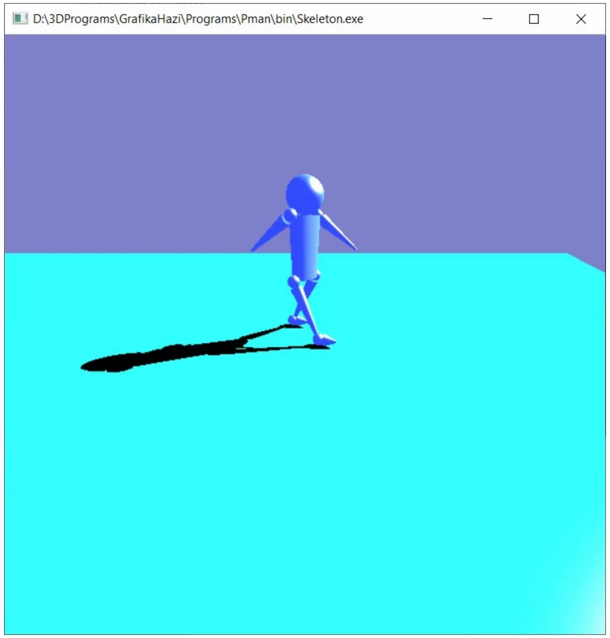
"Τὰ πάντα ῥεῖ καὶ οὐδὲν μένει."
Ἡράκλειτος

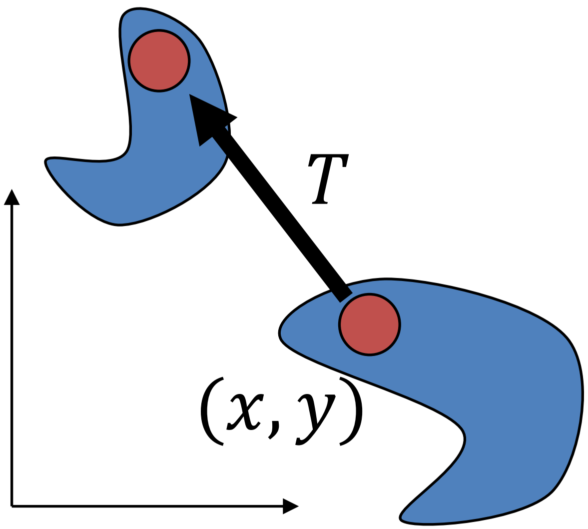
Transzformációk
1. Affin transzformációk

Szirmay-Kalos László



Transzformációk

$$(x', y') = T(x, y)$$

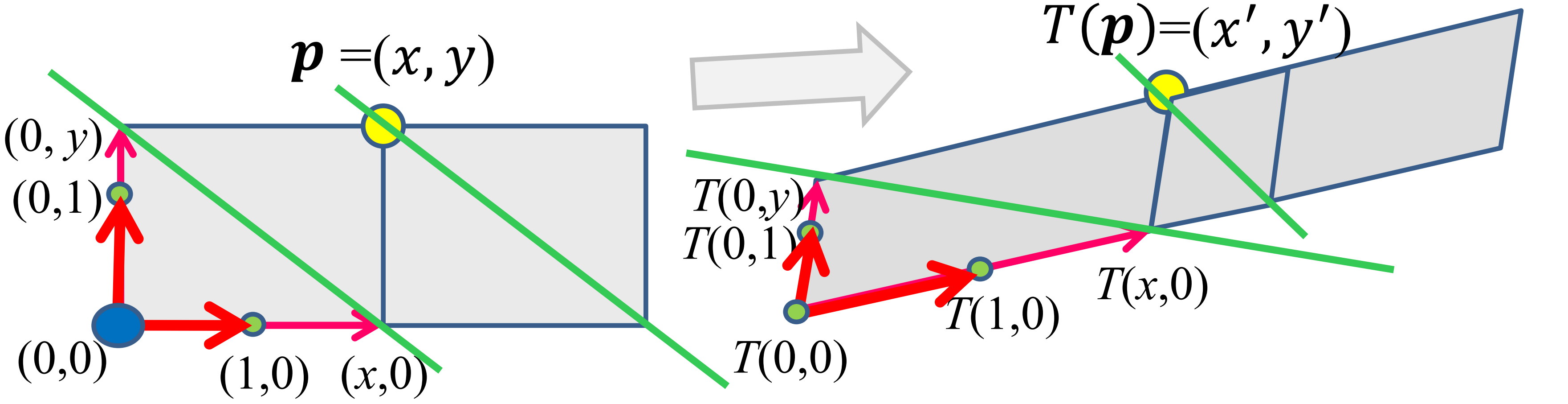


- Ponthoz pontot rendel
- Tönkre tehetik reprezentációt és az egyenletet
- Korlátozzuk a transzformációkat, hogy az **egyenes (szakasz)** és **sík (háromszög)** megmaradjon

- **Affin transzformációk**
  - Párhuzamos egyenes tartó
  - Eltolás, elforgatás, nyújtás, nyírás, tükrözés, …

Affin transzformációk

Egyenest-egyenesbe, párhuzamosokat megtartja

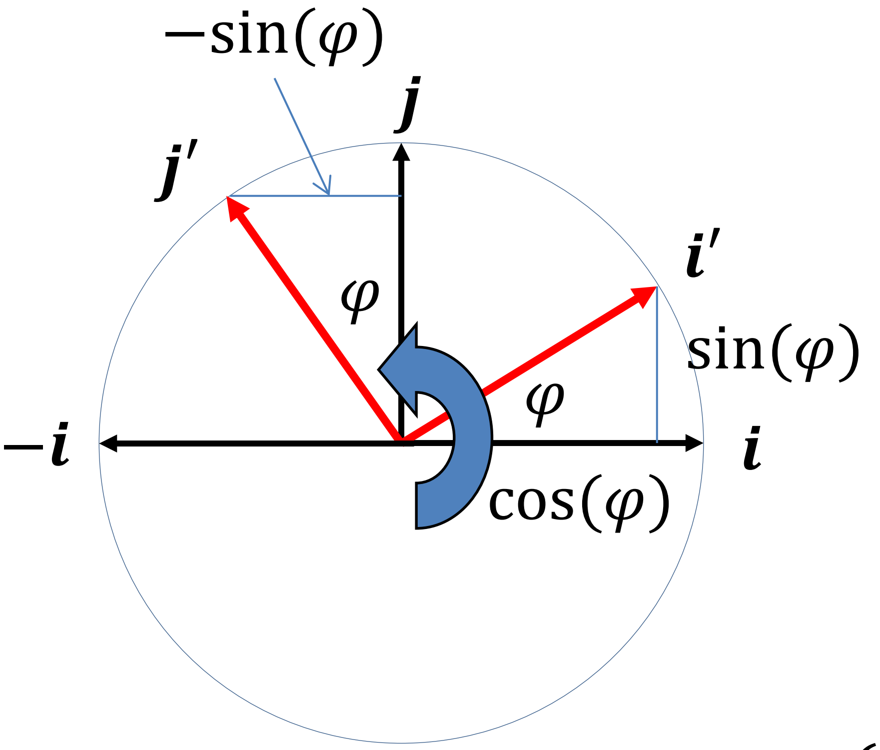


$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{p}) &= T(0{,}0) + \big(T(x,0) - T(0{,}0)\big) + \big(T(0,y) - T(0{,}0)\big) \\
&= T(0{,}0) + x\big(T(1{,}0) - T(0{,}0)\big) + y\big(T(0{,}1) - T(0{,}0)\big) \\
&= \boldsymbol{o}' + x\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}'
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'_x & \boldsymbol{i}'_y & 0 \\ \boldsymbol{j}'_x & \boldsymbol{j}'_y & 0 \\ \boldsymbol{o}'_x & \boldsymbol{o}'_y & 1 \end{bmatrix}}
$$

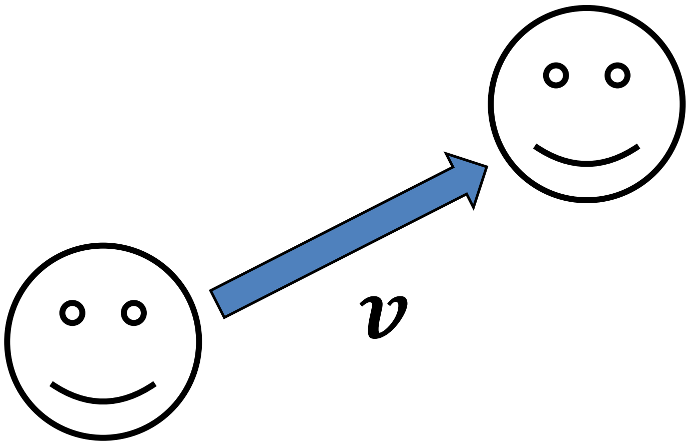
$$
\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned}}
$$

2D forgatás



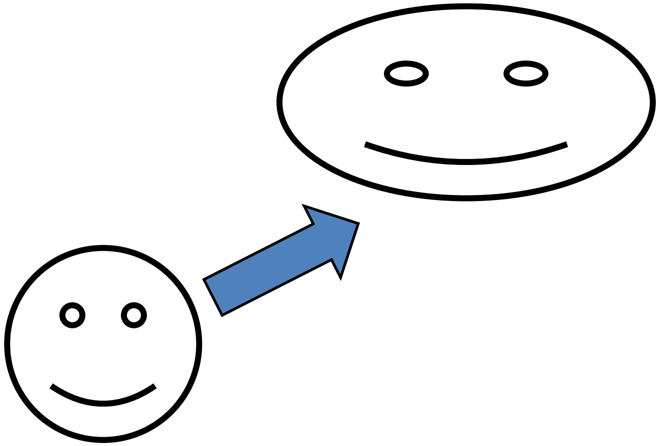
$$[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D eltolás



$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix}$$

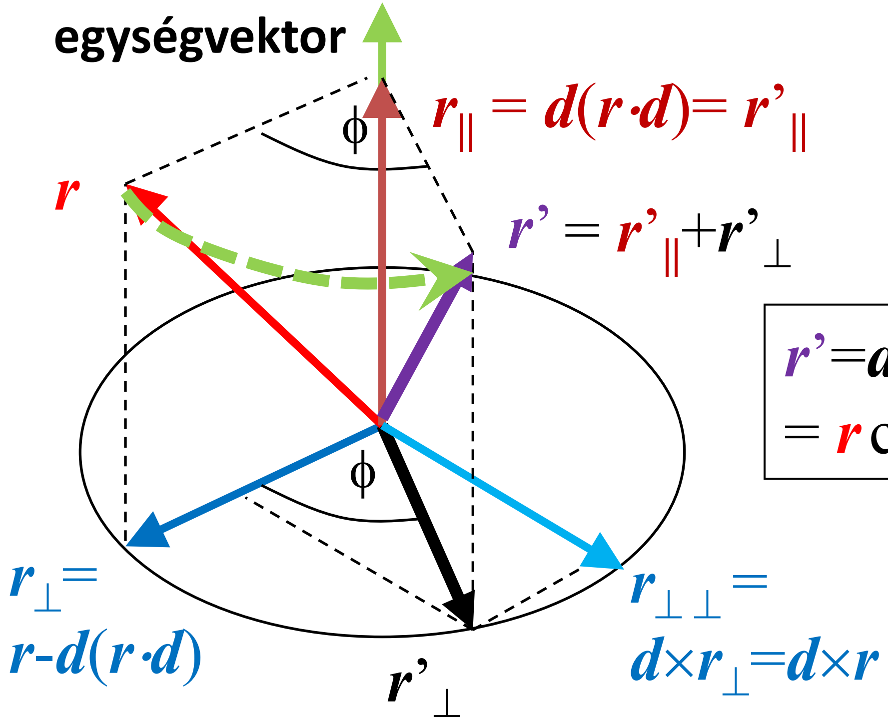
3D skálázás



$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Origón átmenő ***d*** tengely körüli forgatás: (Olinde) Rodrigues formula

$\boldsymbol{d}$: forgatási tengely, **egységvektor**



$$\begin{array}{ccc} r'_{\parallel} & r_{\perp} & r_{\perp\perp} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r' &= d(r\cdot d) + (r - d(r\cdot d))\cos(\phi) + d\times r\sin(\phi) \\ &= r\cos(\phi) + d(r\cdot d)(1-\cos(\phi)) + d\times r\sin(\phi) \end{aligned}}$$

$C \qquad S$

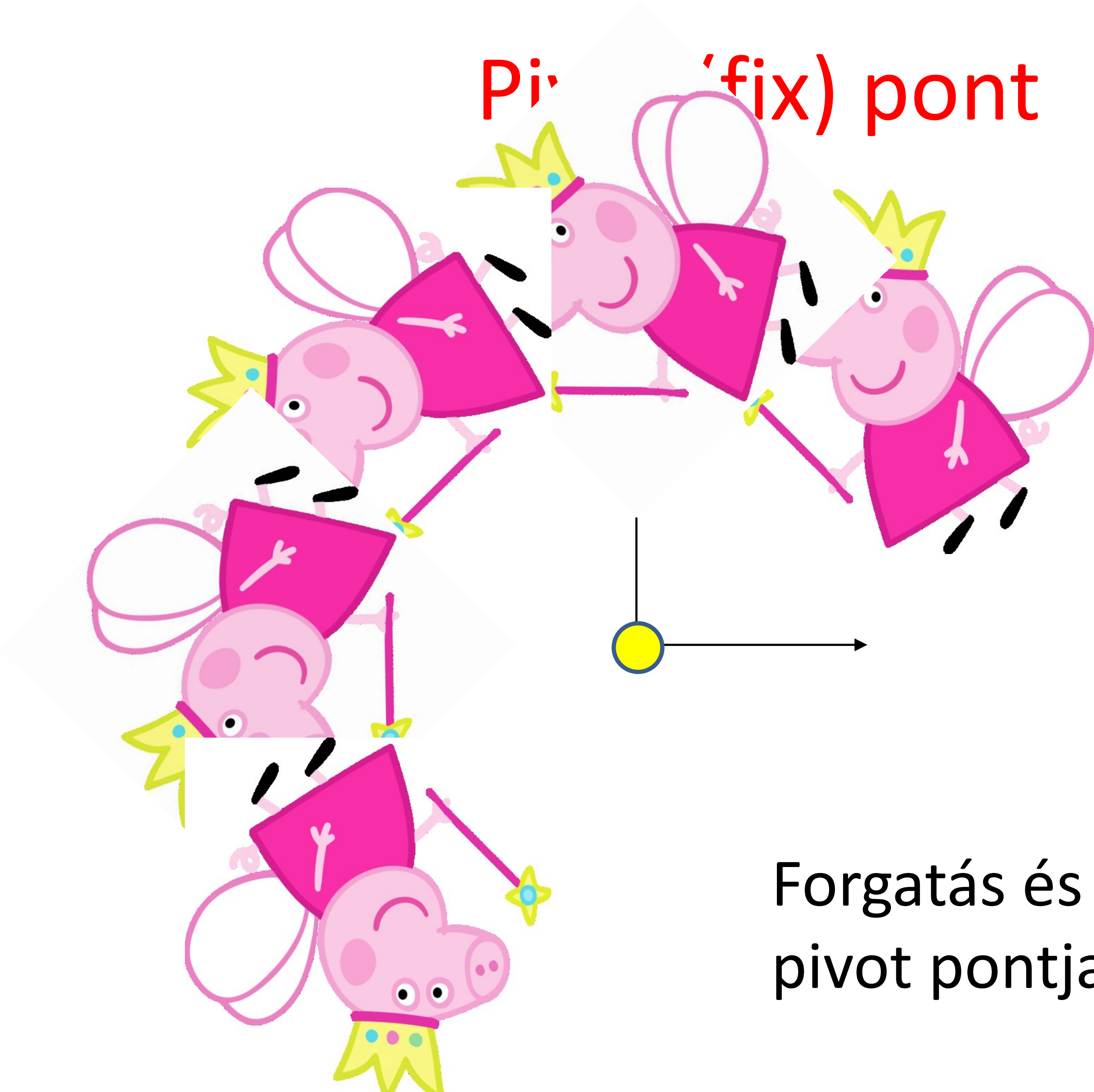
<u>Mátrix sorai: hova kerül az origó és az ***i, j, k***?</u>

$(0,0,0) \rightarrow (0,0,0)$

$(1,0,0) \rightarrow (1,0,0)C + (d_x, d_y, d_z)d_x(1-C) + (d_x, d_y, d_z)\times(1,0,0)S =$

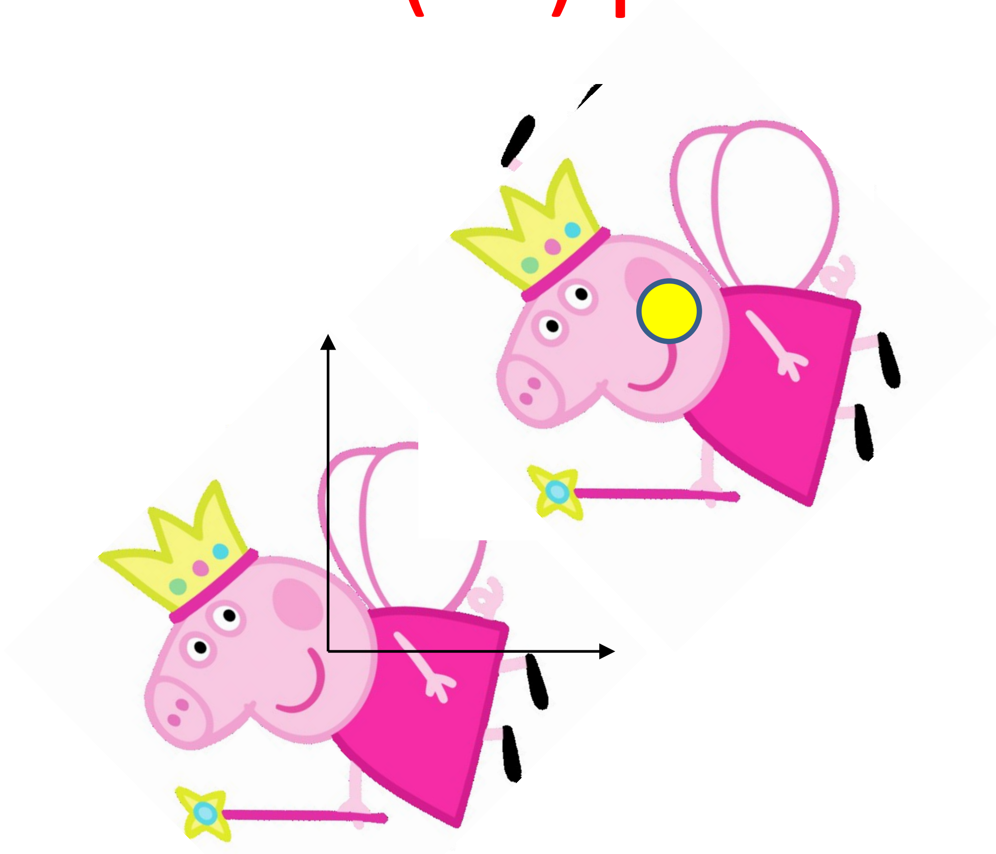
$(C + d_x^2(1-C),\ d_y d_x(1-C) + d_z S,\ d_z d_x(1-C) - d_y S)$

Pi (fix) pont



Forgatás és skálázás
pivot pontja az origó

Pivot (fix) pont



1. Pivot az origóba
2. Forgatás vagy skálázás az origó körül
3. Origó vissza

Egybevágósági transzformációk

- Affin:

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} \boldsymbol{i'}_x & \boldsymbol{i'}_x & \boldsymbol{i'}_z & 0 \\ \boldsymbol{j'}_x & \boldsymbol{j'}_y & \boldsymbol{j'}_z & 0 \\ \boldsymbol{k'}_x & \boldsymbol{k'}_y & \boldsymbol{k'}_z & 0 \\ \boldsymbol{o'}_x & \boldsymbol{o'}_y & \boldsymbol{o'}_z & 1 \end{bmatrix}$$

- Bázisvektorok egységnyi hossza és egymásra merőlegessége megmarad:

$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}' = 1,\ \ \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j}' = 1,\ \ \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}' = 1$$
$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j}' = 0,\ \ \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{k}' = 0,\ \ \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{i}' = 0$$

- Determináns: +1 vagy -1
- Példák: Eltolás, forgatás, tükrözés
- Ellenpélda: skálázás, nyírás

Affin transzformációk

- Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képeznek le.
- Szokásos transzformációk (eltolás, forgatás, skálázás, nyírás, tükrözés) ilyenek.
- Mátrixszorzás ambiens koordinátákra, ahol a negyedik oszlop $[0,0,0,1]^T$
- Eltolásnak nincs pivot (fix) pontja, a többinek az origó. Ha mást szeretnénk, akkor eltolás, transzformáció, visszatolás.

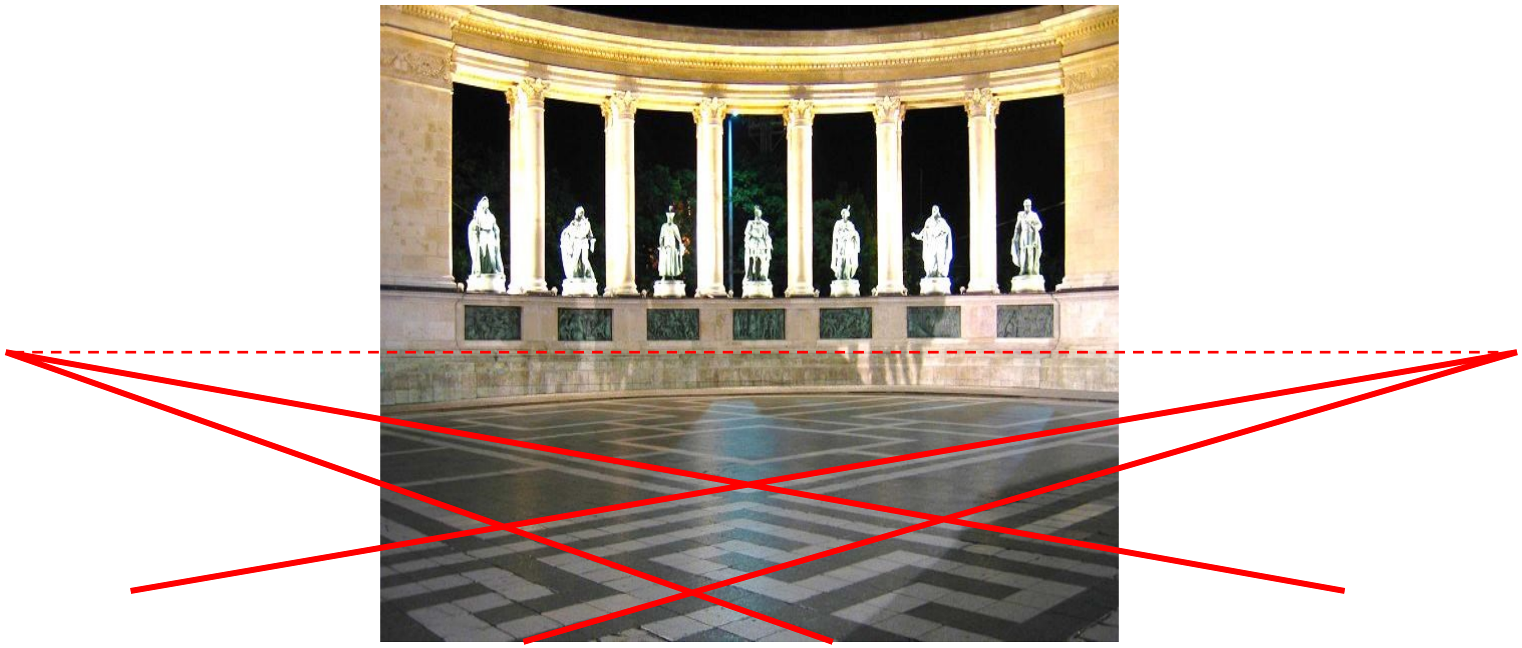
”μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπί γεωμετρίαν”

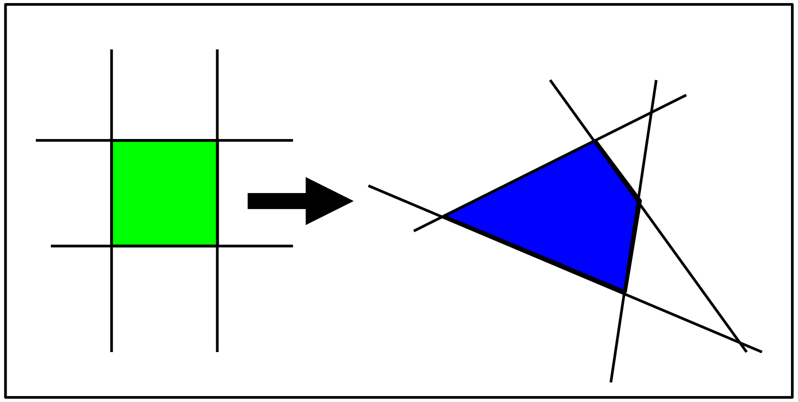
Εὐκλείδης

Transzformációk
2. Projektív geometria

Szirmay-Kalos László

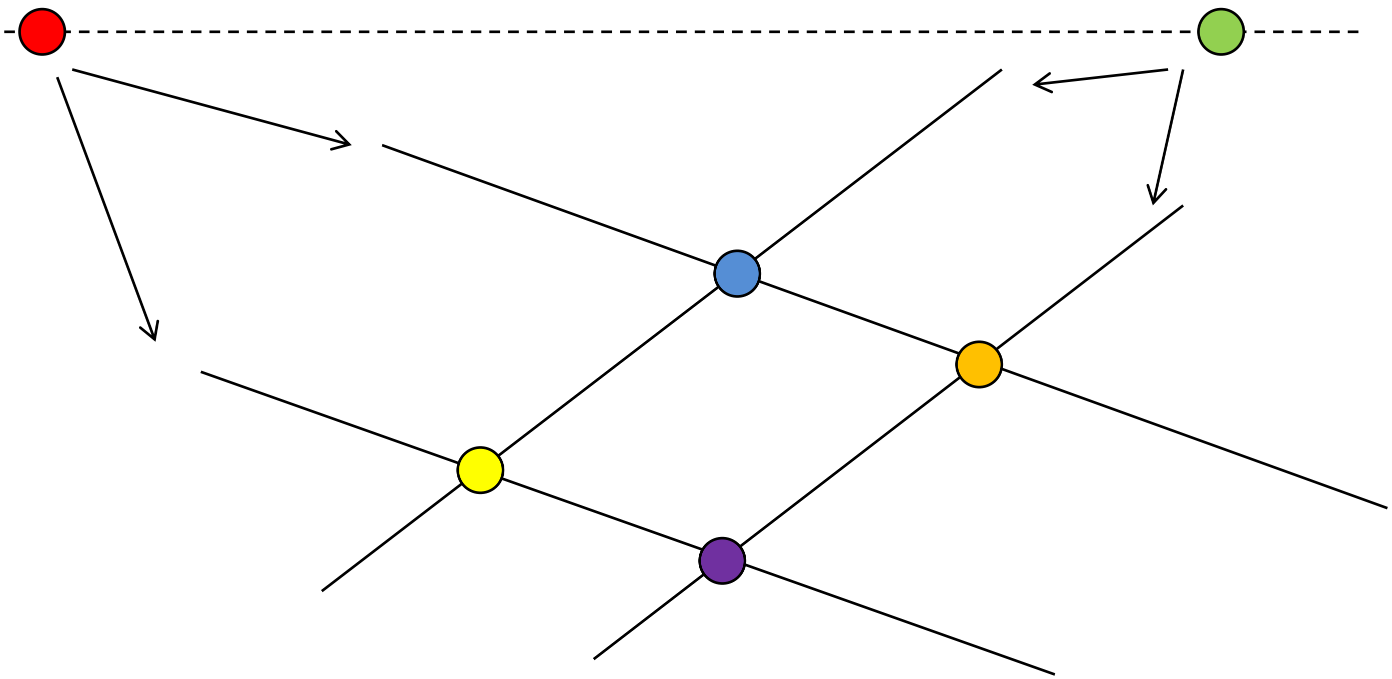
Perspektíva





- Egyenest egyenesbe képez le
- Nem párhuzamostartó, azaz nem affin
- <u>Euklideszi geometria lyukas</u>

Euklideszi → Projektív sík



Euklideszi

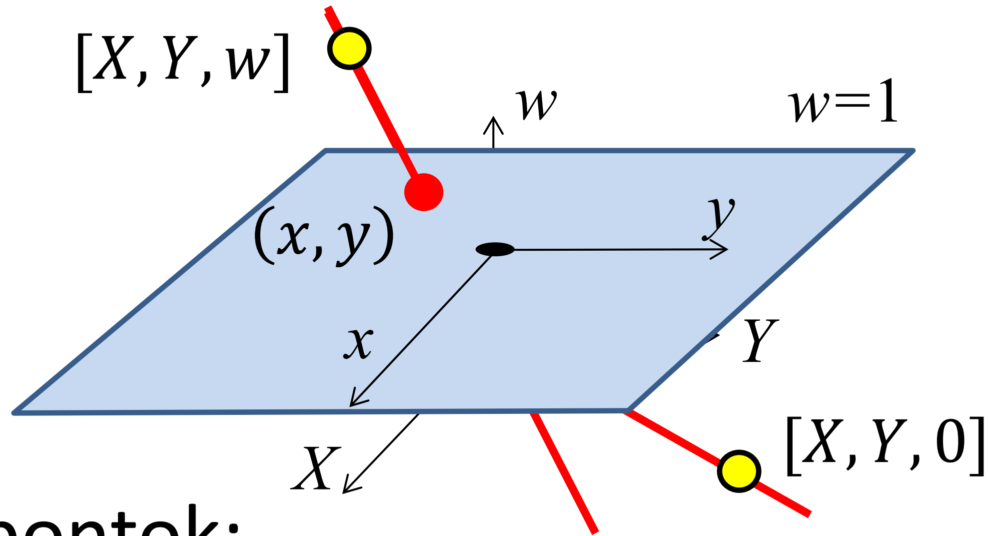
- Két pont meghatároz egy egyenest.
- Egy egyenesnek van legalább két pontja.
- ~~Ha *a* egy egyenes, A pedig egy, nem az egyenesen lévő pont, akkor egyetlen olyan egyenes létezik, amely átmegy A-n és nem metszi a-t.~~

→

Projektív

- Két pont meghatároz egy egyenest.
- Egy egyenesnek van legalább két pontja.
- **Két egyenes mindig egy pontban metszi egymást.**

Projektív sík analitikus geometriája



Euklideszi pontok:

$$(x, y) \rightarrow [x, y, 1] \sim [x \cdot w, y \cdot w, w] = [X, Y, w]$$

Homogén osztás: $x = \dfrac{X}{w}, \;\; y = \dfrac{Y}{w}$ $\boxed{w \neq 0}$

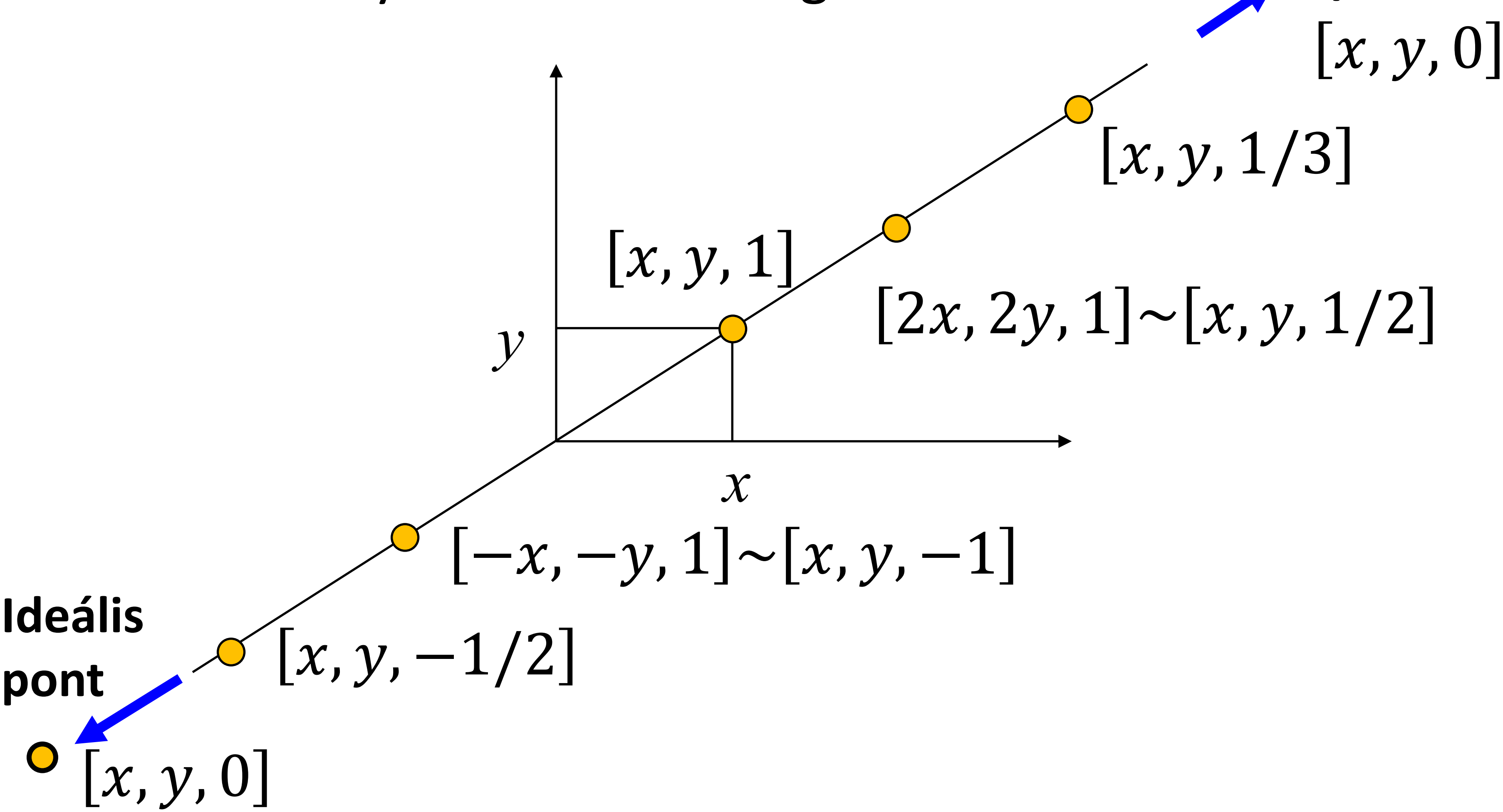
Ideális pontok:

$$[X, Y, 0]$$

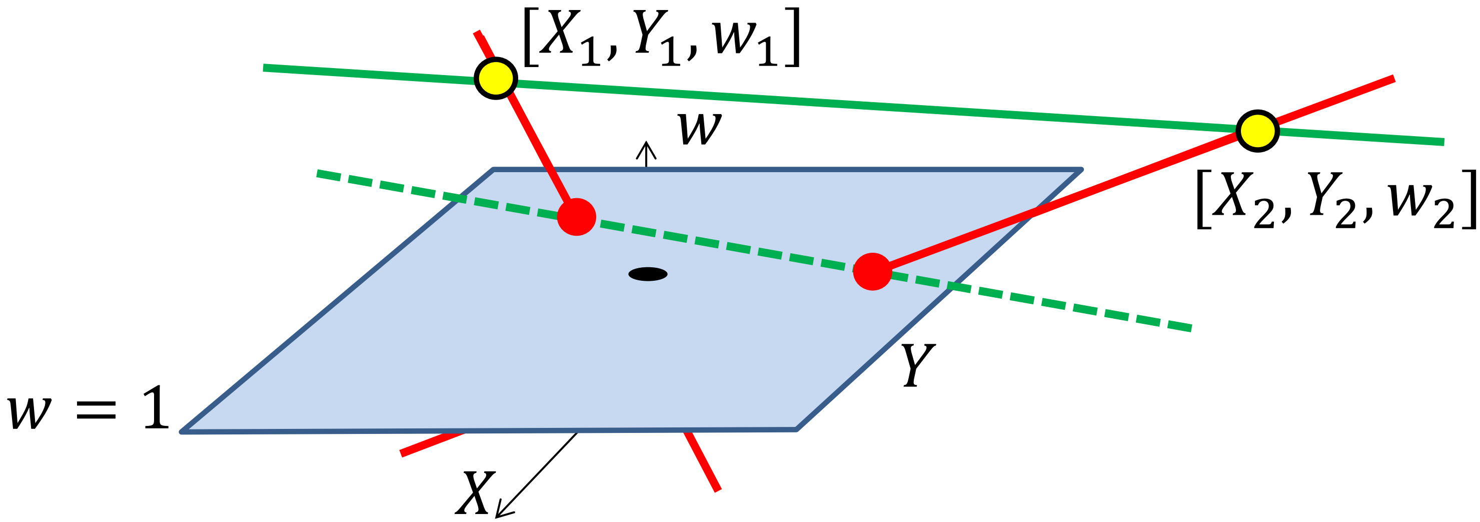
Möbius

Homogén koordináták

Irány + inverz távolság skálázás

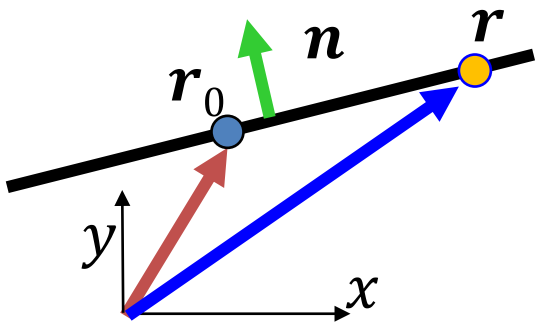


Projektív egyenes parametrikus egyenlete



$$[X(t), Y(t), w(t)] = [X_1, Y_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, w_2]t$$

Egyenes implicit egyenlete



$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

Euklideszi egyenes, Descartes koordináták:

$$n_x x + n_y y + d = 0$$

Euklideszi egyenes, homogén koordináták:

$$n_x X/w + n_y Y/w + d = 0 \qquad w \neq 0$$

Projektív egyenes:

$$\boxed{n_x X + n_y Y + dw = 0} \qquad \cancel{w \neq 0}$$

$$[X, Y, w] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{bmatrix} = 0$$

Pont: sorvektor

Egyenes: oszlopvektor

Dualitás

- Ha egy tétel pontok és egyenesek viszonyáról szól, akkor a pont és egyenes felcserélhetők benne.
- 2D pont: 3 elemű sorvektor, homogén
  - 2D projektív sík pont ~ 3D euklideszi tér origót metsző egyenes
- 2D egyenes: 3 elemű oszlopvektor, homogén
  - 2D projektív sík egyenes ~ 3D euklideszi tér origót metsző egyenes
- **2D egyenes egyenlete**:

$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l} = 0}$$

  - 2D pont 3D vektora merőleges a 2D egyenes 3D vektorára

Metszés és illeszkedés

- ***$\boldsymbol{p}_1$ és $\boldsymbol{p}_2$ pontra illeszkedő $\boldsymbol{l}$ egyenes***:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{l} = 0,\ \ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{l} = 0\ \rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2}$$

$$\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{p}_1 \qquad \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{p}_2$$

- ***$\boldsymbol{l}_1$ és $\boldsymbol{l}_2$ egyenes $\boldsymbol{p}$ metszéspontja***:

$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_2 = 0\ \rightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2}$$

$$\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{l}_1 \qquad \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{l}_2$$

- **$\boldsymbol{p}$ ponton átmenő $\boldsymbol{L}$ egyenesre merőleges $\boldsymbol{l}$ egyenes** ($\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}$-ből a *w* törlése)

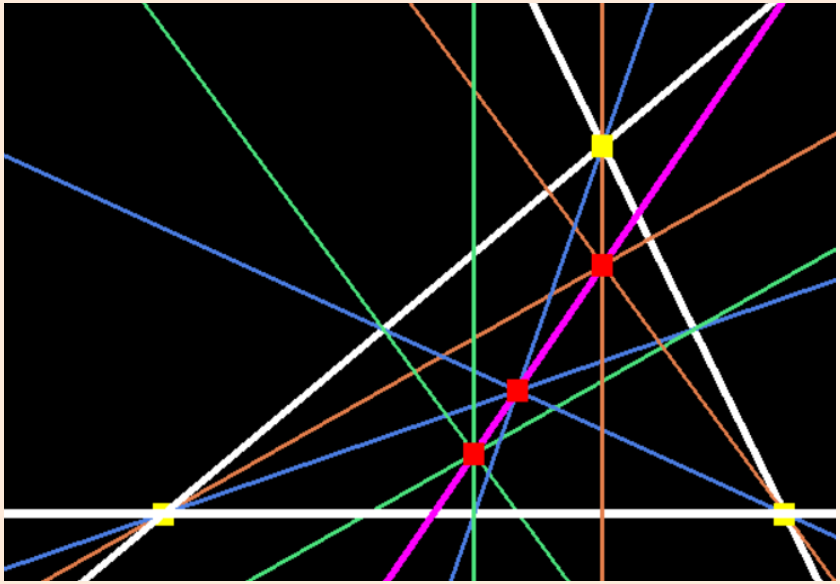
$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l} = 0,\ \ \boldsymbol{l}_X L_X + \boldsymbol{l}_Y L_Y = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{L}^* = 0\ \rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}^*}$$

Euler egyenes

```
vec3 v[0]=vec3(x0,y0,1), v[1]=vec3(x1,y1,1), v[2]=vec3(x2,y2,1);
// midpoints
m[2] = v[0] + v[1];
m[0] = v[1] + v[2];
m[1] = v[2] + v[0];
// edges
e[0] = cross(v[1], v[2]);
e[1] = cross(v[2], v[0]);
e[2] = cross(v[0], v[1]);

for (int i = 0; i < 3; i++) {
   median[i]    = cross(v[i], m[i]);
   altitude[i] = cross(v[i], vec3(e[i].x, e[i].y, 0));
   bisector[i] = cross(m[i], vec3(e[i].x, e[i].y, 0));
}
centroid     = cross(median[0], median[1]);
orthocenter  = cross(altitude[0], altitude[1]);
circumcenter = cross(bisector[0], bisector[1]);

euler = cross(centroid, circumcenter); // Euler's line
```



Projektív tér homogén koordinátákkal

- Euklideszi pontok:
  $(x, y, z) \rightarrow [x, y, z, 1] \sim [x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w] = [X, Y, Z, w]$
  Homogén osztás: $x = \frac{X}{w},\ y = \frac{Y}{w},\ z = \frac{Z}{w}$
- Ideális pontok: $[X, Y, Z, 0]$
- Egyenes paraméteres egyenlete:
  $[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, Z_2, w_2]t$
- Sík implicit egyenlete:
  $n_x X + n_y Y + n_z Z + dw = 0$

Homogén lineáris transzformációk

Homogén koordinátavektor szorzása mátrixszal

- Affin transzformációkat is tartalmazza
- 2D transzformáció 3×3 mátrix
$$[X', Y', w'] = [X, Y, w] \cdot \boldsymbol{T}_{3\times3}$$
- 3D transzformáció 4×4 mátrix
$$[X', Y', Z', w'] = [X, Y, Z, w] \cdot \boldsymbol{T}_{4\times4}$$
- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$\begin{aligned}[X', Y', Z', w'] &= (\ldots([X, Y, Z, w] \cdot \boldsymbol{T}_1) \cdot \boldsymbol{T}_2) \ldots \cdot \boldsymbol{T}_n \\ &= [X, Y, Z, w] \cdot (\boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_2 \cdot \ \ldots \cdot \boldsymbol{T}_n) \\ &= [X, Y, Z, w] \cdot \boldsymbol{T}\end{aligned}$$

Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Egyenest egyenesbe, kombinációkat kombinációkba, konvex kombinációkat konvex kombinációkba
- Ha nem invertálható, akkor elfajulás lehetséges

<u>Példa: egyenest egyenesbe</u>

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1-t)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_1 t + \boldsymbol{p}_2(1-t) \qquad // \cdot \mathbf{T}$$

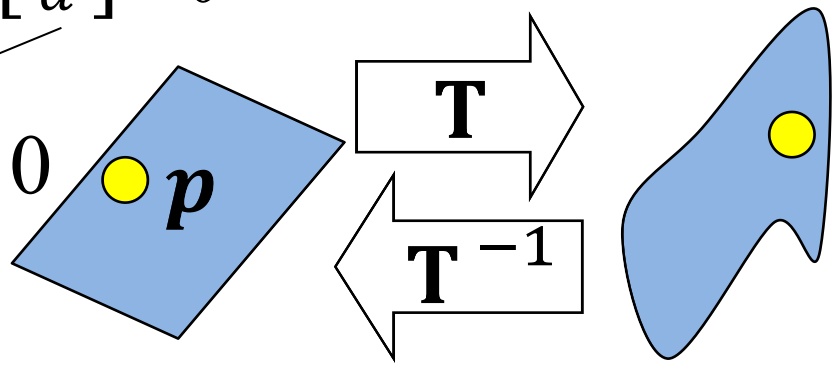
$$\boldsymbol{p}^*(t) = (\boldsymbol{p}_1 \cdot \mathbf{T})t + (\boldsymbol{p}_2 \cdot \mathbf{T})(1-t)$$

$$\boldsymbol{p}^*(t) = \boldsymbol{p}_1^* t + \boldsymbol{p}_2^*(1-t)$$

Invertálható homogén lineáris transzformációk: síkot síkba

$$[X, Y, Z, w]\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}^T = 0$$



$$\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{T}$$

$$\boldsymbol{p}^* \cdot \mathbf{T}^{-1} = \boldsymbol{p}$$

$$(\boldsymbol{p}^* \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot \boldsymbol{n}^T = 0$$

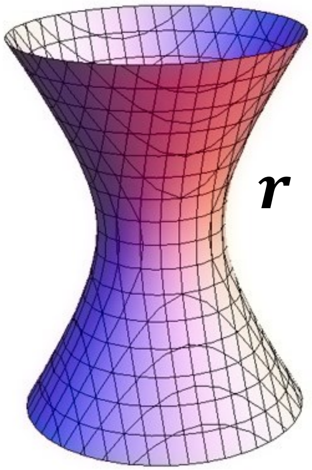
$$\boldsymbol{p}^* \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{n}^T) = 0$$

$$\boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{n}^{*T} = 0$$

Sík transzformáltja:

$$\boxed{\boldsymbol{n}^{*T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{n}^T}$$

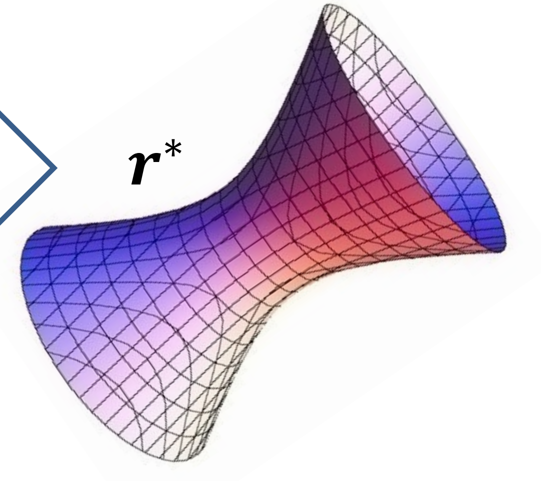
Implicit felületek transzformációja



$\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}^* = T(\boldsymbol{r})$$

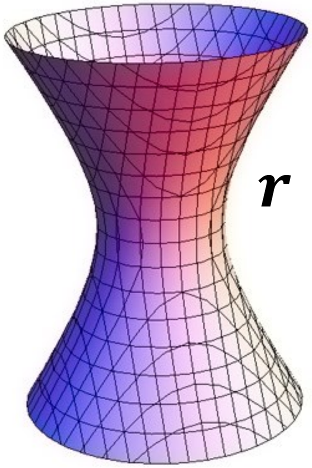
$\boldsymbol{r}^*$



$$f(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$f^*(\boldsymbol{r}^*) = 0 \Rightarrow \boxed{f(T^{-1}(\boldsymbol{r}^*)) = 0}$$

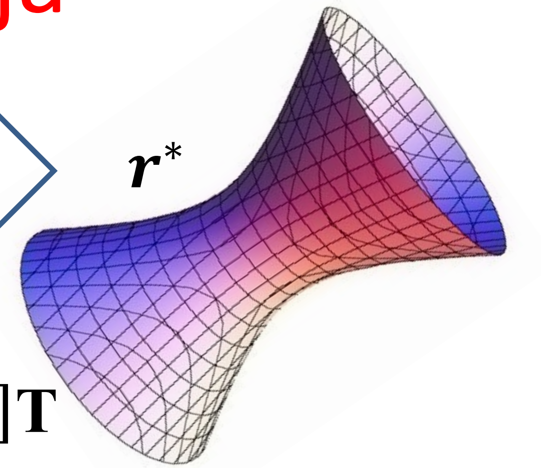
Kvadratikus felületek homogén lineáris transzformációja



$\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}^* = T(\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{r}^*$



$$[X^*, Y^*, Z^*, w^*] = [X, Y, Z, w]\mathbf{T}$$

$$f(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$f^*(\boldsymbol{r}^*) = 0 \Rightarrow \boxed{f(T^{-1}(\boldsymbol{r}^*)) = 0}$$

$$f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$[X, Y, Z, w]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$[X^*, Y^*, Z^*, w^*]\mathbf{T}^{-1}$$

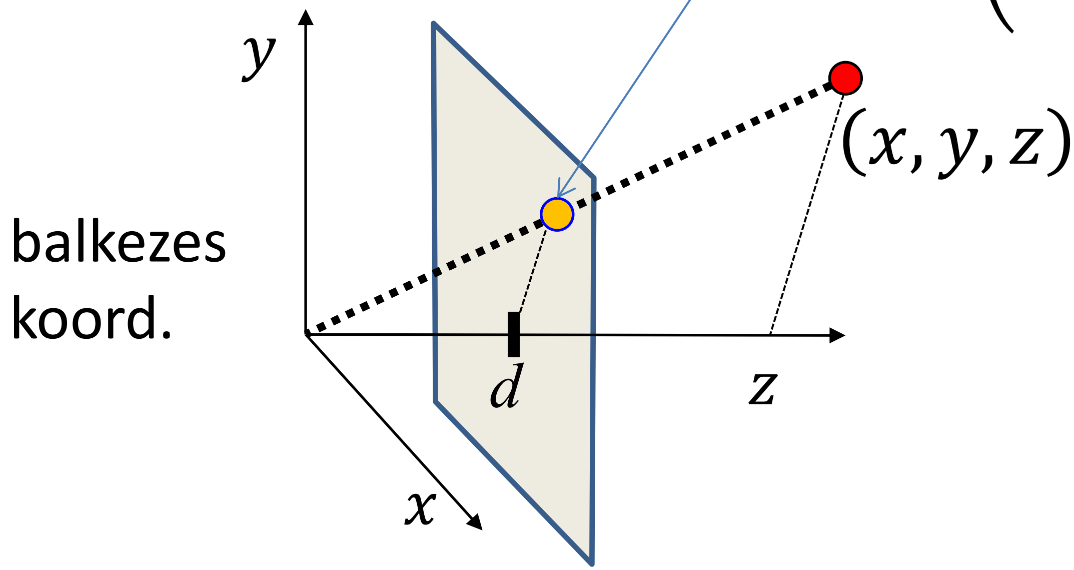
$$\boxed{[X^*, Y^*, Z^*, w^*]\mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}(\mathbf{T}^{-1})^T\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ w^* \end{bmatrix} = 0}$$

$$[X^*, Y^*, Z^*, w^*]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ w^* \end{bmatrix} = 0$$

Homogén lineáris transzformációk kvadratikus felületet kvadradikus felületre képeznek le.

Középpontos vetítés (projekció)

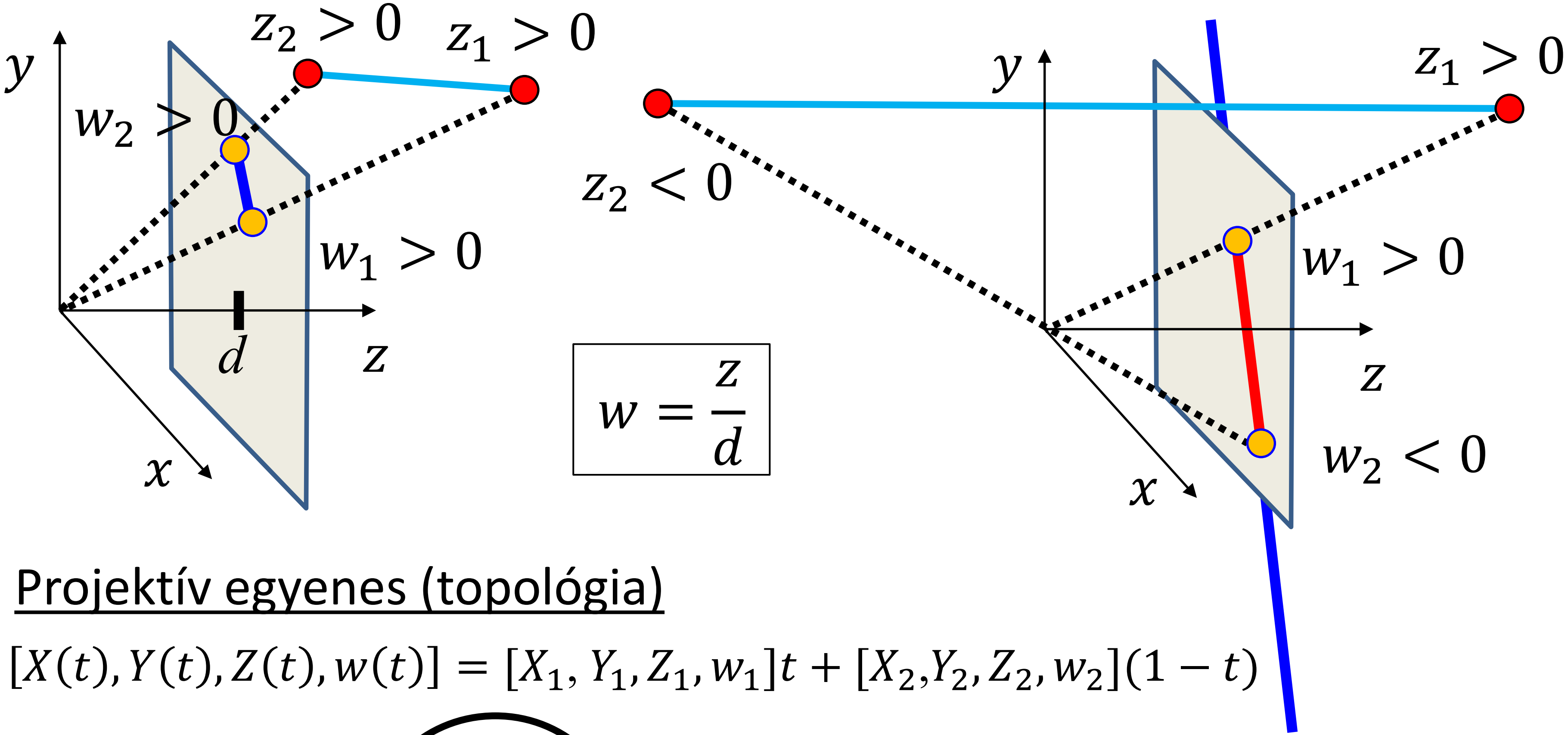
$$(x', y', z') = \left(x\frac{d}{z}, y\frac{d}{z}, d\right)$$



$$[x', y', z', 1] = \left[x\frac{d}{z}, y\frac{d}{z}, d, 1\right] \sim \left[x, y, z, \frac{z}{d}\right]$$

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[x, y, z, \frac{z}{d}\right] \sim [x', y', z', 1]$$

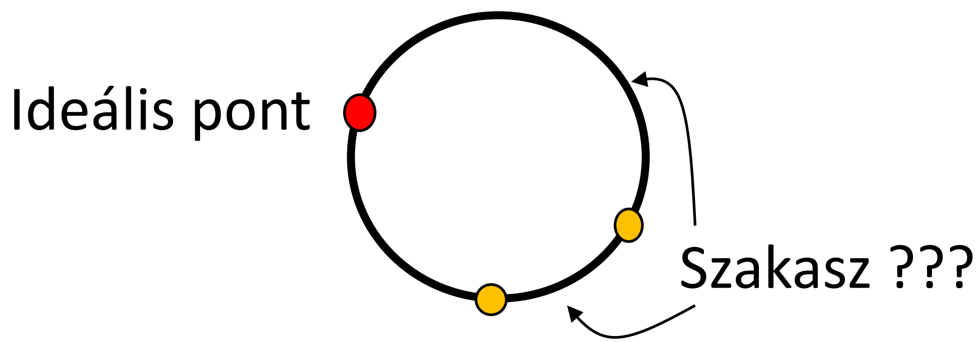
Átfordulási probléma



$$w = \frac{z}{d}$$

Projektív egyenes (topológia)

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1 - t)$$



Projektív geometria

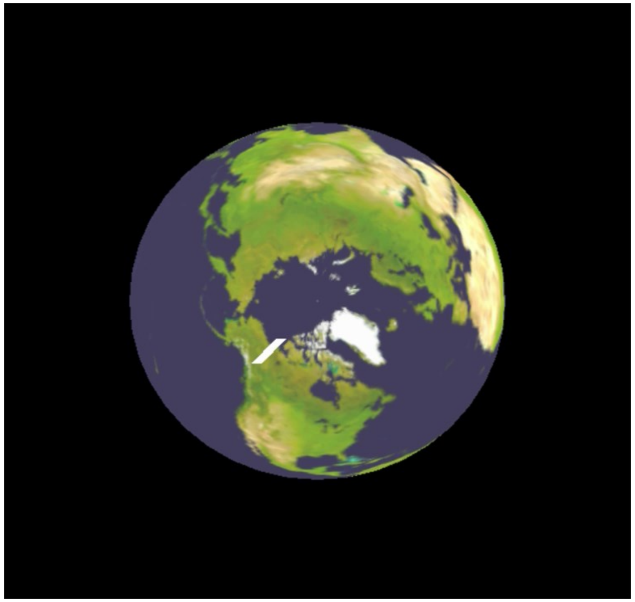
- Euklideszi geometria a középpontos vetítésre lyukas
- Más geometria kell: projektív geometria, amely a végtelent is tartalmazza és nincsenek párhuzamosok
- Projektív geometriához a Descartes koordináták nem jó: Möbius homogén koordinátái
- Projektív síkban az egyenes és a pont egymás duálisai
- Homogén lineáris transzformációk = homogén koordináták egy a transzformációs mátrix szorzata
- Ha homogén koordinátákat használunk, akkor a projektív térben mozgunk (veszély!) átfordulási probléma.

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

William Rowan Hamilton

Kvaterniók

Szirmay-Kalos László

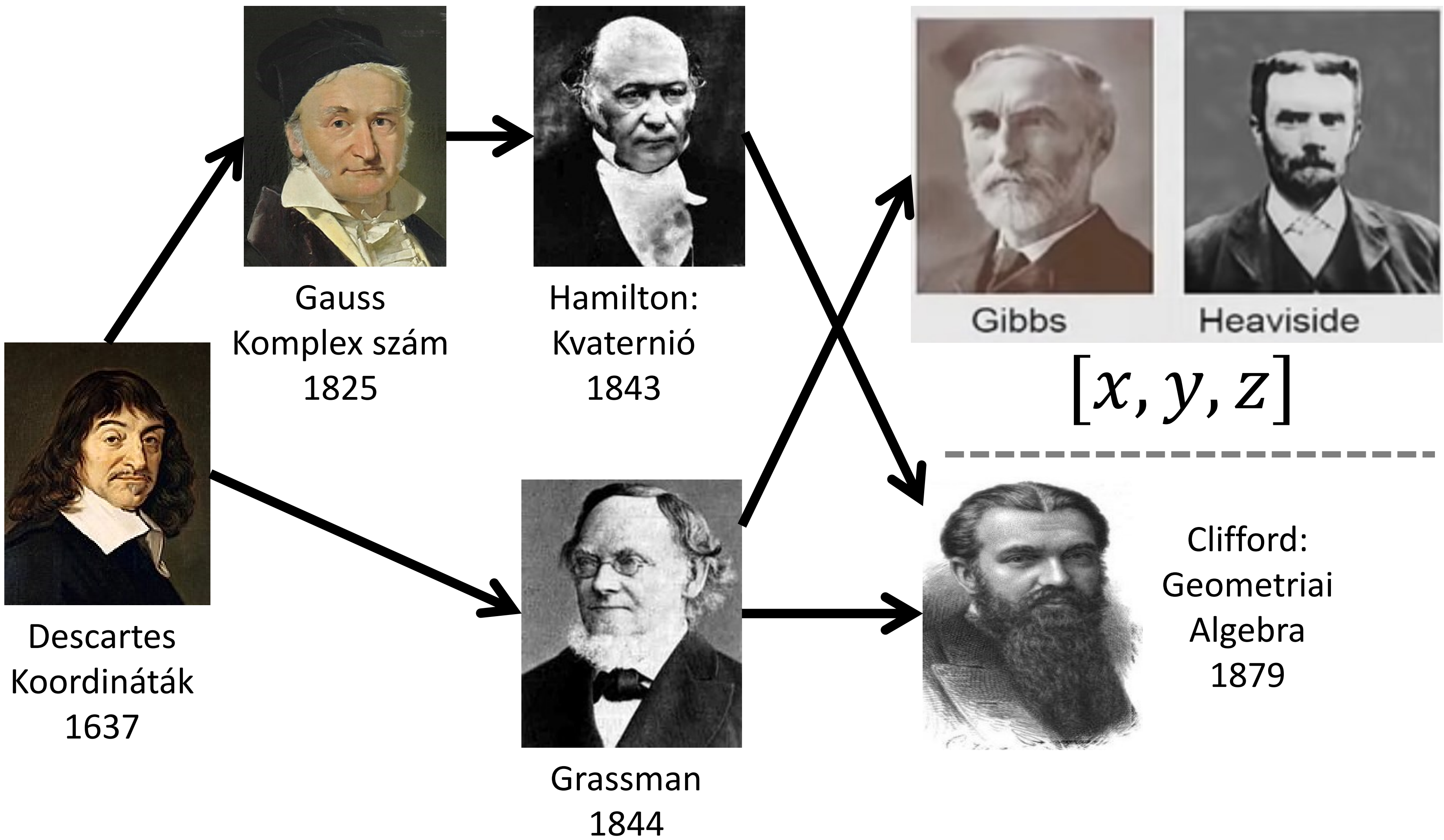


2D geometria = vektor algebra

- Pont: $\boldsymbol{p} = [x, y, 1]$
- Vektor: $\boldsymbol{v} = [x, y, 0]$
- Eltolás: $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$
- Eltolás, forgatás, skálázás:

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} a & e & 0 \\ b & f & 0 \\ c & d & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor háború



2D geometria = komplex szám

- Pont:

$$z_p = x_p + y_p \boldsymbol{i} = Re^{\boldsymbol{i}\alpha} = R\cos\alpha + \boldsymbol{i}R\sin\alpha$$

- Eltolás: $z_t = x_t + y_t \boldsymbol{i}$

$$\boxed{z_p{}' = z_p + z_t}$$

- Irányfüggetlen skálázás: $z_s = s$

$$\boxed{z_p{}' = z_p \cdot z_s}$$

- Forgatva nyújtás: $z_r = x_r + y_r \boldsymbol{i} = se^{\boldsymbol{i}\varphi}$

$$\boxed{z_p{}' = z_p \cdot z_r} = Rs \cdot e^{\boldsymbol{i}(\alpha+\varphi)}$$

- Forgatás = egység abszolút értékű komplex szám

Komplex számok algebrája

```
struct Complex {
   float x, y;

   Complex(float x0, float y0) { x = x0, y = y0; }
   Complex operator+(Complex r) {
       return Complex(x + r.x, y + r.y);
   }
   Complex operator-(Complex r) {
       return Complex(x - r.x, y - r.y);
   }
   Complex operator*(Complex r) {
       return Complex(x * r.x - y * r.y, x * r.y + y * r.x);
   }
   Complex operator/(Complex r) {
       float l = r.x * r.x + r.y * r.y;
       return (*this) * Complex(r.x / l, -r.y / l); // conjugate
   }
};

Complex Polar(float r, float phi) { // Constructor
    return Complex(r * cosf(phi), r * sinf(phi));
}
```

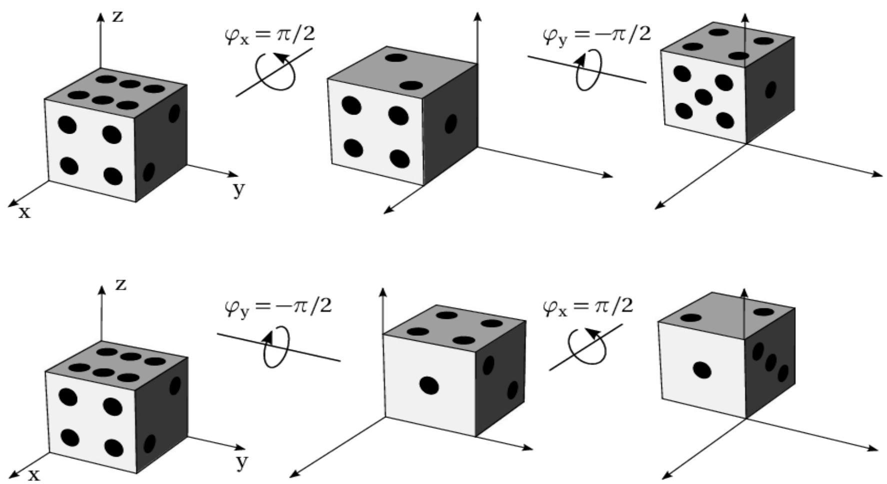
2D transzformációk komplex számokkal

A **p** pontot az (1,-1) pivot pont körül nyújtsuk 2-szeresére és forgassuk el t-vel, majd toljuk el a (2, 3) vektorral és végül nyújtsuk az origó körül 0.8-szorosára és forgassuk –t/2-radiánnal:

```
Complex p, tp;
Complex pivot(1, -1);
tp = (((p - pivot) * Polar(2,t) + pivot) + Complex(2, 3))
      * Polar(0.8, -t/2);
```

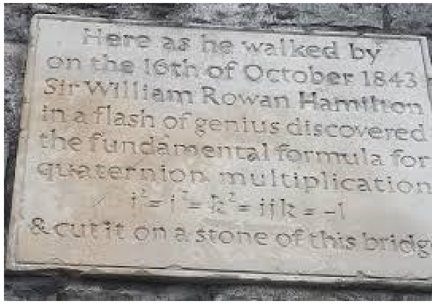
Működik 3D-ben?

- $z = x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j}$
- Összeadás és irányfüggetlen skálázás OK
- **<u>Forgatás mint szorzás?</u>** Tulajdonságok:
  - Asszociatív, összeadásra disztributív (biz: mátrix)
  - Nem kommutatív
  - Invertálható



  - $\boldsymbol{i}^2 = ?, \quad \boldsymbol{j}^2 = ?, \quad \boldsymbol{ij} = ?, \quad \boldsymbol{ji} = ?$

(Sir William Rowan) Hamilton
Kvaternió: 4D komplex szám



- $\boxed{\boldsymbol{q} = [s, x, y, z] = [s, \boldsymbol{d}] = s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}$
- $\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = [s_1 + s_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$
- $a\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}a = [as, ax, ay, az]$
- $|\boldsymbol{q}| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
- **Szorzás:** $\boxed{[s_1, \boldsymbol{d}_1] \cdot [s_2, \boldsymbol{d}_2] = [s_1 s_2 - \boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2, s_1 \boldsymbol{d}_2 + s_2 \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_2]}$
  - $\boxed{\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1}$

    $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j}$
  - Szorzás asszociatív, **de nem kommutatív**,
  - Összeadásra disztributív
  - Van egységelem: $[1,0,0,0]$
  - Van inverz: $\boldsymbol{q}^{-1} = [s, -\boldsymbol{d}]/|\boldsymbol{q}|^2, \quad \boldsymbol{q}^{-1} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}^{-1} = [1,0,0,0]$

Kvaternió = forgatás α szöggel az origón átmenő *d* irányú tengely körül

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{q} = [\cos(\alpha/2), \boldsymbol{d}\sin(\alpha/2)], \qquad |\boldsymbol{d}| = 1 \\ \boldsymbol{q}\cdot[0,\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{q}^{-1} = [0,\boldsymbol{v}], \ \boldsymbol{v} \text{ az } \boldsymbol{u} \text{ elforgatottja a } \boldsymbol{d} \text{ körül } \alpha\text{-val} \end{array}}$$

Rodriguez: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cos(\alpha) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{d})(1-\cos(\alpha)) + \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{u}\sin(\alpha)$

<u>Bizonyítás $\boldsymbol{d}$ merőleges $\boldsymbol{u}$ esetre (párhuzamos→HF):</u>

Rodriguez: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cos(\alpha) + \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{u}\sin(\alpha)$

$\alpha/2$ $\alpha/2$

Kvaternió:

$$[\cos(\alpha/2), \boldsymbol{d}\sin(\alpha/2)]\cdot[0,\boldsymbol{u}] = [0, \boldsymbol{u}\cos(\alpha/2) + \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{u}\sin(\alpha/2)] = [0,\boldsymbol{u}^*]$$

$$[0,\boldsymbol{u}^*]\cdot[\cos(\alpha/2), -\boldsymbol{d}\sin(\alpha/2)] = [0, \boldsymbol{u}^*\cos(\alpha/2) - \boldsymbol{u}^*\times\boldsymbol{d}\sin(\alpha/2)]$$

$$\boxed{[s_1,\boldsymbol{d}_1]\cdot[s_2,\boldsymbol{d}_2] = [s_1 s_2 - \boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2, s_1\boldsymbol{d}_2 + s_2\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2]}$$

Példa

<u>Az $\boldsymbol{u} = (1, 0, 0)$ forgatása a $\boldsymbol{d} = (0, 0, 1)$ körül α szöggel:</u>

$$\boldsymbol{q} = [\cos(\alpha/2), 0, 0, \sin(\alpha/2)] \cdot [0, \boldsymbol{u}] \cdot [\cos(\alpha/2), 0, 0, -\sin(\alpha/2)]$$

$$= (\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{i} \cdot (\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)\boldsymbol{k})$$

$$= (\cos(\alpha/2)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha/2)\boldsymbol{j}) \cdot (\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)\boldsymbol{k})$$

$$= (\cos^2(\alpha/2)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\boldsymbol{j} + \cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)\boldsymbol{j} - \sin^2(\alpha/2)\boldsymbol{i}$$

$$= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2))\boldsymbol{i} + 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\boldsymbol{j}$$

$$= \cos(\alpha)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha)\boldsymbol{j}$$

Implementáció: ***q*** = *s*+*x**i***+*y**j***+*z**k*** = vec4

```
struct vec4 {
   float x, y, z, w;
   …
};
```

```
vec4 qmul(vec4 q1, vec4 q2) { // kvaternió szorzás
   vec3 d1(q1.x, q1.y, q1.z), d2(q2.x, q2.y, q2.z);
   return vec4(d2 * q1.w + d1 * q2.w + cross(d1, d2),
               q1.w * q2.w - dot(d1, d2));
}
```

```
vec4 quaternion(float ang, vec3 axis) { // konstruálás
   vec3 d = normalize(axis) * sinf(ang / 2);
   return vec4(d.x, d.y, d.z, cosf(ang / 2));
}
```

```
vec3 Rotate(vec3 u, vec4 q) {
   vec4 qinv(-q.x, -q.y, -q.z, q.w);  // conjugate
   vec4 qr = qmul(qmul(q, vec4(u.x, u.y, u.z, 0)), qinv);
   return vec3(qr.x, qr.y, qr.z);
}
```

GPU shader programozás GLSL nyelven

```
uniform vec4 q;    // quaternion as uniform variable
in vec3 u;         // Varying input: vertex

vec4 qmul(vec4 q1, vec4 q2) {
   vec3 d1 = q1.xyz, d2 = q2.xyz;
   return vec4(d2 * q1.w + d1 * q2.w + cross(d1, d2),
               q1.w * q2.w - dot(d1, d2));
}

void main() { // vertex shader program
  vec4 qinv = vec4(-q.xyz, q.w);    // conjugate
  vec3 v = qmul(qmul(q, vec4(u, 0)), qinv).xyz;
  gl_Position = vec4(v, 1);
}
```

Kvaterniók

- 2D geometriát a komplex számok is megalapozzák algebrailag
- 3D általánosítás a forgatás asszociativitása és invertálhatósága miatt nem megy közvetlenül
- 4D-ben viszont OK: kvaterniók
- Forgatás = két kvaternió szorzás
- Kvaternió = vec4 speciális szorzással

“For geometry, you know, is the gate of science, and the gate is so low and small that we can only enter it as a little child.”
William Kingdon Clifford

Geometriai (Clifford) algebra

Szirmay-Kalos László

Geometriához használt algebrák állatkertje

Alakzatok

2D

- Pont: $[x, y]$, $[x, y, w]$, komplex szám
- Egyenes: $ax + by + c = 0$
- Metrika: skaláris szorzás, külső szorzás

Mozgatások (motorok)

- Eltolás: vektor, komplex szám
- **Forgatás, eltolás**, skálázás, tükröz, nyírás, vetítés, …: 3x3-as mátrix
- 2D forgatva nyújtás: komplex sz.
- Deriválás: duális szám

3D

- Pont: $[x, y, z]$, $[x, y, z, w]$
- Sík: $ax + by + cz + d = 0$
- Metrika: skaláris szorzás, külső szorzás, vektoriális szorzás

- Eltolás: vektor
- Forgatás, skálázás, tükrözés, nyírás, vetítés, perspektíva, …: 4x4-es mátrix
- Origón átmentő tengely körül 3D forgatás: kvaternió

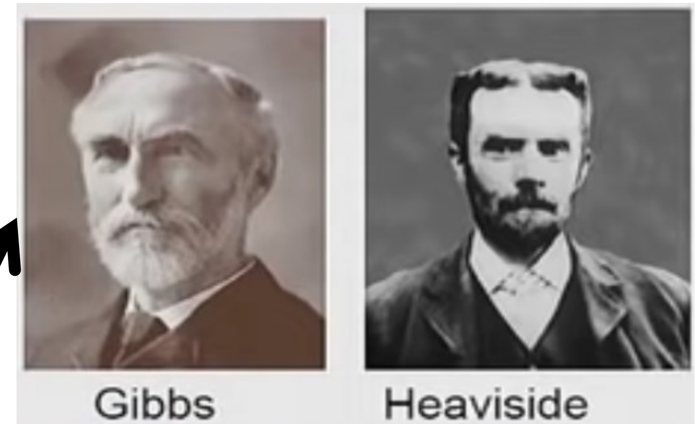
Vektor osztás (csoport)

- Szorzatok: skalár/vektor szorzás nem asszociatív, semelyik sem invertálható (független egyenletek száma kisebb, mint a vektor koordinátáinak száma)
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = b \Rightarrow |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}| \cos(\alpha) = b$
  - $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{v}$ síkja ismert és $|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}| \sin(\alpha) = |\boldsymbol{b}|$
  - A (skaláris + külső) invertálható volna
- Megoldás: **Geometriai (Clifford) algebra**
  - Az irányított szakasz (=vektor) mellett, irányított terület (=bivektor), térfogat (=trivektor), stb. is részt vesznek.
  - 2D-ben 4 elemű bázis: skalár + 2 vektor + 1 bivektor
  - 3D-ben 8 elemű: (skalár + 3 vektor + 3 bivektor + 1 trivektor)
- Speciális esetek:
  - Komplex szám, Duális szám, Kvaternió, …

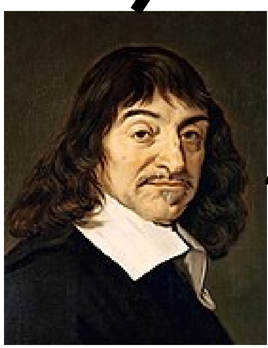
Vektor háború

Gauss
Komplex szám
1825

Hamilton:
Kvaternió
1843

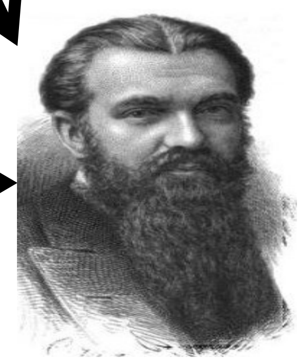


$$[x, y, z]$$



Descartes
Koordináták
1637

Grassman
1844



Clifford:
Geometriai
Algebra
1879

Geometriai számok és szorzat

- Vektor: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ Ortogonális: $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$
- Szorzás: asszociatív, disztributív, invertálható
- Kapcsolat a valós számokkal: $\boldsymbol{vv}$ legyen valós

$$\begin{aligned}\boldsymbol{vv} &= (x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)(x\boldsymbol{e}_0 + y\boldsymbol{e}_1) \\ &= x^2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + y^2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + xy(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)\end{aligned}$$

  - Bázis (geometriai számok): $\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = 1, \quad 0, \quad -1?$
  - Antiszimmetrikus: $\boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_{21}$
- Geometriai (Clifford) szorzat:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2)(x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2}$$

Inverz: $\boxed{\boldsymbol{v}^{-1} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{vv}}}$

2D geometriai algebra

- Multivektor: $\mathbf{V} = \underbrace{s}_{0\text{ dim}} + \overbrace{x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2}^{1\text{ dim}} + \underbrace{B\boldsymbol{e}_{12}}_{2\text{ dim}}$
- Összeadás, skálázás a szokásos módon
- Szorzás (asszociatív, disztributív, nemkommutatív):
  - skalár és bármi: a szokásos
  - Pszeudó-skalár és pszeudó-skalár:

$$\boldsymbol{e}_{12}\boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{e}_1\overset{-1}{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2 = -\overbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1}^{1}\overbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2}^{1} = -1$$

Ha $x = y = 0$, akkor a <u>komplex számokat</u> kapjuk: $\boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{I}$

  - Pszeudó-skalárral jobbról/balról: $\pm 90°$-os forgatás

$$(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_{12} = x\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + y\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -y\boldsymbol{e}_1 + x\boldsymbol{e}_2$$

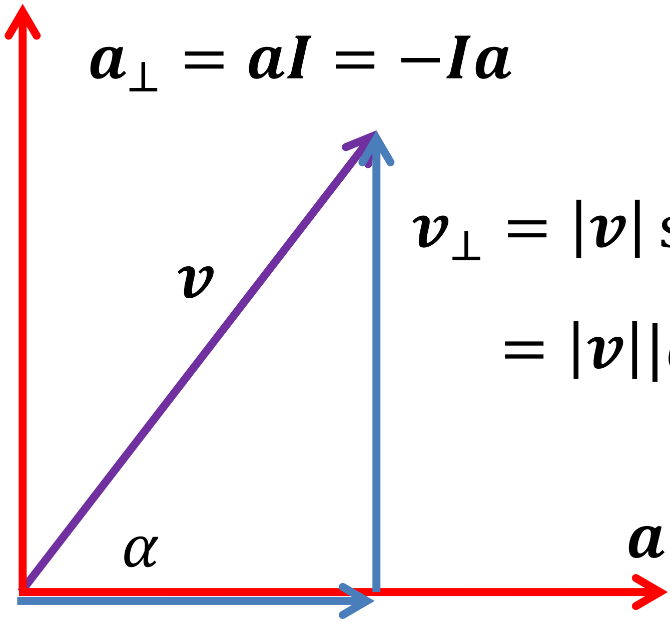
Szorzótábla

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{I}$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	1	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{I}$	1	$-\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{I}$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	-1

$$\mathbf{V} = s + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + B\boldsymbol{I}$$

Projection és Rejection

$$\boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{a}\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$$



$$\boldsymbol{v}_\perp = |\boldsymbol{v}|\sin(\alpha)\boldsymbol{a}_\perp/|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}|\sin(\alpha)\boldsymbol{a}_\perp/|\boldsymbol{a}|^2$$

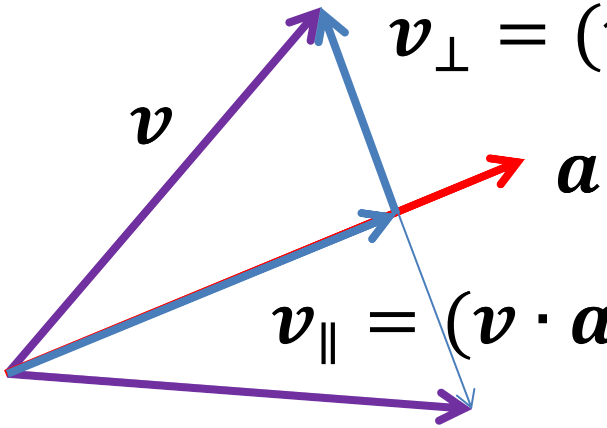
$$= |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}|\sin(\alpha)(-\boldsymbol{I})\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2 = \boxed{(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1}}$$

$$\boldsymbol{v}_\| = |\boldsymbol{v}|\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}|\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2 = \boxed{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1}}$$

Vektorokra:

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} &= (\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{v})/2 \\ \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{a} &= (\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{v})/2 \end{aligned}$$

Tükrözés és szendvics



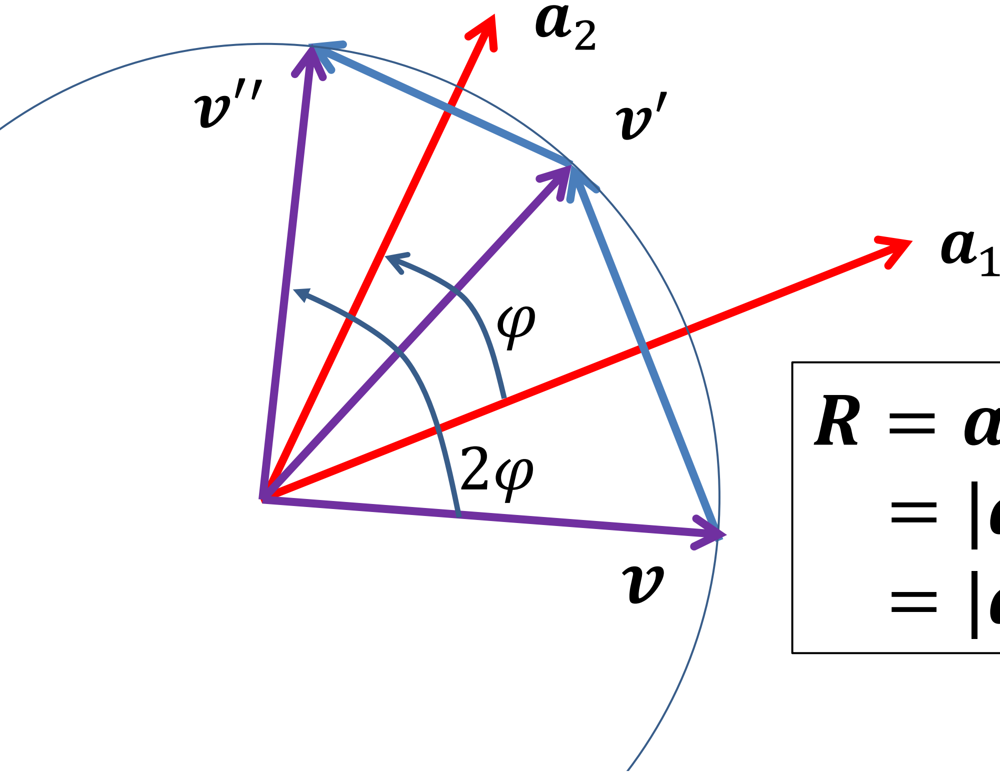
$$\boldsymbol{v}_\perp = (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v}_\parallel - \boldsymbol{v}_\perp = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} - (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} \\ &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}^{-1}}$$

Forgatás = 2 tükrözés



$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ &= |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|(\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\boldsymbol{I})\\ &= |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\exp(\varphi\boldsymbol{I})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{v}'\boldsymbol{a}_2{}^{-1} = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{v}'\boldsymbol{a}_1{}^{-1}\boldsymbol{a}_2{}^{-1} = (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1)^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}\boldsymbol{R}^{-1}} = (\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}(\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\boldsymbol{I})$$

Exponentiation

- A transzformációk szorzással működnek (multiplikatív csoport): $(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1)^{-1}$
- Rotor: $\boldsymbol{R}(\varphi_2 + \varphi_1) = \boldsymbol{R}(\varphi_2)\boldsymbol{R}(\varphi_2)$
- Hatványfüggvény: $\boldsymbol{R}(\varphi) = a^{\varphi} = \exp(b\varphi)$
- Ha $\varphi = \pi$, akkor $(-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{R}(\varphi) = \exp(\boldsymbol{I}\varphi)$

3 dimenzió

- Vektor: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$
- Geometriai (Clifford) szorzat:

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \qquad \text{Inverz:} \quad \boldsymbol{v}^{-1} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}$$

- Ortogonális bázis: $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0$
- Antiszimmetrikus: $i \neq j$

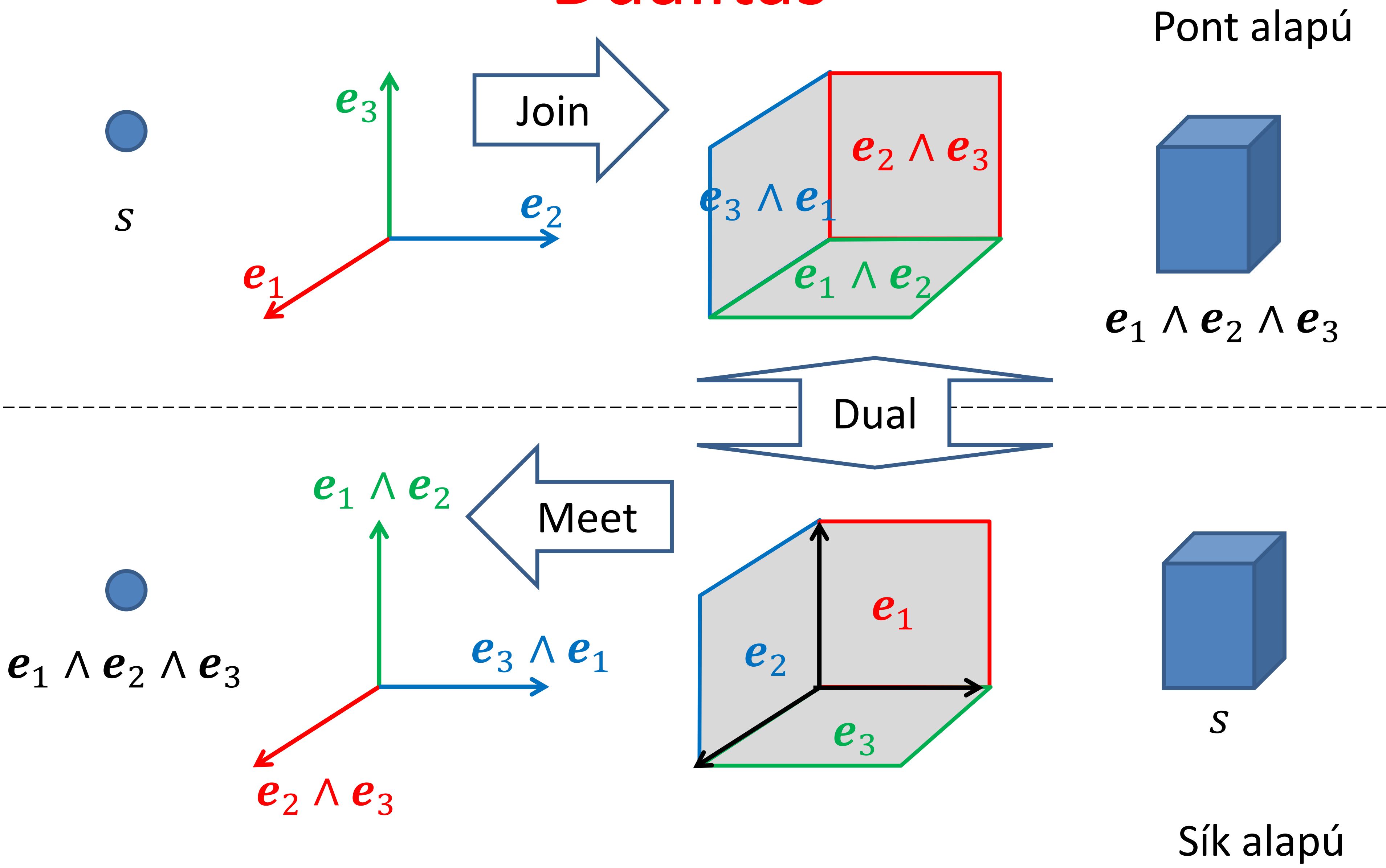
$$\boldsymbol{e}_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_{ji}$$

- Triviektor: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$
- Geometriai számok: $\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = 1$

$$(\boldsymbol{e}_{ij})^2 = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = -1$$

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -1$$

Dualitás



Pont alapú
s
e_3
e_2
e_1
Join
$e_2 \wedge e_3$
$e_3 \wedge e_1$
$e_1 \wedge e_2$
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
Dual
$e_1 \wedge e_2$
Meet
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$
$e_3 \wedge e_1$
$e_2 \wedge e_3$
e_1
e_2
e_3
s
Sík alapú

2D geometria: 3D-be ágyazott sík-alapú modell

- Sík-alapú: vektor = tükrözés, sík az invariánsa
  bivektor = forgatás, az egyenes az invariánsa
- Beágyazás: Eltolást is szeretnénk (origó nem része)
  - Egyenes: $ax + by + c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{l} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$
  - Pont: $\boldsymbol{p} = X\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + Y\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + w\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$
  - Geometriai számok: $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = 1$, $\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = 0$
  - 1. Ok: két egyenes szöge:

$$\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2 = a_1a_2{\boldsymbol{e}_1}^2 + b_1b_2{\boldsymbol{e}_2}^2 + c_1c_2{\boldsymbol{e}_3}^2$$

  - 2. Ok: Eltolás

$(\boldsymbol{e}_{12})^2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -1 \Rightarrow$ egy fajta forgatás

$(\boldsymbol{e}_{13})^2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_{23})^2 = 0 \Rightarrow$ két fajta eltolás

Ellenőrző kérdések

- Bizonyítsa be, hogy ha a transzformált *x', y'* koordináták az eredeti *x, y*-nak lineáris függvényei, akkor a transzformáció egyenest egyenesbe képez le és a párhuzamos egyeneseket megtartja!
- Lehet-e egy affin transzformációnak olyan mátrixa, ahol az utolsó oszlop nem [0, 0, 0, 1]?
- Írja fel az adott irányú, origón átmenő tengely körül alfa szöggel forgató transzformáció mátrixát!
- Írja fel a vektoriális szorzást mátrixművelettel?
- Írja fel egy síkra merőlegesen vetítő, illetve centrálisan vetítő transzformációk mátrixait!
- Hogyan oldható fel az átfordulási probléma?
- Milyen alakzat az összes ideális pontot tartalmazó halmaz?
- Írja fel egy parabola egyenletét a projektív síkon!
- Határozza meg két párhuzamos egyenes metszéspontjának (homogén) koordinátáit a projektív síkon!
- Adjon meg transzformációt, amely egy adott háromszöget egy másik adott háromszögbe képez le!
- *Adjon meg transzformációt, amely egy konvex négyszöget egy konvex négyszögbe képez le! Mi történik, ha a négyszög nem konvex?*