Sotto ipotesi aggiuntive possiamo ottenere più informazioni:

<u>Teorema</u> Sia $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $g([a,b]) \subset [a,b]$. Supponiamo esista $0 < \lambda < 1$ t.c.

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda \, |x - y| \quad , \forall x, y \in [a,b] ,$$

(nel qual caso g è detta "contrattiva" in $[a,b]$ e λ è detta "costante di contrazione").

Allora:

(1) $\exists !\ \alpha \in [a,b]$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$

(2) $\forall\, x^{(0)} \in [a,b]$, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \alpha$.

(3) $\forall\, k \geq 0$: $|x^{(k)} - \alpha| \leq \dfrac{\lambda^k}{1-\lambda} |x^{(1)} - x^{(0)}|$.

<u>Dim</u> (cenni)

(1) L'esistenza è conseguenza del Teorema precedente.
L'unicità si dimostra per assurdo:
se esistessero $\alpha \neq \beta$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$ e $g(\beta) = \beta$,

allora

$$0 < |\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \le \lambda\, |\alpha - \beta| < |\alpha - \beta| ,$$

assurdo.

(2) Ricordando che $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ e $\alpha = g(\alpha)$:

$$0 \le |x^{(k+1)} - \alpha| = |g(x^{(k)}) - g(\alpha)| \le$$

$$\le \lambda\, |x^{(k)} - \alpha| \le \ \dots \le \lambda^{k+1} |x^{(0)} - \alpha| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

(3) $$|x^{(0)} - \alpha| = |x^{(0)} \pm x^{(1)} - \alpha| \le$$

aggiungo e sottraggo

disug. triangolare

$$\le |x^{(0)} - x^{(1)}| + |x^{(1)} - \alpha| \le$$

disug. al punto (2)

$$\le |x^{(1)} - x^{(0)}| + \lambda\, |x^{(0)} - \alpha| .$$

Ridistribuendo gli addendi :

$$(1-\lambda)\, |x^{(0)} - \alpha| \le |x^{(1)} - x^{(0)}| \iff$$

poiché $1-\lambda > 0$

$$|x^{(0)} - \alpha| < \frac{1}{1-\lambda} |x^{(1)} - x^{(0)}| .$$

Sfruttando ancora la disug. in (2):

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq \lambda^k |x^{(0)} - \alpha| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} |x^{(1)} - x^{(0)}|. \quad \square$$

Osservazioni

il punto (3) è una stima del errore assoluto

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} |x^{(1)} - x^{(0)}| ;$$

per $k=1$, diventa

$$|x^{(1)} - \alpha| < \frac{\lambda}{1-\lambda} |x^{(1)} - x^{(0)}| .$$

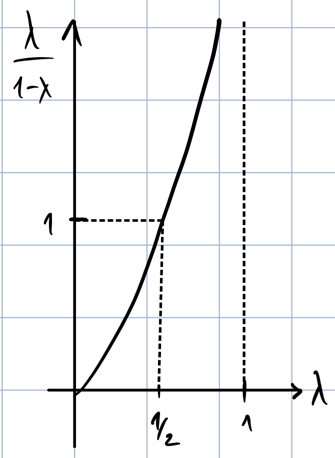
Dato che $x^{(1)}$ sta a $x^{(0)}$ come $x^{(k+1)}$ sta a $x^{(k)}$, possiamo scrivere:

$$|x^{(k+1)} - \alpha| < \frac{\lambda}{1-\lambda} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|, \quad \forall k \geq 1 .$$

errore al passo corrente

Questa è una stima utile nella pratica.

Notiamo che



- $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} \le 1$ se $\lambda \in [0, 1/2]$
- $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} > 1$ se $\lambda > 1/2$

Conclusione: se $0 \le \lambda \le 1/2$, allora

$$|x^{(k+1)} - \alpha| < |x^{(k+1)} - x^{(k)}|, \text{ ovvero}$$

la distanza tra passi consecutivi sovrastima l'errore assoluto.

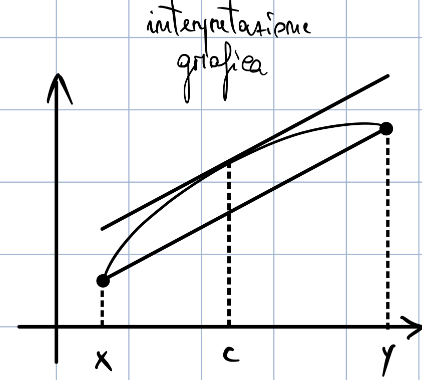
Se, invece, $\lambda > 1/2$, allora la distanza tra passi consecutivi può sottostimare l'errore assoluto.

L'ultimo Teorema garantisce la convergenza, ma sotto ipotesi difficili da verificare.

Richiamiamo il Teorema di Lagrange:

Sia $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$. Allora per ogni $x, y \in [a,b]$ $\exists$ c compreso tra x e y t.c.

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(c)$$



Grazie al Teorema di Lagrange possiamo ricondurre parte delle ipotesi del Teorema a pagina 1 a proprietà della derivata prima di g.

Teorema Se $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile con derivata continua, e $g([a,b]) \subset [a,b]$. Supponiamo inoltre che

$$\lambda := \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1 .$$

Allora vale la Tesi del Teorema a pag. 1, e inoltre

$$\frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} \xrightarrow[k \to +\infty]{} g'(\alpha) .$$

Dimostrazione: Per ogni x, y in $[a,b]$, come conseguenza del Teo. di Lagrange, si ha che

$$|g(x)-g(y)| = |g'(\underset{c \text{ tra } a \text{ e } b}{c})|\,|x-y| \leq \lambda\,|x-y|,$$

con $\lambda < 1$ per ipotesi. Dunque g è contrattiva in $[a,b]$ e segue la tesi. Inoltre, sempre per il Teorema di Lagrange, si ha:

$$x^{(k+1)} - \alpha = g(x^{(k)}) - g(\alpha) = g'(c^{(k)})(x^{(k)}-\alpha),$$

da cui, per $k \to +\infty$, considerando che $c^{(k)} \to \alpha$, segue

$$\frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} \xrightarrow[k \to +\infty]{} g'(\alpha). \qquad \square$$

<u>Corollario</u>: Nelle ipotesi del Teorema alla pagina precedente,

se $g'(\alpha) \neq 0$, allora $x^{(k)} \to \alpha$ linearmente.

Se, invece $g'(\alpha) = 0$, allora $x^{(k)} \to \alpha$ in modo superlineare.

Le ipotesi del Teorema precedente restano difficili da verificare. Si possono modificare come segue.

Teorema. Sia $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Sia α punto fisso per g in $[a,b]$ e si supponga che $|g'(\alpha)| < 1$. Allora $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \longrightarrow \alpha$ per $x^{(0)}$ suff.te vicino a α.

Dim. Se $|g'(\alpha)| < 1$, allora $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.
permanenza del segno

$$|g'(x)| \leq \lambda < 1 \quad \forall\, x \in I = [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon].$$

Resta da dimostrare che g manda I in se stesso. Sia $y \in g(I)$. Allora $\exists\, x \in I$ t.c. $g(x) = y$, e si ha:

$$|y-\alpha| = |g(x)-g(\alpha)| \overset{\text{Teo. di Lagrange}}{\leq} \lambda |x-\alpha| < |x-\alpha| \leq \varepsilon,$$

e dunque $y \in I$. Ne segue che $g(I) \subset I$ e vale la Tesi del Teorema precedente (pag. 5) per $x^{(0)}$ in I ("suff. vicino"). $\square$

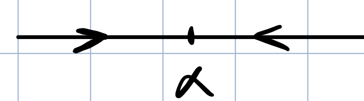
Osservazioni

Se $|g'(\alpha)| < 1$, allora α "attrae" i punti $x^{(0)}$ a lui suff. vicini. Al contrario, se $|g'(\alpha)| > 1$, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ <u>non può</u> convergere a α poiché per k suff. grande si avrebbe

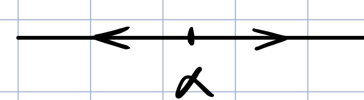
$$|x^{(k+1)} - \alpha| \simeq |g'(\alpha)| \, |x^{(k)} - \alpha| > |x^{(k)} - \alpha| ,$$

cioè α "respingerebbe" i punti a lui suff. vicini. Ciò giustifica la seguente nomenclatura:

$|g'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ p.to fisso attrattivo

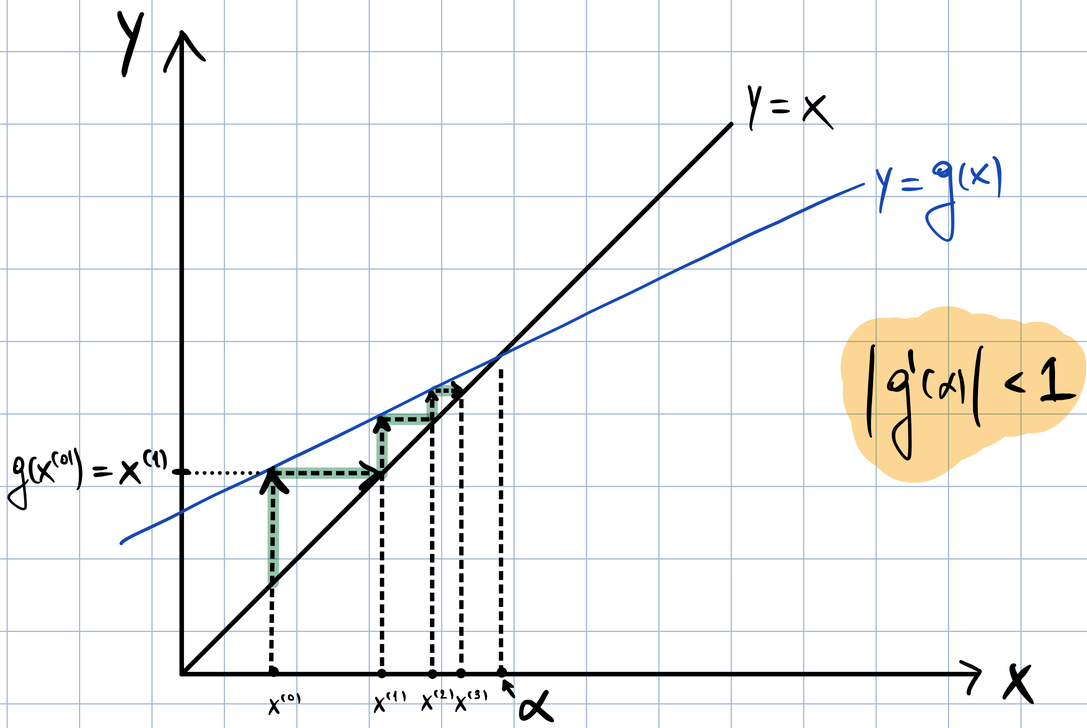


$|g'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ p.to fisso repulsivo

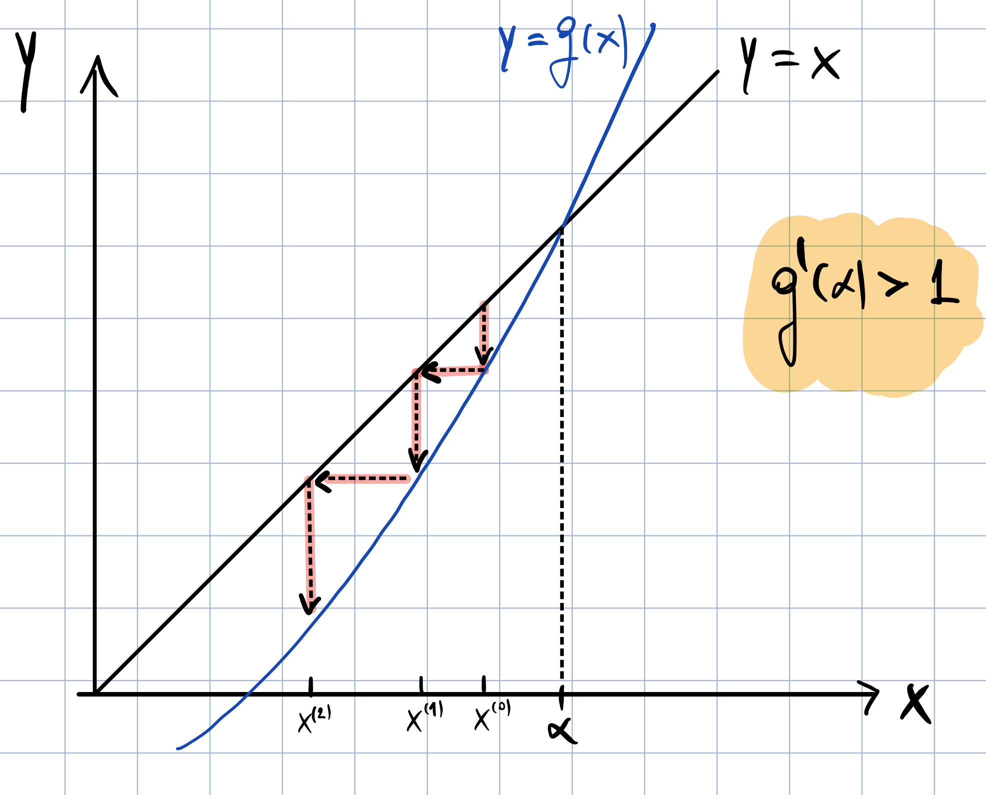


N.B. $|g'(\alpha)| = 1$ indecidibile.

Graficamente (solo il caso $g'(\alpha) > 0$)



y
y = x
y = g(x)
|g'(α)| < 1
g(x^(0)) = x^(1)
x^(0)
x^(1)
x^(2)
x^(3)
α
x



y
y = g(x)
y = x
g'(α) > 1
x^(2)
x^(1)
x^(0)
α
x

Vediamo un ultimo Teorema che offre condizioni sufficienti a garantire un certo ordine di convergenza.

Teorema (O.d.C. delle succ.ni definite per ricorrenza). Se g derivabile $p \geq 2$ volte in un intorno di α punto fisso per g. Se $g'(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$

e $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, allora, per $x^{(0)}$ suff. vicino a α, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \alpha$ con O.d.C. p.

Dimostrazione

Taylor centrato in α e valutato in $x^{(k)}$:

$$\underbrace{g(x^{(k)})}_{x^{(k+1)}} = \underbrace{g(\alpha)}_{\alpha} + \cancelto{0}{g'(\alpha)}(x^{(k)}-\alpha) + \ldots + \cancelto{0}{\frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}}(x^{(k)}-\alpha)^{p-1} +$$

$$+ \frac{g^{(p)}(c^{(k)})}{p!}(x^{(k)}-\alpha)^p,$$ con $c^{(k)}$ tra $x^{(k)}$ e α.

Quindi:

$$x^{(k+1)} - \alpha = \frac{g^{(p)}(c^{(k)})}{p!}(x^{(k)}-\alpha)^p \; .$$

Per ipotesi, $|g'(\alpha)| = 0 < 1$. Quindi, dal Teorema precedente, $x^{(k)} \longrightarrow \alpha$ per $x^{(0)}$ suff. vicino a α, e anche $c^{(k)} \longrightarrow \alpha$.

Perciò

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \longrightarrow \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

Ne segue che $x^{(k)} \longrightarrow \alpha$ con O.d.c. p.

$\square$

Osservazione:

Sia $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) \neq 0$.

Allora $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \longrightarrow \alpha$ con O.d.c. 2.

Esercizio: Applicare il Teorema precedente al metodo di Newton per ottenere il relativo Teorema di convergenza.

Osservazione: L'ordine di conv. dei metodi iterativi ad un passo è sempre un intero.

Esempio: se $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$, il metodo di Newton ha ordine di convergenza (almeno) 3.

Osservazione: secanti ha O.d.c. ≈ 1.6.

È possibile passare a due passi:

$$x^{(K+2)} = g\left(x^{(K)}, x^{(K+1)}\right).$$

Esercizi

(1) Studiare l'O.d.c. del metodo di Newton applicato a $f(x) = \mathrm{Tg}\, x$ e $\alpha = 0$.

(Basta considerare $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ e cercare il più piccolo $p \geq 2$ t.c. $g^{(p-1)}(0) = 0$ ma $g^{(p)}(0) \neq 0$)

Esercizio: determinare le condizioni per la convergenza del metodo delle corde. Qual è l'ordine di convergenza atteso? Sotto quali ipotesi la convergenza è quadratica?

Esercizio: determinare l'o.d.c. attesa per il metodo quasi-Newton. Come mai sperimentalmente il metodo esibisce una progressione dell'errore compatibile con un metodo d'ordine 2?