

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
corso B
Università degli studi di Bari Aldo Moro
24-06-2021

Esercizio 1. Si lancia N volte una moneta equa, dove N è una variabile aleatoria geometrica di parametro p , vale a dire $P[N = n] = p(1 - p)^{n-1}$ per $n \geq 1$.

- Determinare la probabilità di ottenere almeno una testa.
- Determinare la probabilità che N sia n sapendo di aver ottenuto almeno una testa.
- Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ della probabilità calcolata al punto precedente.

(Si ricorda che, per ogni q con $|q| < 1$, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.)

Esercizio 2. Verificare che per ogni $\theta \geq 1$ la funzione $f(x) = \theta x^{\theta-1} \chi_{[0,1]}(x)$, dove $\chi_{[0,1]}(x)$ vale 1 per $0 \leq x \leq 1$ e 0 altrimenti, è la densità di probabilità di una variabile aleatoria X .

- Calcolare l'attesa di X .
- Calcolare l'attesa di $\ln(X)$, verificando che è pari a $-\frac{1}{\theta}$.
- Dato un campione (X_1, X_2, \dots, X_n) di rango n distribuito come X , determinare il corrispondente stimatore di massima verosimiglianza di θ .
- Dire se lo stimatore di massima verosimiglianza ottenuto al punto precedente è consistente.

Esercizio 3.

Una casa produttrice sostiene di produrre transistor bipolari con un valore medio del guadagno almeno di 210. Si prova un campione di $n = 51$ transistor trovando una deviazione standard campionaria $\bar{x} = 200$ con una varianza campionaria $S = 35$.

- Dire quale test statistico occorre condurre per verificare l'affermazione della casa produttrice, ed effettuarlo con un livello di significatività del 5% e del 10%.
- Calcolare il p -value del test.