Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
Università degli studi di Bari Aldo Moro
Docente: Stefano Rossi

04-02-2022

Esercizio 1. Un dado equilibrato a sei facce numerate da 1 a 6 viene lanciato N volte, dove N è una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$.

(1) Calcolare la probabilità che il numero 6 esca almeno una volta, verificando che vale $1 - e^{-\frac{\lambda}{6}}$.
(2) Calcolare la probabilità che $N = 1$ sapendo che il numero 6 non è mai uscito.
(3) Calcolare il limite per $\lambda \to \infty$ della probabilità al punto precedente e fornire un'interpretazione probabilistica del risultato trovato.

(Ricordare che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$, per ogni numero reale a.)

Esercizio 2. Verificare che per ogni valore del parametro $a > 0$ la funzione

$$f(x) = e^{-(x-a)}\chi_{[a,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

dove $\chi_{[a,\infty)}$ è la funzione caratteristica della semiretta $[a, \infty)$, è la densità di probabilità di una certa variabile aleatoria X.

(1) Calcolare l'aspettazione della variabile aleatoria X, verificando che $E[X] = a + 1$.
(2) Sfruttare il valore determinato sopra per ricavare uno stimatore corretto del parametro a in corrispondenza a un campione $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ di rango n distribuito come X.
(3) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di a in corrispondenza a un campione $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ di rango n distribuito come X.
(4) Determinare una statistica sufficiente per un campione $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ di rango n distribuito come X.

Esercizio 3.

- Dare le definizioni di errore di prima e seconda specie nell'ambito dei test statistici di verifica delle ipotesi.
- Un'azienda vinicola sostiene che il contenuto medio di vino nelle sue bottiglie sia superiore a $750\mathrm{cl}$. Un'associazione di consumatori decide di verificare quest'affermazione, analizzando un campione casuale di $n = 40$ bottiglie. Si trova una media campionaria $\overline{x} = 748\mathrm{cl}$ con una varianza campionaria $\sigma_x^2 = 65\mathrm{cl}^2$. Quali conclusioni si possono trarre con un livello di significatività del 5% e del 10%?
- Calcolare il p-value (approssimato) del test al punto precedente.

Esercizio n° 1

- E = "Il numero 6 esca almeno una volta"

E^C = "Il numero 6 non esca mai"

$$P(E) = 1 - P(E^C)$$

$$P(E^C) = \sum_{k=0}^{\infty} P(E^C \mid N=k) \cdot p(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{5/6 \lambda} = e^{-\lambda/6}$$

$$P(E) = 1 - e^{-\lambda/6}$$

- $$P(N=1 \mid E^C) = \frac{P(E^C \mid N=1) \cdot p(N=1)}{P(E^C)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right) e^{-\lambda} \lambda}{e^{-\lambda/6}} = 5/6 \, \lambda e^{\left(-1+\frac{1}{6}\right)\lambda} =$$

$$= 5/6 \, \lambda e^{-5/6 \lambda}$$

- $$\lim_{\lambda \to \infty} 5/6 \, \lambda e^{-5/6 \lambda} = 0$$

Interpretazione: $E[N] = \lambda$, per cui quando $\lambda \to \infty$ $P(N=1)$ tende a zero anche sapendo che che non si è mai ottenuto alcun 6..

Esercizio 2

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \text{ inoltre } \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^{+\infty} e^{-(x-a)} dx =$$

$$- e^{(x-a)} \Big|_a^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$- E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{a}^{+\infty} \underset{g}{x}\, \underset{f'}{e^{-(x-a)}}\,dx = -e^{-(x-a)} x \Big|_{a}^{\infty} - \int_{a}^{+\infty} -e^{-(x-a)}\,dx$$

$$a + \int_{a}^{+\infty} e^{-(x-a)}\,dx = a + 1$$

- $a = E[X] - 1$, per cui $\overline{X} - 1 = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 1$

~~perke~~ è uno stimatore corretto del parametro a

- La densità congiunta del campione è la funzione

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = e^{-(x_1 - a)}\, e^{-(x_2 - a)} \dots e^{-(x_n - a)}$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}\, e^{na} \quad \text{se} \quad x_i \geq a \quad \forall a$$

altrimenti vale 0

La condizione $x_i \geq a$ $\forall i$ si rilegge in termini del parametro incognito come $a \leq x_i$ $\forall i$, cioè $a \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$

$a \to h(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ è una f.ne monotòne crescente in a per cui prende il suo massimo in corrispondente del valore più grande possibile per a, che è $\min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$.

Lo stimatore di massima verosimiglianza è allora

$$\hat{a} = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$$

- ~~Non è ... determinare una statistica sufficiente utilizzando il teorema di fattorizzazione di Fisher, perché~~

Con $\alpha = 0.1$ si ha $t_{0.90,\,39} = 1.304$ e di conseguenza si rifiuta H_0 (perché $-1.569 < -1.304$)

Poiché il numero di gradi di libertà è abbastanza alto, si possono approssimare i quantili di Student con quelli di Gauss. La condizione che determina il p-value è allora

$$z_{1-p} = 1.57$$

$$p = 1 - \mathrm{Erf}(1.57) = 1 - 0.9418 \sim 5.8\%.$$

Applicando il teorema di fattorizzazione di Fisher si conclude che $\min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ è una statistica sufficiente, dato che

$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n)\, v(t(x), a)$

Con $u(x_1, \dots, x_n) = \lambda^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$v(t(x); a) = \chi_{[a, +\infty)}(t(x_1, \dots, x_n))$ con $t(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$

3)

Errore di prima specie = rifiutare l'ipotesi nulla, quando invece è vera

Errore di seconda specie = accettare l'ipotesi nulla, quando invece è falsa

- ~~Occorre condurre un test di Student unilaterale~~

La statistica da usare è la v.a

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Con $\mu_0 = 750cl$ $n = 40$ $S = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{65}\ cl = 8.0623\ cl$

e $\overline{X} = 748\ cl$

Si ha $T = \frac{748 - 750}{8{,}0623}\sqrt{40} = -1.569$

Si rifiuta $H_0: \mu > \mu_0$ se

$T < -t_{1-\alpha, n-1}$

Con $\alpha = 0.05$ $t_{0.95, 39} = 1{,}685$ $\Rightarrow$ Si accetta H_0

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
corso A e B

Università degli studi di Bari Aldo Moro

13-04-2022

Esercizio 1. Una scatola contiene 100 monete, di cui 50 sono truccate e danno testa con probabilità $\frac{2}{3}$, mentre le restanti 50 sono monete equilibrate. Si prende a caso una moneta e la si lancia.

- Calcolare la probabilità che dia testa.
- Calcolare la probabilità che la moneta sia truccata sapendo che è uscita croce.
- Supponendo che la moneta presa a caso venga lanciata due volte, calcolare la probabilità che al secondo lancio dia testa sapendo che al primo lancio ha dato testa. I due lanci sono indipendenti?

Esercizio 2. Verificare che per ogni valore del parametro $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = \alpha 2^{\alpha} x^{-(\alpha+1)} \chi_{[2,\infty)}(x)$$

è la densità di probabilità di una certa variabile aleatoria X.

- Determinare i valori di α per i quali X ha aspettazione finita e determinare il valore dell'aspettazione in corrispondenza di tali valori.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di α relativo a un campione di rango n distribuito come X.
- Sapendo che $E[\ln(X)] = \ln 2 + \frac{1}{\alpha}$, dire se lo stimatore ottenuto al punto precedente è consistente.
- Esibire una statistica sufficiente per un campione di rango n distribuito come X.

Esercizio 3.

- Fornire la definizione di intervallo di confidenza a un fissato livello di confidenza $1-\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, per un parametro incognito di una data distribuzione.
- Costruire un intervallo di confidenza (approssimato) al livello $1-\alpha$ per il parametro p di una distribuzione di Bernoulli.
- Su un campione di 2500 individui 725 sono disoccupati. Costruire l'intervallo di confidenza della proporzione di disoccupati nella popolazione al livello di confidenza $1-\alpha = 0.99$.

Esercizio n° 1

$H_1 =$ "La moneta è truccata" $\quad p(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 =$ "La moneta è equa" $\quad p(H_2) = \frac{1}{2}$

$T =$ "Esca testa" $\quad C =$ "Esca croce"

$p(T|H_1) = \frac{2}{3} \quad p(C|H_1) = \frac{1}{3}$

$p(T|H_2) = p(C|H_2) = \frac{1}{2}$

- $P(T) = P(T|H_1) \cdot p(H_1) + p(T|H_2) \cdot p(H_2)$ (formula della probabilità totale)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4+3}{6} = \frac{7}{12} \simeq 0{,}583$$

- $p(H_1|C) = \dfrac{p(C|H_1) \cdot p(H_1)}{p(C|H_1) \cdot p(H_1) + p(C|H_2) \cdot p(H_2)} =$ (formula di Bayes)

$$= \frac{p(C|H_1)}{p(C|H_1) + p(C|H_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2+3}{6}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{5}$$

$$= \frac{2}{5} = 0.4$$

- $E_1 =$ "Al primo lancio esca testa"

$E_2 =$ "Al secondo lancio esca testa"

$P(E_2|E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ (definizione di probabilità condizionata)

Ora $P(E_1) = P(T)$

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_2 | H_1)\, P(H_1) + P(E_1 \cap E_2 | H_2) \cdot P(H_2)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right]$

$= \frac{1}{2}\,\frac{16+9}{36} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{36} =$

$P(E_2|E_1) = \dfrac{\frac{1}{2}\,\frac{25}{36}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{36_3}\cdot\frac{12}{7} = \frac{25}{42} = 0.5952$

mentre

$P(E_2) = P(T) = 0.583$

E_1 e E_2 <u>non</u> sono indipendenti.

<u>Esercizio 2</u>

- $f(x) = \begin{cases} 0 & x<2 \\ \alpha 2^\alpha x^{-(\alpha+1)} & x \geq 2 \end{cases}$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \alpha 2^\alpha \int_2^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}\,dx =$

$\alpha 2^\alpha \left.\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_2^\infty = \alpha 2^\alpha\left[0 - \frac{2^{-\alpha}}{-\alpha}\right] = \alpha 2^\alpha \frac{2^{-\alpha}}{\alpha} = 1$

- $E[X] = \alpha 2^\alpha \int_2^\infty x^{-(\alpha+1)} \cdot x\,dx = \alpha 2^\alpha \int_2^\infty x^{-\alpha}\,dx$

l'integrale è convergente per $\alpha > 1$ e in tal caso vale

$\alpha 2^\alpha \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_2^\infty = \alpha 2^\alpha\left[0 - \frac{2^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right] = \alpha 2^\alpha \frac{2^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$

$\frac{2\alpha}{\alpha-1}$

- La densità congiunta è

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \begin{cases} \alpha^n 2^{\alpha n} (x_1 \dots x_n)^{-(\alpha+1)} & \text{per } x_i \geq 2 \quad \forall i \\ 0 & \text{se } \exists i \text{ con } x_i < 2 \end{cases}$$

$$\log f(x_1, \dots, x_n; \alpha) = n \log \alpha + \alpha n \log 2 - (\alpha+1) \log(x_1 \dots x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \frac{n}{\alpha} + n \log 2 - \log(x_1 \dots x_n) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = \log(x_1 x_2 \dots x_n) - n \log 2$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - \log 2$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \log 2}$$

$$\widehat{\alpha}_n = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) - \log 2}$$

- Per la legge dei grandi numeri (debole)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i \xrightarrow{P} E[\log X] = \log 2 + \frac{1}{\alpha}$$

Ne segue che $\widehat{\alpha}_n$ converge in probabilità a

$$\frac{1}{\log 2 + \frac{1}{\alpha} - \log 2} = \alpha$$

cioè $P[|\hat{\alpha}_n - \alpha| \geq \delta] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dunque $\hat{\alpha}_n$ è consistente.

- Dal teorema di fattorizzazione di Fisher si vede che $T = X_1 X_2 \dots X_n$ è una statistica sufficiente.

Esercizio 3

- È un intervallo aleatorio $I = [X_1, X_2]$ tale che

$$P_\theta [X_1 < \psi(\theta) < X_2] \geq 1-\alpha$$

per ogni $\theta \in \Theta$ se $\theta \mapsto \psi(\theta)$ è la f.ne che si intende stimare

- L'intervallo richiesto è dato dalla formula

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})} ; \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\cancel{\bar{X}}(1-\bar{X})} \right]$$

con $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$ (media campionaria)

e $Z_{1-\alpha/2}$ quantile gaussiano

- $\bar{X} = \frac{725}{2500} = 0.29$ $\alpha = 0.01$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{0.995} \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})} = \frac{1}{50} 2.56 \sqrt{0.29(0.71)} = 0.023$$

L'intervallo è allora $[0.267; 0.313]$

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)

corso A e B

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docente: Stefano Rossi

19-05-2022

Esercizio 1. Una moneta equa viene lanciata N volte, dove N è una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Detta X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute,

(1) calcolare $P[X \geq 1]$;
(2) calcolare $P[N = n | X = 0]$;
(3) calcolare il limite della probabilità ottenuta al punto precedente quando n tende a infinito.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro reale θ, si considera la funzione

$$f(x;\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Dopo aver specificato di quale densità di probabilità notevole si tratta,

(1) determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ relativo a un campione di rango n;
(2) calcolare la varianza dello stimatore ottenuto al punto precedente;
(3) esibire una statistica sufficiente per θ;
(4) calcolare l'informazione di Fisher di un campione di rango n;
(5) dire se lo stimatore di massima verosimiglianza ottenuto sopra è efficiente;

Esercizio 3. Un oleificio imbottiglia olio extravergine di oliva in due stabilimenti diversi. Si vuole controllare se il contenuto medio di una bottiglia di olio sia lo stesso nei due stabilimenti. A tal scopo si prendono a caso $n = 30$ bottiglie per il primo stabilimento e $m = 40$ per il secondo, e si trovano le medie campionarie $\overline{x_1} = 998\,\mathrm{cl}$ e $\overline{x_2} = 1001\,\mathrm{cl}$, rispettivamente. Assumendo che i contenuti siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti con la stessa varianza nota $\sigma^2 = 40\,\mathrm{cl}^2$:

(1) dire quale test occorre eseguire se si vuole verificare che il contenuto medio delle bottiglie sia lo stesso per i due stabilimenti, specificando se si tratta di un test unilaterale o bilaterale.
(2) condurre il test a un livello di significatività del 10% e del 5%.
(3) calcolare il p-value del test.

Esercizio 1

- $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0]$

$$P[X=0] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=0 \mid N=n] \cdot P[N=n]$$ (formula delle probabilità totale)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda/2} = e^{-\lambda/2}$$

$$P[X \geq 1] = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

- $$P[N=n \mid X=0] = \frac{P[X=0 \mid N=n] \cdot P[N=n]}{P[X=0]}$$ (formula di Bayes)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{1}{e^{-\lambda/2}}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$$

$\lim_{n \to \infty} P[N=n \mid X=0] = 0$ perché $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ e

$\frac{\lambda^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Esercizio 2

La funzione $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$ è la densità normale di media θ e varianza 1.

1. $h(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\sum_i \frac{(x_i-\theta)^2}{2}}$ densità congiunta

$\ln h(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}$ (a meno di costanti additive)

$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln h(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta = 0 \Rightarrow$

$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$: Lo stimatore di massima verosimiglianza è

dunque $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

2. $Var[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{n} Var[X] = \frac{1}{n}$ perché $(X \sim N(\theta, 1))$

3. $h(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i x_i^2 + \theta^2 - 2\theta x_i\right)} =$

$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2}}_{u(x)} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_i \theta^2 - 2\theta x_i}}_{v(t(x), \theta)}$

con $t(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$t(X) = \sum_i X_i$ è una statistica sufficiente grazie al teorema di Fisher

4. $I_n(\theta) = Var\left[\sum_i (X_i - \theta)\right] = \sum_i Var[X_i - \theta] = n\, Var[X] = n$

5. Il limite di Cramér-Rao è $\frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{n}$, per cui $\hat{\theta}_n$ è efficiente

Esercizio 3

$n = 30 \qquad m = 40$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$\overline{X}_1 = 998$ cl

$\overline{X}_2 = 1001$ cl

$\sigma^2 = 40\ cl^2 \Rightarrow \sigma = 6.325$ cl

1) occorre eseguire un test di Gauss bilaterale.
La regione di rifiuto per H_0 è

$$T = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

($Z_{1-\alpha/2}$ è il quantile gaussiano)

2) Calcoliamo $T = \dfrac{|998-1001|}{6.325\sqrt{\frac{1}{30}+\frac{1}{40}}} = 1.9638$

con $\alpha = 10\%\ (=0.1)$ $\quad \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$ e $Z_{0.95} = 1.65$

e ~~quind~~ dunque si rifiuta H_0

con $\alpha = 5\%\ (0.05)$ $\quad \alpha/2 = 0.025 \quad 1-\alpha/2 = 0.975$ e $Z_{0.975} = 1.96$

e dunque si rifiuta H_0

3) il p-value è determinato dalla relazione

$$T = Z_{1-\frac{p}{2}} \Rightarrow 1-\frac{p}{2} = \mathrm{Erf}(T) \Rightarrow p = 2(1-\mathrm{Erf}(T))$$

e sarà poco meno del 5%.

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)
corso A e B

Università degli studi di Bari Aldo Moro
Docente: Stefano Rossi, Simone Del Vecchio

08-06-2022

Esercizio 1. Una scatola contiene 10 monete, di cui una è truccata e fa uscire testa con probabilità $\frac{2}{3}$. Si prende una moneta a caso e la si lancia 200 volte. Detta X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute, calcolare:

(1) $E[X]$
(2) $P[X \geq 100]$
(3) la probabilità che la moneta sia truccata sapendo che $X \geq 125$.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$, si considera la funzione

$$f(x) := \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\chi_{[0,+\infty)}(x)\,.$$

(1) Verificare che f è la densità di una certa variabile aleatoria X.
(2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ relativo a un campione di rango n distribuito come X.
(3) Esibire una statistica sufficiente per λ.
(4) Determinare la legge di $\sqrt{X}$ e dire se si tratta di una legge notevole.
(5) Calcolare $E[\sqrt{X}]$.

Esercizio 3. Dare la definizione di livello di significatività di un test statistico.
Sulla base dei seguenti $n = 10$ valori ottenuti su un campione casuale proveniente da una popolazione normale

$$1.1,\ 3.1,\ 4.2,\ 4.6,\ 5.0,\ 5.2,\ 5.3,\ 6.5,\ 8.4,\ 9.6$$

verificare l'ipotesi che la media della popolazione sia pari a $\mu_0 = 4$ al livello di significatività 5% e 1%.

Esercizio 1

H_1 = "La moneta è truccata" $\qquad P(H_1) = \frac{1}{10}$

$H_2 = H_1^c$ = "La moneta è equa" $\qquad P(H_2) = \frac{9}{10}$

E = "Esca testa in un singolo lancio"

$p(E|H_1) = \frac{2}{3}$

$p(E|H_2) = \frac{1}{2}$

$n = 200$ (numero di lanci). Per $0 \leq k \leq 200$ abbiamo

1.

$$P[X=k] = P[X=k|H_1] \cdot P[H_1] + P[X=k|H_2] \cdot P[H_2]$$

$$= \frac{1}{10} \binom{200}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{200-k} + \frac{9}{10} \binom{200}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{200-k}$$

Segue che

$$E[X] = \frac{1}{10} \left[200 \cdot \frac{2}{3} \right] + \frac{9}{10} \frac{200}{2} = 103.33$$

2. $$P[X \geq 100] = P[X \geq 100 | H_1] \cdot P[H_1] + P[X \geq 100 | H_2] \cdot P[H_2]$$

$$P[X \geq 100 | H_2] = \frac{1}{2}$$ (per simmetria, perché la media di X dato H_2 è 100)

$P[X \geq 100 | H_1] = P[X \geq 100]$ con $X \sim N\left(133, \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \, 200}\right) = N(133, 6.66)$

$$= P\left[\frac{X - 133}{6.66} \geq \frac{100-133}{6.66} = -4.95 \right] = 1$$

$P[X \geq 100] = 1 \cdot \frac{1}{\ } + \frac{9}{\ } \cdot \frac{1}{\ } = \frac{11}{\ } = 0.55$

$P[H_1 | X \geq 125] =$

$$\frac{p[X \geq 125 | H_1] \cdot p[H_1]}{P[X \geq 125 | H_1] \cdot p[H_1] + p[X \geq 125 | H_2] \cdot p(H_2)}$$

formula di Bayes

$$P[X \geq 125 | H_1] = P\left[\frac{X-133}{6.66} \geq \frac{125-133}{6.66}\right] =$$

$$P[N \geq -1.20]$$

$$P[N \leq 1.20] = 0.8849$$

$$P[X \geq 125 | H_2] = P\left[\frac{X-100}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \geq \frac{125-100}{\sqrt{\frac{200}{4}}} = \frac{+25}{\sqrt{50}} = 3.53\right] \sim 0$$

Ne segue che

$$p[H_1 | X \geq 125] \sim 1 \quad \square$$

Esercizio n° 2

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \end{cases}$

è una densità, perché $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 \qquad \text{se } t = \sqrt{x}$$

$\left(dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)$

2) La densità congiunta è

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}}{2\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}} & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\ln h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$ (a meno di costanti additive che non dipendono da λ)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}; \quad \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}; \quad \lambda = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}}$$ è lo stimatore di massima verosimiglianza

3) Dal teorema di fattorizzazione di Fisher si vede che

$T = \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}$ è una statistica sufficiente

4) $F(t) = P[\sqrt{X} \leq t] = P[X \leq t^2] = \int^{t^2} \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$

quindi $F'(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\cancel{2t}} \cancel{2t}\, dt & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

la densità di $\sqrt{X}$ è di tipo esponenziale di parametro λ.

5) $E[\sqrt{X}] = \frac{1}{\lambda}$ perché $\sqrt{X} \sim exp(\lambda)$

Esercizio n° 3

Il livello di significatività di un test è la probabilità di commettere l'errore di prima specie, cioè di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera.

$H_0 : \mu_0 = 4$

Con i dati a disposizione

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 5.3$

$\overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 33.472$

$S_n^2 = \frac{n}{n-1} (\overline{X^2} - (\overline{X})^2) = \frac{10}{9} (33.472 - 5.3^2) = 5.98$

Occorre utilizzare un test di Student (bilaterale)

Si rifiuta H_0 se

$$\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

Ne

Ora

e

e

Se

Si

Nel nostro caso

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{5.3 - 4}{\sqrt{5.98}} \cdot 3 = 1.595$$

Ora con $\alpha = 5\%$ (0.05)

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$$

e $t_{0.975}(9) = 2.262$

e quindi si accetta H_0

Se si accetta H_0 con $\alpha = 5\%$, a maggior ragione lo si accetta anche con $\alpha = 1\%$.

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)

corso A e B

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docente: Stefano Rossi, Simone Del Vecchio

24-06-2022

Esercizio 1. Si lancia una moneta equa N volte, dove N è una variabile geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute

(1) Calcolare $P[X \geq 1]$.
(2) Per ogni naturale $n \geq 1$, calcolare $P[N = n | X = 0]$.
(3) Calcolare $P[X = 1]$.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ si considera la funzione

$$f(x) := 2\lambda x e^{-\lambda x^2} \chi_{[0,\infty)}(x) \, , x \in \mathbb{R} \, .$$

(1) Verificare che f è la densità di una certa variabile aleatoria X.
(2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ relativo a un campione $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ di rango n distribuito come X.
(3) Esibire una statistica sufficiente per il parametro λ.
(4) Determinare la legge di X^2 e dire se si tratta di una legge notevole.
(5) Dire se $\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}$ è uno stimatore corretto di $\frac{1}{\lambda}$.

Esercizio 3. Dare la definizione di distribuzione di Fisher di parametri (n, m) e richiamare le proprietà dei suoi quantili.

Si devono confrontare le varianze di due popolazioni normali indipendenti. Un campione di rango $n_1 = 9$ estratto dalla prima fornisce una varianza campionaria pari a $S_1^2 = 1.5278$, mentre un campione di rango $n_2 = 10$ estratto dalla seconda fornisce una varianza campionaria pari a $S_2^2 = 1.6556$. Verificare l'ipotesi che le due varianze siano uguali con un livello di significatività del 5% e del 10%.

Esercizio 1

0) $P[N=n] = p(1-p)^{n-1} \qquad n \geq 1$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n \geq 1$

1) $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0]$

e

$P[X=0] = \sum_{n=1}^{\infty} P[X=0 \mid N=n] \cdot P[N=n]$ (dalla formula della probabilità totale)

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1$

è la probabilità di ottenere 0 teste in n lanci

$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$

$P[X \geq 1] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2) $P[N=n \mid X=0] = \frac{P[X=0 \mid N=n] \cdot P[N=n]}{P[X=0]}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 3 \, \frac{1}{4^n}$

3) $P[X=1] = \sum_{n=1}^{\infty} P[X=1 \mid N=n] \cdot P[N=n] = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ora $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$ si calcola con il solito trucco:

Da $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ per $|q| < 1$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\, q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Sostituendo $q = 1/4$, troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{4}{9}.$$

Esercizio n° 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

1) f è una densità di probabilità. Infatti, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = -e^{-\lambda x^2}\Big|_0^{\infty} = 1$$

2) La densità congiunta è

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = 2^n \lambda^n x_1 x_2 \dots x_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Si ha

$$\ln h = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$$ (a meno di costanti additive che non dipendono da λ)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln h = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$$ è lo stimatore di massima verosimiglianza

3) Dal teorema di fattorizzazione di Fisher si vede che $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ è una statistica sufficiente per λ

4) $$P[X^2 \leq t] = P[X \leq \sqrt{t}] = \int_0^{\sqrt{t}} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx$$

Segue che la densità di X^2 è

$$g(t) = \frac{d}{dt} P[X^2 \leq t] = \frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} 2\lambda x \, e^{-\lambda x^2} dx =$$

$$= \frac{2\lambda\sqrt{t}\, e^{-\lambda t}}{2\sqrt{t}} = \lambda e^{-\lambda t}$$

che è la densità esponenziale

5) Dal punto 4 segue che $\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$ è uno stimatore corretto di $\frac{1}{\lambda}$ (perché $E[X^2] = \frac{1}{\lambda}$).

Esercizio 3

La distribuzione di Fisher di parametri n e m è la legge di una variabile aleatoria $F_{n,m} = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ dove X e Y sono due variabili indipendenti distribuite come una $\chi^2(n)$ e una $\chi^2(m)$, rispettivamente.

Detto $F_\alpha(n,m)$ il quantile corrispondente (cioè

$$P\left[\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \leq F_\alpha(n,m)\right] = \alpha$$

si ha

$$F_\alpha(n,m) \cdot F_{1-\alpha}(m,n) = 1$$

$n_1 = 9$

$n_2 = 10$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Sotto l'ipotesi nulla

$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ è una v.a. di Fisher $F(8,9)$

La regione di rifiuto è

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(8,9) \quad o \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(8,9)$$

Nel nostro caso $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{1.5278}{1.6556} = 0.92281$

Con $\alpha = 5\%$ (0.05) $\quad \dfrac{\alpha}{2} = 0.025$ e $1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.975$

con $\alpha = 10\%$ (0.1) $\quad \dfrac{\alpha}{2} = 0.05$ e $1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.95$

$F_{0.05}(8,9) = 3.23 \qquad F_{0.95}(8,9) = 3.39$

Quindi al 10% accetto H_0. A maggior ragione H_0 viene accettata anche al 5%.

Esame di *Calcolo delle probabilità e statistica* (per studenti di Informatica)

corso A e B

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docente: Stefano Rossi, Simone Del Vecchio

11–07–2022

Esercizio 1. Il numero di pizze vendute da una certa pizzeria in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1 = 40$, mentre il numero di bibite vendute è una variabile di Poisson di parametro $\lambda_2 = 0.5$. Considerando il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti, rispondere ai seguenti quesiti.

(1) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso venga venduta una sola bibita.
(2) Calcolare la probabilità che in una settimana lavorativa di 6 giorni venga venduta almeno una bibita.
(3) Calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno, sapendo che in un anno la pizzeria è aperta 255 giorni.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\lambda > 0$ si considera la funzione

$$f(x) := \frac{\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}} \chi_{(0,\infty)}(x)\,, x \in \mathbb{R}\,.$$

(1) Verificare che f è la densità di una certa variabile aleatoria X.
(2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ relativo a un campione di rango n, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, distribuito come X.
(3) Esibire una statistica sufficiente per il parametro λ.
(4) Determinare la legge di $\frac{1}{X}$ e dire se si tratta di una legge notevole.
(5) Calcolare $E[\frac{1}{X}]$.

Esercizio 3. Dare la definizione di distribuzione chi-quadrato $\chi^2(n)$ con n gradi di libertà, ed enunciare la relativa proprietà di riproducibilità.
Si vuole verificare l'ipotesi che la varianza σ^2 di una popolazione normale sia pari a 4. A tal fine, si considera un campione di rango $n = 15$, e si trova una varianza campionaria pari a $S^2 = 5.72$. Eseguire il test opportuno per verificare l'ipotesi con un livello di significatività del 5% e del 10%.

Esercizio n°1

1) La probabilità richiesta è

$P[X=1]$

dove X è una variabile di Poisson con $\lambda = \lambda_2 = 0.5$

$P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

quindi $P[X=1] = e^{-0.5}\, 0.5 \simeq 0.303$

2) Indichiamo con X_i, $i = 1, 2, \dots, 6$,

le v.a. che conta il numero di bibite vendute il giorno i-esimo

Allora si tratta di calcolare

$P[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 1]$

Ora $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ è ancora una v.a. di Poisson

di parametro $\lambda = 6 \cdot \lambda_2 = 6 \cdot 0.5 = \frac{6}{2} = 3$

$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y=0] = 1 - e^{-3} \simeq 0.9502$

3) Se Z_i è la v.a. che conta il numero di pizze vendute al giorno i-esimo, allora si tratta di esprimere media e varianza della somma

$\sum_{i=1}^{255} Z_i$

Si ha $E\left[\sum_{i=1}^{255} Z_i\right] = 255 \cdot 40 = 10.200$

$Var\left[\sum_{i=1}^{255} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{255} Var[Z_i] = 255 \cdot 40 = 10.200$

per indipendenza

Esercizio 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

1. $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}}\,dx = + e^{-\frac{\lambda}{x}} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = 1 - 0 = 1$$

2. La densità congiunta è data da

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2} e^{-\lambda\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)} & \text{se } x_i > 0 \ \forall i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\log h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \log \lambda - \lambda\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n}\right)$$

(a meno di costanti additive che non dipendono da λ)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \frac{n}{\lambda} - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

$$\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad \lambda = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

3. Dal teorema di fattorizzazione di Fisher si vede che $T = \sum \frac{1}{X_i}$ è una statistica sufficiente

4. $P\left[\frac{1}{X} \leq t\right] = P\left[X \geq \frac{1}{t}\right] = \int_{1/t}^{\infty} \frac{\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}} dx =$

$$= e^{-\frac{\lambda}{x}} \Big|_{1/t}^{\infty} = 1 - e^{-\lambda t}$$

dunque $\frac{1}{X}$ è esponenziale di parametro λ

5. $E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{1}{\lambda}$ grazie al punto 4

Esercizio 3

La distribuzione $\chi^2(n)$ è la legge di una variabile aleatoria $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ dove le X_i sono variabili normali standard indipendenti. Si vede che $\chi^2(n)$ non è altro che una ~~legge~~ gamma $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Se $X \sim \chi^2(n)$ e $Y \sim \chi^2(m) \Rightarrow X+Y \sim \chi^2(n+m)$.

—

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ con $\sigma_0^2 = 4$

Occorre utilizzare un test (bilaterale) del chi quadrato

La statistica da usare è

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

con $n = 15$

Nel nostro caso $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 14 \cdot \frac{5,72}{4} = 20,02$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \quad o \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

se $\alpha = 0.05$ $\quad \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

Ora

$\chi^2_{0.025}(14) = 5.62$

$\chi^2_{0.975}(14) = 26.11$

quindi con $\alpha = 5\%$ H_0 viene accettata

se $\alpha = 0.1$ $\quad \alpha/2 = 0.05 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$

$\chi^2_{0.05}(14) = 6.57$

$\chi^2_{0.95}(14) = 23.68$

quindi con $\alpha = 10\%$ H_0 viene ancora accettata