Formulario di Statistica Inferenziale

Intervalli di Confidenza

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un campione proveniente da una popolazione normale di media μ e varianza σ^2. Siano date n osservazioni del campione $(x_1, \dots, x_n)$ e si denotino rispettivamente con $\bar{x}$ e S^2 la media e la varianza campionaria. Sia $\alpha \in (0, 1)$.

Intervalli di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la media μ:

1. *Varianza di X nota*: $\left[\bar{x} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
2. *Varianza di X non nota*: $\left[\bar{x} - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}S}{\sqrt{n}}\right]$

Intervalli di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la varianza σ^2:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$$

Test di Verifica delle Ipotesi

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un campione proveniente da una popolazione normale di media μ e varianza σ^2. Siano date n osservazioni del campione $(x_1, \dots, x_n)$ e si denotino rispettivamente con $\bar{x}$ e S^2 la media e la varianza campionaria. Sia $\alpha \in (0, 1)$.

Verifica delle ipotesi sulla media μ di una popolazione normale

1. *Varianza di X nota*

   Test bilaterale $H_0 : \mu = \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

   Se $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ si accetta H_0

   Se $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale destro $H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu > \mu_0$

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\alpha}$ si accetta H_0

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale sinistro $H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu < \mu_0$

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq -z_{1-\alpha}$ si accetta H_0

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < -z_{1-\alpha}$ si rifiuta H_0

2. *Varianza di X non nota*

Test bilaterale $H_0 : \mu = \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

Se $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}\right| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ si accetta H_0

Se $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale destro $H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu > \mu_0$

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \leq t_{1-\alpha,n-1}$ si accetta H_0

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n} > t_{1-\alpha,n-1}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale sinistro $H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \vee \quad H_1 : \mu < \mu_0$

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \geq -t_{1-\alpha,n-1}$ si accetta H_0

Se $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n} < -t_{1-\alpha,n-1}$ si rifiuta H_0

Verifica delle ipotesi sulla varianza σ^2 di una popolazione normale

Test bilaterale $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \vee \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Se $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ si accetta H_0

Se $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ oppure $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale destro $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \vee \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Se $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ si accetta H_0

Se $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ si rifiuta H_0

Test unilaterale sinistro $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad \vee \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

Se	$(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\alpha,n-1}$	si accetta H_0
Se	$(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}$	si rifiuta H_0

Confronto tra le medie di due popolazioni normali

Siano $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$, $n \neq m$, due campioni gaussiani indipendenti. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Siano date n osservazioni del campione X, $(x_1, \dots, x_n)$, ed m osservazioni del campione Y, $(y_1, \dots, y_m)$. Si denotino rispettivamente con $\bar{x}$ ($\bar{y}$) e S_X^2 (S_Y^2) la media e la varianza campionaria di X (Y). Sia $\alpha \in (0,1)$.

1. *Varianze note:*

   Test bilaterale $H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \vee \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

Se	$\left\| \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \right\| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	si accetta H_0
Se	$\left\| \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \right\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	si rifiuta H_0

   Test unilaterale $H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \quad \vee \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$

Se	$\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \leq z_{1-\alpha}$	si accetta H_0
Se	$\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} > z_{1-\alpha}$	si rifiuta H_0

2. *Varianze non note ma uguali:* $\sigma_x^2 = \sigma_Y^2$

   Test bilaterale $H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \vee \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$
   Sia
   $$T_0 = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sqrt{\frac{n+m-2}{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}}$$

Se	$\|T_0\| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},n+m-2}$	si accetta H_0
Se	$\|T_0\| > t_{1-\frac{\alpha}{2},n+m-2}$	si rifiuta H_0

   Test unilaterale $H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \quad \vee \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$
   Sia
   $$T_0 = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sqrt{\frac{n+m-2}{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}}$$

Se	$T_0 \leq t_{1-\alpha,n+m-2}$	si accetta H_0
Se	$T_0 > t_{1-\alpha,n+m-2}$	si rifiuta H_0

Confronto tra le varianze di due popolazioni normali

Siano $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$, $n \neq m$, due campioni gaussiani indipendenti. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Siano date n osservazioni del campione X, $(x_1, \dots, x_n)$, ed m osservazioni del campione Y, $(y_1, \dots, y_m)$. Si denotino rispettivamente con $\bar{x}$ ($\bar{y}$) e S_X^2 (S_Y^2) la media e la varianza campionaria di X (Y). Sia $\alpha \in (0, 1)$.

Test bilaterale $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \vee \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \leq \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1), & \text{si accetta } H_0 \\ \text{Se} & \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \quad \text{oppure} \quad \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) & \text{si rifiuta } H_0 \end{array}$$

Test unilaterale $H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \quad \vee \quad H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \leq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) & \text{si accetta } H_0 \\ \text{Se} & \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(n-1, m-1) & \text{si rifiuta } H_0 \end{array}$$

Test del χ^2 di adattamento

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un campione aleatorio di numerosità n e D una certa legge. Fissato $\alpha \in (0, 1)$, lo scopo del test è quello di verificare l'ipotesi nulla che X provenga dalla distribuzione D assegnata, cio valutare

$$H_0 : X \sim D \quad \vee \quad H_1 : X \not\sim D$$

Per ogni $j = 1, \dots, m$, siano N_j le frequenze assolute di j e p_j le probabilità teoriche dell'evento $\{X = j\}$. Siano $\bar{p}_j := \dfrac{N_j}{n}$ le frequenze relative di j.
Sia

$$D_0 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^{m} \frac{(\bar{p}_j - p_j)^2}{p_j},$$

allora

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha, m-1} & \text{si accetta } H_0 \\ \text{Se} & D_0 > \chi^2_{1-\alpha, m-1} & \text{si rifiuta } H_0\,. \end{array}$$

- Regola empirica per stabilire se n è sufficientemente grande:

  $$np_j \geq 5 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m$$

- Se uno o più parametri di D non sono noti, questi devono essere stimati con gli opportuni stimatori (MV). La regione critica di livello α diviene

  $$D_0 > \chi^2_{1-\alpha, m-q-1},$$

  dove $q < m - 1$ è il numero di parametri stimati.

Test del χ^2 di indipendenza

Siano $X = (X_1, \ldots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ due campioni. Supponiamo che X assuma valori $(x_1, \ldots, x_r)$ e Y assuma valori $(y_1, \ldots, y_s)$. Per ogni $j = 1, \ldots, r$ e per ogni $k = 1, \ldots, s$, si considerino le seguenti frequenze:
N_{jk}: numero di volte in cui si presenta il carattere (x_j, y_k);
$N_{j\cdot}$: numero di volte in cui si presenta il carattere x_j;
$N_{\cdot k}$: numero di volte in cui si presenta il carattere y_k;
Sia

$$D_0 = \sum_{\substack{j=1,\ldots,r \\ k=1,\ldots,s}} \frac{\left(N_{jk} - \frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}\right)^2}{\frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}}$$

Fissato $\alpha \in (0,1)$

Se	$D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)}$	si accetta H_0
Se	$D_0 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)}$	si rifiuta H_0 .