INSTITUTO FEDERAL MINAS GERAIS (IFMG) - CAMPUS BAMBUÍ
Lógica
Prof. Marcos Roberto Ribeiro

Lista de Exercícios 9

Exercício 1:

Considere os seguintes predicados:

$A(x, y)$: x admira y

$B(x, y)$: x estava presente em y

$P(x)$: x é um professor

$E(x)$: x é um estudante

$L(x)$: x é uma aula

Considere também a constante m (Maria). Codifique as frases a seguir na Lógica de Predicados:

(a) Maria admira todo professor (a resposta não é $\forall x A(m, P(x))$)

> **Solução:** $\forall x(P(x) \rightarrow A(m, x))$

(b) Algum professor admira Maria.

> **Solução:** $\exists x(P(x) \wedge A(x, m))$

(c) Maria admira a si própria.

> **Solução:** $A(m, m)$

(d) Nenhum estudante esta presente em todas as aulas.

> **Solução:** $\forall x(S(x) \rightarrow (\exists y(L(y) \vee \neg B(x, y))))$
> ou
> $\neg \exists x(S(x) \wedge \forall y(L(y) \rightarrow B(x, y)))$

(e) Nenhuma aula teve a presença de todos os estudantes.

> **Solução:** $\forall x(L(x) \rightarrow \exists y(S(y) \wedge \neg B(y, x)))$
> ou
> $\neg \exists y(L(y) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow B(x, y)))$

(f) Nenhuma aula teve a presença de qualquer estudante.

> **Solução:** $\forall x(L(x) \rightarrow \forall y(S(y) \rightarrow \neg B(y, x)))$
> ou
> $\forall x \forall y((S(x) \wedge S(y)) \rightarrow \neg B(y, x))$

Exercício 2:

Encontre predicados apropriados e suas especificações para codificar as frases a seguir na Lógica de Predicados:

(a) Todas as coisas vermelhas estão na caixa.

> **Solução:** $\forall x(\texttt{Vermelho}(x) \rightarrow \texttt{NaCaixa}(x))$

(b) Só as coisas vermelhas estão na caixa.

> **Solução:** $\forall x(\texttt{NaCaixa}(x) \rightarrow \texttt{Vermelho}(x))$

(c) Nenhum animal é ao mesmo tempo um cão e um gato.

> **Solução:** $\forall x(\texttt{Animal}(x) \rightarrow (\neg\texttt{Gato}(x) \vee \neg\texttt{Cao}(x)))$
> ou
> $\neg\exists x(\texttt{Animal}(x) \wedge \texttt{Gato}(x) \wedge \texttt{Cao}(x))$

(d) Todos os prêmios foram ganhos por um menino.

> **Solução:** $\forall x(\texttt{Premio}(x) \rightarrow \exists y(\texttt{Menino}(y) \wedge \texttt{Ganha}(y, x)))$

(e) Um menino ganhou todos os prêmios.

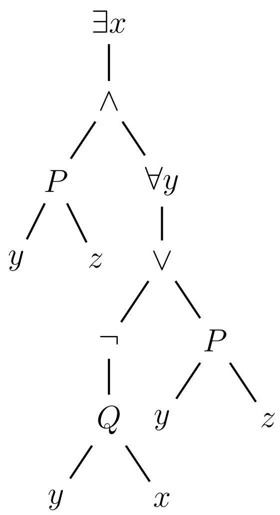
> **Solução:** $\exists y(\texttt{Menino}(y) \wedge \forall x(\texttt{Premio}(x) \rightarrow \texttt{Ganha}(y, x)))$

Exercício 3:

Seja ϕ a fórmula $\exists x(P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$, onde P e Q são predicados binários.

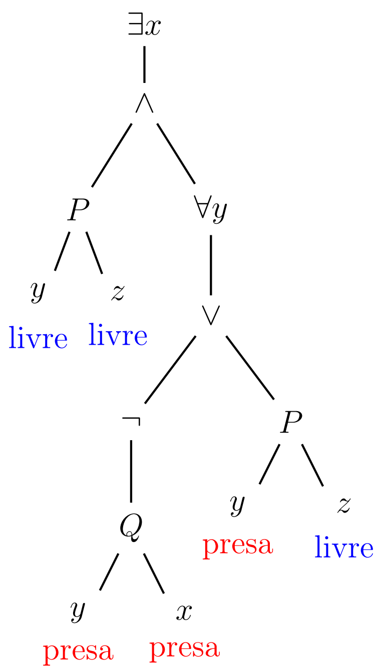
(a) Desenhe a árvore de análise de ϕ.

> **Solução:**



(b) Identifique as variáveis livres e presas.

Solução:



(c) Considere a variável w, e as funções $f(x)$ e $g(y, z)$. Calcule $\phi[x/w]$, $\phi[y/w]$, $\phi[y/f(x)]$ e $\phi[z/g(y, z)]$.

Solução:

$\phi[x/w] : \exists x(P(y, z) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z))))$ (não há ocorrências livres de x em ϕ)

$\phi[y/w] : \exists x(P(w, z) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z))))$

$\phi[y/f(x)] : \exists x(P(f(x), z) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z))))$

$\phi[z/g(y, z)] : \exists x(P(y, g(y, z)) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, g(y, z)))))$

Exercício 4:

Faça as seguintes demonstrações.

(a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Solução:

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	premissa
2.	x_0	
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall x_e$, 1
4.	$P(x_0)$	$\wedge_e$, 3
5.	$\forall x P(x)$	$\forall x_i$, 2–4
6.	x_0	
7.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall x_e$, 1
8.	$Q(x_0)$	$\wedge_e$, 7
9.	$\forall x Q(x)$	$\forall x_i$, 6–8
10.	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	$\wedge_i$, 5, 9

(b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$

Solução:

1.	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	premissa
2.	x_0	
3.	$\forall x P(x)$	Hipótese
4.	$P(x_0)$	$\forall x_e$, 1
5.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee_i$, 4
6.	$\forall x Q(x)$	Hipótese
7.	$Q(x_0)$	$\forall x_e$, 6
8.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee_i$, 7
9.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee_e$, 1, 3–5, 6–8
10.	$\forall x(P(x) \vee xQ(x))$	$\forall x_i$, 2–9

(c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Solução:

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	premissa
2.	x_0	
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	Hipótese
4.	$P(x_0)$	$\wedge_e$, 3
5.	$\exists x P(x)$	$\exists x_i$, 4
6.	$Q(x_0)$	Hipótese
7.	$\exists x Q(x)$	$\exists x_i$, 6
8.	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	$\wedge_i$, 5, 7
9.	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	$\exists x_i$, 1, 2–8

(d) $\exists x F(x) \lor \exists x G(x) \vdash \exists x(F(x) \lor G(x))$

Solução:

1.	$\exists x F(x) \lor \exists x G(x)$	premissa
2.	$\exists x F(x)$	Hipótese
3.	x_0	
4.	$F(x_0)$	Hipótese
5.	$F(x_0) \lor G(x_0)$	$\lor_i$, 4
6.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	$\exists x_i$, 5
7.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	$\exists x_e$, 2, 3–6
8.	$\exists x G(x)$	Hipótese
9.	x_0	
10.	$G(x_0)$	Hipótese
11.	$F(x_0) \lor G(x_0)$	$\lor_i$, 10
12.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	$\exists x_i$, 11
13.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	$\exists x_e$, 8, 9–12
14.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	$\lor_e$, 2, 3–13

(e) $\neg\forall x \neg P(x) \vdash \exists x P(x)$

Solução:

1.	$\neg\forall x \neg P(x)$	premissa
2.	$\neg\exists x P(x)$	Hipótese
3.	x_0	
4.	$P(x_0)$	Hipótese
5.	$\exists x P(x)$	$\exists x_i$, 4
6.	$\bot$	$\neg_e$, 5, 2
7.	$\neg P(x_0)$	$\neg_i$, 4, 6
8.	$\forall x \neg P(x)$	$\forall x_i$, 3–7
9.	$\bot$	$\neg_e$, 8, 1
10.	$\exists x P(x)$	DPA, 2–9

(f) $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

Solução:

1.	$\neg \forall x \neg P(x)$	premissa
2.	$\exists x P(x)$	Hipótese
3.	x_0	
4.	$P(x_0)$	Hipótese
5.	$\neg P(x_0)$	$\forall x_e$, 1
6.	$\perp$	$\neg_e$, 5, 2
7.	$\perp$	$\exists x_e$, 2, 3–6
8.	$\neg \exists x P(x)$	$\neg_i$, 2–7

(g) $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

Solução:

1.	$\neg \exists x P(x)$	premissa
2.	x_0	
3.	$P(x_0)$	Hipótese
4.	$\exists x P(x)$	$\exists x_i$, 3
5.	$\perp$	$\neg_e$, 4, 1
6.	$\neg P(x_0)$	$\neg_i$, 3–5
7.	$\forall x \neg P(x)$	$\forall x_i$, 2–6

(h) $\exists x \exists y(H(x,y) \vee H(y,x)), \neg\exists H(x,x) \vdash \exists x \exists y \neg(x=y)$

Solução:

1.	$\exists x \exists y(H(x,y) \vee H(y,x))$	premissa
2.	$\neg\exists H(x,x)$	premissa
3.	x_0	
4.	$\exists y(H(x_0,y) \vee H(y,x_0))$	Hipótese
5.	y_0	
6.	$\exists y(H(x_0,y) \vee H(y,x_0))$	Hipótese
7.	$x_0 = y_0$	Hipótese
8.	$H(x_0,y_0)$	Hipótese
9.	$H(y_0,y_0)$	$=_e$, 7, 8
10.	$\exists x H(x,x)$	$\exists x_i$, 9
11.	$\perp$	$\neg_e$, 10, 2
12.	$H(y_0,x_0)$	Hipótese
13.	$H(y_0,y_0)$	$=_e$, 7, 12
14.	$\exists x H(x,x)$	$\exists x_i$, 13
15.	$\perp$	$\neg_e$, 14, 2
16.	$\perp$	$\vee_e$, 6, 8–11, 12–15
17.	$\neg(x_0 = y_0)$	$\neg_i$, 7–16
18.	$\exists y \neg(x_0 = y)$	$\exists y_i$, 17
19.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$\exists x_i$, 18
20.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$\exists y_e$, 4, 5–19
21.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$\exists x_e$, 1, 3–20