Più in generale:

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile.

per $k = 1, 2, \dots, n-1$

- determino $E_k$ di scambio t.c.

$$(E_k A)_{kk} \geq (E_k A)_{ik}, \quad \forall i \geq k+1$$

- $A \leftarrow E_k A$

- determino $M_k$ elementare t.c.

$$(M_k A)_{ik} = 0, \quad \forall i \geq k+1$$

- $A \leftarrow M_k A$

fine

**Nota** L'esistenza di un pivot non nullo ad ogni passo è conseguenza dell'invertibilità di A.

Algebricamente:

$$M_{n-1} E_{n-1} \cdots M_2 E_2 M_1 E_1 A = U,$$

↑ triang. sup.

ovvero, equivalentemente:

$$\underbrace{M_{n-1}E_{n-1}}_{=:R} \cdots M_2E_2M_1\underbrace{E_2^T \cdots E_{n-1}^T E_{n-1}}_{I} \cdots \underbrace{E_2E_1}_{=:P} A = U$$

Si può dimostrare che $R$ è triang. inf. speciale e invertibile. Posto $L = R^{-1}$, si ha:

$$PA = LU$$

← fatt. LU con pivoting parziale di $A$

Si può verificare che, per ottenere $L$ in questo caso, è sufficiente scambiare ad ogni passo i moltiplicatori già creati in accordo con gli scambi di righe effettuati su $A$.

## ESEMPIO

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determinarne la fattorizzazione

$PA = LU$.

Inizializziamo un vettore $p \in \mathbb{R}^4$ e la matrice $L$:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ -1/4 & -1/2 & 1 & \\ 1/2 & -1/4 & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 1/2 & -1/4 & 1 & \\ -1/4 & -1/2 & -8/11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 2 & -3/4 & -13/4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & -1 & -9/2 \\ 0 & 0 & 11/8 & 15/8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 11/8 & 15/8 \\ 0 & 0 & -1 & -9/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 11/8 & 15/8 \\ 0 & 0 & 0 & -69/22 \end{bmatrix}$$

<u>Nota</u>: al passo 2 non è stato necessario alcuno scambio ($E_2 = I$).

Dunque si ha:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 1/2 & -1/4 & 1 & \\ -1/4 & -1/2 & -8/11 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 11/8 & 15/8 \\ 0 & 0 & 0 & -69/22 \end{bmatrix}$$

Per esercizio, verificare che $PA = LU$.

RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI:

Risolvere $Ax = b$ data $PA = LU$.

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff L\underbrace{Ux}_{:=y} = Pb \iff$$

$$\iff \begin{cases} Ly = Pb & \leftarrow \text{sost. in avanti} \\ Ux = y & \leftarrow \text{sost. all'indietro} \end{cases}$$

CALCOLO DEL DETERMINANTE:

$$PA = LU \implies \det(P)\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1}\det(U)$$

Da cui $\det(A) = \dfrac{\det(U)}{\det(P)}$, dove

$$\det(P) = (-1)^{\#\text{ di scambi effettuati}}$$

ESEMPIO PRECEDENTE:

$$\det(P) = (-1)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = -20$$

COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE:

- calcolo della fattorizzazione $PA = LU$ $\quad \Theta(n^3)$
- risoluzione di $Ly = Pb$ in avanti $\quad \Theta(n^2)$
- risoluzione di $Ux = y$ all'indietro $\quad \Theta(n^2)$

Nota: il pivoting parziale aggiunge un sovraccosto quadratico ($\Theta(n^2)$ confronti in totale) ad un algoritmo cubico; esso ha, dunque, un impatto trascurabile per $n$ grande.

## OSSERVAZIONI

(1) l'algoritmo che consente di ottenere la fattorizzazione $PA = LU$ si applica anche a matrici $A$ rettangolari

(2) a seguito del pivoting si ha che

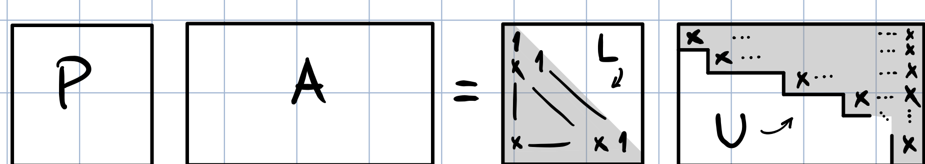
$$\boxed{m_{ik} = \frac{|a_{ik}^{(k-1)}|}{|a_{kk}^{(k-1)}|} \le 1}$$

moltiplicatori

**TEOREMA** Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Esistono $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ di permutazione, $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ triang. inf. speciale con $|L_{ij}| \le 1 \ \forall\, i > j$, $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a gradini tali che

$$PA = LU.$$

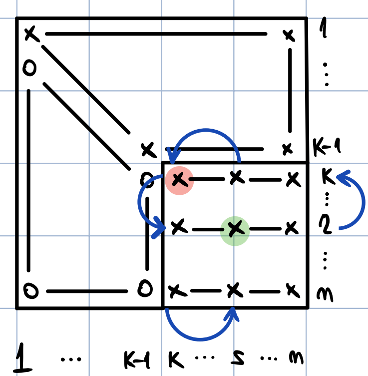
Visivamente:




Nota: $A$ quadrata e invertibile $\Rightarrow$ $U$ quadrata, triang. sup. con elementi diagonali invertibili

Esiste anche una strategia di pivoting detta <u>pivoting completo</u>, in cui al passo K si porta in posizione pivotale l'elemento più grande in valore assoluto del blocco $(n-K+1)\times(n-K+1)$ in basso a destra della matrice:

passo K:




L'elemento di posto $2s$ viene portato sulla diagonale mediante uno scambio di <u>riga e colonna</u>

Si ottengono pivot più grandi, e dunque moltiplicatori più piccoli, a vantaggio della stabilità numerica.

Però la complessità computazionale cresce in modo non più trascurabile ($\mathcal{O}(n^3)$ confronti in totale).

In generale si può dire che:

"il pivoting parziale introduce un miglioramento significativo a fronte di un sovraccosto modesto; il pivoting completo introduce un ulteriore modesto miglioramento a fronte di un sovraccarico significativo"

# IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Consideriamo un sistema lineare $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$, $x \in \mathbb{R}^{n}$. Sappiamo che

$Ax = b$ ammette soluzione $\iff b \in Im(A)$

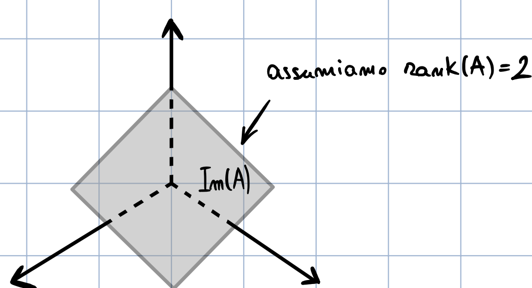
Cosa fare se $b \notin Im(A)$? È un caso molto importante nelle applicazioni, e ci attendiamo sia frequente se $A$ è skinny ($m > n$).

**ESEMPIO**

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$; sappiamo che

- $rank(A) = dim(Im(A)) \leq 2$
- $Im(A)$ sottospazio vett. di $\mathbb{R}^{3}$

Dunque




È molto probabile che $b \notin Im(A)$.

Cercheremo di dare un senso a "risolvere

il sistema $Ax = b$" anche in questo caso.
Prima ci occorrono degli strumenti.

## NORME VETTORIALI

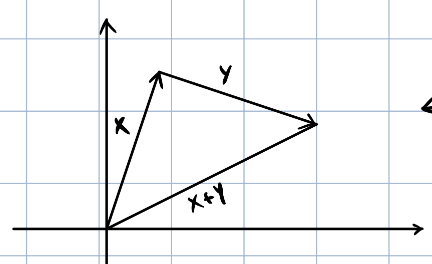
**DEFINIZIONE** Si dice "norma vettoriale" un'applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

(1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ; $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ← vettore nullo

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ← disug. triangolare

Idea: $\|x\|$ = "grandezza di $x$"; potrebbe essere la lunghezza.




← disug. triangolare: in un triangolo, la lunghezza di un lato non può superare la somma delle lunghezze degli altri due

**ESEMPI** Sia $x \in \mathbb{R}^n$; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$ norma euclidea (o norma 2)

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{norma } 1$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,n} |x_k| \quad \text{norma infinito}$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{norma } p$$

**TEOREMA** : $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$

**OSSERVAZIONE**

$x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ :

$$x^T x = [x_1 \; x_2 \; \cdots x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^T x = \|x\|_2^2$$

FATTO IMPORTANTE : ogni norma induce un concetto di distanza tra vettori di $\mathbb{R}^n$ :

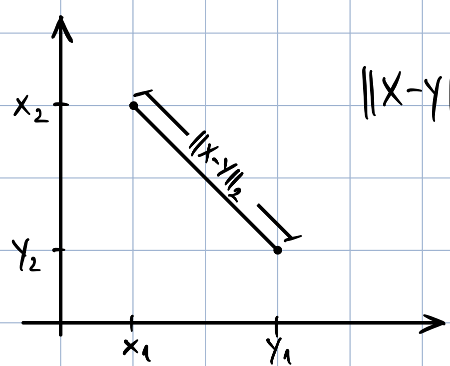
$$\operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

distanza di $x$ da $y$

( (giustificato dalla regola del parallelogramma)

<u>Esempio</u>: per $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$,

$\|X-Y\|_2$ è la distanza tra i punti di coordinate $(x_1, x_2)$ e $(y_1, y_2)$ ottenuta attraverso il teorema di Pitagora.




$$\|X-Y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$