

0.40 Prob: 10% Prob: 50% 0.35 Prob: 90% 0.30 0.25 0.20 0.15 0.10 0.05 0.00 2.3.2 Distribuição de Poisson Alta concentração de eventos próximos ao eixo y, uma das principais características é que não tem repetições como na distribuição binomial trabalha em um intervalo continuo. Ex: Em um estudo de chuva ou cliques em um site, no exemplo da chuva, qual é a chance de uma chuva, só que não existe o evento "não chuva" entre duas chuvas. Imagine um intervalo, que começa e 0 até uma variável W por exemplo. E eu divido em n intervalos muito pequenos, onde n tende ao infinito., logo a probabilidade está tendendo a 0 pois existem n intervalinhos, com essa quantidade de intervalos, virou uma binomial, ou seja, choveu ou não por exemplo. $P r \frac{\lambda}{r} n$ n $\frac{\lambda}{n}^{r}$ $\frac{\lambda}{n}^{n-r} \frac{n}{r n r}$ Distribuição de Poisson, logo λ (Quantidade de Chuva) = p * n, então p = $\frac{\lambda}{n}$. No Limite que n tende ao infinito, o produto de **n** e **r** não vai mudar pois **r** sempre vai ficar menor e **n** sempre vai ficando maior. $P r \lambda \frac{e^{\lambda} \lambda^r}{r}$ A média e a variância da distribuição binomial é dada pelo: λ E o Desvio Padrão é $\overline{\lambda}$ In [11]: $P(\lambda, r) = np.e^{-\lambda} * \lambda^{r} / np.math.factorial(r);$ Dado que eu esperava em média 35 carros entrando no shopping, qual a probabilidade de aparecer 20? In [15]: @printf "A probabilidade de somente uma chuva no mês é de: %.3f%%" P(35, 20)*100 A probabilidade de somente uma chuva no mês é de: -0.000% In [140... # Julia tem problema com elevar x a o espoente y function f(x, y) [x*=x for in 1:y] f(35, 20) 20-element Vector{Int64}: Out[140... 1500625 2251875390625 6616016035436858689 7865930784382691969 -4822766768660441855 -1652024524321314303 450275795304469505 -6392656039275616255 7551947002216534017 3654036140188672001 8358544585278177281 4785494631104806913 -2679742982427181055 2893676706708193281 8010019347241369601 -48246705104617471 -5786811055723249663 -8394158839848501247 541221425122377729 Logo em Python, aplicando a mesma função irá retornar a probabilidade de 0.0019 In [14]: @printf "A probabilidade de somente uma chuva no mês é de: %.3f%%" P(5, 1)*100 A probabilidade de somente uma chuva no mês é de: 3.369% In [895.. x = ss.poisson.rvs(2, size=500);In [896.. plot poisson(x, "m") Distribuição Poisson 0.30 Poisson Média 0.25 Mediana 0.20 Densidade 0.15 0.10 0.05 0.00 -0.05-2 0 2 4 6 8 Contagem 2.3.5 Distribuição Normal A distribuição Normal e simétrica a média e as outras distribuições são geralmente moldadas de forma normal. Em uma distribuição normal 68% dos dados ficam dentro de um desvio-padrão da média e 90% dos dados em dois desvios-padrões. A diferença entre a distribuição normal das outras distribuições (binomial e poisson) é que na noção de distribuição discreta e continua, ambas são distribuições discretas pois as possibilidades dos eventos eram discretos, agora x pode assumir uma probabilidade, logo a função é chamada de densidade de probabilidade. Onde para calcular a área em baixo da curva usa-se a ferramenta de Integral. Ou utiliza a tabela da normal. Na Integral, o primeiro valor de baixo (0) é o primeiro valor da esquerda para direita na distribuição, e o valor de cima (1) é justamente até In [97]: range = np.arange(-3, 3, 0.1)plot_normal(range, true) Normal Distribuição Normal Média Simétrica 0.40 0.35 0.30 0.25 0.20 0.15 0.10 0.05 0.00 -3 -2 -1 0 1 2 3 Função densidade de probabilidade In [290. plot normal(range, true); Normal Distribuição Normal Média 0.40 0.35 0.30 0.25 0.20 0.15 0.10 0.05 0.00 -3 -2 -10 2 1 3 Como a variável x é continua, sendo assim pode assumir infinitos valores, e tamém toda a area da curva gaussiana é 1*. Logo para calcular a área entre 1 e 2 da normal: $\frac{}{\pi\sigma} e^{\frac{x}{\sigma}} dx$ 2.3.6. QQ Plot QQ plot nada mais é que um plot para visualizar como está o shape da distribuição, se tem skewness ou kurtosis. Skewness: Geralmente se fala em Skewness quando a distribuição está tombada para algum dos lados, uma Skewness positiva significa que a distribuição está mais deslocada para a esquerda, e uma skewness negativa quando está mais deslocada a direita, o exemplo na imagem da distribuição exponencial abaixo. Kurtosis: Mede o quanto a distribuição está esticada para cima ou com formação de longas caldas, quando mais pontuda, maior a kurtosis e quando mais normal, menor a kurtosis, o exemplo é a distribuição exponencial que tem uma certa kurtosis positiva. In [161... # Existe um pacote chamado Plots que faz a mesma função de plotar o QQ Plot. x = np.random.randn(200);y = [log(abs(p)) for p in np.random.random(200)];z = ss.skewnorm.rvs(a=10, loc=50, size=200)plot_qq(x, y, z, "step") plt.savefig("QQplot.png") Probability Plot **Probability Plot Probability Plot** 52.5 52.0 Ordered Values Ordered Values Ordered Value 51.5 0 -1 51.0 50.5 -1 -2 50.0 -2 49.5 0 0 0 -1 -1-1 1 1 1 Theoretical quantiles Theoretical quantiles Theoretical quantiles 50 Skewed 40 60 40 50 30 Density o Density & % 20 10 10 10 50.5 -2.5 -1 50.0 51.0 51.5 52.0 52.5 -3.5 -3.0-2.0-1.5-0.5-1.02.3.7. Normalização A normalização é um conceito utilizado principalmente para treinar modelos de machine learning que consiste em movimentar a distribuição para o centro com média 0, resumidamente subtrair a média de todos os dados. Se reparar nos gráficos da distribuição normal, logo a média já está no 0. Se eu somar a média da distribuição em toda a distribuição ela vai ser deslocada para direita, se subtrair ela é deslocada a esquerda. E quando se divide por σ , logo a média e 0 e a dispersão é 1. Quando esta normalizada é possível utilizar a tabela da normal padrão paara calcular a área em baixo da curva. Exemplo, dado uma média de 200 e desvio padrão de 4, qual é a $P\ x$ • 1° Passo, calcular o Z, que nada mais é que subtrair a média e dividir pelo desvio padrão. , esse é o resultado que deve ser encontrado a área, para isso so checara tabela, onde são 2,5 os dois primeiros números e 0 o terceito número, o resultado vai ser 2° Passo, Realizar a seguinte expressão Subtrair pela metade da distribuição normal o resultado para pegar somente a probabilidade de ser maior que 210, e multiplicar por 100 para deixar em porcentagem, logo o resultado final é: 2.3.8 Distribuição Exponencial Usa o mesmo parâmetro λ da distribuição de Poisson, esse parâmetro permanece constante ao longo do período sendo considerado. É utilizado na engenharia para modelar falhas, tempo de visitas de sites, etc. In [870.. x = ss.expon.rvs(0.2, size=1000);In [871. plot exp(x, "r") Distribuição Exponencial 0.7 Exponencial Média 0.6 Mediana 0.5 0.4 Density 0.3 0.2 0.1 0.0 0 2 6 4 8 Contagem 2.3.9 Distribuição Weibull É uma extensão da distribuição Exponencial, na qual a taxa de evento pode mudar de acordo ocm um "parâmetro de forma" β Se β > 1, a probabilidade de um evento aumenta com o tempo. Se β < 1, a probabilidade de um evento diminui com o tempo. Quando o α da distribuição de Weibull é 1, retorná a distribuição exponencial. Sendo assim, pode ser utilizada na análise de sobrevivência & confiabilidade, e sua função é: Comulativa: $f \ x \ lpha \ eta \qquad e^{-rac{x}{eta} \ lpha}$ Densidade de Probabilidade: $f \ x \ lpha \ eta \ rac{lpha}{eta^lpha} \ x^a \ e^{rac{x}{eta}^lpha}$ In [276.. $f(x, a, b) = (a / (b^a)) * (x^(a-1)) * e^(-(x/b)^a)$ f(3, 3, 3)0.36787944117144233 Out[276.. In [275. 20^30 # não é possível utilizar numéros grandes pois o mesmo problema. -8070450532247928832 Out[275.. In [86]: x = ss.weibull min.rvs(1.5, scale=5000, size=100)plot wei(x, "r") Distribuição Weibull 0.00020 Weibull 0.00015 0.00010 0.00005 0.00000 5000 10000 15000 20000 Capítulo 3 3.1. Teste de Hipóteses Os testes de hipóteses são um dos pilares da estatística, o objetivo desses testes são rejeitar ou confirmar hipóteses, os testes de hipóteses também são chamados de testes de significância, em outras palavras, nos permite rejeitar ou não uma hipótese estatística com base nos resultados de uma amostra. Os testes de hipóteses são importantes pois dado a tendência humana em reagir a eventos incomuns e interpretá-los como algo significativo e real, em experimentos requer provas de que esses eventos são realmente diferentes e não eventos aleatórios. • Hipótese Nula: Nada mais é que o esperado, ou seja, o que já está acontecendo, o comum. • Hipótese Alternativa: O fenômeno que está sendo analisado, o contraponto da hipótese nula. • **Teste Unilateral**: Ou também chamado de teste Unicaldal, onde as possibilidades estão em uma direção. • **Teste Bilateral**: Ou também chamado de teste Bicaldal, onde as possibilidades estão em duas direções. Nível de Significância: É a probabilidade máxima permissível para cometer um erro de tipo I, em outras palavras é o limite para aceitar ou rejeitar a hipótese, esses limites estão entre (1%, 5% e 10%), também chamado de α . • P-Valor: Trabalha junto com o Nível de Significância e com a Ho sendo verdadeira, nada mais é que o valor para concluir o teste de hipótese, logo ele evidência que: Se o p-valor for menor ou igual ao nível de significância, rejeita-se a Hipótese Nula, pois realmente surtiu efeito o teste. Se o p-valor for maior que o α, aceita a Hipótese Nula, por não ter evidências o suficiente para aceitar a Hipótese Alternativa. • Teste Estatístico: Uma operação com dois grupos, ex subtrair a média de dois grupos. In [301... df = DataFrame(CSV.File("data/web page data.csv")); In [50]: mean_page_a = np.mean(df[df.Page .== "Page A", 2]) mean page b = np.mean(df[df.Page .== "Page B", 2]) @printf "Diferença do tempo de sessão entre a página A e B: %.2f%%" (mean page b - mean page a) *100 Diferença do tempo de sessão entre a página A e B: 35.67% Agora a pergunta é: Esse tempo foi gerado pelo acaso ou pela característica da página? Existem várias ferramentas para validar hipóteses, como o teste de permutação, teste t... H_o é H_a é á 3.1. Reamostragem 3.1.1. Teste de Permutação em tempos de sessão. O teste de permutação nada mais é que um teste para verificar se tem realmente um significado estatístico. 1. Separar o grupo de controle e o grupo de tratamento, o de tratamento que vai ser o grupo que irá receber o teste. 2. Depois do teste, calcular alguma estatística, exemplo a média da diferença dos dois grupos. 3. Juntar em uma base de dados o grupo de controle e o grupo de tratamento. 4. Amostragem aleatória de diferentes indivíduos dessa base de dados e calcular a mesma estatística e armazenar o resultado. Montar uma distribuição com os resultados. 6. Calcula a quantidade de vezes que os valores maior que a média sairam durante o processo de amostragem e divide pela quantidade de vezes que foi realizado a amostragem, logo esse é o p-valor, o valor da aleatoriedade na escolha dos grupos. In [219... diff = [permutation(df.Time, 21, 15) for _ in 1:1000]; p_valor = py"test"(diff, diff mean); In [246. plot permutation(diff, diff mean, "k", "g"); Diferença 200 175 150 125 100 75 50 25 -1.00 -0.75 -0.50 -0.25 0.00 0.25 0.50 1.00 0.75 In [302.. @printf "Logo a quantidade de vezes que excedeu o limite foi de %.2f%%\nEntão aceita a Ho." p valor*100 Logo a quantidade de vezes que excedeu o limite foi de 15.70%Então aceita a Ho. 3.1.2. Teste de permutação em taxas de conversão. Nesse exemplo existe +20000 visualizações de um determinado preço e foi mensurado a quantidade de cliques em ambos os preços. In [118... DataFrame (Dict("Resultado" => ["Preço A", "Preço B"], "Cliques" => [200, 182], "No Cliques" => [23539, 22406]) Out[118... 2 rows × 3 columns Cliques No Cliques Resultado Int64 Int64 String 1 200 23539 Preço A 22406 Preço B 182 In [122... obs diff = ((200/(23539+200)) - (182/(22406+182)))*100@printf "A diferença do Preço A e do Preço B é: %.3f%%" obs diff A diferença do Preço A e do Preço B é: 0.037% H_o ãá H_a Uma das formas de responder essa pergunta é realizando um teste de permutação. • Crie um vetor com todos os dados, ou seja, 45945 vezes foram realizados 0 cliques, logo um vetor com 45945 zeros, e um vetor com 382 que tiveram 1 clique, logo esse vetor vai ter um tamanho de 46327, contendo o total de zeros e o total de 1 cliques. Realize o teste de permutação n vezes. In [228... a = append! (vec(zeros(1, (45945))), vec(ones(1, 382)));per = [(permutation(a, 23739, 22588)*100) for in 1:1 000]; In [293.. plot permutation(per, obs diff, "k", "r"); Diferença 250 200 150 100 50 -0.3-0.10.0 0.1 0.2 -0.2 In [304.. p valor = py"test"(per, obs diff); In [308.. @printf "Em relação aos preços, com uma significância de 0.05, o p-valor foi: %.2f%%\nEntão aceita a Ho." p val Em relação aos preços, com uma significância de 0.05, o p-valor foi: 32.60% Então aceita a Ho. In [314... # Outras formas chi2, p value, df, = ss.chi2 contingency([[200, 23739 - 200], [182, 22588 - 182]]) @printf "Chi2: %.2f\nP-Value: %.2f" chi2 p value Chi2: 0.15 P-Value: 0.70 3.2. Teste T de Student O teste T de Student nada mais é que um teste de comparação de dois grupos em relação a sua média. Nas quais os dados são numéricos, mas para que seja utilizado é necessário usar uma forma padronizada de estatística de teste. Esse teste também é uma aproximação para o teste de permutação, devido que o teste de permutação na época de sua implementação era muito custoso. Para utilizar o teste t, é necessário alguns passos. 1. Calcula a média de ambos os grupos. A diferença entre as duas médias é significativa? 1. Elevar os dados de ambos os grupos por exemplo o grupo X e o grupo Y e somar X, Y os grupos ao quadrado. 1. Calcula a variância de ambos os grupos (ou o std). 1. Coloca na fórmula do teste t, com o resultado da fórmula, localiza na tabela da distribuição t. Obs: Existem várias formulas para a variância conhecida, não conhecida, amostras dependentes, idependentes e assim vai. Para aplicar o teste t ou Welch's t-test, quando a variância populacional é desconhecida em amostras idependentes (Com ou sem o N-1): Welch's T-Test: Essa fórmula é a mesma do t_o , logo retorna quase o mesmo resultado do método ttest_ind do scipy que esta armazenada em u script separado na pasta de scripts. Esse resultado é a **Estatística T**, logo precisa calcular ou ir na tabela t-student com os graus de liberdade (nPor exemplo se os graus de liberdade for 20 e o nível de significância for 0.05%, na tabela o p-valor vai ser aprx: 0.80.*** In [316... include("../scripts/t test.jl"); @printf "Estatística T: %.4f" t test(df[df.Page .== "Page A", 2], df[df.Page .== "Page B", 2], true) Estatística T, -1.0823 In [5]: plot page diff() Page A 4.0 Page B 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0.0 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 Time In [155.. info = pages() list = ["less", "two-sided"] for i in list t_test_ss = ss.ttest_ind(df[df.Page .== "Page A", 2], df[df.Page .== "Page B", 2], equal_var=false, alterr if i == "less" @printf "P-Value One Sided %.3f\n" t test ss[2] @printf "T-Statistic: %.3f\n" t_test_ss[1] @printf "\nP-Value Two Sided %.3f\n" t_test_ss[2] @printf "T-Statistic: %.3f\n" t_test_ss[1] end end P-Value One Sided 0.141 T-Statistic: -1.098 P-Value Two Sided 0.282 T-Statistic: -1.098 In [172... gl = glass delt(info["mean a"], info["mean_b"], info["std_a"]) r = pearson r(t test ss[1], 34)d = cohen d(info["mean a"], info["mean b"], info["std a"], info["std b"]) g = hedge g(d, info["n a"], info["n b"]) @printf "Glass ▲: %.4f" gl @printf "\nPearson p: %.4f" r @printf "\nCohen's d: %.4f" d @printf "\nHedge's g: %.4f" g Glass **∆**: -0.4131 Pearson ρ : 0.1851 Cohen's d: -0.3869 Hedge's g: -0.3761 Glass ▲: É a diferença média entre os dois grupos dividido pelo desvio padrão do grupo controle. Pearson ρ: Pearson / Rosenthal serve para calcular a correlação utilizando o P Value e os Graus de Liberdade. • Cohen's d: Diferença das médias, é uma formula do "tamanho do efeito", que resumidamente mede o tamanho das associações entre as variáveis ou da diferença entre as médias dos grupos. Hedge's g: Correção do D de Cohen. Glass: gl $\frac{x-x}{Sd}$ Pearson: r $\frac{t}{t df}$ Cohen's d: d $\frac{x}{sd}$ $\frac{x}{sd}$ Hedge's g: g = d3.3. Teste de Qui Quadrado Esse teste de hipótese pode ser utilizado em intervalos, o uso mais comum é em tabelas de contingência como cita no livro. A distribuição qui quadrado é determinado pelos graus de liberdade que esta relacionado ao número de dados. Se a frequência estiver entre 5 e 10, é necessário uma correção chamada correção de Yates. Passos para montar um teste de qui quadrado 1. Calcular o valor esperado em relação ao teste O exemplo do Livro é a média dos cliques e não cliques. 2. Calcular os residuos de Pearson (X_observado e X_esperado). $R = \frac{X_o - X_e}{\overline{X_e}}$ que retorna as contagens diferentes. 3. Calcular a estatística de qui quadrado. ξ 4. Calcular o grau de liberdade que é gl-k onde k é o n° de categorias. Exemplo do Livro em três Headlines (Teste A, B, C) In [431... df = DataFrame(Dict("Teste" => ["Headline A", "Headline B", "Headline C"], "Click" => [14, 8, 12], "NoClick" => Out[431... 3 rows × 3 columns Click NoClick **Teste** Int64 Int64 String 986 Headline A 2 992 Headline B 3 12 988 Headline C In [283.. @printf "Valores Esperados: \n Média de Cliques: %.4f\n Média de Não Cliques C: %.4f" ((14+8+12)/3) ((986+992 Valores Esperados: Média de Cliques: 11.3333 Média de Não Cliques C: 988.6667 In [664.. df = DataFrame(Dict("Teste" => ["Headline A", "Headline B", "Headline C"], "Click" => [0.792, -0.990, 0.198], Out[664... 3 rows × 3 columns Click NoClick Teste Float64 Float64 String 1 0.792 -0.084 Headline A 2 -0.99 0.106 Headline B -0.021 Headline C 3 0.198 Mesma lógica do teste T, tem que ir na tabela da distribuição qui quadrado com os graus de liberdade que são 2 e localizar o valor mais proximo de 1.66, que esta entre 0.50 na tabela, logo o p-valor vai ser aprox. In [300.. @printf "Estatística de Chi Quadrado: %.3f" sum(df.Click.^2)+sum(df.NoClick.^2) Estatística de Chi Quadrado: 1.665 3.3.1. Teste Qui Quadrado com permutação 1. Construa um vetor com os dados do teste (34 clicks e 2966 não clicks) 2. Embaralhe e pegue três amostras separadas de 1.000 valores e conte quantos clickes conseguiu. 3. Calcule o R entre as amostras e os dados esperados. 4. Repita o passo 2 e 3 n vezes. 5. Quantas vezes os valores do processo de reamostragem são maiores que os valores observados? In [751... info = permutation_chi2_julia() chi2obs, p_value, _ = ss.chi2_contingency(df) @printf "Chi2 Observado: %.4f\nReamostragem P-Valor: %.4f" info[2] info[1] @printf "\n\nChi2 Observado: %.4f\nScipy P-Valor: %.4f" chi2obs p value Chi2 Observado: 1.6659 Reamostragem P-Valor: 0.8800 Chi2 Observado: 1.6659 Scipy P-Valor: 0.4348 3.4. Teste Exato de Fisher Resumidamente é uma opção do teste de chi quadrado onde realmente tenta ser o mais exato posssível e determinar exatamente o quão extremo é o resultado calculando não apenas uma probabilidade, mas todas as probabilidades. Exemplo, se quatro pessoas compraram a camiseta azul e uma pessoa comprou a camiseta vermelha, sabendo que no estoque tem ncores, qual é a probabilidade de sair uma camiseta vermelha por primeiro e quatro camisetas azuis nas proximas quatro compras, qual é a probabilidade de uma camiseta azul, uma vermelha e três azuis... ou seja, qual é a probabilidade de todas as ordens das compras dessas cinco camisetas. Exemplo do Livro, no Python o método fisher_exact aceita somente uma matriz 2x2. In [490... list = [[[14, 12] [986, 988]],[[14, 8] [986, 992]], [[8, 12] [992, 988]]]; [ss.stats.fisher exact(k) for k in list] 3-element Vector{Tuple{Float64, Float64}}: Out[490... (1.1690331304935768, 0.8440019335625599)(1.7606490872210954, 0.28359694839847466) (0.6639784946236559, 0.5012686435809882) 3.5. Teste ANOVA

Tambem chamada de análise de variância, serve para compararr a média entre três ou mais grupos, por exemplo o test t é para dois

3. Caso o p-valor fosse $\leq \alpha$ teve um efeito entre os n médias, mas o teste aponta que pelo menos um dos grupos teve uma diferença,

Teste U de Mann-Whitney um teste parecido com as mesmas especificaçãoes dos outros, porém pode ser utilizado com um tensor.

4. Para evitar futuros erros, existem algumas correções para o teste ANOVA como a correção de Bonferroni e a correção de Sídak.

grupos, logo se estiver trabalhando com um teste com mais grupos, logo a anova é a opção mais viável.

• Variação entre grupos: Avaliação dos dados em relação a média da amostra.

Bonferroni e Sindak são correções para os testes da Anova.

plot normal plus (rg1, rg2, rg3, rg4, rg5);

Variação dentro dos grupos: Avaliando os dados em relação a média dos vários grupos.

• Kruskal-Wallis é um teste não paramétrico (N requer presupostos que a distribuição é normal).

não aponta qual grupo teve uma diferança, logo é necessário uma continuação dos testes de hipóteses.

Alguns requisitos para a o teste da Anova:

2. Geralmente a distribuição tem que ser normal.

1. Amostras Idependentes.

rg1 = np.arange(-5, 5, 0.1) rg2 = np.arange(-7, 3, 0.1) rg3 = np.arange(-6, 4, 0.1) rg4 = np.arange(-3, 7, 0.1) rg5 = np.arange(-10, 0, 0.1);

Outros Testes:

In [54]:

In [52]:

