Ejemplo Piloto

Un corto vistazo a un ejemplo de doble curl

Luján, Alejandro
alujan@unal.edu.co

October, 2024

1. El problema

Hallar u en Ω tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}(\mathbf{curl}(\boldsymbol{u})) &= \boldsymbol{f} \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{n} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Introduciendo la variable $\boldsymbol{z} \coloneqq \mathbf{curl}(\boldsymbol{u})$, el problema se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} - \mathbf{curl}(\boldsymbol{u}) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}(\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{f} \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{n} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Testeando con $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{r}$ suaves en $K \in \mathcal{T}_h$, y empleando el teorema de Green al problema inicial, se requiere hallar $\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{u}$ tales que:

$$\begin{aligned} &\int_K \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{r} - \underbrace{\int_K \mathbf{curl}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}}_{} = 0 \quad \text{donde } \int_K \mathbf{curl}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r} = \int_K \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}(\boldsymbol{r}) + \int_{\partial K} \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}, \\ &\int_K \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \underbrace{\int_K \mathbf{curl}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{v}}_{} = \int_K \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \text{donde } \int_K \mathbf{curl}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{v} = \int_K \boldsymbol{z} \cdot \mathbf{curl}(\boldsymbol{v}) + \int_{\partial K} \boldsymbol{z}^t \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, consideramos una simplificación en la notación a emplear, las integrales en el volumen se denotan: $(*,*)_K$ y las integrales en la frontera se denotan $\langle *,* \rangle_{\partial K}$, las integrales que toman lugar en la frontera siguen una notación similar $\langle *,* \rangle_{\partial\Omega}$. Al considerar $\boldsymbol{\eta}$ suave en $e \in \mathcal{E}(K)$, el sistema inicialmente propuesto toma la forma:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{r})_K - (\boldsymbol{u}, \mathbf{curl}(\boldsymbol{r}))_K - \langle \boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \rangle_{\partial K} &= 0 & \forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_K + (\boldsymbol{z}, \mathbf{curl}(\boldsymbol{v}))_K + \langle \boldsymbol{z}^t, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \rangle_{\partial K} &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K & \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \\ \langle \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial\Omega} &= \langle \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\partial\Omega} & \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}_k(e)^3. \end{aligned}$$

Discretizando, localmente se desea hallar $\boldsymbol{z}_h$, $\boldsymbol{u}_h$, $\boldsymbol{u}_h^t$, donde $\hat{\boldsymbol{u}}_h^t \approx \boldsymbol{u}^t \in \partial K$, $\hat{\boldsymbol{z}}_h^t \approx \hat{\boldsymbol{z}}^t \in \partial K$, donde la variable $\hat{\boldsymbol{z}}_h^t$ se describe en términos de la variable de esqueleto $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{t}}$ a partir de la igualdad $\boldsymbol{n} \times \hat{\boldsymbol{z}}_h^t = \boldsymbol{n} \times \hat{\boldsymbol{z}}^t + \tau\,(\boldsymbol{u}^t - \hat{\boldsymbol{u}}_h^t)$ valido para toda cara $e \in \mathcal{E}(K)$, así el problema a estudiar consiste en hallar $\boldsymbol{z}_h$, $\boldsymbol{u}_h$, $\boldsymbol{u}_h^t$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\boldsymbol{z_h}, \boldsymbol{r_h})_K - (\boldsymbol{u}, \mathbf{curl}(\boldsymbol{r_h}))_K - \langle \hat{u}_h^t, \boldsymbol{r_h} \times \boldsymbol{n} \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u_h}, \boldsymbol{v_h})_K + (\boldsymbol{z_h}, \mathbf{curl}(\boldsymbol{v_h}))_K + \langle \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{z_h^t}, \boldsymbol{v_h} \rangle_{\partial K} & \\ + \tau \langle \boldsymbol{u_h^t}, \boldsymbol{v_h} \rangle_{\partial K} - \tau \langle \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{v_h} \rangle_{\partial K} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v_h})_K & \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{P}_k(K)^3, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\langle \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{t}} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta_h} \rangle_{\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta_h} \rangle_{\partial\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}_k(e)^3. \tag{3}$$

Este es el sistema sistema que se propone a solucionar, para esto se debe realizar las siguientes consideraciones, donde para el volumen del elemento K

$$\boldsymbol{u_h}|_K = \sum_{i=0}^{d_3} \xi_i P_i(x) \ : \ P_i \in \mathcal{P}_k(K)^3, \ \ \boldsymbol{z_h}|_K = \sum_{i=0}^{d_3} \gamma_i P_i(x) \ : \ P_i \in \mathcal{P}_k(K)^3,$$

Por otro lado para la frontera del elemento se considera la misma base, pero con un consideración adicional, considerando $\left\{\hat{D}_1, ..., \hat{D}_{d2}\right\}$ base de $\mathcal{P}_k(\hat{e})$ con $D = \hat{D} \circ \varphi_e^{-1}$ donde φ_e cumple:

$$\boldsymbol{x} = \varphi_e(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}(P_2 - P_1) + \hat{y}(P_3 - P_1) + P_1 = \left[\begin{array}{cc} P_2 - P_1 & P_3 - P1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \right] + P_1$$

Considerando los elementos de la primera matriz $\boldsymbol{A}$, independientemente de la matriz que se considere, los elementos de esta son ortogonales, a los vectores $\boldsymbol{n}$, así denotando las componentes como: $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A_1}|\boldsymbol{A_0}]$ y extendiendo la base D empleando los directores en $\mathbb{R}^2$, se define la base como:

$$\left\{\boldsymbol{A}\left[\begin{array}{c} D_1 \\ 0 \end{array} \right], ..., \boldsymbol{A}\left[\begin{array}{c} D_{d2} \\ 0 \end{array} \right], \boldsymbol{A}\left[\begin{array}{c} 0 \\ D_1 \end{array} \right], ..., \boldsymbol{A}\left[\begin{array}{c} 0 \\ D_{d2} \end{array} \right]\right\} \Rightarrow \{\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{d2}, \boldsymbol{\xi}_{d2+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_{2d2}\} \tag{4}$$

Con estos elementos definidos, se propone para la frontera del elemento K:

$$\boldsymbol{\hat{u}_h^t}\big|_e = \sum_{i=0}^{2d_2} \beta_i \boldsymbol{\xi}_i(x) \ : \ D_i \in \mathcal{P}_k(e)^3$$

Con esto, se definen los grados de libertad que describen cada una de las variables, respectivamente β, γ y ξ, así se procede a definir cada una de las integrales involucradas en el cálculo.

2. Construcción de las integrales

Se considera la integral de masa *(Tambien conocida como **MM**)*:

$$(\boldsymbol{z_h}, \boldsymbol{r_h})_K \approx [r_h]' \ \mathbf{M} \ [z_h] = [r_h]' \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_i & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_i & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}_i \end{pmatrix} [z_h] \tag{5}$$

Donde cada uno de los elementos mencionados M_i hacen referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre cada una de las componentes.

Considere la integral asociada al curl *(Tambien conocida como **MC**)*:

$$(\boldsymbol{z_h}, \mathbf{curl}(\boldsymbol{r_h}))_K \approx [r_h]' \ \mathbf{curlPP} \ [z_h] = [r_h]' \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{CM}_z & -\mathbf{CM}_y \\ -\mathbf{CM}_z & 0 & \mathbf{CM}_x \\ \mathbf{CM}_y & -\mathbf{CM}_x & 0 \end{pmatrix} [z_h] \tag{6}$$

Donde los elementos mencionados $\mathrm{CM}_\star = \partial\hat{\star}/\partial x \ \partial_x \hat{P} + \partial\hat{\star}/\partial y \ \partial_y \hat{P} + \partial\hat{\star}/\partial z \ \partial_z \hat{P} : \star = \{x, y, z\}$, así cada una las matrices especificadas hace referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad para cada una de las componentes asociadas.

Se considera la integral asociada al producto entre la función test $\boldsymbol{v}$ y la función $\boldsymbol{f}$

$$(f, v_h)_K \approx [v_h]' \ \mathbf{f} \ \mathbf{TEST} = [v_h]' \begin{pmatrix} \mathbf{f_x TEST} \\ \mathbf{f_y TEST} \\ \mathbf{f_z TEST} \end{pmatrix} = \mathbb{A}_f [v_h]' \tag{7}$$

Cada una de las definiciones $f_\star TEST : \star = \{x, y, z\}$ hace referencia a la cuadratura de los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre la componente de la función y la variable test.

Se considera la integral asociada al producto cruz con respecto a la normal n *(Tambien conocida como **TTM**)*:

$$-\langle \boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_h \rangle_{\partial K} \approx [r_h]' \ \mathbf{nPP}[z_h] = [r_h]' \begin{pmatrix} 0 & n_z \ \mathbf{PP} & -n_y \ \mathbf{PP} \\ -n_z \ \mathbf{PP} & 0 & n_x \ \mathbf{PP} \\ n_y \ \mathbf{PP} & -n_x \ \mathbf{PP} & 0 \end{pmatrix} [z_h] \tag{8}$$

Donde cada una de las matrices presentadas **PP** hacen referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre cada una de las componentes dispuestas.

Se considera la integral asociada a la traza tangencial y el parámetro τ del modelo *(Tambien conocida como **CTM**)*:

$$
\begin{aligned}
\tau\ \langle \boldsymbol{u}_h^t, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K} &\approx [v_h]'\ \text{tauPP}\ [u_h] \\
&= [v_h]' \begin{pmatrix} (n_y^2 + n_z^2)\ \tau\mathbf{PP} & -n_x n_y\ \tau\mathbf{PP} & -n_x n_z\ \tau\mathbf{PP} \\ -n_y n_x\ \tau\mathbf{PP} & (n_x^2 + n_z^2)\ \tau\mathbf{PP} & -n_y n_z\ \tau\mathbf{PP} \\ -n_z n_x\ \tau\mathbf{PP} & -n_z n_y\ \tau\mathbf{PP} & (n_x^2 + n_y^2)\ \tau\mathbf{PP} \end{pmatrix} [u_h]
\end{aligned} \tag{9}
$$

Donde cada una de las matrices presentadas τ**PP** hacen referencia a la cuadratura asociada a los $d_3 \times d_3$ grados de libertad del producto interno entre cada una de las componentes dispuestas, y el efecto que tiene el coeficiente τ definido. Esta matriz es igual al producto directo entre la matriz **PP** y τ.

Se considera la integral en las caras asociadas al producto cruz con respecto a la normal, esta integral es bastante similar a la explorada anteriormente en el volumen (6), únicamente que esta integral a considerar toma elementos que viven únicamente en las caras *(Tambien conocida como **-FNTT**)*:

$$
\langle \hat{\boldsymbol{u}}_h^t, \boldsymbol{r}_h \times \boldsymbol{n} \rangle_{\partial K} \approx [r_h]'\ \mathbf{nDP_e}\ [\hat{u}_h^t] = [r_h]' \begin{pmatrix} (n_z a_1^y - n_y a_1^z)\mathbf{DP} \\ (n_z a_0^y - n_y a_0^z)\mathbf{DP} \\ (n_x a_1^z - n_z a_1^x)\mathbf{DP} \\ (n_x a_0^z - n_z a_0^x)\mathbf{DP} \\ (n_y a_1^x - n_x a_1^y)\mathbf{DP} \\ (n_y a_0^x - n_x a_0^y)\mathbf{DP} \end{pmatrix} [\hat{u}_h^t],\ \forall e \in \mathcal{E}(K)
$$

Primeramente debe notarse que por componente son considerados 2 valores de la base, esto debido a que se considera como generador la base definida en (4), por lo cual en cada componente se consideran los $d_3 \times d_2$ grados de libertad, y la base exige $d_3 \times 2d_2$ grados de libertad. Adicionalmente considerarse en cuenta que esta integral es definida por cara, por lo cual resulta conveniente para cada uno de los elementos definir DP para los grados de libertad $d_3 \times 2d_2$ las cuatro caras que pertenecen al elemento concatenadas horizontalmente. En otras palabras la matriz que se debe reverenciar toma la forma:

$$
[r_h]'\ \mathbf{nDP}\ [\hat{u}_h^t] = [r_h]' \begin{pmatrix} \mathbf{nDP_{e_1}} & \mathbf{nDP_{e_2}} & \mathbf{nDP_{e_3}} & \mathbf{nDP_{e_4}} \end{pmatrix} [\hat{u}_h^t] \tag{10}
$$

Se considera la integral en las caras asociada al producto interno entre elementos de viven en el volumen y las caras *(Tambien conocida como **FNM**)*:

$$
\tau\ \langle \hat{\boldsymbol{u}}_h^t, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K} \approx [v_h]'\ \mathbf{tauDP_e}\ [\hat{u}_h^t] = [v_h]' \begin{pmatrix} \tau a_1^x \mathrm{DP} \\ \tau a_1^y \mathrm{DP} \\ \tau a_1^z \mathrm{DP} \\ \tau a_0^x \mathrm{DP} \\ \tau a_0^y \mathrm{DP} \\ \tau a_0^z \mathrm{DP} \end{pmatrix} [\hat{u}_h^t],\ \forall e \in \mathcal{E}(K)
$$

Homologamente, esta matriz es definida por caras, por lo cual la matriz que se referencia obtiene la forma tras concatenar cada una de estas matrices horizontalmente.

$$
\tau\ [v_h]'\ \mathbf{tauDP}\ [\hat{u}_h^t] = [v_h]' \begin{pmatrix} \mathbf{tauDP_{e_1}} & \mathbf{tauDP_{e_2}} & \mathbf{tauDP_{e_3}} & \mathbf{tauDP_{e_4}} \end{pmatrix} [\hat{u}_h^t] \tag{11}
$$

Se considera la integral del flujo numérico asociada al producto interno entre el elemento tangencial y la función test en las caras *(Tambien conocida como **CTFM**)*:

$$
\begin{aligned}
\tau\ \langle \boldsymbol{u}_h^t, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial K} &\approx [\eta_h]'\ \mathbf{tauDP\_t_e}\ [u_h^t] \\
&= [\eta_h]' \begin{pmatrix} (a_1^x(n_y^2 + n_z^2) - a_1^y n_x n_y - a_1^z n_x n_z)\ \tau\mathbf{DP'} \\ (a_0^x(n_y^2 + n_z^2) - a_0^y n_x n_y - a_0^z n_x n_z)\ \tau\mathbf{DP'} \\ (-a_1^x n_y n_x + a_1^y(n_x^2 + n_z^2) - a_1^z n_y n_z)\ \tau\mathbf{DP'} \\ (-a_0^x n_y n_x + a_0^y(n_x^2 + n_z^2) - a_0^z n_y n_z)\ \tau\mathbf{DP'} \\ (-a_1^x n_z n_x - a_1^y n_z n_y + a_1^z(n_x^2 + n_y^2))\ \tau\mathbf{DP'} \\ (-a_0^x n_z n_x - a_0^y n_z n_y + a_0^z(n_x^2 + n_y^2))\ \tau\mathbf{DP'} \end{pmatrix} [u_h^t],\ \forall e \in \mathcal{E}(K)
\end{aligned}
$$

Siguiendo las mismas consideraciones anteriores, la matriz a considerar es:

$$[\eta_h]' \ \mathbf{tauDP\_t}_e \ [u_h] = [\eta_h]' \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{tauDP\_t_{e_1}} & \mathbf{tauDP\_t_{e_2}} & \mathbf{tauDP\_t_{e_3}} & \mathbf{tauDP\_t_{e_4}} \end{array} \right) [u_h^t] \tag{12}$$

Finalmente se considera la integral que contiene el producto interno de las funciones que viven en las caras *(Tambien conocida como* ***FNFN****)*:

$$\tau \ \langle \hat{\mathbf{u}}_h^t, \boldsymbol{\eta}_h \rangle_{\partial K} \approx [\eta_h]' \ \mathbf{tauDD} \ [\hat{u}_h^t] = [\eta_h]' \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_1' \cdot \mathbf{A}_1 \ \tau\mathbf{DD} & \mathbf{A}_1' \cdot \mathbf{A}_0 \ \tau\mathbf{DD} \\ \mathbf{A}_0' \cdot \mathbf{A}_1 \ \tau\mathbf{DD} & \mathbf{A}_0' \cdot \mathbf{A}_0 \ \tau\mathbf{DD} \end{array} \right) [\hat{u}_h^t] \tag{13}$$

Donde el elemento $\tau\mathbf{DD}$ la cuadratura asociada para los $d_2 \times d_2$ grados de libertad, por lo cual la matriz total tiene dimensiones $2d_2 \times 2d_2$.

3. El sistema final

Con los elementos planteados, finalmente definimos tres matrices definidas por bloques que permiten representar el sistema definido por las ecuaciones (1) - (3), empleando los elementos de cuadratura anterior mencionados.

$$\mathbb{A}_1 := \left(\begin{array}{cc} \mathbf{M} & -\mathbf{curlPP} \\ \mathbf{curlPP} + \mathbf{nPP} & \mathbf{M} + \mathbf{tauPP} \end{array} \right), \mathbb{A}_2 := \left(\begin{array}{c} \mathbf{nDP}' \\ -\mathbf{tauDP}' \end{array} \right), \mathbb{A}_3 := \left(\begin{array}{cc} \mathbf{nDP} & \mathbf{tauDP\_t} \end{array} \right) \tag{14}$$

Gracias a estas definiciones es posible escribir el problema propuesto localmente, de la forma:

$$([r_h] \ [v_h]) \, \mathbb{A}_1 \left(\begin{array}{c} [z_h] \\ [u_h] \end{array} \right) + ([r_h] \ [v_h]) \, \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t] = ([r_h] \ [v_h]) \ \mathbb{A}_f$$

Veamos que el sistema matricial permite obtener una expresión que permite aproximar los grados de libertad de las variables de volumen, así se obtiene inicialmente:

$$\left(\begin{array}{c} [z_h] \\ [u_h] \end{array} \right) = \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t]$$

Dentro del dominio se exige (2) por lo cual es posible con los elementos anteriormente definidos escribir una expresión matricial por bloques, así se obtiene:

$$[\eta_h]' \mathbb{A}_3 \left(\begin{array}{c} [z_h] \\ [u_h] \end{array} \right) - [\eta_h]' \mathbf{tauDD} [\hat{u}_h^t] = 0$$

Junto con la consideración anterior de la expresión obtenida para los grados de libertad de las variables de volumen, se obtiene una expresión para los grados de libertad del flujo numérico.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_3 \left(\begin{array}{c} [z_h] \\ [u_h] \end{array} \right) - \mathbf{tauDD}[\hat{u}_h^t] &= 0 \\ \mathbb{A}_3 \left(\mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 [\hat{u}_h^t] \right) - \mathbf{tauDD}[\hat{u}_h^t] &= 0 \\ \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f - \left(\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD} \right) [\hat{u}_h^t] &= 0 \\ \left(\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD} \right) [\hat{u}_h^t] &= \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f \end{aligned}$$

Finalmente la expresión buscada es:

$$[\hat{u}_h^t] = \left(\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD} \right)^{-1} \left(\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f \right) = \mathbb{C}_{\mathbb{M}}{}^{-1} \mathbb{C}_f \tag{15}$$

Donde se define implicitamente que:

$$\mathbb{C}_{\mathbb{M}} := \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 + \mathbf{tauDD}, \qquad \mathbb{C}_f := \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_f$$