Física Computacional

Escuela de Física

M.R.Fulla[1]

[1]Escuela de Física, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

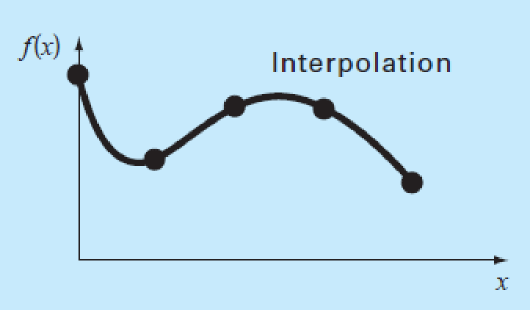
marlonfulla@yahoo.com- Oficina:21-408

https://sites.google.com/site/fisicacomputacionalunalmed/

October 25, 2023

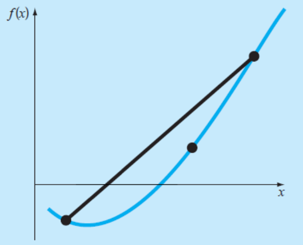
Interpolación

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA



Dado un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ donde $y_i = f(x_i)$ con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, encontrar un polinomio $P(x)$ que pase a través de estos puntos y usarlo como una aproximación de $f(x)$.

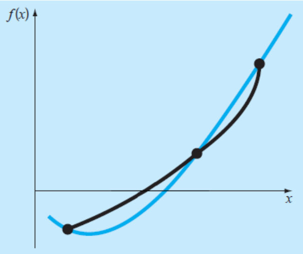
Interpolación Lineal



$$P_1(x) = y_0\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \tag{1}$$

conocidos dos puntos (x_0, y_0) y(x_1, y_1) hay una única recta que pasa por ellos.

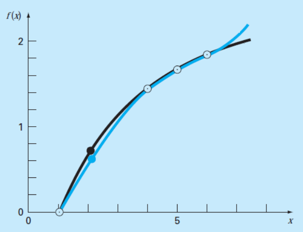
Interpolación Cuadrática



Tres puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2), determinan una única parábola (un polinomio de grado 2).

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{2}$$

Interpolación Cúbica



Cuatro puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), determinan un único polinomio de grado 3.

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)}{(x_3-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)} \frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)} \tag{3}$$

Interpolación Cúbica

Una forma más compacta:

$$P_3(x) = y_0 \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_0 - x_i)} + y_1 \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_i)} + y_2 \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_2 - x_i)}$$
$$y_3 \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 3}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_3 - x_i)} \tag{4}$$

o más compactamente

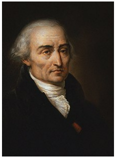
$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k l_k(x) \qquad l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \tag{5}$$

Fórmula de Lagrange

El único polinomio de grado n-ésimo que pasa a través de $n+1$ puntos distintos de datos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) es$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \qquad l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

(Fórmula interpolante de Lagrange)



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Interpolación por tramos

Desventajas de Fórmula de Lagrange:

1. Grado del polinomio aumenta con el número de datos
2. Si se conoce que la función en un intervalo es aproximadamente constante, quizás el polinomio podría oscilar considerablemente.

Metodología: Tomar secuencialmente un conjunto de pocos puntos e interpolar.

Interpolación por tramos

Interpolación Lineal

$$(x_0, y_0) - (x_1, y_1) \to f(x)$$
$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) \to g(x)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{interpolante}(x) = \begin{cases} f(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ g(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Si se considera alternativamente un polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

se puede construir un problema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, ...a_n$ dadas por $P(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, 2, ..., n$. El sistema lineal puede escribirse así:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

Actividad

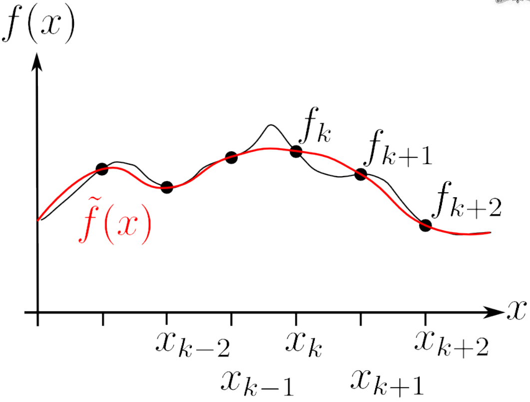
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

1. Escriba un programa que implemente la fórmula de interpolación de Lagrange y que acepte dos arreglos X y Y (con los valores de los puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, ..., N$), y el número de datos N (la dimensión de los arreglos). El programa debe retornar el valor aproximado de $f(x)$, esto es, $P_N(x)$ para un valor de $x_0 \leq x \leq x_N$.

2. Realice una tabla con valores intermedios entre x_0 y x_N y tabule x, $P_N(x)$ y grafíquelos.

3. Realice una tabla de $P'_N(x)$ (use la fórmula del método de los tres puntos).

Splines (Trazadores) Cúbicos



1. Ideado para superar la interpolación con polinomios de grado alto.
2. Construye polinomios cúbicos (splines o trazadores cúbicos) conectados suavemente.

Splines (Trazadores) Cúbicos

Supongamos el conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ donde $y_i = f(x_i)$ con $i = 0, 1, 2, ..., n$ y sea $P_i(x)$ el polinomio interpolante en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$P_i(x) = A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i)^3$
con $i = 0, 1, ..., n - 1$

Splines (Trazadores) Cúbicos

El método impone las siguientes condiciones para los splines:

1. Interpolación $\quad P_i(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, ..., n$

2. Continuidad $\quad P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i)$ con $i = 1, 2, ..., n-1$

3. Diferenciabilidad $\quad P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i)$ con $i = 1, 2, ..., n-1$

4. Concavidad $\quad P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i)$ con $i = 1, 2, ..., n-1$

Tenemos (4 coeficientes)*(n polinomios) = 4n incógnitas
(n+1)+3*(n-1) ecuaciones = 4n-2 ecuaciones

Las otras dos ecuaciones provienen de las condiciones en los extremos.

Splines (Trazadores) Cúbicos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

CONDICIONES EN LOS EXTREMOS

* $P_0''(x_0) = s_0 = P_{n-1}''(x_n) = s_n = 0$: **Spline Natural**

* $P_0'(x_0) = a \quad P_{n-1}'(x_n) = b$: **Spline Sujeto** $\quad a, b \in \mathbb{R}e$

Definiremos:

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$s_i = P_{i-1}''(x_i) = P_i''(x_i)$ notación para las segundas derivadas

$s_0 = P_0''(x_0) = s_n = P_{n-1}''(x_n) = 0$ usaremos splines naturales

Splines (Trazadores) Cúbicos

Con las condiciones anteriores obtendremos un sistema de n-1 ecuaciones cuyas incógnitas son las segundas derivadas de $P(x)$ evaluadas en x_i ($s_i = P''(x_i)$). Tenemos entonces:

$$P_i(x) = A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + D_i(x - x_i)^3 \qquad (6)$$

$$P_i'(x) = B_i + 2C_i(x - x_i) + 3D_i(x - x_i)^2 \qquad (7)$$

$$P_i''(x) = 2C_i + 6D_i(x - x_i) \qquad (8)$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

Usando la condición de interpolación $(x_i, y_i) \curvearrowright P_i(x_i) = y_i$ en la ecuación (6):

$$P_i(x_i) = y_i = A_i \tag{9}$$

Usando la condición de concavidad en la ecuación (8):

$$P_i''(x_i) = s_i = 2C_i \tag{10}$$

Calculemos de las ecuaciones (6), (7), (8):

$$P_{i-1}(x_i) = A_{i-1} + B_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + C_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + D_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3$$

$$P_{i-1}(x_i) = A_{i-1} + B_{i-1}\Delta x_{i-1} + C_{i-1}\Delta x_{i-1}^2 + D_{i-1}\Delta x_{i-1}^3 \tag{11}$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

$$P'_{i-1}(x_i) = B_{i-1} + 2C_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3D_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2$$
$$P'_{i-1}(x_i) = B_{i-1} + 2C_{i-1}\Delta x_{i-1} + 3D_{i-1}\Delta x^2_{i-1} \qquad (12)$$

$$P''_{i-1}(x_i) = 2C_{i-1} + 6D_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$
$$P''_{i-1}(x_i) = 2C_{i-1} + 6D_{i-1}\Delta x^2_{i-1} \qquad (13)$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

De la condición de concavidad y usando las ecuaciones (10) y (13):

$P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i) = s_i$

$s_{i-1} + 6D_{i-1}\Delta x_{i-1} = s_i$ de donde

$$D_{i-1} = \frac{s_i - s_{i-1}}{6\Delta x_{i-1}} \quad ó \quad D_i = \frac{s_{i+1} - s_i}{6\Delta x_i} \tag{14}$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

De la condición de continuidad y usando la ecuación (11):

$$P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i) = y_i$$

$$B_{i-1}\Delta x_{i-1} + C_{i-1}\Delta x_{i-1}^2 + D_{i-1}\Delta x_{i-1}^3 = y_i - y_{i-1} = \Delta y_{i-1}$$

usando las ecuaciones (10) y (14):

$$B_{i-1} = \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{6}(2s_{i-1} + s_i) \ \text{ó} \ B_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{6}(s_{i+1} + 2s_i) \tag{15}$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

De la condición de diferenciabilidad y usando las ecuaciones (7), (12), (10), (14) y (15):

$$B_{i-1} + s_{i-1}\Delta x_{i-1} + \frac{3(s_i - s_{i-1}\Delta x_{i-1})}{6} = P_i'(x_i) = B_i$$

$$\Delta x_{i-1}s_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)s_i + \Delta x_i s_{i+1} = 6\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}\right)$$

(Sistema de ecuaciones para splines)

Splines (Trazadores) Cúbicos

Ejemplo: interpolar con splines cúbicos el siguiente conjunto de datos

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	-1	1	4	2

$\Delta x_i = 1$ con $i = 1, 2, 3$

El sistema a resolver es:

$$4s_1 + s_2 + 0 = 18$$
$$s_1 + 4s_2 + s_3 = 6$$
$$0 + s_2 + 4s_3 = -30$$

Splines (Trazadores) Cúbicos

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ -30 \end{bmatrix}$$

de donde $s_1 = 27/7$, $s_2 = 18/7$, $s_3 = -57/7$

$$P_0(x) = 0 - \tfrac{23}{14}x + \tfrac{9}{14}x^3$$

$$P_1(x) = -1 + \tfrac{2}{7}(x-1) + \tfrac{27}{14}(x-1)^2 - \tfrac{3}{14}(x-1)^3$$

$$P_2(x) = 1 + \tfrac{7}{2}(x-2) + \tfrac{9}{7}(x-2)^2 - \tfrac{25}{14}(x-2)^3$$

$$P_3(x) = 4 + \tfrac{5}{7}(x-3) - \tfrac{57}{14}(x-3)^2 + \tfrac{19}{14}(x-3)^3$$