VANTAGGI E SVANTAGGI DEL METODO DELLE SUCC.VE BISEZIONI

VANTAGGI:

- semplicità
- convergenza "globale" (se $f(a)f(b)<0$, non occorre che a e b siano vicini allo zero α di f affinché il metodo sia convergente)
- stima certa dell'errore ad ogni passo:

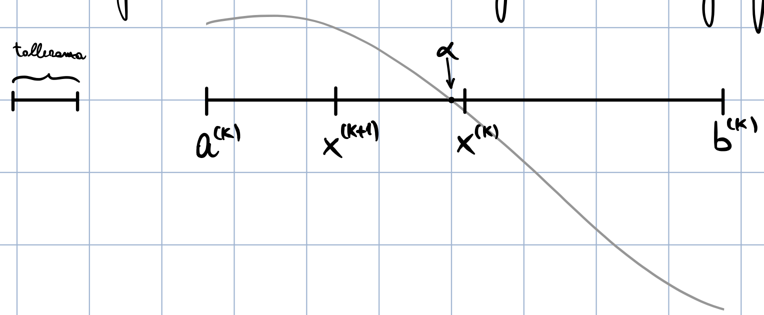
$$\underbrace{a^{(k)}}_{\text{stima per difetto}} \leq \alpha \leq \underbrace{b^{(k)}}_{\text{stima per eccesso}}, \quad \forall\, k$$

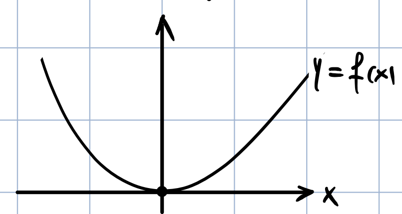
SVANTAGGI

- È lento
- Di frequente senza buona stima dell'errore:

$$|x^{(k+1)}-\alpha| > |x^{(k)}-\alpha|$$

Si riflette sulla seguente figura:



- Per implementarlo è necessario che $f(a)\,f(b) < 0$ (Ad esempio non si può applicare a 

)

PSEUDOCODICE DEL ALGORITMO

dati: f, a, b, ε

(f, a, b verifichino le ipotesi del Teorema di Bolzano; $\varepsilon > 0$ tolleranza)

1. $x := \frac{1}{2}(a+b)$

stima della soluzione

2. se $b - x < \varepsilon$, pongo $\alpha := x$ e esco

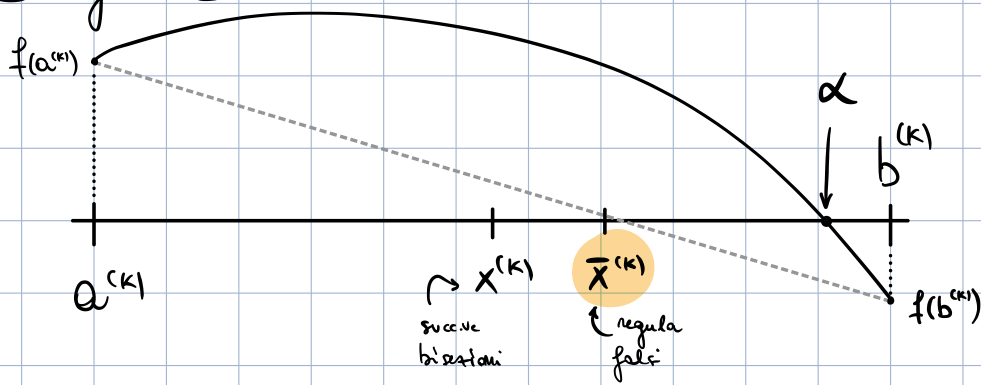
3. se $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(x))$, allora
$b := x$, altrimenti $a := x$

4. torna al punto 1.

L'algoritmo "legge" solo il segno di f, non il suo effettivo valore. La seguente variante ne sfrutta anche il valore, ottenendo generalmente una riduzione nel numero di passi necessari per approssimare la soluzione a parità di tolleranza.

METODO REGULA FALSI

Si ragiona come nel metodo delle succ.ve bisezioni, ma al generico passo K si rimpiazza il punto medio $x^{(K)} = \frac{a^{(K)} + b^{(K)}}{2}$ con l'ascissa $\bar{x}^{(K)}$ del punto di intersezione della secante al grafico di f per i punti di ascissa $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ con l'asse delle ascisse. Si vede il grafico seguente.



ESERCIZIO

1. determinare l'espressione per $\bar{x}^{(k)}$ in funzione di $a^{(k)}, f(a^{(k)}), b^{(k)}, f(b^{(k)})$.

2. osservare che generalmente non si ha $b^{(k)} - a^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

(si consideri f con $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ e concavità rivolta verso il basso in $[a, b]$)

Si rende necessario utilizzare nuovi criteri di arresto. Si considerino i seguenti:

- $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ stima errore assoluto
- $\dfrac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}|} < \varepsilon$ stima errore relativo
- $\dfrac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k+1)}| + 1} < \varepsilon$ stima errore "misto" ass/rel

CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA

Quando dobbiamo risolvere al computer un problema che viene dalle applicazioni, dobbiamo tener conto di diverse sorgenti di errore: semplificazioni nel modello, errori di misurazione nei dati, discretizzazione (esempio: $f'(x)$ sostituita con $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, h "piccolo"), arrotondamento di un numero reale ad un "numero macchina".

Ci chiediamo: qual è l'effetto di questi errori sulla soluzione del problema? Ci concentreremo maggiormente sugli errori derivanti dall'utilizzo del computer.

<u>Definizione</u>: Sia P un problema.

Abbiamo:

dato		soluzione
x	$\longmapsto$	y
$x+\delta x$	$\longmapsto$	$y+\delta y$

Il problema P si dice ben condizionato se a piccole perturbazioni δx sul dato corrispondono altrettanto piccole perturbazioni δy sulla soluzione. Altrimenti, P è detto mal condizionato.

È possibile quantificare il condizionamento mediante un numero.

Per semplicità, supponiamo x, y numeri reali. Idealmente cerchiamo la più piccola costante $K > 0$ t.c.

$$\frac{|\delta y|}{|y|} \leq K \frac{|\delta x|}{|x|}, \quad |\delta x| \text{ piccolo}$$

errore relativo sulla soluzione

errore relativo sul dato

In generale, K dipende anche da x:

$$K = K(x).$$

Se $K \simeq 1$, P è ben condizionato

Se $K >> 1$, P è mal condizionato

"di ordini di grandezza superiore a"

K è detto fattore di condizionamento.

$K(x)$ è il maggior fattore di amplificazione dell' errore relativo che possiamo osservare per piccole perturbazioni di x.

<u>Esempio</u>: $\frac{|\delta x|}{|x|} = 10^{-6}$, $K(x) = 1000$.

Allora $\frac{|\delta y|}{|y|} \leq 10^{-3}$. Il dato ha 6 cifre corrette, la soluzione almeno 3:

"possiamo perdere 3 cifre"!

<u>Nota</u>: il condizionamento può essere studiato anche rispetto all'errore

assoluto :

più piccolo $K(x) > 0$ t.c. $|\delta y| \leq K(x) |\delta x|$,

$|\delta x|$ piccolo.

In questo caso $K(x)$ è essenzialmente la derivata della funzione

$$x \longmapsto y(x)$$

valutata in x (supponendo che questa sia derivabile)

<u>Richiamo</u> : Polinomio di Taylor

<u>Teorema</u>: Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ e continua in $[a,b]$ assieme a tutte le sue $n+1$ derivate. Sia $x \in (a,b)$. Allora, $\forall x \in (a,b)$

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \; \forall x \in (a,b)$$

dove

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

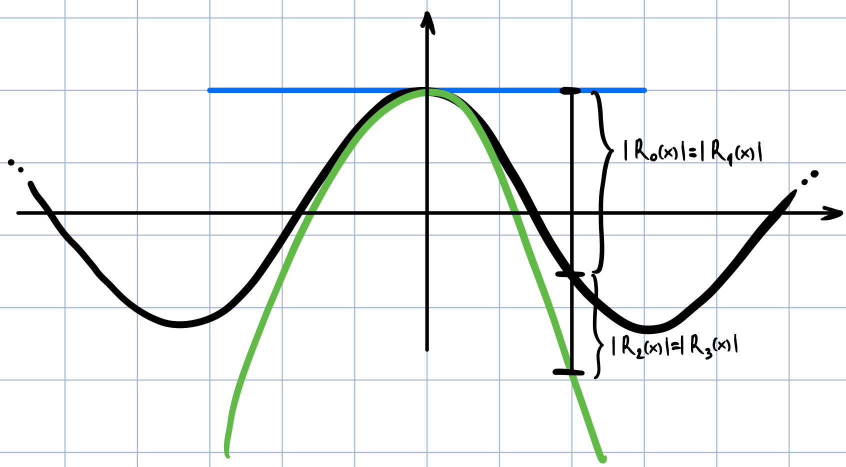
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

T_n è detto polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0; R_n è detto resto di Lagrange di grado $n+1$.

Notare: $\underbrace{|R_n(x)|}_{\text{errore assoluto che commettiamo nell'approssimare } f(x) \text{ con } T_n(x)} = |f(x) - T_n(x)|$

Esempio: $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$.

Allora $T_0(x) = T_1(x) = 1$, $T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$



Per un ulteriore approfondimento, si vede la raccolta di esercizi sul calcolo degli zeri di funzione.

STUDIO DEL CONDIZIONAMENTO DELLO ZERO DI UNA FUNZIONE

Problema: data $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, determinare α t.c. $f(\alpha) = 0$.

Studiamo l'effetto delle perturbazioni su f.

dato	soluzione
f	α t.c. $f(\alpha)=0$
$\tilde{f} = f + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{errore}}}{e}$	$\tilde{\alpha}$ t.c. $\tilde{f}(\tilde{\alpha})=0$

Ipotesi: 1) $|e(x)| < \varepsilon$ ← stima sull'errore

2) $f, \tilde{f}$ continue, $f(a)\,f(b) < 0$

Per fissare le idee, supponiamo $f(a) > 0$

Osserviamo che:

- se $f(a) > \varepsilon$, allora $\tilde{f}(a) > 0$
- se $f(b) < -\varepsilon$, allora $\tilde{f}(b) < 0$

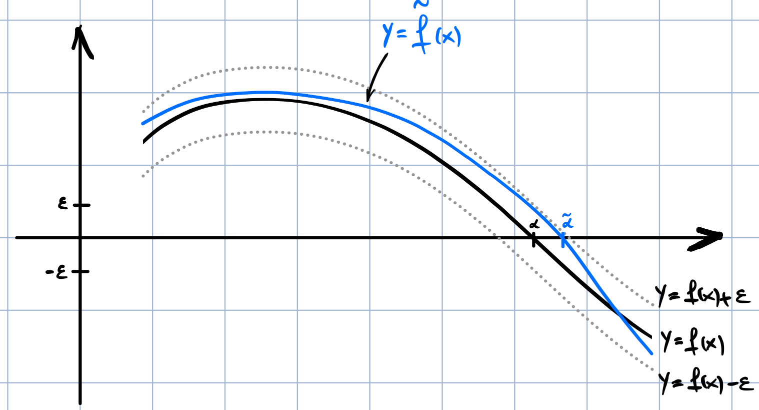
Quindi, se f è sufficientemente grande in a e b, anche $\tilde{f}(a)\tilde{f}(b)<0$ e dunque $\tilde{f}$ ha uno zero $\tilde{\alpha}$ in $[a,b]$.

Se invece $|f(x)|<\varepsilon$ per $x=a$ o $x=b$, allora il segno di f può non coincidere con quello di $\tilde{f}$ in a o b, e $\tilde{f}$ potrebbe non avere zeri in $[a,b]$.

I ruoli di f e $\tilde{f}$ possono essere intercambiati.

<u>Conclusione</u>: laddove $|f(x)|<\varepsilon$, $\tilde{f}$ potrebbe essere "dominata dall'errore" e darei informazioni errate sugli zeri di f.

Graficamente:



__Definizione__: il più grande intervallo $I \subset [a,b]$ contenente α e t.c. $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \in I$, è detto intervallo di incertezza per α.

__Obiettivo di un metodo__: fornire una approssimazione di α che appartenga all'intervallo di incertezza per α.
Non possiamo richiedere maggiore precisione.