Lógica

09 - Lógica de Predicados

Marcos Roberto Ribeiro

Instituto Federal Minas Gerais - Campus Bambuí

2018

Introdução I

- A Lógica Proposicional tem limitações quando desejamos representar sentenças mais complexas
- Considere a seguinte sentença:
  "Todo estudante é mais jovem do que algum instrutor"
- Na Lógica Proposicional esta frase seria uma proposição p, mas isto não representa a estrutura lógica mais fina da sentença
- A sentença expressa alguns tipos de propriedades que gostaríamos de representar (Ex.: "ser estudante")
- Tais propriedades são representadas por predicados, como:
  - $E(André)$: André é estudante
  - $I(Paulo)$: Paulo é instrutor
  - $J(André, Paulo)$: André é mais jovem do que Paulo

Introdução II

- Além dos predicados temos que representar o significado de "todo" e "algum"
- Ademais, não queremos especificar todos os estudantes de uma instituição. Assim, usamos o conceito de "variável". Como:

  $E(x)$: x é estudante ("x" pode ser qualquer estudante)

  $I(y)$: y é instrutor

  $J(x, y)$: x é mais jovem do que y
- Quanto às palavras "todo" e "algum", precisamos dos chamados "quantificadores" para representá-las
- Os quantificadores são $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe). Eles sempre estão associados a variáveis. Ex.: $\forall x$, $\exists y$
- O predicados podem ter diferente números de variáveis. Por exemplo, os predicados E e I são unários e o predicado J é binário
- É possível usar predicados com qualquer número de variáveis na Lógica de Predicados

Introdução III

- Outro exemplo: " Nem todos as aves podem voar"

  $A(x)$: x é uma aves

  $V(x)$: x pode voar

  $\neg(\forall x(A(x) \rightarrow (v(x)))$ ou $\exists x(A(x) \wedge \neg V(x))$
- Também podemos demonstrar argumentos com a Lógica de Predicados. Ex.:

  "Nenhum livro é gasoso.

  Dicionários são livros.

  Logo, nenhum dicionário é gasoso."
- Predicados:

  $L(x)$: x é um livro

  $G(x)$: x é gasoso

  $D(x)$: x é um dicionário
- Dedução:
  - Simbólica: $\neg\exists x(L(x) \wedge G(x)), \forall x(D(x) \rightarrow L(x)) \vdash \neg\exists x(D(x) \wedge G(x))$
  - Semântica: $\neg\exists x(L(x) \wedge G(x)), \forall x(D(x) \rightarrow L(x)) \models \neg\exists x(D(x) \wedge G(x))$

Introdução IV

- A Lógica de Predicados estende a Lógica Proposicional não só com quantificadores, mas também com "símbolos funcionais". Considere a frase:
  "Toda criança é mais jovem do que sua mãe"
- Usando predicados, tal frase pode ser expressa como:
  $\forall x \forall y ((C(x) \wedge M(y, x)) \rightarrow J(x, y))$
- Não é muito conveniente falar "todas as mães de x", já que cada indivíduo possui apenas uma mãe. Considere também a frase:
  "André e Paulo têm a mesma avó materna"
- A frase pode ser codificada como:
  $\forall x \forall y \forall u \forall v ((M(x, y) \wedge M(y, André) \wedge M(u, v) \wedge M(v, Paulo)) \rightarrow (x = y))$

Introdução V

- Na Lógica Proposicional podemos usar o símbolo funcional $m(x)$ para denotar a mãe de x. Vamos agora reescrever a frase "Toda criança é mais jovem do que sua mãe" usando o símbolo funcional: $\forall x(C(x) \rightarrow J(x, m(x)))$
- Agora a frase "André e Paulo tem a mesma avó materna": $m(m(André)) = m(m(Paulo))$
- Os símbolos funcionais devem ser usados apenas para denotar objetos únicos. Não podemos usar um símbolo funcional para representar o irmão de um indivíduo
- Considere Maria que possui diversos irmãos, a afirmação "Ana gosta do irmão de Maria" é ambígua. Podemos dizer apenas que Ana gosta de um dos irmãos de maria: $\exists x(I(x, Maria) \wedge G(Ana, x))$

Introdução VI

- Os símbolos funcionais podem receber diversas variáveis, por exemplo, $n(x, y)$ é uma função binária que representa a nota do estudante x na disciplina y. As funções sem nenhuma variável são chamadas de constantes.

A Sintaxe da Lógica de Predicados - Termos

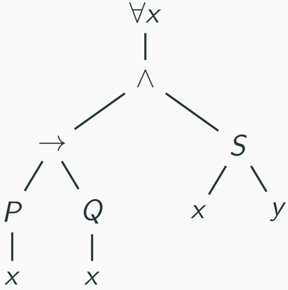
- Os termos dizem respeito a objetos e podem ser variáveis, constantes ou funções:
  - Qualquer variável é um termos
  - Se $c \in \mathcal{F}$ (conjunto de funções), então c é um termo
  - Se $t_1, ..., t_n$ são termos e $f \in \mathcal{F}$ é uma função, então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo

A Sintaxe da Lógica de Predicados - Fórmulas

- As fórmulas representam afirmações lógicas e são definidas considerando o conjunto de funções $\mathcal{F}$ e o conjunto de predicados $\mathcal{P}$ da seguinte maneira:
  - Se $P \in \mathcal{P}$ é um predicado n-ário e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $P(t_1, ..., t_n)$ é uma fórmula
  - Se ϕ e ψ são fórmulas, então $\neg\phi$, $\neg\psi$, $\phi \land \psi$, $\phi \lor \psi$ e $\phi \to \psi$ são fórmulas
  - Se ϕ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\phi$ e $\exists x\phi$ são fórmulas
- Ordem de prioridade:
  1. $\neg$, $\forall$ e $\exists$
  2. $\lor$ e $\land$
  3. $\to$

Árvores

- As fórmulas da Lógica de Predicados também podem ser representadas por árvores
- Exemplo: $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))$



Exemplo

- Considere a simbolização da frase "Todo filho de meu pai é meu irmão"
  - Constantes: *eu*
  - Predicados:

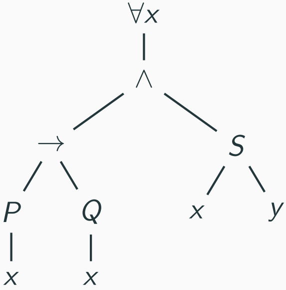
    $F(x, y)$: x é filho de y

    $P(x, y)$: x é pai de y

    $I(x, y)$: x é irmão de y
  - Fórmula: $\forall x \forall y((P(x, eu) \land F(y, x)) \rightarrow I(y, eu))$
- Agora usando a função $p(x)$ que retorna o pai de x:
  $\forall x(F(x, p(eu)) \rightarrow I(x, eu))$

Variáveis Livres e Presas I

- Considere a fórmula $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))$ e sua árvore



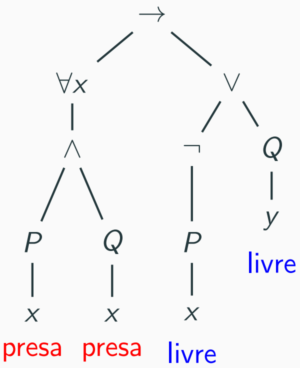
- A variável x está "presa" ao quantificador $\forall x$ pois são folhas do ramo que inicia em $\forall x$
- Por outro lado, a variável y está "livre" pois não está associada a nenhum quantificador

Variáveis Livres e Presas II

- Seja ϕ uma fórmula da Lógica de Predicados, x é livre em ϕ se não há quantificadores $\forall x$ ou $\exists x$ associados a x. Caso contrário, x está presa em ϕ.
- Também podemos dizer que x está presa se x está no escopo de um quantificador $\forall x$ ou $\exists x$

Exemplo

$$(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \to (\neg P(x) \vee Q(y))$$



Substituição

- As variáveis podem ser substituídas por informações mais concretas
- Dadas uma variável x, um termo t e uma fórmula ϕ, a notação $\phi[x/t]$ representa a substituição de todas as ocorrências livres de x em ϕ por t
- Exemplo:
  $(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))[x/f(x,y)]$
  $(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \vee Q(y))$
- o problema da substituição ocorre quando o termo substituído introduz uma variável presa. Quando isto acontece, dizemos que o quantificador "capturou" a variável
- Desta maneira, um termo t é livre para x em ϕ, se a substituição $\phi[x/t]$ não causa captura de variáveis

Dedução Natural com a Lógica de Predicados

- Além das regras já estudadas na dedução natural com a Lógica Proposicional, agora teremos novas regras para lidar com os quantificadores e igualdades da Lógica de Predicados
- Introdução da igualdade (todo termo é igual a ele mesmo):

$$\frac{}{t = t} =_i$$

- Exclusão da igualdade:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad [x/t_1]}{\phi[x/t_1]} =_e$$

- Na regra $=_e$, t_1 e t_2 devem ser livres para x em ϕ

Exemplos I

$x + 1 = 1 + x, (x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0) \vdash (1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0)$

1.	$(x + 1) = (1 + x)$	premissa
2.	$(x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0)$	premissa
3.	$(1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0)$	$=_e$, 1, 2

Exemplos II

$t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1.	$t_1 = t_2$	premissa
2.	$t_1 = t_1$	$=_i$, 1
3.	$t_2 = t_1$	$=_e$, 1, 2

$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1.	$t_1 = t_2$	premissa
2.	$t_2 = t_3$	premissa
3.	$t_1 = t_3$	$=_e$, 1, 2

Regras para o Quantificador Universal

- Eliminação:

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[x/t]} \forall x_e$$

- Se $\forall x \phi$ é verdade, então podemos substitui x em ϕ por qualquer termo t (desde que t seja livre para x em ϕ)
- Inclusão:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \phi} \forall x_i$$

- Se conseguirmos provar ϕ usando x_0, podemos trocar x_0 por x e incluir $\forall x$
- O importante é que x_0 só apareça dentro da caixa

Exemplos I

$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$

1.		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa
2.		$\forall x P(x)$	premissa
3.	x_0	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x_e$, 1
4.		$P(x_0)$	$\forall x_e$, 2
5.		$Q(x_0)$	$\to_e$, 3, 4
6.		$\forall x Q(x)$	$\forall x_i$, 3–5

Exemplos II

$P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1.	$P(t)$	premissa
2.	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premissa
3.	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$\forall x_e$, 2
4.	$\neg Q(t)$	$\rightarrow_e$, 3, 1

Regras para o Quantificador Existencial

- Regra para introdução:

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}\exists x_i$$

- Podemos deduzir $\exists x \phi$ sempre que tivermos $\phi[x/t]$ para algum termo t (que seja livre para x em ϕ)
- Regra da exclusão:

$$\frac{\exists x \phi \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & \phi[x/x_0] \\ & \quad\vdots \\ & \quad\chi \end{array}}}{\chi}\exists x_e$$

- A regra $\exists x_e$ trata x_0 como um valor genérico. Se conseguirmos demonstrar χ sem x_0, então podemos excluir o $\exists$

Exemplos I

$\forall x \phi \vdash \exists x \phi$

1.	$\forall x \phi$	premissa
2.	$\phi[x/x_0]$	$\forall x_e, 1$
3.	$\exists x \phi$	$\exists x_i, 2$

Exemplos II

$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1.		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa
2.		$\exists x P(x)$	premissa
3.	x_0	$P(x_0)$	hipótese
4.		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x_e$, 1
5.		$Q(x_0)$	$\to_e$, 3, 4
6.		$\exists x Q(x)$	$\exists x_i$, 5
7.		$\exists x Q(x)$	$\exists x_e$, 2, 3–5

A caixa é o escopo da variável x_0. A fórmula $\exists x Q(x)$ (linha 6) pode sair da caixa porque não há nenhuma referência a x_0.

Exemplos III

$\forall x(Q(x) \to R(x)), \exists x(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \land R(x))$

1.		$\forall x(Q(x) \to R(x))$	premissa
2.		$\exists x(P(x) \land Q(x))$	premissa
3.	x_0	$P(x_0) \land Q(x_0)$	hipótese
4.		$Q(x_0) \to R(x_0)$	$\forall x_e$, 1
5.		$Q(x_0)$	$\land_e$, 3
6.		$R(x_0)$	$\to_e$, 4, 5
7.		$P(x_0)$	$\land_e$, 3
8.		$P(x_0) \land R(x_0)$	$\land_i$, 7, 6
9.		$\exists x P(x) \land R(x)$	$\exists x_i$, 8
10.		$\exists x P(x) \land R(x)$	$\exists x_e$, 2, 3–9

Exemplos IV

$\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

1.		$\exists x P(x)$	premissa
2.		$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$	premissa
3.	y_0		
4.	x_0	$P(x_0)$	hipótese
5.		$\forall y (P(x_0) \to Q(y)$	$\forall x_e$, 2
6.		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y_e$, 5
7.		$Q(y_0)$	$\to_e$, 6, 4
8.		$Q(y_0)$	$\exists x_e$, 1, 4–7
9.		$\forall y Q(y)$	$\forall y_i$, 3–8

Referências I

de Souza, J. N. (2008).
***Lógica para ciência da computação: uma introdução concisa*.**
Elsevier, Rio de Janeiro, 2 edition.

Huth, M. and Ryan, M. (2008).
***Lógica em ciência da computação: modelagem e argumentação sobre sistemas*.**
LTC, Rio de Janeiro, 2 edition.

Silva, F. S. C., Finger, M., and Melo, A. C. V. (2010).
***Lógica para computação*.**
Cengage Learning, São Paulo, 2 edition.