Sterowanie Adaptacyjne	
Kierunek *Informatyczne Systemy Automatyki*	Termin *wtorek TP* $11^{15} - 12^{45}$
Imię, nazwisko, numer albumu *Adrian Goral 272545, Paulina Szulc 272592*	Data *29.10.2024 r.*

Projekt 1

Spis treści

1 Wstęp

W projekcie należało stworzyć zaszumienie o zadanym rozkładzie zmiennej losowej dla zadanego sygnału. Po dodaniu szumu należało zastosować metodę uśredniania, polegającą na obliczeniu średniej arytmetycznej z H ostatnich odczytów, w celu zredukowania zakłóceń.

Celem było znalezienie optymanej wartości H dla badanego sygnału na podstawie analizy błędu średniokwadratowego, uzyskanego poprzez porównanie sygnału odszumionego z sygnałem pierwotnym, sprzed dodania zakłóceń.

Poniżej znajdują się zadane przez prowadzącego dane:

- sygnał **sinusoidalny**
- rozkład **trójkątny**

2 Tworzenie sygnału do badań

2.1 Sygnał sinusoidalny

Dla zasymulowania sygnału sinusoidalnego wygenerowano 1000 punktów na odcinku o długości 6π, z amplitudą równą 1.

2.2 Generowanie szumu (metoda odwrotnej dystrybuanty)

Do stworzenia szumu o rozkładzie trójkątnym wykorzystana została **metoda odwrotnej dystrybuanty**. Poniżej znajdują się uproszczone obliczenia dla kolejnych kroków tej metody.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(z) = -\frac{1}{c^2} \cdot |z| + \frac{1}{c},$$

gdzie stała c określa granice przedziału dziedziny funkcji:

$$D \in [-c, c].$$

Stała c jest zależna od wariancji. Za pomocą poniższych obliczeń została uzyskana proporcja wariancji i stałej c, przedstawiona w najprostrzej postaci.

$$var(z) = E(z - Ez)^2$$
$$Ez = 0$$

$$var(z) = Ez^2 = 2 \cdot \int_0^c z^2(z)\,dz$$
$$var(z) = -\frac{2}{c^2}\int_0^c z^3\,dz + \frac{2}{c}\int_0^c z^2\,dz$$
$$var(z) = -\frac{2}{c^2} \cdot \frac{c^4}{4} + \frac{2}{c} \cdot \frac{c^3}{3}$$

$$var(z) = \frac{c^2}{6}$$

Dystrybuanta:

$$F(z) = \int_{-c}^{z} f(z)\,dz = \int_{-c}^{z} -\frac{1}{c^2} * |z| + \frac{1}{c}\,dz$$

dla $z \leqslant 0$

$$\int_{-c}^{z} -\frac{1}{c^2} \cdot |z| + \frac{1}{c}\,dz = \int_{-c}^{z} -\frac{1}{c^2} \cdot (-z) + \frac{1}{c}\,dz$$

$$F(z) = \frac{z^2}{2c^2} + \frac{z}{c} + \frac{1}{2}$$

$$F(z) = \frac{(z+c)^2}{2c^2}$$

dla $z \geqslant 0$

$$\int_{-c}^{z} -\frac{1}{c^2} \cdot |z| + \frac{1}{c}\, dz = \int_{-c}^{z} -\frac{1}{c^2} \cdot z + \frac{1}{c}\, dz$$

$$F(z) = -\frac{z^2}{2c^2} + \frac{z}{c} + \frac{1}{2}$$

$$F(z) = 1 - \frac{(z-c)^2}{2c^2}$$

Odwrotna dystrybuanta:

Celem odwrotnej dystrybuanty jest przypisanie wartości zmiennej z z przedziału $z \in [-c, c]$ do zmiennej losowej u o rozkładzie jednostajnym, gdzie $u \in [0, 1]$. Wykorzystanie wyliczonej dystrybuanty umożliwi zachowanie zadanego rozkładu trójkątnego dla zmiennej z.

dla $z \leqslant 0$

$$u = F(z)$$

$$u = \frac{(z+c)^2}{2c^2}$$

należy wyznaczyć z

$$z = c \cdot (\sqrt{2u} - 1)$$

dla $z \geqslant 0$

$$u = F(z)$$

$$u = 1 - \frac{(z-c)^2}{2c^2}$$

należy wyznaczyć z

$$z = c \cdot (1 - \sqrt{2 - 2u})$$

2.3 Zaszumianie (łączenie szumu z sygnałem)

Celem zaszumienia sygnału dla każdego punktu wylosowano wartość u z przedziału $[0, 1]$ w rozkładzie jednostajnym.

Dla $u \in [0, \frac{1}{2}]$ zastosowano pierwszą z otrzymanych odwrotnych dystrybuant. Dla pozostałych u, tj. $u \in (\frac{1}{2}, 1]$ użyto drugiej z odwrotnych dystrybuant. Następnie dla każdego punktu wartość szumu została dodana do wartości pierwotnego sygnału sinusoidalnego.

3 Przeprowadzanie badań

W kolejnych krokach otrzymany zaszumiany sygnał został poddany próbom odszumiania.

3.1 Sygnał wejściowy o różnych wariancjach szumu

Do badań zostały przyjęte poniższe wartości wariancji:

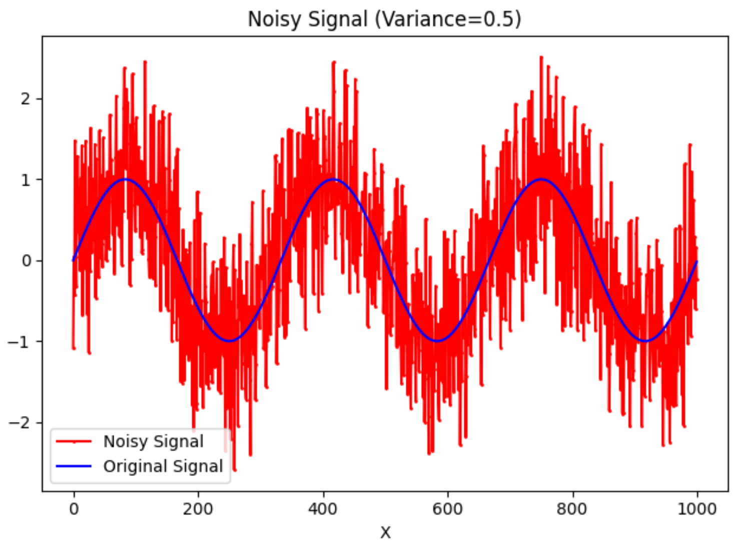
$$var(z) \in \frac{1}{2}, 1, 2$$

Odpowiadające im wartości stałej c wyglądają następująco:

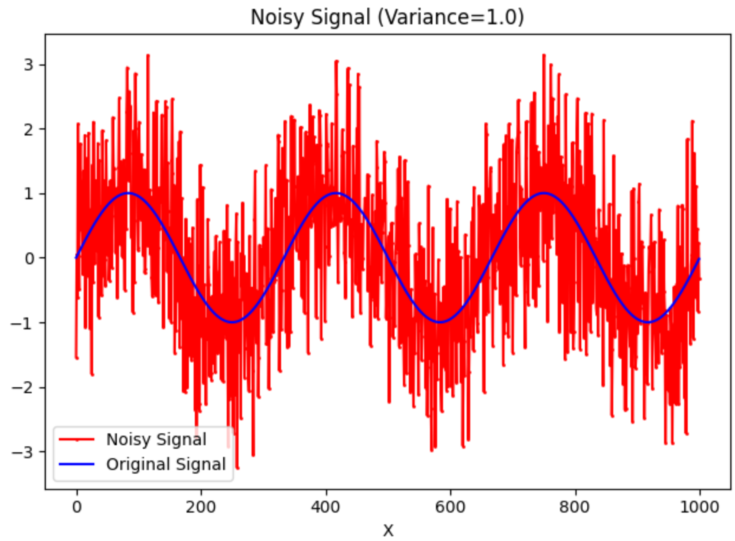
$$c \in \sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}$$

Dla przeprowadzenia rzetelnych badań, wartości te zostały wylosowane raz i były przechowywane w pliku tekstowym, z którego były one pobierane dla testów kolejnych wariancji - w przeciwieństwie do alternatywnego sposobu, jakim byłoby ponowne losowanie wartości u dla każdego testu.

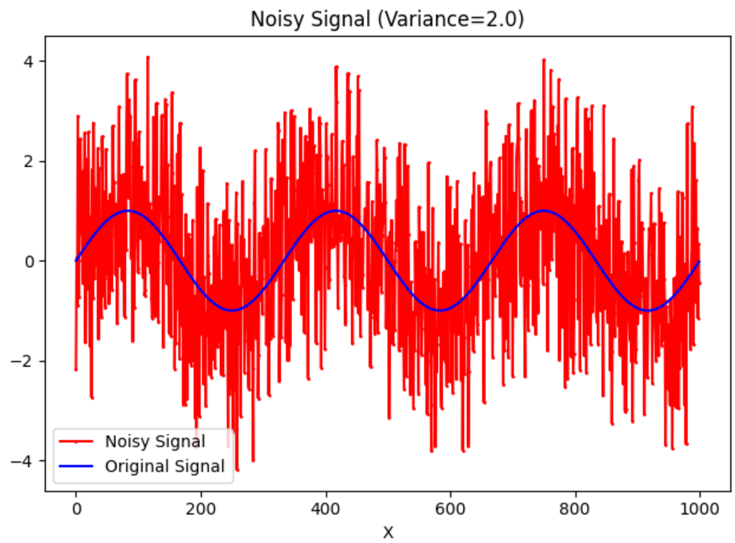
Poniżej przedstawione są badane zaszumione sygnały z naniesionym sygnałem sinusoidalnym:



Rysunek 1: Zaszumiony sygnał dla var(z)=0.5



Rysunek 2: Zaszumiony sygnał dla var(z)=1



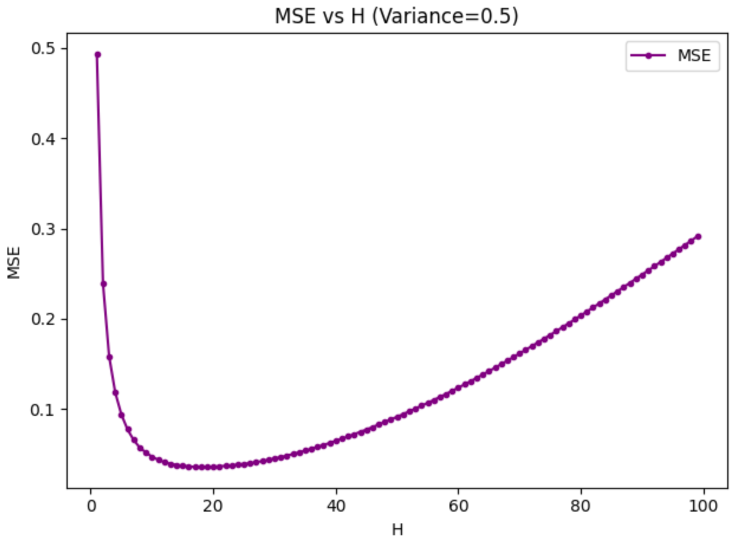
Rysunek 3: Zaszumiony sygnał dla var(z)=2

3.2 Szukanie optymalnych wartości H

Dla każdego sygnału należy indywidualnie znaleźć optymalną wartość H, która określa liczbę poprzednich punktów uwzględnianych przy obliczaniu nowych wartości dla kolejnych punktów sygnału.

Wartości H poddane testom pochodzą z przedziału $[1, 100]$, a dla każdej z nich obliczono błąd średniokwadratowy. Do obliczenia błędu średniokwadratowego został wykorzystany poniższy wzór:

$$MSE(\hat{X}) = E((\hat{X} - X)^2)$$

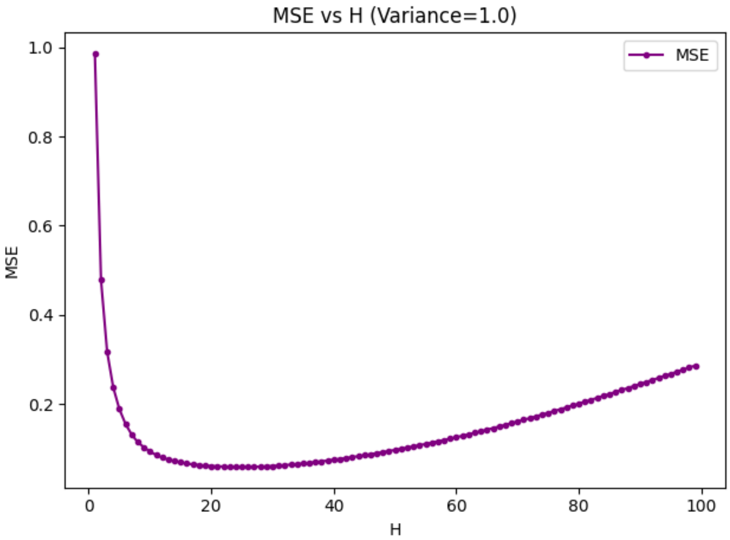


Rysunek 4: Błąd średniokwadratowy w zależności od wartości H dla var(z)=0.5

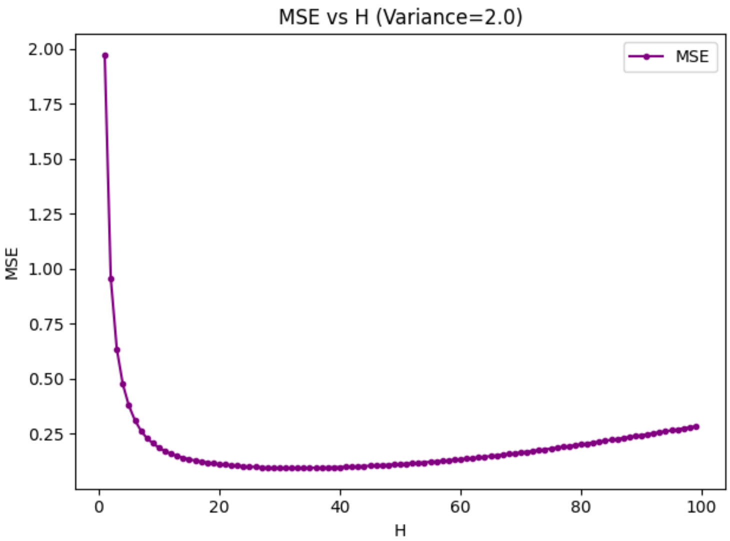
Na wszystkich trzech wykresach zaobserwować można, że **wartość MSE dla H=0 jest równa przyjętej wariancji**. Jest to prawidłowe, ponieważ zerowa wartość H oznacza, że nie odnosimy się do żadnych przeszłych wartości punktów, więc odszumiony i zaszumiony sygnał wyglądałyby tak samo.

Na każdym wykresie prawa część wykresu wygląda podobnie - wartość MSE dochodzi do wartości między 0.2, a 0.4, niezależnie od początkowych wartości po lewej stronie wykresu, które znacząco się różnią.

Także każda z funkcji na wykresach zachowuje się podobnie. Od najwyższego punktu, jakim jest otrzymana wartość dla $H = 0$, **bardzo dynamicznie spada do wartości bliskiej optymalnej, a następnie dużo wolniej rośnie**.



Rysunek 5: Błąd średniokwadratowy w zależności od wartości H dla var(z)=1



Rysunek 6: Błąd średniokwadratowy w zależności od wartości H dla var(z)=2

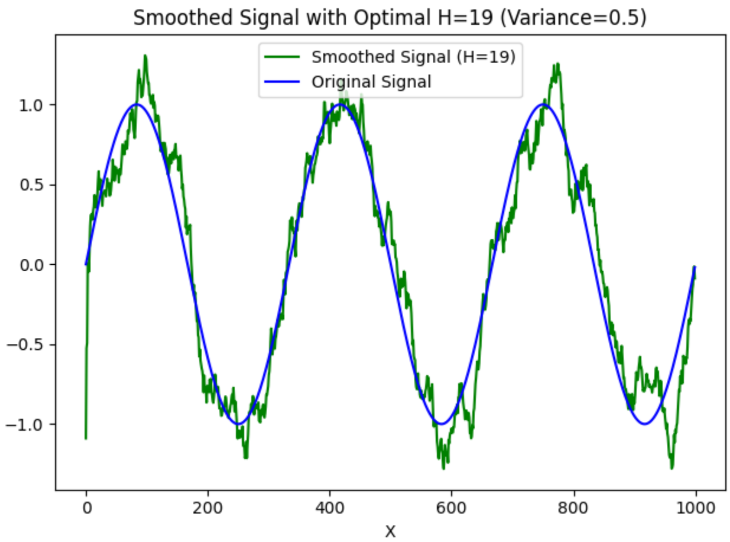
3.3 Odszumiony sygnał

Po odnalezieniu optymalnego H dla danego sygnału, można przystąpić do odszumiania go. W tym celu obliczana jest średnia z H ostatnich punktów, która staje się nową wartością dla danego punktu.

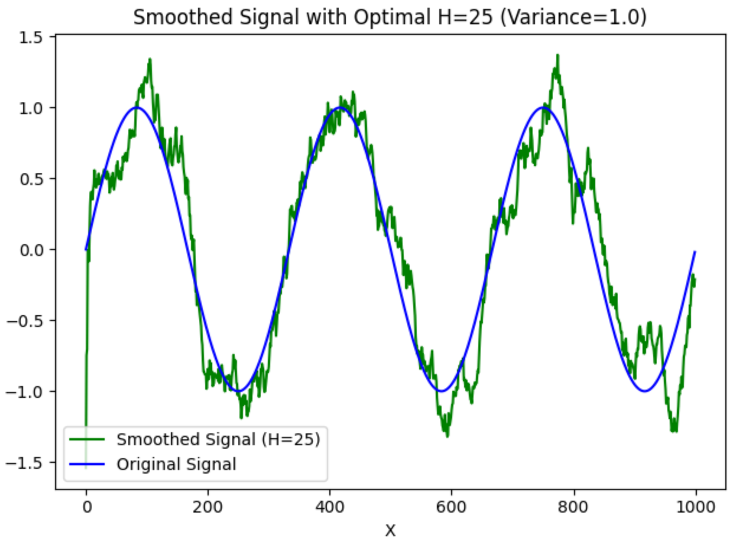
Dla badanych wariancji optymalne H są następujące:

$$var(z) = \frac{1}{2}, H = 19$$
$$var(z) = 1, H = 25$$
$$var(z) = 2, H = 32$$

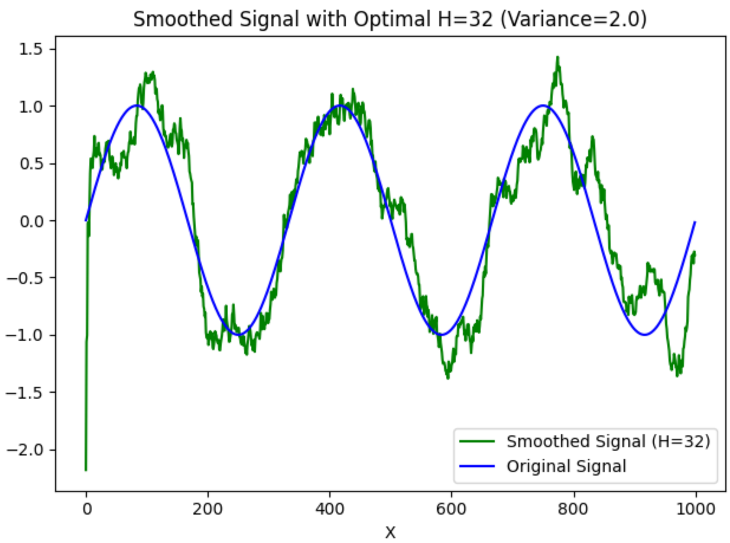
Przedstawione poniżej wykresy ukazują odszumiony sygnał wraz z pierwotnym sygnałem przed zaszumieniem celem porównania.



Rysunek 7: Odszumiony sygnał za pomocą optymalnego H dla var(z)=0.5



Rysunek 8: Odszumiony sygnał za pomocą optymalnego H dla var(z)=1

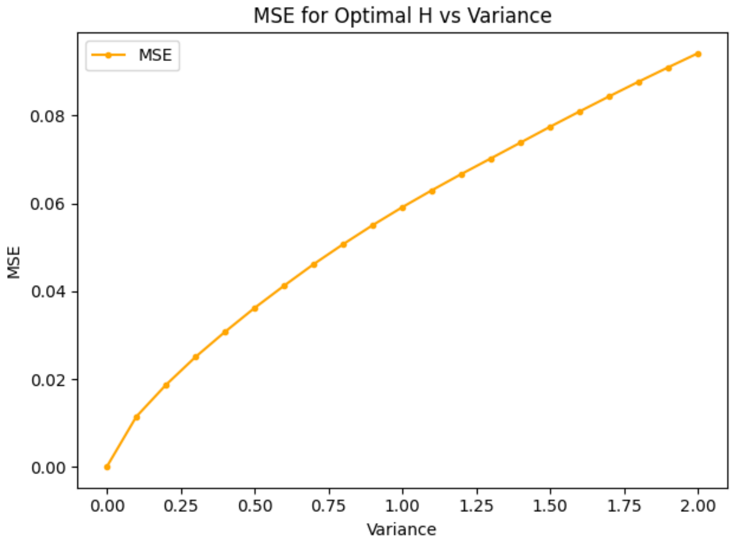


Rysunek 9: Odszumiony sygnał za pomocą optymalnego H dla var(z)=2

3.4 Zależność MSE od wariancji

Oprócz przedstawionych dotychczasowo trzech wartości wariancji, te same testy zostały także przeprowadzone dla wartości wariancji z przedziału $[0, 2]$ z odstępami równymi 0.1.

Na poniższym wykresie przedstawiona jest zależność błędu średniokwadratowego dla optymalnej wartości H dla każdej z wymienionej wyżej wariancji.



Rysunek 10: Zależność MSE od wariancji dla optymalnych H

Wykres ukazuje, że wartość MSE rośnie wraz ze wzrostem wariancji. Oznacza to, że im większa jest wariancja szumu, tym trudniejsze staje się skuteczne odszumianie sygnału.

4 Wnioski

Większa wariancja funkcji szumu prowadzi do gorszego wyniku odszumiania sygnału. Wynik przypominał w największym stopniu sygnał rzeczywisty w przypadku najmniejszej badanej wariancji. Dla każdej wartości wariancji udało się wyznaczyć optymalną wartość H, co pozwoliło na odszumienie sygnału przy minimalizacji błędu średniokwadratowego.

Optymalna wartość H zwiększa się wraz ze wzrostem wariancji, co sugeruje, że **większe zaszumienie wymaga uśrednienia większej liczby poprzednich punktów**, aby uzyskać najlepsze możliwe wygładzenie sygnału tym sposobem. Można jednak zauważyć z wykresów, że **większa wartość H nie oznacza zawsze lepszych wyników - zbyt duża liczba uśrednianych punktów może prowadzić do utraty szczegółów sygnału**. Za mała wartość H zadziała przeciwnie - szum nie zostanie dostatecznie zniwelowany.

Zastosowana metody uśredniania może sprawdzić się gorzej dla sygnałów z nagłymi zmianami np. sygnał prostokątny, ponieważ zmiany te zostaną wygładzone i przestaną być wyraźne. Sygnał sinusoidalny wydaje się być dobrym przykładem użycia tej metody z racji niewystępujących dużych różnic między kolejnymi wartościami. Nie oznacza to jednak, że metoda ta sprawdziła się idealnie - w takim przypadku uzyskane MSE byłoby równe 0.

Potencjalnym sposobem na udoskonalenie tej metody byłoby przypisanie różnych wag dla sygnałów wykorzystywanych w obliczaniu średniej dla punktu i obliczanie średniej ważonej. Przykładem jest malejąca waga dla co raz to bardziej oddalonego punktu od obecnego.

5 Bibliografia

1. dr hab. inż. Mzyk, Grzegorz. Wykłady z kursu Sterowanie Adaptacyjne. Politechnika Wrocławska

2. Wikipedia (EN): Inverse Transform Sampling, [online]. Wikimedia Foundation. [dostęp: 28.10.2024]. Dostęp w Internecie: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_transform_sampling

3. Wikipedia (PL): Dystrybuanta, [online]. Wikimedia Foundation. [dostęp: 28.10.2024]. Dostęp w Internecie: https://pl.wikipedia.org/wiki/Dystrybuanta

Spis rysunków