

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
corso A
Università degli studi di Bari Aldo Moro
08-06-2021

Esercizio 1. Si lancia N volte un dado equo a sei facce, numerate da 1 a 6, dove N è una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = \frac{6}{5}$.

- Determinare la probabilità di ottenere 6 almeno una volta.
- Determinare la probabilità di ottenere 6 esattamente una volta.
- Sapendo di non avere mai ottenuto 6, calcolare la probabilità che N sia pari a n , per ogni $n \in \mathbb{N}$, e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.

(Si ricorda che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.)

Esercizio 2. Verificare che per ogni $a > 0$ la funzione $f(x) = \frac{3}{a^3} x^2 \chi_{[0,a]}(x)$ è la densità di probabilità di una variabile aleatoria X .

- Determinare l'attesa di X .
- Sfruttare il calcolo precedente per esibire uno stimatore corretto di a con un campione di rango n distribuito come X .
- Dire se lo stimatore ottenuto al punto precedente è consistente.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di a relativo a un campione di rango n .

Esercizio 3.

Una casa vinicola ha due impianti di imbottigliamento. Si vuole controllare che il contenuto medio di vino per le bottiglie dei due impianti sia lo stesso. A tal scopo si analizzano $n_1 = 25$ bottiglie provenienti dal primo impianto e $n_2 = 25$ provenienti dal secondo. Per il primo campione di bottiglie si trova un contenuto medio di vino pari a $\bar{x}_1 = 749.5$ cl con varianza campionaria $S_1^2 = 3.5$ cl²; per il secondo si trova un contenuto medio pari a $\bar{x}_2 = 750.6$ cl con varianza campionaria $S_2^2 = 4$ cl². Assumendo che la varianza delle due popolazioni di bottiglie sia la stessa (ma non nota):

- Verificare l'ipotesi nulla "le bottiglie dei due impianti hanno lo stesso contenuto medio" con un livello di significatività del 5% e del 10%.
- Determinare il p -value del test.