

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
corso A
Università degli studi di Bari Aldo Moro
Docente: Stefano Rossi
01-02-2021

Esercizio 1. Una moneta equa viene lanciata N volte, dove N è una variabile aleatoria geometrica di parametro p , cioè $P[N = k] = (1 - p)^{k-1}p$, $k \geq 1$, con $0 < p < 1$. Indichiamo con X il numero di teste ottenute.

(1) Calcolare $P[X = 0]$, verificando che $P[X = 0] = \frac{p}{1+p}$.

(2) Calcolare $P[N = 2|X = 0]$, la probabilità che siano stati fatti 2 lanci sapendo che non si sono avute teste.

(3) Determinare p affinché la probabilità determinata sopra sia pari a $\frac{1}{16}$.

(Ricordare che $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ per ogni $q \in \mathbb{R}$ tale che $|q| < 1$.)

Esercizio 2. Dato il parametro $\theta > 0$, si considera la funzione $f(x; \theta) := cx$ per $0 \leq x \leq \theta$ e $f(x; \theta) = 0$ altrove. Determinare c affinché f sia la densità di probabilità di una variabile aleatoria X , verificando che $c = \frac{2}{\theta^2}$.

(1) Determinare il valore atteso della variabile aleatoria X

(2) Usare il valore determinato sopra per ricavare uno stimatore corretto del parametro θ in corrispondenza a un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n .

(3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ in corrispondenza a un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n .

Esercizio 3. Un'azienda vinicola imbottiglia vini in due stabilimenti diversi. Si vuole controllare se il contenuto medio di una bottiglia di vino sia lo stesso nei due stabilimenti. A tal scopo si prendono a caso $n = 30$ bottiglie per ciascuno dei due stabilimenti e si trovano le medie campionarie $\bar{x}_1 = 748\text{cl}$ e $\bar{x}_2 = 751\text{cl}$, rispettivamente. Assumendo che i contenuti medi siano variabili aleatorie gaussiane con la stessa varianza $\sigma^2 = 40\text{cl}^2$:

(1) Dire quale test occorre eseguire se si vuole verificare che il contenuto medio delle bottiglie sia lo stesso per i due stabilimenti, specificando se si tratta di un test unilaterale o bilaterale.

(2) Condurre il test a un livello di significatività del 10% e del 5%.

(3) Calcolare il p -value del test.