14. Векторы. Метод координат

14.1. Понятие вектора. Свойства

Будем называть *направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$ упорядоченную пару (см. определение 15) точек $\langle A; B\rangle$ трехмерного пространства (плоскости, прямой).

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть *эквивалентными*

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD},$$

если $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и они одинаково направлены.

Одинаково направленными будем считать такие $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, если они либо расположены на одной прямой и принадлежат одному лучу $[AB)$ или $[CD)$, точнее

$$[AB) \cap [CD) = [AB) \quad \vee \quad [AB) \cap [CD) = [CD),$$

либо на разных параллельных прямых и лежат в одной полуплоскости, образованной граничной прямой (AC) и точкой B и/или D.

Длиной направленного отрезка $|\overrightarrow{MN}|$ будем считать длину обычного отрезка $|MN|$.

Коллинеарными будем называть такие $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и обозначать

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD},$$

если они либо расположены на одной прямой, либо на разных параллельных прямых. Таким образом,

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}. \tag{146}$$

Коллинеарные не одинаково направленные $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть противоположно направленными $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Определение 99. Вектором будем называть множество эквивалентных между собой направленных отрезков, т. е.

$$\vec{a} \overset{\text{def}}{=} \{\overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\},$$

для некторого выбранного $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, векторы будут непустыми множествами.

Таким образом, $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, но такая запись не принята. Можно было бы писать $\vec{a} = v(\overrightarrow{AB})$ ($\vec{a}$ задан с помощью $\overrightarrow{AB}$), но такая запись громоздка и еще более непривычна. Поэтому, мы будем часто на практике обозначать $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, подразумевая $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$. При этом говорить более правильно «$\overrightarrow{AB}$ задает или выражает $\vec{a}$», хотя традиционное школьное «$\overrightarrow{AB}$ равно $\vec{a}$» ошибкой считать не будем.

Введение такого понятия вектора позволило сохранить понятие равенства только для одних и тех же векторов, как и в случае чисел. Эквивалентные направленные отрезки, если они состоят из двух разных пар точек, мы не будем считать равными, как это обычно принимается в школе. Легко заметить (а почему??? — Д/З), что если два вектора содержат направленные отрезки, эквивалентные между собой, то эти векторы равны — иными словами для векторов понятия эквивалентности и равенства сливаются, для направленных отрезков — нет.

Введенное понятие эквивалентности действительно является *эквивалентностью*[3], т. е. является:

1) рефлексивным – для любого $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$;
2) симметричным – для любых $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$;
3) тразитивным – для любых $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$:

$$(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \,\&\, \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}.$$

Домашнее задание!!!

Замечание 75. От произвольной точки O и для заданного ненулевого вектора $\vec{a}$ мы всегда сможем отложить направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ такой, что $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$. В самом деле, так всегда найдется некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{XY} \in \vec{a}$, то строим через точку O единственную прямую, параллельную (XY), а на ней направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ так, чтобы $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{XY}$ и $|OA| = |XY|$. Таким образом, $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$, что и требовалось.

[3] http://ru.wikipedia.org/wiki/Отношение_эквивалентности

Длиной вектора будем считать длину любого направленного отрезка, его задающего

$$|\vec{a}| \overset{\text{def}}{=} |\overrightarrow{AB}|, \quad \text{если} \quad \overrightarrow{AB} \in \vec{a}.$$

Нулевым вектором будем считать направленные отрезки вида $\overrightarrow{AA}$ для произвольных точек A, т. е.

$$\vec{0} = \{\overrightarrow{AA} \mid A \text{ — произвольная точка}\}.$$

При этом $|\vec{0}| = 0$. Направленные отрезки вида $\overrightarrow{AA}$ будем иногда называть вырожденными.

Расширим ряд только что введенных понятий на векторы. Два вектора $\vec{a}$ $\vec{b}$ одинаково направлены

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \overrightarrow{A_1A_2} \in \vec{a} \ \ \exists \overrightarrow{B_1B_2} \in \vec{b} \quad \overrightarrow{A_1A_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B_1B_2}. \tag{147}$$

Аналогично,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \overrightarrow{A_1A_2} \in \vec{a} \ \ \exists \overrightarrow{B_1B_2} \in \vec{b} \quad \overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1B_2}. \tag{148}$$

В обоих случаях необходимо показать, что введенные определения не зависят от выбранных направленных отрезков $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$. (Домашнее задание!!!???)

При этом считается $\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\vec{0} \parallel \vec{a}$ (и даже $\vec{0} \uparrow\downarrow \vec{a}$).

Если $\overrightarrow{A_1A_2} \in \vec{a}$, то $\overrightarrow{A_1A_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_2A_1}$ и таким образом, $\overrightarrow{A_2A_1}$ задает вектор $-\vec{a}$

В школе для направленных отрезков были определены правила сложения — правило треугольника и правило параллелограмма. Эти правила задают и соответствующие правила сложения векторов, причем вновь независимо от выбора задающих направленных отрезков.

Напомним школьное определение умножение вектора на число.

Определение 100 [6. С. 8]. Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется такой вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, что

1) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{b} \parallel \vec{a}$ (этот пункт следует из 3-го);
3) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$; и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Если $\alpha = 0$, то из 1-го условия следует, что $\vec{b} = \vec{0}$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то из 1-го условия следует, что

$$\forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\vec{a} = \alpha\vec{0} = \vec{0}.$$

Сложение векторов и умножение их на число обладает следующими свойствами.

Предложение 72 (свойства сложения векторов).

1) $\forall\vec{a}\,\forall\vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2) $\forall\vec{a}\,\forall\vec{b}\,\forall\vec{c} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3) $\forall\vec{a} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4) $\forall\vec{a}\,\exists(-\vec{a}) \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Предложение 73 (свойства умножения вектора на число).

1) $\forall\vec{a}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$;
2) $\forall\vec{a}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
3) $\forall\vec{a},\vec{b}\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
4) $\forall\vec{a} \quad 1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Теорема 68 (признак коллинеарности).

$$\forall\vec{v}\,\forall\vec{u}\neq\vec{0} \quad (\vec{v} \parallel \vec{u} \iff \exists\alpha\in\mathbb{R}\ \vec{v} = \alpha\vec{u}). \tag{149}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(\vec{v} = \vec{0})$, то в качестве α мы можем взять 0. Обратно, если $\alpha = 0$, то $\vec{v} = \vec{0}$ и по определению нулевой вектор будет коллинеарен произвольному $\vec{u}$.

($\Rightarrow$) Если $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, то $\alpha := \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$. Если $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$, то $\alpha := -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.

($\Leftarrow$) Если $(\vec{v} = \alpha\vec{u})$ для некоторого $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, то в силу определения 100 (произведения вектора на число, п. 2) и в силу определения по формуле (148) коллинеарности векторов (и коллинеарных направленных отрезков) получаем $\vec{v} \parallel \vec{u}$.

□

14.2. Базис на плоскости

Напомним известные факты из школы. Рассмотрим направленные отрезки и векторы на некоторой фиксированной плоскости.

Теорема 69 (о разложении вектора на плоскости) [7. С. 23]. *Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ — произвольные неколлинеарные (следовательно, оба не нулевые) векторы. Тогда для произвольного вектора $\vec{c}$ найдется единственная пара чисел $x, y \in \mathbb{R}$, что*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{150}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\vec{c} \parallel \vec{a}$ (или $\vec{c} \parallel \vec{b}$), то по признаку коллинеарности найдется такое число x, что $\vec{c} = x\vec{a}$, тогда

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b},$$

что и требовалось. Аналогично, если $\vec{c} \parallel \vec{b}$.

Пусть теперь $\vec{c} \nparallel \vec{a}$ и $\vec{c} \nparallel \vec{b}$. Отложим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ от некоторой точки O так, чтобы

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}.$$

Через точку C проведем прямые $(CE) \parallel [OB]$ и $(CF) \parallel [OA]$ таким образом, что $E \in [OA)$, $F \in [OB)$. Тогда по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}, \quad \text{где} \quad \overrightarrow{OE} \parallel \vec{a}, \quad \overrightarrow{OF} \parallel \vec{b}.$$

Следовательно, по признаку коллинеарности найдутся такие числа x и y, что

$$\overrightarrow{OE} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OF} = y\vec{b}.$$

Но тогда

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Докажем единственность разложения. Предположим, имеется другое такое разложение

$$\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b},$$

для которых, скажем $x \neq x'$. Тогда

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0},$$

и поэтому

$$\vec{a} = -\frac{y - y'}{x - x'}\,\vec{b}.$$

Но последнее равенство невозможно, так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Следовательно, $x = x'$ и, аналогично, $y = y'$. □

Определение 101 [7. С. 25]. Любые два неколлинеарные вектора на плоскости, взятые в определенном порядке, называются *базисом* (или векторным базисом) на этой плоскости.

Из доказанной выше теоремы следует, что любой вектор на плоскости имеет единственное разложение по базису.

Следствие 25. *Любой вектор вектор на плоскости имеет единственное разложение по базису.*

При разложении вектора по базису (т. е. по формуле (150)) числа x и y называются *координатами вектора* (в указанном базисе) и чаще всего обозначаются парой чисел следующим образом:

$$\vec{c} = (x; y).$$

14.3. Компланарность векторов

Определение 102. Три направленных отрезка называются *компланарными*, если они одновременно параллельны некоторой плоскости, рассматривая их как обычные отрезки.

Они будут компланарными, если среди них есть хотя бы пара равных, эквивалентных, коллинеарных, или хотя бы один вырожденный.

Определение 103. Три вектора $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ называются *компланарными*, если какие-либо задающие их направленные отрезки будут компланарны.

Подобно компланарным направленным отрезкам, эти векторы будут компланарны, если среди них есть хотя бы пара равных, коллинеарных, или хотя бы один нулевой.

Предложение 74. *Данное определение корректно, т. е. не зависит от выбора задающих направленных отрезков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть у нас есть три вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и предположим мы первоначально выбрали направленные отрезки

$$\overrightarrow{U_1U_2} \in \vec{u}, \quad \overrightarrow{V_1V_2} \in \vec{v}, \quad \overrightarrow{W_1W_2} \in \vec{w}$$

и нашлась некоторая плоскость π, что

$$\overrightarrow{U_1U_2}, \overrightarrow{V_1V_2}, \overrightarrow{W_1W_2} \parallel \pi.$$

Выберем теперь другие направленные отрезки

$$\overrightarrow{U_1'U_2'} \in \vec{u}, \quad \overrightarrow{V_1'V_2'} \in \vec{v}, \quad \overrightarrow{W_1'W_2'} \in \vec{w},$$

не обязательно равные первоначально выбранным, но в силу выбора эквивалентные соответствующим исходным.

Тогда по предложению 40 2-го семестра (стереометрия: «если $a \parallel \alpha$ и $b \parallel a$, то $b \parallel \alpha$»)

$$\begin{aligned}
\big((U_1U_2) \parallel \pi \ \ \& \ (U_1U_2) \parallel (U_1'U_2')\big) \quad &\Rightarrow \quad (U_1'U_2') \parallel \pi;\\
\big((V_1V_2) \parallel \pi \ \ \& \ (V_1V_2) \parallel (V_1'V_2')\big) \quad &\Rightarrow \quad (V_1'V_2') \parallel \pi;\\
\big((W_1W_2) \parallel \pi \ \ \& \ (W_1W_2) \parallel (W_1'W_2')\big) \quad &\Rightarrow \quad (W_1'W_2') \parallel \pi.
\end{aligned}$$

Таким образом, направленные отрезки тоже будут одновременно параллельны плоскости π как обычные отрезки прямых. Следовательно, они тоже будут компланарны, и таким образом, наше определение корректно. □

Введем рабочее обозначение для компланарных векторов (и для направленных отрезков): $\mathrm{Kpl}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Теорема 70 (достаточный признак компланарности) [8. С. 86]. *Если для $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ существуют числа x и y такие, что*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\exists z \in \mathbb{R}\ \vec{b} = z\vec{a}$. Следовательно,

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = x\vec{a} + y(z\vec{a}) = (x + yz)\vec{a} = k\vec{a}, \quad \text{где} \quad k = x + yz,$$

и по признаку коллинеарности векторов, $\vec{c} \parallel \vec{a}$, аналогично, $\vec{c} \parallel \vec{b}$. Тогда найдется прямая $l \parallel \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Проведем через l плоскость α. Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости (предложение 39 2-го семестра — признак параллельности прямой и плоскости) и определению коллинеарности векторов и направленных отрезков, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \parallel \alpha$, следовательно, $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим от некоторой точки O направленные отрезки

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}.$$

По условию теоремы $\overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Предположим $\neg\,\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Это означает, что $C \notin (AOB)$. Но построением на плоскости (AOB) можно указать точку D такую, что $\overrightarrow{OD} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Но тогда, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, поэтому C и D — одна и та же точка. Полученное противоречие означает, что $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

□

Теорема 71 (необходимый признак компланарности) [8. С. 87]. *Если* $\mathrm{Kpl}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *(т. е. они компланарны) и $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, тогда существует единственная пара чисел x и y таких, что*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{151}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все три вектора компланарны, то значит, найдется плоскость, которой будут параллельны представляющие эти вектора направленные отрезки. Не нарушая общности можно считать (ну либо легко доказать построением этих направленных отрезков от точки на плоскости), что все три направленные отрезка лежат на плоскости. И тогда мы вправе применить теорему 69, и по формуле (150) получим, что найдется единственная пара чисел x и y таких, что

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \qquad \square$$

14.4. Базис в пространстве

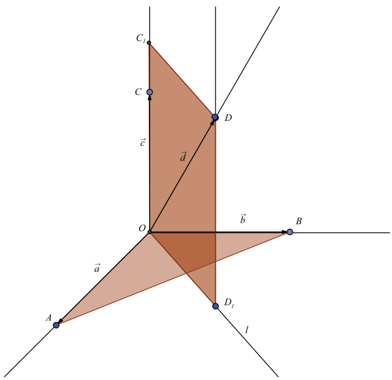
Теорема 72 (о разложении вектора в пространстве) [8. С. 87]. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *некомпланарные векторы* (*т. е.* $\neg\,\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$). *Тогда*

$$\forall \vec{d}\ \ \exists!\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{152}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование*. Если $\vec{d} \parallel \vec{c}$, то так как $\vec{c} \neq \vec{0}$ (иначе из замечания к определению было бы $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$)

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \vec{d} = z\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + z\vec{c}.$$

В случае, если $\vec{d} \parallel \vec{a}$ или $\vec{d} \parallel \vec{b}$, поступаем аналогично. Теперь, будем считать, что $\vec{d} \nparallel \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Отложим от некоторой точки O направленные отрезки

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{d}.$$

Точки C, O, D не лежат на одной прямой, так как $\vec{d} \nparallel \vec{c}$, проведем через них плоскость α. Отметим, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, так если бы было иначе, то было бы $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, таким образом, точки A, O, B также не лежат на одной прямой, проведем через них плоскость β. Так как $\neg\,\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, то плоскости различны, $\alpha \neq \beta$. Но так как $O \in \alpha, \beta$, то по аксиоме 3 раздела 9.1 (2-й семестр, стереометрия) следует, что $\exists l\ (\alpha \cap \beta = l)$. В плоскости α проведем

$$(DC_1) \parallel l, \quad (DD_1) \parallel (OC), \quad \text{где } C_1 \in (OC),\ D_1 \in l.$$

(и так как по предположению $\vec{d} \nparallel \vec{a}, \vec{b}$, то $D \neq D_1$, $O \neq C_1$, $(DD_1) \neq (OC)$)
По правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

Так как $\overrightarrow{OC_1} \parallel \overrightarrow{OC} \in \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ (иначе было бы $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$), следовательно

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OC_1} = z\vec{c}.$$

Кроме того, в плоскости β, вектор, задаваемый направленным отрезком $\overrightarrow{OD_1}$ можно разложить по неколлинеарным векторам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OD_1} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Следовательно, окончательно получаем

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = z\vec{c} + x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Единственность. Предположим, найдется еще одно разложение

$$\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$$

для некоторых $x', y', z' \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности, будем считать, что по крайней мере $x \neq x'$. Тогда рассмотрим разность

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} + (z - z')\vec{c} = \vec{d} - \vec{d} = \vec{0}.$$

Но тогда, так как $x \neq x'$, получим

$$\vec{a} = -\frac{y - y'}{x - x'}\vec{b} - \frac{z - z'}{x - x'}\vec{c}.$$

Следовательно, по теореме 70 (достаточный признак компланарности), получаем, что $\mathrm{Kpl}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, противоречие с условием. Таким образом, единственность доказана.

□

Определение 104 [7. С. 186]. Любые три некомпланарные вектора в пространстве, взятые в определенном порядке, называются *базисом* (или векторным базисом) в пространстве.

Из доказанной выше теоремы следует, что любой вектор в пространстве имеет единственное разложение по базису.

Следствие 26. *Любой вектор в пространстве имеет единственное разложение по базису.*

При разложении вектора по базису (т. е. по формуле (152)) числа x, y, z называются *координатами вектора* (в указанном базисе) и чаще всего обозначаются тройкой чисел следующим образом:

$$\vec{d} = (x; y; z).$$

14.5. Скалярное произведение

Под углом между векторами будем понимать угол между соответствующими им направленными отрезками с общим началом. В необходимых случаях будем указывать от какого направленного отрезка (вектора) угол отсчитывается. Если такого указания нет, то углом между векторами считается тот из углов, который не превосходит π. Если угол прямой, то векторы называются *ортогональными* (иногда перпендикулярными) и обозначем как $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определение 105. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хоть один из векторов нулевой, то угол не определен, и скалярное произведение по определению считают равным нулю. Обозначают

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \tag{153}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 46 (д/з). *Определение скалярного произведения корректно, т.е. не зависит от выбора ...???*

Теорема 73 (свойства скалярного произведения, [8. С. 93]).

1) $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $\forall \vec{a} \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$;
3) $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \big(\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\perp\vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0})\big)$;
4) $\forall \vec{a}, \vec{b}\, \forall k \in \mathbb{R} \quad (k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
5) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1–3 очевидны и непосредственно следуют из определения скалярного произведения. Докажем свойство 4. Если $k = 0$, то обе части равенства будут равны нулю, очевидно. Пусть $k > 0$. Тогда

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = |k\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(k\vec{a},\vec{b}) = |k|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(k\vec{a},\vec{b}) = \\ = |k|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Пусть $k < 0$. Тогда

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = |k\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(k\vec{a},\vec{b}) = |k|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\pi - \angle(\vec{a},\vec{b})) = \\ = -k|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\angle(\vec{a},\vec{b})) = k|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Докажем свойство 5.

Лемма 73.1.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложим векторы $\vec{a}+\vec{b}$ по правилу треугольника, тогда по теореме косинусов

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\pi - \angle(\vec{a},\vec{b})) = \\ = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$$

Тогда
$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$
□

Лемма 73.2.
$$\forall \vec{a},\vec{b} \quad (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}+(-\vec{b}))^2 = (\text{пред. лемма}) = \\ = \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot(-\vec{b})+(-\vec{b})^2 = (\text{св-ва 1 и 4}) = \vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$$
□

Лемма 73.3.
$$\forall \vec{a},\vec{b} \quad (\vec{a}+\vec{b})^2 = 2\vec{a}^{\,2}+2\vec{b}^{\,2}-(\vec{a}-\vec{b})^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Складываем равенства в первых двух леммах и переносим квадрат разности. □

Приступим теперь к доказательству свойства 5. Подсчитаем $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$ двумя способами. С одной стороны, дважды используя первую лемму, получим
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = (\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))^2 = \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})^2 = \\ = \vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}^{\,2}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^{\,2}.$$

С другой стороны, пользуясь третьей и первой леммой, затем второй, получим
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = \left(\left(\frac{\vec{a}}{2}+\vec{b}\right)+\left(\frac{\vec{a}}{2}+\vec{c}\right)\right)^2 = (\text{лемма 3}) = \\ = 2\left(\left(\frac{\vec{a}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\vec{a}}{2}\cdot\vec{b}\right)+\vec{b}^{\,2}\right)+2\left(\left(\frac{\vec{a}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\vec{a}}{2}\cdot\vec{c}\right)+\vec{c}^{\,2}\right)-(\vec{b}-\vec{c})^2 = \\ = (\text{лемма 2}) = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Таким образом,

$$\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c},$$

откуда

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

□

14.5.1. Ортонормированный базис

Пусть в пространстве базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ таков, что $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ — такой базис называется *ортонормированным*. Рассмотрим $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданные в этом базисе.

Теорема 74. *В ортонормированном базисе для скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{154}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \ldots = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

так как $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0$, $\vec{e}_i^{\,2} = 1$. □

Следствие 27 (о расстоянии между точками). *Для двух точек в пространстве*
$M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ с заданными координатами расстояние между ними может быть найдено по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \tag{155}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор, задаваемый направленным отрезком $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, тогда из правила сложения векторов треугольником

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1},$$

и таким образом $\vec{a} = ((x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1))$.

Из свойства 2 теоремы 73 (о свойствах ск. произв.)

$$|M_1M_2|^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^{\,2}.$$

Из предыдущей теоремы

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

и так как $|M_1M_2| \geqslant 0$, то

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

□

15. Метод координат

В предыдущем разделе мы ввели понятие векторного базиса на плоскости и в пространстве, и таким образом, с каждым вектором связали его координаты в этом базисе.

Определение 106. Теперь выберем и зафиксируем на плоскости или в пространстве произвольную точку O, и произвольный базис ($(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ или $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$), будем их называть *системой координат* или *аффинной системой координат*.

Координатами (аффинными) произвольной точки M в этой системе координат будет назваться упорядоченная пара чисел $(x; y)$ (на плоскости) или упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$ (в пространстве) из разложения направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ по базису:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad \text{(на плоскости);} \qquad (156)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad \text{(в пространстве);} \qquad (157)$$

Прямые, проходящие через точку , параллельно векторам базиса, называют *осями координат*. Ось, параллельная вектору $\vec{e}_1$, называется осью *абсцисс*, параллельная вектору $\vec{e}_2$ — осью *ординат*, а параллельная вектору $\vec{e}_3$ — осью *аппликат*.

Плоскости, проходящие через пары осей координат, называют *координатными плоскостями*.

15.1. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

Рассмотрим на примере прямой линии основную идею аналитической геометрии — задание фигур с помощью алгебраических уравнений. Мы рассмотрим ситуацию в пространстве, хотя для плоскости все будет почти аналогично, за исключением того, что векторный базис будет иметь два базовых вектора и координаты векторов и точек будут иметь две компоненты.

Теорема 75 (о векторном параметрическом уравнении прямой). *Пусть дана система координат с началом в точке O и базисом $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. Пусть l — произвольная прямая. Тогда найдутся вектора $\vec{r}_0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ такие, что для произвольной точки $M \in l$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ и*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \tag{158}$$

для подходящего значения параметра t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если прямая l проходит через начало координат, то можно (но не обязательно) сразу полагать $\vec{r}_0 = \vec{0}$. В общем случае выберем на прямой l произвольные две различные точки M_1, M_2. Тогда по стереометрической аксиоме 1 (см. п. 9.1 2-го семестра) существует единственная прямая, проходящая через эти две точки, таким образом

$$l = (M_1M_2).$$

Положим теперь

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}, \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_1}$$

и докажем, что они искомые.

Рассмотрим произвольную $M \in l$. Направленные отрезки $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ будут коллинеарны и в силу определения по формуле (148) задаваемые ими векторы будут коллинеарны, следовательно, по теореме 68 (о признаке коллинеарности векторов) $\exists t \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}$. Тогда по правилу сложения векторов (правило треугольника)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M},$$

следовательно,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}.$$

□

Теорема 76 (о ГМТ, задаваемом параметрическим уравнением). *Пусть дана система координат с началом в точке O и базисом $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{r}_0$ — произвольные векторы. И пусть L — это множество точек, координаты которых в указанной системе координат задаются уравнением*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $M \in L$, а $t \in \mathbb{R}$ — подходящий параметр. Иными словами,

$$L = \{M \mid \overrightarrow{OM} = \vec{r}_0 + t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда множество L является прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть теперь для некоторой точки $M \in L$ и направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ такого, что $\overrightarrow{OM}$ задает вектор $\vec{r}$, верно равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$$

для некоторого значения параметра t.

Отложим от точки O направленный отрезок $\overrightarrow{OM_1} \in \vec{r}_0$, в силу замечания 75 мы можем это сделать. Отложим теперь от точки M_1 направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}$ ($\overrightarrow{M_1M} \in t\vec{a}$). По теореме 68 (о признаке коллинеарности векторов) $\overrightarrow{M_1M} \parallel \vec{a}$. Эти две точки M_1 и M задают единственную прямую, являющуюся искомой.

В самом деле, пусть аналогично $M' \in L$ и верно равенство

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{r}_0 + t'\vec{a},$$

для некоторого значения параметра t'. Рассуждая аналогично и делая аналогичные построения, получим единственную прямую (M_1M'). Заметим, что

$$(M_1M) \ni M_1, \quad (M_1M') \ni M_1.$$

Кроме того, по признаку коллинеарности

$$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M'} \parallel \vec{a},$$

следовательно, по определению коллинеарности

$$(M_1M) \parallel (M_1M').$$

Если две прямые по определению являются параллельными, то они либо совпадают, либо не имеют общих точек. Следовательно, $(M_1M) = (M_1M')$, и таким образом, мы доказали, что $L \subset (M_1M)$.

С другой стороны, для любой точки $K \in (M_1M)$ верны рассуждения из предыдущей теоремы: $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1K}$ будут коллинеарны, следовательно по теореме 68 (о признаке коллинеарности векторов)

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_1K} = k\overrightarrow{M_1M},$$

и так как из условия $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}$, то

$$\overrightarrow{M_1K} = k\overrightarrow{M_1M} = k(t\vec{a}) = (kt) \cdot \vec{a},$$

следовательно, по правилу сложения векторов треугольником

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1K} = \vec{r}_0 + (kt) \cdot \vec{a},$$

следовательно, $K \in L$, $(M_1M) \subset L$, $(M_1M) = L$. □

Замечание 76. Отметим, что последний абзац теоремы 76 фактически повторяет рассуждения предыдущей теоремы 75. Иначе в теореме 76 мы фактически доказывали бы только включение $L \subset (M_1M)$.

Замечание 77. Уравнение (158) для прямой в пространстве в координатной форме принимает вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x; \\ y = y_0 + ta_y; \\ z = z_0 + ta_z; \end{cases} \tag{159}$$

где $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Замечание 78. Для данной прямой l существует бесконечное число векторных параметрических уравнений, так как во-первых, мы можем менять координаты точки $M_0 \in l$, задающей вектор $\vec{r}_0$, и мы можем менять вектор направления $\vec{a}$ на любой ненулевой, коллинеарный.

Замечание 79. Отметим, что хотя векторное параметрическое уравнение прямой похоже на уравнение движения с постоянной скоростью в кинематике, различна практика их использования. Грубо говоря, в кинематике нас интересует движение как процесс, в геометрии нас интересует след этого движения, траектория. Кроме того, если в физике при описание движения двух материальных точек или тел в двух уравнениях время будет единым параметром, то в случае геометрии, каждое уравнение прямой берется со своим собственным параметром.

15.2. Уравнение плоскости в ортонормированной с.к.

Рассмотрим систему координат с центром в точке O и с ортонормированным базисом $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Теорема 77 (о линейном уравнении плоскости). *Пусть дана система координат с началом в точке O и базисом $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. Пусть α — произвольная плоскость. Тогда найдутся векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{n} \neq \vec{0}$ такие, что для произвольной точки $M \in \alpha$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ и*

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0, \tag{160}$$

или то же самое в координатной форме

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{161}$$

где $\vec{n} = (A;B;C)$, $\vec{r} = (x;y;z)$, $\vec{r}_0 = (x_0;y_0;z_0)$, $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем на плоскости произвольную точку M_0 и зафиксируем ее. Тогда $r_0 := \overrightarrow{OM_0}$. Далее, из курса стереометрии (см. теорему 31) известно, что мы можем к плоскости α из любой точки пространства опустить перпендикулярную прямую. Взяв на перпендикулярной прямой две различные точки, мы можем задать направленный отрезок, который задаст ненулевой вектор, назовем его $\vec{n}$, *нормалью* к плоскости α. По традиции будем считать его координатами числа A, B, C

$$\vec{n} = (A;B;C). \tag{162}$$

Тогда, для любой точки на плоскости $M \in \alpha$, направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M}$ будет лежать на плоскости и таким образом,

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}.$$

В терминах векторов, по правилу треугольника, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Но тогда $(\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{n}$ и по свойству 3 скалярного произведения (теорема 73)

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0, \tag{163}$$

или

$$\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = 0,$$

и если положить $\vec{n} = (A;B;C)$, $\vec{r} = (x;y;z)$, $\vec{r}_0 = (x_0;y_0;z_0)$, $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$, то по теореме 74 (о скалярном произведении в ортонормированном базисе) получаем

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

□

Теорема 78 (о ГМТ, задаваемом линейным уравнением). *Пусть дана система координат с началом в точке O и ортонормированном базисом $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$. Пусть $\vec{n} \neq \vec{0}$ и $\vec{r}_0$ — произвольные векторы. И пусть α — это множество точек, координаты которых в указанной системе координат задаются уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

где $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\vec{n} = (A; B; C)$, $M \in \alpha$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$. *Иными словами,*

$$\alpha = \{M(x; y; z) \mid Ax + By + Cz + D = 0\}.$$

Тогда множество α *является плоскостью, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$, *перпендикулярно вектору* $\vec{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямую n, задаваемую вектором $\vec{n}$ и проходящую через точку M_0 (т. е. прямая n задается векторным параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n}$).

По утверждению (следствие 14) из курса стереометрии, для данной точки M_0, существует единственная плоскость, проходящая через данную точку M_0 перпендикулярно прямой n. Обозначим ее π.

Рассмотрим произвольную точку $M \in \alpha$, т. е. такую, что для ее координат $(x; y; z)$ верно

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где коэффициенты A, B, C, D из условия.

Тогда по теореме 74 (о скалярном произведении в ортонормированном базисе) получаем

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = Ax + By + Cz.$$

По условию

$$D = -(\vec{n} \cdot \vec{r}_0) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0),$$

сложив эти равенства вместе, получим

$$0 = Ax + By + Cz + D = \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

что для $\vec{n} \neq \vec{0}$ из свойства 3 скалярного произведения означает, что

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0} \ \vee \ \vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Выражение $(\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$ возможно, только если $\vec{r} = \vec{r}_0$. В общем случае получаем $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$.

По правилу сложения векторов треугольником, для соответствующих направленных отрезков получим

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

следовательно $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ и $(M_0M) \perp n$.

Хотим теперь показать, что $M \in \pi$, однако, предположим, что это не так ($M \notin \pi$).

Опустим перпендикуляр из M на π в точку $M' \in \pi$, получим, что $MM' \perp \pi$, следовательно (теорема 30), $(MM') \parallel n$. По предложению 35 существует единственная плоскость β, проходящая через две параллельные прямые n и (MM').

Соединим точку M_0 с точками M и M'. Так как $M_0, M' \in \pi$, то $(M_0M') \perp n$. Так как все точки M_0, M, M' лежат в плоскости β, то и отрезки $[M_0M], [M_0M'] \subset \beta$. Но тогда получаем противоречие, так в плоскости β, из одной точки $M_0 \in n$ выходит два различных перпендикуляра $[M_0M]$ и $[M_0M']$. Следовательно, $M \in \pi$.

Заметим, что для любой точки $M(x; y; z) \in \pi$ верны рассуждения предыдущей теоремы, особенно уравнение (163)

$$(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0,$$

так как $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ лежит в π. Следовательно, верно

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

таким образом, $\pi \subset \alpha$, $\pi = \alpha$. □

Замечание 80. Для данной плоскости существует бесконечное число линейных уравнений, так как во-первых, с точностью до пропорциональности (т. е. домножая на одно и то же ненулевое число) мы свободно можем менять значения коэффициентов, и во-вторых, мы можем менять координаты точки M_0, задающей вектор $\vec{r}_0$ и, таким образом, менять $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$, и мы можем менять $\vec{n}$ на любой ненулевой, коллинеарный и, таким образом, менять значения только коэффициентов A, B, C.

Рассмотрим теперь ряд типовых задач.

15.3. Нахождение уравнения плоскости по трем точкам

Задача 47. *Пусть даны три точки M_1, M_2, M_3 и нам нужно по ним составить линейное уравнение плоскости, содержащей их все.*

РЕШЕНИЕ. Если $M_1 = M_2 = M_3$ (очевидно, что координаты всех точек равны), то уравнение плоскости составляется из теоремы 77, где вектор $\vec{r}_0$ определяется направленным отрезком $\overrightarrow{OM_1}$, а в качестве нормали $\vec{n}$ берется произвольный ненулевой вектор. Тогда соотношением в виде скалярного произведения (163) мы и зададим нужное уравнение.

Далее всюду вектор $\vec{r}_0$ определяется любым из направленных отрезков $\overrightarrow{OM_{1,2,3}}$. Рассмотрим нахождение нормали.

Если равны координаты только двух точек, например $M_2 = M_3 \neq M_1$, то как и ранее, вектор $\vec{r}_0$ определяем направленным отрезком $\overrightarrow{OM_1}$, а вектор нормали $\vec{n}$ должен быть перпендикулярен направленному отрезку $\overrightarrow{M_1M_2}$, который лежит в искомой плоскости. Таким образом, ищем нормаль из соотношения

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0.$$

Пусть $\vec{n} = (A; B; C)$, где A, B, C — неизвестные величины, а $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (d_1; d_2; d_3) \neq \vec{0}$ — конкретные числа и, скажем, $d_1 \neq 0$. Тогда соотношение перепишется так

$$Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0.$$

Решим его следующим образом:

$$A = -\frac{Bd_2 + Cd_3}{d_1},$$

а вместо переменных B и C подставим произвольные числа, одновременно не равные нулю ($B^2 + C^2 \neq 0$), таким образом, решений будет бесконечно много.

Далее будем считать координаты всех точек различными.

Случай, когда $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_3}$ вообще говоря аналогичен предыдущему, однако он неочевиден из начальных данных. Пусть $\overrightarrow{M_1M_2} = (d_1; d_2; d_3) =$

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (g_1; g_2; g_3) = \vec{b} \neq \vec{0}$, тогда из теоремы 68 (о признаке коллинеарных векторов)

$$\exists \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \mu \vec{b},$$

или в координатной форме

$$\exists \mu \in \mathbb{R} \quad (d_1; d_2; d_3) = (\mu g_1; \mu g_2; \mu g_3).$$

Так как $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежат в искомой плоскости, то они будут перпендикулярны вектору нормали $\vec{n} = (A; B; C)$, и аналогично предыдущему получаем, что

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0.$$

или в координатной форме

$$Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0,$$

и далее, если $d_1 \neq 0$

$$A = -\frac{Bd_2 + Cd_3}{d_1},$$

а вместо переменных B и C подставим произвольные числа, одновременно не равные нулю ($B^2 + C^2 \neq 0$), таким образом, решений вновь будет бесконечно много.

Пусть теперь $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (d_1; d_2; d_3) = \vec{a}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (g_1; g_2; g_3) = \vec{b}$, то так как направленные отрезки лежат в искомой плоскости, то вектор нормали $\vec{n}$ будет им перпендикулярен, тогда его координаты $(A; B; C)$ с точностью до пропорциональности можно найти из системы двух уравнений

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0; \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \end{cases} \tag{164}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0; \\ Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 = 0. \end{cases} \tag{165}$$

Тогда, если $C \neq 0$, то представляя C как ненулевой параметр, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными и решаем ее относительно C

$$\begin{cases} Ad_1 + Bd_2 = -Cd_3; \\ Ag_1 + Bg_2 = -Cg_3, \end{cases}$$

затем подставляем вместо C любые ненулевые числа. Система должна быть совместной (решабельной :-)), так как из геометрических соображений, для двух неколлинеарных векторов должен в пространстве существовать третий, им ортогональный. Проблема может возникнуть только если $C = 0$, тогда мы заведомо сделаем ошибку. Но это возможно, только если вектор нормали будет лежать в одной из координатных плоскостей, в данном случае в (XOY). Обычно это либо сразу видно из геометрии задачи, либо из алгебраических рассуждений — подставив 1, мы сделаем систему несовместной, чего быть не должно.

Коэффициент находим так $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$.

Аккуратное решение и исследование систем линейных уравнений пока выходит за рамки нашего курса. Также пока вне нашего курса возможность использования векторного и смешанного произведения. □

15.4. Расстояние от точки до плоскости

Задача 48. *Пусть даны точка* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и плоскость* π*, заданная линейным уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Необходимо найти расстояние $\rho(M_1, \pi)$ *от точки* M_1 *до плоскости* π*.*

РЕШЕНИЕ. Пусть $M_2(x_2; y_2; z_2)$ будет ортопроекцией точки M_1 на плоскость π. Если бы мы знали координаты $(x_2; y_2; z_2)$ точки M_2, то по известной формуле (155) мы бы смогли найти расстояние

$$\rho(M_1, \pi) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Однако, координат M_2 мы не знаем, но так как $M_2 \in \pi$, то

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Теперь *нормируем* вектор нормали, т. е. рассмотрим вектор $\vec{n}'$

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},$$

таким образом, получается $|\vec{n}'| = 1$, $\vec{n}' = (A'; B'; C')$, где

$$A' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad B' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad C' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Определим еще $D' = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Тогда уравнение

$$A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 + D' = 0$$

задает ту же самую плоскость π.

Рассмотрим

$$|\vec{n}' \cdot \overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{n}'| \cdot |M_1M_2| \cdot |\cos\varphi| = |M_1M_2|, \quad \text{так как } \varphi = 0 \vee \varphi = \pi.$$

Так как $\overrightarrow{M_1M_2} = ((x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1))$ (см. доказательство следствия 27), то в силу теоремы 74

$$\begin{aligned}
|\vec{n}' \cdot \overrightarrow{M_1M_2}| &= |A'(x_2 - x_1) + B'(y_2 - y_1) + C'(z_2 - z_1)| = \\
&= |A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 - (A'x_1 + B'y_1 + C'z_1)| = \\
&= |A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 + D' - (A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D')| = \\
&= |0 - (A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D')| = |A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D'| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|.
\end{aligned}$$

Что и дает нашу формулу расстояния

$$\rho(M_1, \pi) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|. \tag{166}$$

□

15.5. Углы между прямыми и плоскостями

15.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Задача 49. *Пусть даны две скрещивающиеся прямые в пространстве* l_1 *и* l_2*, каждая из которых задается соответственным векторным параметрическим уравнением:*

$$\begin{cases} l_1: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t_1\vec{a}; \\ l_2: \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + t_2\vec{b}. \end{cases} \tag{167}$$

Необходимо найти расстояние между ними.

Существует несколько путей вычисления этого расстояния. Например, можно было бы произвольно выбирать одну точку на одной прямой, а другую — на другой, рассматривать расстояние между ними в зависимости от двух параметров t_1 и t_2, и выбирать наименьшее. Такой путь сложен для нас. Другой вариант заключается в том, что вновь можно было бы произвольно выбирать одну точку M_1 на одной прямой, а другую M_2 — на другой, рассматривать направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, потребовать, чтобы

$$\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{a}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{b},$$

получить два скалярных произведения-уравнения с двумя неизвестными t_1 и t_2, найти их, затем найти координаты $\overrightarrow{M_1M_2}$, а в качестве искомого расстояния получить длину $|M_1M_2|$ — взаимного перпендикуляра к прямым l_1 и l_2.

Но мы выберем третий путь. Перенесем параллельным переносом в пространстве прямую l_1 так, чтобы она пересеклась с прямой l_2. Иными словами, через произвольную точку на прямой l_2 проведем прямую l_1', параллельную исходной прямой l_1. Через две пересекающиеся прямые по следствию 12 (из курса стереометрии) можно провести единственную плоскость π. Тогда в силу предложения 39 (также, из курса стереометрии) эта плоскость π будет параллельна исходной прямой l_1. Таким образом, длина перпендикуляра от любой точки прямой l_1 до плоскости π (они будут все равны, в том числе будут равны и общему перпендикуляру от l_1 до $l_2 \subset \pi$) будет искомым расстоянием.

Рассмотрим алгоритм вычисления по шагам. Будем считать заданными векторные параметрические уравнения двух скрещивающихся прямых (167).

1) Вычислим линейное уравнение плоскости π;

1.1) Вычислим компоненты вектора нормали $\vec{n}$ из системы скалярных уравнений

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0; \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

1.2) Вычислим коэффициент D из того, что точка $M_2(x_2; y_2; z_2) \in l_2$ (координаты точки M_2 соответствуют координатам $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2$) лежит на плоскости π:

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -(Ax_2 + By_2 + Cz_2).$$

(вместо M_2 можно взять любую другую точку на плоскости π, чьи координаты известны).

2) Найдем расстояние от точки M_1 (координаты точки M_1 соответствуют координатам $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$) до плоскости π по формуле (166), оно будет искомым (вместо M_1 можно взять любую другую точку на прямой l_1, чьи координаты известны).

□

15.7. Векторное и смешанное произведения

15.7.1. Ориентация упорядоченной тройки некомпланарных векторов

Возьмем три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и отложим с их помощью от некоторой точки O три направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Тогда упорядоченную тройку направленных отрезков $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ и, соответственно, упорядоченную тройку векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ будем называть *положительно ориентированной* или *правоориентированной*, если поворот

$\overrightarrow{OA}$, совмещающий его по кратчайшему пути с вектором $\overrightarrow{OB}$, совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого помещается в точке C.

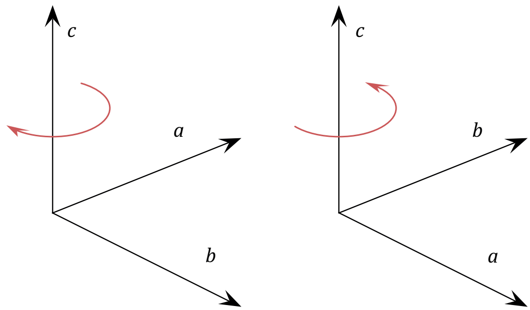


Рис. 36. Левая и правая тройки векторов

Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке (рис. 36), то система трех векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (и тройка $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$) называется *левой*.

Важны два свойства ориентации тройки векторов:

1. Ориентация упорядоченной тройки некомпланарных векторов не изменится, если векторы переставлять в круговом порядке

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \to (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) \to (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

2. Ориентация тройки векторов меняется на противоположную, если в ней поменять местами два вектора, так тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ будут различной ориентации.

15.7.2. Векторное произведение

Определение 107 [9. 79]. *Векторным произведением* $\vec{a} \times \vec{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$;

3) упорядоченная тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторов положительно ориентирована (правая) (см. рис. 36).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то по определению принимается $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Требование 2 означает, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма $OACB$, построенного на $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ как на сторонах. Этими тремя условиями вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно определен: он перпендикулярен плоскости параллелограмма, имеет указанную длину и направлен в то полупространство от этой плоскости, чтобы при наблюдении от его конца в сторону плоскости поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ на наименьший угол совершался против часовой стрелки.

Предложение 75 (простые свойства векторного произведения). *Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:*

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Следует из определения векторного произведения, п. 1 и 3.

2. Если возвести в квадрат модули векторного и скалярного произведения, а потом воспользоваться «тригонометрической единицей», то получим требуемое. □

15.7.3. Смешанное произведение трех векторов

Определение 108 [9. 80]. Смешанным (тройным) произведением $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Предложение 76. *Для произвольной некомпланарной упорядоченной тройки векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ верно:*

1) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0 \Leftrightarrow$ *тройка* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *правая;*
2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0 \Leftrightarrow$ *тройка* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *левая;*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{r}$ и тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая (рис. ???). Так как обе тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})$ правые, то при одном начале O всех векторов концы векторов $\vec{c}$ и $\vec{r}$ будут в одном полупространстве от плоскости $(O\vec{a}, \vec{b})$. Поэтому угол $\varphi = \angle(\vec{r}, \vec{c}) < \pi/2$ и $\vec{r}\cdot\vec{c} > 0$, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$. Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — левая тройка, то $\varphi > \pi/2$, а тогда $\vec{r}\cdot\vec{c} < 0$ и $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$.

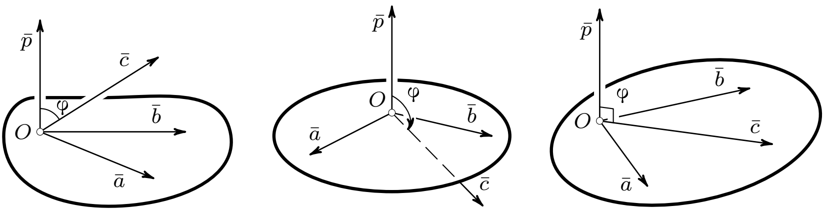


Рис. 37. Варианты расположения троек

Для доказательства прямых утверждений рассматриваем знак смешанного произведения, скажем, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, следовательно $\varphi = \angle(\vec{r}, \vec{c}) < \pi/2$ и, значит, векторы $\vec{c}$ и $\vec{r}$ лежат в одном полупространстве, следовательно, будут одинаково ориентированы, таким образом, тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая. Случай $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$ рассматривается аналогично. □

Предложение 77. *Произвольная упорядоченная тройки векторов* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *компланарна тогда и только тогда, когда* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ компланарна, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{r}\perp\vec{c} \;\Leftrightarrow\; \vec{r}\cdot\vec{c} = 0,$$

следовательно, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Если, наоборот, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$, то $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$, также как и $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}, \vec{b}$, следовательно, все три вектора компланарны. □

Предложение 78 [9. 80–81]. *Модуль смешанного произведения* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ *некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Высота параллелепипеда, построенного на тройке векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равна длине проекции вектора $\vec{c}$ на вектор нормали $\vec{r} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$|\vec{c}| \cdot |\cos\varphi| = |\vec{c}|\frac{|\vec{r} \cdot \vec{c}|}{|\vec{r}||\vec{c}|} = \frac{|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}{|\vec{r}|}.$$

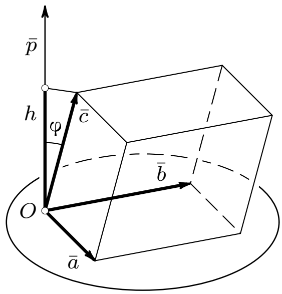


Рис. 38. Вычисление объема

Площадь основания параллелепипеда равна $|\vec{r}|$, следовательно,

$$V = hS = \frac{|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}{|\vec{r}|}\,|\vec{r}| = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|.$$

□

15.7.4. Алгебраические свойства смешанного и векторного произведений

Предложение 79. *Для любых некомпланарных векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$и $\vec{c}$ верно:*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} \quad \textit{и} \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$$

Иными словами, смешанное произведение векторов не изменяется при круговой перестановке сомножителей и изменяет знак на противоположный при перестановке двух сомножителей, сохраняя при этом свой модуль.

Следствие 28. *Знак векторного умножения внутри смешанного произведения может быть поставлен между любыми двумя его сомножителями:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Доказывается из свойств предыдущего предложения.

Предложение 80. *Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и произвольных $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ таких, что $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$ верно*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c_1 + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c_2 = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}_1 + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}_2,$$

т. е. смешанное произведение дистрибутивно относительно сомножителя $\vec{c}$.

Замечание 81. Из следствия 28 аналогично предложению 80 получаем, что смешанное произведение дистрибутивно относительно любого его сомножителя.

Предложение 81. *Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*

$$(\lambda\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,(\lambda\vec{c}) = \lambda\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Лемма 1. *Для двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:*

$$(\forall\, \vec{r} \;\; \vec{a} \cdot \vec{r} = \vec{b} \cdot \vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = \vec{b} \cdot \vec{r} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{r} = 0.$$

Теперь отметим, что постоянный вектор $(\vec{a} - \vec{b})$ ортогонален переменному вектору $\vec{r}$ тогда и только тогда, когда вектор $(\vec{a} - \vec{b})$ нулевой, т. е. при $\vec{a} = \vec{b}$. □

Предложение 82. *Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c});$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся дистрибутивным свойством смешанного произведения

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\,\vec{r} = \vec{a}\vec{c}\,\vec{r} + \vec{b}\vec{c}\,\vec{r},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — данные векторы, $\vec{r}$ — переменный вектор. Отсюда на основании дистрибутивного свойства скалярного умножения имеем:

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{r} = (\vec{a}\times\vec{c})\vec{r} + (\vec{b}\times\vec{c})\vec{r} = ((\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c}))\vec{r}.$$

Так как равенство этих скалярных произведений выполняется для любого вектора $\vec{r}$, то на основании леммы 1 получаем первое равенство.

Аналогично доказывается дистрибутивность относительно второго множителя, либо можно воспользоваться антикоммутативностью:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = -(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}) = -\vec{b}\times\vec{a} - \vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}.$$

□

Предложение 83. *Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

15.7.5. Векторное и смешанное произведение в ортонормированной системе координат

Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — базисные векторы ортонормированной системы координат, т. е. $|\vec{e}_i| = 1$, $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0$, где $i,j = 1,2,3$, $i\neq j$. И, если тройка $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ — правая, то

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_1 = \vec{0},\qquad \vec{e}_2\times\vec{e}_2 = \vec{0},\qquad \vec{e}_3\times\vec{e}_3 = \vec{0}; \tag{168}$$

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3,\qquad \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1,\qquad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2; \tag{169}$$

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\qquad \vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\qquad \vec{e}_1\times\vec{e}_3 = -\vec{e}_2; \tag{170}$$

$$|\vec{e}_1\times\vec{e}_2| = 1,\qquad |\vec{e}_2\times\vec{e}_3| = 1,\qquad |\vec{e}_3\times\vec{e}_1| = 1. \tag{171}$$

Рассмотрим теперь два вектора в данной системе координат:

$$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3),\quad \vec{b} = (b_1,b_2,b_3),$$

используя тогда раннее определенные свойства векторного умножения, получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_3)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3. \quad (172)$$

Теперь обсудим представление смешанного произведения. Пусть задано три вектора в данной системе координат:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

используя тогда координатную форму скалярного произведения (154) и формулу нахождения векторного произведения (172), получаем:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{c}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{c}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{c}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (173)$$

15.8. Использование векторного и смешанного произведения для решения задач

Обсудим некоторые из ранее рассмотренных задач в плане использования полученных сведений.

15.8.1. Нахождение уравнения плоскости

Рассмотрим вновь задачу 47: пусть даны координаты трех точек M_1, M_2, M_3 и нам нужно по ним составить линейное уравнение плоскости, содержащей их все. К данному моменту мы умеем находить уравнение как минимум двумя способами:

— «в лоб», подставляя координаты точек в искомое уравнение и находя три коэффициента через 4-й;

— используя два равных нулю скалярных произведения, находим нормаль, затем — коэффициент D (подробнее см. в разделе 15.3)

Теперь мы можем предложить еще пару решений. Вспомним обозначения: $\overrightarrow{M_1M_2} = (d_1; d_2; d_3) = \vec{a}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (g_1; g_2; g_3) = \vec{b}$, вектор нормали $\vec{n} = (A; B; C)$.

Во-первых, вектор нормали $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{b}$ будет им перпендикулярен, и может быть найден так:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}, \tag{174}$$

а коэффициент $D = -(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})$.

И ещё способ, связанный со свойствами смешанного произведения. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, для которой мы хотим получить условия попадания на плоскость, тогда три отрезка $[M_1M]$, $[M_2M]$, $[M_3M]$ должны лежать на этой плоскости, следовательно три направленных отрезка $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_3M}$ должны быть компланарны. Согласно предложению 77 это будет равносильно тому, что

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_2M}\,\overrightarrow{M_3M} = 0.$$

Учитывая, что

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1), \quad \overrightarrow{M_2M} = (x-x_2, y-y_2, z-z_2), \quad \overrightarrow{M_3M} = (x-x_3, y-y_3, z-z_3$$

получим, что

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель матрицы и приводя подобные, сразу получаем уравнение плоскости в нужной форме.

Подробности, связанные с вырожденностью условий (например, все три заданные точки лежат на одной прямой и т. п.) не рассмотрены.

15.8.2. Расстояние от точки до прямой

Задача 50. *Пусть задано уравнение прямой l в виде*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

и координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, где $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$. Требуется найти расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки M_1 до прямой l.

Одно из возможных решений связано с существованием ортопроекции точки M_1 на прямую l в виде точки M_2. Координаты точки M_2 удовлетворяют уравнению прямой для некоторого параметра t'. Кроме того, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$, что и дает возможность найти t', затем числовое значение координат точки M_2, а следовательно, и требуемого расстояния.

Рассмотрим теперь возможность применения векторного произведения. Вспомним, что вектор $\vec{r}_0$ задается направленным отрезком от начала координат к некоторой точке M_0 на прямой, будем считать, что $M_0(x_0, y_0, z_0)$. В свою очередь, от точки M_0 мы можем отложить вектор $\vec{a}$ и получить точку $A \in l$ так, что $\overrightarrow{M_0A} = \vec{a}$.

Таким образом, два отрезка $[M_0M_1]$ и $[M_0A]$ задают в пространстве параллелограмм с основанием $[M_0A]$, высота которого будет равна искомой длине! Следовательно, необходимую высоту мы могли бы найти, зная площадь параллелограмма и длину основания $|M_0A|$. А площадь параллелограмма — это модуль векторного произведения $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0A}$. При этом

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_0A}, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M_1},$$

и тогда из всего вышеизложенного получаем:

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{a}|}. \tag{175}$$

Любопытно в данном случае отметить, что если в задаче нахождения нормали мы от векторного произведения ожидали перпендикулярность получаемого вектора по отношению к аргументам, то теперь нас интересует модуль этого вектора.