

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)  
corso A e B  
Università degli studi di Bari Aldo Moro  
12-07-2021

**Esercizio 1.** Una scatola contiene 10 dadi con le facce numerate da 1 a 6. Uno di questi dadi è truccato e non fa mai uscire i numeri pari, mentre i numeri 1, 3, 5 escono tutti con probabilità  $\frac{1}{3}$ . I restanti 9 dadi sono equilibrati. Si prende a caso un dado e lo si lancia 1000 volte.

- Calcolare la probabilità che il 2 esca meno di 50 volte.
- Sapendo che il 2 è uscito meno di 50 volte, determinare la probabilità che il dado sia truccato.
- Calcolare la probabilità che il numero 1 esca più di 150 volte.

**Esercizio 2.** Verificare che per ogni valore del parametro  $\theta > 0$  la funzione

$$f(x; \theta) := \frac{4x^2}{\sqrt{\pi}\theta^3} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} \chi_{[0, \infty]}(x)$$

è la densità di probabilità di una certa variabile aleatoria  $X$ .

- Determinare l'attesa di  $X$ , verificando che si ha  $E[X] = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}$ .
- Sfruttare il calcolo precedente per esibire uno stimatore corretto di  $\theta$  con un campione di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$  relativo a un campione di rango  $n$  distribuito come  $X$ .
- Esibire una statistica sufficiente.

(Per il calcolo degli integrali si ricorda che  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .)

**Esercizio 3.** Data una popolazione gaussiana  $X$ , si effettuano  $n = 10$  osservazioni, che danno i seguenti valori:

1.2	1.3	1.2	1.4	1.2
1.3	1.1	1.1	1.3	1.4

- Calcolare media e varianza campionaria.
- Verificare l'ipotesi " $\sigma_X = 0.1$ " al livello di significatività dell' 1%.
- Verificare l'ipotesi " $\mu_X \geq 1.3$ " con un livello di significatività del 5%.

In entrambi i casi dire quale test occorre condurre, specificando se è un test unilaterale o bilaterale.