Lógica

05 - Axiomatização

Marcos Roberto Ribeiro

Instituto Federal Minas Gerais - Campus Bambuí

2018

Introdução

- A axiomatização é o sistema dedutivo mais antigo que se conhece
- Também conhecida como sistema de Hilbert
- A Axiomatização possui dois tipos de elementos:
  - Os axiomas, que são fórmulas da lógica com status de *verdade básicas*
  - As regras de inferência, que permitem inferir novas fórmulas a partir das fórmulas já existentes

Substituições

- A substituição de uma sub-fórmula p por uma sub-fórmula q em uma fórmula H, denotado por $H[p/q]$ ocorre da seguinte maneira:
  - Se $H = p$ então $H[p/q] = q$
  - Se $H = q$ então $H[p/q] = q$
  - Se $H = \neg G$ então $H[p/q] = \neg G[p/q]$
  - Se $H = G\theta E$ então $H[p/q] = G[p/q]\theta E[p/q]$ para $\theta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- Exemplo: $H = (p \rightarrow (p \wedge q))$, substituição $H[p/(r \vee s)]$

$$\begin{aligned} (p \rightarrow (p \wedge q))[p/(r \vee s)] &= (p[p/(r \vee s)] \rightarrow (p \wedge q)[p/(r \vee s)]) \\ &= ((r \vee s) \rightarrow (p[p/(r \vee s)] \wedge q[p/(r \vee s)])) \\ &= ((r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)) \end{aligned}$$

- Quando G é o resultado da substituição de uma ou mais sub-fórmulas de H, dizemos que G é uma instância de H

Axiomatização

- Podem existir diversas axiomatizações
- A seguir temos um grupo de axiomas que definem o comportamento dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
(\rightarrow_1)&: \; p \rightarrow (q \rightarrow p) \\
(\rightarrow_2)&: \; (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\
(\wedge_1)&: \; (p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \\
(\wedge_2)&: \; (p \wedge q) \rightarrow p \\
(\wedge_3)&: \; (p \wedge q) \rightarrow q \\
(\vee_1)&: \; (p \rightarrow (p \vee q) \\
(\vee_2)&: \; (q \rightarrow (p \vee q) \\
(\vee_3)&: \; (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \\
(\neg_1)&: \; (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \\
(\neg_2)&: \; \neg\neg p \rightarrow p
\end{aligned}
$$

- Consideramos também a regra de inferência *modus ponens* onde, dado $H \rightarrow G$ e H, podemos inferir G

Dedução e Teoremas

- Os axiomas podem ser instanciados, ou seja, seus átomos podem ser uniformemente substituídos por qualquer fórmula
- Com estes conceitos podemos definir o que é *dedução*
- Dedução é uma sequência de fórmulas $H_1, ..., H_n$ tal que cada fórmula da sequência ou é uma instância de um axioma ou é obtida por meio de regras de inferência
- Dizemos que a fórmula H é dedutível a partir do conjunto de fórmulas Γ, se há uma dedução, ou seja, uma sequência de fórmulas $H_1, ..., H_n = H$ tal que cada fórmula H_i na sequência:
  - Ou é uma fórmula $H_i \in \Gamma$
  - Ou é uma instância de um axioma
  - Ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de *modus ponens*
- Quando $\Gamma = \{\}$, dizemos que H é um teorema e denotamos por $\vdash H$
- Observe que a substituição não pode ser aplicada nas fórmulas de Γ, mas apenas nos axiomas

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, (2), (4)
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, (5), (7)

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, $(2), (4)$
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, $(5), (7)$

Exemplo de Dedução: Teorema $H \to H$

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$(\to_2)$
(2)	$(H \to ((H \to H) \to H)) \to ((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	$(1)[p/H][q/(H \to H)][r/H]$
(3)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(4)	$H \to ((H \to H) \to H)$	$(3)[p/H/[q/(H \to H)]$
(5)	$((H \to (H \to H)) \to (H \to H))$	*modus ponens*, (2), (4)
(6)	$p \to (q \to p)$	$(\to_1)$
(7)	$H \to (H \to H)$	$(6)[p/H/[q/H]$
(8)	$H \to H$	*modus ponens*, (5), (7)

Teorema da Dedução

- O *Teorema da Dedução* relaciona o conectivo da implicação ($\rightarrow$) com a dedução lógica ($\vdash$)

Teorema da Dedução

$\Gamma, H \vdash G$ se e somente se $\Gamma \vdash H \rightarrow G$

Exemplo de aplicação: $H \rightarrow G, E \rightarrow H, E \vdash G$

(1)	$H \rightarrow G$	*premissa*
(2)	$E \rightarrow H$	*premissa*
(3)	E	*premissa*
(4)	H	*modus ponens*, (2), (3)
(5)	G	*modus ponens*, (1), (4)

Teorema da Dedução

- O *Teorema da Dedução* relaciona o conectivo da implicação ($\rightarrow$) com a dedução lógica ($\vdash$)

Teorema da Dedução

$\Gamma, H \vdash G$ se e somente se $\Gamma \vdash H \rightarrow G$

Exemplo de aplicação: $H \rightarrow G, E \rightarrow H, E \vdash G$

(1)	$H \rightarrow G$	*premissa*
(2)	$E \rightarrow H$	*premissa*
(3)	E	*premissa*
(4)	H	*modus ponens*, (2), (3)
(5)	G	*modus ponens*, (1), (4)

- O *Teorema da Dedução* relaciona o conectivo da implicação ($\rightarrow$) com a dedução lógica ($\vdash$)

Teorema da Dedução

$\Gamma, H \vdash G$ se e somente se $\Gamma \vdash H \rightarrow G$

Exemplo de aplicação: $H \rightarrow G, E \rightarrow H, E \vdash G$

(1)	$H \rightarrow G$	*premissa*
(2)	$E \rightarrow H$	*premissa*
(3)	E	*premissa*
(4)	H	*modus ponens*, (2), (3)
(5)	G	*modus ponens*, (1), (4)

Teorema da Dedução

- O *Teorema da Dedução* relaciona o conectivo da implicação ($\rightarrow$) com a dedução lógica ($\vdash$)

Teorema da Dedução

$\Gamma, H \vdash G$ se e somente se $\Gamma \vdash H \rightarrow G$

Exemplo de aplicação: $H \rightarrow G, E \rightarrow H, E \vdash G$

(1)	$H \rightarrow G$	*premissa*
(2)	$E \rightarrow H$	*premissa*
(3)	E	*premissa*
(4)	H	*modus ponens*, (2), (3)
(5)	G	*modus ponens*, (1), (4)

Exercícios

Demonstre os seguintes teoremas:

a) $(H \to (G \to E)) \to (G \to (H \to E))$

b) $(H \to (H \to G)) \to (H \to G)$

c) $(\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p)$

d) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

e) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

f) $(p \land \neg p) \to q$

g) $p \to \neg\neg p$

Referências I

de Souza, J. N. (2008).
***Lógica para ciência da computação: uma introdução concisa*.**
Elsevier, Rio de Janeiro, 2 edition.

Huth, M. and Ryan, M. (2008).
***Lógica em ciência da computação: modelagem e argumentação sobre sistemas*.**
LTC, Rio de Janeiro, 2 edition.

Silva, F. S. C., Finger, M., and Melo, A. C. V. (2010).
***Lógica para computação*.**
Cengage Learning, São Paulo, 2 edition.