -d]}{|q|^2}$

Forgatás -  $q = [\cos(\alpha/2), d\sin(\alpha/2)]$ ,  $|d| = 1$  -  $q \cdot [0, u] \cdot q^{-1} = [0, v]$  - v, az u elforgatottja a d körül alpha-val

Pont

- $z_p = x_p + y_p i = Re^{i\alpha} = R\cos\alpha + iR\sin\alpha$

Műveletek

- Eltolás:
  - $z'_p = z_p + z_t$
- Skálázás:
  - $z_s = s, z'_p \cdot z_s$
- Forgatva nyújtás
  - $z'_p \cdot z_s$

## 2D képszintézis

1. Referencia helyzet
2. Vektorizálás
  1. Ponttal szakaszokkal és háromszögekkel közelítünk
3. Modellezési transzformáció (M)
  1. Világ koordináta rendszer
  2. Elviszi a saját helyére az alkatot
  3. Itt van az ablak is amit innentől kezdve viszünk magunkkal
4. Kamera transzformáció (VP)
  1. (-1,-1)(1,1) sarokpontba tarszformáljuk a kamerát és minden mást is vele
  2. normalizált eszközkoordinátarendszer / vágási koordináta rendszer
5. Vágás
6. nézeti transzformáció
  1. Átmegyünk fizikai képernyő koordináta rendszer
  2. Figyelem vesszük a képernyő tényleges méretét
7. Raszterizáció
  1. Melyik pixeleket kell beszínezni

## Vektorizáció

### Görbék

Diszkrét pontokra vizsgáljuk a pontok helyét

### Sokszögek

Minden 4+ csúcsú **egyszerű** sokszögnek van diagonálja, azaz mindegyik felbontható diagonálok mentén.

**Fülek** Ha  $p_i$  fül, ha  $p_{i-1} < - > p_{i+1}$  diagonál

Szakasz - szakasz metszéssel vizsgálható, h diagonál-e

### Modell

Beállítjuk az éppen vizsgált objektum helyét orientációját és nagyságát, a korábban már említett, forgatás, eltolás, skálázás műveletekkel.



## View transzformáció

A  $(c_x, c_y)$  középpontú kamera ablakot és minden mást az origo-ba transzformálunk.

$$[x_{world}, y_{world}, z_{world}, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_x & -c_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_{cam}, y_{cam}, z_{cam}, 1]$$

## Projekció

A  $(w_x, w_y)$  oldalhosszúságú ablak ra illesztjük a kamera nézetünket, így kapjuk a normalizált eszköz koordináta nézetet (ndc)

$$[x_{cam}, y_{cam}, z_{cam}, 1] \begin{bmatrix} 2/w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/w_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]$$

## Vágás

Félsíkokra vágunk az ablak mind a 4 oldalán.

Vágás homogén koordinátákkal:

$$-1 < x = X/w < 1$$

$$-1 < y = Y/w < 1$$

$$-1 < z = Z/w < 1$$

HA  $w > 0$

$$-w < X < w$$

$$-w < Y < w$$

$$-w < Z < w$$

HA  $w < 0$

$$-w > X > w$$

$$-w > Y > w$$

$$-w > Z > w$$

## Viewport transzmormáció

1. Eltolunk  $(0,0)$  és  $(2,2)$ -be
2. Skálázunk a kívánt ablakméretre
3. Osztokunk 2 vel
4. Eltolunk a végleges helyre az ablakon

$$x_{pix} = v_w(x_{ndc} + 1)/2 + v_x$$

$$y_{pix} = v_h(y_{ndc} + 1)/2 + v_y$$

$$z_{pix} = (z_{ndc} + 1)/2$$

## Raszterizáció

Pixelekkel való közelítés

Szakasz effektív rajzolás:

$$y(x) = mx + b = y(x-1) + m$$

Háromszög raszterizálás - Pásztázunk - mekgeressük a beléő meg a kiléő pontot - közöttük színezzük a háromszöget

# OpenGL

1. Virtuális világ
2. Vektorizáljuk
3. Modell T
4. View T (kamera)
5. Projekció T (kamera)
6. Vágás
7. ViewPort T
8. Raszterizálás
9. Pixel feldolgozó (fragment shader)
10. Rasztertár