# Университет ИТМО

Теория вероятностей

# Практическая работа №6

Построение доверительных интервалов для оценки средней генеральной совокупности

Вариант 3


ФИО студента: Готовко Алексей Владимирович
Направление подготовки: 09.03.04 (СППО)
Учебная группа: P32101
ФИО преподавателя: Селина Е.Г.


Санкт-Петербург
2023г.

# 1 Задание 1

## 1.1 Данные

Выборка:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63.4 | 64.5 | 57.1 | 51.7 | 40.1 | 37.7 | 45.8 | 54.9 | 35.9 | 31.0 | 35.5 | 19.2 | 13.6 | 31.4 | 40.1 |

Доверительная вероятность: $\gamma = 0.9$
Размер выборки: $n = 15$

## 1.2 Решение

Размер выборки мал, поэтому используем следующую формулу:

$$\overline{X} - t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Так как в выборке практически все частоты значений равны единице (повторяется лишь одно значение – 40.1 два раза), используем формулу простых средних:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} =$$
$$= \frac{13.6 + 19.2 + 31.0 + 31.4 + 35.5 + 35.9 + 37.7 + 40.1 + 40.1 + 45.8 + 51.7 + 54.9 + 57.1 + 63.4 + 64.5}{15} =$$
$$= 41.46$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 13.6^2 + 19.2^2 + 31.0^2 + 31.4^2 + 35.5^2 + 35.9^2 + 37.7^2 +$$
$$+ 40.1^2 + 40.1^2 + 45.8^2 + 51.7^2 + 54.9^2 + 57.1^2 + 63.4^2 + 64.5^2 =$$
$$= 28911.69$$

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{28911.69}{15} - 41.46^2 = 208.5144$$

Соотношение между исправленным среднеквадратическим отклонением и дисперсией:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D(X)$$

Тогда:

$$S^2 = \frac{15}{14} \cdot 208.5144 \approx 223.4083,$$
$$S \approx \sqrt{223.4083} \approx 14.9468$$

Надйем квантиль $t_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot (n-1)$ по таблице квантилей распределения Стьюдента:

$$\gamma = 0.9$$

$$n = 15$$
$$\frac{\gamma+1}{2} = 0.95$$
$$t_{0.95}(14) = 1.761$$

Подставим значения в исходную формулу:

$$41.46 - 1.761 \cdot \frac{14.9468}{\sqrt{15}} < m < 41.46 + 1.761 \cdot \frac{14.9468}{\sqrt{15}} \iff$$
$$\iff 34.6639 < m < 48.2561.$$

# 2 Задание 2

## 2.1 Данные

Известная информация о выборке:

$$n = 100,$$
$$\overline{X} = 82,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 686800.$$

Также $\gamma = 0.98$.

## 2.2 Решение

Размер выборки велик, поэтому используем следующую формулу:

$$\overline{X} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{686800}{100} - 82^2 = 144$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{144} = 12$$

Определим $t_\gamma$ по таблице распределения нормального закона $\Phi(x)$:

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma + 1}{2} = \frac{1.98}{2} = 0.99$$

$$t_\gamma = 2.33$$

Подставим значения в исходную формулу:

$$82 - \frac{2.33 \cdot 12}{\sqrt{100}} < m < 82 + \frac{2.33 \cdot 12}{\sqrt{100}} \iff$$
$$\iff 79.204 < m < 84.796.$$

# 3 Задание 3

## 3.1 Данные

В выборке семян клевера встречаются повилики:

| Число семян повилики | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Число выборок | 599 | 315 | 74 | 12 |

Уровень значимости: $\alpha = 0.01$.
Проверить гипотезу, что выборка имеет распределение Пуассона.

### 3.2 Решение

Оценим параметр $\lambda$:

$$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{0 \cdot 599 + 1 \cdot 315 + 2 \cdot 74 + 3 \cdot 12}{1000} = \frac{499}{1000} = 0.499$$

Вычислим теоретические вероятности $p_i$ и теоретические частоты $n_i^*$ с помощью формул:

$$p_i = \frac{\hat{\lambda}^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$n_i^* = n \cdot p_i$$

| $i$ | $n_i$ | $p_i$ | $n_i^*$ | $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 599 | 0.60714 | 608 | 0.133 |
| 1 | 315 | 0.30296 | 303 | 0.475 |
| 2 | 74 | 0.07559 | 76 | 0.053 |
| 3 | 12 | 0.01257 | 13 | 0.077 |
| Сумма | 1000 | – | 1000 | $\chi^2_{\text{набл.}} = 0.738$ |

Найдем в таблице квантилей распределения $\chi^2$ квантиль порядка $1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ с $k - l - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ степенями свободы, где $k$ – число групп, $l$ – число параметров (для распределения Пуассона $l = 1$):

$$\chi^2_{1-\alpha}(k - l - 1) = \chi^2_{0.99}(2) = 9.21$$

Тогда

$$0.738 = \chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{крит.}} = 9.21 \Longleftrightarrow \text{гипотеза принимается.}$$