Wprowadzenie do Systemów Zarządzania

Wykład 6

PROGRAMOWANIE LINIOWE

dr hab. inż. Krzysztof Pieńkosz
K.Pienkosz@ia.pw.edu.pl

Zadanie Programowania Liniowego (postać równościowa)

Polega na znalezieniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ze zbioru liczb rzeczywistych

maksymalizujących funkcję celu

$$\max_{x} x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

gdzie c_j, a_{ij}, b_i znane współczynniki oraz $m < n$

Zadanie Programowania Liniowego (postać równościowa)

Zapis wektorowy

$$\max_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

gdzie

- $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$
- $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$
- $A = [a_{ij}]$ – macierz ograniczeń m x n

Inne równoważne postaci zadania PL

- “min” zamiast “max” w funkcji celu
- znaki “≥” lub “≤” zamiast “=” w ograniczeniach
- zmienne decyzyjne x_j nieograniczone lub ograniczone dowolnymi wartościami od dołu i/lub od góry

Reguły równoważnych przekształceń

- **zamiana rodzaju ekstremów**
  $\min c^T x \;=\; -(\max \; -c^T x)$
- **zamiana ograniczeń nierównościowych na równościowe**
  wprowadzenie zmiennej dopełniającej x_d
  $a^T x \le b \;\;\Rightarrow\;\; a^T x + x_d = \mathrm{b}, \;\; x_d \ge 0$
  $a^T x \ge b \;\;\Rightarrow\;\; a^T x - x_d = b, \;\; x_d \ge 0$
- **zamiana ograniczeń równościowych na nierównościowe**
  $a^T x = b \;\;\Rightarrow\;\; a^T x \le b$ i $a^T x \ge b$
- **zamiana zmiennych nieograniczonych na zmienne nieujemne**
  wprowadzenie par zmiennych x_j^+, x_j^- i podstawienie
  $x_j := x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \ge 0$ i $x_j^- \ge 0$

Przykład

Firma wytwarza dwa rodzaje farb – do malowania wnętrz (W) i na zewnątrz (Z).

Do produkcji tych farb niezbędne są dwa podstawowe składniki A i B. Maksymalne dzienne zapasy tych składników wynoszą odpowiednio 6 i 8 kg, natomiast ich zużycie na 1 tonę farby jest następujące:

Składniki	Farba *W*	Farba *Z*
A	2 kg	1 kg
B	1 kg	2 kg

Badania rynkowe pokazały, że dzienny zbyt na farbę W nigdy nie przekracza 2 ton i nie jest wyższy od zbytu na farbę Z o więcej niż 1 tonę. Zysk ze sprzedaży 1 tony farby W wynosi 20 tys. zł, a farby Z 30 tys. zł.

Należy określić dzienne wielkości produkcji farb W i Z przynoszące ***największy łączny zysk****.*

Model Programowania Liniowego

- zmienne decyzyjne:
  - x_W – dzienna wielkość produkcji farby *W* (w tonach)
  - x_Z – dzienna wielkość produkcji farby *Z* (w tonach)
- funkcja celu

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

- ograniczenia

$$2x_W + x_Z \leq 6 \qquad (1)$$
$$x_W + 2x_Z \leq 8 \qquad (2)$$
$$x_W - x_Z \leq 1 \qquad (3)$$
$$x_W \leq 2 \qquad (4)$$
$$x_W \geq 0 \qquad (5)$$
$$x_Z \geq 0 \qquad (6)$$

Model Programowania Liniowego

- zmienne decyzyjne:
  - x_W – dzienna wielkość produkcji farby *W* (w tonach)
  - x_Z – dzienna wielkość produkcji farby *Z* (w tonach)
- funkcja celu

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

- ograniczenia

$$
\begin{aligned}
2x_W + x_Z &\leq 6 \\
x_W + 2x_Z &\leq 8 \\
x_W - x_Z &\leq 1 \\
x_W &\leq 2 \\
x_W &\geq 0 \\
x_Z &\geq 0
\end{aligned}
$$

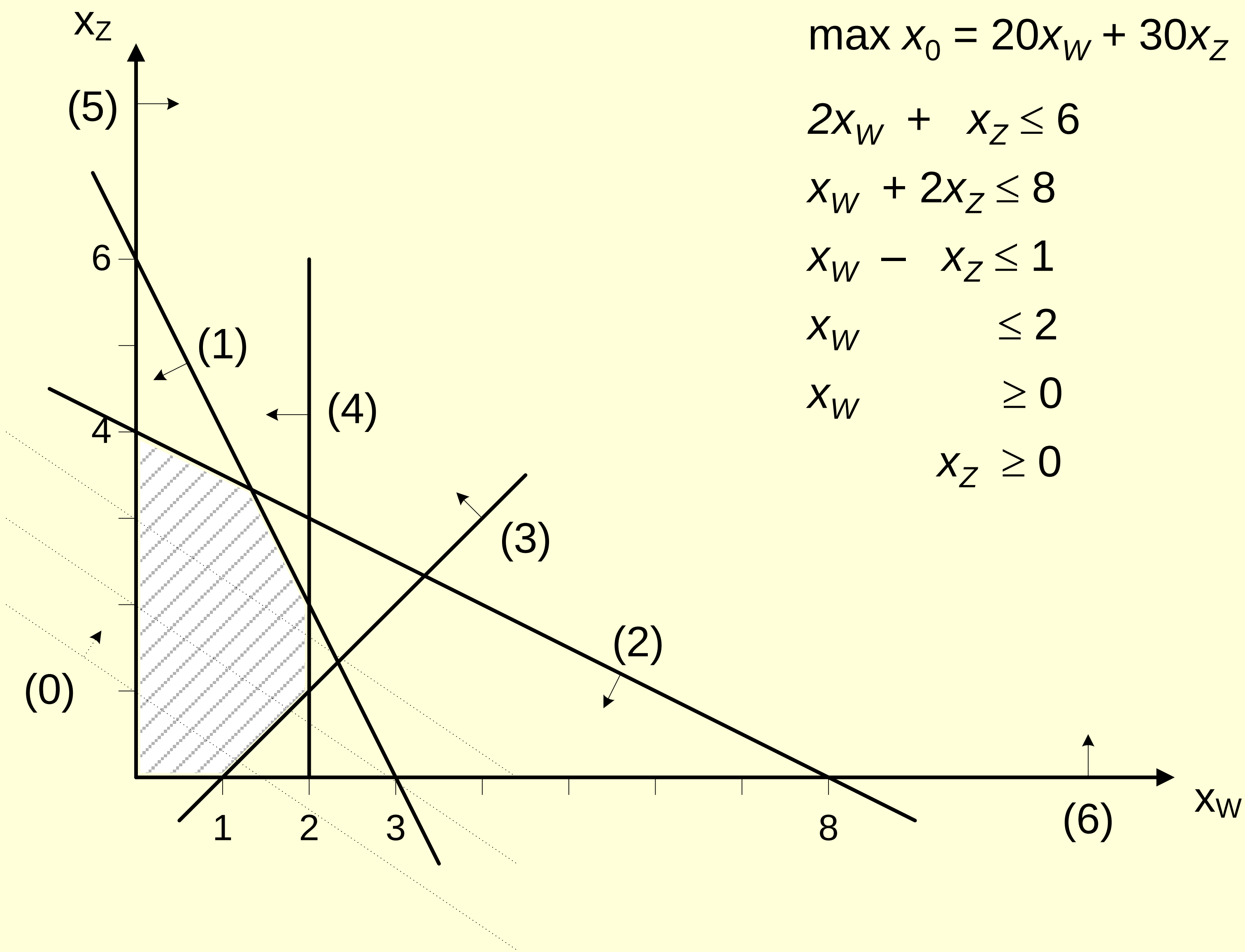
Model w AMPL

```
var  xw >= 0, <= 2;
var  xz >= 0;

# funkcja celu
maximize  x0: 20*xw + 30*xz;

#ograniczenia
subject to ogr1: 2*xw + xz <= 6;
subject to ogr2: xw + 2*xz <= 8;
subject to ogr3: xw - xz <= 1;
```

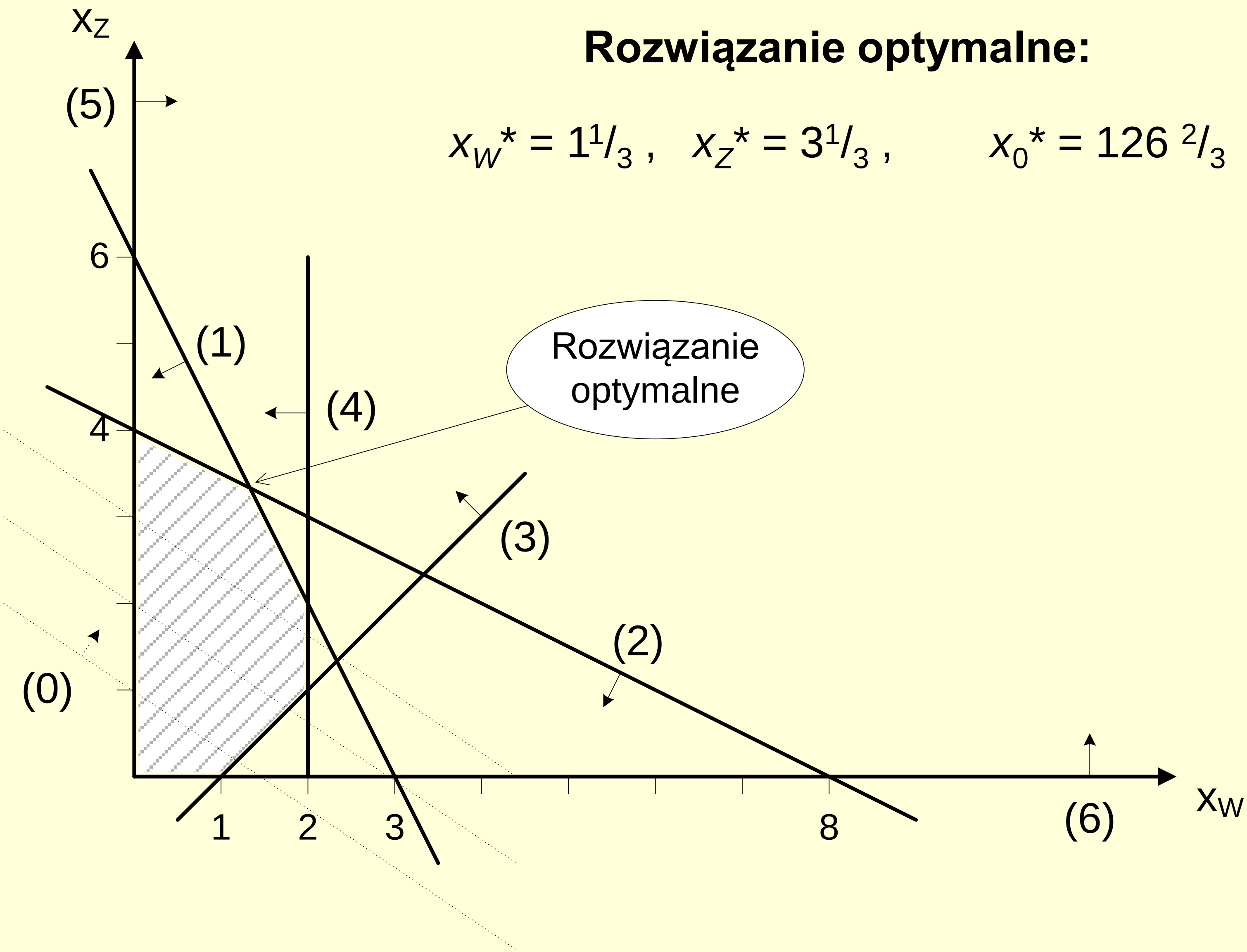
Interpretacja graficzna zadania PL



$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

$2x_W + x_Z \leq 6$	(1)
$x_W + 2x_Z \leq 8$	(2)
$x_W - x_Z \leq 1$	(3)
$x_W \leq 2$	(4)
$x_W \geq 0$	(5)
$x_Z \geq 0$	(6)

Interpretacja graficzna zadania PL



Rozwiązanie optymalne:

$x_W^* = 1^1/_3$, $x_Z^* = 3^1/_3$, $x_0^* = 126\ ^2/_3$

Przypadki w Programowaniu Liniowym

- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty (ograniczenia są sprzeczne) – *brak rozwiązań*

- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty oraz funkcja celu jest ograniczona od góry (dla problemu maksymalizacji) – *istnieje co najmniej jedno rozwiązanie optymalne w punkcie wierzchołkowym*

- funkcja celu jest nieograniczona z góry na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych – *zadanie jest nieograniczone, brak skończonego rozwiązania optymalnego*

Wniosek 1

Trzeba dokładnie przeczytać komunikat końcowy solvera!

Wniosek 2

Rozwiązań optymalnych zadania PL można szukać wśród punktów wierzchołkowych (dopuszczalnych rozwiązań bazowych)

Ogólna idea algorytmu sympleks

1. Wyznacz początkowy punkt wierzchołkowy (początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe).
2. Test optymalności – czy rozwiązanie gorsze od sąsiednich ? Jeżeli nie, to STOP – znaleziono rozwiązanie optymalne, jeżeli tak idź do 3.
3. Przejdź do sąsiedniego punktu wierzchołkowego, dającego lepszą wartość funkcji celu. Idź do 2.

Dualność

Zadanie pierwotne		**Zadanie dualne**
$\max_{x} x_0 = c^T x$ $A\ x = b$ $x \geq 0$	$\Rightarrow$	$\min_{v} v_0 = b^T v$ $A^T v \geq c$
$\min_{x} x_0 = c^T x$ $A\ x = b$ $x \geq 0$	$\Rightarrow$	$\max_{v} v_0 = b^T v$ $A^T v \leq c$
$\max_{x} x_0 = c^T x$ $A\ x \leq b$ $x \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$\min_{v} v_0 = b^T v$ $A^T v \geq c$ $v \geq 0$

Przykład – model problemu produkcji farb zadanie pierwotne

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

przy ograniczeniach

$$
\begin{aligned}
2x_W + x_Z &\le 6 \\
x_W + 2x_Z &\le 8 \\
x_W - x_Z &\le 1 \\
x_W &\le 2 \\
x_W \ge 0,\ x_Z &\ge 0
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie optymalne:

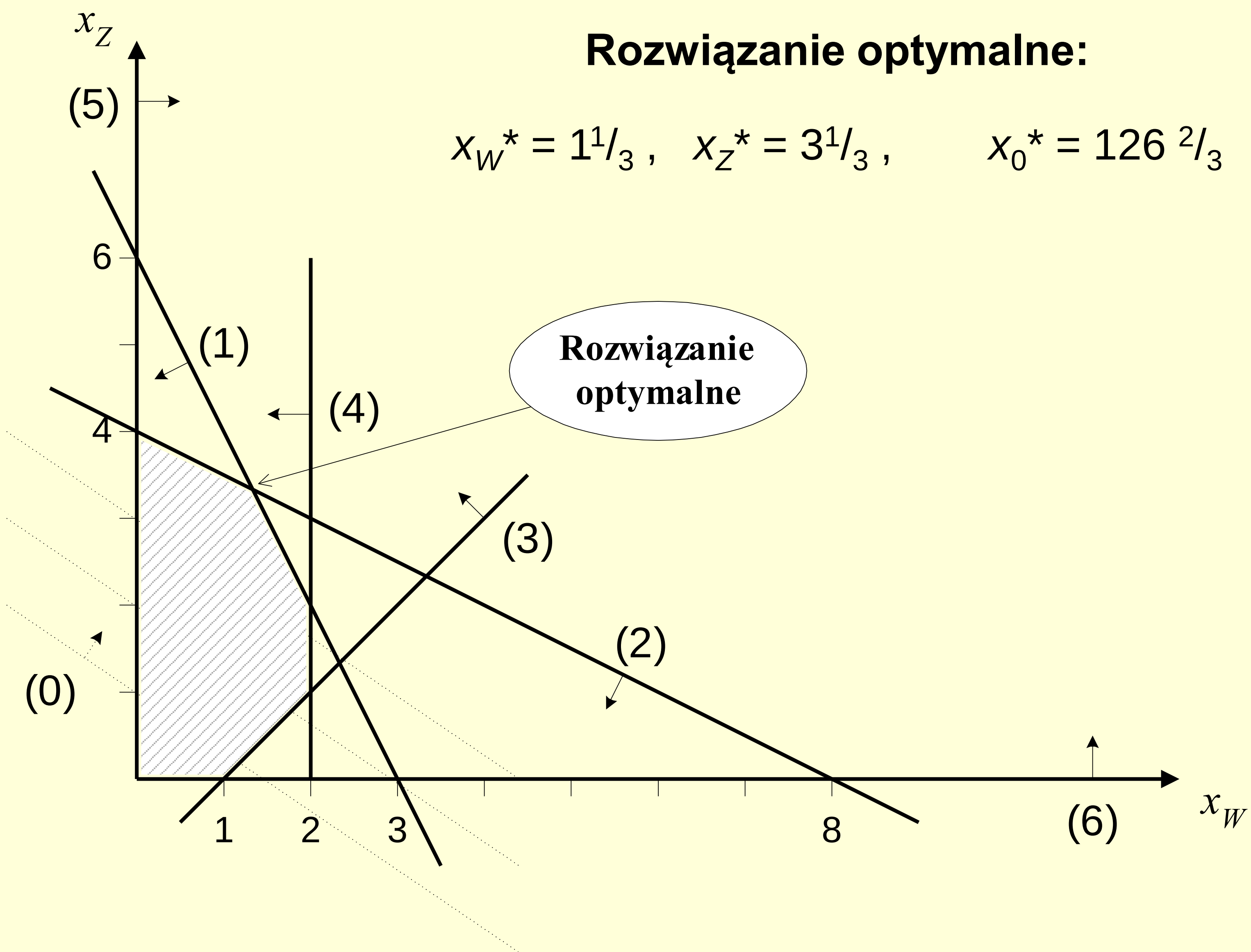
$x_W^* = 4/3$, $x_Z^* = 10/3$

$x_0^* = 126\ {}^2/_3$

Przykład – model problemu produkcji farb zadanie pierwotne

Rozwiązanie optymalne:

$x_W^* = 1^1/_3$, $x_Z^* = 3^1/_3$, $x_0^* = 126\ ^2/_3$



Przykład – model problemu produkcji farb zadanie dualne

$$\min v_0 = 6v_1 + 8v_2 + v_3 + 2v_4$$

przy ograniczeniach

$$2v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \geq 20$$

$$v_1 + 2v_2 - v_3 \geq 30$$

$$v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0,\ v_3 \geq 0,\ v_4 \geq 0$$

Rozwiązanie optymalne:

$$v_1^* = 3\,{}^1/_3\ ,\quad v_2^* = 13\,{}^1/_3\ ,\quad v_3^* = 0,\quad v_4^* = 0$$

$$v_0^* = 126\ {}^2/_3$$

Zmienne dualne (ceny dualne, marginalne) określają wrażliwość funkcji celu zadania pierwotnego na zmianę prawych stron ograniczeń

Właściwości zadań dualnych

- Między zadaniem pierwotnym a zadaniem dualnym zachodzi dokładnie jeden z następujących związków:
  - oba zadania mają skończone rozwiązania optymalne, wtedy max $c^T x$ = min $b^T v$
  - jedno z zadań jest niedopuszczalne, a drugie nieograniczone
  - oba zadania są niedopuszczalne

- Jeżeli

  x - dowolne rozwiązanie dopuszczalne problemu pierwotnego

  v - dowolne rozwiązanie dopuszczalne problemu dualnego

  to

  $c^T x \leq b^T v$

- Zadaniem dualnym do dualnego jest zadanie pierwotne

Związki między optymalnymi rozwiązaniami zadania pierwotnego i dualnego

Niech

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ – optymalne rozwiązanie zadania pierwotnego

$v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*)^T$ – optymalne rozwiązanie zadania dualnego

Wówczas

- $c^T x^* = b^T v^*$
- Warunki komplementarności

$$v_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i^* - c_j \right) = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Modelowanie funkcji celu typu maxmin

$$\max z = \min_i (\sum_j a_{ij} x_j)$$
$$x \in D \quad \text{(ograniczenia liniowe)}$$

$$\Downarrow$$

$$\max z$$
$$z - \sum_j a_{ij} x_j \le 0 \quad \forall i$$
$$x \in D$$

Analogicznie można uwzględnić z modelu PL funkcję celu typu minmax

Założenia modelu Programowania Liniowego

- Liniowość (proporcjonalność i addytywność)
- Pełna podzielność (ciągłe zmienne decyzyjne)
- Brak niepewności (model deterministyczny)
- Jedno kryterium oceny rozwiązania (model jednokryterialny)