

Lógica

06 - Dedução Natural

Marcos Roberto Ribeiro



Instituto Federal Minas Gerais - Campus Bambuí

2018

- A dedução natural utiliza certas regras para inferir novas fórmulas a partir de um conjunto de fórmulas (chamadas de *premissas*)
- É preciso usar um processo criativo para determinar quais regras e em qual ordem aplicá-las

Regras para a Conjunção

- A regra \wedge_i permite concluir $\phi \wedge \psi$, dado que ϕ e ψ já foram concluídas

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

- para cada conectivo, existem regras de inclusão e eliminação
- As regras de eliminação do \wedge são:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e2}$$

Exemplo: demonstração de $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$ premissa
2. r premissa
3. q $\wedge_e, 1$
4. $q \wedge r$ $\wedge_i, 2, 3$

Regras para a Conjunção

- A regra \wedge_i permite concluir $\phi \wedge \psi$, dado que ϕ e ψ já foram concluídas

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

- para cada conectivo, existem regras de inclusão e eliminação
- As regras de eliminação do \wedge são:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e2}$$

Exemplo: demonstração de $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$ premissa
2. r premissa
3. q $\wedge_e, 1$
4. $q \wedge r$ $\wedge_i, 2, 3$

Regras para a Conjunção

- A regra \wedge_i permite concluir $\phi \wedge \psi$, dado que ϕ e ψ já foram concluídas

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

- para cada conectivo, existem regras de inclusão e eliminação
- As regras de eliminação do \wedge são:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e2}$$

Exemplo: demonstração de $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$ premissa
2. r premissa
3. q $\wedge_e, 1$
4. $q \wedge r$ $\wedge_i, 2, 3$

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1. $(p \wedge q) \wedge r$ premissa
2. $s \wedge t$ premissa

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1. $(p \wedge q) \wedge r$ premissa
2. $s \wedge t$ premissa
3. $p \wedge q$ $\wedge_e, 1$

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1. $(p \wedge q) \wedge r$ premissa
2. $s \wedge t$ premissa
3. $p \wedge q$ $\wedge_e, 1$
4. q $\wedge_e, 3$

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

- | | | |
|----|-------------------------|---------------|
| 1. | $(p \wedge q) \wedge r$ | premissa |
| 2. | $s \wedge t$ | premissa |
| 3. | $p \wedge q$ | $\wedge_e, 1$ |
| 4. | q | $\wedge_e, 3$ |
| 5. | s | $\wedge_e, 2$ |

Exercício

Demonstre $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

- | | | |
|----|-------------------------|------------------|
| 1. | $(p \wedge q) \wedge r$ | premissa |
| 2. | $s \wedge t$ | premissa |
| 3. | $p \wedge q$ | $\wedge_e, 1$ |
| 4. | q | $\wedge_e, 3$ |
| 5. | s | $\wedge_e, 2$ |
| 6. | $q \wedge s$ | $\wedge_i, 4, 5$ |

Regras para A Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | p | premissa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $\neg\neg_i, 1$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $\neg\neg_e, 2$ |
| 5. | r | $\wedge_e, 4$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Regras para A Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | p | premissa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $\neg\neg_i, 1$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $\neg\neg_e, 2$ |
| 5. | r | $\wedge_e, 4$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Regras para A Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | p | premissa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $\neg\neg_i, 1$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $\neg\neg_e, 2$ |
| 5. | r | $\wedge_e, 4$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Regras para A Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | p | premissa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $\neg\neg_i, 1$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $\neg\neg_e, 2$ |
| 5. | r | $\wedge_e, 4$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Regras para A Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | p | premissa |
| 2. | $\neg\neg(q \wedge r)$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | $\neg\neg_i, 1$ |
| 4. | $q \wedge r$ | $\neg\neg_e, 2$ |
| 5. | r | $\wedge_e, 4$ |
| 6. | $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Regra para Eliminar o Condicional

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Exemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | q | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 4, 5$ |

Regra para Eliminar o Condicional

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Exemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | q | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 4, 5$ |

Regra para Eliminar o Condicional

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Exemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | q | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 4, 5$ |

Regra para Eliminar o Condicional

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Exemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | q | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 4, 5$ |

Regra Modus Tollens

- Suponha que temos $p \rightarrow q$ e $\neg q$
- Se p é verdadeiro, podemos inferir q (usando a regra \rightarrow_e)
- Porém, teríamos q e $\neg q$ que é um absurdo
- Portanto, p não pode ser verdadeiro e temos $\neg p$

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

Exemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | p | premissa |
| 3. | $\neg r$ | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 2$ |
| 5. | $\neg q$ | MT, 4, 3 |

Regra Modus Tollens

- Suponha que temos $p \rightarrow q$ e $\neg q$
- Se p é verdadeiro, podemos inferir q (usando a regra \rightarrow_e)
- Porém, teríamos q e $\neg q$ que é um absurdo
- Portanto, p não pode ser verdadeiro e temos $\neg p$

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

Exemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | p | premissa |
| 3. | $\neg r$ | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 2$ |
| 5. | $\neg q$ | MT, 4, 3 |

Regra Modus Tollens

- Suponha que temos $p \rightarrow q$ e $\neg q$
- Se p é verdadeiro, podemos inferir q (usando a regra \rightarrow_e)
- Porém, teríamos q e $\neg q$ que é um absurdo
- Portanto, p não pode ser verdadeiro e temos $\neg p$

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

Exemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premissa |
| 2. | p | premissa |
| 3. | $\neg r$ | premissa |
| 4. | $q \rightarrow r$ | $\rightarrow_e, 1, 2$ |
| 5. | $\neg q$ | MT, 4, 3 |

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

1. $\neg p \rightarrow q$ premissa
2. $\neg q$ premissa
3. $\neg\neg p$ MT, 1, 2
4. p $\neg\neg_e$, 3

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

1. $\neg p \rightarrow q$ premissa
2. $\neg q$ premissa
3. $\neg\neg p$ MT, 1, 2
4. p $\neg\neg_e$, 3

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

1. $\neg p \rightarrow q$ premissa
2. $\neg q$ premissa
3. $\neg\neg p$ MT, 1, 2
4. p $\neg\neg_e$, 3

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $\neg p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg q$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | MT, 1, 2 |
| 4. | p | $\neg\neg_e$, 3 |

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 2. | q | premissa |
| 3. | $\neg\neg q$ | $\neg\neg_i$, 2 |
| 4. | $\neg p$ | MT, 1, 3 |

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $\neg p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg q$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | MT, 1, 2 |
| 4. | p | $\neg\neg_e$, 3 |

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 2. | q | premissa |
| 3. | $\neg\neg q$ | $\neg\neg_i$, 2 |
| 4. | $\neg p$ | MT, 1, 3 |

Exercícios: Demonstre

a) $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $\neg p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg q$ | premissa |
| 3. | $\neg\neg p$ | MT, 1, 2 |
| 4. | p | $\neg\neg_e$, 3 |

b) $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 2. | q | premissa |
| 3. | $\neg\neg q$ | $\neg\neg_i$, 2 |
| 4. | $\neg p$ | MT, 1, 3 |

Regra para Introdução do Condicional

- Supondo que sabemos que $p \rightarrow q$
- Se considerarmos *temporariamente* que $\neg q$ é verdade, podemos usar *MT* para inferir $\neg p$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $\neg q$ hipótese

3. $\neg p$ MT, 1, 2

4. $\neg q \rightarrow \neg p$ \rightarrow_i , 2–3

- Podemos aplicar normalmente regras dentro da caixa para inferir fórmulas que dependem da hipótese $\neg q$
- Quando aplicamos a regra \rightarrow_i , podemos concluir a fórmula $\neg q \rightarrow \neg p$ que independe da hipótese $\neg q$

Regra para Introdução do Condicional

- Supondo que sabemos que $p \rightarrow q$
- Se considerarmos *temporariamente* que $\neg q$ é verdade, podemos usar *MT* para inferir $\neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg q$	hipótese
3.	$\neg p$	MT, 1, 2
4.	$\neg q \rightarrow \neg p$	\rightarrow_i , 2–3

- Podemos aplicar normalmente regras dentro da caixa para inferir fórmulas que dependem da hipótese $\neg q$
- Quando aplicamos a regra \rightarrow_i , podemos concluir a fórmula $\neg q \rightarrow \neg p$ que independe da hipótese $\neg q$

Regra para Introdução do Condicional

- Supondo que sabemos que $p \rightarrow q$
- Se considerarmos *temporariamente* que $\neg q$ é verdade, podemos usar *MT* para inferir $\neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg q$	hipótese
3.	$\neg p$	MT, 1, 2
4.	$\neg q \rightarrow \neg p$	\rightarrow_i , 2–3

- Podemos aplicar normalmente regras dentro da caixa para inferir fórmulas que dependem da hipótese $\neg q$
- Quando aplicamos a regra \rightarrow_i , podemos concluir a fórmula $\neg q \rightarrow \neg p$ que independe da hipótese $\neg q$

Regra para Introdução do Condicional

- Supondo que sabemos que $p \rightarrow q$
- Se considerarmos *temporariamente* que $\neg q$ é verdade, podemos usar *MT* para inferir $\neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg q$	hipótese
3.	$\neg p$	MT, 1, 2
4.	$\neg q \rightarrow \neg p$	\rightarrow_i , 2–3

- Podemos aplicar normalmente regras dentro da caixa para inferir fórmulas que dependem da hipótese $\neg q$
- Quando aplicamos a regra \rightarrow_i , podemos concluir a fórmula $\neg q \rightarrow \neg p$ que independe da hipótese $\neg q$

Regra para Introdução do Condicional

- Supondo que sabemos que $p \rightarrow q$
- Se considerarmos *temporariamente* que $\neg q$ é verdade, podemos usar *MT* para inferir $\neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$\neg q$	hipótese
3.	$\neg p$	MT, 1, 2
4.	$\neg q \rightarrow \neg p$	\rightarrow_i , 2–3

- Podemos aplicar normalmente regras dentro da caixa para inferir fórmulas que dependem da hipótese $\neg q$
- Quando aplicamos a regra \rightarrow_i , podemos concluir a fórmula $\neg q \rightarrow \neg p$ que independe da hipótese $\neg q$

A regra \rightarrow_i

- A regra \rightarrow_i é formulada da seguinte maneira:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

Atenção

Só podemos usar fórmulas anteriores à caixa, se estas não estiverem em caixas já fechadas

- A linha após a caixa deve ser a aplicação da regra \rightarrow_i sobre a primeira e a última linha da caixa

Exemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg\neg p$ $\neg\neg_i, 2$

4. $\neg\neg q$ MT, 1, 3

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow_i, 2-4$

A regra \rightarrow_i

- A regra \rightarrow_i é formulada da seguinte maneira:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

Atenção

Só podemos usar fórmulas anteriores à caixa, se estas não estiverem em caixas já fechadas

- A linha após a caixa deve ser a aplicação da regra \rightarrow_i sobre a primeira e a última linha da caixa

Exemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg\neg p$ $\neg\neg_i, 2$

4. $\neg\neg q$ MT, 1, 3

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow_i, 2-4$

A regra \rightarrow_i

- A regra \rightarrow_i é formulada da seguinte maneira:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

Atenção

Só podemos usar fórmulas anteriores à caixa, se estas não estiverem em caixas já fechadas

- A linha após a caixa deve ser a aplicação da regra \rightarrow_i sobre a primeira e a última linha da caixa

Exemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg\neg p$ $\neg\neg_i, 2$

4. $\neg\neg q$ MT, 1, 3

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow_i, 2-4$

A regra \rightarrow_i

- A regra \rightarrow_i é formulada da seguinte maneira:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

Atenção

Só podemos usar fórmulas anteriores à caixa, se estas não estiverem em caixas já fechadas

- A linha após a caixa deve ser a aplicação da regra \rightarrow_i sobre a primeira e a última linha da caixa

Exemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg\neg p$ $\neg\neg_i, 2$

4. $\neg\neg q$ MT, 1, 3

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow_i, 2-4$

A regra \rightarrow_i

- A regra \rightarrow_i é formulada da seguinte maneira:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

Atenção

Só podemos usar fórmulas anteriores à caixa, se estas não estiverem em caixas já fechadas

- A linha após a caixa deve ser a aplicação da regra \rightarrow_i sobre a primeira e a última linha da caixa

Exemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

1. $\neg q \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg\neg p$ $\neg\neg_i, 2$

4. $\neg\neg q$ MT, 1, 3

5. $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow_i, 2-4$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exemplo: Demonstração do Teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	hipótese
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$\neg \neg p$	$\neg \neg_i, 3$
5.	$\neg \neg q$	MT, 2, 4
6.	q	$\neg \neg_e, 5$
7.	r	$\rightarrow_e, 1, 6$
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-7$
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow_i, 2-8$
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow_i, 1-9$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ premissa

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ premissa
2.

p	hipótese
-----	----------

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ premissa

2. p hipótese

3. q hipótese

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa
2.	p	hipótese
3.	q	hipótese
4.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 3$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa
2.	p	hipótese
3.	q	hipótese
4.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 3$
5.	r	$\rightarrow_e, 2, 4$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa
2.	p	hipótese
3.	q	hipótese
4.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 3$
5.	r	$\rightarrow_e, 2, 4$
6.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow_i, 3-5$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ premissa

2. p hipótese

3. q hipótese

4. $p \wedge q$ $\wedge_i, 2, 3$

5. r $\rightarrow_e, 2, 4$

6. $q \rightarrow r$ $\rightarrow_i, 3-5$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $\rightarrow_i, 2-6$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa
2.

$p \wedge q$	hipótese
--------------	----------

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. $q \rightarrow r$ $\rightarrow_e, 1, 3$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. $q \rightarrow r$ $\rightarrow_e, 1, 3$

5. q $\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. $q \rightarrow r$ $\rightarrow_e, 1, 3$

5. q $\wedge_e, 2$

6. r $\rightarrow_e, 4, 5$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. $q \rightarrow r$ $\rightarrow_e, 1, 3$

5. q $\wedge_e, 2$

6. r $\rightarrow_e, 4, 5$

7. $(p \wedge q) \rightarrow r$ $\rightarrow_i, 2-6$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1. $p \rightarrow q$ premissa

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

- | | | |
|----|-------------------|----------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \wedge r$ | hipótese |

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \wedge r$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \wedge r$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	r	$\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \wedge r$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	r	$\wedge_e, 2$
5.	q	$\rightarrow_e, 1, 3$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \wedge r$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	r	$\wedge_e, 2$
5.	q	$\rightarrow_e, 1, 3$
6.	$q \wedge r$	$\wedge_i, 5, 4$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \wedge r$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	r	$\wedge_e, 2$
5.	q	$\rightarrow_e, 1, 3$
6.	$q \wedge r$	$\wedge_i, 5, 4$
7.	$(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$	$\rightarrow_i, 2-6$

Regras para Disjunção

- Dada uma premissa ϕ podemos inferir que “ $\phi \vee \psi$ ” é verdadeira para qualquer ψ , pois já sabemos que ϕ é verdadeira
- As regras de inclusão da disjunção são as seguintes:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

- Para demonstrar uma proposição χ supondo $\phi \vee \psi$, temos que fazer duas demonstrações separadas e combiná-las
 1. Primeiro, supomos que ϕ é verdadeira e demonstramos χ
 2. Em seguida, supomos que ψ é verdadeira e demonstramos χ
 3. Dadas estas demonstrações, podemos inferir χ a partir de $\phi \vee \psi$ com a seguinte regra:

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{|c|} \hline \phi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array}}{\chi} \vee_e$$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa

2. p hipótese

3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$

4. q hipótese

5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$

6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa

2. p hipótese

3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$

4. q hipótese

5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$

6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa

2. p hipótese

3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$

4. q hipótese

5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$

6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa

2. p hipótese

3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$

4. q hipótese

5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$

6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa
2. p hipótese
3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$
4. q hipótese
5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$
6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ premissa

2. p hipótese

3. $q \vee p$ $\vee_i, 2$

4. q hipótese

5. $q \vee p$ $\vee_i, 4$

6. $q \vee p$ $\vee_e, 1, 2-3, 4-5$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee r$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	$p \vee r$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee r$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow_i, 2-8$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1.	$(p \vee q) \vee r$	premissa
2.	$p \vee q$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 3$
5.	q	hipótese
6.	$q \vee r$	$\vee_i, 5$
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 6$
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
9.	r	hipótese
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_i, 10$
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-8, 9-11$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exemplo (distributividade): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$\wedge_e, 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e, 1$
4.	q	hipótese
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 5$
7.	r	hipótese
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e, 3, 5-6, 7-9$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. q $\wedge_e, 2$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. q $\wedge_e, 2$

5. $q \vee r$ $\vee_i, 4$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

- | | | |
|----|----------------------------------|------------------|
| 1. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $p \wedge q$ | hipótese |
| 3. | p | $\wedge_e, 2$ |
| 4. | q | $\wedge_e, 2$ |
| 5. | $q \vee r$ | $\vee_i, 4$ |
| 6. | $p \wedge (q \vee r)$ | $\wedge_i, 3, 5$ |

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. q $\wedge_e, 2$

5. $q \vee r$ $\vee_i, 4$

6. $p \wedge (q \vee r)$ $\wedge_i, 3, 5$

7. $p \wedge r$ hipótese

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. q $\wedge_e, 2$

5. $q \vee r$ $\vee_i, 4$

6. $p \wedge (q \vee r)$ $\wedge_i, 3, 5$

7. $p \wedge r$ hipótese

8. p $\wedge_e, 7$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ premissa

2. $p \wedge q$ hipótese

3. p $\wedge_e, 2$

4. q $\wedge_e, 2$

5. $q \vee r$ $\vee_i, 4$

6. $p \wedge (q \vee r)$ $\wedge_i, 3, 5$

7. $p \wedge r$ hipótese

8. p $\wedge_e, 7$

9. r $\wedge_e, 7$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	premissa
2.	$p \wedge q$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	q	$\wedge_e, 2$
5.	$q \vee r$	$\vee_i, 4$
6.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_i, 3, 5$
7.	$p \wedge r$	hipótese
8.	p	$\wedge_e, 7$
9.	r	$\wedge_e, 7$
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	premissa
2.	$p \wedge q$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	q	$\wedge_e, 2$
5.	$q \vee r$	$\vee_i, 4$
6.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_i, 3, 5$
7.	$p \wedge r$	hipótese
8.	p	$\wedge_e, 7$
9.	r	$\wedge_e, 7$
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_i, 8, 10$

Exercício: Demonstre $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	premissa
2.	$p \wedge q$	hipótese
3.	p	$\wedge_e, 2$
4.	q	$\wedge_e, 2$
5.	$q \vee r$	$\vee_i, 4$
6.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_i, 3, 5$
7.	$p \wedge r$	hipótese
8.	p	$\wedge_e, 7$
9.	r	$\wedge_e, 7$
10.	$q \vee r$	$\vee_i, 9$
11.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_i, 8, 10$
12.	$p \wedge (q \vee r)$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-11$

Regra Copiar

- Como regra adicional, podemos *copiar* uma fórmula que já sabemos, desde que tal fórmula não dependa de hipóteses temporárias de caixas já fechadas
- Exemplo: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	copie, 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 2-3$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 1-4$

Regra Copiar

- Como regra adicional, podemos *copiar* uma fórmula que já sabemos, desde que tal fórmula não dependa de hipóteses temporárias de caixas já fechadas
- Exemplo: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	copie, 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 2-3$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 1-4$

Regra Copiar

- Como regra adicional, podemos *copiar* uma fórmula que já sabemos, desde que tal fórmula não dependa de hipóteses temporárias de caixas já fechadas
- Exemplo: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	copie, 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 2-3$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 1-4$

Regra Copiar

- Como regra adicional, podemos *copiar* uma fórmula que já sabemos, desde que tal fórmula não dependa de hipóteses temporárias de caixas já fechadas
- Exemplo: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	copie, 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 2-3$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 1-4$

Regra Copiar

- Como regra adicional, podemos *copiar* uma fórmula que já sabemos, desde que tal fórmula não dependa de hipóteses temporárias de caixas já fechadas
- Exemplo: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1.	p	hipótese
2.	q	hipótese
3.	p	copie, 1
4.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow_i, 2-3$
5.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow_i, 1-4$

Regras para Negação

- Vimos as regras $\neg\neg_i$ e $\neg\neg_e$, mas não vimos regras que introduzem ou eliminem uma única negação
- Essas regras envolvem a noção de *contradição*
- Uma contradição possui o formato $\phi \wedge \neg\phi$ ou $\neg\phi \wedge \phi$, onde ϕ é uma fórmula qualquer
- A fórmula \perp denota a contradição
- Quando deduzimos uma fórmula ϕ a partir de uma fórmula ψ , supomos que se ϕ é válida então temos ψ
- Como a contradição \perp nunca é válida, podemos deduzir qualquer coisa de \perp
- Assim, temos as regras:

$$\frac{\perp}{\phi} \perp_e$$

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg_e$$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

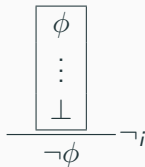
1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Exemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1.	$\neg p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	\perp	$\neg_e, 3, 2$
5.	q	$\perp_e, 4$
6.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 3-5$
7.	q	hipótese
8.	p	hipótese
9.	q	copie, 7
10.	$p \rightarrow q$	$\rightarrow_i, 8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$\vee_e, 1, 2-6, 7-10$

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

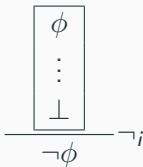


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \rightarrow \neg q$	premissa
3.	p	hipótese
4.	q	$\rightarrow_e, 1, 3$
5.	$\neg q$	$\rightarrow_e, 2, 3$
6.	\perp	$\neg_e, 4, 5$
7.	$\neg p$	$\neg_i, 1, 3-6$

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

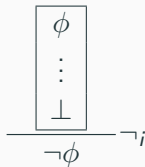


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | p | hipótese |
| 4. | q | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | $\neg q$ | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | \perp | $\neg_e, 4, 5$ |
| 7. | $\neg p$ | $\neg_i, 1, 3-6$ |

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

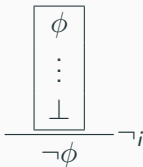


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premissa
2.	$p \rightarrow \neg q$	premissa
3.	p	hipótese
4.	q	$\rightarrow_e, 1, 3$
5.	$\neg q$	$\rightarrow_e, 2, 3$
6.	\perp	$\neg_e, 4, 5$
7.	$\neg p$	$\neg_i, 1, 3-6$

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

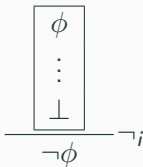


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | p | hipótese |
| 4. | q | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | $\neg q$ | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | \perp | $\neg_e, 4, 5$ |
| 7. | $\neg p$ | $\neg_i, 1, 3-6$ |

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

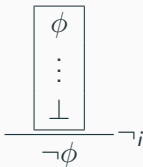


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | p | hipótese |
| 4. | q | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | $\neg q$ | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | \perp | $\neg_e, 4, 5$ |
| 7. | $\neg p$ | $\neg_i, 1, 3-6$ |

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:

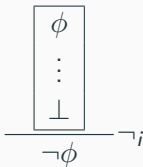


Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | p | hipótese |
| 4. | q | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | $\neg q$ | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | \perp | $\neg_e, 4, 5$ |
| 7. | $\neg p$ | $\neg_i, 1, 3-6$ |

Hipótese Falsa

- Supondo que temos um hipótese que leva a uma contradição (\perp)
- Então nossa hipótese não pode ser verdadeira
- Assim temos a regra:



Exemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | p | hipótese |
| 4. | q | $\rightarrow_e, 1, 3$ |
| 5. | $\neg q$ | $\rightarrow_e, 2, 3$ |
| 6. | \perp | $\neg_e, 4, 5$ |
| 7. | $\neg p$ | $\neg_i, 1, 3-6$ |

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

1. $p \rightarrow \neg p$ premissa

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

1. $p \rightarrow \neg p$ premissa
2.

p	hipótese
-----	----------

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

- | | | |
|----|------------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow \neg p$ | premissa |
| 2. | p | hipótese |
| 3. | $\neg p$ | $\rightarrow_e, 1, 2$ |

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

1.	$p \rightarrow \neg p$	premissa
2.	p	hipótese
3.	$\neg p$	$\rightarrow_e, 1, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 2, 3$

Exercício: Demonstre $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

1. $p \rightarrow \neg p$ premissa

2. p hipótese

3. $\neg p$ $\rightarrow_e, 1, 2$

4. \perp $\neg_e, 2, 3$

5. $\neg p$ $\neg_i, 2-4$

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

1. $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ premissa
2. $\neg r$ premissa
3. p premissa

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

- | | | |
|----|--|----------|
| 1. | $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $\neg r$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg q$</div> | hipótese |

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|------------------|
| 1. | $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $\neg r$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $\neg q$ | hipótese |
| 5. | $p \wedge \neg q$ | $\wedge_i, 3, 4$ |

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $\neg r$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $\neg q$ | hipótese |
| 5. | $p \wedge \neg q$ | $\wedge_i, 3, 4$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 1, 5$ |

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

1.	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$	premissa
2.	$\neg r$	premissa
3.	p	premissa
4.	$\neg q$	hipótese
5.	$p \wedge \neg q$	$\wedge_i, 3, 4$
6.	r	$\rightarrow_e, 1, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 2, 6$

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $\neg r$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $\neg q$ | hipótese |
| 5. | $p \wedge \neg q$ | $\wedge_i, 3, 4$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | \perp | $\neg_e, 6, 2$ |
| 8. | $\neg\neg q$ | $\neg_i, 4-7$ |

Exercício: Demonstre $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. | $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $\neg r$ | premissa |
| 3. | p | premissa |
| 4. | $\neg q$ | hipótese |
| 5. | $p \wedge \neg q$ | $\wedge_i, 3, 4$ |
| 6. | r | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | \perp | $\neg_e, 6, 2$ |
| 8. | $\neg\neg q$ | $\neg_i, 4-7$ |
| 9. | q | $\neg\neg_e, 8$ |

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Regras Deduzidas: *Modus Tollens* e $\neg\neg_i$

- A regra *modus tollens* é uma regra deduzida da seguinte maneira:

1. $\phi \rightarrow \psi$ premissa

2. $\neg\psi$ premissa

3. ϕ hipótese

4. ψ $\wedge_e, 1, 3$

5. \perp $\neg_e, 4, 2$

6. $\neg\phi$ $\neg_i, 3-5$

- Já a regra $\neg\neg_i$ possui a seguinte dedução:

1. ϕ premissa

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\neg_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

Demonstração por Absurdo (DPA)

- A demonstração por absurdo diz que se obtermos uma contradição a partir de $\neg\phi$, então podemos deduzir ϕ :

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\phi} DPA$$

- Demonstração:

1. $\neg\phi \rightarrow \perp$ dado

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\rightarrow_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

5. ϕ $\neg\neg_e, 4$

Demonstração por Absurdo (DPA)

- A demonstração por absurdo diz que se obtermos uma contradição a partir de $\neg\phi$, então podemos deduzir ϕ :

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\phi} DPA$$

- Demonstração:

1. $\neg\phi \rightarrow \perp$ dado

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\rightarrow_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

5. ϕ $\neg\neg_e, 4$

Demonstração por Absurdo (DPA)

- A demonstração por absurdo diz que se obtermos uma contradição a partir de $\neg\phi$, então podemos deduzir ϕ :

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\phi} DPA$$

- Demonstração:

1. $\neg\phi \rightarrow \perp$ dado

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\rightarrow_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

5. ϕ $\neg\neg_e, 4$

Demonstração por Absurdo (DPA)

- A demonstração por absurdo diz que se obtermos uma contradição a partir de $\neg\phi$, então podemos deduzir ϕ :

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\phi} DPA$$

- Demonstração:

1. $\neg\phi \rightarrow \perp$ dado

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\rightarrow_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

5. ϕ $\neg\neg_e, 4$

Demonstração por Absurdo (DPA)

- A demonstração por absurdo diz que se obtermos uma contradição a partir de $\neg\phi$, então podemos deduzir ϕ :

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\phi} DPA$$

- Demonstração:

1. $\neg\phi \rightarrow \perp$ dado

2. $\neg\phi$ hipótese

3. \perp $\rightarrow_e, 1, 2$

4. $\neg\neg\phi$ $\neg_i, 2-3$

5. ϕ $\neg\neg_e, 4$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído (LTE)*
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído (LTE)*
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído* (LTE)
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Terceiro Excluído

- A lei do terceiro excluído diz que $\phi \vee \neg\phi$ é verdadeira
- Qualquer que seja ϕ , a fórmula deve ser verdadeira ou falsa (não há uma terceira possibilidade)
- Isto é chamado de *lei do terceiro excluído (LTE)*
- Demonstração:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	hipótese
2.	ϕ	hipótese
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 2$
4.	\perp	$\neg_e, 3, 1$
5.	$\neg\phi$	$\neg_i, 2-4$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_i, 5$
7.	\perp	$\neg_e, 6, 1$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i, 1-7$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e, 8$

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

- | | | |
|----|-------------------|-----------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \vee p$ | LTE |
| 3. | $\neg p$ | hipótese |
| 4. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 3$ |
| 5. | p | hipótese |
| 6. | q | $\rightarrow_e, 1, 5$ |
| 7. | $\neg p \vee q$ | $\vee_i, 6$ |
| 8. | $\neg p \vee q$ | $\vee_e, 2, 3-4, 5-7$ |

Exemplo com LTE: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

1. $p \rightarrow q$ premissa
2. $\neg p \vee p$ LTE
3.

$\neg p$	hipótese
$\neg p \vee q$	$\vee_i, 3$
4.

p	hipótese
q	$\rightarrow_e, 1, 5$
$\neg p \vee q$	$\vee_i, 6$
5.

$\neg p \vee q$	$\vee_e, 2, 3-4, 5-7$
-----------------	-----------------------

Referências I



de Souza, J. N. (2008).

Lógica para ciência da computação: uma introdução concisa.

Elsevier, Rio de Janeiro, 2 edition.



Huth, M. and Ryan, M. (2008).

Lógica em ciência da computação: modelagem e argumentação sobre sistemas.

LTC, Rio de Janeiro, 2 edition.



Silva, F. S. C., Finger, M., and Melo, A. C. V. (2010).

Lógica para computação.

Cengage Learning, São Paulo, 2 edition.