COGNOME E NOME: MATRICOLA:

problema 1	
problema 2	
problema 3	
totale	

Calcolo Numerico

PRIMA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

13 novembre 2019

Problema 1.
Considerato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F} := \mathbb{F}(2, 24, -63, 64)$, determinare:

(1) il più piccolo numero reale positivo *normale* in $\mathbb{F}$;
(2) il più piccolo numero reale positivo *denormale* in $\mathbb{F}$;
(3) la distanza tra numeri di macchina *normali* consecutivi;
(4) la distanza tra numeri di macchina *denormali* consecutivi;
(5) il massimo errore relativo commesso nell'arrotondamento "round to nearest, ties to even"

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{fl}(x) \in \mathbb{F}$$

in assenza di underflow/overflow [giustificare la risposta];
(6) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 8$;
(7) il più piccolo intero naturale p per cui $4 + 4^{-p} \in \mathbb{F}$;
(8) il numero minimo di bit da cui deve essere formata una stringa per poter rappresentare tutti i numeri in $\mathbb{F}$;

Problema 2.

(1) Descrivere il metodo delle successive bisezioni, specificando sotto quali ipotesi ne è garantita la convergenza e indicandone almeno 2 possibili criteri di arresto;
(2) enunciare la definizione di ordine di convergenza;
(3) descrivere il metodo di Newton, enunciare il relativo Teorema di convergenza e indicarne almeno 2 possibili criteri di arresto;
(4) descrivere una variante a piacere del metodo di Newton che non richieda la conoscenza della derivata di f.
(5) mostrare che il metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = x^2 - 2x + 1$ produce una successione che converge linearmente allo zero $\alpha = 1$ per ogni scelta di $x^{(0)} \in \mathbb{R}$. L'ordine di convergenza rispetta quello indicato nella tesi del Teorema di convergenza al punto (3)? Perché?

Problema 3.

(1) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli,
(2) Enunciare la definizione di matrice in forma a gradini,
(3) siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ \beta \\ 5 \end{bmatrix};$$

determinare i valori di α e β per i quali il sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$:
   (a) non ammette alcuna soluzione,
   (b) ammette unica soluzione,
   (c) ammette infinite soluzioni;
(4) per i valori di α e β ottenuti al punto (2)-(c), determinare:
   (a) una base per $\mathrm{Im}(A)$,
   (b) una base per $\mathrm{Ker}(A)$,
   (c) il rango di A;
(5) Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se il nucleo di A è ridotto al solo vettore nullo, diciamo che A ha *nucleo banale*. Giustificare (se vera) o confutare (se falsa) ciascuna delle seguenti affermazioni:
   (a) Se $n > m$, A ha nucleo non-banale;
   (b) Se $m > n$, A ha nucleo banale.

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

problema 1	
problema 2	
problema 3	
totale	

Calcolo Numerico

PRIMA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

16 novembre 2018

Problema 1.

Considerato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F} := \mathbb{F}(2, 64, -16383, 16384)$, determinare:

(1) il più piccolo numero reale positivo *normale* in $\mathbb{F}$;
(2) il più piccolo numero reale positivo *denormale* in $\mathbb{F}$;
(3) la distanza tra numeri di macchina *normali* consecutivi;
(4) la distanza tra numeri di macchina *denormali* consecutivi;
(5) il massimo errore relativo commesso nell'arrotondamento "round to nearest, ties to even"

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{fl}(x) \in \mathbb{F}$$

in assenza di underflow/overflow [giustificare la risposta];
(6) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 1000$;
(7) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 1 + 2^{-64}$;
(8) il numero minimo di bit di cui deve essere formata una stringa per rappresentare tutti i numeri in $\mathbb{F}$;

Problema 2.

(1) Descrivere il metodo delle successive bisezioni, specificando sotto quali ipotesi ne è garantita la convergenza e indicandone almeno 2 possibili criteri di arresto;
(2) sia f una funzione che verifica le ipotesi di convergenza del metodo delle successive bisezioni nell'intervallo $I = [-8, 8]$. Determinare il minimo numero di passi sufficiente ad ottenere un'approssimazione di uno zero $\alpha \in I$ di f con un errore assoluto inferiore a 10^{-6} [dimostrare la validità di qualsiasi formula utilizzata];
(3) descrivere il metodo *regula falsi*;
(BONUS) di seguito sono mostrate le prime 4 iterazioni prodotte da tre differenti metodi per il calcolo degli zeri di funzione; solo in un caso si è utilizzato il metodo delle successive bisezioni; quale? [giustificare la risposta]

`metodo 1`	`metodo 2`	`metodo 3`
1.525000	1.525000	1.525000
1.437500	1.459800	1.508718
1.393750	1.433620	1.494907
1.415625	1.422571	1.483169
⋮	⋮	⋮

Problema 3.

(1) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli,
(2) siano

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ \beta \\ 13 \end{bmatrix};$$

determinare i valori di α e β per i quali il sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$:
 (a) non ammette alcuna soluzione,
 (b) ammette unica soluzione,
 (c) ammette infinite soluzioni;
(3) per i valori di α e β ottenuti al punto (2)-(c), determinare:
 (a) tutte le soluzioni del sistema lineare,
 (b) una base per $\mathrm{Im}(A)$,
 (c) una base per $\mathrm{Ker}(A)$,
 (d) il rango di A;
(4) A ha 3 righe ed $n > 3$ colonne, A ha rango massimo, ed inoltre l'insieme delle soluzioni del sistema $A\mathrm{x} = 0$ è uno spazio vettoriale di dimensione 7; Quante colonne ha A? Giustificare la risposta.

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico

PRIMA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

13 novembre 2017

Problema 1.
Considerato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F} := \mathbb{F}(2, 14, -255, 256)$, determinare:

(1) il più piccolo numero reale positivo *normale* in $\mathbb{F}$;
(2) il più piccolo numero reale positivo *denormale* in $\mathbb{F}$;
(3) il più grande numero in $\mathbb{F}$;
(4) il massimo errore relativo commesso nell'arrotondamento "round to nearest, ties to even"

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{fl}(x) \in \mathbb{F}$$

in assenza di underflow/overflow [giustificare la risposta];
(5) il più grande intero positivo p per cui si ha $\mathrm{fl}(9 + 2^{-p}) > 9$;
(6) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 8$;
(7) il numero minimo di bit di cui deve essere formata una stringa per rappresentare tutti i numeri in $\mathbb{F}$;

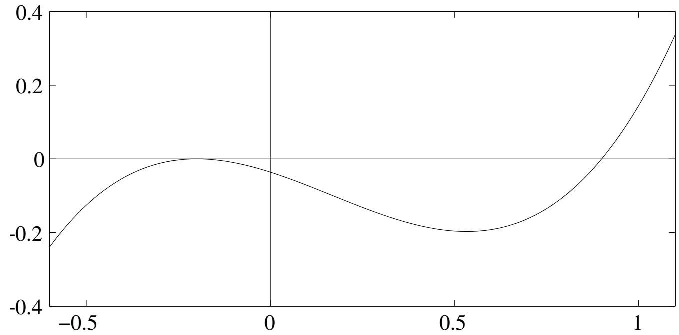
Uno tra i seguenti numeri non è un numero macchina in $\mathbb{F}$:

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad 3, \quad \frac{1}{3}.$$

Indicare qual è (giustificando la risposta) e scriverne l'arrotondamento in $\mathbb{F}$.

Problema 2.

(1) Descrivere il metodo delle successive bisezioni, specificando le ipotesi che ne garantiscono la convergenza;
(2) enunciare la definizione di ordine di convergenza;
(3) descrivere il metodo di Newton ed enunciare il relativo Teorema di convergenza;
(4) sia f una funzione avente il grafico rappresentato in figura; valutare, basandosi solo sul grafico, l'applicabilità dei due metodi sopracitati al calcolo di ciascuno degli zeri $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ di f; specificare, laddove si ritenga che il metodo risulti convergente, l'ordine di convergenza atteso;



(5) descrivere una variante a piacere del metodo di Newton che non richieda la conoscenza della derivata di f.

Problema 3.

(1) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli,
(2) siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ \beta \\ 8 \end{bmatrix};$$

determinare i valori di α e β per i quali il sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$:
(a) non ammette alcuna soluzione,
(b) ammette unica soluzione,
(c) ammette infinite soluzioni;

(3) per i valori di α e β ottenuti al punto (2)-(c), determinare:
   (a) tutte le soluzioni del sistema lineare,
   (b) una base per $\mathrm{Im}(A)$,
   (c) una base per $\mathrm{Ker}(A)$,
   (d) il rango di A;

(4) sia A una matrice quadrata; giustificare o confutare la seguente affermazione: “se esiste un vettore b_1 per il quale il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$ non ammette soluzione, allora esiste un vettore b_2 per il quale $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ ammette infinite soluzioni”.

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico

PRIMA PROVA DI ESONERO

Corso di Laurea Triennale in Informatica

16 novembre 2016

Problema 1.

Considerato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F} := \mathbb{F}(2, 11, -15, 16)$, determinare:

(1) il più piccolo numero reale positivo *normale* in $\mathbb{F}$;
(2) il più grande numero in $\mathbb{F}$;
(3) il più piccolo numero reale positivo *denormale* in $\mathbb{F}$;
(4) il massimo errore relativo commesso nell'arrotondamento "round to nearest, ties to even"

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{fl}(x) \in \mathbb{F}$$

in assenza di underflow/overflow [se possibile, dimostrare la validità della formula utilizzata];
(5) il più piccolo intero positivo p per cui si ha $\mathrm{fl}(1 - 2^{-p}) = 1$;
(6) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 200$;
(7) il numero di bit da cui deve essere formata una stringa per rappresentare i numeri in $\mathbb{F}$.

Problema 2.

(1) Descrivere il metodo di Newton ed enunciare il relativo Teorema di convergenza;
(2) dimostrare il Teorema di convergenza del metodo di Newton;
(3) enunciare la definizione di ordine di convergenza di una successione;
(4) determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton a ciascuna delle soluzioni $\alpha = -1, 1$ dell'equazione

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0;$$

(5) fornire un esempio di equazione $f(x) = 0$ e soluzione α per i quali la convergenza del metodo di Newton risulti essere almeno cubica [giustificare la risposta];
(BONUS) descrivere in generale il metodo che si ottiene applicando il metodo di Newton alla funzione $(f(x))^{\frac{1}{2}}$ (si supponga $f(x) \geq 0$ in un intorno della soluzione) e determinarne l'ordine di convergenza nel caso del calcolo della soluzione $\alpha = -1$ dell'equazione al punto (4).

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

Calcolo Numerico
PRIMA PROVA DI ESONERO
Corso di Laurea Triennale in Informatica
20 novembre 2015

Problema 1.
Considerato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F} := \mathbb{F}(2, 27, -127, 128)$, determinare:
(1) il più piccolo numero reale positivo *normale* in $\mathbb{F}$;
(2) il più grande numero in $\mathbb{F}$;
(3) il più piccolo numero reale positivo *denormale* in $\mathbb{F}$;
(4) il massimo errore relativo commesso nell'arrotondamento "round to nearest, ties to even"

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{fl}(x) \in \mathbb{F}$$

in assenza di underflow/overflow [se possibile, dimostrare la validità della formula utilizzata];
(5) il più piccolo intero positivo p per cui si ha $\mathrm{fl}(1 + 2^{-p}) = 1$;
(6) l'insieme dei numeri reali x tali che $\mathrm{fl}(x) = 20$;
(7) da quanti bit deve essere formata una stringa per rappresentare i numeri in $\mathbb{F}$?

Problema 2.
(1) Descrivere il metodo delle successive bisezioni, specificando sotto quali ipotesi ne è garantita la convergenza;
(2) sia f una funzione che verifica le ipotesi di convergenza del metodo delle successive bisezioni nell'intervallo $I = [-1, 2]$. Determinare il minimo numero di passi sufficiente ad ottenere un'approssimazione di uno zero $\alpha \in I$ di f con un errore assoluto inferiore a 10^{-8} [dimostrare la validità di qualsiasi formula utilizzata];
(BONUS) di seguito sono mostrate le prime 4 iterazioni prodotte da tre differenti metodi per il calcolo degli zeri di funzione; solo in un caso si è utilizzato il metodo delle successive bisezioni; quale? [giustificare la risposta]

`metodo 1`	`metodo 2`	`metodo 3`
1.525000	1.525000	1.525000
1.437500	1.459800	1.508718
1.393750	1.433620	1.494907
1.415625	1.422571	1.483169
⋮	⋮	⋮

Problema 3.
Si considerino le iterazioni

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - c\Big(\big(x^{(k)}\big)^2 - 1\Big), \ k \geq 0.$$

(1) Per quali valori di c le iterazioni convergono a $\alpha = 1$ per $x^{(0)}$ sufficientemente vicino a α?
(2) c'è qualche valore di c per cui la convergenza è quadratica?