Richiamo:

TEOREMA (Esistenza della fattorizzazione LU)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avente i minori principali d'ordine $1, 2, \dots, n-1$ non nulli. Allora esistono $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con L triang. inf. speciale e U triang. sup., tali che

$$A = LU.$$

Dimostrazione / Algoritmo

Poniamo $A^{(0)} := A$.

Passo ①: cerco $M_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elementare t.c.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ | & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & — & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & — & a_{2n}^{(0)} \\ | & | & & | \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & — & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}}_{A^{(0)} := A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & — & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & — & a_{2n}^{(1)} \\ | & | & & | \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & — & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

da scegliere in modo da annullare questi elementi

Dunque:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad , \forall j = 1,2,\dots,n \qquad e$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(0)} \quad , \forall i = 2,3,\dots,n \quad \forall j = 1,2,\dots,n$$

Dobbiamo sceglier m_{i1} t.c., per $i \geq 2$:

$$a_{i1}^{(1)} = 0 \iff a_{i1}^{(0)} - m_{i1} a_{11}^{(0)} = 0 \iff$$

$$\iff m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad , i = 2,3,\dots,n.$$

minore princ. d'ordine 1, non nullo per ipotesi

In generale, al passo $k = 1, 2, \dots, n-1$ si costruisce M_k elementare t.c.

$$M_k A^{(k-1)} = A^{(k)} \quad , \text{dove}$$

$$a_{ik}^{(k)} = 0 \quad \text{per } i = k+1,\dots,n$$

k-esima colonna sotto la diagonale

N.B. gli elementi sotto la diagonale lungo le colonne precedenti sono già stati annullati

Facendo i calcoli, si ottiene:

- $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $\forall j = 1, 2, \dots, n$;
- $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k-1)}$, $i = k+1, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$

elementi "non banali" di M_k

(In particolare: $a_{ij}^{(k)} = 0$ per $i > j$ e $j = 1, \dots, k-1$)

Dalla condizione $a_{ik}^{(k)} = 0$, $i = k+1, \dots, n$

otteniamo $a_{ik}^{(k-1)} - m_{ik}\, a_{kk}^{(k-1)} = 0 \iff$

$$\iff \boxed{m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}}$$

dove $a_{kk}^{(k-1)}$ è diverso da zero per ipotesi (poiché si può dimostrare che $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ se e solo se il minore princ. d'ordine k di A è nullo)

Ciascuna matrice elem. M_k annulla gli elementi di $A^{(k-1)}$ lungo la colonna k sotto la diagonale, senza alterare gli elementi già annullati da $M_1, \dots, M_{k-1}$. Dunque:

$$M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A =: U \quad \underline{\text{triang. sup}}$$

Premolt. per $M_{n-1}^{-1}, \dots, M_2^{-1}, M_1^{-1}$ si ha

$$A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}}_{:= L} U \quad \text{, dove}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

gli m_{ik} sono detti <u>moltiplicatori</u>:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} ,$$

$k = 1, \dots, n-1$:
pivot di U

Abbiamo dimostrato l'esistenza della fatt. LU (sotto opportune ipotesi). Domanda: unicità?

TEOREMA (unicità della fatt. LU)

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice che ammette una fattorizzazione LU. Se $\det(A) \neq 0$, la fattorizzazione è unica.

Dimostrazione: esercizio.

[Idea: supponiamo $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$; osservare che L_1, L_2, U_1, U_2 sono invertibili; premoltiplicare $L_1 U_1 = L_2 U_2$ per L_1^{-1} e postmoltiplicarla per U_2^{-1}; dedurre che $L_1^{-1} L_2 = U_1 U_2^{-1} = I$, da cui segue la tesi]

PSEUDOCODICE dell'Algoritmo

INPUT : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di elem. a_{ij}

per $k = 1, 2, \dots, n-1$

  verifico che $a_{kk} \neq 0$

  per $i = k+1, \dots, n$

    $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

    per $j = k+1, \dots, n$

      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$

    fine

  fine

fine

OUTPUT $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dove :

$$U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{per } i \leq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ m_{ij} & \text{per } i > j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESERCIZIO Calcolare la fattorizzazione LU di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & -15 \\ -2 & -3 & -21 & -4 \end{bmatrix}$$

Passo per passo, calcolo i moltiplicatori da inserire in L effettuo le operazioni elementari.

Passo 1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & -15 \\ -2 & -3 & -21 & -4 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -9 & -6 \\ 0 & -3 & -15 & -10 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

da annullare

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 3 & -2 & 1 & \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

passo 1: $\begin{cases} m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -1 \\ m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 3 \\ m_{41} = \dfrac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -2 \end{cases}$

passo 1   passo 2   passo 3

Passo 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -9 & -6 \\ 0 & -3 & -15 & -10 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

Passo 3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{(3)} =: U}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) \underset{A=LU}{=} \det(LU) \underset{\text{teorema di Binet}}{=} \det(L)\det(U) = \underset{\det(L)=1}{=} 1 \cdot \prod_{k=1}^{4} U_{kk} = 3$$

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LIN. $Ax=b$ MEDIANTE $A=LU$:

$$Ax=b \iff L\underbrace{Ux}_{y}=b \iff \begin{cases} Ly=b & \leftarrow \text{sostituzione in avanti } y_1, y_2, \dots, y_n \\ Ux=y & \leftarrow \text{sostituzione all'indietro } x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 \end{cases}$$

COSTO COMPUTAZIONALE di $A = LU$

Richiamo:

PSEUDOCODICE dell' Algoritmo

INPUT: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di elem. a_{ij}

per $k = 1, 2, \dots, n-1$

  verifico che $a_{kk} \neq 0$

  per $i = k+1, \dots, n$

    $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ ← moltiplicatori

    per $j = k+1, \dots, n$

      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$ ← aggiornamento

    fine

  fine

fine

Esempio. Passo 1:

$$
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ n \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & & n \end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
x & x & x & x & x \\
0 & x & x & x & x \\
0 & x & x & x & x \\
0 & x & x & x & x \\
0 & x & x & x & x
\end{bmatrix}
$$

conservati

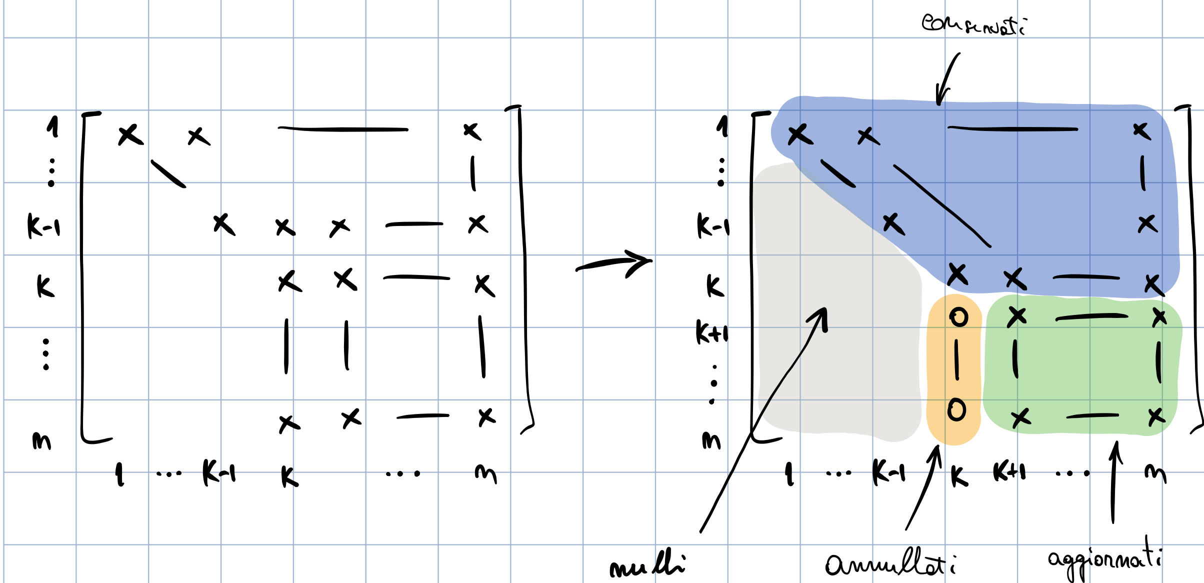
annullati

aggiornati

moltiplicatori : $m-1$ moltiplicazioni

aggiornamento : $2(m-1)^2$ operazioni algebriche (metà moltiplicazioni, metà addizioni)

Passo k :



moltiplicatori : $m-k$ moltiplicazioni

aggiornamento : $2(m-k)^2$ operazioni algebriche

In Totale :

$(m-1)+(m-2)+\dots+2+1$ ← moltiplicatori

$2(m-1)^2+2(m-2)^2+\dots+2\cdot 4+2$ ← aggiornamento ovvero: $\sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2$

DOMANDE

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = \ ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \dots + n^2 = \ ?$$

n grande

Sapete che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \simeq n^2/2$

Lo avete dimostrato per induzione nel corso di Mat. Discreta.

Come si ottiene la formula?

Denotiamo $T_n := 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

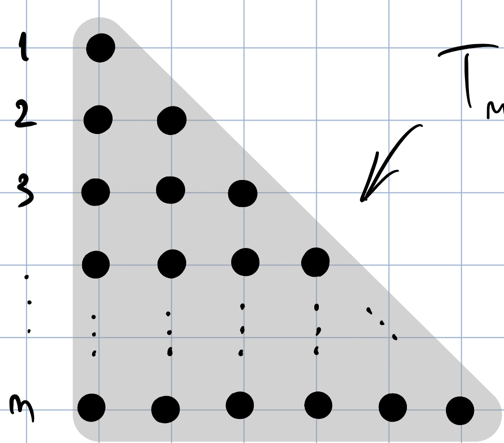
$$T_n = 1 + 2 + \dots + n-1 + n$$
$$T_n = n + n-1 + \dots + 2 + 1$$

Sommiamo per colonne :

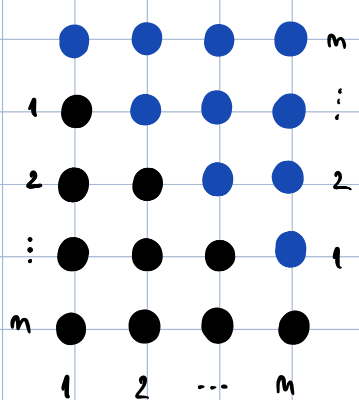
$$2T_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ addendi}}$$

da cui $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Geometricamente :



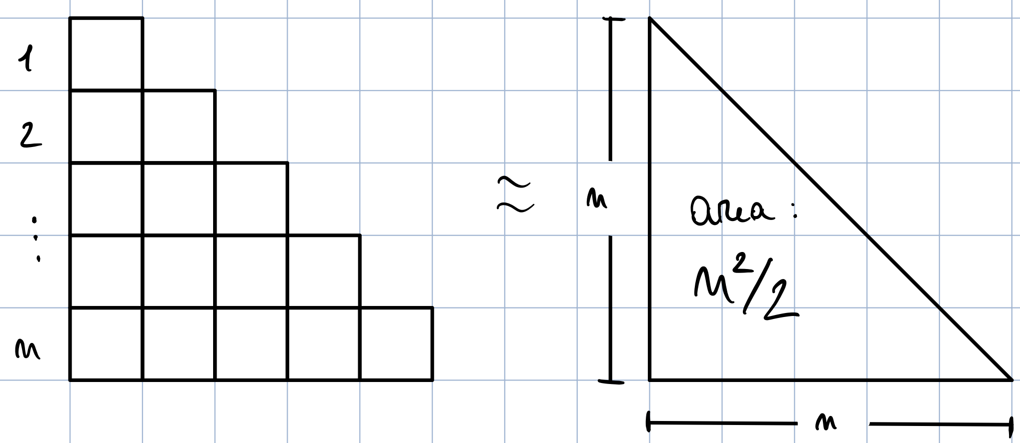
T_n, numero "triangolare"



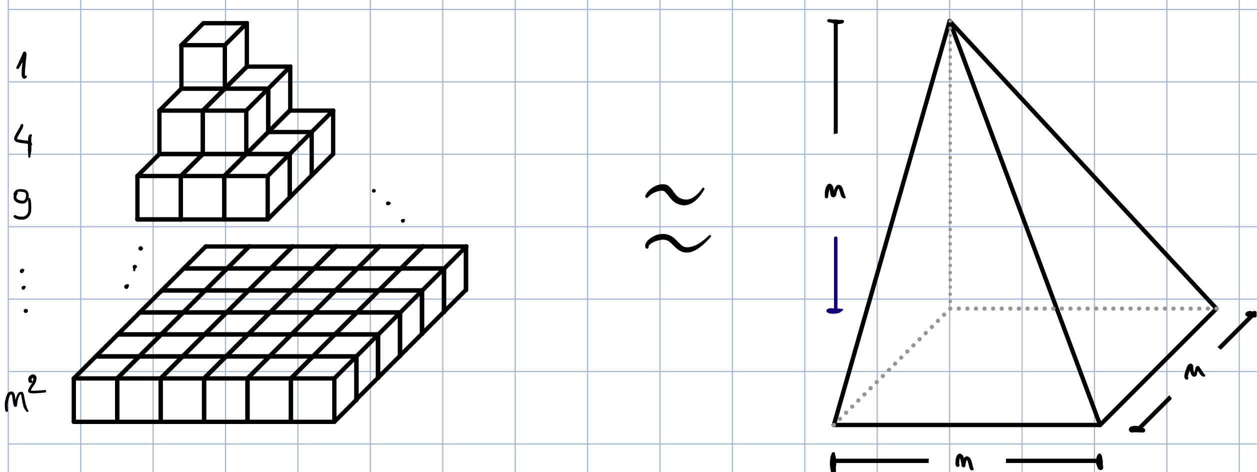
$2T_n = n(n+1)$

base per altezza

Stima geometrica di $1+2+\dots+n$:



Analogamente :



Volume : $\frac{1}{3}$ · area di base · altezza =

$$= n^3/3$$

Ne deduciamo la seguente stima : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \approx n^3/3$

Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostrazione: esercizio (suggerimenti in fondo alle note)

Tornando alla fattorizzazione LU:

costo computazionale:

circa $n^2/2 + 2\,n^3/3 \simeq \frac{2}{3} n^3$

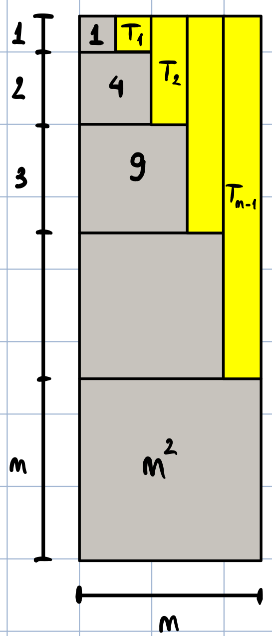
n grande

da confrontare con Laplace $(n!)$

La risoluzione dei sistemi $Ly = b$ e $Ux = y$ ha un costo di circa n^2 per sistema.

[Dimostrazione: esercizio]

Esercizio :



(a) Dedurre dal disegno a sinistra che, posti $T_n := 1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k$ e $S_n := 1+4+\dots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$, si ha

$$n T_n = S_n + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \qquad [1]$$

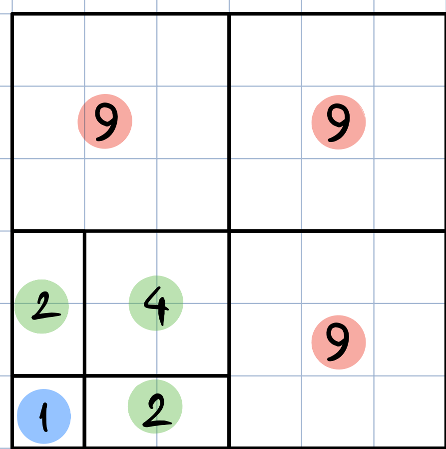
(b) Utilizzare la [1], $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ e $S_{n-1} = S_n - n^2$ per ottenere la formula:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Formalizzare tutti i passaggi e completare la dim. per induzione.

ESERCIZIO: dedurre dal disegno sotto che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$



Formalizzare e dimostrare per induzione.