Método del Punto Fijo

Integrantes:
Apaza Curtihuanca Job Edward
Apaza Huayta Sadith Lina
Paricahua Pari Clyde Neil
Quispe Ramos Henrry Higinio

Curso: Programación Numérica

Definición

El **método del punto fijo** es un procedimiento iterativo para resolver ecuaciones no lineales de la forma:

$$f(x) = 0$$

Se basa en reescribir la ecuación en la forma:

$$x = g(x)$$

donde g es una función adecuada. Una solución r de $f(x) = 0$ es un **punto fijo** de $g(x)$, es decir:

$$r = g(r).$$

Fundamento teórico

Si $g : [a, b] \to [a, b]$ es continua y existe $r \in [a, b]$ tal que $g(r) = r$, entonces r es una raíz de $f(x) = 0$.
Definimos la sucesión:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde x_0 es una aproximación inicial. Si la sucesión converge, el límite será la raíz buscada.

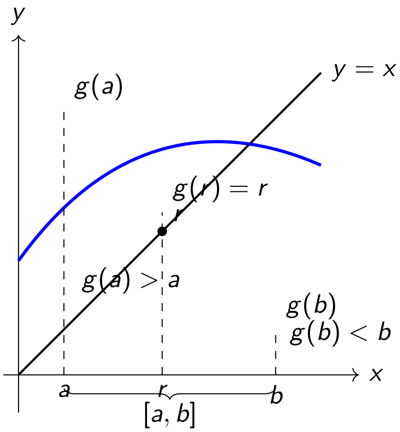
Existencia de raíz

Si $g(a) > a$ y $g(b) < b$, existe al menos un $r \in (a, b)$ tal que $g(r) = r$.
Definimos $h(x) = g(x) - x$. Entonces:

$$h(a) > 0, \quad h(b) < 0$$

Por el **Teorema de Bolzano**, existe $r \in (a, b)$ tal que $h(r) = 0 \Rightarrow g(r) = r$.

Ilustración gráfica



Condición de convergencia

El método converge si, en un entorno de la raíz r, se cumple:

$$|g'(r)| < 1$$

En este caso, la sucesión $\{x_n\}$ converge a r. Si $|g'(r)| > 1$, el método diverge.

Algoritmo

1. Reescribir $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.
2. Elegir una aproximación inicial x_0.
3. Iterar con la fórmula:

   $$x_{n+1} = g(x_n)$$

   hasta que:

   $$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

   donde ε es la tolerancia deseada.

Reformulación del Problema

Dada la ecuación:

$$f(x) = 0$$

Se reformula como:

$$x = g(x)$$

donde $g(x)$ es la **función de iteración**.

Condiciones de Convergencia

Para que el método de punto fijo funcione deben cumplirse:

- g es continua en $[a, b]$.
- $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.
- $|g'(x)| \leq L < 1$ para todo $x \in [a, b]$.

Proceso Iterativo

Valor inicial: $x_0 \in [a, b]$

Iteraciones:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cálculo de Errores

Error absoluto:

$$E_{\text{abs}} = |x_{n+1} - x_n|$$

Error relativo:

$$E_{\text{rel}} = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$$

Cota de error (Banach):

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Criterios de Parada

- **Por error absoluto:** $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- **Por error relativo:** $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \epsilon$
- **Por iteraciones máximas:** $n > N_{\max}$

Validación de la Solución

Punto fijo:

$$|g(x^*) - x^*| < \epsilon$$

Ecuación original:

$$|f(x^*)| < \delta$$

Transformación adecuada de la ecuación

La ecuación original:

$$f(x) = 0$$

debe reescribirse como:

$$x = g(x).$$

Esta reescritura no es única y no todas las formas garantizan convergencia.

Ejemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

Dos posibles transformaciones:

$$g_1(x) = 1 - x^3, \quad g_2(x) = \sqrt[3]{1 - x}$$

Una de ellas puede converger y la otra no, según:

$$|g'(x)| < 1$$

Teorema del Punto Fijo de Banach

El teorema garantiza que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$ y además es contractiva, es decir, existe k con $0 < k < 1$ tal que:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b],$$

entonces existe un único punto fijo r al que converge el método.

Convergencia lineal

La velocidad de aproximación es del orden:

$$|x_{n+1} - r| \leq k|x_n - r|$$

Esto significa:

- En cada paso el error se reduce aproximadamente por un factor k.
- El método es más lento comparado con otros de convergencia cuadrática (ej. Newton-Raphson).

Ventajas

- **Implementación simple:** basta definir $g(x)$ y un valor inicial.
- **Útil como preliminar:** da un valor inicial para métodos más rápidos.
- **Generalidad:** aplicable siempre que se pueda construir $g(x)$.
- **Bajo consumo de memoria:** solo se guardan los valores x_n y x_{n+1}.

Desventajas

- **No siempre aplicable:** no siempre es posible construir un $g(x)$ adecuado.
- **Alta sensibilidad:** depende fuertemente de $g(x)$ y de x_0.
- **Convergencia lenta:** puede requerir muchas iteraciones para alta precisión.
- **Oscilación:** si $|g'(x)| \approx 1$, puede oscilar o divergir.

Problema

Queremos determinar la tasa de interés mensual r que permite que una inversión se **duplique en un año**.

$$f(r) = (1 + r)^{12} - 2 = 0$$

- Si r es la tasa mensual, después de 12 meses el capital inicial se multiplica por $(1 + r)^{12}$.
- El objetivo es resolver esta ecuación mediante el **método de punto fijo**.

Transformación a Punto Fijo

El método de punto fijo consiste en reescribir $f(r) = 0$ como:

$$r = g(r)$$

Opción exacta:

$$r = \sqrt[12]{2} - 1$$

Opción iterativa:

$$g(r) = \frac{2}{(1+r)^{11}} - 1$$

A partir de una estimación inicial r_0, generamos la sucesión:

$$r_{n+1} = g(r_n)$$

Condiciones de Convergencia

Para que el método funcione, debe cumplirse:

$$|g'(r)| < 1$$

Calculemos $g'(r)$:

$$g(r) = \frac{2}{(1+r)^{11}} - 1$$

$$g'(r) = -22 \cdot \frac{1}{(1+r)^{12}}$$

Cerca de la solución $r \approx 0.058$, se verifica que $|g'(r)| < 1$, por lo que el método converge.

Iteraciones

Partimos de $r_0 = 0.05$ (5%).

$$r_{n+1} = g(r_n)$$

n	r_n	r_{n+1}
0	0.050	0.059
1	0.059	0.058
2	0.058	0.058

La sucesión converge a $r \approx 0.058$.

Conclusión

- El método de punto fijo nos permitió resolver la ecuación de forma iterativa.
- La tasa de interés mensual que hace que el capital se duplique en un año es aproximadamente:

$$r \approx 0.058 \quad (5.8\%)$$

- El método es sencillo, pero requiere verificar la condición de convergencia $|g'(r)| < 1$.