In [1]:
```julia
using CSV;
using PyCall;
using PyPlot;
using Printf;
using DataFrames
np = pyimport("numpy");
wrg = pyimport("warnings");

include("../scripts/utils_0.jl");
```

In [2]:
```julia
wrg.filterwarnings("ignore")
```

1.0. Capítulo 0

1.1. Funções

A e B são dois conjuntos e podemos associar eles a uma reta, e cada elemento a de A pode associar somente com um elemento de b de B, esse é o conceito de função e também o conceito de imagem.
f é aplicação de A em B se e somente se $\forall x \in A \exists | y \in B/(x,y) \in f$

Em outras palavras, é basicamente uma caixinha onde existe um valor x, que entra em uma função f(x) e retorna um valor y. Por exemplo: $f(x) = x^{2}$

Nesse exemplo, se x for por exemplo 2, o resultado dessa função vai ser 4.

1.1.1. Domínio & Imagem

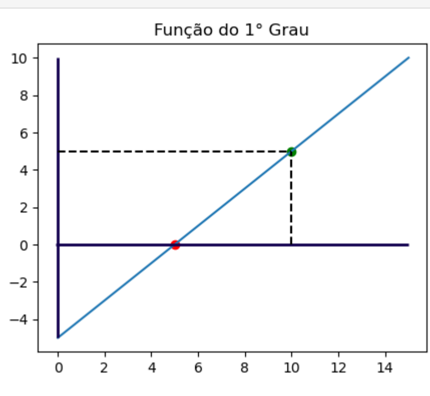
Resumidamente, existe uma função por exemplo uma reta, onde existe o eixo **x** e o eixo **y** em um plano cartesiano,cada **x** tem uma relação com a função, logo $f(x)$ é a função avaliada nesse ponto **x** em específico.
A função do primeiro grau representada pela reta em **azul** esta no eixo X positivo e negativo. Logo o ponto em **vermelho** representado na reta quando o x é igual a 5, na função do primeiro grau $f(5)$ o resultado da função é 0.

E o ponto em verde é quando o **x** é exatamente 10, colocando na função, logo $f(10)$ é igual a 5.

OBS: Geralmente nas escolas é utilizado y para notação de $f(x)$, nesse notebook vai ser utilizado os dois.

Pode também ser representada op conceito de domínio e imagem utilizando o Diagrama de Venn, recomendo pesquisar depois.

In [4]:
```julia
plot_linear_function();
```



Mas oque realmente significa o domínio e a imagem?
O Domínio são todos os valores que X pode receber, e a imagem é todo o resultado da função com um x específico.

1.1.2. Função Polinomial

As funções polinomias nada mais são que as funções com mais graus.
Onde $n~\in~\mathbb{N}$, a são números reais chamados de $coeficientes$ e o grau de um polinômio é n.
Exemplos:

Para as funções polinomias existem algumas fórmulas como:
$f(x) = 2x^{3} + 2x^{2} - 4x$ essa função é do 3° Grau, pois o maior termo é o 3.
$g(x) = 3x^{2} - 3x$

Para **somar** funções polinomiais, basta somar os termos semelhantes, caso não tiver nenhum semelhante, então sómente copiar.
$f(x) + g(x) = 2x^{3} + 5x^{2} - 7x$

Para a subtração de polinômios é a mesma coisa, basta subtrair os termos semelhantes, caso não tiver nenhum semelhante, então sómente copiar, porém, precisa multiplicar por -1 para mudar o sinal dos números da função, pois, existe -1 multiplicando todo o polinômio.
$((2x^{3} + 2x^{2} - 4x) - (3x^{2} - 3x)) = (2x^{3} + 2x^{2} - 4x -3x^{2} + 3x)~$ Agorá é so aplicar as mesmas regrinhas da soma.
$f(x) - g(x) = 2x^{3} -x^{2} - x$

Para a multiplicação e a divisão vai ser tarefa de casa aprender :)

1.1.3. Função do 1° Grau

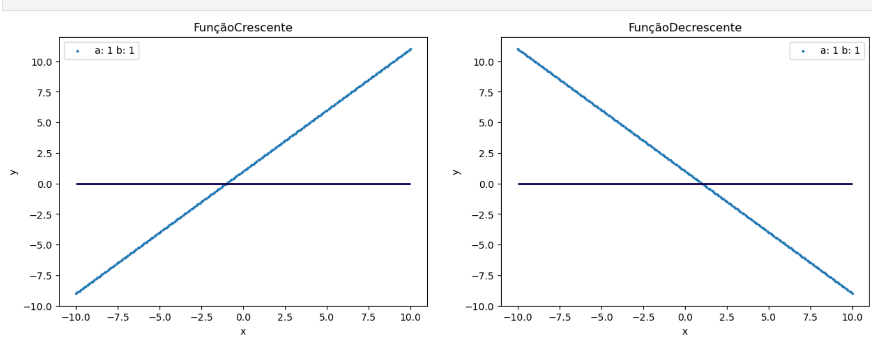
A função polinomial do primeiro grau, tambem conhecida como função afim, é descrita pela seguinte formula:
$f(x) = a \cdot x + b~$ Onde temos os seguintes termos:

a Coeficiente Angular (Inclinação da Reta)

b Coeficiente Linear (Onde a reta corta o eixo Y)

OBS: $a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, O coeficiente angular tem que ser diferente de zero, logo ele sendo 0 é uma função **constante**.
Pode ser representada também a relação de **x** e **y** em um gráfico, conhecido como reta.
Se o coeficiente angular for positivo, logo a retra é crescente, se for negativo, a reta é decrescente.

In [5]:
```julia
plot_afim_function(1, 1)
```



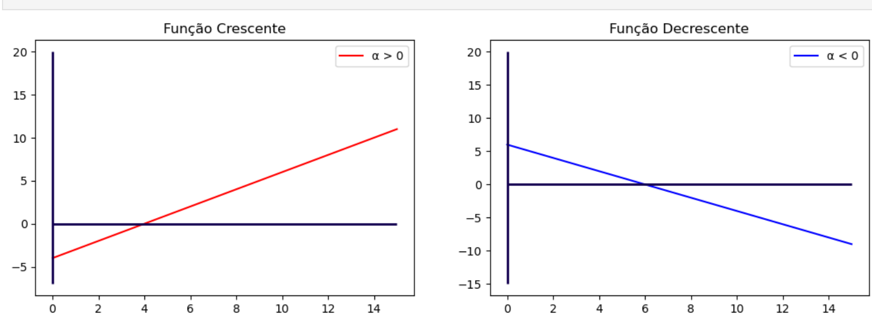
In [16]:
```julia
f(x) = a * x + b

a = 1
b = 2
x = [1, 2, 3]
y = [f(xi) for xi in x]
```

Out[16]:
```
3-element Vector{Int64}:
 3
 4
 5
```

1. Quando o x é igual a 1, logo a função vai ser: f(1) = 1 * 1 + 2 f(1) = 3

E assim sucessivamente. Para cada X existe um Y correspondente.

In [6]:
```julia
plot_afim_function_new(1, 1)
```




```
I) Determine a expressão que define a função Afim que passe pelos pontos (1, 5) e (3, -1).
```

Foi dado um par $(x_0, y_0), (x_1, y_1$), sempre o primeiro número do par é o **x** e o segundo é o **y**.
Agora o objetivo é, em um plano cartesiano conseguir desenvolver a fórmula da função afim que passe por esses pontos, para isso usa-se a fórmula:
$y - y_0 = m(x - x_0)$ e para descobrir o m, utiliza-se a fórmula: $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$

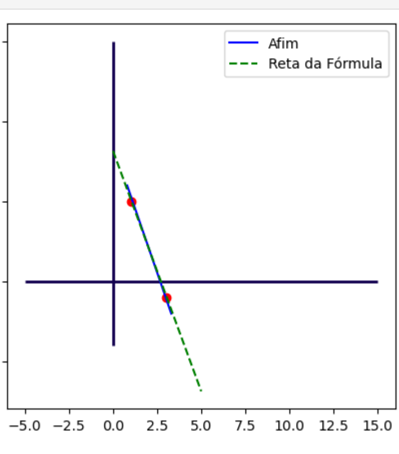
- Primeiro pásso é desenhar um plano cartesiano com dois eixos e setar os pontos.
- Segundo passo é encontrar o m para aplicar na fórmula.

$m = \frac{-1-5}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$, se for fazer utilizando o inverso dos pontos da o mesmo resultado, logo $m = \frac{5-(-1)}{1-3} = \frac{6}{-2} = -3$

Agora basta utilizar na outra fórmula o resultado de $m=-3$
$y - y_0 = m(x - x_0) = y - 5 = -3(x - 1)$

Logo o resultado para a afunção que passa entre os pontos anteriormente descritos é: $y = -3x + 8 ~~ou~~ f(x) = -3x +8$

In [7]:
```julia
question_one(-3, 8);
```



1.1.4. Função do 2° Grau

A função do segundo grau é a clássica função da fórmula de bháskara e é representada quando o maior grau do polinômio é 2, logo a fórmula é: $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde possui três parâmetros, $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e o a tem que ser diferente de zero, se for zero, logo a função vai ser uma função do primeiro grau.

Coeficiente a: Como é a abertura dessa parabola, se o a for muito grande, mais fina a concavidade para cima vai ficar, quando menor próximo de 0 mais aberta é a concavidade, logo a mesma coisa para números negativos, porém para a concavidade para baixo.

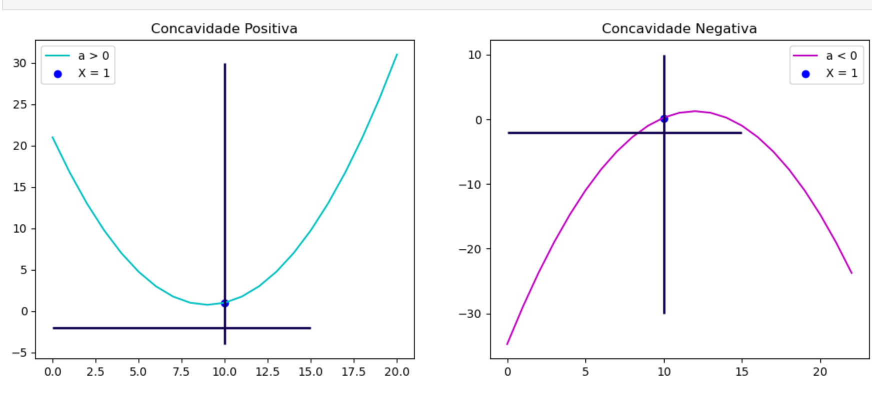
Coeficiente b: É em qual quadrante vai estar a parábola.

Coeficiente c: É onde a parábola corta o eixo Y

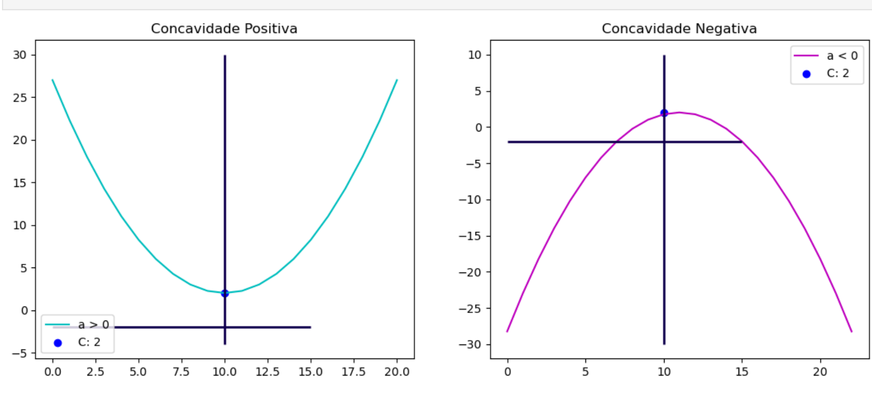
O nome do gráfico dessa função tambem é chamada de Parábola onde possui os pontos de vértice minimo e máximo.

Por exemplo a função $f(x) = 1x^{2} + 1x + 1$, quando o termo que multiplica o a é positivo, logo a concavidade é para cima, se o a for negativo, logo a concavidade é para baixo.
Os eixos do matplotlib começam em 0, logo a verdadeira carinha da função $f(x) = 1x^{2} + 1x + 1$ é como eu desenhei abaixo, onde os ponstos estão mais centralizados, recomendo usar outra ferramenta para desenhar a parábola como o Geogebra.

In [8]:
```julia
plot_quadratic_function();
```



In [9]:
```julia
plot_quadratic_function_new(1, 0, 2);
```




```
II) Calcúle as Raizes da seguinte função do segundo grau:
```

a) $f(x) = x^{2} + x -2$
b) $g(x) = x^{2} - 10x + 24$
c) $h(x) = x^{2} - 15x$

Exístem inúmeras formas de calcular as raizes de uma função do 2° Grau, as raizes são justamente os pontos onde a função corta o eixo **X**, geralmente quando se tem duas raizes, a função corta em dois pontos, com uma raiz somente em um ponto no eixo **x** e sem raizes a parábola esta flutuando em algum quadrante tendo apenas nos números complexos.

Uma das ferramentas para calcular as raizes é justamente o Bháskara, dado pela fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ e o Delta a fórmula é $\Delta = b^{2} - 4 \cdot a \cdot b$ e para os vértices é dever de casa :D

Logo a respósta para a pergunta **a)** utilizando bháskara é:
$\sqrt{\Delta = 1^{2} - 4 \cdot 1 \cdot -2}$ Logo o delta é: $\sqrt{9}$: **3**

$x = \frac{-1 \pm 3}{1 \cdot 2}$ Logo as raizes são: -2 e 1

Porém não é so essa a forma de calcular a equação do 2° grau, existe a fórmula dos produtos notáveis, para isso, vamos seguir esses passos:
$x^{2} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, Dividir todos os lados da equação por a.
Após a divisão, transformar em um produto notável e movimentar a $\frac{c}{a}$ para o outro lado, então:
$x + (\frac{b}{2a})^{2} = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^{2}$ Para transformar em produto notável, foi uilizado a seguinte fórmula: $(x + \frac{b}{2a})^{2} = x^2 + \frac{2b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^{2}$ o primeiro a quadrado, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo e o quadrado do segundo, porém não tem o segundo termo ao quadrado, para isso foi preciso colocar ele ali, mas tem que colocar do outro lado também, simplificando, temos então:
$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ Já foi tirado a raiz também e simplificado para Δ a expressão $b^{2} - 4 \cdot a \cdot c$, e como requer o módulo na raiz, por isso o $\pm$
Finalizando nossa formula ficaria: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

E oque tudo isso quer nos dizer, simples, pode ser possível transformar qualquer equação do 2° grau em um produto notável quando possível, geralmente vai facilitar as manipualões.

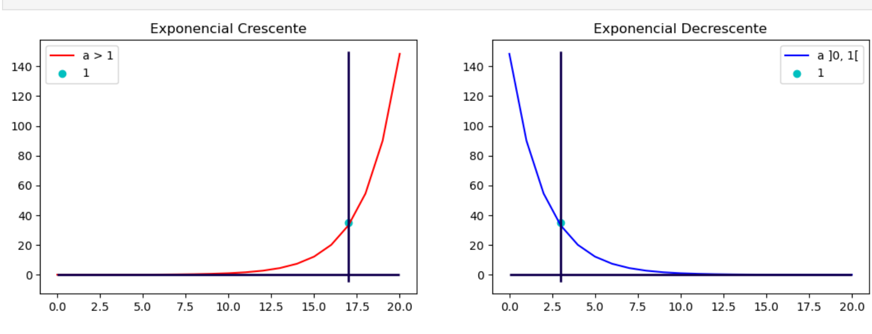
b) Para a alternativa B, vai ser utilizado o Produto Notável.
$x^{2} - 10x + 24 = 0$ pode ser escrita como $(x - 5)^{2} = \pm 1$, basta mover o $+24$ para o outro lado e somar 25 em ambos os lados para aparecer o produto notável, pois $(x - 5)^{2} = x^{2} + 2 \cdot 5 x + 5^{2}$
Então, passando o 5 para o outro lado, consegue as duas raizes, sendo $x_1 = 6$ e $x_2 = 4$

c) Para a alternativa C, vai ser utilizado a Fatoração.
$h(x) = x^{2} - 15x$ pode ser escrita como $h(x) = x(x - 15)$ basta fazer a distributiva para encontrar o mesmo resultado.
Lembra que eu tinha citado que o c é o ponto em que a parábola corta o eixo Y, logo essa parábola esta flutuando em um quadrante, sendo assim uma de suas raizes é **0**, e a outra é **+15**.

1.1.5. Função Exponencial

A função exponencial é dada pela fórmula $f(x) = a^{x}$
A carinha dessa função é como um lado da função do 2° grau, onde sempre vai cortar o eixo **Y** em 1, pois todo $a^{0} = 1$.

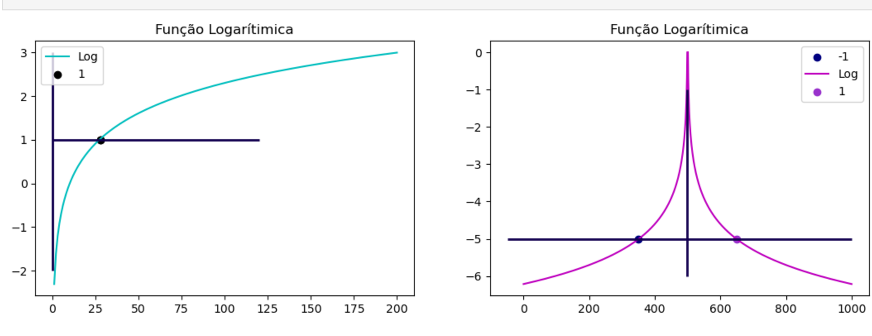
In [10]:
```julia
plot_exp();
```



1.1.6. Função Logarítimica

A função logarítimica é dada pela fórmula $f(x) = log{x}$
A carinha dessa função é ao contrario da função exponencial onde corta o exiso **x** em 1.
Tem as mesmas propriedades da exponencial, porem agora em relação ao eixo x.

In [11]:
```julia
plot_log();
```

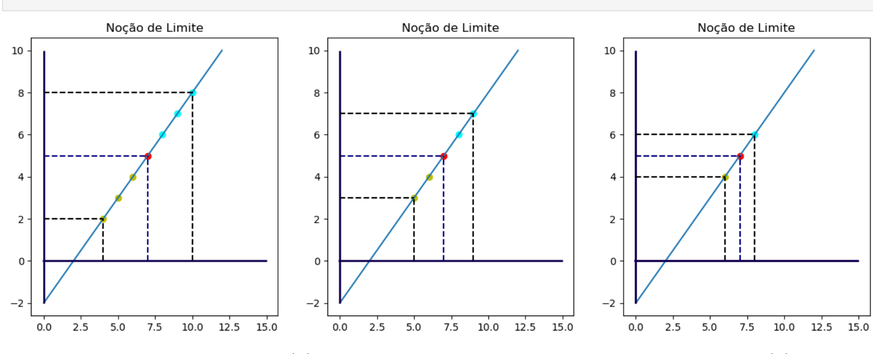


1.2. Limites

Limites nada mais é que um conceito para se estudar em mais detalhes sobre o infinito, vou passar apenas a explicação intuitiva sobre os limites.
Como que uma função se comporta dado um certo valor , é útil quando se tem um polinômio a saber qual é o termo dominante na expressão, a noção mais básica é que quanto mais eu me aproximo de um certo valor, não importa quanto eu me aproxime eu nuca vou chegar no destino, tipo um zoom infinito.

Imagina-se os pontos amerelhos estarem se aproximando do ponto em vermelho pela esquerda e os pontos em azuis pela direita o mais próximo possível dele mas nunca chegando nele, esse é o conceito de limite, resumidamente, o objetivo é chegar o mais próximo possível do ponto em vermelho mas nunca estar exatamente no ponto vermelho.

In [12]:
```julia
limit_example();
```



Ou seja, no Limite onde o meu ponto amarelo a esta tendendo ou ficando cada vez mais próximo do ponto em vermelho v é dado pela seguinte expressão: $\lim_{a \to v} f(x)$ a palavra lim da essa noção, e o a é o número ou ponto que esta sendo aproximádo para o outro ponto que no caso é o vermelho v.
Matematicamente: Conforme o a se aproxima do v pera direita ou esquerda, a $f(a)$ se aproxima da $f(v)$.

A seguinte função $f(x) = x + 1 $, no limite quando essa função tende a 1, fica como no DataFrame, logo escrita, fica $\lim_{x \to 1} (x + 1)$, isso é verdade para outros números também.

In [17]:
```julia
DataFrame(x1=[2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001], x2=[3, 2.5, 2.1, 2.01, 2.001])
```

Out[17]: 5 rows × 2 columns

	x1	x2
	Float64	Float64
1	2.0	3.0
2	1.5	2.5
3	1.1	2.1
4	1.01	2.01
5	1.001	2.001

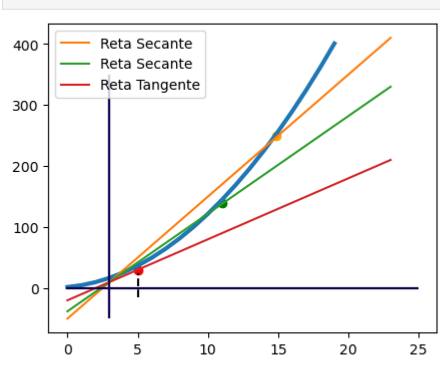
Mas por que isso é útil? Para as derivadas.

1.3. Derivadas

Resumidamente a derivada é a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto escolhido, nome grande para uma coisa simples. Essa ferramenta esta ligada a otimização, taxa de variação, onde uma variável depende de outra., ou seja, se eu tiver a velocidade e quiser a aceleração, vai ser necessário a derivação, resumidamente, vários problemas caem na derivada.

E a reta tangente é justamente uma reta em um ponto específico que corta uma função somente em uma parte, logo as demais retas que cortam em mais posições são chamadas de retas secantes.

In [14]:
```julia
derivative();
```



Nessa imagem, estou aproximando um ponto qualquer ao ponto vermelho utilizando a noção de limite.

1.3.1. Como surgiu a Derivada.

E com toda reta é possivel desenhar um triângulo e calcular a tangente dado os pontos, que é a diferença da altura pela diferença da base, no gráfico acima, vamos calcular essa diferença.

Ponto em Laranja: $tg = \frac{f(15) - f(5)}{15 - 5}$ a função avaliada no ponto 15 - a função avaliada no ponto 5 e a diferença, porém vai dar um erro grande essa diferença, pois não é exatamente um triângulo, e sim uma função exponencial, logo precisa de um triângulo menor para conseguir representar essa função que não é uma reta.

Ponto em Verde: $tg = \frac{f(11) - f(4)}{11 - 5}$ mesmo assim ainda é possível pegar um triangulo menor, e no limite, temos:

Ponto em Vermelho: $tg = \frac{f(5.00005) - f(5)}{5.00005 - 5}$, logo essa aqui esta mais perto da verdadeira mas é necessário formular no limite, pois alguem pode vim pegar um ponto menor, que consequentemente vai ser melhor e assim sucessivamente.

Ou seja, é necessário resumir, mas para resumir é com o limite

$f'(v) = \lim_{p \to v} \frac{f(p) - f(v)}{p - v}$ No limite em que o os outros pontos se aproximan do ponto vermelho, existe essa função, logo essa é a derivada dessa função no ponto vermelho v.
Mas, geralmente é utilizada outra fórmula:
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ essa fórmula basicamente fala que depende do h que seria o passo, ou seja, o passo indo a 0, partindo dai, surge a derivada com o limite.

Entenda esse passo como um número proximo a o ponto v por exemplo.

1.3.2. Derivada com o Limite.

```
III) Calcule a derivada utilizando o Limite.
```

a) $f(x) = 50x + 10$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ agora colocando os pontos $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{50(x + h) + 10 - (50x + 10)}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{50x + 50h + 10 -50x -10}{h}$ Agora é so cortar os termos e o h, acabou a derivação de uma função do primeiro grau.
$f'(x) = \lim_{h \to 0} 50$ ou seja, a $f(x) = ax + b = f'(x) = a$.

O primeiro passo é justamente colocar os pontos na função do limite. E os demia spassos são manipulações algebricas.

Porêm existem algumas regras para facilitar a vida de grandes derivações.

1.3.2. Regras de Derivação.

$f(x) = \mathbb{N} $ **a regra é** $f'(x) = 0$
$f(x) = x^{n}$ **a regra é** $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = sin(x)$ **a regra é** $f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$ **a regra é** $f'(x) = -sin(x)$

$f(x) = e^{x}$ **a regra é** $f'(x) = e^{x}$
$f(x) = ln(x)$ **a regra é** $f'(x) = \frac{1}{x}$

1. Quando a função é um número natural, a derivada dessa função é uma constante 0.
2. Quando a função é elevada a algum expoênte, basta descer o expoênte multiplicando o valor e subtrair (-1) do expoênte.
3. Quando a função é a seno, a derivada é a coseno.
4. Quando a função é a coseno, a derivada é a - *seno*.
5. Quando a função é uma exponencial, a derivada é ela mesmo.
6. Quando a função é um log, a derivada é x^{-1}.

Essas regras podem ser facilmente encontradas pela internet, e o mais importânte, todas essas regras podem ser provadas com o Limite.

$(f(x) + g(x))'$ **a regra é** $f'(x) + g'(x)$

$(n \cdot f(x))'$ **a regra é** $n \cdot f'(x)$

$f(x) \cdot g(x)$ **a regra é** $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)' $

$f(x) \div g(x)$ **a regra é** $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} $

1.3.3. Exemplos das Regras de Derivação.

$f(x) = 2x^{5} + ln(x) - sin(x)$ No primeiro elemento o 5 cai multiplicando o 2 e subtrai 1 do expoente (Regra 2), o $ln(x)$ é justamente $\frac{1}{x}$ e por fim, o $sin(x)$ é o $cos(x)$.

$f'(x) = 10x^{4} + \frac{1}{x} - cos(x)$

$(f(x) = x^{2}) \cdot (g(x) = sin(x))$ Nesse caso vai ser utilizado a regrinha. $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$(x^{2})' \cdot sin(x) + x^{2} \cdot (sin(x))'$ agora deriva individualmente, logo $ 2x \cdot sin(x) + x^{2} \cdot cos(x)$

$\frac{x^{2}}{sin(x)}$ ou $x^{2} \div sin(x)$

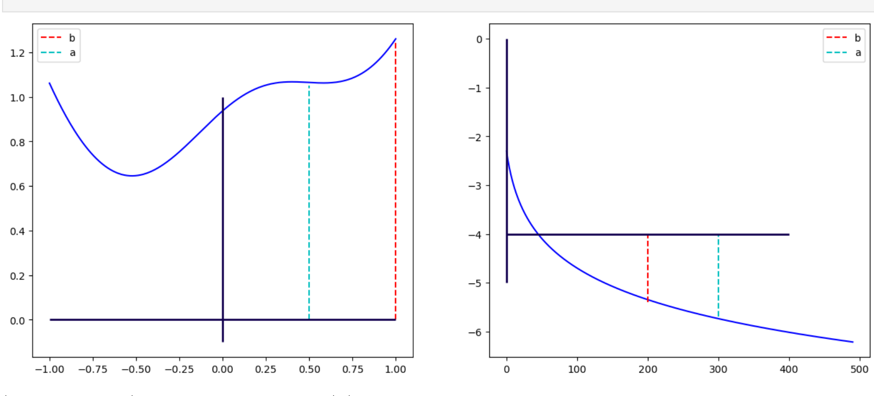
$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^{2}}$ mudando os elementos $\frac{(x^{2})' \cdot sin(x) - x^{2} \cdot (sin(x))'}{sin(x)^2}$

$\frac{2x \cdot sin(x) - x^{2} \cdot cos(x)}{sin(x)^2}$ para simplificar pode separar o $sin(x)^{2}$ em duas divisões e cortar o $sin(x)$ de cima da fração.

1.3. Integrais

A Integral é outra ferramenta matemática que pode ser utilizada para calcular a área de baixo de uma curva de uma função em pontos delimitados por a e b.

In [15]:
```julia
complex_functions()
```



$\int_{a}^{b} f(x) \,dx$ Integral da área acima do eixo X
$\mid \int_{a}^{b} f(x) \,dx \mid$ Integral da área em abaixo do eixo X

Continua algum dia...

2.0. Referências

Hamilton Luiz Guidorizzi **Um cúrso de Cálculo Vol 1. 5 Edição**.
Link:
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5580657/mod_resource/content/2/Um%20Curso%20de%20C%C3%A1lculo%20Vol%2001.pdf

Douglas Maiolli **Cálculo I - Limites Derivadas & Integrais**
Link: https://www.youtube.com/watch?v=EJ5FGPZbKeo&list=PLrOyM49ctTx8go5KFpSr-EMScIPygZNob

Geogebra **Geogebra Calculator**
Link: https://www.geogebra.org/calculator

THAIS MAGALHÃES SANTOS **Regras de Derivação**
Link: http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=803

Geogebra **Geogebra Calculator**
Link: https://www.geogebra.org/calculator

Canal da USP **Cálculo I**
Link: https://www.youtube.com/playlist?list=PLAudUnJeNg4tr-aiNyYCXE46L3qEZ2Nzx