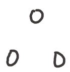
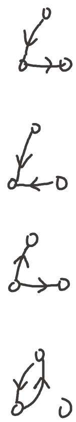
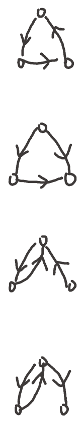
姓名 曾珈睫 学号 1820221053 课程 离散数学

14-17 设n为顶点数，m为边数，

在3阶有向完全图的所有非同构子图中，$n \leq 3$，$m \leq 2n$

n \ m	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							

n=3 的16个子图都是生成子图

n=3 且 m=3 的上面两个图是三阶竞赛图

14-21 (1) 点割集2个 $\{a,c\}$，$\{d\}$，其中d是割点，

边割集7个：$\{e_5\}$，$\{e_1,e_3\}$，$\{e_2,e_4\}$，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_2,e_3\}$，$\{e_3,e_4\}$，$\{e_1,e_4\}$，e_5是桥

(2) 因为既有割点又有桥，所以 $k(G)=\lambda(G)=1$

14-29

反证法 假设不然，$\forall v\in V(G)$，均有 $d(v)\le 2$ 则由握手定理

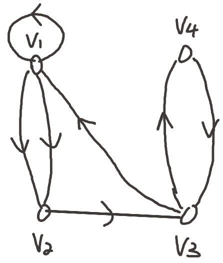
得 $2n+2=2m\le 2n$，其中m为边数

显然矛盾

14-41 设 $\Gamma=v_0,v_1,v_2,\ \ ,v_k$ 为极大路径，则 $k\ge\delta(G)$，由极大路径性质以及简单图的定义可知，v_0要达到其度数 $d(v_0)\ge\delta(G)$ 必须与Γ上至少$\delta(G)$个顶点相邻，设其为 $v_{i_1},v_{i_2},\ \ ,v_{i_\delta}$，

于是，圈 $v_0v_{i_1}v_{i_2}\ \ v_{i_\delta}v_0$ 长度大于等于 $\delta(G)+1$

14-44 利用邻接矩阵4次幂



$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}$$

(1) v_1到v_4长度为1, 2, 3, 4的通路分别有

$V_{14}=0$条, $V_{14}^{(2)}=0$条, $V_{14}^{(3)}=2$条, $V_{14}^{(4)}=2$条

(2) $V_{11}^{(1)}=1$条, $V_{11}^{(2)}=1$条, $V_{11}^{(3)}=3$条, $V_{11}^{(4)}=5$条

(3) D中长度为4的通路有44条(A^4元素之和)

D中长度为4的回路有11条(A^4主对角线元素之和)

(4) 长度小于等于4的通路有88条(A, A^2, A^3, A^4元素之和)

其中有22条回路 (A, A^2, A^3, A^4主对角元素之和)

(5) 因为D中存在经过所有顶点的回路，是强连通图，所以可达矩阵为4阶全1方阵

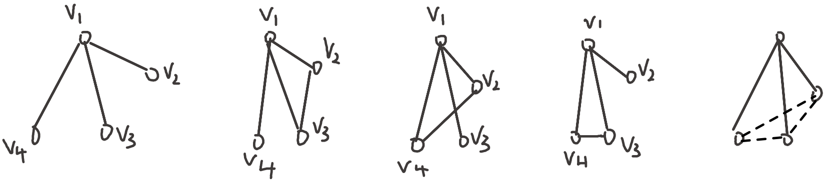
14-49 (1) 共有 $r-1$ 种非同构的圈，其长度分别为 $4, 6, \ldots, 2r$

(2) 至多有 $s\ (s \geq r)$ 个顶点彼此不相邻

(3) 至多有 $r\ (r \leq s)$ 条边彼此不相邻

(4) $\kappa = \lambda = r$

14-51 取一个顶点 v_1，由鸽巢原理，v_1 至少关联3条 G 中的边，或至少关联3条 $\bar{G}$ 中的边，不妨设 v_1 至少关联3条 G 中的边，设这3条边的另一个端点分别为 v_2, v_3, v_4，如下图(a)所示，再对 v_2, v_3, v_4 之间的邻接关系进行讨论。



(a) (b) (c) (d) (e)

(1) 若 $(v_2, v_3), (v_3, v_4)$ 与 (v_2, v_4) 中有一条是 G 的边，则在 G 中有3个顶点彼此相邻，如(b),(c),(d)所示

(2) 否则，$(v_2, v_3), (v_3, v_4)$ 与 (v_2, v_4) 都是 $\bar{G}$ 的边，从而 v_2, v_3, v_4 在 $\bar{G}$ 中彼此相邻，如(e)所示