Affrontiamo prima il caso delle matrici <u>quadrate</u>, ovvero # incognite = # equazioni.

<u>ESEMPIO</u> Consideriamo

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \leftarrow Eq\,1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -6 & \leftarrow Eq\,2 \\ 4x_1 - 11x_2 - 13x_3 = -11 & \leftarrow Eq\,3 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di <u>eliminazione di Gauss</u>:

<u>PRIMO PASSO</u>: eliminiamo da Eq2 e Eq3 la variabile x_1 aggiungendo a Eq2 e Eq3 un multiplo di Eq1.

$$\begin{array}{l} Eq\,1 \\ Eq\,2 + Eq\,1 \\ Eq\,3 + 4Eq\,1 \end{array} : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$$

<u>SECONDO PASSO</u>: eliminiamo da Eq3 la variabile x_2 aggiungendo a Eq3 un multiplo di Eq2.

$$\begin{array}{l} Eq\,1 \\ Eq\,2 \\ Eq\,3 + 3Eq\,2 \end{array} : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -3x_3 = 6 \end{cases}$$

Adesso posso risolvere per SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO:

$$\begin{matrix} Eq1 \\ Eq2 \\ Eq3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = -5 + 2x_2 + x_3 = -5 + 6 - 2 = -1 \\ x_2 = -1 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Soluzione: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Algoritmo nel caso generale di n Eq.ni in n incognite:

- per $k = 1, 2, \dots, n-1$

  Eliminare da Eq $k+1$, Eq $k+2$, ..., Eq n l'incognita x_k sommando a ciascuna di queste eq.ni un multiplo di Eq k, se possibile.

  fine

Qui non è possibile:
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

- risoluzione all'indietro Eq $n \rightarrow \dots \rightarrow$ Eq $2 \rightarrow$ Eq 1

REINTERPRETIAMO le operazioni dell'esempio precedente come operazioni elementari sulle

Ngle di A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -11 & -13 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} R_1 \\ R_2+R_1 \\ R_3+4R_1 \end{matrix} : \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3+3R_2 \end{matrix} : \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} =: U$$

REINTERPRETIAMO le operazioni elementari come premoltiplicazione per opportune matrici :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -11 & -13 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

dove $A^{(0)} = A$ e $U := A^{(2)}$.

Algebricamente:

$$M_2 M_1 A = U$$

OSSERVAZIONI:

① $\det(M_1) = \det(M_2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1, M_2$ invertibili

② $M_2 M_1 A = U \iff M_1 A = M_2^{-1} U \iff$

$\iff A = M_1^{-1} M_2^{-1} U$

③ ottenere M_1^{-1} e M_2^{-1} è banale. Infatti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

e dunque $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Analogamente

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) anche moltiplicare M_1^{-1} per M_2^{-1} è banale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto visto nei punti (3) e (4) non accade per caso, ma lo chiariremo più avanti.

In conclusione abbiamo ottenuto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -11 & -13 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1^{-1} M_2^{-1} =: L} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{U}$$

$A = LU$ è detta "fattorizzazione LU" di A.

Notiamo che

- L è triang. inf. con elem. diag. uguali a 1 e riflette la storia di tutte le oper. elementari fatte sulle righe di A per ottenere U
- U è una forma a gradini di A

DEFINIZIONE $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta triangolare inferiore *speciale* se:

$$(L)_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i < j$$

$$(L)_{ij} = 1 \quad \text{per} \quad i = j$$

Visivamente: $L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \times & \cdots & \times & 1 \end{bmatrix}$

Quindi una fattorizzazione LU apparirà come segue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \times & \cdots & \times & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ & \times & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{bmatrix}}_{U}$$

triang. inf. speciale

"lower"

triang. sup.

"upper"

TEOREMA (di chiusura)

(1) il prodotto fra matrici triang. sup. (risp. inf.) è triang. sup. (risp. inf.);

(2) l'inversa di una matrice triang. sup. (risp. inf.) invertibile è triang. sup. (risp. inf.);

(3) i punti (1) e (2) restano veri se aggiungiamo ovunque la parola "speciale".

RICHIAMO Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si dice minore principale d'ordine $k = 1, 2, \dots, n$ il determinante della sottomatrice principale di testa di ordine k di A.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 11 & -7 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

minore d'ordine 1 : -1

minore d'ordine 2 : -20

minore d'ordine 3 : $\det(A) =$

$= 33 - 21 - 45 - (-33 - 27 + 35) =$

$= -33 - (-6) = -27$

Le matrici M_1 e M_2 dell'esempio precedente sono un caso speciale di "matrici elementari di Gauss".

DEFINIZIONE $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta elementare di Gauss se:

(1) è triangolare inferiore speciale

(2) differisce dall'identità lungo al più una colonna:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \times & \ddots & \\ & & | & & \\ & & \times & & 1 \end{bmatrix}.$$

colonna k

Formalmente: M_k triang. inf. speciale e $\exists\, k$ t.c.

$$(M_k)_{ij} = 0 \quad \text{se } j \neq k \text{ e } i > j$$

TEOREMA ① Sia M_k elem. di Gauss.

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & | & & \\ & & m_{n,k} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Allora
$$M_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -m_{n,k} & & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Siano M_k, M_h elem. di Gauss, con $k<h$:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & m_{n,k} & & 1 \end{bmatrix}, \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{h+1,h} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & m_{n,h} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Allora
$$M_k M_h = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & \vdots & 1 & & \\ & & \vdots & m_{h+1,h} & \ddots & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & m_{n,k} & m_{n,h} & & 1 \end{bmatrix}$$

prodotto "per sovrapposizione" delle porzione sotto la diagonale

La proprietà (2) resta vera anche per il prodotto di più di due matrici elim. di Gauss, nel caso $M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_p}$ con $k_1 < k_2 < \dots < k_p$.

(Bisogna rispettare l'ordine delle colonne!)

TEOREMA (Esistenza della fattorizzazione LU)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avente i minori principali d'ordine $1, 2, \dots, n-1$ non nulli. Allora esistono $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, L triang. inf. speciale e U triang. sup., tali che

$$A = LU.$$

Visivamente