Wprowadzenie do Systemów Zarządzania

Wykład 7

MODELE DYSKRETNE

Dyskretne modele optymalizacji

- Dotyczą problemów decyzyjnych, w których pewne zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko dyskretne wartości np.:
  - całkowitoliczbowe
  - binarne (0 lub 1)

- W zależności od rodzaju występujących zmiennych wyróżniamy zadania programowania
  - całkowitoliczbowego
  - binarnego
  - mieszanego – występują zmienne ciągłe i dyskretne

Sytuacje, w których stosuje się zmienne dyskretne

- natura poszukiwanych rozwiązań jest dyskretna
  - wyznaczanie liczby niepodzielnych obiektów np. procesorów, zadań, pracowników itp.
  - określanie permutacji lub kombinacji pewnego zbioru obiektów (problemy kombinatoryczne)
- wybór decyzji spośród wielu wariantów
- uwzględnianie warunków logicznych

Przykład – binarne zadanie plecakowe (0-1 Knapsack Problem)

Sformułowanie

Które spośród n przedmiotów o wartościach $p_1, p_2,...,p_n$ i ważących odpowiednio $w_1, w_2,...,w_n$ należy zapakować do plecaka o ładowności C, aby łączna wartość zapakowanych przedmiotów była jak największa ?

Model Programowania Binarnego

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

Modelowanie zależności

Identyfikacja wyrażeń $W(x)$ o dodatnich wartościach

- zależność: $y \in \{0, 1\}$ i jeżeli $W(x) > 0$, to $y = 1$
- model całkowitoliczbowy:

  $W(x) \leq My,$

  $y \in \{0, 1\}$

  gdzie M takie, że $M \geq W(x)$, $M > 0$

Przykład – zadanie pakowania pojemników (Bin Packing Problem)

Sformułowanie zadania jednowymiarowego

Należy zapakować n przedmiotów o rozmiarach $w_1, w_2, ..., w_n$ do jak najmniejszej liczby pojemników o wielkości B.

Model Programowania Binarnego

$$\min \sum_{j=1}^{k} y_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} - B y_j \le 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, k$$

$$y_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, \ldots, k$$

Modelowanie zależności

Ograniczona liczba zmiennych o wartościach dodatnich

- zależność: co najwyżej k zmiennych x_i ma dodatnie wartości
- model całkowitoliczbowy:

$$x_i \le M_i y_{i,} \quad i = 1,\dots,n$$
$$\sum_{i=1}^{k} y_i \le k$$
$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n$$

Modelowanie zależności

Zmienne semi-ciągłe

- zależność: $x \in \{0\} \cup [a, b]$, gdzie $0 < a \leq b$
- model całkowitoliczbowy:

$$ay \leq x \leq by,$$
$$y \in \{0, 1\}$$

- przykład: jeżeli przydzielamy gdzieś zasób, to w wielkości co najmniej a (i nie większej niż b)

Modelowanie zależności

Zmienne z tylko *k* dopuszczalnymi wartościami

- zależność: $x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$
- model całkowitoliczbowy:

$$x = \sum_{i=1}^{k} q_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = 1$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\ldots,k$$

- przykład: możemy kupić tylko 50, 100 lub 250 sztuk towaru

Modelowanie zależności

Iloczyn dwóch zmiennych binarnych

- zależność: $z = y_1 y_2, \qquad y_1, y_2, z \in \{0, 1\}$
- model całkowitoliczbowy:

$$y_1 + y_2 - 2z \geq 0$$
$$y_1 + y_2 - z \leq 1$$

Iloczyn wielu zmiennych binarnych

- zależność: $z = y_1 y_2 \ldots y_k, \quad z, y_i \in \{0, 1\}$
- model całkowitoliczbowy:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i - kz \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{k} y_i - z \leq k - 1$$

Metody rozwiązywania zadań dyskretnych

- **dokładne** – wyznaczają gwarantowane rozwiązanie optymalne
- **heurystyczne (przybliżone)** – starają się wyznaczyć jak najlepsze rozwiązanie, ale niekoniecznie optymalne
- w założeniu czas obliczeń metod heurystycznych znacząco krótszy od algorytmów dokładnych

Kryteria oceny algorytmów

- dokładność
- złożoność obliczeniowa
- złożoność pamięciowa

Zwykle te oceny są dokonywane na podstawie analizy najgorszego przypadku

Metody heurystyczne

- **Algorytmy konstrukcyjne**
  - tworzą rozwiązanie częściowe rozbudowując je w kolejnych krokach
  - pełne rozwiązanie uzyskuje się dopiero po zakończeniu algorytmu (czasami można nie uzyskać pełnego rozwiązania dopuszczalnego)
  - zwykle są to algorytmy heurystyczne specjalizowane

Algorytmy konstrukcyjne

Techniki budowania rozwiązania w algorytmach konstrukcyjnych

- metoda zachłanna (*ang. greedy*) – wybieranie w każdym kroku najkorzystniejszego lokalnie wariantu rozbudowy rozwiązania
- stosowanie statycznych lub dynamicznych reguł priorytetowych
- rozwiązanie „podobnego" ale prostszego zadania (np. relaksacji) i modyfikacja uzyskanego rozwiązania w celu wyeliminowania jego niedopuszczalności (konstrukcyjna procedura naprawy)

Algorytmy konstrukcyjne – przykład

Problem plecakowy

7 przedmiotów, $c = 6$

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	4	2	4	5	6	2	1
w_i	3	1	1	2	4	3	2

- strategia zachłanna: pakowanie przedmiotów według ich wartości
  Rozwiązanie: {5, 4}, wartość 11
- reguła priorytetowa: pakowanie przedmiotów w kolejności nierosnących wskaźników p_j / w_j, czyli 3-4-2-5-1-6-7
  Rozwiązanie: {3, 4, 2, 7}, wartość 12
- adaptacja rozwiązania z relaksacji liniowej
  Rozwiązanie: {3, 4, 2}, wartość 11 – gdy usuwamy ostatni przedmiot
  Rozwiązanie: {3, 2, 5}, wartość 12 – gdy usuwamy przedmiot 4

Metody heurystyczne

- **Algorytmy konstrukcyjne**
  - tworzą rozwiązanie częściowe rozbudowując je w kolejnych krokach
  - pełne rozwiązanie uzyskuje się dopiero po zakończeniu algorytmu (czasami można nie uzyskać pełnego rozwiązania dopuszczalnego)
  - zwykle są to algorytmy heurystyczne specjalizowane

- **Algorytmy przeszukiwania sąsiedztwa (poprawy)**
  - operują tylko na pełnych rozwiązaniach
  - wymagają rozwiązania startowego
  - w kolejnych iteracjach modyfikują aktualne rozwiązanie poszukując lepszego – przeszukiwanie rozwiązań
  - można przerwać algorytm i posiada się dopuszczalne rozwiązanie
  - zwykle bazują na pewnych ogólnych schematach rozwiązywania (metaheurystyki)

Często stosuje się kombinację algorytmów konstrukcyjnych i poprawy

Przykłady metaheurystyk

- algorytmy genetyczne (ewolucyjne)
- przeszukiwanie „tabu search”
- symulowane wyżarzanie (wychładzanie)
- VNS (Variable Neighborhood Search)
- algorytmy randomizowane, np. GRASP
- ……………………………………………..

Metody dokładne dla problemów dyskretnych

- algorytmy specjalizowane
- metody przeglądu
  - metoda podziału i oszacowań (*Branch & Bound*)
  - *Branch & Cut*, *Branch & Price* i inne odmiany
  - programowanie w logice ograniczeń
- metody odcięć
- programowanie dynamiczne
- metody sieciowe

Metody przeglądu

Sposoby ograniczania drzewa przeglądu rozwiązań

- wykorzystywanie oszacowań do identyfikacji i pomijania nieatrakcyjnych kierunków przeszukiwania – metoda podziału i oszacowań
- propagacja ograniczeń – programowanie w logice ograniczeń
- łączenie gałęzi na podstawie analizy osiąganych rozwiązań – programowanie dynamiczne

Relaksacja

Problem *P*

$z(P) = \max f(x)$

$x \in F(P)$

Problem *A*

$z(A) = \max g(x)$

$x \in F(A)$

jest relaksacją problemu P jeżeli

(i) $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in F(P)$

(ii) $F(P) \subseteq F(A)$

Relaksacja liniowa (problemu dyskretnego)

(i) $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in F(P)$

(ii) w $F(A)$ pominięte ograniczenia na całkowitoliczbowość zmiennych

Przykład – problem plecakowy

Sformułowanie

Które spośród n przedmiotów o wartościach $p_1, p_2,...,p_n$ i ważących odpowiednio $w_1, w_2,...,w_n$ należy zapakować do plecaka o ładowności C, aby łączna wartość zapakowanych przedmiotów była jak największa ?

Model Programowania Binarnego

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n$$

Relaksacja liniowa problemu plecakowego

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,\ldots,n$$

Właściwości relaksacji liniowej problemu plecakowego

Niech uporządkowanie przedmiotów będzie takie, że

$$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n$$

Wtedy rozwiązanie

$$x_1=1,\ x_2=1,\ \ldots,\ x_{s-1}=1,\ x_s = \left(C - \sum_{i=1}^{s-1} w_i \right) / w_s,\ x_{s+1}=0,\ \ldots,\ x_n=0$$

$$\text{gdzie } s = \min\{ j : \sum_{i=1}^{j} w_i > C \}$$

jest optymalnym rozwiązaniem **relaksacji liniowej** problemu plecakowego

Metoda podziału i oszacowań

1. Wybór podproblemu P_i do analizy (na początku $P_0 = P$).
2. Oszacowanie optymalnej wartości funkcji celu dla podproblemu P_i
   - $\underline{z}_i$ od dołu – z rozwiązania dopuszczalnego (dobrego);
   - $\overline{z}_i$ od góry – z relaksacji (np. relaksacji liniowej);
3. Sondaż podproblemu P_i i ewentualny podział
4. Jeżeli wszystkie podproblemy są zamknięte to STOP.
   W przeciwnym przypadku idziemy do 1.

Przykład

Problem *P*$_0$

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$

Iteracja 0 – analiza problemu P_0

Problem P_0

P_0

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

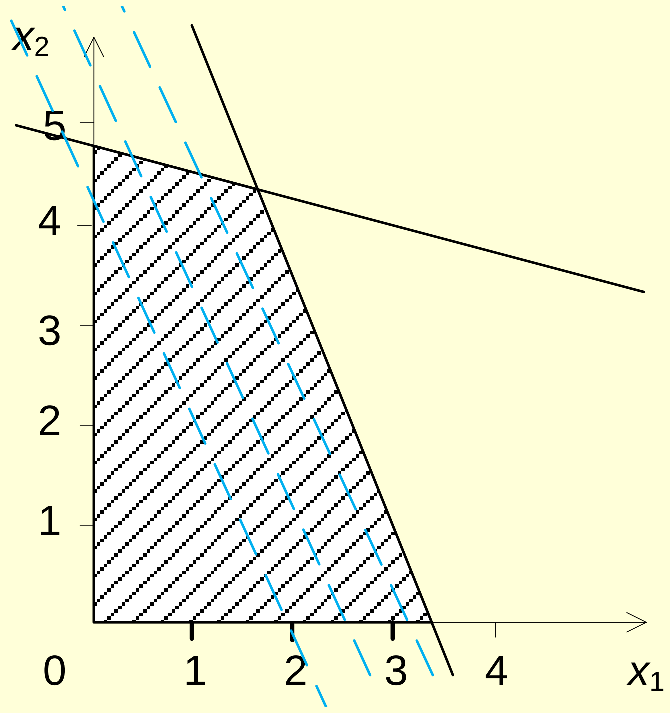
Iteracja 0 – szacowanie od góry problemu P_0

Problem P_0

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

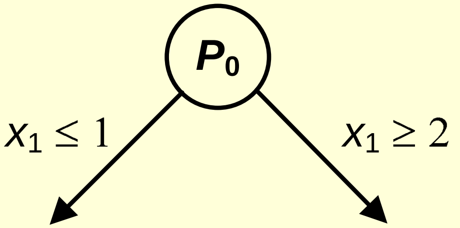


Rozwiązanie relaksacji liniowej: $x = (1{,}67;\ 4{,}33)$, $z = 24{,}67$

Iteracja 0 – podział problemu P_0

Problem P_0

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$



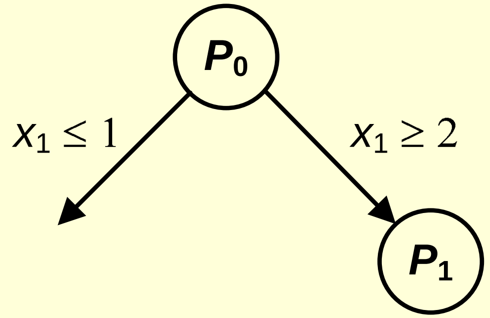
Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (1,67; 4,33), z = 24,67
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: brak

Oszacowanie górne P_0 : 24,67,   Oszacowanie dolne P_0 : 0

Iteracja 1 – analiza problemu P_1

Problem P_1

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$



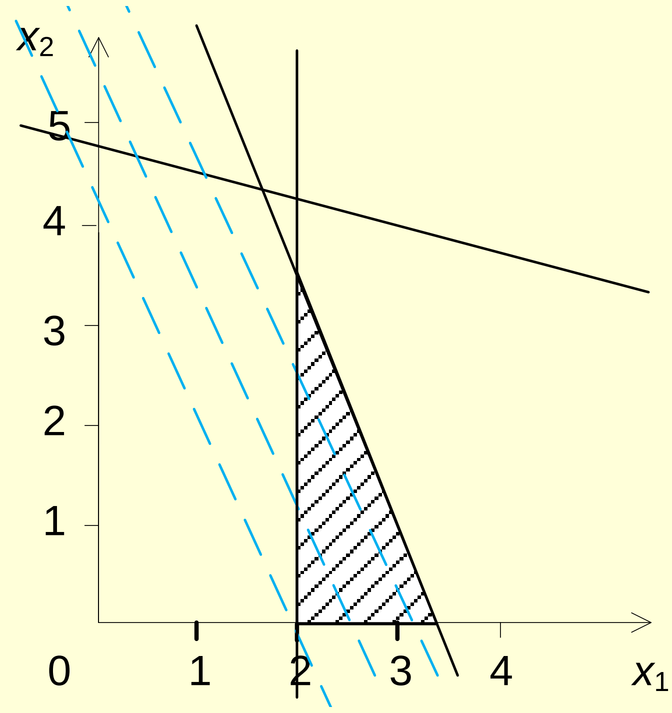
Iteracja 1 – szacowanie od góry problemu P_1

Problem P_1

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 0$$

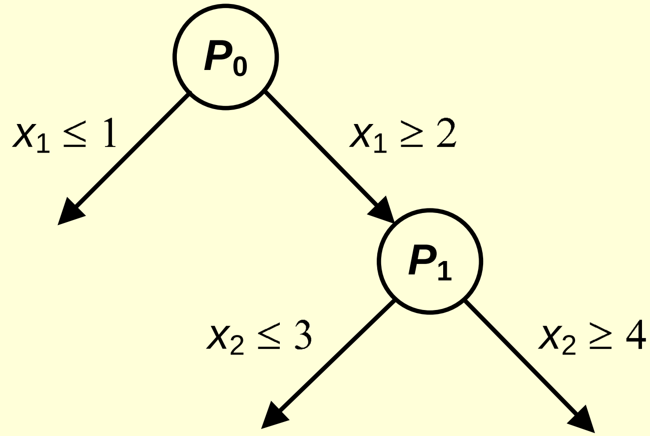


Rozwiązanie relaksacji liniowej: $x = (2; 3{,}5)$, $z = 24{,}50$

Iteracja 1 – podział problemu P_1

Problem P_1

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \leq 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2; 3,5), z = 24,50

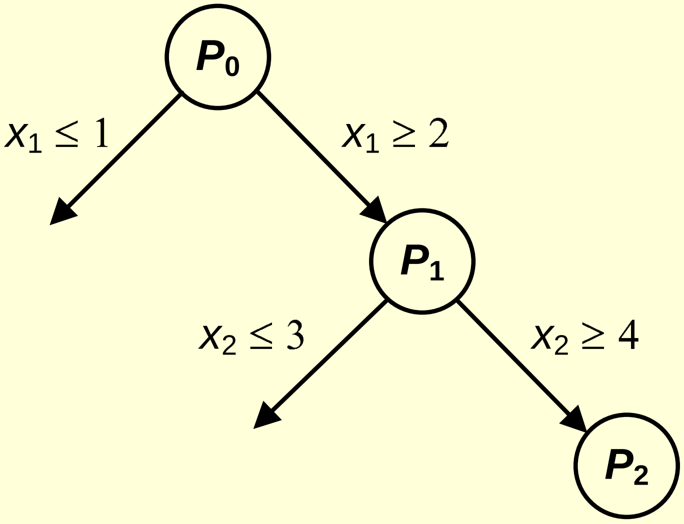
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: brak

Oszacowanie górne P_0 : 24,67,   Oszacowanie dolne P_0 : 0

Iteracja 2 – analiza problemu P_2

Problem P_2

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



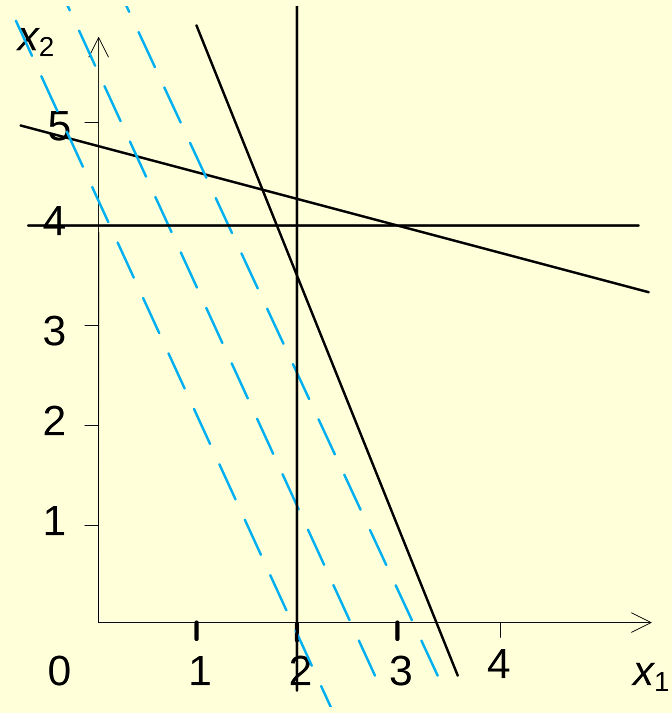
Iteracja 2 – szacowanie od góry problemu P_2

Problem P_2

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 4$$

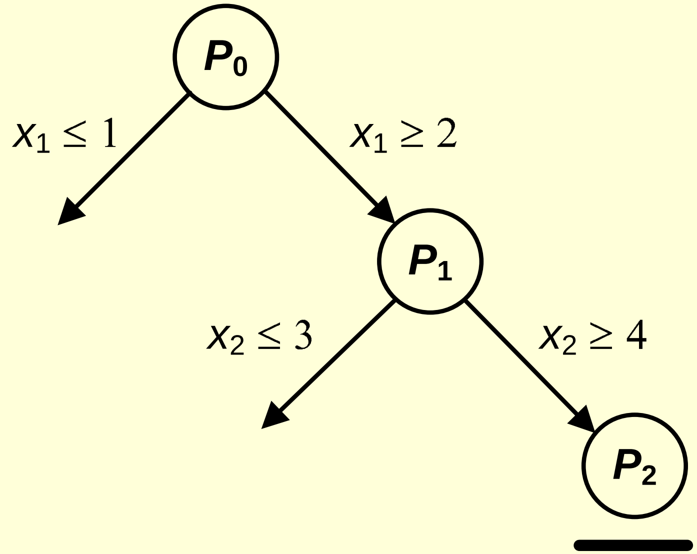


Rozwiązanie relaksacji liniowej: brak rozwiązania dopuszczalnego

Iteracja 2 – zamknięcie gałęzi

Problem P_2

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



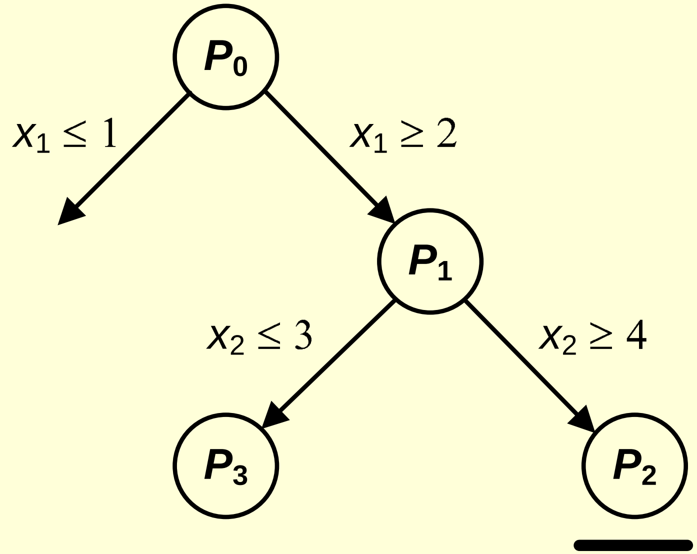
Rozwiązanie relaksacji liniowej: brak rozwiązania dopuszczalnego
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: brak

Oszacowanie górne P_0 : 24,67, Oszacowanie dolne P_0 : 0

Iteracja 3 – analiza problemu P_3

Problem P_3

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



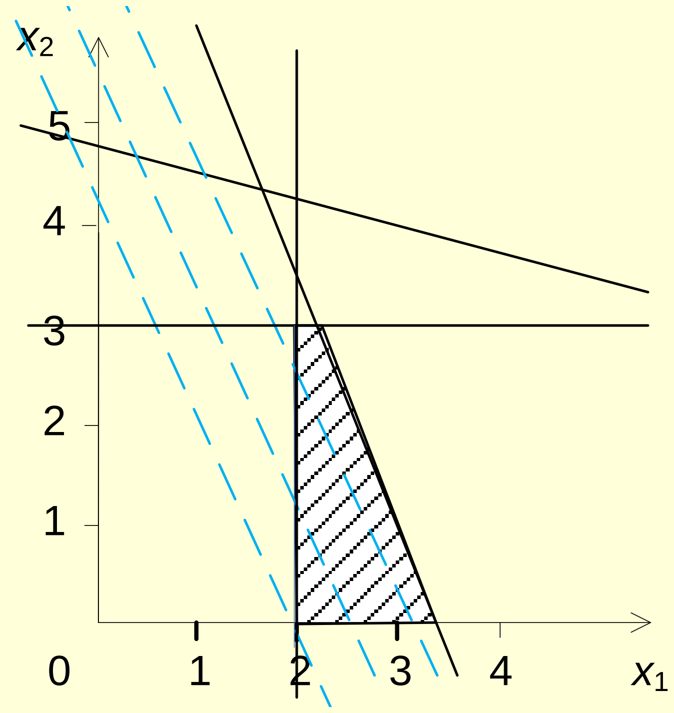
Iteracja 3 – szacowanie od góry problemu P_3

Problem P_3

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$

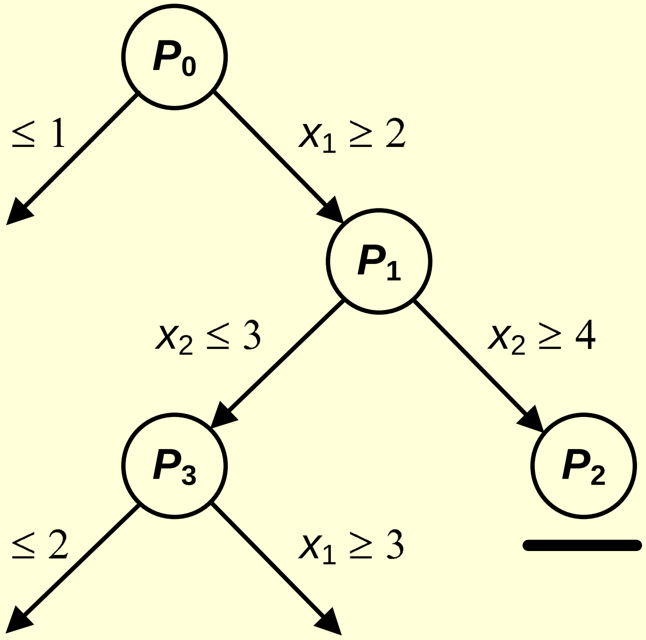


Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2,2; 3), z = 24,40

Iteracja 3 – podział problemu P_3

Problem P_3

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$



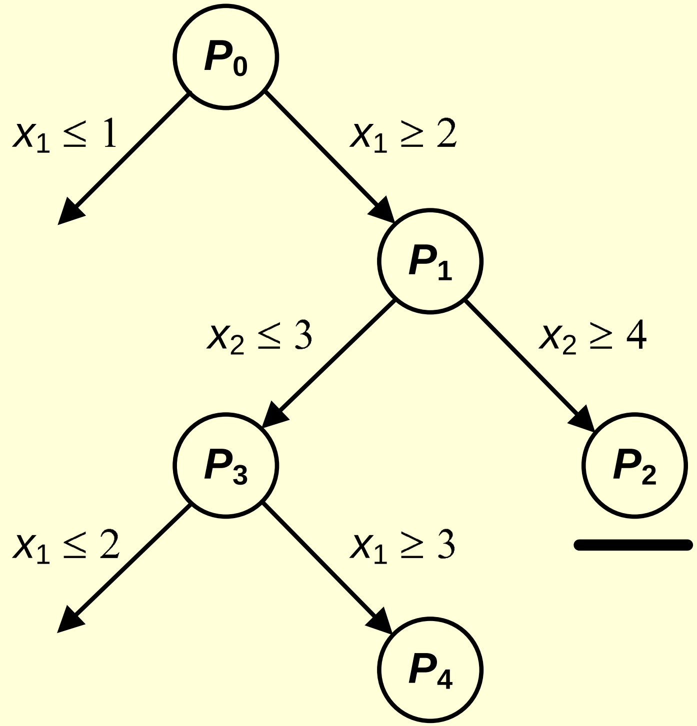
Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2,2; 3), z = 24,40
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: brak

Oszacowanie górne P_0 : 24,67,   Oszacowanie dolne P_0 : 0

Iteracja 4 – analiza problemu P_4

Problem P_4

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 3$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



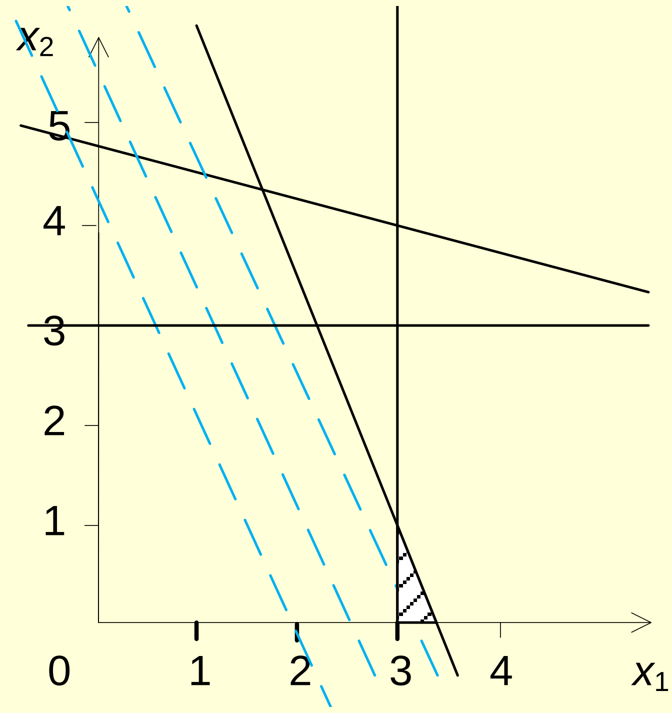
Iteracja 4 – szacowanie od góry problemu P_4

Problem P_4

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 3$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 3$$
$$0 \le x_2 \le 3$$

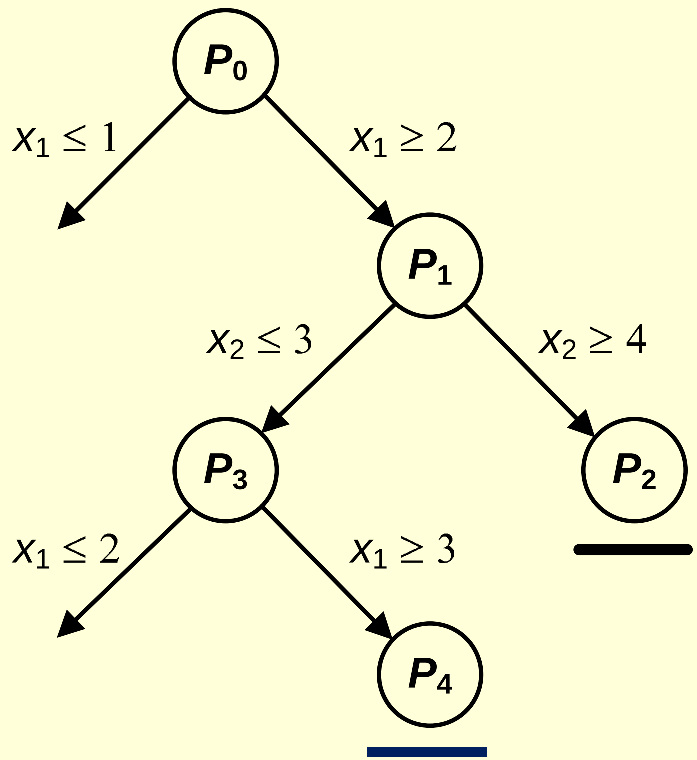


Rozwiązanie relaksacji liniowej: $x = (3; 1)$, $z = 24$

Iteracja 4 – zamknięcie gałęzi

Problem P_4

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 3$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$



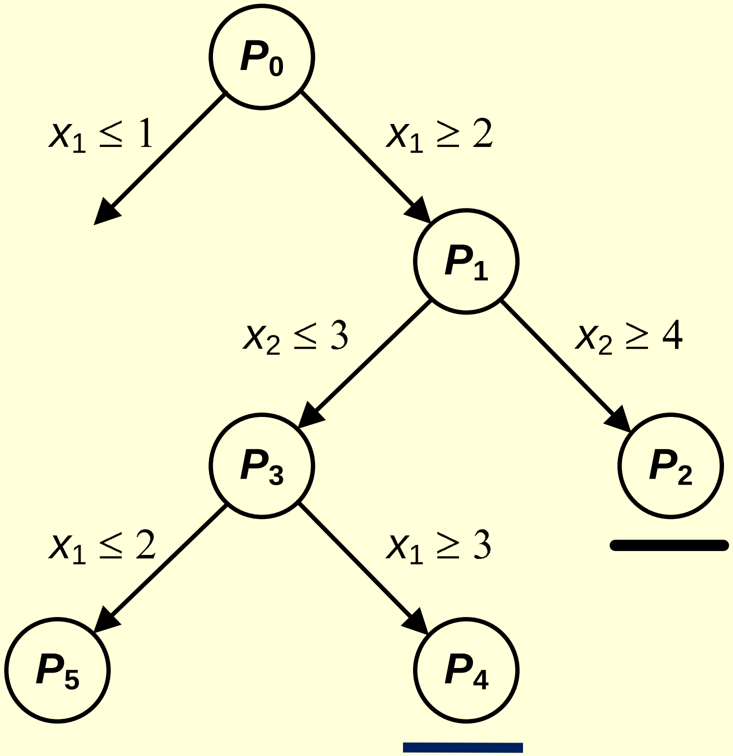
Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (3; 1), z = 24
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (3; 1), z^N = 24

Oszacowanie górne P_0 : 24,67, Oszacowanie dolne P_0 : 24

Iteracja 5 – analiza problemu P_5

Problem P_5

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 = 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$



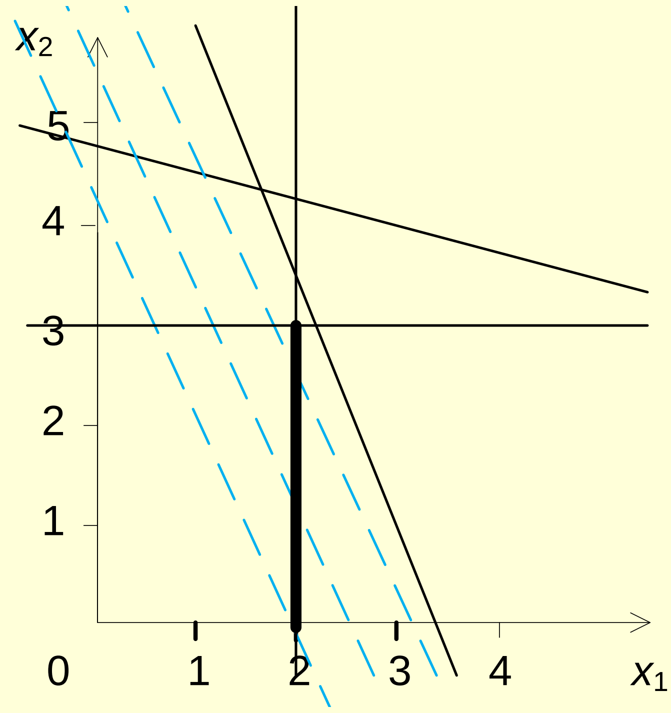
Iteracja 5 – szacowanie od góry problemu P_4

Problem P_5

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 = 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 = 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$

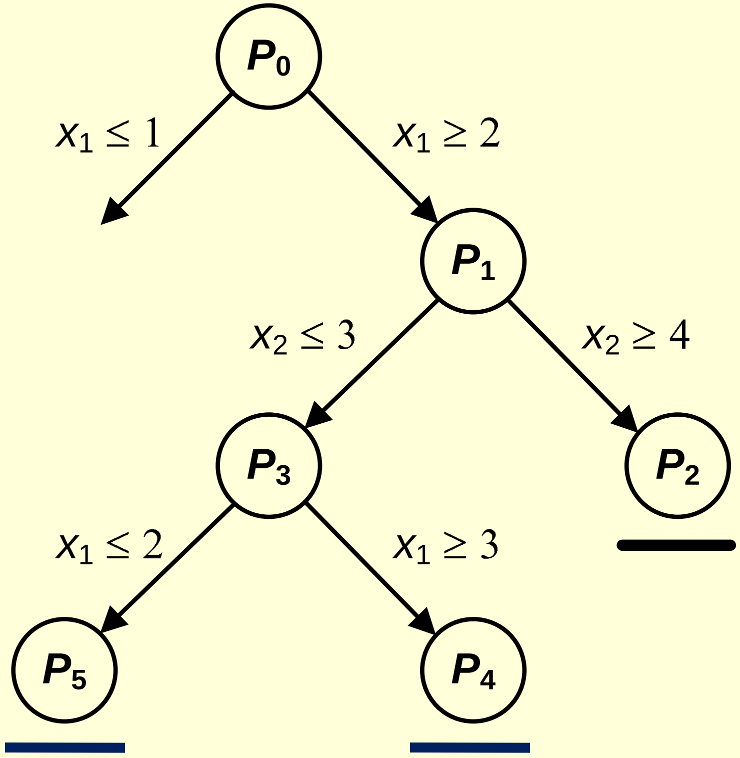


Rozwiązanie relaksacji liniowej: $x = (2; 3)$, $z = 23$

Iteracja 5 – zamknięcie gałęzi

Problem P_5

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 = 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$



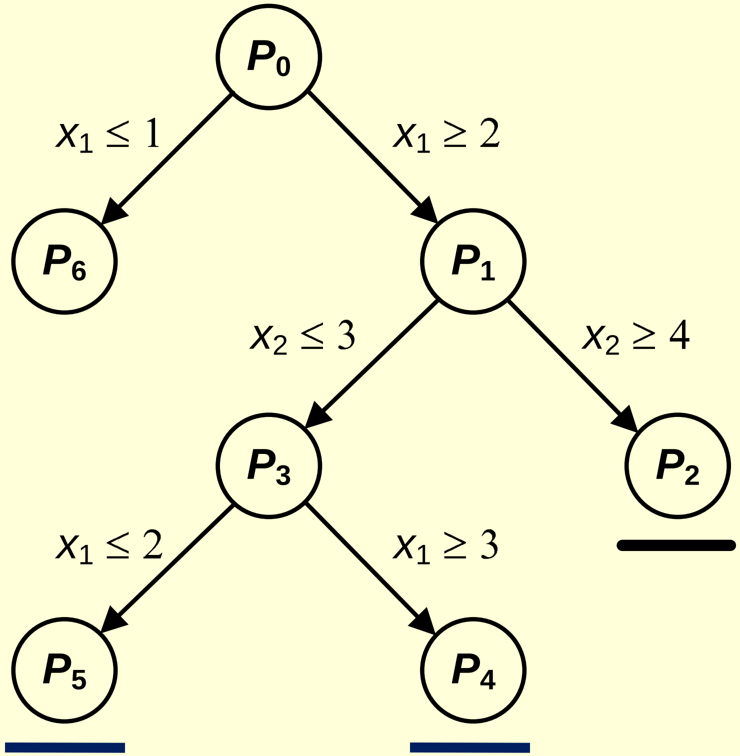
Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2; 3), z = 23
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (3; 1), z^N = 24

Oszacowanie górne P_0 : 24,67,   Oszacowanie dolne P_0 : 24

Iteracja 6 – analiza problemu P_6

Problem P_6

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \leq 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$0 \leq x_1 \leq 1$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$



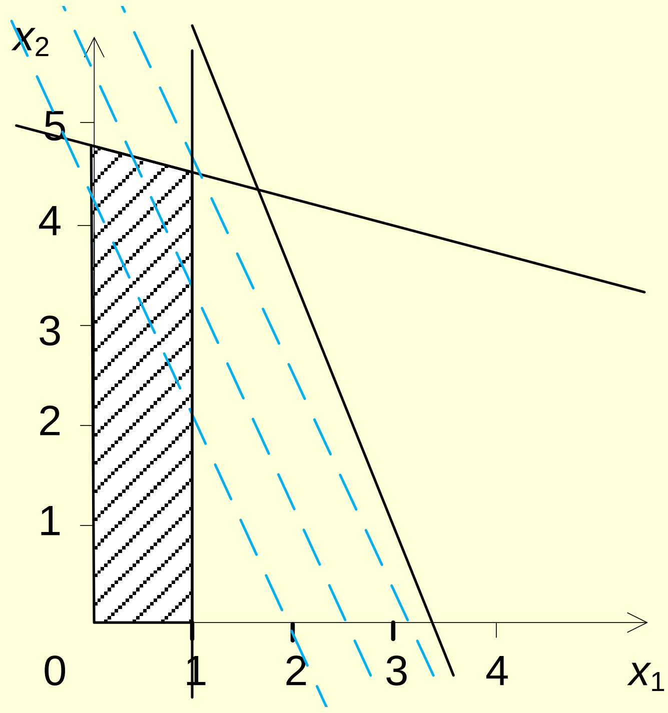
Iteracja 6 – szacowanie od góry problemu P_6

Problem P_6

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$0 \le x_1 \le 1$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$

Relaksacja liniowa

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$0 \le x_1 \le 1$$
$$x_2 \ge 0$$

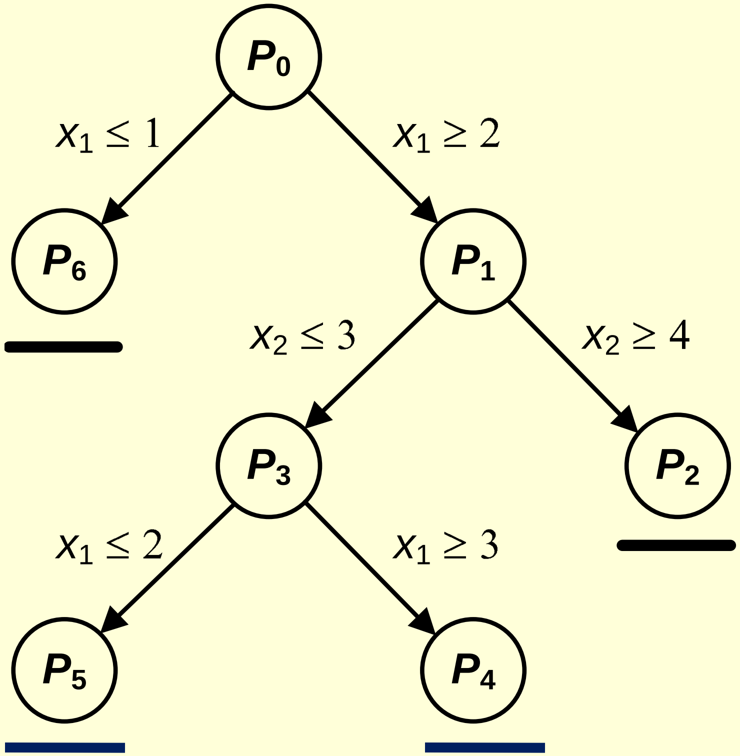


Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (1; 4,5), z = 20,5

Iteracja 6 – zamknięcie gałęzi

Problem P_6

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$0 \le x_1 \le 1$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$



Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (1; 4,5), z = 20,5

Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (3; 1), z^N = 24

Oszacowanie górne P_0 : 24, Oszacowanie dolne P_0 : 24

Koniec obliczeń (wszystkie gałęzie zamknięte), x^N – rozwiązanie optymalne

Kwestie do rozstrzygnięcia

- sposób podziału na podproblemy – drzewo binarne, wielogałęziowe
- wybór zmiennej, względem której następuje podział (rozgałęzienie)
- wybór podproblemu do analizy – strategia przeszukiwania drzewa
- rodzaj stosowanych oszacowań
  - rodzaj relaksacji – kompromis między czasem obliczeń a dokładnością
  - strategia wyznaczania dobrych rozwiązań dopuszczalnych

Iteracja 0 – analiza problemu P_0 (inne metody szacowania)

Problem P_0

P_0

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C,\ \ x_2 \in C$$

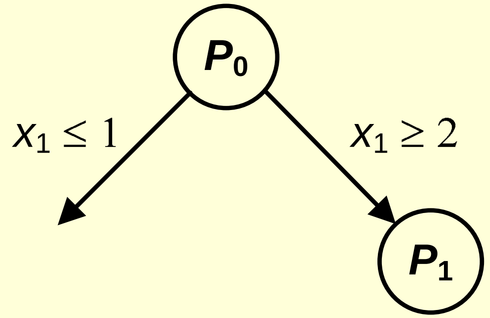
Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (1,67; 4,33), z = 24,67
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (1; 4), z^N = 19

Oszacowanie górne P_0 : 24,   Oszacowanie dolne P_0 : 19

Iteracja 1 – analiza problemu P_1 (inne metody szacowania)

Problem P_1

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$



Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2; 3,5), z = 24,50

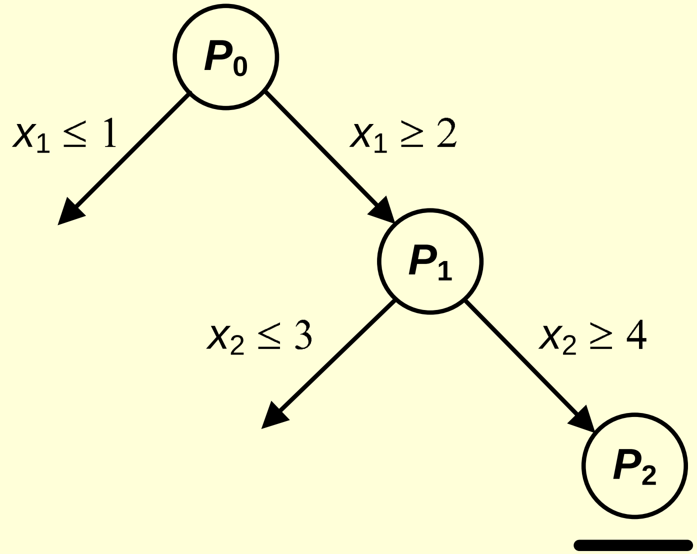
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (2; 3), z^N = 23

Oszacowanie górne P_0 : 24, Oszacowanie dolne P_0 : 23

Iteracja 2 – analiza problemu P_2 (inne metody szacowania)

Problem P_2

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \in C, \;\; x_2 \in C$$



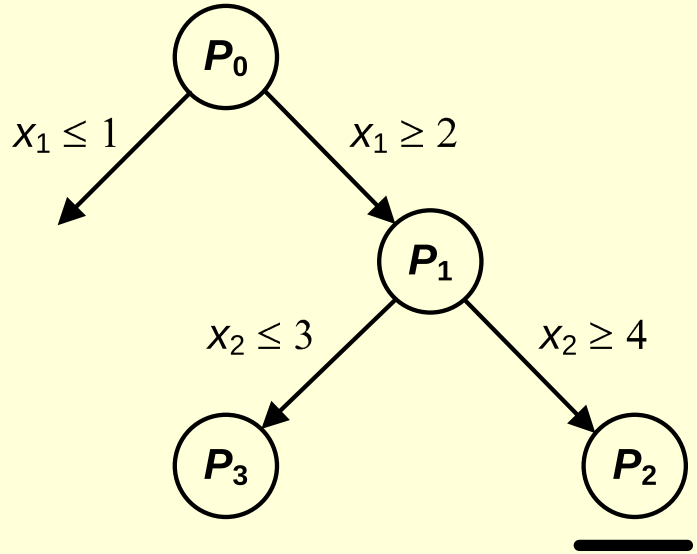
Rozwiązanie relaksacji liniowej: brak rozwiązania dopuszczalnego
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: $x^N = (2; 3)$, $z^N = 23$

Oszacowanie górne P_0 : 24,   Oszacowanie dolne P_0 : 23

Iteracja 3 – analiza problemu P_3 (inne metody szacowania)

Problem P_3

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x_1 \ge 2$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (2,2; 3), z = 24,40

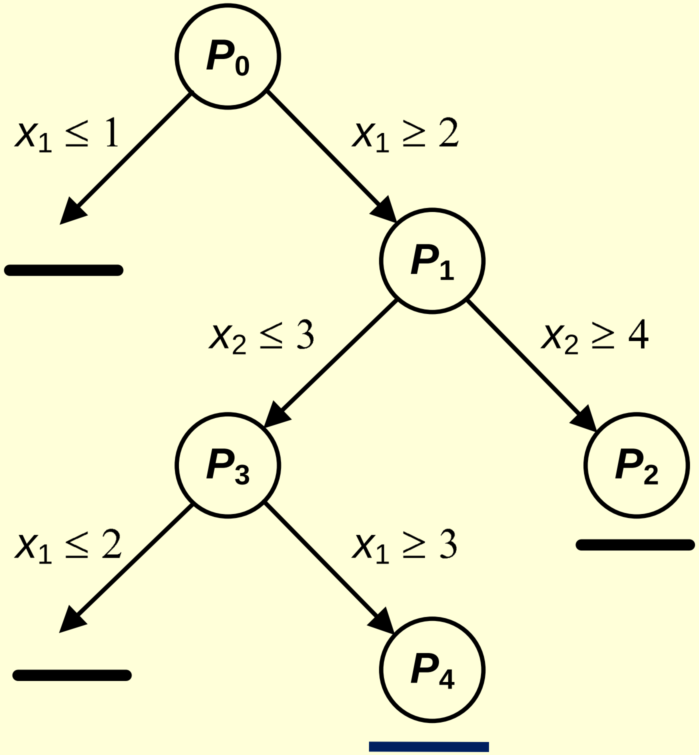
Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (2; 3), z^N = 23

Oszacowanie górne: 24, Oszacowanie dolne: 23

Iteracja 4 – analiza problemu P_4 (inne metody szacowania)

Problem P_4

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \leq 38$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$$



Rozwiązanie relaksacji liniowej: x = (3; 1), z = 24

Najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe: x^N = (3; 1), z^N = 24

Oszacowanie górne P_0 : 24, Oszacowanie dolne P_0 : 24

Koniec obliczeń, x^N – rozwiązanie optymalne