

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)  
corso A  
Università degli studi di Bari Aldo Moro  
24-06-2021

**Esercizio 1.** Si lancia  $N$  volte una moneta equa, dove  $N$  è una variabile aleatoria geometrica di parametro  $p$ , vale a dire  $P[N = n] = p(1 - p)^{n-1}$  per  $n \geq 1$ .

- Determinare la probabilità di ottenere almeno una testa.
- Determinare la probabilità che  $N$  sia  $n$  sapendo di non aver ottenuto mai testa.
- Calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  della probabilità calcolata al punto precedente.

(Si ricorda che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .)

**Esercizio 2.** Verificare che per ogni  $\theta \geq 1$  la funzione  $f(x) = \frac{\theta}{2^\theta} x^{\theta-1} \chi_{[0,2]}(x)$ , dove  $\chi_{[0,1]}(x)$  vale 1 per  $0 \leq x \leq 2$  e 0 altrimenti, è la densità di probabilità di una variabile aleatoria  $X$ .

- Calcolare l'attesa di  $X$ .
- Calcolare l'attesa di  $\ln(X)$ , verificando che è pari a  $\ln(2) - \frac{1}{\theta}$ .
- Dato un campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di rango  $n$  distribuito come  $X$ , determinare il corrispondente stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ .
- Dire se lo stimatore di massima verosimiglianza ottenuto al punto precedente è consistente.

**Esercizio 3.** Una casa produttrice sostiene di produrre transistor bipolari con un valore medio del guadagno almeno di 210. Si prova un campione di  $n = 71$  transistor trovando una deviazione standard campionaria  $\bar{x} = 202$  con una varianza campionaria  $S = 43$ .

- Dire quale test statistico occorre condurre per verificare l'affermazione della casa produttrice, ed effettuarlo con un livello di significatività del 5% e del 10%.
- Calcolare il  $p$ -value del test.