



Ejemplo Piloto

Un corto vistazo a un ejemplo de doble curl

Luján, Alejandro
alujan@unal.edu.co

Febrero, 2026

1. El problema

Hallar u en Ω tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \operatorname{curl}(\operatorname{curl}(\mathbf{u})) &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g} \times \mathbf{n} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Introduciendo la variable $\mathbf{z} := \operatorname{curl}(\mathbf{u})$, el problema se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} - \operatorname{curl}(\mathbf{u}) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} + \operatorname{curl}(\mathbf{z}) &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g} \times \mathbf{n} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Testeando con \mathbf{v} y \mathbf{r} suaves en $K \in \mathcal{T}_h$, y empleando el teorema de Green al problema inicial, se requiere hallar \mathbf{z} y \mathbf{u} tales que:

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{z} \cdot \mathbf{r} - \underbrace{\int_K \operatorname{curl}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}}_0 &= 0 \quad \text{donde } \int_K \operatorname{curl}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r} = \int_K \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl}(\mathbf{r}) + \int_{\partial K} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \\ \int_K \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\int_K \operatorname{curl}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}}_{\int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}} &= \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{donde } \int_K \operatorname{curl}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{v} = \int_K \mathbf{z} \cdot \operatorname{curl}(\mathbf{v}) + \int_{\partial K} \mathbf{z}^t \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, consideramos una simplificación en la notación a emplear, las integrales en el volumen se denotan: $(*, *)_K$ y las integrales en la frontera se denotan $\langle *, * \rangle_{\partial K}$, las integrales que toman lugar en la frontera siguen una notación similar $\langle *, * \rangle_{\partial\Omega}$. Al considerar $\boldsymbol{\eta}$ suave en $e \in \mathcal{E}(K)$, el sistema inicialmente propuesto toma la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}, \mathbf{r})_K - (\mathbf{u}, \operatorname{curl}(\mathbf{r}))_K - \langle \mathbf{u}^t, \mathbf{r} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= 0 & \forall \mathbf{r} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_K + (\mathbf{z}, \operatorname{curl}(\mathbf{v}))_K + \langle \mathbf{z}^t, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_K & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \\ \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial\Omega} &= \langle \mathbf{g} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial\Omega} & \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}_k(e)^3. \end{aligned}$$

Discretizando, localmente se desea hallar \mathbf{z}_h , \mathbf{u}_h , \mathbf{u}_h^t , donde $\hat{\mathbf{u}}_h^t \approx \mathbf{u}^t \in \partial K$, $\hat{\mathbf{z}}_h^t \approx \mathbf{z}^t \in \partial K$, donde la variable $\hat{\mathbf{z}}_h^t$ se describe en términos de la variable de esqueleto $\hat{\mathbf{u}}_h^t$ a partir de la igualdad $\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}}_h^t = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}}^t + \tau(\mathbf{u}^t - \hat{\mathbf{u}}_h^t)$ valido para toda cara $e \in \mathcal{E}(K)$, así el problema a estudiar consiste en hallar \mathbf{z}_h , \mathbf{u}_h , $\hat{\mathbf{u}}_h^t$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{z}_h, \mathbf{r}_h)_K - (\mathbf{u}_h, \operatorname{curl}(\mathbf{r}_h))_K - \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{r}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \quad (1)$$

$$(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_K + (\mathbf{z}_h, \operatorname{curl}(\mathbf{v}_h))_K + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{z}_h^t, \mathbf{v}_h \rangle_{\partial K} + \tau \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{v}_h \rangle_{\partial K} - \tau \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{v}_h \rangle_{\partial K} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_K \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \quad (2)$$

$$\langle \hat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial\Omega} = \langle \mathbf{g} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}_k(e)^3. \quad (3)$$

Ahora hablaremos de las bases con las cuales se construyen los pares de volumen $(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)$ restringidas al elemento $K \in \mathcal{T}_h$, para esto se consideran bases polinomiales de grado menor o igual a k de la forma:

$$\mathbf{u}_h|_K = \sum_{i=0}^{d_3} \alpha_i P_i(x) : P_i \in \mathcal{P}_k(K)^3, \quad \mathbf{z}_h|_K = \sum_{i=0}^{d_3} \beta_i P_i(x) : P_i \in \mathcal{P}_k(K)^3,$$

Por otro lado para la frontera del elemento se considera inicialmente una base polinomial restringida a la cara $e \in \mathcal{E}_h: \{\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{d_2}\}$ tal que $\hat{D}_i \in \mathcal{P}_k(e)^3$ con $i = 1, \dots, d_2$, donde la condición de traza normal nula se impone a partir de la ampliación de la base considerando los elementos de la matriz de vectores directores de la cara $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_0]$, ya que cada una de sus componentes son a las normales de la cara \mathbf{n} , así se define la base polinomial restringida a la cara e como:

$$\left\{ \mathbf{A} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A} \begin{bmatrix} D_{d_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ D_{d_2} \end{bmatrix} \right\} \approx \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{d_2}, \boldsymbol{\xi}_{d_2+1}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{2d_2}\}$$

Con estos elementos definidos, se escribe la variable \hat{u}_h^t restringida a la cara $e \in \mathcal{E}_h$:

$$\hat{u}_h^t|_e = \sum_{i=0}^{2d_2} \gamma_i \boldsymbol{\xi}_i(x) : D_i \in \mathcal{P}_k(e)^3$$

De ahora en adelante se nombran los coeficientes α, β y γ como grados de libertad, así mismo considerar para las variables de prueba $\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h$ y $\boldsymbol{\eta}_h$ los grados de libertad ρ, θ y δ respectivamente. Ahora se definen cada una de las integrales involucradas en el cálculo a partir de los grados de libertad involucrados en cada una de estas.

2. Construcción de las integrales

La primera integral a considerar es la de masa, primero separaremos la integral en sus componentes:

$$(\mathbf{z}_h, \mathbf{r}_h)_K = \int_K \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{r}_h = \int_K z_h^{(1)} r_h^{(1)} + \int_K z_h^{(2)} r_h^{(2)} + \int_K z_h^{(3)} r_h^{(3)}$$

Donde $z_h^{(l)}$ hace referencia al componente l -ésimo de \mathbf{z}_h , considerando una de estas integrales y reescribiendo cada componente a partir de los componentes de la base polinomial, es posible escribir las integrales en términos de la integral en el elemento de referencia \hat{K} y aplicar reglas de cuadratura, con lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned} \int_K z_h^{(l)} r_h^{(l)} &= \int_K \sum_{i=1}^{d_3} \beta_i P_i(x) \sum_{j=1}^{d_3} \rho_j P_j(x) = |K| \int_{\hat{K}} \sum_{i,j}^{d_3} \beta_i \rho_j \hat{P}_i(\hat{x}) \hat{P}_j(\hat{x}) \\ &\approx \frac{1}{|K|} \sum_{i,j=1}^{d_3} \beta_i \rho_j \sum_{m=1}^{N_{quad}} \tilde{w}_m \hat{P}_i(\hat{q}_m) \hat{P}_j(\hat{q}_m), \end{aligned}$$

donde \tilde{w}_m hace referencia a los pesos de cuadratura. Computacionalmente esta aproximación puede escribirse en términos de un producto directo de un vector de pesos \tilde{w}_m y el producto matricial de polinomios $\hat{P}_i(\hat{q}_m)$ evaluados en los puntos de cuadratura \hat{q}_m , por lo que se define la matriz \mathbf{M}_i como:

$$\int_K z_h^{(l)} r_h^{(l)} \approx \underbrace{|K| \mathbf{w} \odot \mathbf{P}(\hat{q}) \mathbf{P}(\hat{q})^T}_{\mathbf{M}_i}$$

Finalmente la matriz asociada a la integral de masa (*Tambien conocida como MM*) toma la forma:

$$(\mathbf{z}_h, \mathbf{r}_h)_K \approx [r_h]' \mathbf{M} [z_h] = [r_h]' \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_i \end{pmatrix} [z_h] \quad (4)$$

Donde cada uno de los elementos mencionados \mathbf{M}_i hacen referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre cada una de las componentes, igualmente $[r_h]$ y $[z_h]$ hacen referencia a los vectores columna de grados de libertad de cada una de las variables.

Consideraremos ahora la integral asociada al curl (*Tambien conocida como MC*):

$$(\mathbf{z}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{r}_h))_K \approx [\mathbf{r}_h]' \mathbf{curlPP} [\mathbf{z}_h] = [\mathbf{r}_h]' \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{CM}_z & -\mathbf{CM}_y \\ -\mathbf{CM}_z & 0 & \mathbf{CM}_x \\ \mathbf{CM}_y & -\mathbf{CM}_x & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{z}_h], \quad (5)$$

Donde los elementos mencionados \mathbf{CM}_* son las matrices resultantes tras la transformación de Piola:

$$\mathbf{CM}_\star = \frac{\partial \star}{\partial \hat{x}} \partial_{\hat{x}} \hat{P} + \frac{\partial \star}{\partial \hat{y}} \partial_{\hat{y}} \hat{P} + \frac{\partial \star}{\partial \hat{z}} \partial_{\hat{z}} \hat{P} : \star = \{x, y, z\},$$

por lo que cada una las matrices especificadas hace referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad para cada una de las componentes asociadas.

Se considera la integral asociada al producto entre la función test \mathbf{v} y la función \mathbf{f}

$$(f, v_h)_K \approx [v_h]' \mathbf{f} \mathbf{TEST} = [v_h]' \begin{pmatrix} f_x \mathbf{TEST} \\ f_y \mathbf{TEST} \\ f_z \mathbf{TEST} \end{pmatrix} = \mathbb{A}_f[v_h]' \quad (6)$$

Cada una de las definiciones $f_\star \mathbf{TEST} : \star = \{x, y, z\}$ hace referencia a la cuadratura de los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre la componente de la función y la variable test.

Se considera la integral asociada a la traza tangencial junto con el parámetro τ del modelo (*Tambien conocida como CTM*):

$$\begin{aligned} \tau \langle \mathbf{u}_h^t, \mathbf{v}_h \rangle_{\partial K} &\approx [v_h]' \mathbf{tauPP} [u_h] \\ &= [v_h]' \begin{pmatrix} (n_y^2 + n_z^2) \tau \mathbf{PP} & -n_x n_y \tau \mathbf{PP} & -n_x n_z \tau \mathbf{PP} \\ -n_y n_x \tau \mathbf{PP} & (n_x^2 + n_z^2) \tau \mathbf{PP} & -n_y n_z \tau \mathbf{PP} \\ -n_z n_x \tau \mathbf{PP} & -n_z n_y \tau \mathbf{PP} & (n_x^2 + n_y^2) \tau \mathbf{PP} \end{pmatrix} [u_h] \end{aligned} \quad (7)$$

Donde cada una de las matrices presentadas $\tau \mathbf{PP}$ hacen referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre cada una de las componentes dispuestas, y el efecto que tiene el coeficiente τ definido. Esta matriz es igual al producto directo entre la matriz \mathbf{PP} , la *matriz tangencial* y τ .

Se considera la integral en las caras asociadas al producto cruz con respecto a la normal, esta integral tiene en consideración las posibles orientaciones de las caras a partir de la estructura `T.perm` para compatibilidad entre elementos de caras y volumenes, para definir la matriz \mathbf{nDP}_e (*uno de los componente de la matriz \mathbf{nDP} tambien conocida como -FNTT*) primeramente expandimos la integral:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{r}_h \times \mathbf{n} \rangle_e &= \int_e \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{t(1)} \\ \hat{u}_h^{t(2)} \\ \hat{u}_h^{t(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{r}_h^{(2)} n_z - \hat{r}_h^{(3)} n_y \\ \hat{r}_h^{(3)} n_x - \hat{r}_h^{(1)} n_z \\ \hat{r}_h^{(1)} n_y - \hat{r}_h^{(2)} n_x \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\int_e \hat{u}_h^{t(1)} \hat{r}_h^{(2)} n_z}_{-} - \underbrace{\int_e \hat{u}_h^{t(1)} \hat{r}_h^{(3)} n_y}_{+} + \cdots - \underbrace{\int_e \hat{u}_h^{t(3)} \hat{r}_h^{(2)} n_x}_{+}, \end{aligned}$$

debido a la definición de la base para la variable $\hat{\mathbf{u}}_h^t$, que trae componentes de la matriz \mathbf{A} , nos centraremos inicialmente en la integral señalada:

$$\begin{aligned} \int_e \hat{u}_h^{t(1)} \hat{r}_h^{(2)} n_z &= \int_e \sum_{i=0}^{2d_2} \gamma_i \xi_i(x) \sum_{j=0}^{d_3} \beta_j P_j(x) n_z \\ &= \int_e \mathbf{A}_1 n_z \sum_{i=0}^{d_2} \gamma_i D_i(x) \sum_{j=0}^{d_3} \beta_j P_j(x) + \int_e \mathbf{A}_0 n_z \sum_{i=d_2+1}^{2d_2} \gamma_i D_i(x) \sum_{j=0}^{d_3} \beta_j P_j(x). \end{aligned}$$

Veamos que existen componentes de la base los cuales dependen únicamente de A_1 y A_0 , por lo que en la definición de la matriz \mathbf{nDP}_e se consideran estas dos contribuciones, y así mismo esto se mantiene para cada una de las integrales de estudio. Así se define para la primera componente de la rotación con la normal \mathbf{n} de la integral $\langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{r}_h \times \mathbf{n} \rangle_e$:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{r}_h \times \mathbf{n} \rangle_e = \int_e \hat{u}_h^{t(1)} (\hat{r}_h^{(2)} n_z - \hat{r}_h^{(3)} n_y) + \cdots \approx \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^x (n_z - n_y) \mathbf{DP} \\ a_0^x (n_z - n_y) \mathbf{DP} \end{pmatrix}}_{\mathbf{nDP}_e \text{ componente } x \text{ cara } e} + \cdots$$

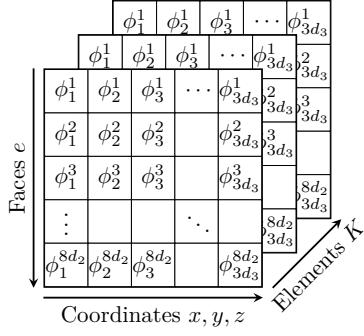


Figura 1: Estructura tridimensional para guardado de información de la integral en caras.

Finalmente estas componentes de la matriz \mathbf{nDP}_e se organizan a través del siguiente diagrama. Así en por bloques se define por filas cada una de las caras del elemento, por columnas se organizan por las coordenadas asociadas en el producto para discriminar las componentes de \mathbf{A} y finalmente en profundidad se organiza por elementos, homologamente todas las integrales asociadas a caras toman una estructura similar.

Se considera la integral en las caras asociada al producto interno entre elementos de viven en el volumen y las caras (*Tambien conocida como FNM*):

$$\tau \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{v}_h \rangle_{\partial K} \approx [\mathbf{v}_h]' \mathbf{tauDP}_e [\hat{\mathbf{u}}_h^t] = [\mathbf{v}_h]' \begin{pmatrix} \tau a_1^x \mathbf{DP} \\ \tau a_1^y \mathbf{DP} \\ \tau a_1^z \mathbf{DP} \\ \tau a_0^x \mathbf{DP} \\ \tau a_0^y \mathbf{DP} \\ \tau a_0^z \mathbf{DP} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{u}}_h^t], \quad \forall e \in \mathcal{E}(K)$$

Homologamente, esta matriz es definida por caras, por lo cual la matriz que se referencia obtiene la forma tras concatenar cada una de estas matrices horizontalmente.

$$\tau [\mathbf{v}_h]' \mathbf{tauDP} [\hat{\mathbf{u}}_h^t] = [\mathbf{v}_h]' (\mathbf{tauDP}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{tauDP}_{\mathbf{e}_2} \mathbf{tauDP}_{\mathbf{e}_3} \mathbf{tauDP}_{\mathbf{e}_4}) [\hat{\mathbf{u}}_h^t] \quad (8)$$

Se considera la integral del flujo numérico asociada al producto interno entre el elemento tangencial y la función test en las caras (*Tambien conocida como CTFM*):

$$\begin{aligned} \tau \langle \mathbf{u}_h^t, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial K} &\approx [\boldsymbol{\eta}_h]' \mathbf{tauDP_t}_e [\mathbf{u}_h^t] \\ &= [\boldsymbol{\eta}_h]' \begin{pmatrix} (a_1^x(n_y^2 + n_z^2) - a_1^y n_x n_y - a_1^z n_x n_z) \tau \mathbf{DP}' \\ (a_0^x(n_y^2 + n_z^2) - a_0^y n_x n_y - a_0^z n_x n_z) \tau \mathbf{DP}' \\ (-a_1^x n_y n_x + a_1^y(n_x^2 + n_z^2) - a_1^z n_y n_z) \tau \mathbf{DP}' \\ (-a_0^x n_y n_x + a_0^y(n_x^2 + n_z^2) - a_0^z n_y n_z) \tau \mathbf{DP}' \\ (-a_1^x n_z n_x - a_1^y n_z n_y + a_1^z(n_x^2 + n_y^2)) \tau \mathbf{DP}' \\ (-a_0^x n_z n_x - a_0^y n_z n_y + a_0^z(n_x^2 + n_y^2)) \tau \mathbf{DP}' \end{pmatrix} [\mathbf{u}_h^t], \quad \forall e \in \mathcal{E}(K) \end{aligned}$$

Siguiendo las mismas consideraciones anteriores, la matriz a considerar es:

$$[\boldsymbol{\eta}_h]' \mathbf{tauDP_t}_e [\mathbf{u}_h] = [\boldsymbol{\eta}_h]' (\mathbf{tauDP_t}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{tauDP_t}_{\mathbf{e}_2} \mathbf{tauDP_t}_{\mathbf{e}_3} \mathbf{tauDP_t}_{\mathbf{e}_4}) [\mathbf{u}_h^t] \quad (9)$$

Finalmente se considera la integral que contiene el producto interno de las funciones que viven en las caras (*Tambien conocida como FNFN*):

$$\tau \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial K} \approx [\boldsymbol{\eta}_h]' \mathbf{tauDD} [\hat{\mathbf{u}}_h^t] = [\boldsymbol{\eta}_h]' \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_1 \cdot \mathbf{A}_1 \tau \mathbf{DD} & \mathbf{A}'_1 \cdot \mathbf{A}_0 \tau \mathbf{DD} \\ \mathbf{A}'_0 \cdot \mathbf{A}_1 \tau \mathbf{DD} & \mathbf{A}'_0 \cdot \mathbf{A}_0 \tau \mathbf{DD} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{u}}_h^t] \quad (10)$$

Donde el elemento $\tau \mathbf{DD}$ la cuadratura asociada para los $d_2 \times d_2$ grados de libertad, por lo cual la matriz total tiene dimensiones $2d_2 \times 2d_2$.

3. El sistema final

Con los elementos planteados, finalmente definimos tres matrices definidas por bloques que permiten representar el sistema definido por las ecuaciones (1) - (3), empleando los elementos de cuadratura anterior mencionados.

$$\mathbb{A}_1 := \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{curlPP} \\ \mathbf{curlPP} + \mathbf{nPP} & \mathbf{M} + \mathbf{tauPP} \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 := \begin{pmatrix} \mathbf{nDP}' \\ -\mathbf{tauDP}' \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 := (\mathbf{nDP} \quad \mathbf{tauDP_t}) \quad (11)$$

Gracias a estas definiciones es posible escribir el problema propuesto localmente, de la forma:

$$([r_h] [v_h]) \mathbb{A}_1 \begin{pmatrix} [z_h] \\ [u_h] \end{pmatrix} + ([r_h] [v_h]) \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t] = ([r_h] [v_h]) \mathbb{A}_f$$

Veamos que el sistema matricial permite obtener una expresión que permite aproximar los grados de libertad de las variables de volumen, así se obtiene inicialmente:

$$\begin{pmatrix} [z_h] \\ [u_h] \end{pmatrix} = \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t]$$

Dentro del dominio se exige (2) por lo cual es posible con los elementos anteriormente definidos escribir una expresión matricial por bloques, así se obtiene:

$$[\eta_h]' \mathbb{A}_3 \begin{pmatrix} [z_h] \\ [u_h] \end{pmatrix} - [\eta_h]' \mathbf{tauDD} [\hat{u}_h^t] = 0$$

Junto con la consideración anterior de la expresión obtenida para los grados de libertad de las variables de volumen, se obtiene una expresión para los grados de libertad del flujo numérico.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_3 \begin{pmatrix} [z_h] \\ [u_h] \end{pmatrix} - \mathbf{tauDD} [\hat{u}_h^t] &= 0 \\ \mathbb{A}_3 (\mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t]) - \mathbf{tauDD} [\hat{u}_h^t] &= 0 \\ \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - (\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD}) [\hat{u}_h^t] &= 0 \\ (\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD}) [\hat{u}_h^t] &= \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f \end{aligned}$$

Finalmente la expresión buscada es:

$$[\hat{u}_h^t] = (\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD})^{-1} (\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f) = \mathbb{C}_{\mathbb{M}}^{-1} \mathbb{C}_f \quad (12)$$

Donde se define implicitamente que:

$$\mathbb{C}_{\mathbb{M}} := \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD}, \quad \mathbb{C}_f := \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f$$