SPAZI VETTORIALI

Definizioni

Un insieme $\mathbb{K}$ è detto corpo se esistono leggi di composizione $+$ e $\cdot$ interne

$$+,\cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

tali che:

1) $\exists\ 0 \in \mathbb{K}$ t.c. $x+0 = 0+x = x, \quad \forall x \in \mathbb{K}$

2) $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists\ (-x) \in \mathbb{K}$ t.c.

$$x+(-x) = (-x)+x = 0$$

3) $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$ t.c. $x\cdot 1 = 1\cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{K}$

4) $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists (x^{-1}) \in \mathbb{K}$ t.c.

$$x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$$

<u>Notazione</u>

$x, y \in \mathbb{K}$: "xy" significa $x \cdot y$

Nel corpo deve valere la proprietà associativa per $+$ e $\cdot$. <u>Non è necessario</u> che valga la proprietà commutativa. Un corpo nel quale $+$ e $\cdot$ sono commutative è detto campo ("field") o corpo commutativo.

Esempi : $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

sono campi ; $\mathbb{Z}$ non è un corpo !

Un insieme V è detto <u>spazio vettoriale</u> sul corpo $\mathbb{K}$ se esistono leggi di composizione $+$ interna e $\cdot$ esterna

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

tali che :

1) $+, \cdot$ sono commutative

2) $\exists\, 0 \in V$ t.c.

$$v + 0 = 0 + v = v, \quad \forall v \in V$$

3) $\forall v \in V \ \exists\, (-v) \in V$ t.c.

$$v + (-v) = (-v) + v = 0$$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$:

$$(\alpha\beta) v = \alpha(\beta v) \leftarrow \text{associatività}$$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$:

$$(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$$

distributività

6) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V$:

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$$

7) $\forall v \in V$: $1 v = v 1 = v$

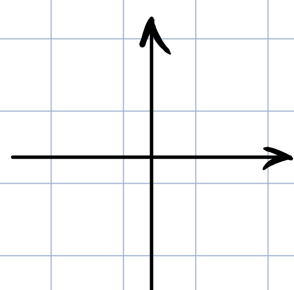
Nomenclatura:

Gli elementi di V sono detti *vettori*; gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti *scalari*.

Esempi

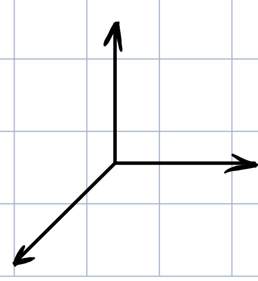
1) $$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$\mathbb{R}^2$:



piano Euclideo

$\mathbb{R}^3$:

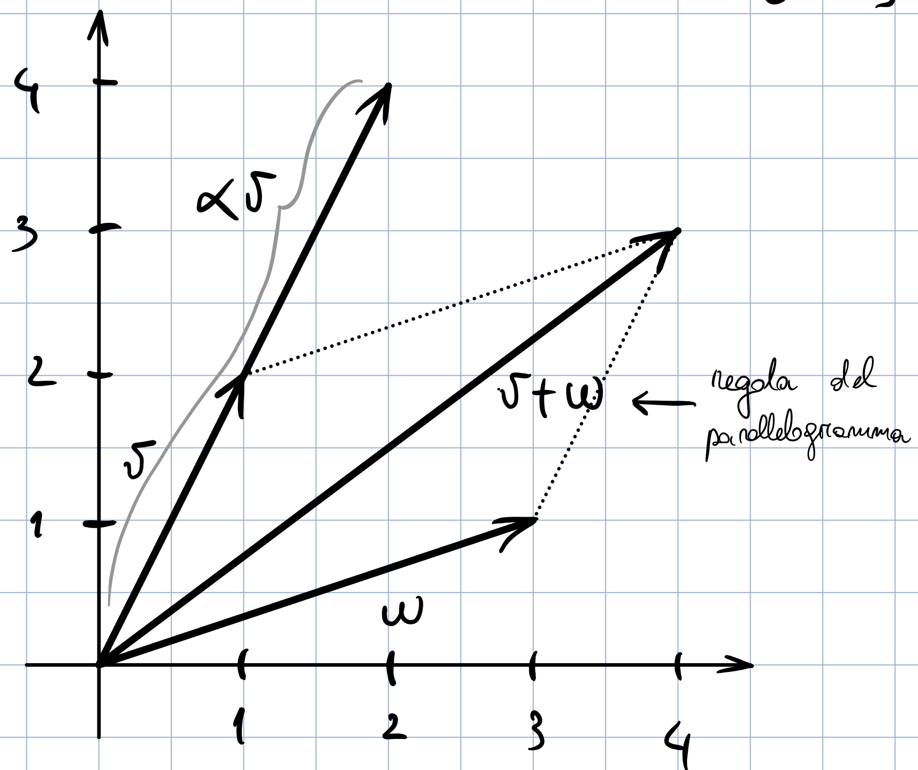


spazio Euclideo

Esempi

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 2$$

$$v + w = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \alpha v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



2) $$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\} =$$

$$= \left\{ \text{polinomi di grado} \leq n \right\}$$

3) $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\}$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia $W \subset V$, con V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Diremo che W è <u>sottospazio vettoriale</u> di V se:

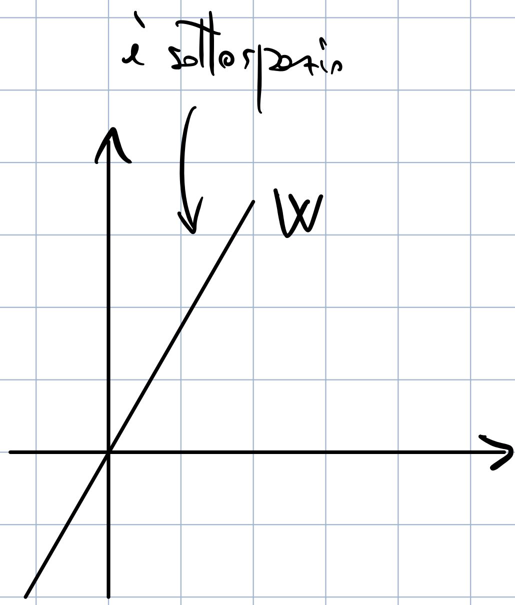
chiusura di W rispetto a $+$

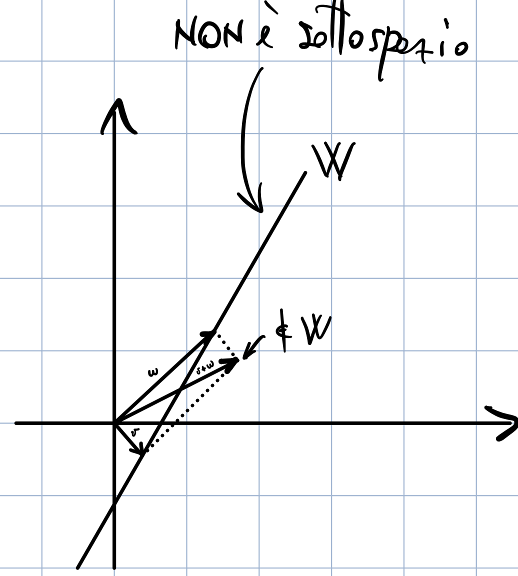
1) $\forall v, w \in W : v + w \in W$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in W : \alpha v \in W$

chiusura di W rispetto a $\cdot$

<u>Esempi</u>

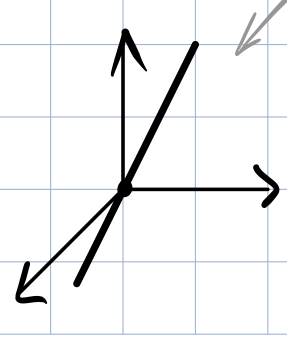
1) $\mathbb{R}^2 : \{ \underbrace{\{0\}, \mathbb{R}^2}_{\text{detti "banali"}},$ rette per l'origine $\}$

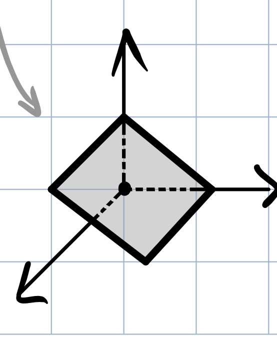




<u>Osservazione</u>: il vettore nullo 0 deve necessariamente appartenere a qualsiasi sottospazio vettoriale.

2) $\mathbb{R}^3$: $\{\{0\}, \mathbb{R}^3$, rette per l'origine, piani per l'origine$\}$





3) $\mathbb{P}_2$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{P}_3$

4) $\{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>derivabile</u>$\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}([a,b])$

COMBINAZIONI LINEARI

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ spazio vett. su $\mathbb{K}$, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Allora

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

è detta <u>combinazione lineare</u> dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$. Gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono detti coefficienti della combinazione lineare.

<u>Esempi</u>

1) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$2v - 3w = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

è combinazione lineare di v e w

2) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x \in \mathcal{C}([a,b])$

allora $(f+g)(x) = \sin x + \cos x)$ è combinazione lineare di f e g

Attenzione: $\sin x \cos x$ non lo è!

SOTTOSPAZI GENERATI DA VETTORI

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori di V spazio vett. su $\mathbb{K}$. Allora

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} =$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k : \alpha_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} =$$

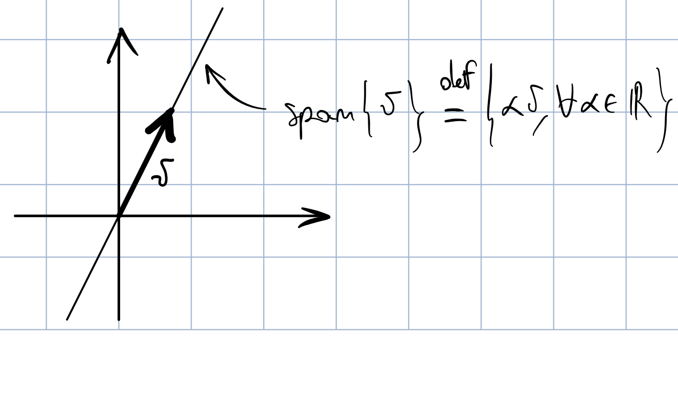
$$= \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_i \text{ scalari} \} =$$

$$= \{ \text{Tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori } v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

è un sottospazio vettoriale di V, detto sottospazio vettoriale ***generato*** da $\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_n}_{\text{sono detti "generatori" del sottospazio}}$.

Esempi

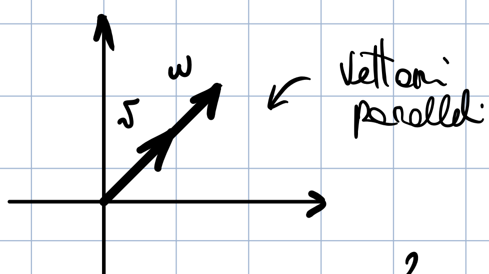
1) sia $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$.



Ovvero, span$\{v\}$ è l'insieme dei vettori che giacciono sulla retta individuata da v. (vedere figura)

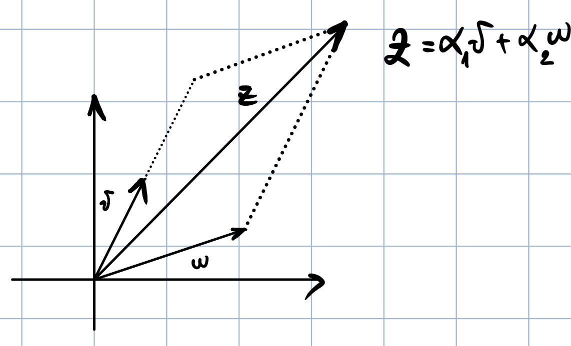
Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$, v, w non nulli.

<u>DEFINIZIONE</u>: $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono paralleli se $v = \alpha w$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.



<u>NOTAZIONE</u>:
$v \parallel w$: v e w paralleli
$v \nparallel w$: v e w NON paralleli

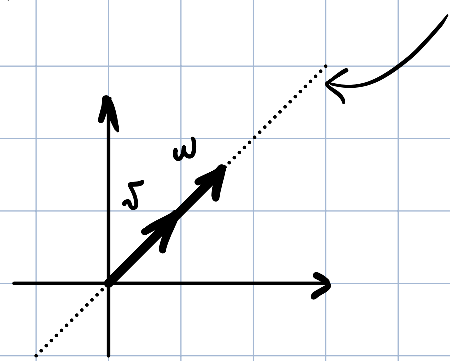
Supponiamo $v, w \in \mathbb{R}^2$ non nulli e non paralleli



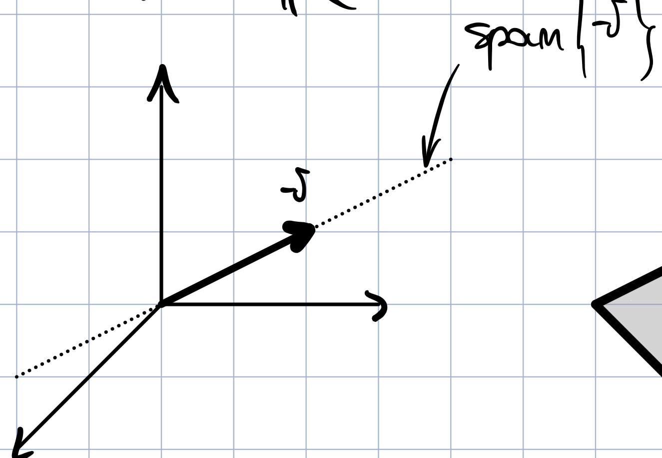
Domanda: chi è span$\{v, w\}$?

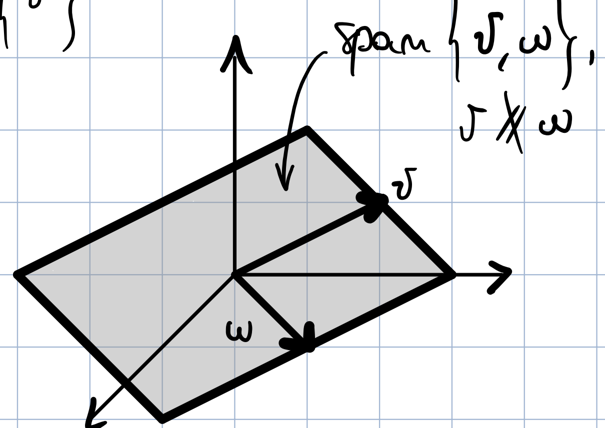
Risposta: span$\{v, w\} = \mathbb{R}^2$

Se invece $v, w \in \mathbb{R}^2$ fossero paralleli, $\text{span}\{v, w\}$ sarebbe una retta



ESEMPIO: $\mathbb{R}^3$





E se prendessimo v_1, v_2, v_3 NON complanari?
(... e ovviamente non nulli)

Allora $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$

Se invece v_1, v_2, v_3 fossero complanari, allora span$\{v_1, v_2, v_3\}$ sarebbe una retta

oppure un piano.

ESEMPIO: span$\{1, x, x^2\}$ =

$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ \forall a_i \in R\} =$$

$$= \{\text{polinomi di grado} \leq 2\} = \mathbb{P}_2$$

DEFINIZIONE: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$

non nulli si dicono linearmente indipendenti

se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

ovvero se l'unica combinazione lineare nulla dei vettori v_i, $i = 1, 2, \dots, p$, è data da coefficienti α_i tutti nulli!

ESEMPIO: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ NON sono lin.

indip., poiché

$$1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

I vettori v_i, $i=1,2,\dots,p$, non nulli sono detti linearmente dipendenti se NON SONO lin. indipendenti. Cosa significa?

Supponiamo esistano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_p v_p=0$.

Supponiamo (per fissare le idee) sia $\alpha_1\neq 0$. Allora

$$\alpha_1 v_1 = -(\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_p v_p) \iff$$

$$\iff v_1 = -\alpha_2/\alpha_1\, v_2 + \dots - \alpha_p/\alpha_1\, v_p ,$$

ovvero v_1 è combinazione lineare dei vettori $v_2, v_3, \dots, v_p$. Dunque $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono lin. indipendenti se nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

ESEMPI: $v, w \in \mathbb{R}^2$, v e w non nulli

v, w lin. dipendenti $\Longleftrightarrow$ $v \parallel w$

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

v_1, v_2, v_3 lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ v_1, v_2, v_3 sono complanari

OSSERVAZIONE: Se v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti, almeno uno "non dà contributo" a span$\{v_1, v_2, v_3\}$.

Ad esempio, sia v_3 comb. lin. di v_1, v_2.

Allora $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

DEFINIZIONE Siano V spazio vett. su $\mathbb{K}$, $W \subset V$ sottospazio vett. di V. I vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset W$ costituiscono una base di (o per) W se:

① $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono lin. indipendenti

② $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = W$.

In tal caso, il numero $p \in \mathbb{N}$ è detto dimensione di W, e scriviamo

$$\dim(W) = p.$$