姓名 曾洳睫 学号 1820221053 课程 离散数学

9-10 (1) $*, \circ, \bullet$ 满足交换律

$*, \circ, \square$ 满足结合律

$\square$ 满足幂等律

(2) 对于 $*$ 无单位元 对于 $\circ$ a 是单位元

a 是零元 无零元

无可逆元 $a^{-1}=a$，$b^{-1}=b$

对于 $\bullet$ 无单位元 对于 $\square$ 无单位元

无零元 无零元

无逆元 无逆元

10-5 (1) 假设 $a*b \neq b*a$，那么 $a*b=a$，$b*a=b$

或者 $a*b=b$，$b*a=a$

若为前者 $(a*b)*a = a*a = b$，与结合律矛盾

$a*(b*a) = a*b = a$

若为后者 $(a*b)*a = b*a = a$，与结合律矛盾

$a*(b*a) = a*a = b$

假设不成立，则 $a*b=b*a$

(2) 假设 $b*b=a$，那么 $a*b=b*a=a$ 或者 $a*b=b*a=b$

前者 $(b*a)*a = a*a = b$，与结合律矛盾

$b*(a*a) = b*b = a$

后者 $(b*a)*a = b*a = b$，与结合律矛盾

$b*(a*a) = b*b = a$

假设不成立 则 $b*b=b$

10-9 能构成群 运算封闭，$\forall x,y,z\in Z$，

$$(x\circ y)\circ z = (x+y-2)\circ z = (x+y-2)+z-2 = x+y+z-4$$

$$x\circ(y\circ z) = x\circ(y+z-2) = x+(y+z-2) = x+y+z-4$$

结合律成立，单位元是2，x的逆元是$4-x$

10-15 若$\forall x\in G$有$x^2=e$，因此$\forall x\in G$有$x^{-1}=x$，

$$\forall x,y\in G,\ xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$$

所以满足交换律，从而G是交换群

10-17 设$|abc|=r$，$|bca|=s$，$|cab|=t$

由$(abc)^{s+1} = a(bca)^s bc = abc$ 和消去律得

$(abc)^s=e$，从而得出 $r|s$ 同理可证 $s|t$，$t|r$.

$$s|t \text{ 和 } t|r \Rightarrow s|r,\quad s|r \text{ 和 } r|s \Rightarrow r=s$$

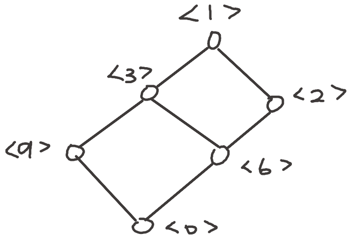
同理可证 $s=t$，$t=r$

10-23 Z_{18} 的子群有6个，如下

$\langle 0\rangle=\{0\}$，$\langle 9\rangle=\{0,9\}$，$\langle 6\rangle=\{0,6,12\}$

$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9,12,15\}$，$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$

$Z_{18}=\langle 1\rangle$



10-24

① 由于H和K分别为群G的子群，显然 $e \in H \cap K$

② 假若 $\exists x \in H \cap K$，且 $x \neq e$

则 $x \in H \wedge x \in K$

则 $\langle x \rangle \leq H$，$\langle x \rangle \leq K$

由拉格朗日定理知 $|\langle x \rangle|$ 整除H和K的阶。

而H和K的阶分别为 r, s，且 r 和 s 互素

所以 $|\langle x \rangle|$ 为 1，所以 $x = e$ 与假设矛盾

综上所述 $H \cap K = \{e\}$