Eliminación Gaussiana
Factorización $PA = LU$

Álgebra Lineal Computacional

Licenciatura en Cs. de Datos
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2do Cuatrimestre 2024

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} f_2 \leftarrow f_2 - (-1)f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - (2)f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 - (-3)f_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- ¿Cómo realizamos "$f_2 \leftarrow f_2 - (-1)f_1$" de forma matricial?

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Veamos que

$$(1,1,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, a_{13}+a_{23})$$

- $e_i^t A = \text{fila}_i(A)$
- $(e_1+e_2)^t A = e_1^t A + e_2^t A = \text{fila}_1(A) + \text{fila}_2(A)$

Combinaciones lineales de filas:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1\, e_1^t + \alpha_2\, e_2^t + \alpha_3\, e_3^t) \quad \Rightarrow$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A = (\alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \alpha_3\, e_3)^t A$
$= \alpha_1\, \text{fila}_1(A) + \alpha_2\, \text{fila}_2(A) + \alpha_3\, \text{fila}_3(A)$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

En nuestro ejemplo: “$f_2 \leftarrow f_2 - (-1)f_1$”

- Ya sabemos como realizar “$f_2 - (-1)f_1$”

$$(1,1,0,0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (0,1,-1,3)$$

- ¿Cómo ubicamos el resultado en la fila 2?

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo en $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Veamos que

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{f_2 + f_1} \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \boxed{f_2 + f_1} \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \boxed{f_2 + f_1} \end{pmatrix}$$

Regla general de multiplicación de matrices AB

Caso 3×3

$$\left(\begin{array}{c} a_1^t \\ \hline a_2^t \\ \hline a_3^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} & B & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a_1^t\, B \\ \hline a_2^t\, B \\ \hline a_3^t\, B \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} & A & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

En nuestro ejemplo: "$f_2 \leftarrow f_2 - (-1)f_1$"

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

En nuestro ejemplo:

- Todos los pasos:
  $f_2 \leftarrow f_2 - (-1)f_1$
  $f_3 \leftarrow f_3 - (2)f_1$
  $f_4 \leftarrow f_4 - (-3)f_1$
- Matricialmente: $M_1 A = A^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Continuando con la triangulación para columna 2 y 3...

- $M_3 M_2 M_1 A = U \Rightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}}_{L} U$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Intercambio de filas

P_{13} matriz de permutación que realiza el intercambio $f_1 \leftrightarrow f_3$. (matriz identidad con las filas 1 y 3 intercambiadas)

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} f_2 \leftarrow f_2 - 2 \cdot f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - 0 \cdot f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 - 3 \cdot f_1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} f_2 \leftarrow f_2 - 2 \cdot f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - 0 \cdot f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 - 3 \cdot f_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix}$$

De forma matricial...

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 0, 0, 0)$$

$M_1 = I - r_1 e_1^t$ con $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{pmatrix}$ y $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix} \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix}$$

Intercambio de filas

$f_2 \leftrightarrow f_3$ con matriz de permutación P_{23} (matriz identidad con las filas 2 y 3 intercambiadas)

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$P_{23}M_1P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix} \quad \underset{f_4 \leftarrow f_4 - (-\frac{1}{2}) \cdot f_2}{\overset{f_3 \leftarrow f_3 - 0 \cdot f_2}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$P_{23}M_1P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & -25 & -10 \end{pmatrix} \underset{f_4 \leftarrow f_4 - (-\frac{1}{2}) \cdot f_2}{\overset{f_3 \leftarrow f_3 - 0 \cdot f_2}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

De forma matricial...

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (0, 1, 0, 0)$$

$M_2 = I - r_2 e_2^t$ con $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{32} \\ m_{42} \end{pmatrix}$ y $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Último paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f_4 \leftarrow f_4 - 2 \cdot f_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$

Propiedad

Las matrices de permutación P que intercambian filas cumplen:

- $P = P^t$
- $P^2 = I$

Luego

$$M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = M_3 M_2 P_{23} M_1 \underbrace{P_{23} P_{23}}_{I} P_{13} A =$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$

Propiedad

Las matrices de permutación P que intercambian filas cumplen:

- $P = P^t$
- $P^2 = I$

Luego

$M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = M_3 M_2 P_{23} M_1 P_{23} P_{23} P_{13} A =$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$P_{23}M_1P_{23}$

$$P_{23}M_1P_{23} = P_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P_{23} = P_{23}\left(I - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}(1,0,0,0)\right)P_{23} =$$

$$\underbrace{P_{23}P_{23}}_{I} - \underbrace{P_{23}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \underbrace{(1,0,0,0)P_{23}}_{(1,0,0,0)} = I - \widetilde{r}_1 e_1^t = \widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3 M_2 \underbrace{P_{23} M_1 P_{23}}_{\widetilde{M}_1} P_{23} P_{13} A = M_3 M_2 \widetilde{M}_1 P_{23} P_{13} A = U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3 M_2 \underbrace{P_{23} M_1 P_{23}}_{\widetilde{M}_1} P_{23} P_{13} A = M_3 M_2 \widetilde{M}_1 P_{23} P_{13} A = U$$

$$P_{23} P_{13} A = \widetilde{M}_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3 M_2 \underbrace{P_{23} M_1 P_{23}}_{\widetilde{M}_1} P_{23} P_{13} A = M_3 M_2 \widetilde{M}_1 P_{23} P_{13} A = U$$

$$P_{23} P_{13} A = \widetilde{M}_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} U$$

$$\underbrace{P_{23} P_{13}}_{P} A = \underbrace{(I + \widetilde{r}_1 e_1^t + r_2 e_2^t + r_3 e_3^t)}_{L} U$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Volvamos al último paso

$$M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Volvamos al último paso

$$M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Podemos realizar una permutación antes del último paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Usamos matriz de permutación P_{34}

$$P_{34} M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Usamos matriz de permutación P_{34}

$$P_{34}M_2P_{23}M_1P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$

Último paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f_4 \leftarrow f_4 - \tfrac{1}{2} \cdot f_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_3P_{34}M_2P_{23}M_1P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$M_3 P_{34} M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$$M_3 P_{34} M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$$

"*Reacomodamos*" P_{23} como antes

$$M_3 P_{34} M_2 P_{23} M_1 \underbrace{P_{23} P_{23}}_{I} P_{13} A = U$$

$$M_3 P_{34} M_2 \widetilde{M}_1 P_{23} P_{13} A = U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Llegamos a

$$M_3 P_{34} M_2 P_{23} M_1 P_{13} A = U$$

"*Reacomodamos*" P_{23} como antes

$$M_3 P_{34} M_2 P_{23} M_1 \underbrace{P_{23} P_{23}}_{I} P_{13} A = U$$

$$M_3 P_{34} M_2 \widetilde{M}_1 P_{23} P_{13} A = U$$

Cómo "*reacomodamos*" P_{34}?

$$M_3\ P_{34}\ M_2\ \overbrace{P_{34}\ P_{34}}^{I}\ \widetilde{M}_1\ \overbrace{P_{34}\ P_{34}}^{I}\ P_{23}\ P_{13}\ A = U$$

$$M_3\ {\color{green}P_{34}\ M_2\ P_{34}}\ {\color{red}P_{34}\ \widetilde{M}_1\ P_{34}}\ P_{34}\ P_{23}\ P_{13}\ A = U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$M_3\, P_{34}\, M_2\, P_{34}\, P_{34}\, \widetilde{M}_1\, P_{34}\, P_{34}\, P_{23}\, P_{13}\, A = U$$

$$P_{34}\widetilde{M}_1 P_{34} = P_{34}(I - \widetilde{r}_1 e_1^t)P_{34} = P_{34}\left(I - \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}(1,0,0,0)\right)P_{34} =$$

$$\underbrace{P_{34}P_{34}}_{I} - \underbrace{P_{34}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\end{pmatrix}}\underbrace{(1,0,0,0)P_{34}}_{(1,0,0,0)} = I - \widetilde{\widetilde{r}}_1 e_1^t = \widetilde{\widetilde{M}}_1$$

Pasamos a $\boxed{M_3\, P_{34}\, M_2\, P_{34}\, \widetilde{\widetilde{M}}_1\, P_{34}\, P_{23}\, P_{13}\, A = U}$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

$$M_3 P_{34} M_2 P_{34} \widetilde{\widetilde{M}}_1 P_{34} P_{23} P_{13} A = U$$

$$P_{34} M_2 P_{34} = P_{34}(I - r_2 e_2^t) P_{34} = P_{34}\left(I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (0,1,0,0)\right) P_{34} =$$

$$\underbrace{P_{34} P_{34}}_{I} - \underbrace{P_{34} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}} \underbrace{(0,1,0,0) P_{34}}_{(0,1,0,0)} = I - \widetilde{r}_2 e_2^t = \widetilde{M}_2$$

Pasamos a $\boxed{M_3 \widetilde{M}_2 \widetilde{\widetilde{M}}_1 P_{34} P_{23} P_{13} A = U}$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3 \widetilde{M}_2 \widetilde{\widetilde{M}}_1 P_{34} P_{23} P_{13} A = U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3 \widetilde{M}_2 \widetilde{\widetilde{M}}_1 P_{34} P_{23} P_{13} A = U$$

$$P_{34} P_{23} P_{13} A = \widetilde{\widetilde{M}}_1^{\,-1} \, \widetilde{M}_2^{\,-1} \, M_3^{-1} \, U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Entonces

$$M_3\widetilde{M}_2\widetilde{\widetilde{M}}_1 P_{34}P_{23}P_{13}A = U$$

$$P_{34}P_{23}P_{13}A = \widetilde{\widetilde{M}}_1^{-1}\,\widetilde{M}_2^{-1}\,M_3^{-1}\,U$$

$$\underbrace{P_{34}P_{23}P_{13}}_{P}A = \underbrace{(I + \widetilde{\widetilde{r}}_1 e_1^t + \widetilde{r}_2 e_2^t + r_3 e_3^t)}_{L}U$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Pivoteo parcial (primer paso)

$$\text{Buscamos } |a_{i^\star 1}| = \max_{1 \le i \le n} |a_{i1}|$$

- Intercambiamos fila 1 con fila $i^\star$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad |a_{i^\star 1}| = 6, \text{ con } i^\star = 4$$

Intercambiamos $f_1 \leftrightarrow f_{i^\star}$ antes del primer paso de triangulación. Repetimos en cada paso $k = 1, \ldots, n-1$ la búsqueda $\max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k-1)}|$ e intercambiamos.