Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Allora possiamo considerare il sistema di equazioni lineari (anche detto "sistema lineare") espresso dalla relazione matriciale:

$$Ax = b,$$

costituito da m equazioni in n incognite.

DEFINIZIONE: La matrice $\underbrace{[A, b]}_{\text{"a blocchi"}} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$

è detta <u>matrice completa</u> del sistema lineare.

DEFINIZIONE: L'insieme

$$\underbrace{Ker}_{\text{"Kernel"}}(A) := \{ v \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Av = \underset{\text{vettore in } \mathbb{R}^m}{0} \}$$ è

detto <u>nucleo</u> di A.

OSSERVAZIONI

1) $0 \in Ker(A)$ (il vettore nullo appartiene sempre al nucleo)

2) $Ker(A) \subset \mathbb{R}^n$, sottoinsieme.

TEOREMA $Ker(A)$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

1) $v, w \in Ker(A) \overset{def.}{\iff} Av = 0$ e $Aw = 0$.

$$A(v+w) = Av + Aw = 0 + 0 = 0 \implies$$

$$\implies v+w \in Ker(A)$$

2) $v \in Ker(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha 0 = 0$$

"gli scalari li sposto dove voglio"

$\square$

DEFINIZIONE.
L'insieme

$$Im(A) := \{ y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } y = Ax \}$$

è detto <u>immagine</u> di A.

OSSERVAZIONI

1) $0 \in Im(A)$

2) $Im(A) \subset \mathbb{R}^m$, sottoinsieme

TEOREMA: $Im(A)$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione: per esercizio.

OSSERVAZIONI

1) $Im(A) = \{ b \in \mathbb{R}^m$ t.c. $Ax = b$ ammette soluzione $\}$

Dunque

$$Ax = b \text{ ammette soluzione } \overset{\text{"se e solo se"}}{\iff} b \in Im(A)$$

2) siano $b \in Im(A)$ e $v \in Ker(A)$, $v \neq 0$.

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax = b$. Consideriamo $x + v$:

$$A(x+v) = Ax + Av = b + 0 = b \implies$$

$x + v$ risolve il sistema lineare $Ax = b$!

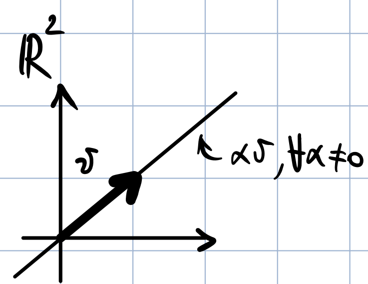
DEFINIZIONE: A ha "nucleo banale" se $Ker(A) = \{0\}$.

Allora, dato $b \in Im(A)$,

$Ax = b$ ammette unica soluzione se e solo se A ha nucleo banale!

Nucleo non banale $\Longleftrightarrow$ "molteplici soluzioni"

Richiamo



Un sottospazio non banale ha ∞ elementi!

Quindi, se $b \in Im(A)$ e $Ker(A)$ non è banale, $Ax = b$ ammette infinite soluzioni!

3) $Im(A) = \{$Tutti i vettori del tipo $\underbrace{Ax}_{\text{combinazione lin. colonne di } A}$, con $x \in \mathbb{R}^n\} =$

$= \{$Tutte le possibili combinazioni lineari di colonne di $A\}$

DEFINIZIONE

Data $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si definisce rango di A il seguente numero intero:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big)$$

OSSERVAZIONI :

(1) Essendo $\mathrm{Im}(A) = \{\text{tutte le comb. lin. di colonne di } A\}$, si ha che $\mathrm{rank}(A) \leq n$

(2) $\mathrm{Im}(A)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^m \Rightarrow$

$$\mathrm{rank}(A) \leq m$$

Ne deduciamo il

TEOREMA : Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, allora

$$\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

NUCLEO, RANGO E OPERAZIONI ELEMENTARI

TEOREMA Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile.

Allora $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(BA)$

Ovvero, "il nucleo è invariante rispetto a premoltiplicazione per matrici invertibili".

Dim.

$$v \in \operatorname{Ker}(A) \overset{\text{def}}{\iff} Av = 0 \overset{\text{poichè } B \text{ è invertibile}}{\iff} BAv \overset{\text{def.}}{=} 0 \iff$$

$$\iff v \in \operatorname{Ker}(BA) \quad \blacksquare$$

Ora, siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile.

Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ base per $\operatorname{Im}(A)$.

Osserviamo che

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{insieme di tutte le combinazioni} \\ \text{lineari di } v_1, v_2, \dots, v_r \end{array} \right\}$$

Ovvero

$y \in \mathrm{Im}(A) \iff$ posso scrivere in modo unico

$$y = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k$$

Premoltiplicando per B, deduco che ogni elemento di $\mathrm{Im}(BA)$ si può scrivere in modo unico come

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k B v_k$$

Quindi $\{Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_r\}$ è base per $\mathrm{Im}(BA)$.

Conseguenza importante:

<u>TEOREMA</u> Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile, allora $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA)$.

<u>Dim.</u> Conseguenza del fatto che matrici

invertibili "mandano basi in basi" $\square$

Ovvero, "il rango è invariante rispetto a premoltiplicazione per matrici invertibili".

ESEMPI DI MATRICI B E OPERAZIONI AD ESSE COLLEGATE

(1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- abbiamo sommato alla prima riga di A la seconda riga di A
- $\det(B) = 1 \Rightarrow B$ è invertibile
- posso generalizzare a righe arbitrarie di A di dimensione dimensione arbitraria

(2)

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- abbiamo moltiplicato per 2 la seconda riga di A
- $\det(B) = 2 \Rightarrow B$ è invertibile
- posso generalizzare a moltiplicazione per uno scalare $\alpha \neq 0$ arbitrario di una riga arbitraria di A di dimensione arbitraria

(3)

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}^{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- abbiamo scambiato le prime righe di A

con la seconda riga di A

- $\det(B) = -1$ (si ottiene da I scambiando le prime due righe)

  dunque B è invertibile

- posso generalizzare allo scambio di righe arbitrarie di A di dimensione arbitraria

Notiamo che, unendo (1) e (2), otteniamo l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.

DEFINIZIONE: "sommare a una riga un multiplo di un'altra riga" e "scambiare due righe tra di loro" sono dette operazioni elementari (tra righe).

TEOREMA Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le operazioni elementari tra righe di A conservano nucleo e rango!

ESEMPIO

righe di A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & R_1 & - \\ - & R_2 & - \\ - & R_3 & - \end{bmatrix}$$

li voglio annullare

Vogliamo determinare $\operatorname{rank}(A)$.

Idea: semplifichiamo A mediante operazioni elementari

1

$$\begin{aligned} R_1 &\to R_1 \\ R_2 + 3R_1 &\to R_2 \\ R_3 - 2R_1 &\to R_3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

lo voglio annullare

...

2

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1 \\ R_2 \to R_2 \\ R_3 - R_2 \to R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mediante operazioni elementari abbiamo trasformato A in

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si ha $\text{rank}(A) = \text{rank}(U)$, ma U ha una struttura detta "a gradini", che ne rivela facilmente il rango.

gradini

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ogni colonna corrispondente ad un gradino è lin. indipendente dalle precedenti!

Tre gradini $\Longrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = 3$.