GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

5º
Matemática

Quinto Grado. Segundo Ciclo. Educación Secundaria

Libro abierto

SERIE 1

Versión digital

MATEMÁTICA
Quinto Grado. Segundo Ciclo. Educación Secundaria

SERIE 1, PROYECTO LIBRO ABIERTO

Este libro ha sido diseñado y concebido por la **UNIDAD EDITORIAL** del **Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD)** dirigida por **MANUEL NÚÑEZ ASENCIO.**

EQUIPO UNIDAD EDITORIAL

Asesoría pedagógica:	*Ancell Scheker Mendoza, Leonidas Germán, Carlos Geofrannys Vidal Pérez, María Virtudes Núñez Fidalgo*
Coordinadores de diagramación, corrección y cierre:	*Félix Gómez y Josephine Vilorio*
Asesor editorial:	*Lony Fernández Álvarez*
Diseño gráfico y diagramación:	*Unidad Editorial MINERD*
Equipo de edición:	*Matemática (Aury Pérez)*
Corrección de textos y estilo:	*Equipo de revisores del MINERD y del ISFODOSU*
Ilustración / Fotografía:	*Equipo de ilustradores del MINERD y del ISFODOSU Prexel, Unsplash, Freepik, Google maps, Wikipedia*

CONTENIDOS Y TEXTOS

Coordinación general:	Esther Morales (Convenio Institucional)
Autores contenidos y textos:	Dr. Wladimir Serrano y Dra. Esther Morales (Convenio Institucional)
Diseño gráfico y diagramación:	Carlos Rodríguez Almaguer
Ilustración / Fotografía:	Alan Escalona, Joselyn Salazar, Oriana Riveros, Venus Mata

Av. Máximo Gómez esquina Santiago, #2 Gazcue, Distrito Nacional, República Dominicana
809-688-9700 | info@minerd.gob.do | www.ministeriodeeducacion.gob.do

ISBN: 978-9945-646-47-4

Impreso por: Editora Corripio, S.A.S

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Convenio Institucional:

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

AUTORIDADES

Luis Abinader
Presidente de la República Dominicana

Raquel Peña
Vicepresidenta de la República Dominicana

Ángel Hernández Castillo
Ministro de Educación

Ancell Scheker Mendoza
Viceministra de Servicios Técnicos y Pedagógicos

Julio Cordero Espaillat
Viceministro de Gestión Administrativa

Ramón Rolando Reyes Luna
Viceministro de Planificación y Desarrollo Educativo

Oscar Amargós
Viceministro de Supervisión y Control de la Calidad Educativa

Ligia Jeanette Pérez Peña
Viceministra de Descentralización y Participación

Francisco Germán D´Oleo
Viceministro de Acreditación y Certificación

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Libro Abierto

Libro Abierto es la colección de textos escolares orientada a impactar en la calidad de la educación dominicana. Para la elaboración de los contenidos de estos libros participaron las academias científicas, las instituciones educativas y las universidades nacionales. En estos centros se concentran los principales intelectuales del país cuyos talentos han sido puestos al servicio de la educación nacional.

La colección Libro Abierto tendrá dos presentaciones. Una impresa, integrada por dos series, y la otra digital. En la primera, se publicarán aquellos textos que se orientan al segundo ciclo del Nivel Inicial, los primeros tres grados de primaria y las áreas curriculares de primaria y secundaria: Ciencias Sociales, Lengua Española, Matemática y Ciencias de la Naturaleza.

En la presentación digital se publicarán los libros de texto de todas las áreas y los materiales que sirvieron de base para la educación a distancia durante la pandemia. Para ello, se dispone de una plataforma desde la cual, los estudiantes y docentes, podrán descargar dichos materiales y hacer uso de ellos libremente. Fortalecemos así la educación bajo la modalidad híbrida, impresa y digital.

Con esta colección Libro Abierto se impactará positivamente en la calidad de la educación y, además, los recursos disponibles en el presupuesto del MINERD se utilizarán de una manera más eficiente.

Estos libros constituyen un referente cualitativo en la historia de la educación dominicana y esperamos que los directores de centros, los docentes, los estudiantes y sus padres sean los críticos permanentes de los mismos y que sus opiniones ayuden a mejorarlos constantemente.

Ángel Hernández Castillo

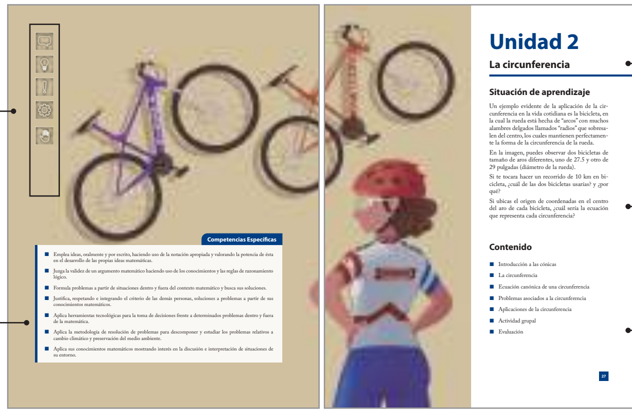
Ministro de Educación

¿CÓMO FUNCIONA TU LIBRO?

DOS PÁGINAS DE APERTURA DE UNIDAD

Iconos de Competencias fundamentales

Competencias Específicas claramente definidas



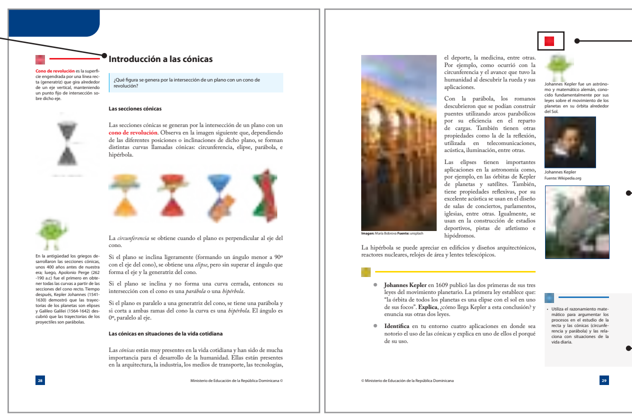
Identificador y título de la unidad didáctica

Situación de aprendizaje

Sumario de la Unidad

DIEZ PÁGINAS DE CONTENIDOS

Título de la doble página y pregunta didáctica



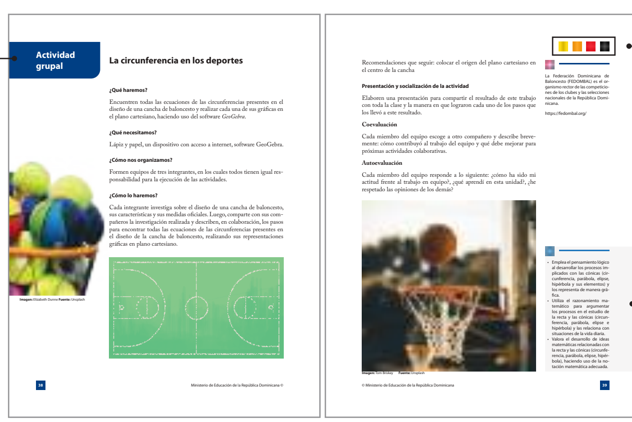
Iconos de Competencias Fundamentales aplicados a los contenidos

Columna de viñetas con contenidos variados

Indicadores de Logro

DOS PÁGINAS DE ACTIVIDAD GRUPAL

Título de la doble página

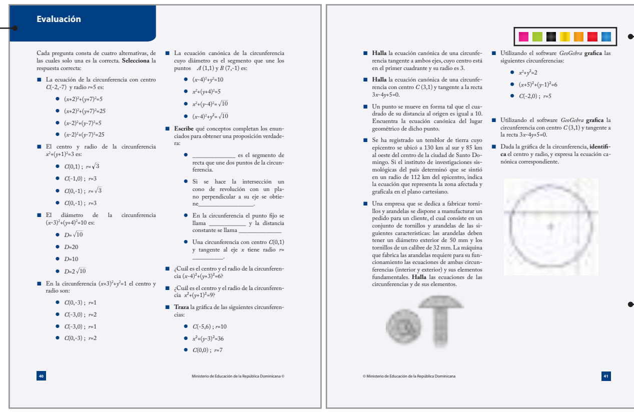


Iconos de Competencias Fundamentales

Los contenidos en las páginas de actividad grupal son variados: textos, actividades, ejercicios...

DOS PÁGINAS DE EVALUACIÓN

Título de la doble página


Evaluación

Iconos de Competencias Fundamentales

Se incluyen actividades diversas de **heteroevaluación y coevaluación.**

También incluye una **autoevaluación.**

Competencias Fundamentales

- Competencia Ética y Ciudadana
- Competencia Comunicativa
- Competencia de Pensamiento Lógico, Creativo y Crítico
- Competencia de Resolución de Problemas
- Competencia Científica y Tecnológica
- Competencia Ambiental y de la Salud
- Competencia de Desarrollo Personal y Espiritual

Viñetas de la Unidad

VOCABULARIO. Recurso de apoyo para conocer el significado de palabras poco comunes que enriquecen el vocabulario del estudiante.

EN LÍNEA. Viñeta opcional que motiva al estudiante a buscar informaciones virtuales a través de códigos QR y enlaces que le conectan con páginas web reconocidas.

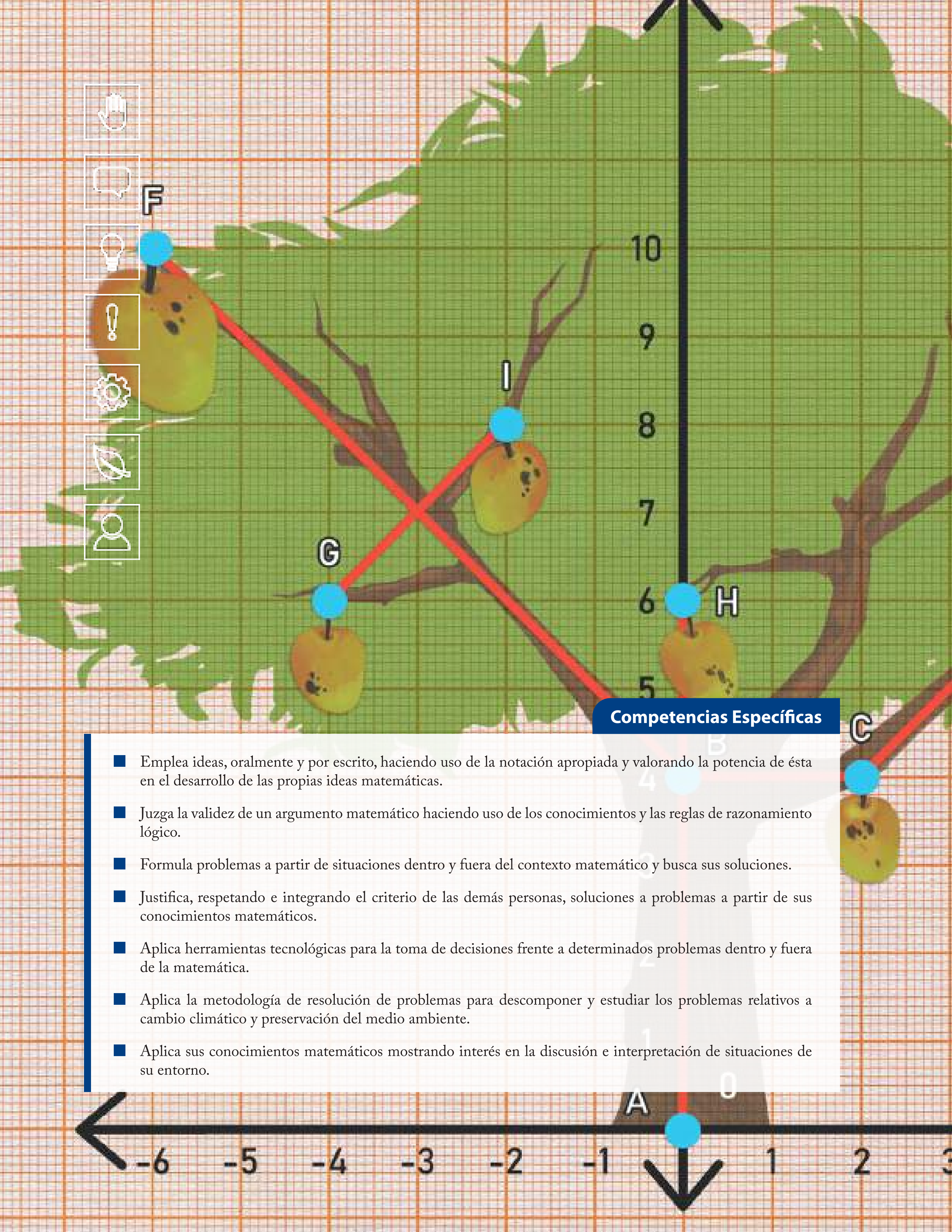
MI PAÍS. Viñeta opcional para resaltar las instituciones públicas de nuestro país que trabajan con temas específicos.

MI CULTURA. Viñeta opcional que pone de relieve los valores culturales dominicanos.

EN EL CUADERNO. Viñeta de uso obligatorio para indicar actividades y ejercicios.

INDICADORES DE LOGRO. Dirigida al docente para evaluar el avance de los estudiantes.

ÍNDICE DE CONTENIDOS



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

Unidad 1

Rectas

Situación de aprendizaje

En República Dominicana hay gran variedad de mangos; una de las más conocidas internacionalmente es la variedad mingolo. La imagen muestra una mata de dicho fruto, en la cual se destacan líneas rectas sobre el plano cartesiano que modelan el tronco y sus ramas.

Puedes indicar ¿cuáles líneas corresponden a rectas perpendiculares y paralelas?

¿Cuáles de las rectas tienen inclinación positiva, negativa o cero?

¿Cuál es el recorrido más corto para llegar desde el punto A a los mangos que se ubican en el punto F y en el punto E?

Contenido

- Distancia y punto medio entre dos puntos
- La recta y su pendiente
- Ecuaciones de la recta
- Posiciones relativas de dos rectas
- Aplicaciones de la recta
- Actividad grupal
- Evaluación

Distancia y punto medio entre dos puntos

> ¿Cómo se determina la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano?

Sistema de coordenadas cartesianas para el plano

Un sistema de coordenadas cartesianas, indicado en la figura 1, consta de dos rectas numéricas X, Y, llamadas ejes coordenados. La recta X se denomina eje de las abscisas o eje X, la recta Y es el eje de las ordenadas o eje Y, las cuales son perpendiculares entre si y su punto de intersección es el origen O.

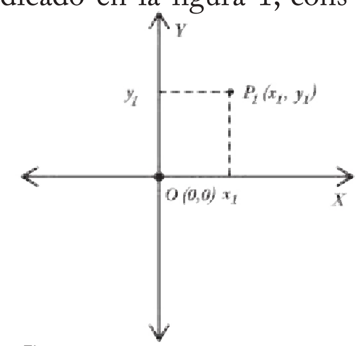


Figura 1

Los ejes X, Y se orientan de modo que: en el eje X los números positivos se ubican a la derecha del origen y los negativos a la izquierda; mientras que en el eje Y, los números positivos se ubican hacia arriba del origen y los negativos hacia abajo.

Los ejes de coordenadas X, Y dividen el plano real en cuatro (4) regiones llamadas cuadrantes (ver figura 2), que se nombran de la manera siguiente: primer cuadrante (I), segundo cuadrante (II), tercer cuadrante (III) y cuarto cuadrante (IV).

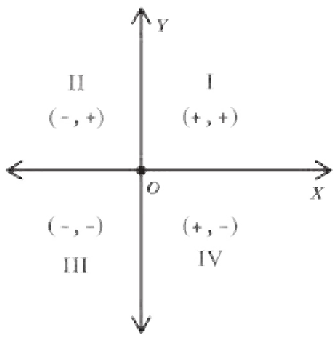


Figura 2

La proyección ortogonal del punto P_1 sobre el eje de las abscisas es un punto A, al cual le corresponde una coordenada x_1 que llamaremos abscisa de P_1; la proyección ortogonal de P_1 sobre el eje de las ordenadas es un punto B, al cual le corresponde una coordenada y_1, y se le denomina ordenada de P_1. Los dos números reales, x_1 y y_1, se llaman coordenadas rectangulares o cartesianas de dicho punto, y se expresa $P_1(x_1, y_1)$. En la figura 3, se puede apreciar un ejemplo gráfico de puntos para $P_1(2, 3)$, $P_2(-4, 2)$, $P_3(-1, -3)$, $P_4(4, -2)$ y P_5 (0, 0). Un sistema de coordenada le hace corresponder un único par ordenado de coordenadas, a cada punto del plano y viceversa.

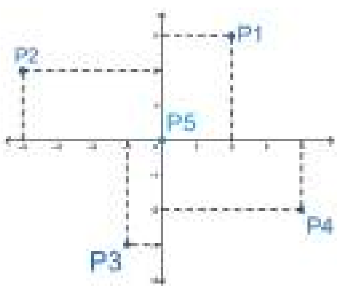


Figura 3

Distancia entre dos puntos

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, entonces, la distancia euclideana d, entre los puntos P_1 y P_2, es la longitud del segmento que los conecta, la cual viene dada por la expresión siguiente: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (ver figura 4)

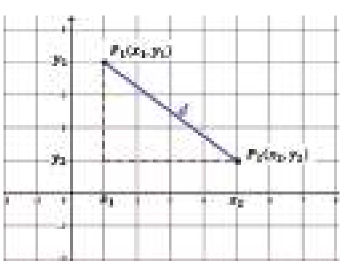


Figura 4

Ejemplo. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(2, 3)$ y $P_2(-4, 2)$.

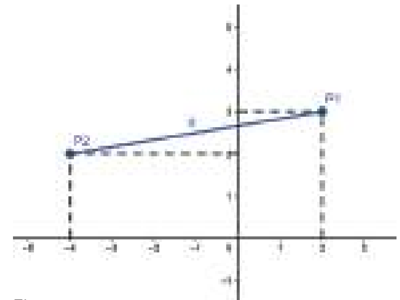


Figura 5

Solución. Se sustituyen las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 en la fórmula de distancia entre puntos: $d=\sqrt{(-4-2)^2+(2-3)^2}$.

Se efectúan las operaciones dentro de los paréntesis y se calculan las potencias: $d=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$.

La distancia entre los puntos P_1 (2, 3) y P_2 (-4, 2) es $d=\sqrt{37}$ (figura 5).

Punto medio de un segmento

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $P_1 P_2$, entonces, las coordenadas el punto medio $P_m(x_m, y_m)$ vienen dadas por:

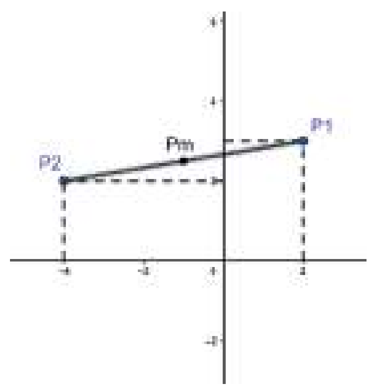
$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ y } y_m=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Ejemplo. Al colocar un cable que va desde el punto $P_1(2, 3)$ al $P_2(-4, 2)$, es necesario colocar un apoyo adicional en el punto medio, entre P_1 y P_2. Halla las coordenadas de ese punto.

Solución. Se sustituyen las coordenadas de los puntos P_1 y P_2, en las fórmulas:

$$x_m=\frac{2+(-4)}{2}=-1 \text{ y } y_m=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$

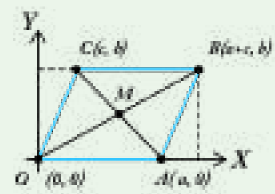
El punto donde se debe colocar el apoyo adicional entre P_1 y P_2 es $P_m\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.



- **Grafica** los siguientes puntos, luego **calcula** la distancia entre ellos y el punto medio del segmento que los une.
  - $P_1\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ y $P_2(2, -2)$
  - $P_1(3, 2)$ y $P_2(-4, -5)$

Sigue los pasos que conducen a demostrar que: "Las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en el punto medio".

1. Se dibuja un paralelogramo con un vértice en el origen y uno de sus lados, coincidiendo con el eje de las *X* y seguidamente, se designan a continuación los vértices:



2. Considerando que *M'* y *M''* son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{AC}$.

3. Se aplica la fórmula de punto medio de un segmento, para obtener, respectivamente, las coordenadas de *M'* y *M''*:

$$M'\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ y } M''\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Así se concluye que: siendo que el punto medio del segmento $\overline{OB}$ es igual al punto medio del segmento $\overline{AC}$, entonces, las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en el punto medio.

- Utiliza el razonamiento matemático, para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas y las relaciona con situaciones de la vida diaria.

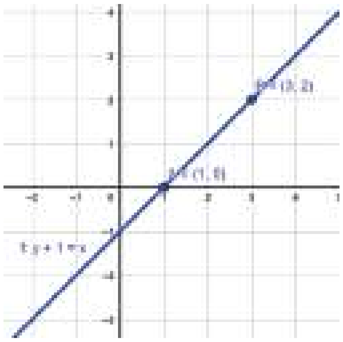
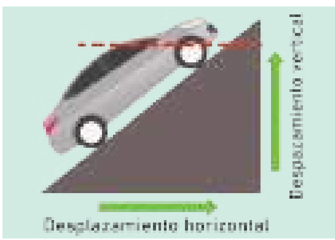


Figura 6 Dos puntos determinan una recta



La recta, es el lugar geométrico de todos los puntos que, tomados de dos en dos, poseen la misma pendiente.

Determina e identifica la pendiente de la recta

https://wordwall.net/es/resource/32835011/sesi%C3%B3n-3-pendiente-de-la-recta

La recta y su pendiente

¿Qué significa la pendiente de una recta?

La recta

La recta es un término no definido y que solo se puede dar una idea intuitiva, se puede decir que es una sucesión continua e infinita de puntos, que siguen una misma dirección. Analíticamente, una recta en el plano está representada por una ecuación de primer grado con dos variables, x e y. Por ejemplo, $y + 1 = x$. Dos puntos determinan una recta (figura 6).

Pendiente de una recta dado dos puntos

La pendiente es un concepto importante en la representación gráfica de ecuaciones, es una tasa de cambio de un punto a otro en una recta. Hay varias formas de encontrar y describir la pendiente. Podemos elegir cualquier forma, que sea apropiada para una situación dada.

Usamos la siguiente relación para encontrar la pendiente:

$$Pendiente = \frac{Cambio\ en\ y}{Cambio\ en\ x}$$

Esto significa que, si una recta está en el plano de coordenadas, entonces, el **desplazamiento horizontal** es el cambio en la coordenada x y el **desplazamiento vertical** es el cambio en la coordenada y, entre dos puntos cualesquiera de la recta.

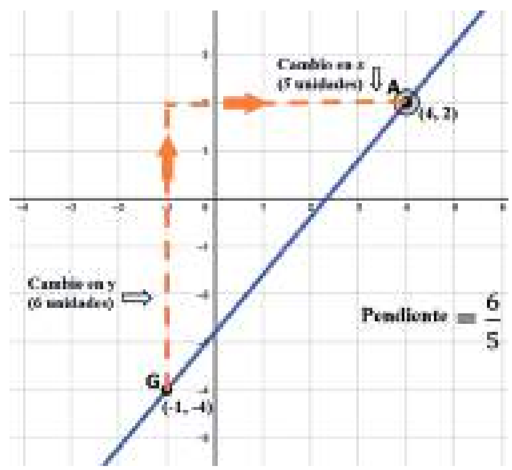


Figura 7

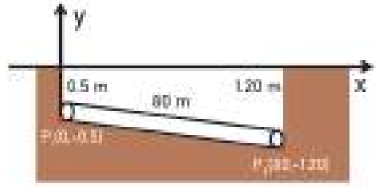
Si conocemos las coordenadas de dos o más puntos de una recta, puede usarse la fórmula de la pendiente.

La pendiente (m) de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } x_2 \neq x_1.$$

Ejemplo. Unos trabajadores están colocando una tubería en una zanja de 80 m de largo. El primer extremo va a una profundidad de 0.5 m y el extremo final va a 1.20 m de profundidad. ¿Cuál es la pendiente de la tubería?

Solución. Realizamos una representación gráfica de la situación, ubicando el sistema de referencia, como se muestra en la figura.



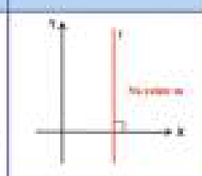
Sean $P_1(x_1, y_1) = (0, -0.5)$ y $P_2(x_2, y_2) = (80, -1.20)$.

Aplicando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se tiene que:

$$m = \frac{-1.20-(-0.5)}{80-0} = \frac{-0.7}{80} \approx -0.0088$$

La pendiente de la tubería es -0.0088.

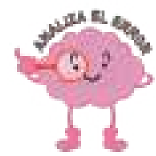
Podemos clasificar las rectas según sus pendientes o su inclinación, respecto al eje de las abscisas.

Las rectas que ascienden de izquierda a derecha tienen pendiente positiva o el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo	Las rectas que descienden de izquierda a derecha tienen pendiente negativa o el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.	Las rectas horizontales tienen pendiente cero o el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es cero.	Las rectas verticales no tienen pendiente (indefinida) o el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es recto.
			

- **Obtén** la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos y clasifícala según su inclinación:

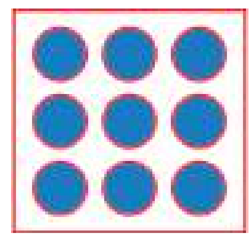
  • (1, 3) y (2, 4) • (-1, 5) y (7, -3) • (2, 3) y (-2, 3).

- ¿Puedes justificar por qué el valor de la pendiente no depende del par de puntos que se tomen de la recta?



Un vehículo sube por una pendiente de 20 %

Conecta todos los circulos usando solo 4 líneas rectas



Practica con GeoGebra las diferentes inclinaciones de una recta en el plano.

https://www.geogebra.org/m/Ksk3Dpxh

- Utiliza el razonamiento matemático, para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola) y las relaciona con situaciones de la vida cotidiana.

Ecuaciones de la recta

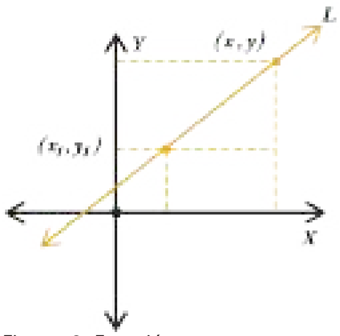


Figura 8 Ecuación *recta punto-pendientes*.

¿Qué se necesita para determinar la ecuación de una recta?

Ecuación de la recta punto-pendiente

Si el punto (x_1, y_1) está localizado en una recta con pendiente m, a par de la fórmula de la pendiente, sepuedeescribirunaecuacióndelarectaquecon enetodoslospuntos (x, y).(figura 8).

La fórmula de pendiente dice que, para cada $(x, y) \neq (x_1, y_1)$ sobre la recta, $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, donde $x \neq x_1$

Multiplicando por $x - x_1$, en ambos miembros, se tiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

En general, si una recta tiene una pendiente m y contiene un punto (x_1, y_1), entonces, todos los puntos (x, y) en la recta satisfacen la ecuación: $y - y_1 = m\ (x - x_1)$ **(I)**

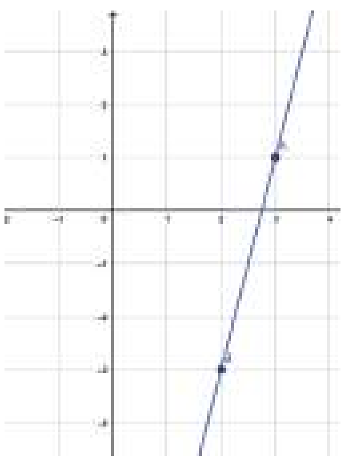


Figura 9. *Recta punto pendiente.*

Ejemplo. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto (3, 1), y su pendiente es 4.

Solución. Se sustituyen la pendiente 4 y el punto en la ecuación

(I): y-1=4 (x-3).

Si se despeja la variable y de la ecuación anterior, podemos obtener otra expresión equivalente: $y = 4x - 11$, y si se quiere graficar la recta, asignamos otro valor a x, por ejemplo $x = 2$ y se busca el valor de y.

$$y = 4(2) - 11 \rightarrow y = -3$$

Luego, teniendo los puntos (3, 1) y (2, -3), se llevan al sistema de coordenadas cartesiana y posteriormente se traza la recta que pasa por dichos puntos (ver figura 9).

La ecuación $y = 4x - 11$ también recibe el nombre de **ecuación de la recta pendiente-ordenada en el origen**, ya que tiene la forma:

$$y = mx + b$$

La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b (su intersección con el eje Y).

La siguiente tabla muestra el costo de las semillas de girasol por libra. Sabiendo que esta relación se modela a través de la ecuación una recta, ¿cuál es el valor que falta en la tabla?

Libras (x)	Costo en pesos (y)
2	140
3	?
4	280

Ecuación general de la recta

A la expresión $Ax + By + C = 0$ se le llama la forma general de la ecuación de la recta, donde, A o B deben ser diferentes de cero y C, puede o no, ser igual a cero. La pendiente está dada por $-\frac{A}{B}$ y la ordenada en el origen es $-\frac{C}{B}$, siempre que $B \neq 0$.

Ejemplo. Determina la pendiente y la ordenada, en el origen de la recta de ecuación $8x - 4y + 16 = 0$ y realiza su representación gráfica, en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución. Sabiendo que la ecuación $8x - 4y + 16 = 0$ está dada en forma general, entonces, identificamos $A = 8$, $B = -4$ y $C = 16$, por lo tanto, la pendiente es $-\frac{A}{B} = -\frac{8}{-4} = 2$ y la ordenada en el origen es $-\frac{C}{B} = -\frac{16}{-4} = 4$.

Para graficar basta hallar dos puntos que satisfagan la ecuación, es decir, dos puntos de la recta, por ejemplo: las intercepto o intersecciones con los ejes coordenados, y luego ellos se conectan con una línea recta.

En la intersección con el eje X, se hace $y = 0$.

$$8x - 4(0) + 16 = 0 \rightarrow 8x = -16 \rightarrow x = \frac{-16}{8} = -2.$$

En la intersección con el eje Y, se hace $x = 0$.

$$8(0) - 4y + 16 = 0 \rightarrow -4y = -16 \rightarrow y = \frac{-16}{-4} = 4$$

Luego, se conectan las dos intersecciones con una línea recta (ver figura 12).

- **Halla** la pendiente y la ordenada, en el origen de las rectas que pasan por los puntos indicados. Luego, realiza la representación gráfica de cada recta, en un mismo sistema de coordenadas cartesianas. Usa *GeoGebra* para verificar las gráficas realizadas.
  - $P(1, -1)$ y $Q(5, 1)$
  - $P(-2, -3)$ y $Q\left(\frac{5}{2}, 6\right)$
- **Halla** la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas:
  - $3x - 4y + 12 = 0$
  - $6x + 3y - 9 = 0$
  - $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$

¿La ecuación $Ax + By + C = 0$, representa siempre una línea recta?

Para contestar a esta pregunta, examinaremos las dos formas posibles de la ecuación $Ax + By + C = 0$, con respecto al coeficiente de y, es decir, las formas para $B = 0$ y $B \neq 0$, así como para $A = 0$,

CASO I: Si $B = 0$, entonces, $A \neq 0$ y la ecuación $Ax + By + C = 0$ se reduce a la forma $x = -\frac{C}{A}$ que es la ecuación de una recta vertical o paralela al eje Y.

CASO II. Si $B \neq 0$, podemos dividir la ecuación $Ax + By + C = 0$ por B, y entonces, por transposición se reduce a la forma $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, que es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{A}{B}$ y cuya ordenada en el origen es $-\frac{C}{B}$.

CASO III. Si $A = 0$, entonces, la ecuación $Ax + By + C = 0$ se reduce a la forma $By + C = 0$, que es la ecuación de una recta horizontal o paralela al eje X.

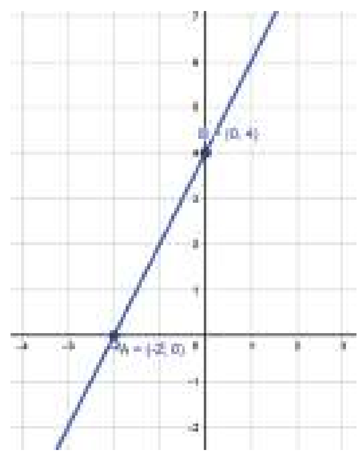


Figura 10. Ecuación general de la recta.

- Utiliza la estrategia de resolución de problemas para dar respuestas a situaciones relacionadas con el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola).

Rectas secantes: son aquellas rectas que se intersecan en un punto o cuyas pendientes son diferentes. Es decir, L_1 y L_2 son secantes $\Leftrightarrow m_1 \neq m_2$.

Transposición de términos: es pasar los términos de una ecuación de un miembro a otro.

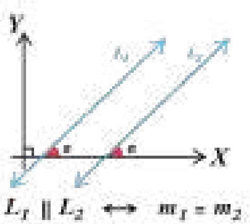


Figura 11. Rectas paralelas.

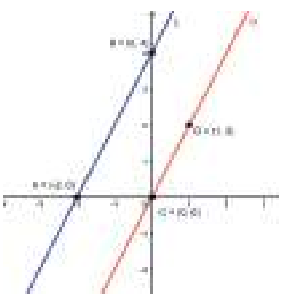


Figura 12

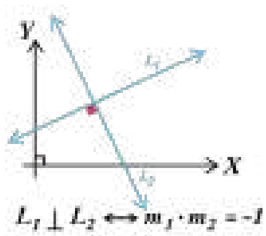


Figura 13. Rectas perpendiculares

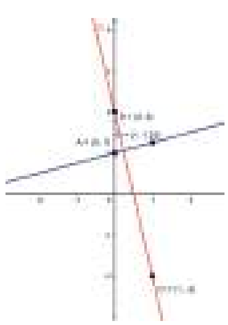


Figura 14. Pendientes de las rectas perpendiculares

Posiciones relativas de dos rectas

> ¿Qué condiciones deben cumplir dos rectas para que sean paralelas, perpendiculares o secantes?

Rectas paralelas

La pendiente es la medida de la inclinación de una recta con respecto al eje de abscisa ensentido positivo.

Una condición necesaria y suficiente para que dos rectas en el plano sean paralelas es que sus pendientes sean iguales (figura 11).

Ejemplo 1. Encuentra las pendientes de las rectas paralelas L y M, que se muestran en la figura 12.

Pendiente de $L = \frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$

Pendiente de $M = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$

Ejemplo 2. Halla la ecuación de la recta L_2, que pasa por el punto $P(-3, 2)$ y es paralela a la recta L_1: $y = 3x + 2$.

Solucion. Sabiendo que las rectas L_1 y L_2 son paralelas, entonces, sus pendientes son iguales. Como la pendiente de la recta L_1 es 3, la de L_2 también es 3.

Luego, se sustituye el punto y la pendiente en la ecuación de la recta: $y - y_1 = m(x - x_1)$ y se realizan las operaciones:

$$y - 2 = 3(x - (-3)) \quad \rightarrow \quad y - 2 = 3x + 9$$

$$y = 3x + 11 \quad \rightarrow \quad 3x - y + 11 = 0$$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si el ángulo que se forma en su punto de intersección es de 90°. En el caso que sean rectas con pendiente, es decir, dos rectas no paralelas a los ejes coordenados, eso equivale a que el producto de sus pendientes sea igual a -1 (figura 13); ¿Puedes justificarlo?

Ejemplo 3. Encuentra las pendientes de las rectas perpendiculares R y S, mostradas en la figura 14.

Pendiente de $R = \frac{2-(-2)}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4$

Pendiente de $S = \frac{1.25-1}{1-0} = \frac{0.25}{1} = 0.25$

Observa que el producto de las pendientes $(-4) \cdot (0.25) = -1$.

Ejemplo 4. Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. L_1 tiene una pendiente $\frac{3}{5}$. Encuentra la pendiente de la recta L_2.

Solución. Sabiendo que las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces, sus pendientes son recíprocas opuestas. Es decir, si la pendiente de la recta L_1 es $\frac{3}{5}$, entonces, la pendiente de la recta L_2 es $-\frac{5}{3}$.

Es importante destacar que, si dos rectas no son paralelas, son **secantes** y pueden ser perpendiculares o no, en caso de serlo, bastaría con decir que son perpendiculares.

Ejemplo 5. Determina si las rectas L_1: $y - 2x = 2$ y L_2: $2y - 4x - 1 = 0$ son secantes, paralelas o perpendiculares.

Solución. Se expresan cada una de las ecuaciones dadas, L_1 y L_2 en su forma pendiente ordenada: $y = mx + b$, para luego obtener las pendientes de cada una y poder compararlas.

Despejando la y de L_1, por **transposición de términos**.

$y - 2x = 2 \rightarrow y = 2x + 2$, luego $m_1 = 2$.

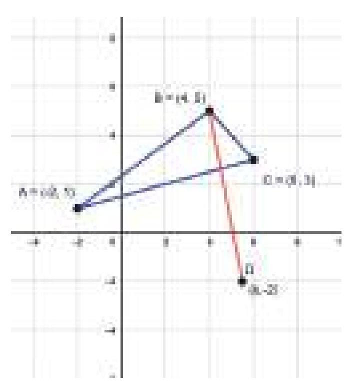
Despejando la y de L_2, dividiendo entre 2 y luego transponiendo términos.

$$2y - 4x - 1 = 0 \rightarrow y - 2x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{1}{2}.$$

Así, la pendiente de la recta L_2 es 2.

Siendo que la pendiente de la recta L_1 es igual a la pendiente de la recta L_2, entonces, L_1 es paralela a L_2.

- En el diagrama, AC es perpendicular a BD. **Encuentra** el valor de k.



- Dada la recta de la ecuación $y = 2x + 1$.
  - **Plantea** la ecuación de dos rectas L_1 y L_2, que sean paralelas a la dada y que corten al eje Y en: 0 y -2, respectivamente.
  - **Plantea** la ecuación de una recta L_3, que sea perpendicular a la dada y que pase por el punto (3, 1).

Cualquier par de rectas en el plano que no son paralelas tienen siempre un punto que es común a ambas, y que se conoce como su intersección.

Realiza el siguiente *Quiz de dardos*, para comprobar los aprendizajes adquiridos sobre rectas.

- Utiliza la estrategia de resolución de problemas, para dar respuestas a situaciones relacionadas con el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola).

Aplicaciones de la recta

x (*m*)	y (RD$)
1	18
2	27
3	36

Tabla 1. $x = m$ de tela elaborados y y = pago en RD$.

Como una recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos, la manera más conveniente de trazar una recta, a partir de su ecuación, es determinar las dos intersecciones con los ejes; si ella pasa por el origen, basta determinar otro punto, cuyas coordenadas satisfagan la ecuación.

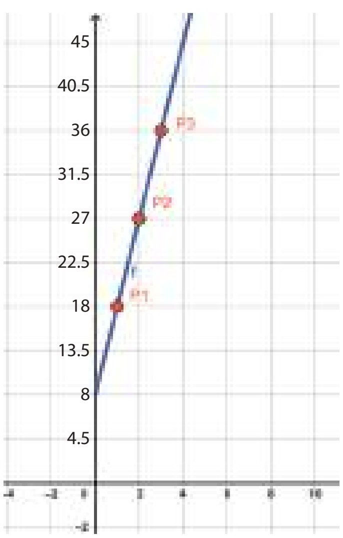


Figura 15. Aplicaciones de la recta

¿En qué situaciones se aplica la ecuación de una recta?

Muchas situaciones de la vida co ana se pueden modelar, matemá amente, con la ecuación de una recta. En esta lección se resolverán algunos problemas que ejemplifican lo expresado.

Ejemplo 1. Una empresa del área textil paga a sus trabajadores según los metros de tela (m) elaborados. El primer m lo paga a RD$18 y los siguientes, con un aumento de RD$9, cada uno. (a) Construye una tabla de valores, (b) Representa la gráfica asociada a la tabla anterior y (c) Halla la ecuación de la recta que relaciona el costo (y) con los m de tela elaborados (x).

Solución

- Se construye la tabla de valores (tabla 1), según los primeros puntos:

  Para $x = 1$, y = RD$18; para $x = 2$, y= RD$27; y, para $x = 3$, y = RD$36.

- Se grafica en el plano cartesiano la semirrecta que contiene dichos puntos (figura 15).

- Se halla la ecuación de la recta que corresponde al lugar geométrico de la gráfica anterior:

Se determina la ecuación de dicha recta, a partir del cálculo de la pendiente con los puntos $P_1(1, 18)$ y $P_2(2, 27)$.

$$m = \frac{27 - 18}{2 - 1} = \frac{9}{1} \ ; m = 9.$$

Se sustituye el punto P_1 (1, 18) y la pendiente (m=9), en la ecuación de la recta punto pendiente:

$$y - y_1 = m\,(x - x) \quad \rightarrow \quad y - 18 = 9\,(x - 1)$$

$$y = 9x - 9 + 18 \quad \rightarrow \quad y = 9x + 9$$

La ecuación de la recta que modela el costo (y) con los metros de tela elaborados (x) es: $y = 9x + 9$, donde $x \geq 0$.

Ejemplo 2. Una empresa planea gastar RD$13,000 en nuevas computadoras. Cada PC tipo A cuesta RD$800 y una PC Tipo B cuesta RD$1,600, pero es más rápida y fácil de usar. ¿Qué combinaciones de las dos marcas puede comprar la empresa?

Solución. Sea x el número de computadoras tipo A y y el número de computadoras tipo B.

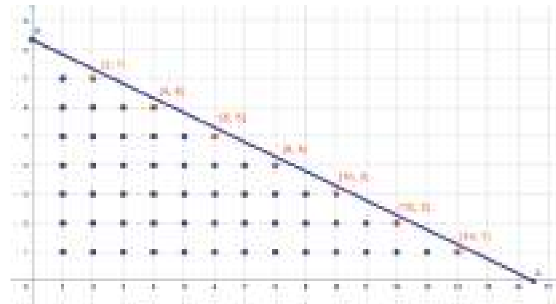


Figura 16. Aplicaciones de la recta

La ecuación $800x + 1{,}600y = 13{,}000$ indica cuántas de cada computadora se pueden comprar por RD$13,000. Esta ecuación describe una recta (figura 16).

Si $x = 0,\ y = \dfrac{13{,}000}{1{,}600} \approx 16.25$.

Si $y = 0,\ x = \dfrac{13{,}000}{800} \approx 8.12$

Hay que tener en cuenta que, en la ejecución del presupuesto, la empresa debe acercarse lo más posible a la cantidad presupuestada, sin excederla. Solo números enteros de computadoras se puede comprar, por lo que solo puede considerarse aquellos puntos con coordenadas enteras sobre la recta o los más cercanos, por debajo de ella. En este caso, las soluciones posibles corresponden a los puntos: $(2, 7)$; $(4, 6)$; $(6, 5)$; $(8, 4)$; $(10, 3)$; $(12, 2)$ y $(14, 1)$.

- **Resuelve**: un automóvil modelo A cuesta RD$430,000 y recorre 20 kilómetro por galón de gasolina. Un carro modelo B cuesta RD$330,000 y rinde 18 km por galón de gasolina. La gasolina regular cuesta RD$273 por galón.
  - Para cada automóvil, escribe una ecuación que describa el costo de comprar el carro y conducirlo por x kilómetros.
  - ¿Cuántos kilómetros necesitarían conducir los dueños de los carros, antes de que el costo de comprar y conducir los carros sea el mismo?
- **Resuelve**: un tren inicia un movimiento, desplazándose en línea recta de una estación a otra. Si realiza movimientos iguales, en intervalos de tiempos similares y recorre 320 km en 2 h, luego, cuando han transcurrido 4 h ha recorrido 640 km. Encuentra la ecuación de la recta que representa el movimiento del tren, de una estación a otra, si todo el movimiento se representa con línea recta. Use las variables d para distancia o desplazamiento y t para el tiempo.

- Resuelve problemas del contexto, que involucren ecuaciones de la recta.
- Muestra interés en aplicar rectas a situaciones de la vida cotidiana.
- Representa de forma gráfica rectas, con el uso de recursos convencionales y virtuales *GeoGebra*.

Actividad grupal

Compartiendo la herencia del abuelo

¿Qué haremos?

Resolver 8 retos matemáticos, para encontrar las cifras que permitirán abrir la caja fuerte del abuelo, que contiene la herencia de María.

¿Qué necesitamos?

Hoja de actividades, lápiz y papel, libro de texto, calculadora y tablero de números y letras (ver tabla 1).

¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de tres integrantes, expresar sus ideas, tanto de forma verbal como escrita y cooperar entre todos, para lograr dar respuesta satisfactoria a la actividad.

Fuente: Freepik.com

¿Cómo lo haremos?

El abuelo de María le dejó una herencia dentro de una caja fuerte, cuya clave es un número de ocho cifras, que se consigue resolviendo los siguientes retos matemáticos.

Primera cifra: ordenada al origen de una recta de pendiente 2, que pasa por el punto $P(-1, 1)$.

Segunda cifra: abscisa donde la recta de ecuación $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$, corta al eje X.

Tercera cifra: pendiente de una recta, que es perpendicular a la recta de ecuación $y - x - 6 = 0$.

Cuarta cifra: pendiente de una recta, que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{8}\right)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 6$.

Quinta cifra: abscisa del punto medio entre los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(9, 13)$.

1-C	2-D	3-R
4-T	5-U	6-A
7-I	8-S	9-E

Tabla 1. Tablero de números y letras.

Sexta cifra: pendiente de la recta, que pasa por los puntos $P_1\left(\frac{1}{4},\ 4\right)$ y $P_2\left(-\frac{1}{4},\ 2\right)$.

Séptima cifra: distancia entre los puntos $P_1(1, 3)$ y $P_2(5, 6)$.

Octava cifra: el valor de ***a***, para que las rectas cuyas ecuaciones son: $2x + y = 6$ y $ax - 4y - 1 = 0$ sean perpendiculares.

Cada equipo tratará de conseguir los números de la clave de 8 dígitos, la cual permitirá abrir la caja fuerte. El primer grupo que lo haga compartirá la herencia con María.

Tomen en cuenta lo siguiente:

Resolverán uno a uno los problemas. El equipo tiene que llegar a un consenso. Es decir, negociar hasta que se llegue a una conclusión que satisfaga a todos los integrantes del grupo.

Las cifras las tienen que ubicar de izquierda a derecha, en el orden dado, después, deben descubrir la palabra que se genera, al sustituir cada número de la cifra de 8 dígitos por la letra que corresponda, según la tabla 1.

Finalmente, entregar los resultados al docente y preparar su presentación.

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren una presentación, para compartir el resultado de este trabajo con toda la clase y la manera en que lograron realizar cada uno de los pasos que los llevó a obtener ese resultado. ¿Expliquen acerca de cuál de los retos matemáticos les pareció el más fácil y cuál el más complicado? ¿Por qué?

Coevaluación

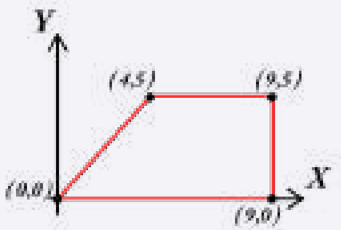
Cada miembro del equipo escoge a otro compañero y describe brevemente: cómo contribuyó al trabajo del equipo y qué debe mejorar, para próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Cada integrante del equipo responde a lo siguiente: ¿cómo ha sido mi actitud frente al trabajo en equipo?, ¿qué aprendí en esta actividad?, ¿he respetado las opiniones de los demás?

- Valora el desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la recta, haciendo uso de la notación matemática adecuada.
- Utiliza la estrategia de resolución de problemas, para dar respuestas a situaciones relacionadas con el estudio de la recta.

- **Encuentra** el perímetro en la siguiente figura.



- **Gráfica** y **calcula** la distancia entre los puntos y determina el punto medio del segmento que los une.
  - $P1\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ y P_2 (-5, -2)
  - $P_1(2, 4)$ y $P_2\left(-\frac{4}{5},\ 0\right)$
- **Obtén** la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados e **indica** hacia dónde se inclina dicha recta:
  - (2, 6) y (4, 8)
  - (-3, 5) y (5, -3)
  - (5, 2) y (-2, 1)
  - (1, 2) y (-5, -4)
- Utilizando el software *GeoGebra*, **grafica** y **halla** la ecuación pendiente y su ordenada en el origen de la recta, dado un punto y la pendiente:
  - $P(-5, 4)$ y $m = -\frac{9}{2}$
  - $P\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$ y $m = 6$.
  - $P(0, 8)$ y $m = 0$.
- **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* las siguientes rectas:
  - $y = -\frac{1}{3}x + 8$
  - $y = 3x - \frac{12}{5}$
  - $y = -5x - 4$
- **Grafica**, haciendo uso de *GeoGebra*, para hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta, que pasa por los puntos:
  - $P(1, -1)$ y $Q(5, 1)$.
  - $P(-2, -3)$ y $Q\left(\frac{5}{2}, 6\right)$.
- **Grafica**, halla la pendiente y la ordenada, en el origen de las rectas:
  - $8x - 2y + 10 = 0$
  - $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.
- **Escribe** una ecuación para representar cada una de las siguientes rectas. Luego, dibuja la recta en un sistema de coordenadas.
  - Pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen 4.
  - Pendiente $\frac{3}{5}$ y pasa por (-1, 2).

¿Para qué valor de k son las gráficas de las rectas $y = -2x + 6$ y $y = kx + 1$.

  - Paralelas.
  - Perpendiculares.

- **Grafica** las siguientes rectas y **determina**, analíticamente, si las rectas son paralelas o perpendiculares:
  - $L_1: 5x - 4y + 10 = 0$ y $L_2: 4x + 5y - 1 = 0$.
  - $L_3: x + 6y + 16 = 0$ y $L_4: x + 6y - 2 = 0$.
- **Encuentra** los puntos de intersección de la perpendicular con L_1: $2x - 3y - 6 = 0$ y con L_2: $2x - 3y + 7 = 0$ y finalmente, **calcula** la distancia entre los puntos de intersección.

- Sabiendo que los puntos A (3, 5) y B (6, 7) pertenecen a la recta r: a) **Encuentra** la ecuación de la recta que pase por el origen y sea paralela a la recta r.
  - **Determina** la pendiente de r.
  - **Escribe** la ecuación de r.
  - **Encuentra** la distancia entre A y B.
- **Halla** el ancho de un carril de una piscina olímpica si se sabe que, las medidas están en metros y las corcheras flotantes de ese carril son paralelas y cumplen con las siguientes ecuaciones: L_1: $y - 5 = 0$ y L_2: $y - \frac{5}{2} = 0$.
- **Resuelve**: un auto que está en reposo inicia un movimiento, desplazándose en línea recta y realiza movimientos iguales en intervalos de tiempos semejantes. Si recorre 320 km en 4 h, luego, cuando han transcurrido 10 h ha recorrido 800 km. Si toda la oscilación se representa con línea recta, encuentra la ecuación de la recta que representa el movimiento.
- **Resuelve**: una empresa de mantenimiento de áreas verdes paga a sus obreros según los metros cuadrados de terreno desmalezados. El primer m² lo paga a RD$4 y los restantes a RD$2, cada uno. a) Construye una tabla de valores, b) Representa la gráfica, asociada a la tabla anterior y c) Halla la ecuación de la recta que relaciona el costo (y) con los m² de terreno desmalezados (x).

Selecciona la respuesta correcta:

- ¿Cuál es la pendiente de la recta de ecuación $2x + 3y - 3 = 0$?
  - $-\frac{1}{3}$
  - $\frac{3}{2}$
  - $-\frac{2}{3}$
  - $\frac{2}{3}$
- La abscisa del punto de intersección de la recta L, de ecuación $6y + 3x = 4$ con el eje X es:
  - $-\frac{4}{3}$
  - $\frac{4}{3}$
  - $-\frac{2}{3}$
  - $\frac{2}{3}$
- Si las rectas L_1: $5x - 4y + 10 = 0$ y L_2: $4x + 5y - 1 = 0$ tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, y son paralelas, entonces:
  - $m_1 = m_2$
  - $m_1 \cdot m_2 = 1$
  - $m_1 = -m_2$
  - $m_1 \cdot m_2 = -1$
- La recta que pasa por los puntos $P(0, 3)$ y $Q(4, 0)$ tiene por ecuación:
  - $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$
  - $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
  - $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
  - $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1.$
- La distancia del punto $P(6, 0)$ a la recta L de ecuación $y - 4 = 0$ es:
  - 6
  - $\frac{2}{3}$
  - 4
  - $\frac{3}{2}$

Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

Unidad 2

La circunferencia

Situación de aprendizaje

Un ejemplo evidente de la aplicación de la circunferencia en la vida cotidiana es la bicicleta, en la cual la rueda está hecha de “arcos” con muchos alambres delgados llamados “radios” que sobresalen del centro, los cuales mantienen perfectamente la forma de la circunferencia de la rueda.

En la imagen, puedes observar dos bicicletas de tamaño de aros diferentes, uno de 27.5 y otro de 29 pulgadas (diámetro de la rueda).

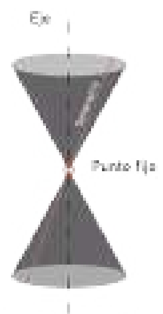
Si te tocara hacer un recorrido de 10 km en bicicleta, ¿cuál de las dos bicicletas usarías? y ¿por qué?

Si ubicas el origen de coordenadas en el centro del aro de cada bicicleta, ¿cuál sería la ecuación que representa cada circunferencia?

Contenido

Introducción a las cónicas

Cono de revolución es la superficie engendrada por una línea recta (generatriz) que gira alrededor de un eje vertical, manteniendo un punto fijo de intersección sobre dicho eje.



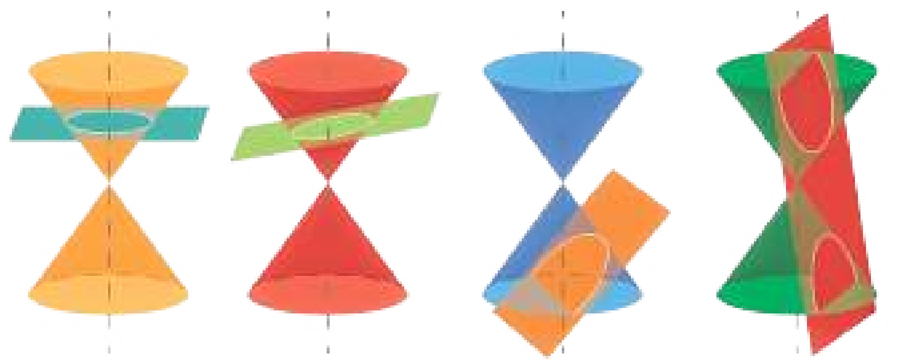
Cono de revolución

En la antigüedad los griegos desarrollaron las secciones cónicas, unos 400 años antes de nuestra era; luego, Apolonio Perge (262 -190 a.c) fue el primero en obtener todas las curvas a partir de las secciones del cono recto. Tiempo después, Kepler Johannes (1541-1630) demostró que las trayectorias de los planetas son elipses y Galileo Galilei (1564-1642) descubrió que las trayectorias de los proyectiles son parábolas.

¿Qué figura se genera por la intersección de un plano con un cono de revolución?

Las secciones cónicas

Las secciones cónicas se obtienen por la intersección de un plano con un **cono de revolución**. Observa en la imagen siguiente que, dependiendo de las diferentes posiciones o inclinaciones de dicho plano, se forman distintas curvas llamadas cónicas: circunferencia, elipse, parábola, e hipérbola.



Circunferencia Elipse Parábola Hipérbole

La *circunferencia* se obtiene cuando el plano es perpendicular al eje del cono.

Si el plano se inclina ligeramente (formando un ángulo menor a 90º con el eje en el cono, pero sin superar el ángulo que forma el eje y la generatriz del cono) se obtiene una *elipse.*

Si el plano se inclina y no forma una curva cerrada, entonces su intersección con el cono es una *parábola* o una *hipérbola*.

Si el plano es paralelo a una generatriz del cono, se tiene una parábola y si corta a ambas ramas del cono la curva es una *hipérbola*.

Las cónicas en situaciones de la vida cotidiana

Las *cónicas* están muy presentes en la vida cotidiana y han sido de mucha importancia para el desarrollo de la humanidad. Ellas están presentes en la arquitectura, la industria, los medios de transporte, las tecnologías,

Imagen: María Bobrova Fuente: unsplash

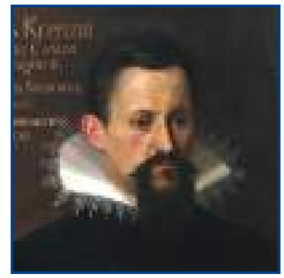
el deporte, la medicina, entre otras. Por ejemplo, como ocurrió con la circunferencia y el avance que tuvo la humanidad al descubrir la rueda y sus aplicaciones.

Con la parábola, los romanos descubrieron que se podían construir puentes utilizando arcos parabólicos por su eficiencia en el reparto de cargas. También, tienen otras propiedades como la de la reflexión, utilizada en telecomunicaciones, acústica, iluminación, entre otras.

Las elipses tienen importantes aplicaciones en la astronomía como, por ejemplo, en las órbitas de Kepler de planetas y satélites. También, tiene propiedades reflexivas, por su excelente acústica se usan en el diseño de salas de conciertos, parlamentos, iglesias, entre otras. Igualmente, se usan en la construcción de estadios deportivos, pistas de atletismo e hipódromos.

La hipérbola se puede apreciar en edificios y diseños arquitectónicos, reactores nucleares, relojes de área y lentes telescópicos.

Johannes Kepler fue un astrónomo y matemático alemán, conocido fundamentalmente por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.



Johannes Kepler
Fuente: Wikipedia.org

- **Johannes Kepler** en 1609 publicó las dos primeras de sus tres leyes del movimiento planetario. La primera ley establece que: “la órbita de todos los planetas es una elipse con el sol en uno de sus focos”. **Explica**, ¿cómo llega Kepler a esta conclusión? y enuncia sus otras dos leyes.
- **Identifica** en tu entorno cuatro aplicaciones en donde sea notorio el uso de las cónicas y explica en uno de ellos el porqué de su uso.

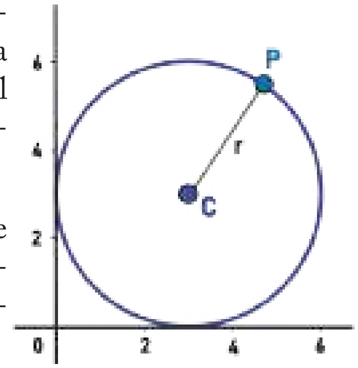
- Utiliza el razonamiento matemático para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia y parábola) y las relaciona con situaciones de la vida diaria.

La circunferencia

¿Cuáles son los elementos fundamentales que definen a una circunferencia?

La circunferencia y sus elementos

La circunferencia se puede definir como el **lugar geométrico** de un punto que se mueve en un plano de tal manera, que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se llama **radio**.



En la figura, si P es un punto cualquiera de la circunferencia y C es el centro, la distancia entre C y P es el radio de la circunferencia. Es decir,

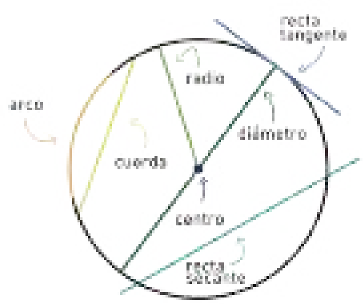
$$\overline{PC} = r$$

En la circunferencia se pueden identificar otros elementos, como son: cuerda, diámetro, arco, secante y tangente.

La **cuerda** es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y el **diámetro** es la cuerda mayor que pasa por su centro.

El **arco** es la porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos.

La recta que corta a la circunferencia en dos puntos, se le llama **secante** y a la recta cuya intersección con la circunferencia es un punto que se le llama **tangente**.



Entre una de sus características se puede decir que: *si tomamos dos puntos de la circunferencia y trazamos la **mediatriz** de la cuerda que determina estos dos puntos sobre la circunferencia, entonces la mediatriz pasará por su centro*. ¿Puedes justificar el por qué?

El **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición.

La **mediatriz** es la recta que pasa por el punto medio de un segmento formando un ángulo recto con éste.

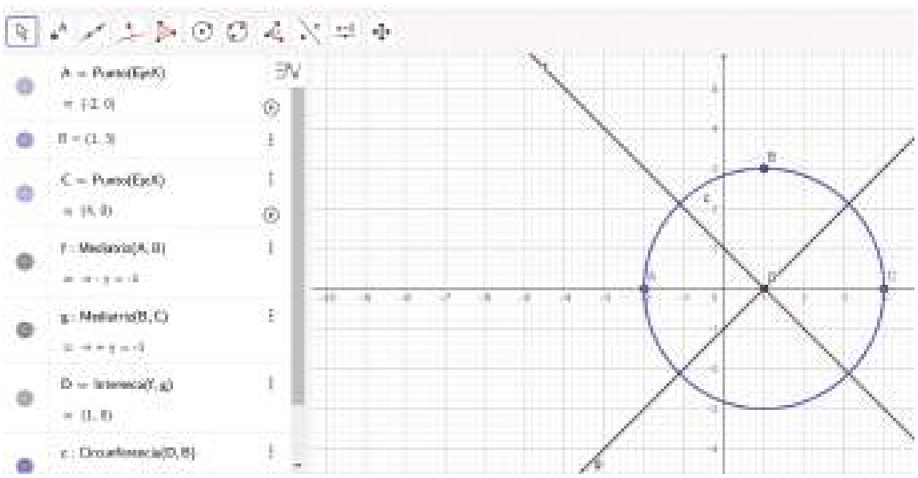
Imagen: Luis Eusebio **Fuente:** unsplash

En este espacio podrás explorar con GeoGebra los elementos fundamentales de la circunferencia

https://www.geogebra.org/m/etd87kcu#material/q23zcrd8

Observa con atención cómo realizar la gráfica de una circunferencia, tomando en cuenta esta característica. Para ello, puedes utilizar el software *GeoGebra* para realizar dicha gráfica, en solo tres pasos.

Botón	Procedimiento
	Haces clic en este botón para trazar tres puntos arbitrarios: A, B y C.
	Haces clic en este botón para trazar las dos mediatrices: f y g, las cuales se cruzan en el punto centro D
	Haces clic en este botón y luego en D para formar la circunferencia

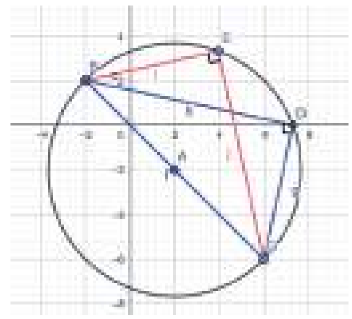


Observa que el punto centro es de coordenadas $(1, 0)$ y $\overline{DB} = r = 3$

- ¿Qué relación existe entre el radio y el diámetro de una circunferencia?
- **Grafica** en el plano cartesiano una circunferencia de centro (2, 3) y radio 3 cm. Con una regla **mide** su diámetro y **traza** una cuerda de 4 cm.
- **Realiza** la gráfica solicitada en el ejercicio anterior haciendo uso del software GeoGebra y **compara** cada uno de los resultados obtenidos.

Otras características de la circunferencia:

- El radio es perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia.
- Si dentro de la circunferencia se traza un triángulo de manera que un lado sea el diámetro, el ángulo opuesto es de 90º.



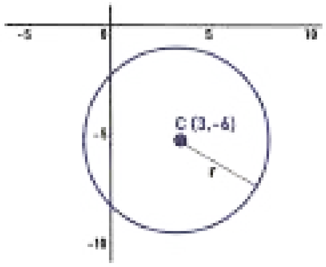
GeoGebra. Es un procesador geométrico y algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo.

https://www.geogebra.org/classic?lang=es

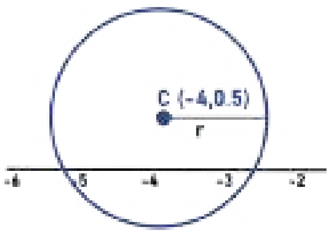
- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Se expresa de manera convincente al concluir el desarrollo de procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

La ecuación canónica de una circunferencia

¿Cuál es la ecuación canónica de la circunferencia?



Observa cómo queda representada la gráfica de la circunferencia de centro (3, -6) y radio $r = 5$

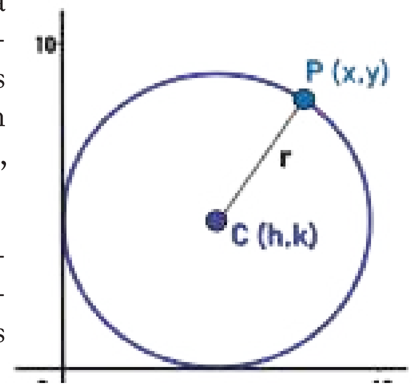


Observa cómo queda representada la gráfica de la circunferencia de centro (-4, $\frac{1}{2}$) y r = $\sqrt{2}$

Una circunferencia de centro en el origen de radio 1 se denomina circunferencia unidad

Ecuación de la circunferencia con centro en (h, k)

Siendo el centro de una circunferencia el punto fijo $C(h, k)$, un punto cualquiera de la curva $P(x, y)$ estará a r unidades de C, por tanto, cumple la condición $\overline{PC} = r$. Por distancia entre dos puntos, se tiene $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$



Elevando al cuadrado ambos miembros resulta la ecuación ordinaria o canónica, en función de las coordenadas del centro en (h, k) y radio r.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{(I)}$$

Ejemplo 1: halla la ecuación canónica de la circunferencia de centro (3, -6) y radio $r = 5$ y calcula su diámetro.

Solución: se sustituye $h = 3$, $k = -6$ y $r = 5$ en (I)

$(x - 3)^2 + (y - (-6))^2 = 5^2$, luego $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 5^2$

Así, la ecuación canónica de la circunferencia de centro (3, -6) y radio $r = 5$ es: $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 25$

Por otra parte, sustituye $r = 5$ en $D = 2 \cdot r$ para obtener el diámetro (D): $D = 2 \cdot 5 = 10$

Ejemplo 2: ¿Cuál es el centro y radio de la circunferencia de ecuación $(x + 4)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 2$?.

Solución: se compara la ecuación dada con la ecuación (I):

$$-k = -\frac{1}{2} \quad \textit{entonces } k = \frac{1}{2}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (x+4)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 2$$

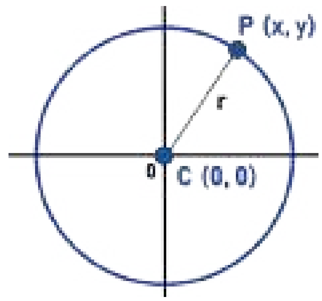
$$-h = 4 \textit{ entonces } h = -4 \qquad r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

De la comparación se concluye que: el centro es $(-4, \frac{1}{2})$ y $r = \sqrt{2}$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen

La ecuación de una circunferencia en esta posición es un caso particular del caso anterior. Siendo (0, 0) el centro y $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva, se cumple la condición $\overline{CP} = r$. Entonces, resulta:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$
que equivale a: $x^2 + y^2 = r^2$ (II)

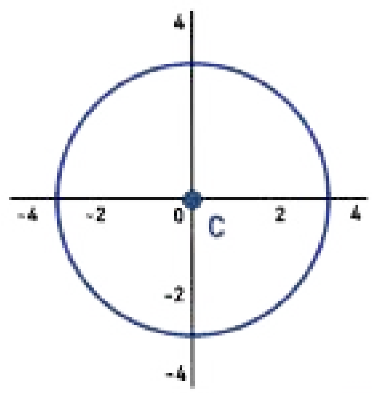


Ejemplo 1: obtén la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen y radio 3. Realiza la gráfica con GeoGebra.

Solución: al sustituir $r = 3$ en (II), se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 3^2 \text{ o bien } x^2 + y^2 = 9$$

En *GeoGebra* se sustituye la ecuación directamente para obtener su gráfica



Ejemplo 2: ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 81$?

Solución: se observa que tiene la forma de la ecuación (II), por lo que se sabe que su centro está en (0, 0) y $r^2 = 81$, luego $r = 9$.

Se concluye que el centro es (0, 0) y el radio es 9.

- **Obtén** la ecuación canónica de la circunferencia de centro y radio dado y **traza** la gráfica:
  - $C(-5, 6)$; $r = 10$
  - $C(0, 0)$; $r = 5$
- **Calcula** el centro y el radio de cada circunferencia y **traza** la gráfica haciendo uso del software GeoGebra.
  - $x^2 + y^2 = 2$
  - $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 6$
  - $x^2 + (y - 3)^2 = 36$

La ecuación empleada para el diseño de la maravillosa obra arquitectónica "El ojo de Londres" es una ecuación de una circunferencia centrada en el origen y de radio 60 m

Fuente: Pixabay

Un punto se puede identificar como una circunferencia de radio cero (circunferencia punto)

Por ejemplo, la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$, cuyo lugar geométrico es el punto que define su centro en (-1, 3).

Aquí puedes practicar de manera interactiva más ejercicios con circunferencia

https://www.geogebra.org/m/etd87kcu#material/kedaxyap

- Se expresa de manera convincente al concluir el desarrollo de procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

Problemas asociados a la circunferencia

¿Has resuelto otros problemas de obtención de la ecuación de una circunferencia en los que no te dan directamente el centro y el radio?

Otros problemas asociados a la circunferencia:

Ejemplo 1: halla la ecuación canónica de una circunferencia con centro $C\,(3, 2)$ y tangente a la recta $y = x + 4$.

Solución: expresa la ecuación de la recta $y = x + 4$ en su forma general:

$$x - y + 4 = 0$$

Luego, calcula el radio de la circunferencia solicitada aplicando la fórmula (I) de la distancia entre un punto y una recta.

$$r = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo los valores de $C\,(3, 2)$ en (I) se obtiene:

$$r = \frac{|x - y + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3 - 2 + 4}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}; \quad r^2 = \frac{25}{2}$$

Luego, se sustituye el centro dado y el radio calculado en la ecuación canónica de la circunferencia: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{2}$

Ejemplo 2: halla la ecuación canónica de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos $A(-1, -2)$ y $B(3, 4)$.

Solución: se calcula el punto medio del segmento dado, el cual representa el centro de la circunferencia. Es decir, $C = (1, 1)$

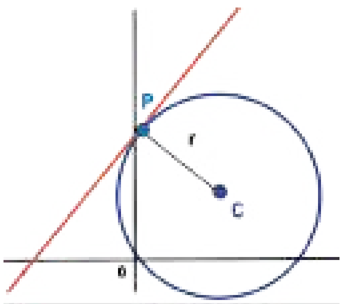
Por distancia entre los puntos $C(1, 1)$ y $B(3, 4)$, se obtiene el radio:

$$r = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$$

Luego, la ecuación de la circunferencia será: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$

En otros problemas se solicitan lugares geométricos sin aclarar explícitamente que se trata de una circunferencia, por lo que el que resuelve el problema depende de un planteamiento adecuado inicial y luego, en sus transformaciones descubre que se trata de una circunferencia.

Existe una propiedad que dice: la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.



Observa en esta representación:

*La gráfica de la recta de ecuación $y = x + 4$

*La gráfica de la circunferencia

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{2}$.

Ambas realizadas con ayuda de *GeoGebra*.

El punto medio de un segmento es el punto que se encuentra a la misma distancia de otros dos puntos cualquiera o extremos de un segmento:

Punto medio= $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Es así como, dado A(-1, -2) y B(3, 4), el punto medio entre A y B es:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (1, 1)$$

Ejemplo 3: un punto se mueve en forma tal que el cuadrado de su distancia al origen es igual a 4. Encontrar la ecuación canónica del lugar geométrico de dicho punto.

Solución: primero se hace una representación simbólica de lo que dice el problema:

Sabiendo que el punto general es $P(x, y)$, entonces su distancia al origen viene dada por:

$$\overline{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Luego, el cuadrado de su distancia al origen viene dado por:

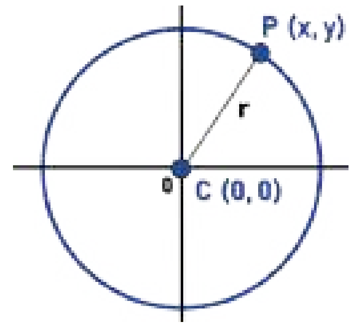
$$(\overline{PO})^2 = x^2 + y^2$$

Como el cuadrado de la distancia es igual a 4, se tiene que:

$$(\overline{PO})^2 = x^2 + y^2 = 4$$

Cuya expresión es la representación simbólica del evento inicial de este problema.

Se puede concluir que la ecuación del lugar geométrico corresponde a una circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.



Gráfica de la circunferencia

$x^2 + y^2 = 4$

- **Halla** la ecuación canónica de una circunferencia con centro $C(-1, 2)$ y tangente a la recta $y = x - 3$. **Grafica** ambas ecuaciones haciendo uso de GeoGebra.
- Un punto se mueve en forma tal, que el cuadrado de su distancia al origen es igual a 7. **Encuentra** la ecuación canónica del lugar geométrico de dicho punto.

- Se expresa de manera convincente al concluir el desarrollo de procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

Un **remache** o roblón es un elemento de fijación que se emplea para unir de forma permanente dos o más piezas. Consiste en un tubo cilíndrico que en su fin dispone de una cabeza. Las cabezas tienen un diámetro mayor que el resto del remache, para que así al introducir este en un agujero pueda ser encajado

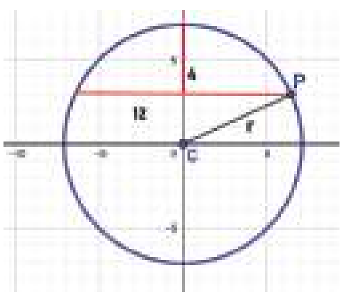


Figura 1

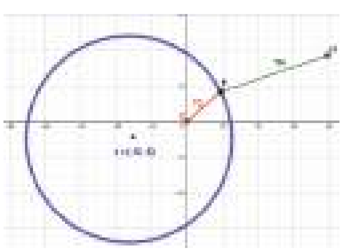


Figura 2

Aplicaciones de la circunferencia

¿Sabes cómo aplicar la circunferencia en la solución de problemas de la vida diaria?

Las aplicaciones de la circunferencia han estado presentes en casi todos los campos del conocimiento: en la industria, los deportes, la medicina, la producción de alimentos, entre otros.

A continuación, se abordan algunos ejemplos que dan cuenta de su aplicabilidad.

Aplicación industrial: la sección transversal de un **remache** tiene una cabeza con forma de un arco de circunferencia. Si los extremos del arco están separados por 12 milímetros y la cabeza está 4 milímetros arriba de los extremos (Figura 1), ¿cuál es el radio de la circunferencia que contiene al arco?

Solución: para representar este problema, se dibuja una sección transversal del remache y se identifican los datos para luego llevarlos al plano real, considerando una circunferencia centrada en el origen. Se sabe que la cabeza del remache mide 12 mm de ancho y 4 mm de alto, por lo tanto, su extremo P está a 6 mm del eje y r - 4 mm de altura (Figura 2).

Sustituyendo el punto $P(6, r - 4)$ en la ecuación reducida de la circunferencia, se obtiene: $6^2 + (r - 4)^2 = r^2$

Desarrollando el cuadrado de un binomio, agrupando y despejando se obtiene el valor de r:

$$\mathbf{36} + r^2 - \mathbf{8}\boldsymbol{r} + \mathbf{16} = r^2 \rightarrow \mathbf{52} = \mathbf{8}\boldsymbol{r} \rightarrow r = \frac{52}{8} \rightarrow \mathbf{r = 6.5}$$

Se puede concluir que el radio de la circunferencia que contiene el arco es de 6.5 mm.

Aplicación en comunicaciones: el pueblo El Mangú está localizado a 36 kilómetros al este y 15 kilómetros al norte de la población de Concón. Una compañía local de teléfonos quiere colocar una torre de transmisión, de tal manera que la distancia desde la torre al pueblo El Mangú sea dos veces la distancia que va de la torre a Concón. Demuestra que la torre debe estar en una circunferencia. Identifica su centro y el radio de esta.

Solución: se parte de la condición de que la distancia que debe haber de la torre al pueblo El Mangú ($\overline{TM}$) es igual al doble de la distancia de la torre a Concón ($2\overline{TC}$). Es decir: $\overline{TM} = 2\overline{TC}$.

Luego, se sustituye $T(x, y), C(0, 0)$ y $M(36, 15)$ en $\overline{TM}=2\overline{TC}$

$$\sqrt{(x-36)^2+(y-15)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x-36)^2+(y-15)^2=4(x^2+y^2)$$

Resolviendo los productos notables y simplificando

$$x^2-72x+36^2+y^2-30y+15^2=4x^2+4y^2$$

$$x^2-72x+1{,}296+y^2-30y+225=4x^2+4y^2$$

$$x^2-72x+y^2-30y+1{,}521=4x^2+4y^2$$

$$3x^2+72x+3y^2+30y-1{,}521=0$$

$$x^2+y^2+24x+10y-507=0$$

Procedimiento para llevar la ecuación $x^2+y^2+24x+10y-507=0$ a su forma canónica.

Se agrupa en el primer miembro, los términos que tengan las "x" y los que tengan "y" en un mismo binomio y se despeja en el segundo miembro el término independiente:

$$(x^2+24x)+(y^2+10y)=507 \quad \text{(I)}$$

Luego, en (I) se aplica el método de completación de cuadrados.

2.1 Se completa el trinomio cuadrado perfecto en cada binomio del primer miembro:

$$(x^2+24x+(12^2))+(y^2+10y+(5^2))=507+(12^2)+(5^2)$$

Se deben sumar las mismas cantidades en ambos miembros para conservar la igualdad.

$$(x^2+24x+144)+(y^2+10y+25)=507+144+25$$

2.2 Ahora se procede a pasar del trinomio cuadrado perfecto al binomio al cuadrado y se efectúan las operaciones indicadas en el segundo miembro.

$$(x^2+24x+144)+(y^2+10y+25)=676$$

$$(x+12)^2+(y+5)^2=26^2$$

Este resultado demuestra que efectivamente la torre se encuentra ubicada en una circunferencia de radio 26 y de Centro (-12, -5).

- Un barco pesquero está colocando una red, para tal fin pone una boya fija y navega manteniéndose a una distancia constante de 800 m alrededor de la misma. ¿Cuál es la ecuación que describe la trayectoria del barco?

- Valora el desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola), haciendo uso de la notación matemática adecuada.
- Utiliza el razonamiento matemático para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) y las relaciona con situaciones de la vida diaria.

Actividad grupal

La circunferencia en los deportes

¿Qué haremos?

Encuentren todas las ecuaciones de las circunferencias presentes en el diseño de una cancha de baloncesto y realizar cada una de sus gráficas en el plano cartesiano, haciendo uso del software *GeoGebra*.

¿Qué necesitamos?

Lápiz y papel, un dispositivo con acceso a internet, software GeoGebra.

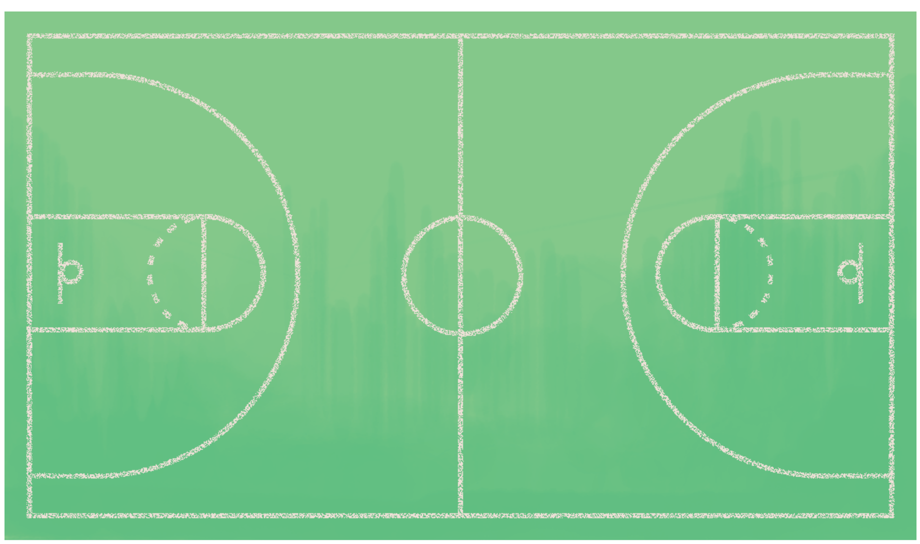
¿Cómo nos organizamos?

Formen equipos de tres integrantes, en los cuales todos tienen igual responsabilidad para la ejecución de las actividades.

¿Cómo lo haremos?

Cada integrante investiga sobre el diseño de una cancha de baloncesto, sus características y sus medidas oficiales. Luego, comparte con sus compañeros la investigación realizada y describen, en colaboración, los pasos para encontrar todas las ecuaciones de las circunferencias presentes en el diseño de la cancha de baloncesto, realizando sus representaciones gráficas en plano cartesiano.

Imagen: Elizabeth Dunne **Fuente:** Unsplash



Recomendaciones: colocar el origen del plano cartesiano en el centro de la cancha

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren una presentación para compartir el resultado de este trabajo con toda la clase y la manera en que lograron cada uno de los pasos que los llevó a este resultado.

Coevaluación

Cada miembro del equipo escoge a otro compañero y describe brevemente: cómo contribuyó al trabajo del equipo y qué debe mejorar para próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde a lo siguiente: ¿cómo ha sido mi actitud frente al trabajo en equipo?, ¿qué aprendí en esta unidad?, ¿he respetado las opiniones de los demás?

Imagen: Tom Briskey **Fuente:** Unsplash

La Federación Dominicana de Baloncesto (FEDOMBAL) es el organismo rector de las competiciones de los clubes y las selecciones nacionales de la República Dominicana.

https://fedombal.org/

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Utiliza el razonamiento matemático para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) y las relaciona con situaciones de la vida diaria.
- Valora el desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola), haciendo uso de la notación matemática adecuada.

Evaluación

Cada pregunta consta de cuatro alternativas, de las cuales solo una es la correcta. **Selecciona** la respuesta correcta:

- La ecuación de la circunferencia con centro $C(-2, -7)$ y radio $r = 5$ es:
  - $(x + 2)^2 + (y + 7)^2 = 5$
  - $(x + 2)^2 + (y + 7)^2 = 25$
  - $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 5$
  - $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 25$
- El centro y radio de la circunferencia $x^2 + (y + 1)^2 = 3$ es:
  - $C(0, 1)$; $r = \sqrt{3}$
  - $C(-1, 0)$; $r = 3$
  - $C(0, -1)$; $r = \sqrt{3}$
  - $C(0, -1)$; $r = 3$
- El diámetro de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 10$ es:
  - $D = \sqrt{10}$
  - $D = 20$
  - $D = 10$
  - $D = 2\sqrt{10}$
- En la circunferencia $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ el centro y radio son:
  - $C(0, -3)$; $r = 1$
  - $C(-3, 0)$; $r = 2$
  - $C(-3, 0)$; $r = 1$
  - $C(0, -3)$; $r = 2$
- La ecuación canónica de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos $A\,(1, 1)$ y $B\,(7, -1)$ es:
  - $(x - 4)^2 + y^2 = 10$
  - $x^2 + (y + 4)^2 = 5$
  - $x^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{10}$
  - $(x - 4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$
- **Escribe** qué conceptos completan los enunciados para obtener una proposición verdadera:
  - ________________ es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
  - Si se hace la intersección un cono de revolución con un plano perpendicular a su eje se obtiene____________________.
  - En la circunferencia el punto fijo se llama ______________ y la distancia constante se llama ________________
  - Una circunferencia con centro $C(0, 1)$ y tangente al eje x tiene radio r = ___________.
- ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6$?
- ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + (y + 1)^2 = 9$?
- **Traza** la gráfica de las siguientes circunferencias:
  - $C(-5, 6)$; $r = 10$
  - $x^2 + (y - 3)^2 = 36$
  - $C(0, 0)$; $r = 7$

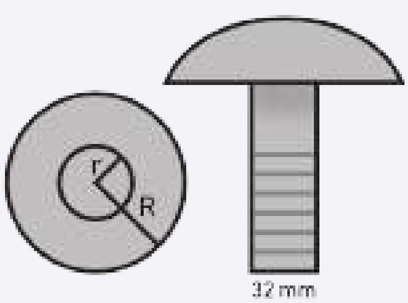
- **Halla** la ecuación canónica de una circunferencia tangente a ambos ejes, cuyo centro está en el primer cuadrante y su radio es 3.

- **Halla** la ecuación canónica de una circunferencia con centro $C(3, 1)$ y tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

- Un punto se mueve en forma tal que el cuadrado de su distancia al origen es igual a 10. Encuentra la ecuación canónica del lugar geométrico de dicho punto.

- Se ha registrado un temblor de tierra cuyo epicentro se ubicó a 130 km al sur y 85 km al oeste del centro de la ciudad de Santo Domingo. Si el instituto de investigaciones sismológicas del país determinó que se sintió en un radio de 112 km del epicentro, indica la ecuación que representa la zona afectada y grafícala en el plano cartesiano.

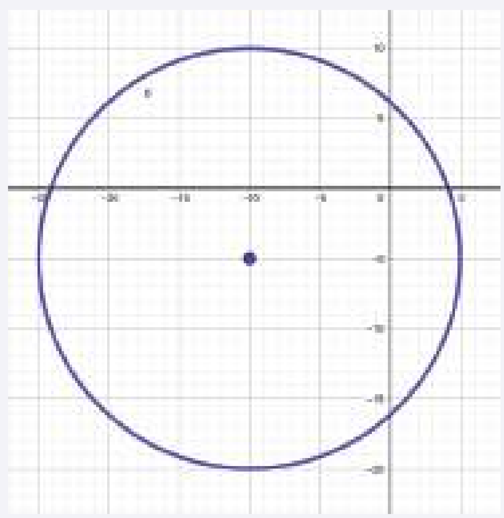
- Una empresa que se dedica a fabricar tornillos y arandelas se dispone a manufacturar un pedido para un cliente, el cual consiste en un conjunto de tornillos y arandelas de las siguientes características: las arandelas deben tener un diámetro exterior de 50 mm y los tornillos de un calibre de 32 mm. La máquina que fabrica las arandelas requiere para su funcionamiento las ecuaciones de ambas circunferencias (interior y exterior) y sus elementos fundamentales. **Halla** las ecuaciones de las circunferencias y de sus elementos.



- Utilizando el *software GeoGebra* **grafica** las siguientes circunferencias:
  - $x^2 + y^2 = 2$
  - $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 6$
  - $C(-2, 0)$; $r = 5$

- Utilizando el software *GeoGebra* **grafica** la circunferencia con centro C (3,1) y tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

- Dada la gráfica de la circunferencia, **identifica** el centro y radio, y expresa la ecuación canónica correspondiente.



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

Unidad 3

La parábola

Situación de aprendizaje

La Basílica de Nuestra Señora de la Altagracia es uno de los referentes arquitectónicos más importantes de la República Dominicana. La obra, declarada monumento nacional, fue inaugurada el 21 de enero de 1971.

En esta vista de la fachada principal, se pueden observar arcos de parábolas.

¿Cuántos arcos parabólicos observas en la imagen?

¿Qué características tienen en común estos arcos parabólicos?

¿Qué elementos en común tienen las parábolas?

¿Qué elementos no son comunes en las parábolas?

¿Por qué crees que el arquitecto utilizó arcos parabólicos?

Contenido

- La parábola
- La ecuación de la parábola con vértice (0,0)
- La parábola con vértice (h, k)
- Problemas asociados a la parábola
- Aplicaciones de la parábola
- Actividad grupal
- Evaluación

La parábola

¿Cuáles son los elementos que definen a una parábola?

La parábola tiene propiedades reflexivas, las cuales se aplican en la fabricación de faros, antenas parabólicas, estufas ecológicas, en el diseñó de salones acústicos, anfiteatros, entre otros.

Anfiteatro de Puerto Plata

Fuente: PuertoPlata.com

Un impresionante anfiteatro griego al aire libre frente al Océano Atlántico, flanqueado por la Fortaleza de San Felipe a un lado, y el verde parque La Puntilla en el otro. Ocasionalmente se celebran allí conciertos y otros eventos artísticos.

La parábola: características y elementos

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya distancia a un punto fijo llamado foco F es igual a la distancia a una recta fija D llamada directriz. Es decir, siendo M un punto cualquiera de la parábola se cumple la condición $\overline{MF} = \overline{MH}$ siendo H un punto en D (figura 1).

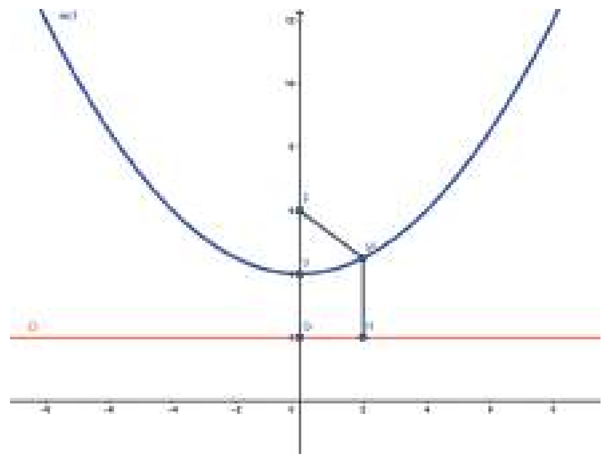


Figura 1

El punto V es el vértice de la parábola y se encuentra situado en el punto medio de $\overline{FG}$. La recta que contiene a los puntos F y G es el eje de simetría de la parábola o eje focal.

La distancia del foco al vértice, es decir, la longitud del segmento FV, se llama parámetro y se representa por $\boldsymbol{p}$.

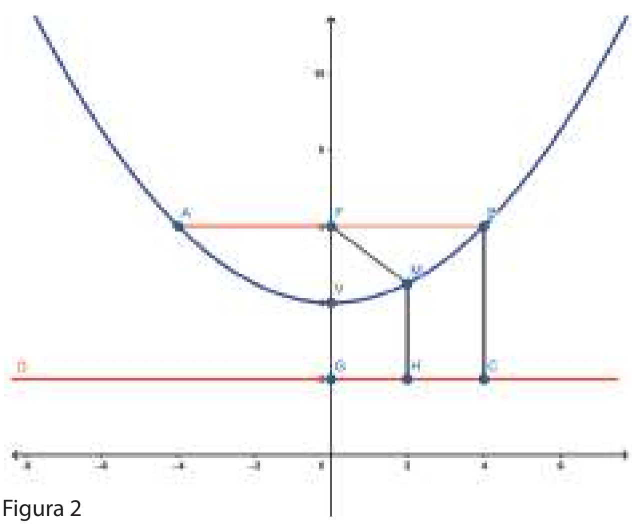


Figura 2

La cuerda que pasa por el foco, que es perpendicular al eje de simetría, recibe el nombre de lado recto o ancho focal de la parábola. En la figura 2, AB es el lado recto o ancho focal de la parábola.

$\overline{AF} = \overline{FB}$, porque la recta que contiene a F es el eje de simetría.

Además, se tiene que $\overline{FB} = \overline{BC}$ por definición de la parábola.

Así, $\overline{FB} = \overline{BC} = \overline{CG} = 2P$, luego $\overline{AB} = 4p$, fórmula que permite calcular la longitud del lado recto.

Ejemplo 1. Identifica en la figura 3 los elementos de la parábola.

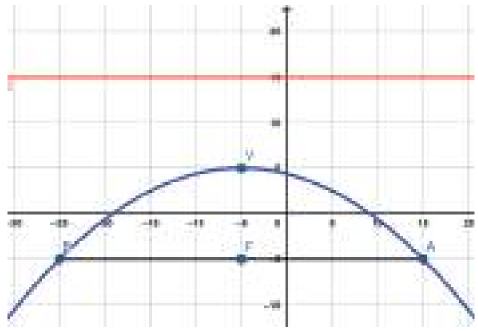


Figura 3

Solución:

El vértice es $V = (-5, 5)$.

El foco es $F(-5, -5)$.

El lado recto mide 40 unidades.

El eje de simetría es la recta $x = -5$.

La distancia focal (p) es 5 unidades.

La directriz es la recta $y = 15$.

Ejemplo 2. Identifica en la figura 4 los elementos de la parábola:

Solución:

El vértice es $V=(0, 0)$.

El foco es $F(5, 0)$.

El lado recto mide 20 unidades.

El eje de simetría es la recta $y = 0$.

La distancia focal (p) es 5 unidades.

La directriz es la recta $x = -5$.

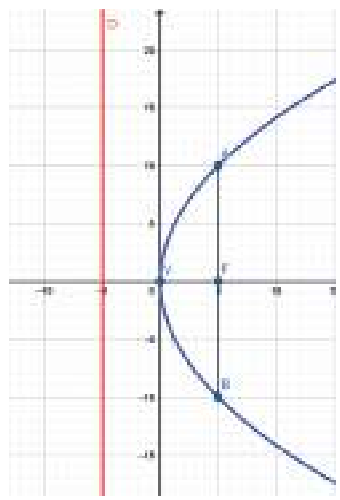
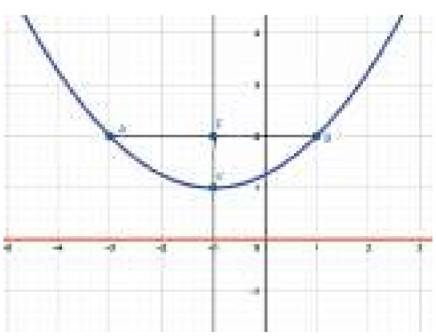
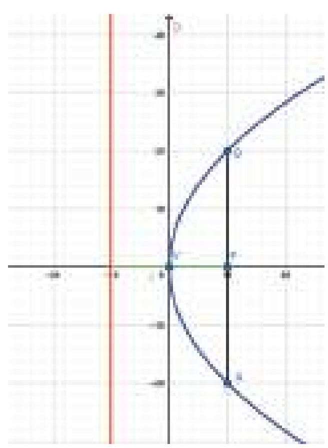


Figura 4

- Para cada parábola **identifica** sus elementos fundamentales.

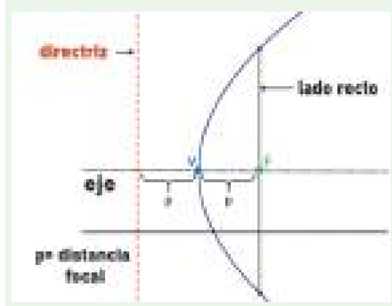




Menecmo (ca. 380-ca. 320 a.C.) fue un matemático y geómetra griego. Nació en el primer tercio del siglo IV antes de Cristo, en *Alopeconnesus* (actualmente Turquía). Fue discípulo de Platón y Eudoxo, y tutor de Alejandro Magno, como Aristóteles. Su estudio teórico de las secciones cónicas fue célebre en la antigüedad, por eso estas curvas tuvieron el nombre de Curvas De Menecmo. Trató de resolver el problema de la duplicación del cubo, utilizando la parábola y la hipérbola.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Menecmo

Ten en cuenta los elementos fundamentales de la parábola



- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

La ecuación de la parábola con vértice (0, 0)

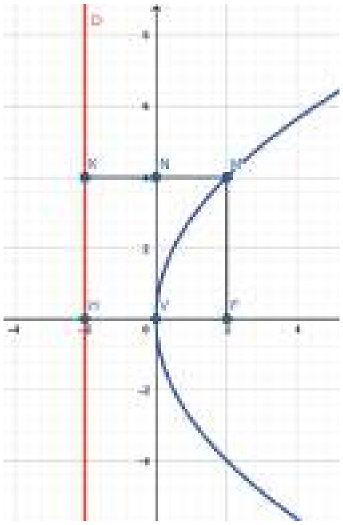


Figura 5

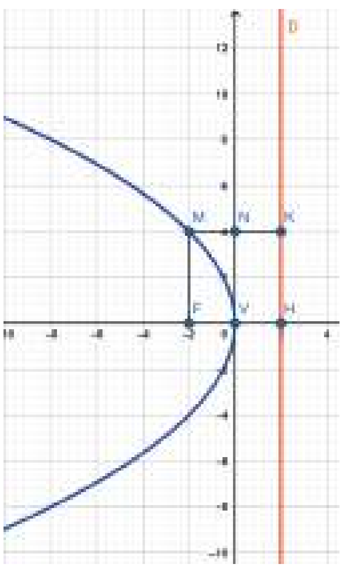


Figura 6

¿Cuál es la ecuación canónica de la parábola?

Ecuación canónica de la parábola con vértice (0, 0) y eje focal o de simetría horizontal

La ecuación de una parábola de vértice (0, 0) y eje de simetría o eje focal en el eje X es de la forma:

$$y^2 = 4px$$

Siendo $|p|$ la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola abre hacia la derecha (figura 5); si $p<0$, la parábola abre hacia la izquierda (figura 6).

Veamos cómo se deduce la ecuación de esta parábola.

Si $M(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola y $F(p, 0)$ el foco, tenemos: $\overline{MF} = \overline{MK}$ **(1)**

Entonces, por distancia entre dos puntos:

$\overline{MF} = \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$ **(2)**

Además, $K(-p, y)$, ya que $\overline{VF} = \overline{VH} = \overline{NK} = P$, $P > 0$

Luego, $\overline{\mathrm{MK}} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2}$ **(3)**

Sustituyendo **(2)** y **(3)** en **(1)** se obtiene:

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

Desarrollando $x^2 - {}^{\circ}2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

Simplificando, se tiene que la ecuación de la parábola es: $y^2 = 4px$ (I), donde $V(0, 0)$, $F(p, 0)$, la ecuación de la directriz $y = -p$ y la ecuación del eje focal $x=0$.

Ejemplo. Halla la ecuación de la parábola de $V(0,0)$ y $F(2,0)$. Grafica la ecuación haciendo uso de *GeoGebra*.

Solución: sabiendo que $F(p, 0)=(2, 0)$, entonces la distancia focal es de 2 unidades, y como F está a la derecha de V, entonces la parábola abre hacia la derecha y su eje de simetría es el eje X, cumpliendo así con la ecuación (I). Por lo tanto, si $y^2 = 4px$, entonces al sustituir nos queda: $y^2 = 8x$. (figura 7)

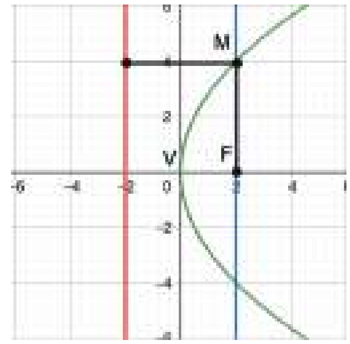


Figura 7

Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje focal o de simetría vertical

La ecuación de una parábola de vértice (0,0), y eje de simetría o eje focal en el eje Y, es de la forma:

$$x^2 = 4py \ \textbf{(II)}$$

Siendo $|p|$ la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba (figura 8); si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (figura 9). En el caso de la ecuación II se cumple: $V(0, 0)$, foco $F(0, p)$, la ecuación de la directriz $y = -p$ y la ecuación del eje focal $y = 0$.

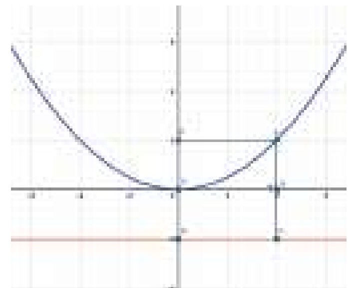


Figura 8

Ejemplo. Para la parábola $x^2 = -20y$ identifica sus elementos fundamentales.

Solución: se compara la ecuación dada con la ecuación **(II)**:

$$x^2 = 4py \qquad\qquad x^2 = -20y$$

Se tiene el vértice en el origen $V(0, 0)$, eje de simetría o eje focal en el eje Y (x=0), la parábola abre hacia abajo, el foco es $F(0, -5)$ y la directriz es $y = 5$ (figura 10).

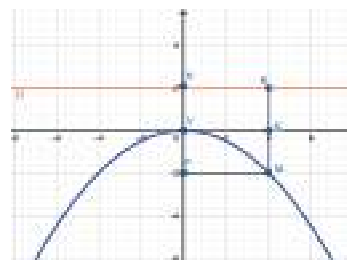


Figura 9

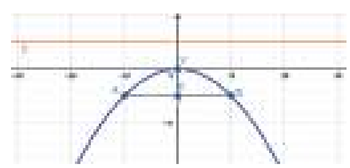


Figura 10

- En la parábola $y^2 = -12x$ **identifica** el vértice, el foco, la distancia focal, la longitud del lado recto, el eje de simetría y la directriz.
- Para cada caso, **halla** la ecuación de la parábola y **construye** su gráfica: a) $V(0, 0)$ y $F(0, -3)$ b) $V(0, 0)$ y directriz $x = 5$.

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

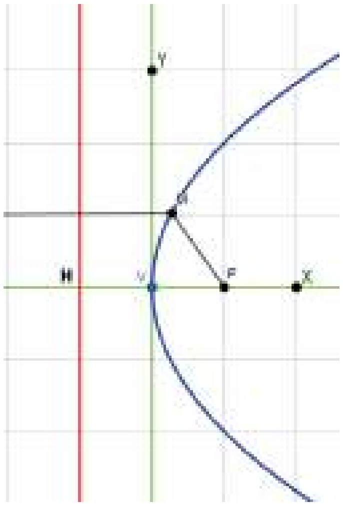


Figura 11

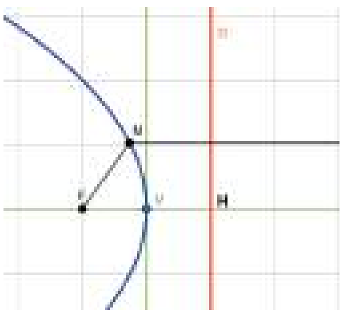


Figura 12

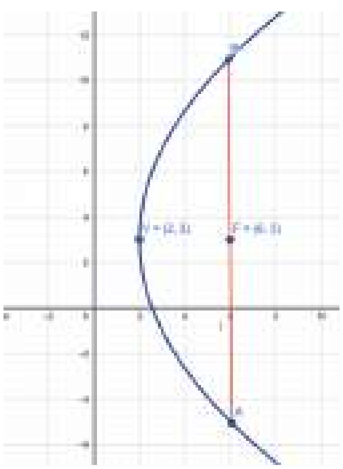


Figura 13

La parábola con vértice (h, k)

¿Cuál es la ecuación canónica de la parábola cuando su vértice no está en el origen?

Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje X

Si el eje de simetría es paralelo al eje X y abre hacia la derecha. Se considera que $M(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola y $V(h, k)$ el vértice. Las coordenadas de ambos puntos con referencia al sistema de ejes X e Y.

En cambio, con referencia al sistema de ejes x' e y' (figura 11), dichos puntos tendrán las coordenadas $M(x', y')$ y $V(0, 0)$. Para este nuevo sistema de ejes que resulta de una traslación, la ecuación de la parábola es de la forma siguiente:

$$(y')^2 = 4px' \text{ donde } x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

Al sustituir estos valores en la ecuación anterior, resulta:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \ \textbf{(III)}$$

La ecuación **(III)** representa la ecuación de la parábola, donde el eje de simetría es paralelo al eje X. Siendo $|p|$ la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola abre hacia la derecha (figura 11); si $p<0$, la parábola abre hacia la izquierda (figura 12). En el caso de la ecuación (III) se cumple que, $V(h, k)$, $F(h+p, k)$, la ecuación de la directriz $x = h - p$ y la del eje focal $y = k$.

Ejemplo. Dados el Vértice $V(2, 3)$ y foco $F(6, 3)$ de la parábola, obtener la ecuación de la curva y su gráfica.

Solución: como el vértice y el foco tienen la misma ordenada, es decir 3, el eje de simetría es paralelo al eje X. El foco está a la derecha del vértice, entonces la parábola abre a la derecha. La ecuación de la parábola es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Como $V(2, 3)$ y $F(6, 3)$, entonces $p = 6 - 2 = 4$, luego la ecuación es:

$$(y - 3)^2 = 16(x - 2).$$

Para realizar la gráfica, ubicamos en el plano el punto $V(2, 3)$ y el foco $F(6, 3)$, luego con abertura lado recto=16, se traza la parábola (figura 13).

Ecuación canónica de la parábola con vértice (*h*, *k*) y eje focal paralelo al *Y*.

Si el eje de simetría es paralelo al eje y, y abre hacia arriba, donde $M(x,y)$ es un punto cualquiera de la parábola y $V(h,k)$ es el vértice. Entonces, por razonamiento análogo resulta la ecuación:

$$(x-h)^2=4p(y-k) \quad \textbf{(IV)}$$

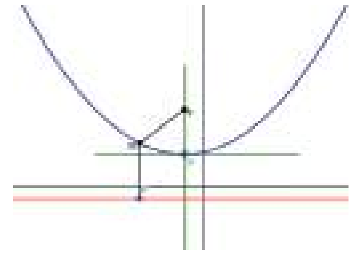


Figura 14

La ecuación **(IV)** representa la ecuación de la parábola, donde el eje de simetría es paralelo al eje Y. Siendo $|p|$ la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola abre hacia arriba (figura 14); si $p<0$, la parábola abre hacia abajo (figura 15). En este caso se cumple: $V(h, k)$, $F(h, k + p)$, la ecuación de la directriz $y = k - p$ y la del eje focal $x = h$.

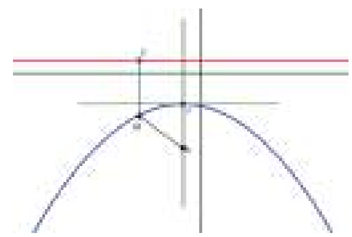


Figura 15

Ejemplo. Dados el vértice $V(-2,5)$ y la directriz $y=8$ de la parábola, obtener la ecuación de la curva y realizar su gráfica:

Solución: la directriz que tiene por ecuación $y = 8$ es paralela al eje X, entonces el eje de simetría es paralelo al eje Y, y el foco está abajo del vértice. Por lo tanto, la parábola abre hacia abajo y su ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4(p)(y-k)$. Como $V(-2, 5)$ y $p= -3$, entonces $F = (-2, 5 + p) = (-2, 2)$. Se concluye que la ecuación de la parábola es:

$$(x - (-2))^2 = 4(-3)(y-5)$$

$$(x + 2)^2 = -12\,(y-5)$$

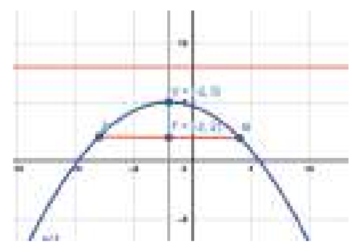


Figura 16

Para realizar la gráfica, ubicamos en el plano el punto $V(-2, 5)$ y el foco $F(-2, 2)$, luego con la abertura lado recto igual a 12, se traza la parábola (figura 16).

- Dados los elementos de la parábola, **obtén** su ecuación y **realiza** la gráfica haciendo uso de *GeoGebra*.
  - Vértice $V(-2, 5)$ y foco $F(3, 5)$
  - Vértice $V(-3, 2)$ y directriz $y = -2$
  - Vértice $V(2, 3)$ y foco $F(2, 5)$
  - Vértice $V(3, -1)$ y directriz $x = -4$
- **Representa** gráficamente las parábolas.
  - $(x - 2)^2 = 162(y + 5)$
  - $(y + 3)^2 = 18(y-1)$

Para verificar cada una de las gráficas se copia la ecuación hallada y se introduce en *Geogebra* en el siguiente enlace

https://www.geogebra.org/classic?lang=es

- Se expresa de manera convincente al concluir el desarrollo de procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

Problemas asociados a la parábola

¿Cómo se obtiene la ecuación ordinaria o canónica de una parábola a partir de su ecuación general?

Ecuación general de la parábola

Algunos problemas que involucran la ecuación de una parábola, se plantean a partir de su **ecuación general**, por lo que resulta útil saber construir la ecuación ordinaria o canónica a partir de ella.

Ejemplo 1. Determina la ecuación canónica de la parábola, las coordenadas del vértice y del foco, el valor de p, la longitud del lado recto, y la ecuación de la directriz y del eje de simetría de la parábola de ecuación $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$.

Solución: por el método de completar cuadrado se tiene:

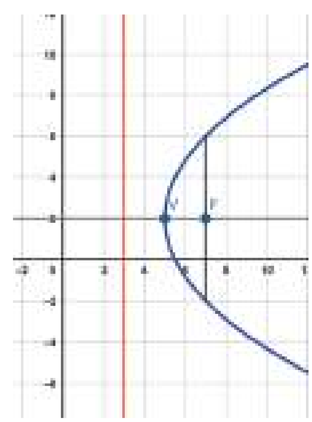
Procedimiento	Transformación
Agrupamos en el primer miembro, los términos que tengan las "y" en un mismo binomio, y despejamos al segundo miembro los otros dos términos.	$y^2 - 4y = 8x - 44$
Luego, completamos el trinomio.	$y^2 - 4y + 4 = 8x - 44 + 4$
Completamos el binomio al cuadrado y reducimos términos semejantes.	$(y - 2)^2 = 8x - 40$
Aplicamos factor común	$(y - 2)^2 = 8(x - 5)$

Esta ecuación es de la forma:
$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$, que corresponde a una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje X, y abre a la derecha. Luego:

$4p = 8 \longrightarrow p = 2$

$V(5, 2)$, $F(7, 2)$, lado recto = 8, Directriz $x = 3$ y eje focal $y = 2$.

Se puede apreciar en la figura 17.



Teorema

Si C y D son no nulos, la ecuación

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa la ecuación general de una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Si, en cambio, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje X, dos rectas coincidentes paralelas al eje X, o ningún lugar geométrico; según que las raíces de

$Cy^2 + Ey + F = 0$

Sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Teorema

Si A y E son no nulos, la ecuación

$Ax^2 + Ey + Dx + F = 0$

representa una ecuación general de una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si, en cambio, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje Y, dos rectas coincidentes paralelas al eje Y, o ningún lugar geométrico; según que las raíces de

$Ax^2 + Dx + F = 0$

Sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Practica la representación gráfica de la parábola

https://www.geogebra.org/m/XQ95FTuc

En otros problemas se solicitan lugares geométricos sin aclarar explícitamente que se trata de una parábola, por lo que, el que resuelve el problema depende de un planteamiento adecuado inicial y luego en sus transformaciones descubre que se trata de una parábola.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto (6, 2) es siempre igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico.

Solución: sin necesidad de hallar la ecuación, usando la definición de parábola, se identifica el lugar geométrico. Sabiendo que $P(x, y)$ es el punto general, entonces la distancia entre P y (6, 2) esta dada por:

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Calculando la distancia de P a la recta $x - 2 = 0$:

$$\overline{\text{PR}} = \frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x-2| \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, igualando **(1)** y **(2)** se tiene:

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} = |x-2|$$

Desarrollando y simplificando:

$$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2$$

$$(y - 2)^2 = 8x - 32;$$

$$(y - 2)^2 = 8(x - 4)$$

De lo cual se concluye que el lugar geométrico es una parábola de vértice (4, 2) que abre hacia la derecha, y su eje focal es paralelo al eje X. (figura 18)

Luego igualando (1) y (2) y desarrollando

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} = |x - 2|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2$

$(y - 2)^2 = (x - 2)^2 - (x - 6)^2$

Desarrollando los productos notables:

$(y - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 12x - 36$

Simplificando los términos semejantes:

$(y - 2)^2 = 8x - 32$

Factorizando el termino derecho de la ecuación:

$(y - 2)^2 = 8(x - 4)$

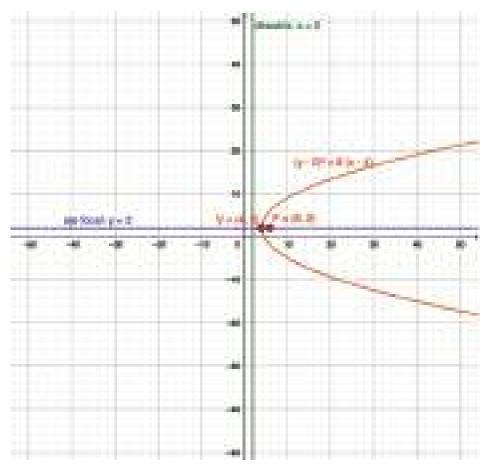


Figura 18

- **Halla** la ecuación canónica, las coordenadas del vértice y del foco, la longitud de parámetro, el ancho focal, la ecuación de la directriz y del eje de simetría de las parábolas:
  - $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$
  - $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$
- Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto (2,6) es siempre igual a su distancia a la recta $y=2$. **Halla** e **identifica** la ecuación del lugar geométrico. **Realiza** la representación gráfica con *GeoGebra*.

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

Desde la antigüedad los griegos y los romanos, construyeron estructuras con múltiples arcos para construir puentes y acueductos.

Vista del puente en arco de Grosvenor en Chester, Inglaterra.

Este tipo de puentes fueron inventados por los antiguos griegos, quienes los construyeron en piedra.

Fuente: https://es.wikipedia.org/

Aplicaciones de la parábola

> ¿Por qué los griegos y romanos utilizaron arcos de parábolas en la construcción de estructuras?

Las aplicaciones de la parábola han estado presentes en muchos campos del conocimiento: en la arquitectura, los deportes, la ingeniería, las telecomunicaciones, la producción de alimentos, etcétera.

Aplicación en ingeniería: sobre un río de 10 metros de ancho entre sus orillas, se quiere construir un puente de sección parabólica y debe tener una altura del nivel del río al vértice de la parábola de 3 metros, sabiendo que la carretera coincide con la directriz de la parábola. ¿A qué altura sobre el nivel del río pasa la carretera?

Solución: se introduce un sistema de coordenadas que coincida con el vértice de la sección parabólica del puente, de modo que el punto vértice sea (0, 0) y su eje de simetría vertical. Entonces, la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la figura 19, se puede observar que el punto (5, -3) se encuentra sobre la parábola y este se emplea para hallar p, igual a la distancia que hay desde el vértice a la carretera.

Al sustituir el punto (5, -3) en la ecuación de la parábola se tiene:

$$5^2 = 4p(-3) \rightarrow 25 = -12p$$

Luego, despejando p se tiene $p = -\frac{25}{12}$

Teniendo en cuenta que la distancia del vértice a la directriz es p, entonces, la altura desde el nivel del río a la carretera es: $p + 3$. Calculando se tiene: $h = |p - 3| = |-\frac{25}{12} - 3| = \frac{61}{12} \approx 5.08$ m

La carretera pasa a una altura de 5.08 metros sobre el nivel del río.

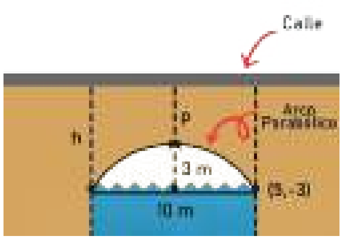


Figura 19

Aplicación para ahorro de energía:

Pablo quiere realizar una estufa ecológica para asar salchichas (figura 20), usando una superficie reflectora parabólica. ¿A qué altura del fondo debe colocar el alambre para que el funcionamiento sea óptimo?

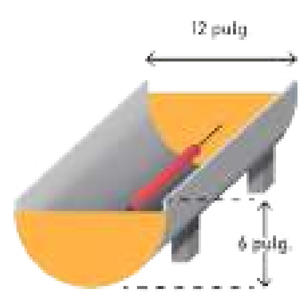


Figura 20

Solución: sabiendo que el alambre debe pasar por el foco de la parábola, entonces la distancia entre el alambre (foco) y el fondo (vértice) está dada por p. La ecuación de la parábola que modela esta situación es de la forma $x^2 = 4py$ y el punto (6, 6) pertenece a ella, entonces si $x = 6$ y $y = 6$, luego $(6)^2 = 4p(6)$.

Despejando p nos queda: $p = \dfrac{(6)^2}{24} = \dfrac{36}{24}$

Así, $p = \dfrac{3}{2} = 1.5$ pulgadas.

El cable se debe colocar a 1.5 pulgadas del fondo.

Aplicación en la física y el deporte: un beisbolista batea un home run, (figura 21) la bola sale de una altura de 1.20 m del suelo y cuando lleva un recorrido de 60 m alcanza una altura máxima de 11.20 m. Si la bola cae en la tribuna a una altura de 6 m, ¿qué longitud tuvo el batazo?

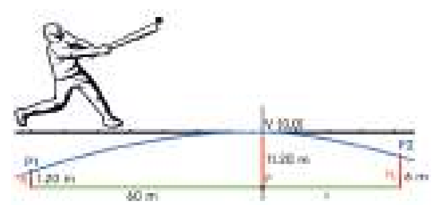


Figura 21

Solución: cuando un beisbolista batea la bola, esta describe un arco al realizar su recorrido. Este arco descrito por la bola lo podemos modelar con la ecuación de la parábola $x^2 = 4py$ de vértice en el origen y eje de simetría vertical. En la figura 21, se observa cada uno de los datos que se dan en esta situación.

Al sustituir el punto $P1(-60, -10)$, en la ecuación de la parábola, se tiene: $(-60)^2 = 4p(-10) \rightarrow 3,600 = -40p$.

Despejando p, se tiene $p = -90$, luego la ecuación de la parábola es $x^2 = -360y$.

Al sustituir el punto $P2(x, -5.2)$ en la ecuación de la parábola, se tiene:

$x^2 = -360(-5.2) \rightarrow x^2 = 1,872 \rightarrow x = \sqrt{1,872} \approx 43.26$ m.

La longitud del batazo fue de 60 m + 43.26 m = 103.26 m.

- **Resuelve**: para un proyecto escolar de utilización de energía renovable, Aneudy y su padre deciden hacer una estufa solar. Al investigar sobre el tema descubren que la mejor forma es con la utilización de una superficie reflectora en forma de parábola. Fabrican la superficie en forma de parábola y la fijan a una base metálica, por lo que lo único que necesitan saber es a qué distancia del fondo ubicar la cacerola, el diámetro del disco parabólico es de 1 m, y tiene una profundidad de 0.20 m. ¿Cómo podrían Aneudy y su padre resolver esta situación?

- Utiliza el razonamiento matemático para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia y parábola) y las relaciona con situaciones de la vida diaria.
- Utiliza la estrategia de resolución de problemas para dar respuestas a situaciones relacionadas con el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia y parábola).

Actividad grupal

Descubriendo parábolas en el contexto real

¿Qué haremos?

En esta unidad se dieron varios ejemplos de algunas aplicaciones de las parábolas, encuentren otras situaciones de la vida real donde se usen parábolas. Consulten una enciclopedia científica, en la biblioteca o investiguen en internet

¿Qué necesitamos?

Papel, calculadora, cámara fotográfica, computadora y acceso a *internet*.

¿Cómo nos organizamos?

Deben formar equipos de tres integrantes, expresar sus ideas, tanto de forma verbal como escrita, y cooperar entre todos para lograr dar respuesta a esta actividad grupal.

¿Cómo lo haremos?

Socializar el plan de trabajo para organizar las acciones y así dar respuesta de forma compartida a las siguientes actividades:

- Identifiquen en su ciudad o provincia alguna estructura con forma parabólica, hagan una fotografía de la misma y respondan de manera consensuada a las siguientes preguntas:
  - ¿Cuál es el nombre de la estructura?
  - ¿Dónde está ubicada?
  - ¿En qué año fue construida?
  - ¿Cuál es su utilidad?
  - ¿Cuántos arcos parabólicos tiene?
  - ¿Cuáles son sus elementos?
  - ¿Por qué creen que el arquitecto utilizó arcos parabólicos?
- Ubiquen un problema que se modele a través de la ecuación de la parábola, y resuélvanlo paso a paso. No olviden realizar la representación gráfica, para ello pueden usar el software *GeoGebra*.

Imagen: Matthew Alexander **Fuente:** Unsplash

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada grupo comunicará sus resultados a través de una exposición que realizarán en el aula, para describir el proceso que siguieron y los resultados obtenidos.

Coevaluación

En el orden que corresponda cada equipo hace su presentación. A continuación, el equipo siguiente hace sus observaciones acerca de la presentación realizada y plantea los aspectos susceptibles de mejoras, y así sucesivamente hasta que todos expongan y sean retroalimentados por sus compañeros.

Autoevaluación

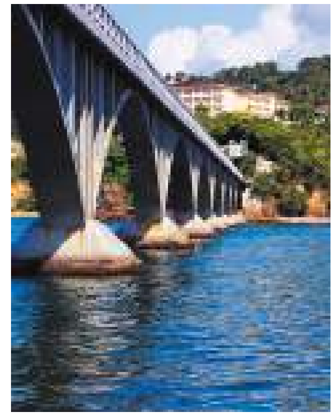
¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

Reflexiono sobre lo que necesito repasar...

Copia en tu cuaderno este cuadro para que sigas el avance de tu aprendizaje.

Observa y completa lo que todavía te falta por estudiar o repasar.

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
•	He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…
•	Un tema de esta unidad sobre el que me gustaría estudiar o investigar más a fondo es...


Fuente: Pixabay.com


Fuente: Pixabay.com

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Emplea la creatividad para formular situaciones relacionadas con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) interpretando posibles vías de solución.
- Valora el desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la recta y las cónicas (circunferencia y parábola) y haciendo uso de la notación matemática adecuada.

Evaluación

Selecciona la respuesta correcta.

- La ecuación de la parábola con vértice $V(5, 2)$ y directriz $x = 3$ es:
  - $(y - 2)^2 = 8\ (x + 5)$
  - $(y - 2)^2 = 8\ (x - 5)$
  - $(y - 2)^2 = -8\ (x - 5)$
  - $(y + 2)^2 = 8\ (x + 5)$
- El vértice y foco de la parábola $(x + 2)^2 = -12\ (y - 5)$ es:
  - $V(-2, 5)$; $F(-2, 2)$
  - $V(2, 5)$; $F(2, 8)$
  - $V(-2, 5)$; $F(2, 8)$
  - $V(2, 5)$; $F(2, 2)$
- La directriz de la parábola $(y - 2)^2 = 20\ (x - 4)$ es:
  - $x = 9$
  - $y = 9$
  - $x = -1$
  - $y = -1$
- ¿Cuál es la ecuación de la parábola, cuyo vértice está en el origen y la directriz es la recta de la ecuación $x - 5 = 0$?
  - $x^2 = 20y$
  - $y^2 = -20x$
  - $y^2 = 5x$
  - $y^2 = 20x$
- ¿Cuál es la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y el foco en el punto (4,0)?
  - $x^2 = 16y$
  - $y^2 = 16x$
  - $x^2 = -4y$
  - $y^2 = 4x$

- **Completa** los enunciados:
  - La distancia del foco a la directriz, se llama ____________ y se representa por $2p$.
  - La cuerda que pasa por el foco, siendo perpendicular al eje de simetría, recibe el nombre de ______________ de la parábola.
  - Si el vértice de la parábola está en el origen, el eje focal en el eje Y, y el foco está debajo del vértice, entonces la parábola abre hacia ____________.
  - La ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ corresponde a una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje ________, y abre hacia________.
  - En la ecuación $(y - 2)^2 = 8(x - 4)$ la parábola es de vértice _____, abre hacia___________, y su eje focal es paralelo al eje _____.
- Para la parábola $y^2 = -28x$ **identifica** el vértice, el foco, la longitud del lado recto, el eje de simetría y la distancia del foco a la directriz.
- Para la parábola $x^2 = 36y$ **identifica** el vértice, el foco, la longitud del lado recto, el eje de simetría y la distancia del foco a la directriz.
- **Halla** la ecuación de la parábola y **construye** su gráfica en cada caso:
  - $V(0, 0)$ y $F(0, -2)$
  - $V(0, 0)$ y directriz $x = 3$

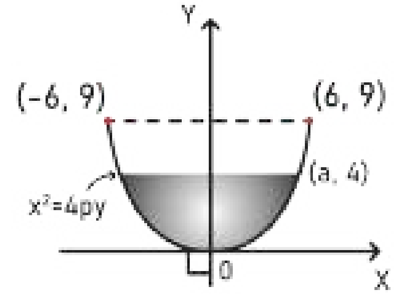
- Dados los elementos de la parábola, **determina** cada ecuación y dibuja su curva.
  - Vértice $V(2, 3)$ y foco $F(6, 3)$
  - Foco $F(-2, 0)$ y directriz $x = 4$
  - Vértice $V(4, -7)$ y foco $F(4, -6)$
  - Vértice $V(1, 1)$ y directriz $y = \frac{5}{4}$

- Utilizando el software *GeoGebra* **grafica** las siguientes parábolas:
  - $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$
  - $y^2 = 11(x - 1)$
  - $x^2 = -8y$
  - $(x - 3)^2 = - 12 (x - 5)$

Resuelve los siguientes problemas

- Un caño deja salir agua por uno de sus extremos, a una altura de 3.25 m por encima del suelo. El chorro de agua describe una curva parabólica, con vértice en el extremo del tubo. Si en un punto a 1.20 m por debajo del nivel del tubo, el flujo de agua se encuentra a 1.50 m de la vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿a qué distancia de esta vertical llegará el agua al suelo?

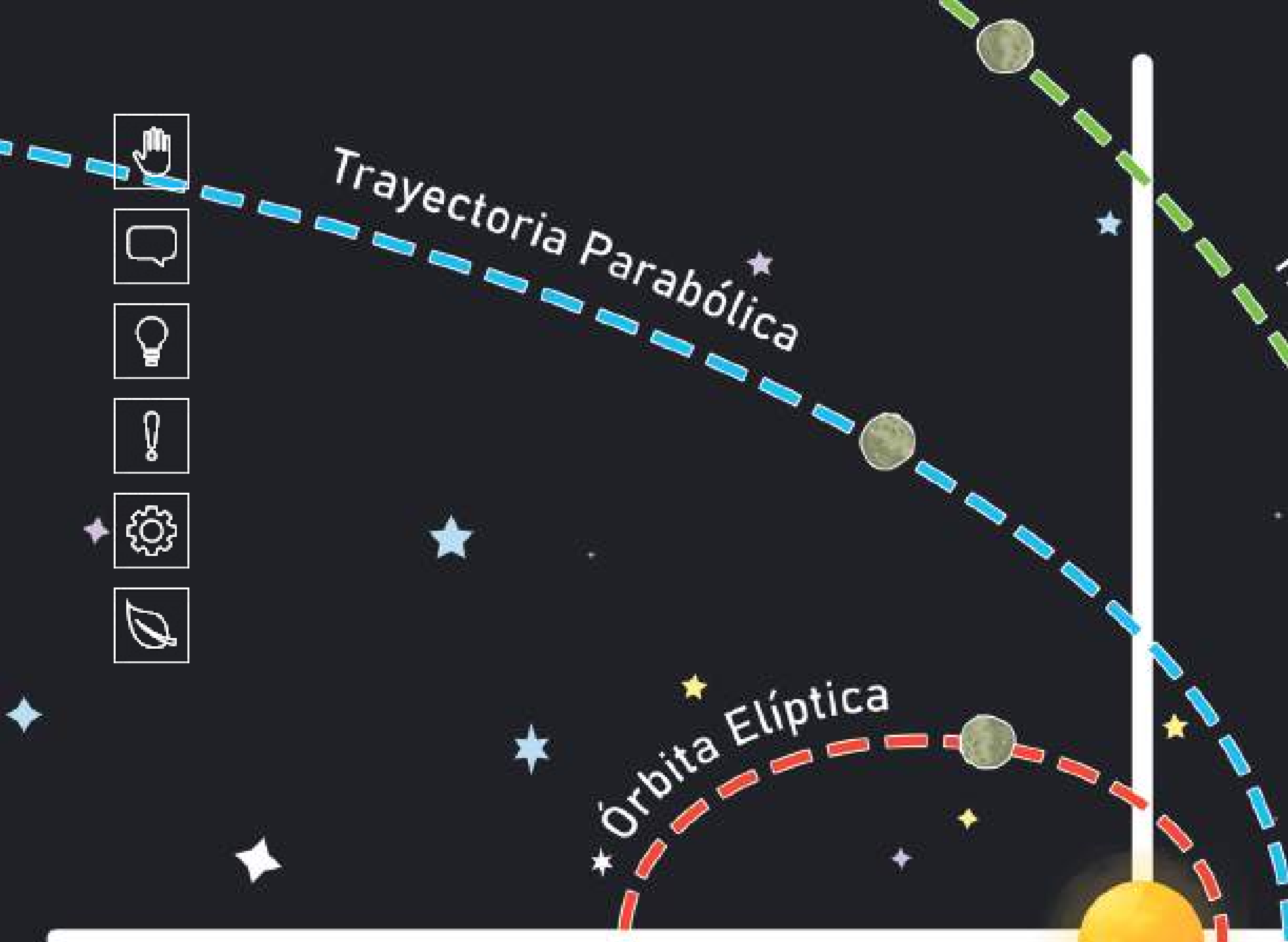
- Un tinaco de agua tiene sección transversal de forma parabólica, si cuando el nivel del agua alcanza una altura de 9 m, su ancho mide 12 m, ¿cuál es el diámetro del nivel del agua (en metros), cuando el nivel ha descendido 5 m de su altura?



- **Halla** la ecuación canónica, las coordenadas del vértice y del foco, la longitud del parámetro, el ancho focal o lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de simetría de las parábolas, y **realiza** una representación gráfica con *GeoGebra*.
  - $y^2 - x = 0$
  - $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$
  - $x^2 - 3x - y + 5 = 0$
  - $x^2 - 10x - 12y - 11 = 0$

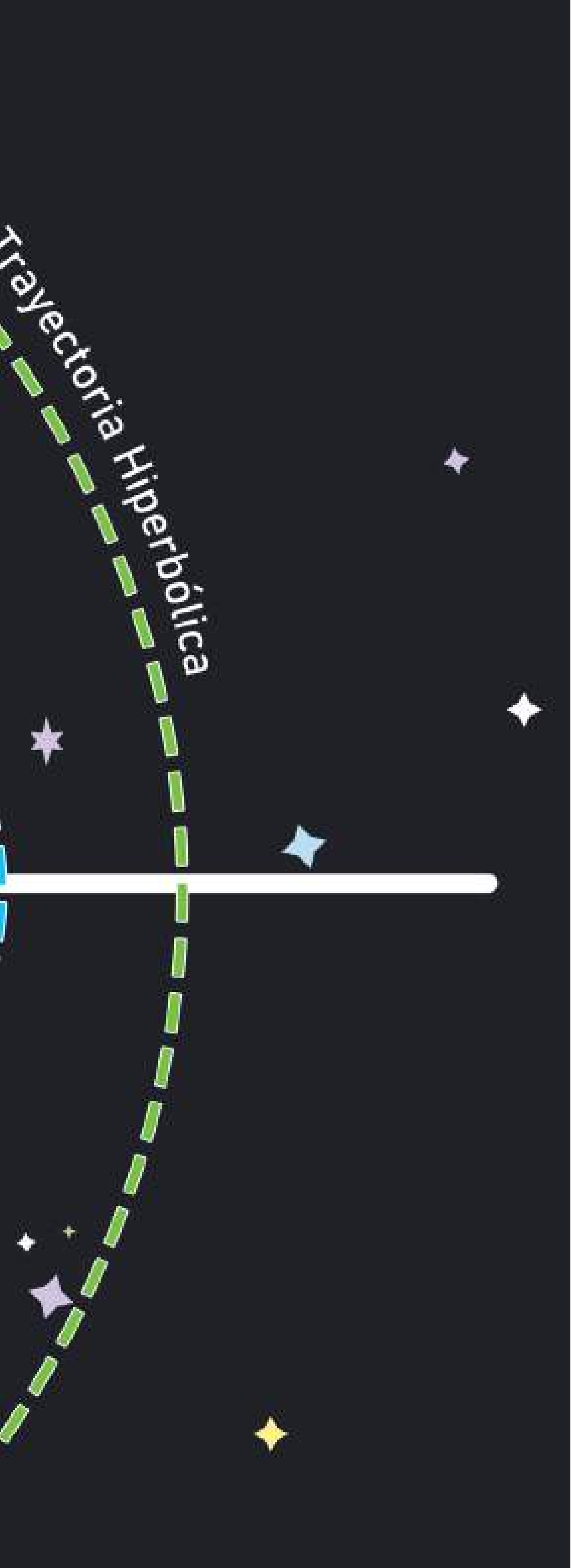
- Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $(6, 2)$ es siempre igual a su distancia a la recta $y - 6 = 0$. **Halla** e **identifica** la ecuación del lugar geométrico. Realiza una representación gráfica con *GeoGebra*.

- La trayectoria de un proyectil disparado desde el nivel del suelo es una parábola abierta hacia abajo. Si la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 100 metros y su alcance horizontal es de 800 metros, ¿cuál es la distancia horizontal del punto de disparo al punto donde el proyectil alcanza por primera vez una altura de 64 metros?



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 4

Elipse e Hipérbola

Situación de aprendizaje

Cuando los cometas son expulsados de la nube Oort, comienzan su paso por el sistema solar. En su desplazamiento siguen una trayectoria que puede ser hiperbólica, parabólica o elíptica con el sol en un foco.

¿Qué se puede deducir de los cometas que siguen cada una de estas tres trayectorias?

¿Qué tipo de trayectoria tiene el cometa Halley, que se sabe orbita alrededor del sol cada 76 años en promedio?

Contenido

- La elipse, elementos y ecuaciones
- Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k)
- La hipérbola, elementos y ecuaciones
- Ecuación canónica de la hipérbola con centro (h, k)
- Aplicaciones de la elipse e hipérbola
- Actividad grupal
- Evaluación

En la elipse también hablamos del **lado recto**. Recibe este nombre cualquiera de las cuerdas que pasan por sus focos y son perpendiculares al eje focal. En la figura 1, MM′ y NN′ son los lados rectos de la elipse.

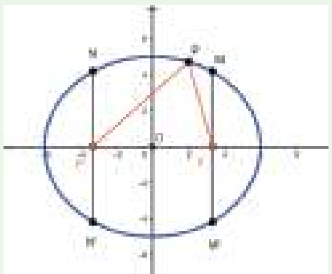


Figura 1

$$(\overline{MM'}) = (\overline{NN'}) = \frac{2b^2}{a}$$

La fórmula nos permite calcular la longitud del lado recto de la elipse, conociendo las longitudes de sus semiejes mayor y menor.

En la figura 3, se observa que los vértices de la elipse son (-*a*,0) y (*a*,0), y los covértices son (0,-*b*) y (0,b), luego, la longitud del eje mayor es 2*a*, la longitud del eje menor es 2*b* y la distancia focal es 2*c*. En esta relación, se cumple que:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

La forma de la elipse es un óvalo, el área de la región interna es igual a $ab\pi$, donde *a* y *b* son las longitudes del semieje mayor y el semieje menor respectivamente.

La elipse, elementos y ecuaciones

¿Qué diferencias y semejanzas hay entre una circunferencia y una elipse?

La elipse y sus elementos principales

La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los focos. Es decir, si M es un punto cualquiera de la elipse, se cumple que:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a,\ a > c > 0, \text{ donde } 2c = \overline{FF'}$$

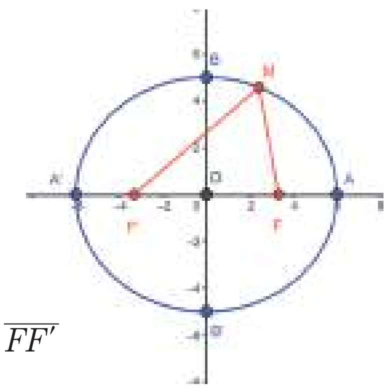


Figura 2

A continuación, tomando en cuenta la figura anexa se identifican los elementos de la elipse:

AA' es denominado *eje mayor*, su longitud es “2*a*”, “*a*” es la longitud del semieje mayor.

BB' es llamado *eje menor*, su longitud se denota con “2*b*” y “*b*” es la longitud del semieje menor.

$^{-}(FF')$ es la *distancia focal*, su valor es “2c”. La recta que contiene los focos, y los vértices se denomina *eje focal*.

MF y MF' son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos y se denominan *radios vectores*.

A y A' son los vértices de la elipse, siendo los extremos del eje mayor y a los puntos B y B' se les denominan *covértices*.

El punto medio de AA' coincide con el punto medio de BB' y el de FF', este punto se denota con C y se llama *centro* de la elipse.

Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal coincidente con el eje X

Sean $O(0,0)$ el centro y $M(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse cuyos focos son $F(c,\ 0)$ y $F'(-c,\ 0)$. La ecuación (I) es la ecuación de la elipse en la posición indicada.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(I)}$$

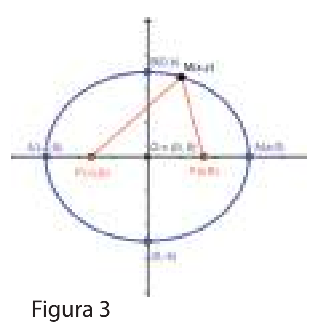


Figura 3

Ejemplo. Halla la ecuación de la elipse, sabiendo que sus vértices son $A\,(6, 0)$, $A'(-6, 0)$ y la longitud del eje menor es $2b = 10$.

Solución. Según los vértices dados, se trata de una elipse, cuyo eje focal coincide con el eje X. El punto medio de AA' es el centro C(0, 0), $\overline{AA'} = 2a$, entonces $a = 6$, como $2b = 10$, entonces $b = 5$. Por (I), tenemos que la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal coincidente con el eje Y

Sean $O(0, 0)$ el centro y $M(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse cuyos focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$, de forma análoga al anterior se obtiene la ecuación (II) (figura 4).

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(II)}$$

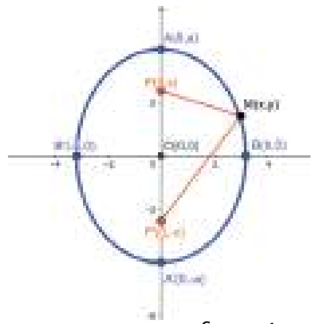


figura 4

Ejemplo. Halla la ecuación de la elipse, sabiendo que sus vértices son: $A(0, 8)$, $A'(0, -8)$ y $F(0, 6)$ es un foco.

Solución. Según los vértices dados, se trata de una elipse cuyo eje focal coincide con el eje Y. El punto medio de AA' es el centro $C(0, 0)$, $\overline{AA'} = 16$, entonces $a = 8$. Como un foco es $F(0, 6)$ y $\overline{CF} = c$, entonces c = 6.

Para hallar el valor de b, se sustituyen $a = 8$ y $c = 6$ en la relación: $c^2 = a^2 - b^2$. Es decir, $6^2 = 8^2 - b^2$. Transponiendo términos y efectuando operaciones, tenemos: $b^2 = 8^2 - 6^2 = 28$, luego $b = \sqrt{28}$. Por lo tanto, por (II), tenemos que la ecuación de la elipse es: $\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{28} = 1$.

Si introduces en *GeoGebra* esta ecuación obtienes la gráfica de la figura 5.

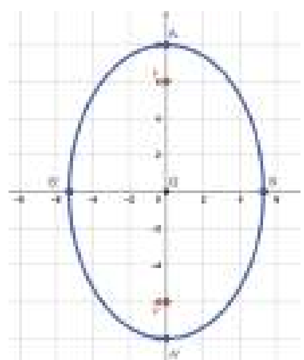


figura 5

El aspecto de una elipse depende del valor de su excentricidad.

La **excentricidad** (*e*) es el número resultante de dividir su distancia focal entre la longitud de su eje mayor.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Si $\boldsymbol{e} = 0$, entonces $c = 0$ y $a = b$, por tanto los dos focos coinciden en el centro y la elipse es una circunferencia.

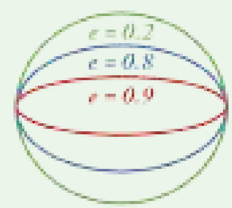
Conforme ***e*** crece, los focos se separan, alejándose del centro y ***b*** decrece. Conforme ***e*** se acerca a 1, ***c*** se acerca a ***a*** y ***b*** se acerca a 0. Por esta razón, la elipse que comenzó como una circunferencia se vuelve más y más angosta.

Si $\boldsymbol{e} = 1$, la definición de elipse requiere que la representación gráfica sea el segmento de recta que conecta a los focos.

Resumiendo, se tiene una elipse real si $0 < \frac{c}{a} < 1$. Esto significa que el valor de la excentricidad debe estar comprendido entre 0 y 1.

Cuando ***e*** es ligeramente mayor que cero, la elipse es casi una circunferencia; pero cuando ***e*** es ligeramente menor que 1, la elipse es relativamente larga y angosta.

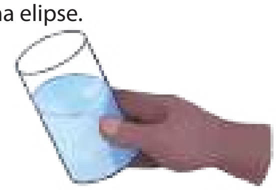
La siguiente figura muestra algunas elipses y su excentricidad.



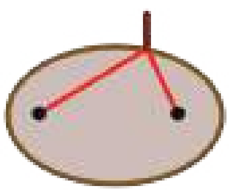
- **Grafica** con ayuda de *GeoGebra* las siguientes elipses e **identifica** cada uno de sus elementos:
  - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$
  - $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.

Si se inclina un vaso con agua de forma de cilindro recto, la superficie del agua adquiere la figura de una elipse.



Los jardineros, para trazar una forma elíptica sobre la tierra, clavan dos estacas en el suelo, atan entre ambas una cuerda mayor que la distancia entre las estacas y, manteniéndola tensa, trazan una línea sobre la tierra apoyando un palo sobre la cuerda y deslizándolo sobre la misma.



En el siguiente enlace podrás reforzar paso a paso todos los elementos de la elipse con sus principales características

https://www.geogebra.org/m/swrb8gnp

En el siguiente enlace encontraras una definición más dinámica de la elipse.

https://www.geogebra.org/m/nchasgs2

Ecuación canónica de la elipse con centro (*h*, *k*)

¿Qué cambios se generan en la ecuación si en la elipse su centro no está en el origen?

Ecuación canónica de la elipse con centro (*h*, *k*) y eje focal paralelo al eje *X*

Consideremos la elipse cuyo centro está en el punto $C(h, k)$ y su eje focal es paralelo al eje X. Tal como se indica en la figura.

Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro $C(h, k)$ de la elipse, la ecuación de la elipse referida a los nuevos ejes X' y Y' está dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

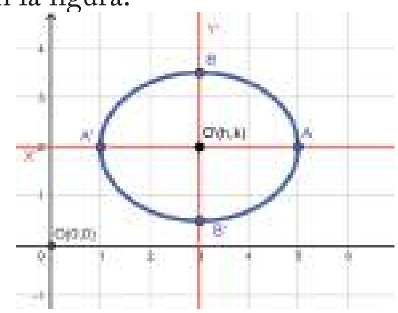


Figura 6

Las sustituciones $x' = x - h$ y $y' = y - k$ conducen a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(III)}$$

Ejemplo. Obtén la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes condiciones: su centro es $C(3, 2)$, el eje mayor es paralelo al eje X, la longitud del eje mayor es $2a = 4$, y la longitud del eje menor es $2b = 3$. Luego, realiza su representación gráfica.

Solución. Por ser el eje mayor paralelo al eje X, la ecuación de la elipse es de la forma (III). Como $\boldsymbol{a} = 2$ y $\boldsymbol{b} = \frac{3}{2}$ y el centro está en $C(3,2)$, se tiene:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Al introducir en *GeoGegra* la ecuación obtenida, se origina la gráfica dada en la figura 7.

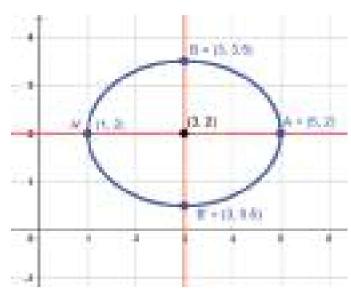


Figura 7

Ecuación canónica de la elipse con centro (*h*, *k*) y eje focal paralelo al eje *Y*

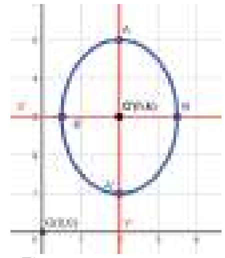


Figura 8

Consideremos la elipse cuyo centro está en el punto C(h, k) y su eje focal es paralelo al eje Y. Tal como se indica en la figura 8.

Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro C de la elipse, por un razonamiento análogo a lo anterior obtenemos la ecuación (IV):

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(IV)}$$

Ejemplo. Obtén la ecuación de la elipse cuyos vértices son $A(2, 8)$, $A'(2, -2)$ y sus focos son $F(2, 6)$ y $F'(2, 0)$. Grafica la ecuación usando *GeoGebra*.

Solución: Por tener A y A' la misma abscisa, el eje mayor AA' es paralelo al eje Y. Entonces la ecuación es de la forma (IV). Como el centro de la elipse es el punto medio de los segmentos AA', BB' y de FF', se tiene; que el centro está en el punto $C(2,3)$. Además, $2a = \overline{AA'} = |8-(-2)| = 10$, de donde $a = 5$, $2c = \overline{FF'} = 6 - 0 = 6$, por lo que $c = 3$

Luego, aplicando $c^2 = a^2 - b^2$, para obtener ab.

$b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, de donde $b = 4$

Sustituyendo los valores de a y b en (IV), tenemos:

$$\frac{(y-3)^2}{25}+\frac{(x-2)^2}{16}=1$$

Al introducir en *GeoGegra* la ecuación obtenida, se origina la gráfica dada en la figura.

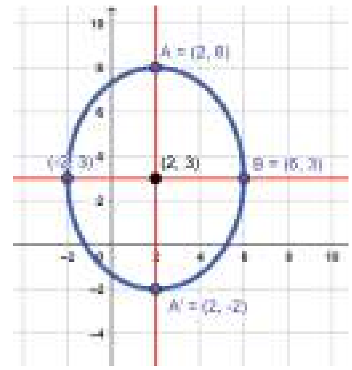
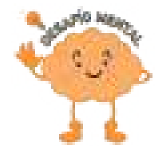
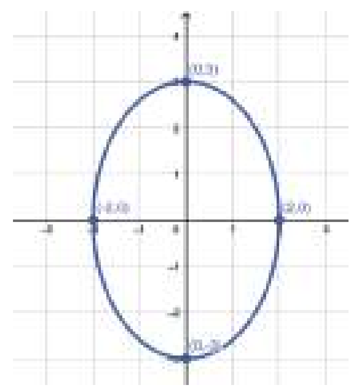


Figura 9



Escribe la ecuación que describe la gráfica de la curva dada



- **Halla** la ecuación de la elipse y **construye** la curva en cada caso:
  - $C(0, 0)$, $2a = 10$, $2b = 6$, donde el eje mayor coincide con el eje X.
  - $C(1, 2)$, $2a = 20$, $2b = 12$, donde el eje mayor es paralelo al eje Y.

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

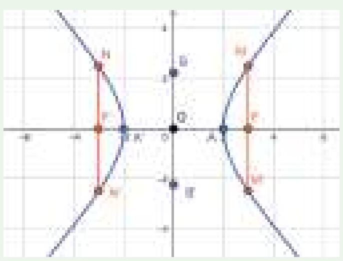
La hipérbola, sus elementos y sus ecuaciones

Las **asíntotas** de una hipérbola son dos rectas que pasan por el centro, a las cuales, se acercan los puntos de la curva a medida que se alejan del centro. Estas rectas no intersecan la hipérbola.

En la hipérbola también existe el **lado recto**. Recibe este nombre, cualquiera de las cuerdas que pasan por sus focos y son perpendiculares al eje focal.
En la figura, *MM'* y *NN'* son lados rectos de la hipérbola.

$$\overline{MM'} = \overline{NN'} = \frac{2b}{a}$$

Esta fórmula nos permite calcular la longitud del lado recto de la hipérbola, conociendo las longitudes de su eje transverso y su eje conjugado.



L^1 y L^2 son las diagonales extendidas del rectángulo (ver figura 10). Por tratarse de rectas que pasan por el origen, las ecuaciones de L^1 y L^2 son del tipo $y = mx$.

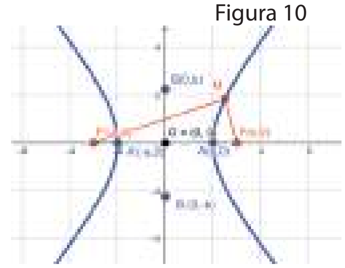
Si el eje focal es horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \frac{b}{a}x; y = -\frac{b}{a}x$

Si el eje focal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \frac{a}{b}x; y = -\frac{a}{b}x$

¿Cuál es la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen?

La hipérbola y sus elementos

Figura 10



La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F y F' del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante denotada como $2a$, la cual es positiva y menor que la distancia focal $2c$. Es decir, si M es un punto cualquiera de la hipérbola, se cumple la condición: $|\overline{MF'} - \overline{MF}| = 2a, \quad 0 < a < c$.

A continuación, tomando en cuenta la figura 10 se identifican los elementos de la hipérbola:

El segmento AA' es llamado *eje transverso*, que está ubicado en el eje focal y su longitud se denota con "$2a$".

Al segmento BB' se le llama *eje conjugado* y su longitud se denota como "$2b$".

A la longitud del segmento FF' se le llama *distancia focal*, la cual se denota con "$2c$", donde "c" es la distancia del centro a un foco y se cumple que: $c^2 = a^2 + b^2$.

Si M es un punto de la hipérbola, MF y MF' son los segmentos que van desde M a cada foco, estos se denominan *radios vectores*.

A y A' son los vértices (puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal), los puntos B y B' están situados en la mediatriz de AA', de modo que $\overline{AB} = \overline{AB'} = \overline{OF}$.

Otro aspecto interesante para tener en cuenta son las **asíntotas** de la hipérbola. Las rectas L^1 y L^2, determinadas por las diagonales del rectángulo de lados $2a$ y $2b$, y de centro el de la hipérbola como aparece en la figura 11 son las asíntotas de la hipérbola.

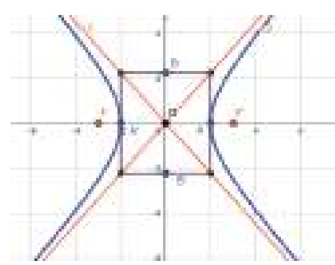


Figura 11

Ecuación canónica de la hipérbola con centro (0,0)

En este caso se deben considerar las dos posiciones siguientes:

Caso I. El eje transverso coincide con el eje *X* y el eje conjugado coincide con el eje *Y*. Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola; $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los focos (figura 12). La ecuación (I) es la ecuación de la hipérbola en la posición indicada.

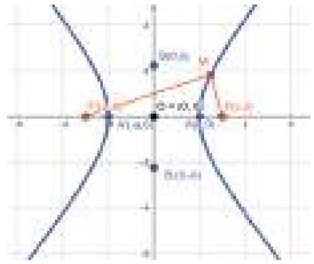


Figura 12

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(I)}$$

Caso II. El eje transverso coincide con eje *Y*, el eje conjugado coincide con el eje *X*. Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola; $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los focos (figura 13). La ecuación (II) es la ecuación de la hipérbola en la posición indicada.

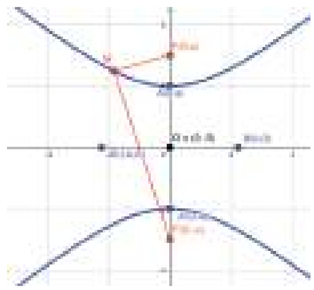


Figura 13

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{(II)}$$

Ejemplo. Halla la ecuación canónica de la hipérbola que cumple las siguientes condiciones: sus focos son respectivamente $F'(-3, 0)$ y $F(3, 0)$, la longitud del transverso real es 4.

Solución. Las coordenadas de los focos nos dicen de forma implícita que se trata de una hipérbola cuyo eje focal coincide con el eje *X*, es decir, la ecuación de la hipérbola es de la forma (I). Dado que $F(3, 0)$, entonces $c = 3$. Como $2\boldsymbol{a} = 4$, entonces $\boldsymbol{a} = 2$. Ahora, sustituimos $\boldsymbol{a} = 2$ y $\boldsymbol{c} = 3$ en $c^2 = a^2 + b^2$ para obtener a b.
$3^2 = 2^2 + b^2$, de donde $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

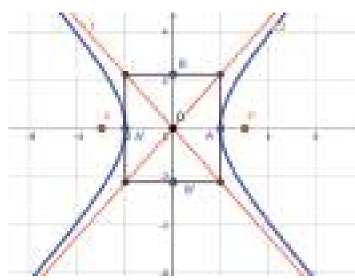


Figura 14

Luego, la ecuación canónica de la hipérbola es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. (figura 13)

- **Halla** la ecuación de la hipérbola y **representa** gráficamente con ayuda de *GeoGebra* la curva en cada caso.
  - hipérbola con el centro $C(0, 0)$; eje focal paralelo al eje *X*; $2a = 6$, $2b = 2$.
  - $C(0, 0)$; eje focal paralelo al eje *Y*; $a = 2$, $b = 4$.

La excentricidad ***e*** de una hipérbola se expresa por la razón $e = \frac{c}{a}$

El ángulo de intersección de las asíntotas y el aspecto de la hipérbola, depende del valor de ***e***.

Como $c > a$, el valor de ***e*** es mayor que 1. Si *c* es solo un poco mayor que ***a***, de modo que *e* está cerca de 1, la relación $c^2 = a^2 + b^2$ muestra que *b* es pequeño, comparado con *a*. Entonces las asíntotas toman un par de ángulos pequeños. Las ramas de la hipérbola, encerrados por ángulos pequeños divergen lentamente. Si ***e*** crece, las ramas están encerradas por ángulos mayores, y los ángulos pueden estar cerca de 180º al tomar valores grandes de ***e***.

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

Ecuación canónica de la hipérbola con centro (h, k)

Hipérbola equilátera es aquella cuyos ejes transverso y conjugado tienen igual longitud.

¿Qué cambios se generan en la ecuación de la hipérbola si su centro no está en el origen?

Si el centro de la hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la ecuación de la elipse.

En este caso se deben considerar las dos posiciones siguientes:

Se puede afirmar que las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares por coincidir con las diagonales de un cuadrado.

Caso I. Eje focal paralelo al eje X. Sean $M(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola y su centro $O'(h, k)$. La ecuación de la hipérbola es de la forma:

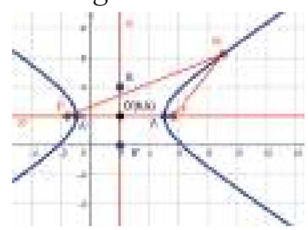


figura 15

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(III)}$$

Caso II. Eje focal paralelo al eje Y. Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola y su centro O'(h,k). La ecuación de la hipérbola es de la forma:

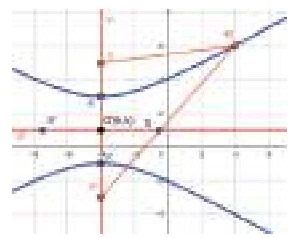


figura 16

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(IV)}$$

Los sistemas satelitales y sistemas de radio usan funciones hiperbólicas. Por ejemplo, el sistema LORAN se utilizó para identificar posiciones geográficas con hipérbolas, para poder optimizar el área cubierta por la señal de una estación. Este sistema ha permitido a las personas localizar objetos en un área más amplia y jugó un papel importante durante la Segunda Guerra Mundial.

Ejemplo 1. Obtener la ecuación de la hipérbola que tiene centro en $C(2, 2)$, longitud del eje transverso; $2\boldsymbol{a} = 4$, la longitud del semieje conjugado $b = 2$ y el eje focal paralelo al eje X.

Solución. Sabemos que el eje focal es paralelo al eje X, por lo que la ecuación de la hipérbola es de la forma (III).

Siendo $2a = 4$, entonces $\boldsymbol{a} = 2$. Por otra parte, se sabe que, $\boldsymbol{b} = 2$ y el centro es (2, 2). Sustituyendo en (III) se tiene que la ecuación de la hipérbola es:

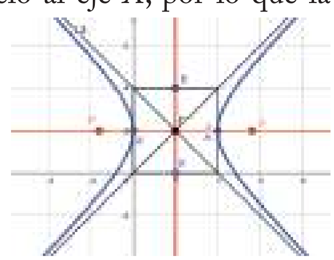


figura 17

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

Tal como se observa en la figura 17, la **hipérbola es equilátera:**

Ejemplo 2. Dada la ecuación de la hipérbola. Identifique sus elementos principales.

$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{12}=1$$

Solución. Se tiene que el centro es $C(-4,1)$, $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$, entonces $a = 2$ y $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

En la figura se observa la representación gráfica haciendo uso de *GeoGebra*.

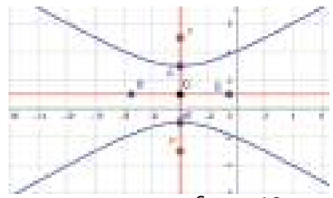


figura 18

Ejemplo 3. Dada la ecuación de la hipérbola, identifique el lado recto, su excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$$

Solución. La ecuación dada cumple con la ecuación canónica de una hipérbola con eje focal paralelo al eje X, donde se tiene que: el eje conjugado es paralelo al eje Y, el centro es: $C(2, 2)$. Siendo $a^2 = 9$, entonces $a = 3$ y $2a = 6$ (longitud del eje transverso). Siendo $b^2 = 1$, entonces $b = 1$ y $2b = 2$ (longitud del eje conjugado).

Por lo tanto, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

Longitud del lado recto $\frac{2b^2}{a}=\frac{2}{3}$, y la excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Como las asíntotas L_1 y L_2 son rectas que pasan por el punto $C(2, 2)$ y de pendiente $m=\pm\frac{b}{a}$, es decir, $m=\pm\frac{1}{3}$.

Luego sus ecuaciones son: L_1: $y-2=\frac{1}{3}(x-2)$, L_2: $y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$

- Dada la ecuación de una hipérbola $\frac{(x+2)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

  Calcula: las coordenadas del centro, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la distancia focal, las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas. **Grafica** la hipérbola usando *GeoGebra*.

En el siguiente enlace podrás reforzar paso a paso todos los elementos de la hipérbola con sus principales características

https://www.geogebra.org/m/qtjwzajanchasgs2

- Emplea el pensamiento lógico al desarrollar los procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

A los salones diseñados con **techos elípticos**, se les llaman ¨galerías murmurantes¨, porque si una persona se encuentra en uno de los focos y murmura algo será escuchado por otra persona que está en el otro foco, ya que el sonido que proviene de uno de sus focos choca en cualquier punto del techo elíptico y se refleja en el otro foco.

Aplicaciones de la elipse e hipérbola

¿Por qué los teatros y las salas de conciertos tienen techos elípticos?

Aplicación de la elipse

La elipse tiene varias aplicaciones como ya lo hemos tratado en unidades anteriores, por recordar algunas, en la arquitectura, la acústica, la iluminación, las comunicaciones y en la física, entre otras. A continuación, veamos una de ellas.

Problema 1. La tierra se mueve sobre una órbita elíptica con el sol en uno de sus focos. Si la longitud de la mitad del eje mayor es 93 millones de millas y la excentricidad es 0.017, halla la distancia mínima y máxima entre la tierra y el sol.

Solución. Se realiza la representación gráfica (ver figura 19). La tierra se encuentra en los vértices ubicados en el eje mayor; a la izquierda del sol en su distancia mínima, y a la derecha del sol en su distancia máxima.

Para calcular estas distancias partimos de que a es 93 millones de millas.

Sabiendo que la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0.017$, se puede obtener: $c = \mathbf{a} \cdot 0.017 \rightarrow c = \mathbf{93} \cdot 0.017 = 1{,}581$ millones de millas.

Con el valor de c, ya tenemos la distancia del centro al foco, es decir, la distancia del centro de la elipse al sol.

Por lo tanto, la distancia máxima del sol a la tierra es
$a + c = 93 + 1{,}581 = 94{,}581$ millones de millas.

Para calcular la distancia más cercana del sol a la tierra, se resta $a - c = 93 - 1{,}581 = 91{,}419$. Por lo tanto, la distancia mínima del sol a la tierra es 91,419 millones de millas.

Ver en la figura siguiente las posiciones de la tierra que corresponden a las distancias mínima y máxima que se han calculado.

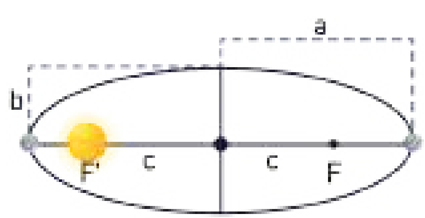


figura 19

Realiza el Genially "No te dejes atrapar", para comprobar los conocimientos adquiridos sobre las cónicas.

Problema 2. La estación B se encuentra situada 400 km al este de la estación A. Un barco navega 100 km al norte de la línea que une *A* y B. Desde ambas estaciones se envían señales de radio simultáneamente a una velocidad de 290,000 km/s. Si la señal enviada desde *A* llega al barco 0.001 s antes que la enviada desde *B*, localiza la posición del barco.

Solución. Se parte de la representación inicial del problema (figura 20).

T_A y T_B es el tiempo que tardan en llegar al barco las señales enviadas desde *A* y *B*:

$$\begin{cases} d_A = (290{,}000 \text{ km/s})\ T_A & \text{(I)} \\ d_B = (290{,}000 \text{ km/s})\ T_B & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) y (II), se tiene: $T_A - T_B = \frac{d_A - d_B}{290{,}000}$

Siendo T_A-T_B=0.001 s, entonces: d_A- d_B = (290,000)·(0.001) = 290 Km. Luego, el barco estará situado en un punto, de ordenada 100, cuya diferencia de distancia a los puntos *A* y *B* será de 290 km.

Por lo tanto, el barco estará en la hipérbola con focos A y B, y diferencia de distancias a los focos igual a $2a$ = 290 km, de donde a = 145.

Se sabe que $2c$ = 400 km, por lo que c = 200. Además, también se deduce que la forma de la ecuación canónica de la hipérbola en este problema es la de eje focal paralelo al eje X y centro en el origen. Es decir, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Donde, $b^2 = c^2 - a^2 = (200)^2 - (145)^2 = 18{,}975$

Así, si el barco navega manteniendo la diferencia de tiempo entre las señales en 0.001s, entonces la ecuación de su trayectoria viene dada por:

$$\frac{x^2}{21025} - \frac{y^2}{18975} = 1$$

Como y = 100 km, entonces x = -179.18 km. Luego las coordenadas del barco son (-178.18,100).

- **Plantea** y **resuelve** dos problemas de aplicación. Uno donde se modele a través de una elipse y otro con una hipérbola.

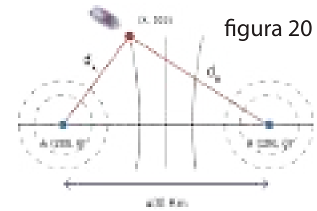


figura 20

Se destaca que el recorrido del barco sigue la trayectoria de una hipérbola y donde las estaciones están ubicadas en los focos de esta, siempre que se mantenga la diferencia de tiempo entre las señales de manera constante:

d_A= distancia del barco a *A*

d_B= distancia del barco a *B*

El hiperboloide es el diseño estándar para todas las torres de refrigeración de plantas nucleares y algunas plantas eléctricas de carbón. Estas torres son estructuralmente muy eficientes.

Fuente: Freepik

- Se expresa de manera convincente al concluir el desarrollo de procesos implicados con las cónicas (elipse, hipérbola y sus elementos) y los representa de manera gráfica.
- Emplea la creatividad para formular situaciones relacionadas con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) interpretando posibles vías de solución.

Actividad grupal

Encontrando las ecuaciones generales de la elipse y la hipérbola

Teorema

Si los coeficientes A y C son diferentes y del mismo signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico.

Teorema

Si los coeficientes A y C difieren en el signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

En el siguiente enlace puedes practicar cada una de las características que se han planteado en los dos teoremas dados.

https://www.geogebra.org/m/d8Bz5jU6

¿Qué haremos?

Determinar las ecuaciones canónicas de la elipse y la hipérbola, a partir de sus ecuaciones generales y viceversa.

¿Qué necesitamos?

Lápices, cuadernos, papel, calculadora y computadora.

¿Cómo nos organizamos?

Formen un equipo con tres de sus compañeros, donde todos participen con compromiso y responsabilidad para desarrollar con éxito esta actividad.

¿Cómo lo haremos?

Lean la información que se suministra sobre las ecuaciones generales de la elipse y la hipérbola. Complementen la información sobre el tema consultando en algún libro, internet o a su docente. Para luego, resolver las actividades que se indican a continuación.

Actividad 1. Obtengan la ecuación canónica y determinen; el centro, los vértices, los focos, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad y dibujen la gráfica de las elipses cuyas ecuaciones generales son:

$2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 29 = 0.$

$25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0.$

Actividad 2. Obtengan la ecuación canónica y determinen; el centro, los vértices, los focos, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y dibujen las gráficas de las hipérbolas cuyas ecuaciones generales son:

$-5x^2 + 4y^2 - 80 = 0.$

$9x^2 - 4y^2 - 54x + 40y - 55 = 0.$

Actividad 3. Obtengan la ecuación general de la elipse con focos en los puntos (4, 1) y (4, -5), eje menor de longitud 10 y dibujen su representación gráfica haciendo uso del software *GeoGebra*.

Actividad 4. Encuentren la ecuación general de la hipérbola que cumple con las siguientes condiciones: tiene centro en (3, 3), pendiente de una asíntota $m = 2$, que pasa por el punto (6, 1), eje transverso paralelo al eje X. Dibujen su representación gráfica haciendo uso del software *GeoGebra*.

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren un informe que contenga todo lo desarrollado en esta actividad y entréguenlo a su docente. Cada grupo, de acuerdo con el docente, selecciona uno de los problemas desarrollados y lo expone ante sus compañeros. Deben responder las dudas y preguntas que puedan surgir durante la exposición.

Coevaluación

Cada miembro del equipo expresa una valoración de la participación y contribución de cada uno de los demás miembros del equipo sobre la actividad realizada.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde a lo siguiente: ¿qué aprendí con esta actividad?, ¿qué importancia tiene lo que aprendí, realizando esta actividad?, ¿qué debo seguir mejorando?

Reflexiono sobre lo que necesito repasar...

Copia en tu cuaderno este cuadro para que sigas el avance de tu aprendizaje.

Observa y completa lo que todavía te falta por estudiar o repasar.

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…

Sugerencia

Para determinar la ecuación general de una elipse o una hipérbola a partir de su ecuación canónica, se procede a desarrollar los cuadrados de los binomios y eliminar los denominadores, para luego ordenar y agrupar todos los términos en la forma:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

- Emplea la creatividad para formular situaciones relacionadas con las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola y sus elementos) interpretando posibles vías de solución.
- Utiliza el razonamiento matemático para argumentar los procesos en el estudio de la recta y las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola) y las relaciona con situaciones de la vida diaria.

Evaluación

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta que se propone a continuación;

- La ecuación de la elipse con centro $C(0, 0)$, vértices del eje mayor son respectivamente $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$ y la longitud del eje menor $2b = 6$ es:
  - $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$
  - $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$
  - $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
  - $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$

- El centro de la elipse $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{12}=1$ es:
  - $C(3, -5)$
  - $C(-3, 5)$
  - $C(-3, -5)$
  - $C(3, 5)$

- Dada la elipse $\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(x+5)^2}{10}=1$ los valores de a y b son:
  - $a = 4$ y $b = \sqrt{10}$
  - $a = 8$ y $b = 5$
  - $a = 32$ y $b = 20$
  - $a = 16$ y $b = 10$

- La ecuación $\frac{(x+2)^2}{36}-\frac{(y-5)^2}{16}=1$ representa una:
  - Parábola de vértice $V(2, -5)$
  - Elipse de centro $C(-2, 5)$
  - Circunferencia de centro $C(2, -5)$
  - Hipérbola de centro $C(-2, 5)$

- La ecuación de la hipérbola centrada en el origen con el eje focal sobre el eje X: $a = 4$ y $b = 3$.
  - $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$
  - $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
  - $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$
  - $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

Resuelve cada uno de los siguientes problemas;

- **Halla** la ecuación de la elipse, sabiendo que sus vértices son $A(0, 6)$, $A'(0, -6)$ y la longitud del eje menor es $2b = 10$.

- **Obten** la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes condiciones: su centro es $C(2, 3)$, eje mayor es paralelo al eje Y, la longitud del eje mayor es $2a = 4$, y la longitud del eje menor es $2b = 3$.

- **Obten** la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes condiciones: los vértices son $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, sus focos son $F(3, 0)$ y $F'(-3,0)$. **Grafica** la ecuación haciendo uso de *GeoGebra*.

- **Halla** la ecuación de la elipse y construye la curva en cada caso, sabiendo que:
  - Centro $C(0, 0)$, $2a = 14$, $2b = 10$, eje mayor coincide con el eje X.
  - Centro $C(0, 0)$, $2a = 16$, $2b = 8$, eje mayor coincide con el eje Y.

- **Halla** la ecuación ordinaria de la hipérbola que cumple las siguientes condiciones: sus focos son $F'(0, -3)$ y $F(0, 3)$, la longitud del eje mayor es $2a = 4$.

- **Halla** la ecuación de la hipérbola y representa gráficamente la curva en cada caso, con la ayuda de *GeoGebra*.

    - Centro $C(0, 0)$, eje focal paralelo al eje Y, $2a = 8$, $2b = 4$.

    - Centro $C(0, 0)$, eje focal paralelo al eje X, $a = 2$, $b = 6$.

- **Obten** la ecuación de la hipérbola que cumple con las siguientes condiciones: Centro $C(3, 2)$, longitud del eje mayor $2a = 10$, la longitud del semieje conjugado $b = 6$, eje focal el paralelo al eje X.

- **Obten** la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes condiciones: los vértices son $A(8, 2)$, $A'(-2, 2)$, sus focos son $F(6, 2)$ y $F'(0, 2)$. **Grafica** la ecuación haciendo uso de *GeoGebra*.

- **Halla** e **identifica** la ecuación del lugar geométrico de un punto, que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia a la recta $2x - 3 = 0$.

- **Halla** la ecuación de la hipérbola y **representa** gráficamente la curva en cada caso, con la ayuda de *GeoGebra*:

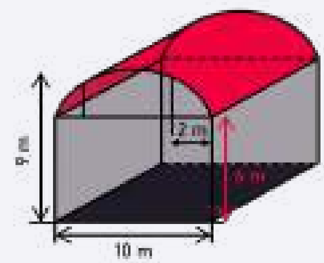
    - $C(-2, 5)$; eje focal paralelo al eje X; $2a = 4$, $2b = 2$.
    - $C(2, 3)$; eje focal paralelo al eje Y; $a = 1$, $b = 2$.

- Para una planta de energía se requiere construir una torre de enfriamiento con una estructura hiperbólica, el diámetro de su base es de 80 metros y el diámetro más pequeño de

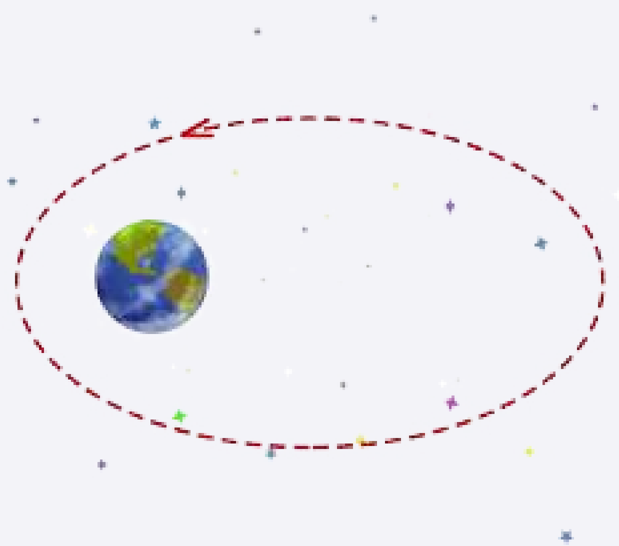
Fuente: Freepik

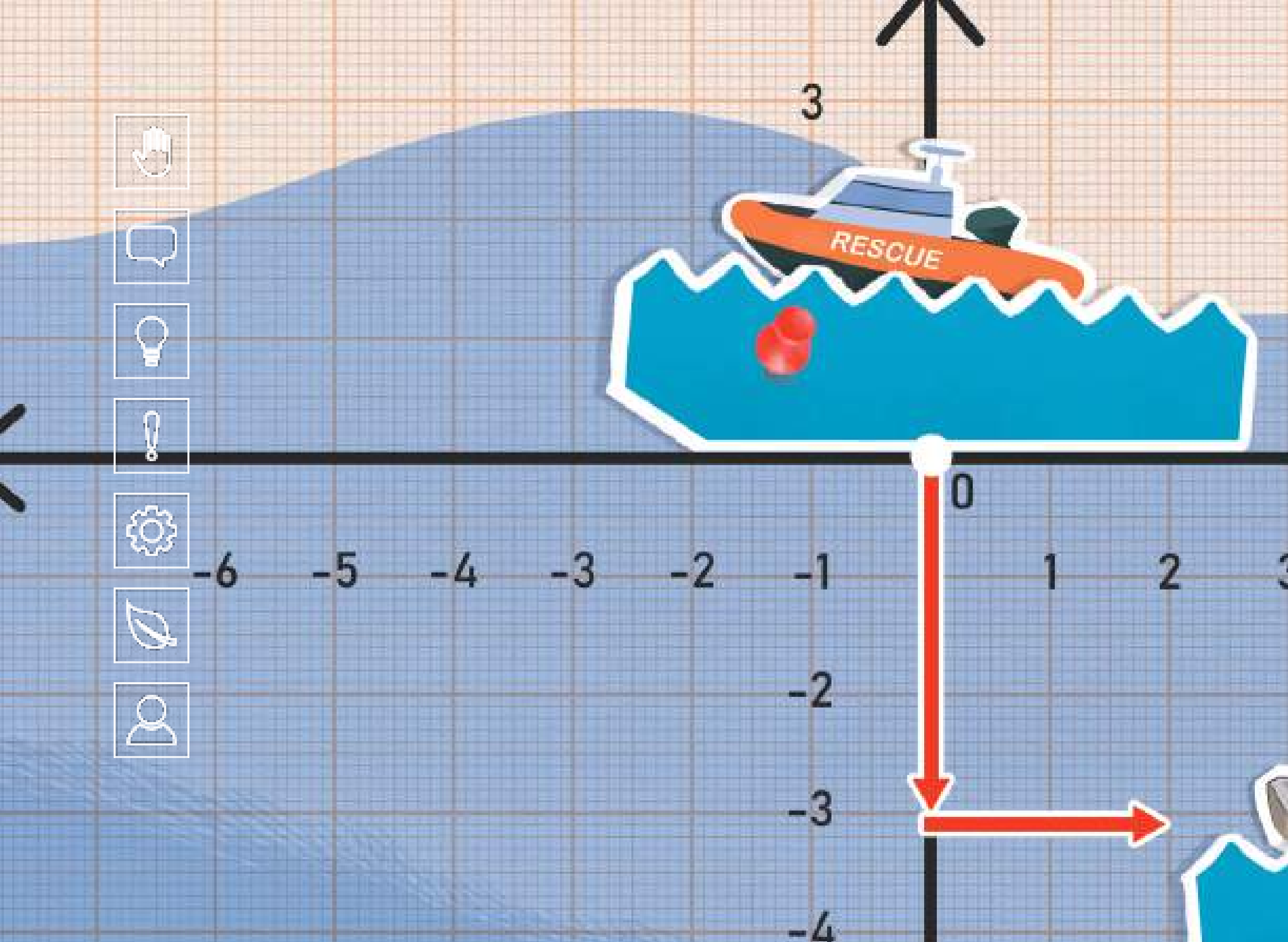
40 metros, el cual se encuentra a una altura de 84 m de la base. Si la torre mide 100 m de altura, ¿cuál es el diámetro de la parte más alta?

- El techo de un galpón de 10 metros de ancho tiene la forma de una semielipse con 9 metros de altura en el centro, así como 6 metros de altura en las paredes laterales. **Calcula** la altura del techo a 2 metros de una pared lateral. Ver la imagen;



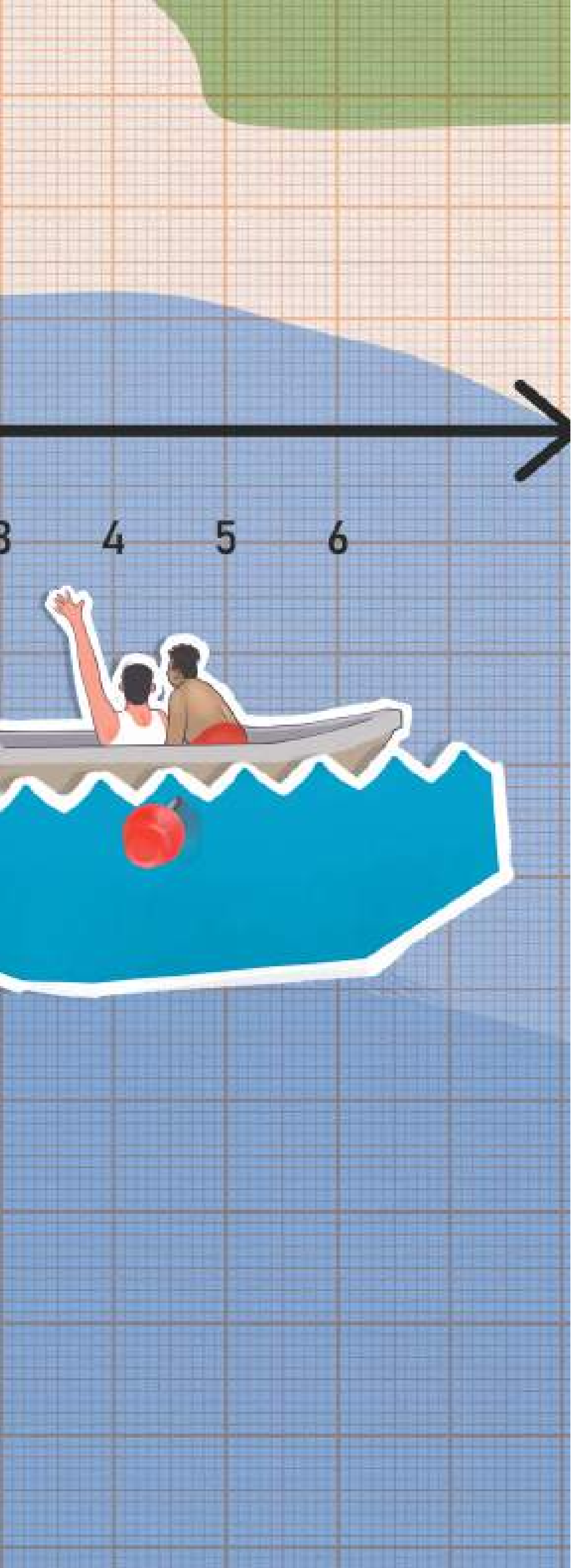
- Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra, de tal modo que el centro de la tierra está en uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 4,600 millas y el más cercano está a 1,600 millas. **Obten** una ecuación para la órbita del satélite.





Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 5

Vectores en el plano

Situación de aprendizaje

En la imagen se observa el recorrido realizado por Pablo y Charlie que salieron a pescar en una yola. Salen en dirección sur y luego hacen un giro de 90º y siguen hasta quedarse sin combustible.

¿Cuántas millas recorren hacia el sur y hacia el este?

¿Cuáles son las coordenadas del punto dónde se detuvieron?

Ellos lograron comunicarse con las autoridades y les explicaron cuál fue el recorrido que hicieron para que pudieran auxiliarlos. ¿Cómo debe ser la trayectoria para ubicar o localizar lo más rápido posible la yola de Pablo y Charlie?

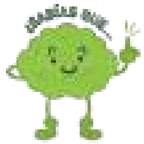
Contenido

- Vectores y sus elementos
- Vectores equipolentes
- Tipos de vectores
- Vectores en el plano cartesiano
- Igualdad de vectores
- Actividad grupal
- Evaluación

Vectores y sus elementos

¿Cuáles son los elementos de un vector?

Recta soporte: es la recta que contiene al segmento orientado.



Existen cantidades que se pueden expresar mediante un número que expresa su tamaño o magnitud, estas son denominadas escalares, pero existen otras cantidades como el desplazamiento que, además de la magnitud, requieren de dirección y sentido para poderse representar o describir.

Dos rectas paralelas tienen igual dirección, por lo que segmentos orientados ubicados en rectas paralelas tendrán igual dirección.

William Rowan Hamilton (Reino Unido, 1805-1865) fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra. Su descubrimiento del cuaternión originó el estudio de los vectores.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton

Vector y sus elementos

Un **vector** es un segmento de recta orientado y dotado de los siguientes elementos:

Módulo: es la longitud del segmento orientado, al cual también se le denomina magnitud.

Dirección: es la misma de la recta que lo contiene (**recta soporte**), dada por el ángulo que forma el vector con respecto a una línea de referencia.

Sentido: es la orientación del segmento, indicada mediante una flecha y que permite definir cuál es su origen y su extremo.

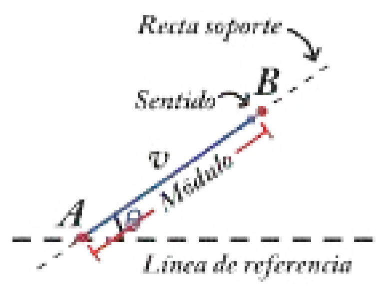
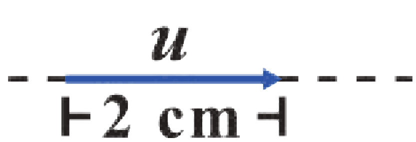


Figura 1

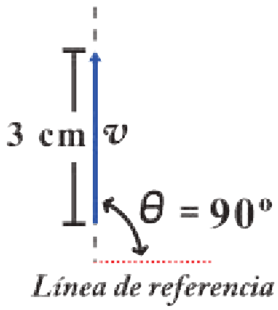
El segmento orientado de la figura 1 es un vector; A indica el punto origen, B el punto extremo y la flecha indica el sentido. Usamos letras negritas para denotar los vectores. Entonces, se puede leer vector $\overrightarrow{AB}$, o también vector $\boldsymbol{v}$, y θ es la dirección con respecto a la línea de referencia.

El módulo (longitud) de un vector se puede denotar así: $|\boldsymbol{v}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$.

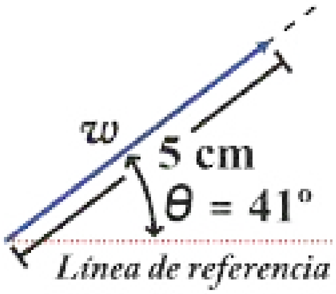
Ejemplos. Indicar el módulo, dirección y sentido de los siguientes vectores:



Solución a. Se tiene el vector denotado por $\boldsymbol{u}$, con los siguientes elementos: módulo o longitud de 2 cm ($|\boldsymbol{u}|$=2 cm), en dirección horizontal y sentido hacia la derecha (hacia el este).



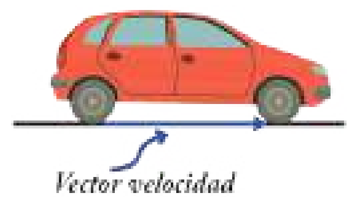
Solución b. Se tiene el vector denotado por v, con los siguientes elementos: módulo de 3 cm ($|v|$=3 cm), en dirección vertical (con un ángulo de 90º con respecto a la horizontal) y sentido hacia arriba (hacia el norte).



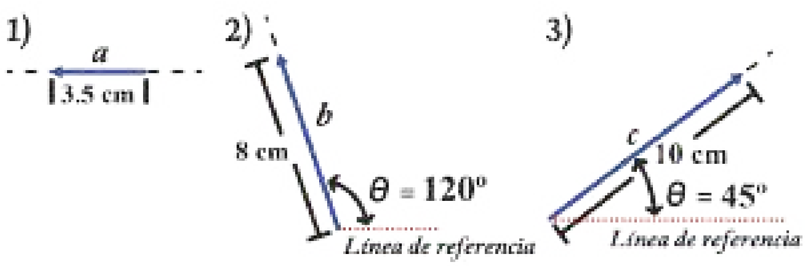
Solución c. Se tiene el vector denotado por w, con los siguientes elementos: módulo de 5 cm ($|w|$=5 cm), con una dirección de 41º con respecto a la horizontal y sentido hacia el noreste.

Las cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza que comprenden magnitud, dirección y sentido se denominan cantidades vectoriales.

Por ejemplo, la velocidad de un automóvil, la cual se describe con el número que marca el velocímetro, la dirección y sentido hacia donde se dirige.

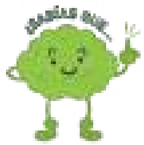


- **Indicar** el módulo, dirección y sentido de los siguientes vectores:

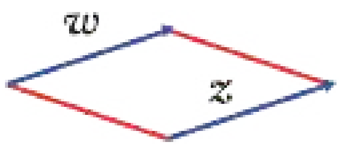


- Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba,
  - **Representa** el vector velocidad cuando la pelota va subiendo y el vector velocidad cuando la pelota va bajando.
  - ¿Cómo son las direcciones de esos vectores?
  - ¿Cómo son los sentidos de esos vectores?

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.



Para comprobar geométricamente si dos vectores son equipolentes, se unen sus orígenes y sus extremos respectivos. Si el polígono resultante es un **paralelogramo**, los vectores son equipolentes. Por ejemplo, los vectores w y z son equipolentes (ver figura anexa).



¿Si dos vectores ***a*** y ***b*** son tales que ambos tienen módulo 5, se puede decir que ***a*** y ***b*** son equipolentes?

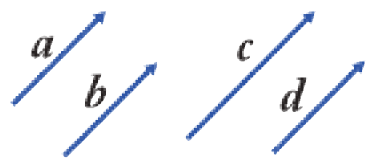
Muchas de las relaciones que has estudiado en matemáticas son relaciones de equivalencias, porque satisfacen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Entre estas relaciones están la congruencia y semejanza de triángulos, la equivalencia de fracciones y la igualdad de conjuntos, entre otros.

Vectores equipolentes

¿Cómo se llaman los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido?

Vectores equipolentes

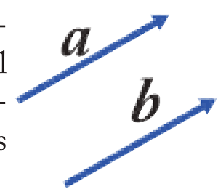
Si ***a*** y ***b*** son dos vectores en el plano, se dice que ***a*** y ***b*** son equipolentes si y solo si ***a*** y ***b*** tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Para indicar que dos vectores son equipolentes se escribe ***a*** **~** ***b***. En la figura anexa se tiene que ***a***, ***b*** y ***d*** son vectores equipolentes, pero ***c*** no es equipolente con ***a***, ***b*** y ***d*** porque no tienen el mismo módulo.



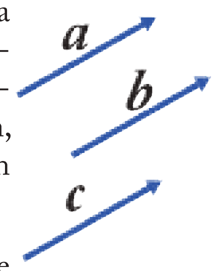
Propiedades que cumple la relación de equipolencia

Propiedad reflexiva: todo vector del plano tiene igual dirección, igual sentido y módulo que sí mismo, luego, para todo vector ***a*** del plano, se cumple que ***a*** es equipolente con ***a***.

Propiedad simétrica: siendo ***a*** y ***b*** vectores cualesquiera del plano, observa que, si ***a*** tiene igual dirección, igual sentido y módulo que ***b***, entonces ***b*** tiene igual dirección, igual sentido y módulo que ***a***. Es decir, si ***a*** es equipolente con ***b***, entonces ***b*** es equipolente con ***a***.



Propiedad transitiva: siendo ***a***, ***b*** y ***c*** vectores cualquiera del plano, si ***a*** tiene igual dirección, igual sentido y módulo que ***b*** y, a su vez, ***b*** tiene igual dirección, igual sentido y módulo que ***c***, entonces, ***a*** y ***c*** tienen igual dirección, igual sentido y módulo. Es decir, Si ***a*** es equivalente con ***b***, y ***b*** es equipolente a ***c***, entonces ***a*** es equipolente a ***c***.



Cuando una relación satisface estas tres propiedades se dice que es una relación de equivalencia. Por lo tanto, la relación de equipolencia de vectores es una relación de equivalencia.

Las condiciones de equipolencia, más o menos restrictivas, permiten clasificar las magnitudes vectoriales en tres clases:

Clase 1.

Vectores libres: son todos los conjuntos de vectores equipolentes entre sí.

Dado un vector libre, podemos obtener otro vector equipolente desplazándolo paralelamente, esto es, manteniendo constante su módulo, dirección y sentido, aunque no estén necesariamente en la misma recta soporte. En la figura 2, se observan dos clases de vectores libres, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$, puesto que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ no son equipolentes, observa que tienen direcciones diferentes. En el caso de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son equipolentes, tanto $\boldsymbol{a}$ como $\boldsymbol{b}$ representan al mismo vector libre, por lo que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. De igual forma ocurre con $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$.

Clase 2.

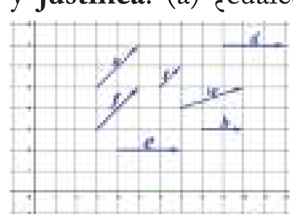
Vectores deslizantes: son los que quedan definidos por su magnitud, dirección, sentido y recta soporte. Por tanto, son invariantes ante deslizamientos a lo largo de su recta soporte. Por ejemplo, los vectores dados en la figura 3.

Dado un vector deslizante, podemos obtener otro vector equipolente deslizándolo a lo largo de su recta soporte y manteniendo constante su módulo, dirección y sentido.

Clase 3.

Vectores fijos o ligados: son los que quedan definidos mediante su magnitud, dirección, sentido, punto origen y extremo (figura 4). Notoriamente, los vectores no pueden desplazarse paralelamente ni deslizarse, debido a que cada vector es equipolente consigo mismo.

- De los siguientes vectores, **responde** y **justifica**: (a) ¿cuáles tienen el mismo módulo?, (b) ¿cuáles tienen la misma dirección?, (c) ¿cuáles son equipolentes? (d) **Dibuja** 2 vectores equipolentes a $\boldsymbol{w}$ y uno equipolente a $\boldsymbol{t}$.



- **Dibuja** en tu cuaderno dos vectores que sean equipolentes y otros dos que no lo sean. Para demostrarlo, **dibuja** los polígonos correspondientes.

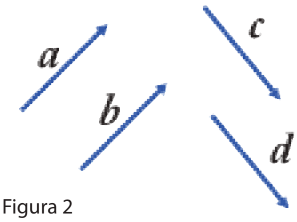


Figura 2

La gran ventaja de un vector libre es que podemos moverlo libremente por el plano, pues ahora ya no está sujeto a un origen y un extremo. Cada vez que lo movamos, estaremos escogiendo un vector fijo distinto como representante del vector libre.

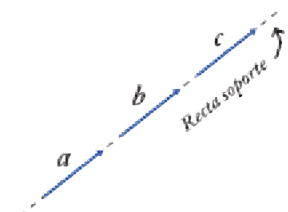


Figura 3

Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, donde $|\boldsymbol{a}|=5\ cm$. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son equipolentes el módulo de $\boldsymbol{b}$ es:

- -5 cm
- 10 cm
- 5 cm

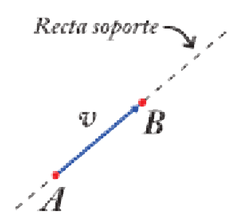
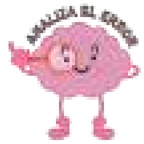
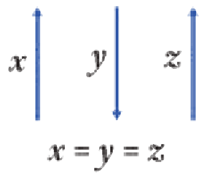


Figura 4

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.



Los vectores libres x, y, z son iguales.



Tipos de vectores

> Si tienes un vector de módulo 2, ¿qué harías para conseguir un vector de su misma dirección y sentido, pero cuyo módulo sea 1, en lugar de 2?

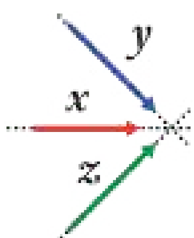
Vector unitario

Un **vector unitario** es un vector cuyo módulo es la unidad. Es decir, un vector $\boldsymbol{u}$ es unitario, si y solamente si $|\boldsymbol{u}| = 1$.

Vector nulo

Al inicio de esta unidad se dijo que el módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define, pero si el origen coincide con el extremo, dicha longitud es cero, el segmento se reduce a un punto y no están determinadas la dirección y el sentido. Sin embargo, en este caso se acepta que es un **vector nulo**. En resumen, un vector es nulo cuando su módulo es cero.

Los **vectores concurrentes** son aquellos cuyas direcciones o rectas soportes pasan por un mismo punto.



Dado un vector $\boldsymbol{a}$, tal que, $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, se puede determinar un vector $\boldsymbol{u}_a$ en la misma la dirección y sentido de $\boldsymbol{a}$, pero $|\boldsymbol{u}_a| = 1$.

En la figura 5, se muestra el vector unitario $\boldsymbol{u}_a$:

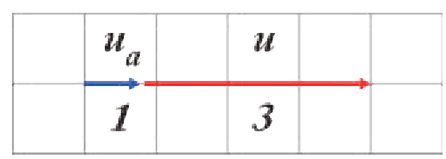


Figura 5

El vector unitario tiene la información referida a la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{a}$. Observe que: $|a| = 3|u_a|$ o $|u_a| = \dfrac{|u|}{3}$.

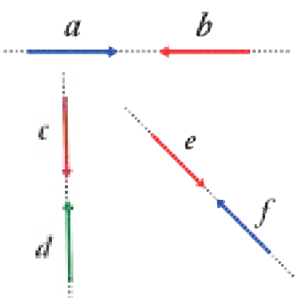


Figura 6

Vectores opuestos

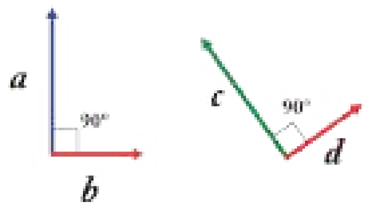
Los **vectores opuestos** son vectores de igual módulo y dirección, pero de sentidos contrarios.

Ejemplo. En la figura 6, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{f}$ son opuestos, ya que tienen igual módulo y dirección, pero sentidos contrarios.

Vectores perpendiculares

Dos **vectores son perpendiculares** cuando forman entre sí un ángulo de 90 grados. Esto equivale a decir que las rectas soportes de ambos vectores son perpendiculares. Se acepta que el vector nulo es perpendicular a cualquier otro vector.

En la figura adjunta los vectores ***a*** y ***b*** son perpendiculares, ya que forman un ángulo de 90 grados. De igual forma, se observa que los vectores ***c*** y ***d*** son perpendiculares.



Vectores paralelos

Los vectores paralelos son aquellos cuyas líneas de acción o rectas soportes son paralelas, es decir, que tienen igual dirección. Sin embargo, pueden tener distintos sentidos y distintos módulos.

En la figura 7 los vectores ***x*** y ***y*** son paralelos ya que tienen igual dirección. También los vectores ***m*** y ***n*** son paralelos pero tienen diferentes sentidos.

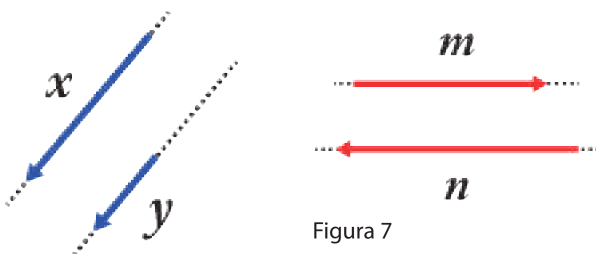


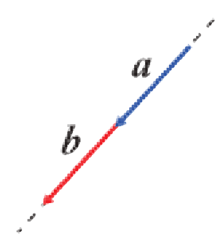
Figura 7

- **Dibuja** 2 vectores paralelos de diferentes módulos y sentidos.
- **Dibuja** un par de vectores perpendiculares con sus respectivos vectores unitarios.
- **Formen** un equipo con 3 compañeros de clase y valoren las opiniones de todos para dar respuestas a las siguientes preguntas. **Justifiquen** cada respuesta.

  ¿Dos vectores opuestos pueden ser paralelos?

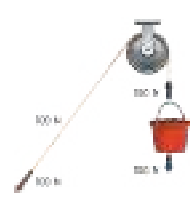
  ¿Dos vectores perpendiculares pueden ser equipolentes?

Dos o más vectores son **colineales**, si comparten una misma recta de acción o recta soporte.



Dos o más vectores son **coplanarios**, solo si sus rectas de acción están situadas en un mismo plano.

¿Qué tipo de vectores actúan en el siguiente sistema?



- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.

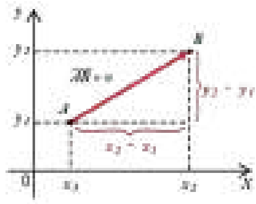


Figura 8

El módulo de un vector debe contener la unidad de medida. Cuando se desconoce la unidad de medida, se utiliza de forma general como unidad *u* que significa unidades.

Las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ cuyo origen es el punto $D(-2, 6)$ y su extremo es el punto $E(4, -3)$ son:

$\boldsymbol{w} = 4 - (-2), -3 - 6)$

$\boldsymbol{w} = (6, -9)$

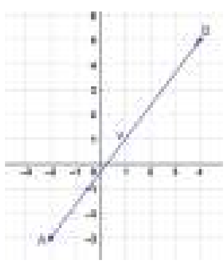


Figura 9

Se sugiere el siguiente enlace para practicar el cálculo de componentes y módulo de vectores.

Vectores en el plano cartesiano

¿Cómo se representa un vector en el plano cartesiano?

Coordenadas de un vector en el plano cartesiano

Hasta esta lección hemos estudiado vectores desde el punto de vista geométrico. Al colocar un vector en un plano cartesiano, podemos describirlo analíticamente, es decir, mediante el uso de componentes (figura 8). Se trata de representar a $\overrightarrow{AB}$ como un par ordenado de números reales.

Las coordenadas de un vector están definidas por su punto de origen y su punto extremo. Dado un vector cuyo punto de origen es $A(x_1, y_1)$ y su punto extremo $B(x_2, y_2)$, el vector $\overrightarrow{AB}$ está definido por:
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Representamos $\boldsymbol{v}$ como un par ordenado de números reales. Luego, siendo $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}$, se tiene $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$.

El módulo, magnitud o longitud de un vector está dado por:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1^2)} \quad \text{o} \quad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Usando la figura 8, podemos expresar la relación entre la representación geométrica y la analítica del vector.

Ejemplo. Dado un vector $\boldsymbol{v}$, con punto de origen $A(-2, -3)$ y extremo $B(4, 5)$, hallar las componentes del vector $\boldsymbol{v}$, su módulo y dibujarlo en el sistema de coordenadas cartesiana.

Solución. Para hallar las componentes del vector $\boldsymbol{v}$ se sustituyen las coordenadas de A y B en $(\overrightarrow{AB}) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$.

Obteniendose: $(\overrightarrow{AB}) = (4 - (-2),\ 5 - (-3)) = (4 + 2,\ 5 + 3)$

Luego, $(\overrightarrow{AB}) = \boldsymbol{v} = (6,\ 8)$

El módulo del vector $\boldsymbol{v}$ es:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ unidades.}$$

Para graficar el vector, se ubican los puntos A y B en el sistema de coordenadas y se dibuja el vector (ver figura 9).

Ejemplo. En la Figura 10, determine el origen y el extremo de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, luego determine sus componentes.

Solución. El vector $\boldsymbol{u}$ tiene origen en (2, 1) y extremo (4, 3), sus componentes son: $\boldsymbol{u} = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2)$.

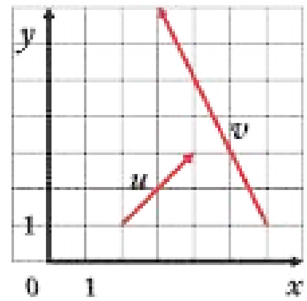


Figura 10

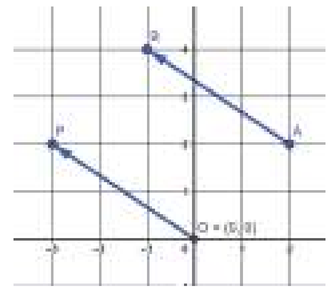


Figura 11

En forma análoga, el vector $\boldsymbol{v}$ tiene origen (6, 1) y extremo (3, 7), $\boldsymbol{v} = (3 - 6, 7 - 1) = (-3, 6)$.

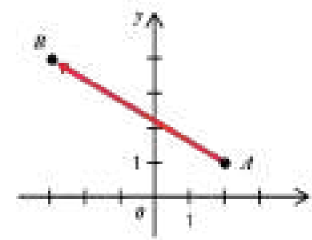
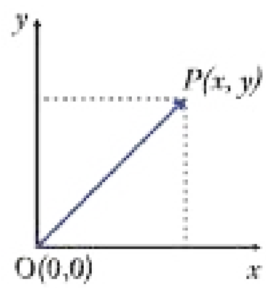


Figura 12

Vector de posición

El **vector de posición** es un vector con origen en el origen del sistema de coordenadas (0, 0) y extremo en el punto $P(x, y)$. Además, su módulo representa la distancia que separa dichos puntos.



De esta manera, se concluye que cualquier vector $\overrightarrow{AB}$ se puede representar por un vector de posición $\overrightarrow{OP}$.

Sitúa el punto *A* en (-3, -2). Después, intenta situar el punto *B* de forma que $\overrightarrow{AB} = (9,5)$. ¿Qué coordenadas tiene *B*?

Ejemplo. Considere el vector $\boldsymbol{v}$ con punto de origen $A(2, 2)$ y extremo $B(-1, 4)$. Grafique al vector $\boldsymbol{v}$ y a su correspondiente vector de posicion $\overrightarrow{OP}$.

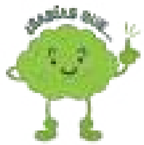
Solución. Para graficar a $\overrightarrow{OP}$, se calculan las componentes del vector $(\overrightarrow{AB}) = (-1 - 2, 4 - 2) = (-3, 2) = \overrightarrow{OP}$.

En la figura 11 se observa la gráfica de ambos vectores realizada con ayuda de *GeoGebra*.

Con relación a la figura 12.

- **Expresa** el vector $\overrightarrow{AB}$ en forma de componentes.
- **Expresa** en forma de componentes al vector $(\overrightarrow{BA})$.
- **Grafica** los vectores de posición correspondiente a los vectores de los ítems anteriores.

- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.
- Utiliza herramientas tecnológicas en las operaciones fundamentales de vectores para resolver situaciones del entorno.



Los vectores son muy utilizados en video juegos, a la hora de posicionar y medir elementos dentro de un espacio. Esto permite que en los videojuegos el jugador pueda mover y direccionar objetos o personajes desde un punto del plano hacia otro.

Los vectores $\boldsymbol{a} = (-2, -3)$ y $\boldsymbol{b}=(4, -6)$ son paralelos ya que:

$$\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = -2$$

Si $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ es un vector no nulo, entonces el vector unitario en la dirección y sentido de $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{v_x}{|v|}, \frac{v_y}{|v|}\right)$$

Igualdad de vectores

¿Qué condición o condiciones se deben cumplir para que dos vectores sean iguales?

Vectores con igual dirección

Dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ y $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ tienen la misma dirección, es decir, que son paralelos cuando sus coordenadas son proporcionales. Quiere decir que, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u_x = kv_x \quad \text{y} \quad u_y = kv_y$$

Ejemplo. Determinar si el vector $\boldsymbol{a} = (10, 4)$ tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{b} = (5, 2)$ o el vector $\boldsymbol{c} = (2, 4)$.

Solución. Determinamos si sus coordenadas son proporcionales:

Para el vector $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se tiene:

$$a_x = 10 = 2 \cdot 5 = 2b_x \quad \text{y} \quad a_y = 4 = 2 \cdot 2 = 2b_y$$

Se concluye que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen la misma dirección.

Para los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ se tiene:

$a_x = 10 = 5 \cdot 2 = 5c_x$ y $a_y = 4 = 1 \cdot 4 = 1c_y$, como $5 \neq 1$ se concluye que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ tienen direcciones diferentes.

Se concluye que el vector $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ no tienen la misma dirección.

Igualdad de vectores

Dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ y $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ son iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Esto ocurre cuando las correspondientes componentes de los vectores son iguales, es decir,

$$u_x = v_x \quad \text{y} \quad u_y = v_y$$

En la figura 13 los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ están ubicados sobre rectas paralelas y son iguales

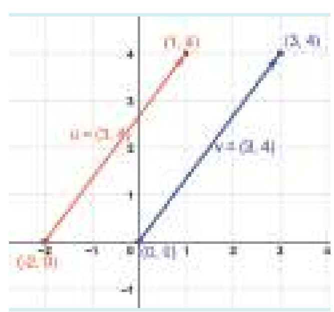


Figura 13

Ejemplo. Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (2 - a, 8)$ y $\boldsymbol{v} = (3, b - 7)$, ¿qué valores deben tener a y b para que los vectores sean iguales?

Solución. Para que ***u*** y ***v*** sean iguales, debe cumplirse que:

$$u_x = v_x \text{ y } u_y = v_y$$

$$2 - a = 3 \text{ y } 8 = b - 7$$

Se deben resolver las ecuaciones

$$2 - a = 3 \rightarrow a = -1$$

$$8 = b - 7 \rightarrow b = 15$$

Comprobamos los resultados sustituyendo en los vectores los valores de a y b:

$$u = (2 - (-1), 8) \text{ y } v = (3, 15 - 7)$$

$$u = (3, 8) \text{ y } v = (3, 8)$$

Ejemplo. Dados el vector ***r*** con punto de origen $A(1, -3)$ y extremo $B(4,5)$, y el vector ***s*** con origen en $C\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ y extremo en $D\left(2, \frac{5}{2}\right)$, determina si ***r*** y ***s*** son iguales.

Solución. Calculando las componentes de ***r*** y ***s***:

$$\boldsymbol{r} = (4 - 1, 5 - (-3)) \rightarrow \boldsymbol{r} = (3, 8)$$

$$\boldsymbol{s} = \left(2 - (-1), \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) \rightarrow \boldsymbol{s} = (3, 4)$$

Conclusión. Como las segundas componentes de ***r*** y ***s*** son distintas, entonces ***r*** y ***s*** no son iguales.

- **Determina** si el vector $\boldsymbol{a} = (10, 4)$ tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{b} = (5, 2)$ o el vector $\boldsymbol{c} = (2, 4)$. Luego, **grafica** haciendo uso de *GeoGebra* y **verifica** los resultados.
- Dado los vectores $\boldsymbol{a} = (x - 2, 5)$ y $\boldsymbol{b} = (6, 3 - 2y)$, ¿qué valores deben tener x e y para que los vectores sean iguales?

Los vectores son aplicados en el ámbito de la arquitectura, el diseño y la construcción para construir edificios, carreteras y puentes.

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.
- Utiliza herramientas tecnológicas en las operaciones fundamentales de vectores para resolver situaciones del entorno.

Actividad grupal

Trazando una ruta con vectores


Figura 14

¿Qué haremos?

Trazar una ruta entre la escuela y algún punto de interés o de referencia de la ciudad o comunidad, que será seleccionado por el equipo de estudiantes que realizará la actividad, a fin de que en dicha ruta se puedan representar los vectores en un plano cartesiano.

¿Qué necesitamos?

Lápiz y papel, un dispositivo con acceso a internet, la aplicación *Google Maps*.

¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de tres integrantes, en los cuales todos tienen igual responsabilidad para la ejecución de las actividades.

¿Cómo lo haremos?

Esta actividad la desarrollará cada equipo desde su salón de clases. Utilizando *Google Maps*, deben escoger una dirección cualquiera de su ciudad o comunidad, y cuando la aplicación les dé la ruta a seguir tomarán una captura de pantalla, para luego reproducirla en un sistema de coordenadas cartesianas (coloquen el origen del sistema de coordenadas en el punto de partida que es la escuela, donde lo marca la aplicación).

En cada tramo recto del trayecto deben colocar un vector, que tiene su punto de inicio en el origen (punto de partida del trayecto) y su extremo (en el comienzo de una curva). Seguidamente, ubicarán el segundo vector, cuyo punto de inicio se ubica en el extremo del vector anterior y su extremo en la siguiente curva, y así sucesivamente hasta cubrir todo el recorrido (ver ejemplo en la figura 14).

Luego respondan a las siguientes preguntas:

¿Cuántos vectores cubrieron el recorrido?

¿Cuáles son equipolentes? ¿Por qué?

¿Cuáles son paralelos? ¿Por qué?

¿Cuáles son perpendiculares? ¿Por qué?

Traza el vector que va desde el origen al punto de llegada, calcula sus componentes y su módulo.

Presentación y socialización de la actividad

Un miembro de cada equipo presentará los resultados a los demás equipos y describirá el proceso seguido.

Coevaluación

Los estudiantes, con apoyo de su docente, revisarán sus cálculos para identificar posibles errores cometidos y buscar soluciones.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar? ¿Cómo puedes hacerlo?

Reflexiono sobre lo que necesito repasar...

Copia en tu cuaderno este cuadro para que sigas el avance de tu aprendizaje.

Observa y completa lo que todavía te falta por estudiar o repasar.

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
•	He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…

- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.
- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.

Evaluación

A continuación, se te presentan varias afirmaciones con cuatro opciones, **selecciona** la opción que haga verdadera la proposición.

- El módulo del vector $\boldsymbol{a} = (4, -5)$ es:
  - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{9}$ u
  - $|\boldsymbol{a}| = 1$u
  - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{41}$ u
  - $|\boldsymbol{a}| = 9$ u

- El vector con origen $A(2,-3)$ y extremo en $B(-1,4)$ es:
  - $\overrightarrow{AB} = (1,1)$
  - $\overrightarrow{AB} = (-3,7)$
  - $\overrightarrow{AB} = (3,1)$
  - $\overrightarrow{AB} = (1,-7)$

- Dos vectores no nulos son perpendiculares si ellos forman un ángulo de:
  - 45 grados
  - 60 grados
  - 90 grados
  - 180 grados

- Las componentes del vector $\boldsymbol{a} = (2, -3)$ son:
  - $a_x = 3$ y $a_y = 2$
  - $a_x = 2$ y $a_y = 3$
  - $a_x = 2$ y $a_y = -3$
  - $a_x = -3$ y $a_y = -2$

- El módulo del vector $\boldsymbol{a} = (3, -4)$ es:
  - $|\boldsymbol{a}| = 25$ u
  - $|\boldsymbol{a}| = 9$ u
  - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{7}$ u
  - $|\boldsymbol{a}| = 5$ u

- **Completa** los enunciados, de forma tal que la proposición sea verdadera:
  - Los vectores ________________ son vectores de igual módulo y dirección, pero sentidos contrarios.
  - Dos vectores ________________ son los vectores que forman un ángulo de 90 grados.
  - Un vector ____________ es un vector cuyo módulo es la unidad.
  - Los vectores ____________son aquellos cuyas líneas de acción son paralelas.
  - El vector _____________ es un vector que representa la posición de un punto en el plano con respecto a un origen.
  - Un vector es ___________ si su módulo es cero.
  - Si los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ tienen componentes proporcionales, entonces $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores _________
  - El punto de origen en un vector de posición es ___________
  - En el vector de posición $\boldsymbol{v} = (-3,5)$ el punto extremo es________

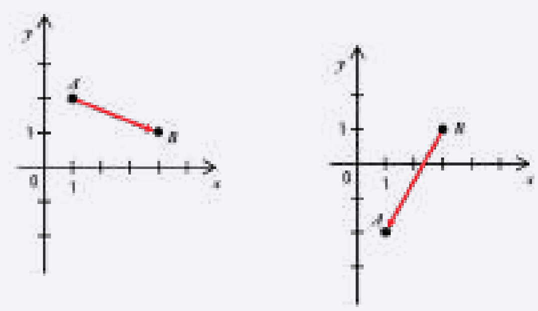
- **Dibuja** 2 vectores libres equipolentes a $\boldsymbol{e}$:

- **Diga** cuáles de las parejas de vectores son equipolentes:

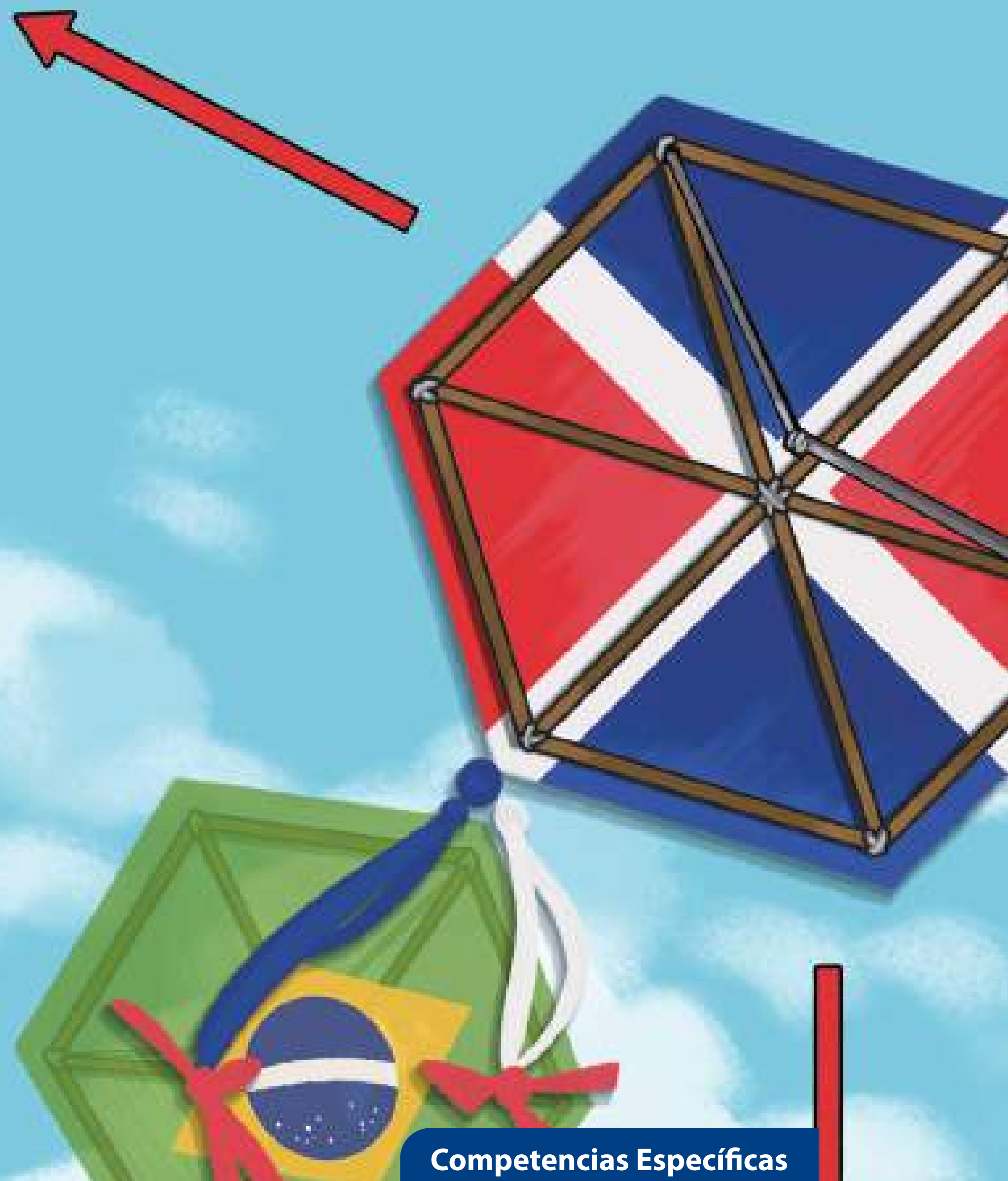
- **Dibuja** 2 vectores paralelos de diferentes módulos y sentidos.
- **Dibuja** un par de vectores perpendiculares con sus vectores unitarios.
- **Responde** las siguientes dos preguntas justificando cada respuesta:
  - ¿Dos vectores paralelos pueden ser equipolentes?
  - ¿Dos vectores perpendiculares pueden ser equipolentes?
- **Determina** si el vector $\boldsymbol{a} = (20, 4)$ tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{b} = (10, 2)$ o el vector $\boldsymbol{c} = (12, 4)$.
- Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (5, 8)$ y $\boldsymbol{v} = (a + 3, b - 7)$, ¿qué valores deben tener $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que los vectores sean iguales?
- Dado los vectores

  $\boldsymbol{a} = (-6, 5)$ y $\boldsymbol{b} = (6 + x, 3 - 2y)$, ¿qué valores deben tener x e y para que los vectores sean iguales?

- **Calcula** las componentes de los siguientes vectores:
  - El vector $\boldsymbol{v}$ va desde $A(3, -5)$ hasta $B(-9, 4)$. Dibújalo junto con su vector de posición haciendo uso de *GeoGebra*.
- **Determina** si el vector $\boldsymbol{a} = (5, 3)$ tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{b} = (10, 6)$ o el vector $\boldsymbol{c} = (15, 12)$. Luego, grafica haciendo uso de *GeoGebra* y verifica los resultados.
- Dado un vector $\boldsymbol{v}$ con origen en $A(-2, -3)$ y extremo $B(4, 5)$, **halla** el vector $\boldsymbol{v}$, su módulo y **grafica** haciendo uso de *GeoGebra*.
- Dada la figura, expresa el vector con punto inicial A y punto terminal B en forma de componentes.

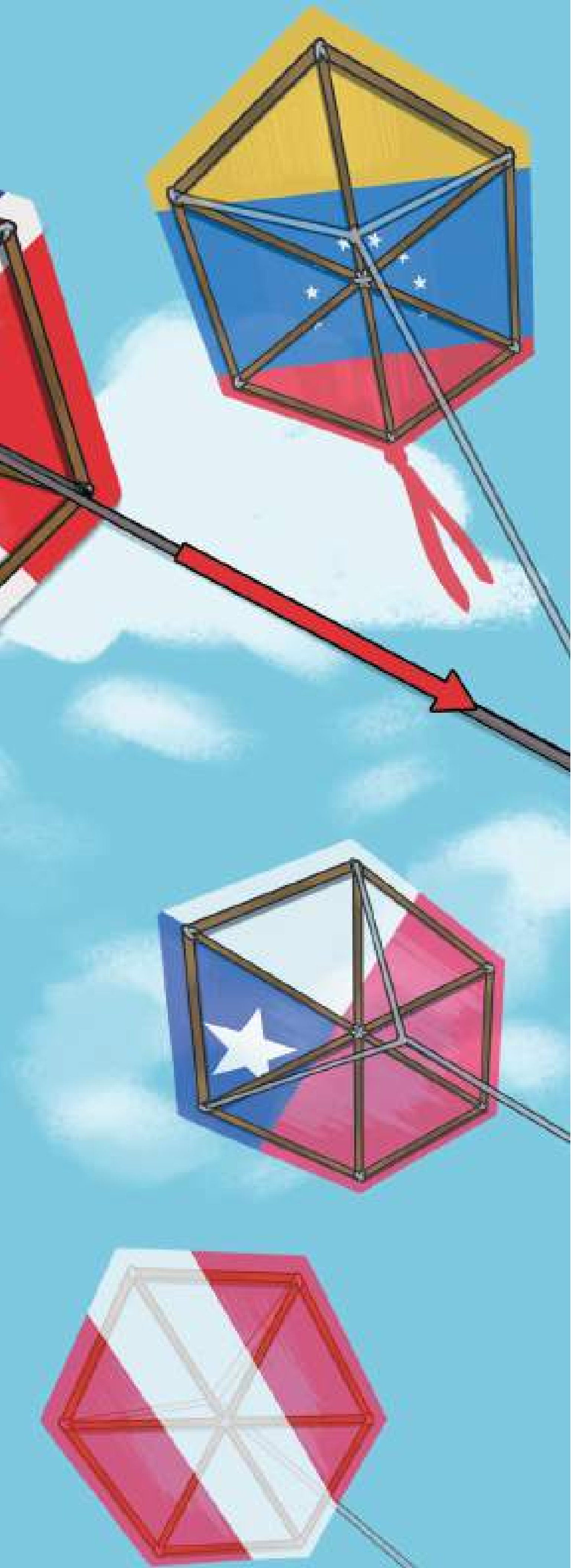


- **Expresa** el vector con origen A y extremo B en forma de componentes.
  - $A(1, -3)$; $B(2, 0)$.
  - $A(1, 3)$; $B(6, -3)$.
- **Determina** las componentes del vector unitario en la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{v} = (-3, 4)$.



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 6

Operaciones con vectores y aplicaciones

Situación de aprendizaje

Volar una chichigua es una actividad recreacional que realizan frecuentemente niños y jóvenes de todo el mundo. La chichigua, según el país en el que uno se encuentre, recibe diferentes nombres: cometas, barriletes, papagayos, voladores, papalote, zamura, entre otros. En la imagen, se observa una competencia de chichiguas donde participan jóvenes de diferentes nacionalidades. Para elevarlas, se deben considerar las fuerzas que actúan sobre ellas. Sabiendo que una fuerza es una magnitud vectorial.

1. ¿Cuáles fuerzas actúan cuando elevas una chichigua?

2. Cuando se mantiene fija en lo alto, ¿qué está pasando con los vectores que actúan sobre ella?

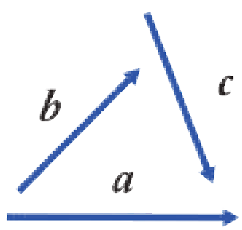
3. En algunos casos se les coloca una cola que cuelga en la parte inferior de la chichigua, ¿qué función crees que cumple la cola?

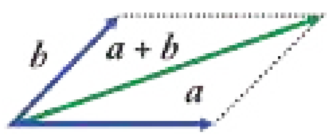
Contenido

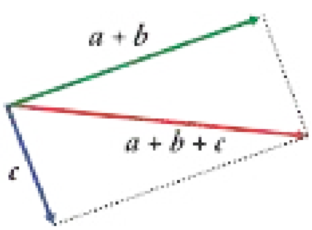
- Adición o suma de vectores libres
- Propiedades de la adición de vectores
- Sustracción o resta de vectores libres
- Otras operaciones con vectores libres
- Algunas aplicaciones con vectores
- Actividad grupal
- Evaluación

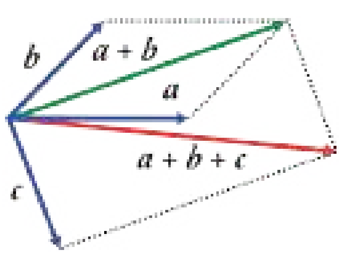
Paralelogramo. Es un cuadrilátero con pares de lados opuestos iguales y paralelos dos a dos.

Con la regla del paralelogramo es posible sumar más de dos vectores, pero siempre trasladándola de a pares. Por ejemplo, para sumar tres vectores se pueden sumar los dos primeros y luego el otro vector con el vector resúltate.
Ejemplo:









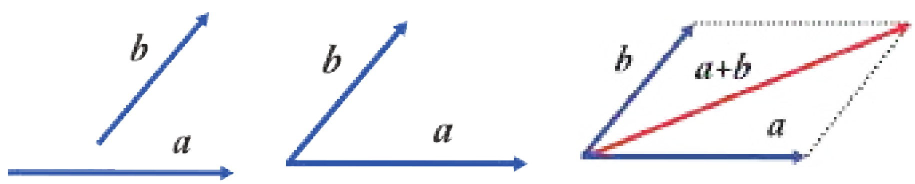
Adición o suma de vectores libres

¿Qué características tienen los vectores libres?

Métodos geométricos para la suma de vectores

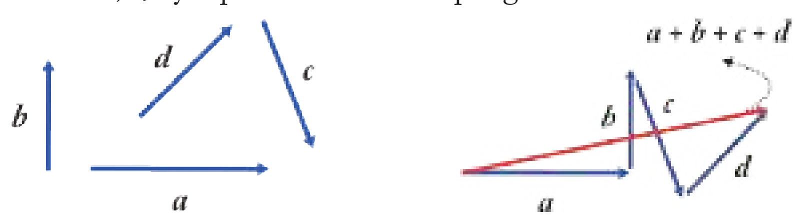
La **regla del paralelogramo** es un método gráfico que se usa para sumar dos vectores no paralelos. Consiste en colocar dos vectores de modo que tengan el mismo punto origen, por el extremo de cada vector se traza una recta paralela al otro vector, obteniéndose un paralelogramo. Luego, la suma de los vectores es el vector que tiene como origen el mismo de los sumandos, y cuyo extremo es el punto de intersección de las rectas trazadas.

Ejemplo. En la figura siguiente, se muestra la suma geométrica de los vectores ***a*** y ***b*** por la regla del paralelogramo.



El **método de vectores consecutivos o del polígono** es utilizado para sumar dos o más vectores. Consiste en colocar un vector a continuación del otro, de manera que el extremo de uno coincida con el origen del otro, y así continuamente, hasta colocar todos los vectores que se están sumando. La suma de los vectores será el vector que va desde el origen del primero al extremo del último vector.

Ejemplo. En la figura siguiente, se muestra la suma geométrica de los vectores ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** por el método del polígono.



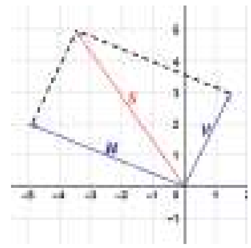
Método analítico para la suma de vectores

Para sumar los vectores $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ y $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$, se suman las compoentes correspondientes de cada vector:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

Ejemplo. Dados los vectores $\boldsymbol{u}$ = (-5, 2) y $\boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, hallar la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Grafica haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Solución. Dado que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$, entonces, sustituyendo los valores, se tiene:

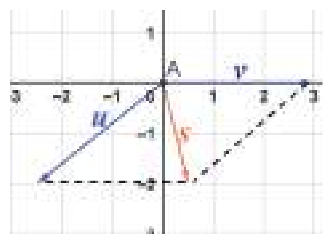


$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \left(-5 + \frac{3}{2},\ 2 + 3\right)$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \left(-\frac{7}{2},\ 5\right)$$

Ejemplo. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-\frac{5}{2}, -2)$ y $\boldsymbol{v}$ = (3, 0), hallar la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Graficar haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

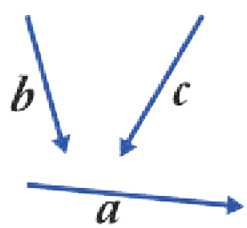
Solución. Dado que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$, entonces, sustituyendo los valores, se tiene:



$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \left(-\frac{5}{2} + 3, -2 + 0\right)$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

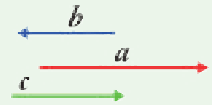
- Dados los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, **halla** la suma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, de forma geométrica, con la regla del paralelogramo y por el método de vectores consecutivos.



- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(3, -\frac{9}{2}\right)$ y $\boldsymbol{v}$ = (1, 4), **halla** la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

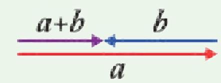
- **Resuelve.** Antonio salió a hacer un recorrido en su bicicleta. Él decide viajar 10 km hacia el norte y luego 20 km hacia el este. A qué distancia se encuentra Antonio del punto de partida.

Suma de vectores de igual dirección (paralelos).

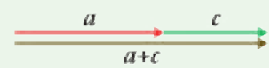


Obtener $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, en cada caso dibujamos el segundo vector a continuación del vector $\boldsymbol{a}$, de manera que sean consecutivos, respetando sus módulos, direcciones y sentidos.

El vector $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ tiene como módulo la diferencia de los módulos de ambos, la misma dirección y el sentido del vector con mayor módulo.



El vector $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ tiene como módulo la suma de ambos módulos, la misma dirección y sentido de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$



Si los vectores a sumar forman un polígono cerrado siempre unidos uno a continuación del otro, de manera que el extremo de uno coincida con el origen del otro, entonces el vector resultante es el vector nulo.

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.
- Utiliza herramientas tecnológicas en las operaciones fundamentales de vectores para resolver situaciones del entorno.

Tabla 1

Propiedades de la adición de vectores
La suma de dos vectores en el plano es otro vector en el plano:
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}$
Propiedad asociativa
$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
Propiedad conmutativa
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
Existencia del elemento neutro
Para cada vector $\boldsymbol{a}$ existe un vector $\boldsymbol{0}$ (vector cero o vector nulo), tal que:
$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
Existencia del elemento opuesto
Para cada vector $\boldsymbol{a}$ existe un vector $-\boldsymbol{a}$ (vector opuesto) tal que:
$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$

Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (-a, 8)$ y $\boldsymbol{v} = (3, b + 1)$, ¿qué valores deben tener a y b para que $\boldsymbol{v}$ sea el vector opuesto de $\boldsymbol{u}$?

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (8, -2)$ y $\boldsymbol{v} = (0, 0)$, la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (8 + 0, -2 + 0)$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 6$$

Propiedades de la adición de vectores

¿Cómo se llama el vector que al sumárselo al vector $\boldsymbol{v}$ da como resultado el mismo vector $\boldsymbol{v}$?

Propiedades de la suma de vectores

Si los vectores $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ y $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y)$ son vectores en el plano, se verifican las propiedades que se explicitan en la tabla 1.

Ejemplo. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, $\boldsymbol{v} = (3, 0)$ y $\boldsymbol{w} = (1, -5)$, hallar la suma de vectores $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

Solución. Para adicionar, aplicamos la propiedad asociativa:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{s} = (u_x + v_x, u_y + v_y) + (w_x, w_y)$$

Sustituyendo los valores se tiene:

$$\boldsymbol{s} = \left(-\frac{5}{2} + 3, -2 + 0\right) + (1, -5) \rightarrow \boldsymbol{s} = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + (1, -5)$$

$$\boldsymbol{s} = \left(\frac{1}{2} + 1, -2 + (-5)\right) \rightarrow \boldsymbol{s} = \left(\frac{3}{2}, -7\right)$$

Ejemplo. Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (2 - a, 8)$ y $\boldsymbol{v} = (3, b - 7)$, ¿qué valores deben tener a y b para que $\boldsymbol{v}$ sea el vector opuesto de $\boldsymbol{u}$?

Solución. Aplicamos la propiedad de existencia del elemento opuesto, tal que: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 0$. Por otra parte, sabemos que $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Luego, sustituyendo tenemos:

$$(2 - a, 8) + (3, b - 7) = (0, 0)$$

$$(2 - a + 3, 8 + b - 7) = (0, 0)$$

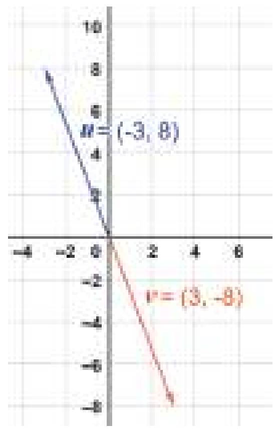
$$(5 - a, 1 + b) = (0, 0)$$

Igualando componentes:

$$5 - a = 0 \quad \text{y} \quad 1 + b = 0$$

$$a = 5 \quad \text{y} \quad b = -1$$

Se concluye que: para que $\boldsymbol{v}$ sea el vector opuesto de $\boldsymbol{u}$, deben ser $a = 5$ y $b = -1$. Es decir, $\boldsymbol{v} = (3, -8)$ siendo $\boldsymbol{v} = (-3, 8)$.



En la figura, se representan gráficamente los vectores para comprobar que los resultados obtenidos son correctos.

Ejemplo. El módulo de la suma de dos vectores no siempre es la suma de los módulos de los vectores. Comprueba esta afirmación con los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{b} = (0, -4)$. Realiza la gráfica.

El módulo de la suma de dos vectores es:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1, 0) + (0, -4) = (1, -4)$, luego:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

La suma de los módulos de los vectores es:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ y } |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = 1 + 4 = 5$$

Se comprueba que: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. Ver la gráfica de los vectores representados en la figura 1.

- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$, $\boldsymbol{v} = (0, 5)$ y $\boldsymbol{w} = (2, -4)$, **halla** la suma de vectores dados, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra*, los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{s}$.
- Dado los vectores $\boldsymbol{a} = (2 - 3x, -3)$ y $\boldsymbol{b} = \left(4, y + \frac{1}{2}\right)$, ¿qué valores deben tener x e y, para que $\boldsymbol{b}$ sea el vector opuesto de $\boldsymbol{a}$?
- Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (1 - 3a, 2)$ y $\boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{2}, b + \frac{1}{3}\right)$, ¿qué valores deben tener a y b para que $\boldsymbol{v}$ sea el vector opuesto de $\boldsymbol{u}$?

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-1, -2)$ y $\boldsymbol{v} = (3, 0)$ la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-1 + 3, -2 + 0)$$
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (2, -2)$$

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (0,-2)$ y $\boldsymbol{v} = (3,0)$, la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es:

a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (0, 5)$

b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (3, -2)$

a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-2, 3)$

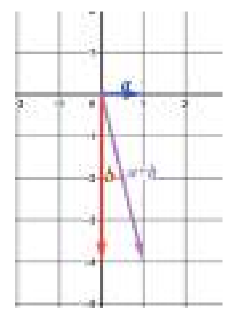


Figura 1

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.

Sustracción o resta de vectores libres

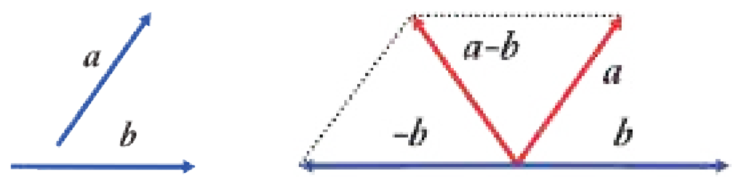
Si conoces las componentes de un vector $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ ¿cuáles son las componentes del vector opuesto de $\boldsymbol{a}$?

Para restar dos vectores, se suma el minuendo con el vector opuesto del sustraendo. Por ello, dados dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, para obtener $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, basta con construir el vector $-\boldsymbol{b}$, y sumarlo al vector $\boldsymbol{a}$. Así, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Métodos geométricos para la resta de vectores

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores como se muestran en la figura que sigue más abajo. Aplicando la **regla del paralelogramo** para determinar $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, se colocan los dos vectores de modo que tengan el mismo punto inicial. Seguidamente, dibujamos el vector opuesto del vector $\boldsymbol{b}$ (el sustraendo en la operación), de modo que su punto de origen coincida con el de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, por el extremo de $\boldsymbol{a}$ se traza una paralela a $-\boldsymbol{b}$ y por el extremo de $-\boldsymbol{b}$ se traza una recta paralela a $\boldsymbol{a}$. Obtenemos así un paralelogramo y luego la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ es la diagonal dirigida cuyo origen es el mismo de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $-\boldsymbol{b}$, y cuyo extremo es el punto de intersección de las rectas trazadas. Es decir, que para obtener la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, se efectúa la suma $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Determina dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, tales que $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}|$

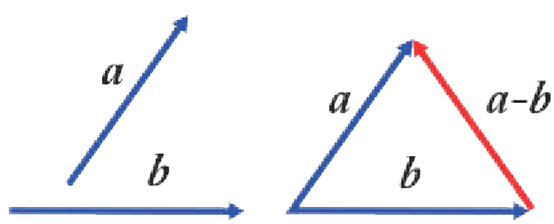


Si $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$, entonces, su opuesto es un vector $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$, tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 0$, de allí que $(a_x + b_x, a_y + b_y) = (0, 0)$, y, por lo tanto, $b_x = -a_x$ y $b_y = -a_y$.

De este modo, el opuesto del vector $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$, denotado por $-\boldsymbol{a}$, es el vector $-\boldsymbol{a} = (-a_x, -a_y)$,

El **método del triángulo** permite restar dos vectores a partir de su gráfica. Consiste en colocar los dos vectores en el mismo punto de aplicación, es decir, de manera que ambos vectores tengan como origen el mismo punto. El resultado de la resta vectorial es el segmento dirigido que va desde el extremo del vector sustraendo hasta el extremo del vector minuendo.

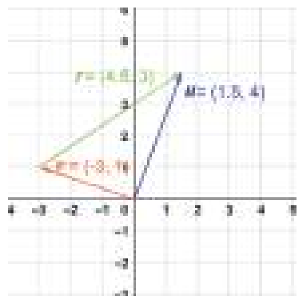
Ejemplo. En la figura se muestra cómo se obtiene la diferencia de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en forma geométrica.



Método analítico para la resta de vectores

La resta de vectores es un caso particular de suma de vectores, puesto que, la diferencia de dos vectores $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ y $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$, es la suma de $\boldsymbol{a}$ con el opuesto de $\boldsymbol{b}$.

Ejemplo. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ y $\boldsymbol{v} = (-3, 1)$, halla la diferencia de vectores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Grafique haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.



Solución. Dado que $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$, entonces, sustituyendo los valores se tiene:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{2} - (-3),\ 4 - 1\right)$$

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{2} + 3,\ 4 - 1\right)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \left(\frac{9}{2},\ 3\right)$$

Ejemplo. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (4, -2)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{w} = (1, 5)$, halla el vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.

Solución. Como $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$, aplicamos la propiedad asociativa de la adición de vectores:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + (-\boldsymbol{w})$$

$$\boldsymbol{r} = (u_x + v_x, u_y + v_y) + (-w_x, -w_y)$$

Sustituyendo los valores, se tiene:

$$\boldsymbol{r} = (4 + 1, -2 + 0) + (-1, -5) \rightarrow \boldsymbol{r} = (5, -2) + (-1, -5)$$

$$\boldsymbol{r} = (5 - 1, -2 - 5) \rightarrow \boldsymbol{r} = (4, -7)$$

- Dados $\boldsymbol{u} = (3, -5)$ y $\boldsymbol{v} = (1, 4)$, **halla** la resta $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.
- Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de la figura 2, **halla** la resta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ por la regla del paralelogramo y por el método del triángulo.
- Si $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = 2|\boldsymbol{a}|$ y $|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{0}$, ¿qué puedes **concluir** respecto a los vectores?
- Si $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = 2|\boldsymbol{a}|$ y $|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{0}$, ¿qué puedes **concluir** respecto a los vectores?

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-1, -2)$ y $\boldsymbol{v} = (-5, 0)$, el vector $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$ es:

a) (-4, -2)

b) (4, -2)

a) (-6, -2)

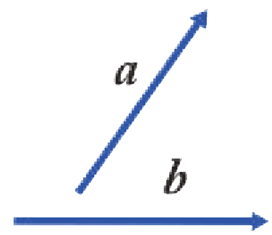
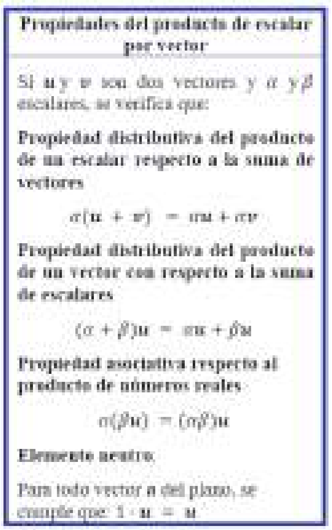


Figura 2

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.

Para el vector $\alpha \boldsymbol{v}$ se cumple que:
Su dirección es la que tiene el vector $\boldsymbol{v}$.
Su módulo es el producto del valor absoluto de α y el módulo $\boldsymbol{v}$. Es decir, $|\alpha \boldsymbol{v}| = |\alpha||\boldsymbol{v}|$.
Su sentido es el mismo que $\boldsymbol{v}$ si $\alpha > 0$, y es contrario a $\boldsymbol{v}$ si $\alpha < 0$.
Si α es cero o $\boldsymbol{v}$ es el vector nulo, entonces, $\alpha \boldsymbol{v}$ es el vector nulo. Recíprocamente, si $\alpha \boldsymbol{v}$ es el vector nulo, entonces, α es cero o $\boldsymbol{v}$ es el vector nulo.

Tabla 2



Propiedades del producto de escalar por vector

Si $\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son dos vectores y α y β escalares, se verifica que:

Propiedad distributiva del producto de un escalar respecto a la suma de vectores

$$\alpha(\mathbf{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\boldsymbol{v}$$

Propiedad distributiva del producto de un vector con respecto a la suma de escalares

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

Propiedad asociativa respecto al producto de números reales

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

Elemento neutro:

Para todo vector $\mathbf{u}$ del plano, se cumple que: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Dado el vector $\boldsymbol{u} = (-1, 6)$ y el escalar $\alpha = -2$, se verifica que:
$\alpha \cdot \boldsymbol{v} = -2(-1, 6) = (-2 \cdot -1, -2 \cdot 6)$
$\alpha \cdot \boldsymbol{v} = (2, -12)$

Otras operaciones con vectores libres

¿Cómo se multiplica un número por un vector?

Producto de un escalar por un vector

Sea $\boldsymbol{v} = (x, y)$ un vector en el plano y α un escalar (número real). El producto del escalar α por el vector $\boldsymbol{v}$ es otro vector denotado por $\alpha\boldsymbol{v}$ y definido así:

$$\alpha\boldsymbol{v} = \alpha(x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = (\alpha x, \alpha y)$$

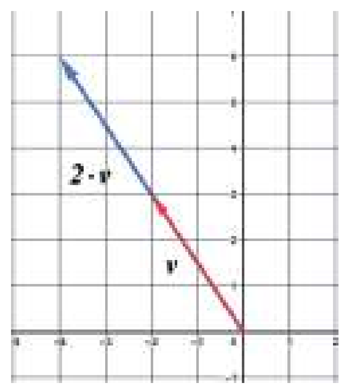
Ejemplo 1. Dado un vector $\boldsymbol{v} = (-2, 3)$ y $\alpha = 2$. Calcule el producto $2\boldsymbol{v}$ y dibuje el vector $2\boldsymbol{v}$.

Solución. Sustituyendo $\boldsymbol{v}$ y α en $\alpha\boldsymbol{v}$, tenemos:

$$2\boldsymbol{v} = 2(-2, 3) = (2 \cdot (-2), 2 \cdot 3) = (-4, 6)$$

$$2\boldsymbol{v} = (-4, 6)$$

Para dibujar el vector $2\boldsymbol{v}$, alargamos el vector $\boldsymbol{v}$ hasta que mida el doble. Con el software *GeoGebra* comprobamos esta representación. (ver figura)



En la tabla 2, se presentan las diferentes propiedades del producto de un número real por un vector, las cuales se deben tomar en cuenta para las distintas operaciones que involucran la relación de un escalar con un vector.

Ejemplo 2. Dado el vector $\boldsymbol{u} = (-1, 6)$ y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Verifica que se cumple $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$.

Solución. Sustituyendo $\boldsymbol{v}$, y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ en $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$, tenemos:

$$(3 + 2)(-1, 6) = 3(-1, 6) + 2(-1, 6)$$

$$5(-1, 6) = (-3, 18) + (-2, 12)$$

$$(-5, 30) = (-5, 30)$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un número real, que se obtiene multiplicando las respectivas componentes y sumándolas. Es decir que, dados dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ y $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$, su **producto escalar** se define como:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Ejemplo 1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(5, -\frac{3}{2}\right)$ y $\boldsymbol{v} = (1, 4)$, se calcula el producto escalar entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Solución. Sustituyendo valores se tiene:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \left(5, -\frac{3}{2}\right) \cdot (1,4) = 5 \cdot 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 4 = 5 - 6 = -1$$

Las aplicaciones geométricas del producto escalar son varias, entre ellas para hallar el módulo o la longitud de un vector.

El producto escalar de un vector por él mismo es un número no negativo, que es igual al cuadrado de su longitud o módulo. Por lo que, el módulo del vector $\boldsymbol{v}$ se obtiene así:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Ejemplo 2. Para el vector $\boldsymbol{v}=(1,4)$. Determina $|\boldsymbol{v}|$ haciendo uso de la definición de producto escalar.

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(1, 4) \cdot (1, 4)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 4 \cdot 4} = \sqrt{17}$$

El producto escalar satisface diferentes propiedades. Las más importantes se resumen en la tabla 3.

- Si $\boldsymbol{v}$ es un vector en el plano y α un número real, **determina**: $\alpha(-\boldsymbol{v})$ y $(-\alpha)(\boldsymbol{v})$. **Compara** los resultados. ¿Qué concluyes?. Se sugiere: dibujar un vector, fijar valores reales para α y luego calcular $\alpha(-\boldsymbol{v})$ y $(-\alpha)(\boldsymbol{v})$ para esos valores.
- Dado los vectores $\boldsymbol{u} = (\frac{5}{3}, -5)$ y $\boldsymbol{v} = (6, -3)$, y el escalar $\alpha = -2$. **Verifica** si se cumplen las siguientes propiedades:
  - $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$
  - $\alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$

Tabla 3

Propiedades del producto escalar de vectores

- Si los dos vectores tienen la **misma dirección y sentido**, el producto escalar es el producto de sus módulos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

- Si los dos vectores son iguales, el producto escalar es igual a:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

- Si los dos vectores tienen la **misma dirección pero sentido opuesto**, el producto escalar es el producto de sus módulos con signo contrario:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

- Si los dos **vectores** son **perpendiculares**, su producto escalar será nulo.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Además, el producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad asociativa**: $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- **Propiedad conmutativa**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- **Propiedad distributiva**: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

En el siguiente enlace puedes practicar las operaciones con vectores

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y la inversa de una matriz.

En la física existen dos tipos de magnitudes: las escalares y las vectoriales. Las primeras son aquellas que están señaladas con un número y sus unidades, mientras que las segundas, además de estar representadas por un valor numérico, se identifican con un sentido y dirección.
La elección de escalares o vectoriales para determinar la magnitud física dependerá de la naturaleza de lo que se está midiendo o calculando. Por ejemplo, para describir temperaturas, densidades o masas, se utiliza el recurso de la representación numérica, entendiéndose como magnitudes escalares. No obstante, para calcular velocidades, fuerzas, aceleración, energía térmica, pesos o potencias, se utilizan vectores.
Fuente: https://www.ferrovial.com/es/stem/vectores/

La **fuerza** es una magnitud física de carácter vectorial, capaz de deformar un cuerpo, modificar su velocidad o vencer su inercia, y ponerlo en movimiento si estaba inmóvil.

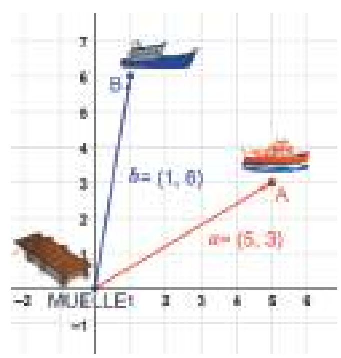
Algunas aplicaciones con vectores

¿Por qué dos vectores cuyas componentes son proporcionales tienen la misma dirección?

Aplicación de vectores

En física, el **vector de posición** representa la posición de una partícula en un punto del plano, o el espacio, con respecto a un origen y su modulo representa la distancia que separa dos puntos. Cuando una partícula hace un cambio de posición realiza un desplazamiento, el cual se define como la diferencia entre el vector de posición final ($\boldsymbol{r_2}$) y el vector de posición inicial ($\boldsymbol{r_1}$). El **vector desplazamiento** ($\boldsymbol{r}$) está dado por la resta: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$.

Ejemplo 1. Se aprecia en la figura la posición en la que se encuentran dos lanchas con respecto al muelle. La lancha *A* está en una posición de 5 km hacia el este y 3 *km* hacia el norte, y la lancha *B* está en una posición de 1 km hacia el este y 6 km hacia el norte, ¿cuál es el vector desplazamiento de la lancha *A*, si cambia su posición hasta la lancha *B*? ¿Cuál es la distancia recorrida?



Solución. Los vectores de posición de las lanchas son $\boldsymbol{r_A} = (5, 3)$ y $\boldsymbol{r_B} = (1,6)$.

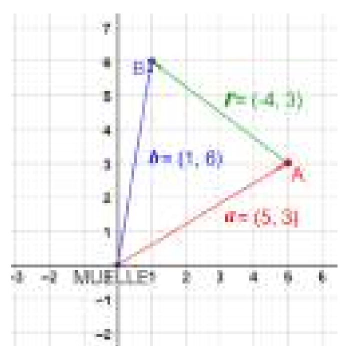
El vector desplazamiento está dado por:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A}$$

$$\boldsymbol{r} = (1,6) - (5,3)$$

$$\boldsymbol{r} = (1 - 5, 6 - 3)$$

$$\boldsymbol{r} = (-4 , 3)$$



Y la distancia recorrida es:

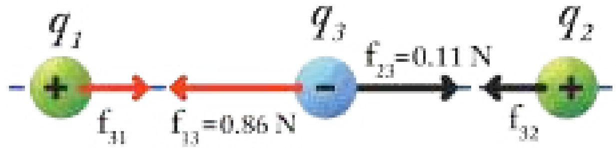
$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

El vector desplazamiento de la lancha *A*, si ella cambia su posición hasta la lancha *B* es $\boldsymbol{r} = (-4, 3)$ y la distancia recorrida es 5 km.

En la ley de Coulomb, la magnitud de las **fuerzas eléctricas** con las que interactúan dos cargas puntuales en reposo es directamente proporcional al producto de la magnitud de ambas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y tiene la dirección de la línea que las une. La fuerza es de repulsión si las cargas son de igual signo, y de atracción si son de signo contrario.

La **fuerza resultante** de un sistema de fuerzas, se obtiene mediante la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Ejemplo 2. Se tienen tres cargas eléctricas q_1, q_2 y q_3, dispuestas como se muestra en la figura, calcular el valor de la fuerza resultante que las cargas q_1 y q_2 ejercen sobre q_3.



Solución. En este caso se tienen las magnitudes de las fuerzas y la dirección es horizontal. El vector de la fuerza $\mathbf{f}_{23}$ tiene sentido hacia la derecha y el vector de la fuerza $\mathbf{f}_{13}$ tiene sentido hacia la izquierda. La fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la carga q_3:

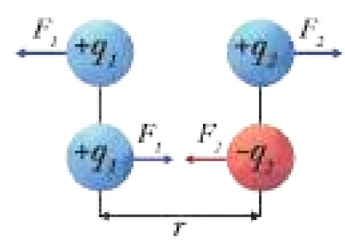
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{23} + \mathbf{f}_{13}$$

$$\mathbf{f} = 0.11N + (-0.86N)$$

$$\mathbf{f} = -0.75N$$

El signo negativo indica que el sentido del vector fuerza es hacia la izquierda.

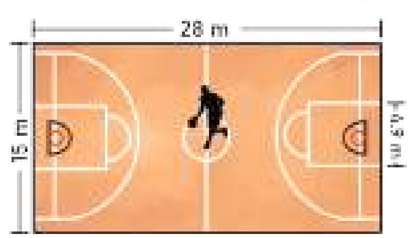
Se tiene que el valor de la fuerza resultante que las cargas q_1 y q_2 ejercen sobre q_3 es de $0.75N$ en dirección horizontal y sentido hacia la izquiera.



Ley de Coulomb expresa los signos de cargas f_1 a f_2 de diferente signo, y de cargas del mismo signo

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Coulomb

- Un jugador de baloncesto se encuentra parado justo en el centro de la cancha mirando hacia el frente del aro contrario. Si tiene que desplazarse 4 metros a su derecha y seis metros hacia delante para ocupar una nueva posición ofensiva ¿En qué posición se encuentra ahora el jugador y a qué distancia de su posición original?

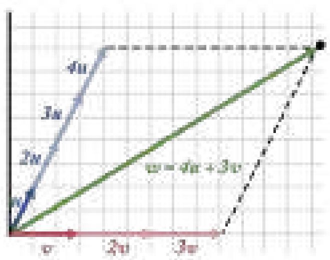


- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con vectores y matrices estableciendo la característica de una matriz, sus tipos y su inversa.
- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con vectores y matrices, la característica de una matriz, sus tipos y su inversa y los vincula a situaciones de la vida diaria.

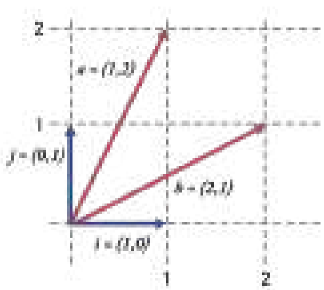
Actividad grupal

Conociendo la base canónica

Combinación lineal de dos vectores



Vectores linealmente independientes



¿Qué haremos?

Investigar y elaborar un informe sobre los aspectos que se solicitan a continuación:

Definir y ejemplificar cada uno de siguientes términos: combinación lineal de vectores, vectores linealmente independientes, espacio vectorial, conjunto generador del espacio vectorial de vectores en el plano y base del espacio vectorial de vectores libres en el plano.

Probar que los vectores $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ forman una base para el espacio vectorial de los vectores libres en el plano.

¿Qué necesitamos?

Lápices, papel, calculadora, un computador, tableta o celular con acceso a internet.

¿Cómo nos organizamos?

Formar un equipo de tres integrantes, donde todos tienen igual responsabilidad para la ejecución de la investigación, luego, deben realizar un informe y su respectiva presentación.

Los miembros del equipo deben comprometerse con el éxito del trabajo, ser siempre honestos y respetuosos con las opiniones de los demás miembros del equipo.

¿Cómo lo haremos?

Una vez formado el equipo, deben hacer un cronograma de actividades, donde se contemplen las diferentes etapas del trabajo: revisión bibliográfica, recopilación de información, organización de la información, elaboración de informe y presentación.

Todos los miembros del equipo deben realizar una revisión bibliográfica, consultar páginas de Internet y otros libros, recolectar datos sobre la investigación propuesta y una vez que la información esté disponible, deben reunirse para discutir y evaluar la importancia de la búsqueda, priorizar y seleccionar lo que se debe incluir en el informe escrito y seleccionar aquellos aspectos que serán destacados en la presentación final.

El informe debe incluir las referencias bibliográficas consultadas para realizar el trabajo.

Presentación y socialización de la actividad

Cada equipo entrega su informe escrito del desarrollo de la investigación al docente y hace una breve exposición de los resultados ante sus compañeros, responde las preguntas que puedan hacer los demás alumnos o el docente.

Coevaluación

En cada equipo se abre un espacio de opinión para comentar: cómo contribuyeron los miembros del equipo en el desarrollo de la actividad y qué se puede mejorar para las próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde de manera autocritica y reflexiva: ¿cómo ha sido mi desempeño durante la actividad?, ¿qué aprendí con esta actividad?

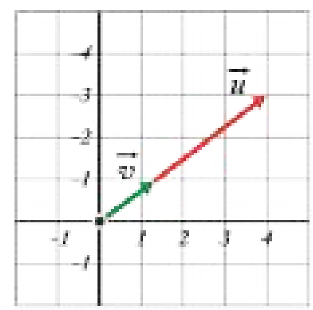
Reflexiono sobre lo que necesito repasar...

Copia en tu cuaderno este cuadro para que sigas el avance de tu aprendizaje.

Observa y completa lo que todavía te falta por estudiar o repasar.

- En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
- Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
- El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
- El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
- El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
- He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…

Vectores linealmente dependientes

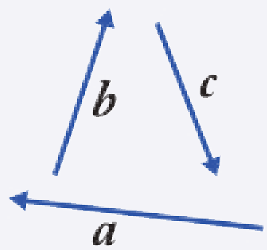


- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con vectores

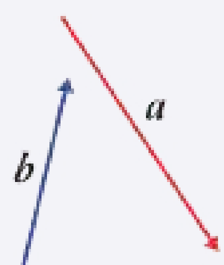
Evaluación

Cada pregunta consta de 4 alternativas, de las cuales solo una es la correcta. Selecciona la respuesta correcta:

- Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -5)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -4)$, entonces:
  - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (7, -1)$
  - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (7, -9)$
  - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-7, -9)$
  - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1, -1)$
- Dados los vectores $\boldsymbol{v} = (2, 3)$ y $\boldsymbol{u} = (3, 5)$, entonces:
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 13$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 16$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 21$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 9$
- Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -5)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -4)$, entonces:
  - $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (7, 13)$
  - $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (10, -13)$
  - $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (-7, 13)$
  - $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (10, -1)$
- Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -5)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -4)$, entonces:
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (7, -1)$
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (7, -9)$
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-7, -9)$
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (1, -1)$
- Dado el vector $\boldsymbol{v} = (-2, 3)$, entonces:
  - $-2\boldsymbol{v} = (4, -6)$
  - $-2\boldsymbol{v} = (-4, 6)$
  - $-2\boldsymbol{v} = (4, 6)$
  - $-2\boldsymbol{v} = (-4, -6)$
- Responde:
  - ¿Qué efecto tiene multiplicar un vector por -2?
  - ¿Cuál es el módulo del vector $\boldsymbol{a} = (1, 0)$?
  - ¿Cuál es la componente horizontal del vector $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$?
  - Si $k = 3$ y $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$ ¿Cuál es el resultado de $k\boldsymbol{a}$?
- Dados los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, **halla** la suma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ de forma geométrica, por la ley del paralelogramo y por el método del polígono.



- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-2, -5)$ y $\boldsymbol{v} = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ **halla** la suma de vectores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ y **grafica**.
- Dados los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, **halla** la resta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ de forma geométrica, por la ley del paralelogramo y por el método del triángulo.



- Dado un vector $\boldsymbol{v} = (4, -2)$ y $\alpha = \frac{9}{2}$. **Calcula** el producto $\alpha\boldsymbol{v}$.

- Dado el vector $\boldsymbol{u}$ = (3, -5) y los escalares $\alpha = \frac{2}{3}$ y β = 3. **Verifica** que (α + β)$\boldsymbol{u}$ = α$\boldsymbol{u}$ + β$\boldsymbol{u}$.

- Dados los vectores $\boldsymbol{u}$ = (8, 1) y $\boldsymbol{v}$ = (5, 9), **calcula** el producto escalar entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{v}$ = (1, 5) y el escalar α = 6. **Verifica** que α($\boldsymbol{u}$ + $\boldsymbol{v}$) = α$\boldsymbol{u}$ + α$\boldsymbol{v}$

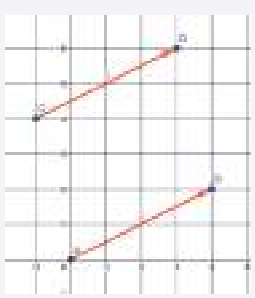
- **Calcula** la fuerza resultante sobre la caja que se muestra en la figura.

- Dados los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, **halla** la suma de vectores $\boldsymbol{u}$ + $\boldsymbol{v}$. **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$ + $\boldsymbol{v}$.
  - $\boldsymbol{u}$ = (2, -5) y $\boldsymbol{v}$ = (3 , 4)
  - $\boldsymbol{u}$ = (-2, -4) y $\boldsymbol{v} = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

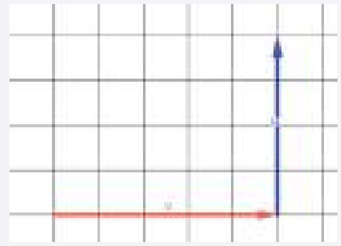
- Con los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de la pregunta anterior **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y -3$\boldsymbol{u}$ + 2$\boldsymbol{v}$.

- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \left(3, -\frac{9}{2}\right)$ y $\boldsymbol{v}$ = (1, 4), **halla** la resta de vectores $\boldsymbol{u}$ - $\boldsymbol{v}$. **Grafica** haciendo uso de *GeoGebra* los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$ – $\boldsymbol{v}$.

- Calcula el módulo del vector $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, y demuestra que $\boldsymbol{u}$ = $\boldsymbol{v}$.



- Para el sistema de vectores mostrado, encuentra el módulo del vector resultante, sabiendo que |$\boldsymbol{v}$| = 5$\boldsymbol{u}$ y |$\boldsymbol{u}$| = 4$\boldsymbol{u}$



- A partir de los siguientes vectores: $\boldsymbol{a} = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}$ = (2, -4), y $\boldsymbol{c}$ = (-5, 4). **Calcula** las componentes de los vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{w}$.
  - $\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{a}$ + **4**$\boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{y}$ = $\boldsymbol{c}$ - **3**$\boldsymbol{b}$ + $\boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{z}$ = -**2**(**2**$\boldsymbol{b}$ + $\boldsymbol{c}$)
  - $\boldsymbol{w}$ = **3**$\boldsymbol{a}$ - 2 $\boldsymbol{c}$

- Sabiendo que $\boldsymbol{a}$ = (-1, 7) y $\boldsymbol{b}$ = (5, -3), **determina**:
  - |$\boldsymbol{a}$| + |$\boldsymbol{b}$|
  - El producto escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

- **Resuelve:** la figura muestra el campo interior o infield de una cancha de beisbol, ¿qué posición ocupa cada base con respecto al home?, ¿cuáles son las componentes y el módulo del vector que va desde el Home hasta la segunda base?

Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Unidad 7

Matrices

Situación de aprendizaje

La imagen muestra un arreglo rectangular de los números naturales del 1 al 9.

¿Qué característica tiene este arreglo en particular?

¿Conoces otros arreglos con esa característica?

¿Has escuchado hablar de las matrices?

Contenido

- El concepto de Matriz
- Adición de matrices
- Multiplicación por un escalar
- Multiplicación de matrices
- Matriz inversa
- Actividad grupal
- Evaluación

El concepto de Matriz

Matriz es un arreglo o disposición rectangular de elementos en m filas y n columnas.

El símbolo $A_{m \times n}$ denota a la matriz A de orden $m \times n$.

Los elementos de $A_{m \times n}$ se denominan "entradas", o simplemente "elementos" de ésta.

Los elementos de $A_{m \times n}$ se identifican por sus coordenadas, expresadas a través de subíndices.

Por ejemplo:

a_{ij} (que se lee "a sub ij") denota el elemento ubicado en la fila i y en la columna j de la matriz.

La idea de *matriz* fue introducida por el matemático J. J. Sylvester (1814-1897).

Fuente: Wikipedia

Aquí se ha destacado en color amarillo una de las columnas de la matriz $A_{m \times n}$.

Observa las matrices que siguen:

$P = [3 \;\; 4]$ y $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Como no tienen el mismo orden (P es de orden 1×2, y Q es de orden 2×1), entonces no verifican la condición (i) de la definición, y, por tanto, P ≠ Q.

¿Sabes en qué consiste un arreglo rectangular? ¿Puedes dar algunos ejemplos?

La idea de Matriz

Un sinnúmero de situaciones de la cotidianidad se expresa a través de arreglos rectangulares de datos organizados en filas y columnas: las **matrices** . Por ejemplo, la matriz que sigue contiene los costos de producción de cierta prenda de vestir durante el año pasado:

$$M = \begin{array}{c|cccc|l} & 166.5 & 194.5 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{Fila 1} \\ & 0 & 0 & 250 & 277 & \longrightarrow \text{Fila 2} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \text{Columna 4} & \end{array}$$

Donde la 1.ª columna expresa los costos de producción en el caso de los niños, la 2.ª los costos para el caso de las niñas, la 3.ª para los hombres y la 4.ª para las mujeres. Y, las filas 1 y 2 representan a las prendas de vestir 1 y 2, respectivamente.

Como advertirás, los elementos de una matriz pueden ser objetos (matemáticos) de distinta naturaleza, por ejemplo: números, relaciones, polinomios, etc. Aquí estudiaremos matrices cuyos elementos son números reales o complejos.

Una matriz $A_{m \times n}$ puede denotarse como sigue:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

También es posible denotar a esta matriz con: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Observa que la fila 1 de $A_{m \times n}$, consta de los elementos: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$. Del mismo modo, la columna 1 consta de: $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$. Además, dos matrices A y B son iguales si, y solo si, tienen el mismo orden y además $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$ tales que $1 \leq i \leq m$, y $1 \leq j \leq n$.

Algunos tipos de matrices

Existen matrices que se distinguen por su estructura, por sus elementos, o bien, por la manera en que se obtienen a partir de otra dada.

La tabla que sigue muestra algunos de estos tipos.

Tipo	Descripción	Ejemplo
Matriz columna	Tiene solo una columnas. Su orden, por tanto, es $m \times 1$.	$C = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$
Matiz fila	Tiene solo una fila. Su orden es $1 \times n$.	$D = \begin{bmatrix} \pi & 1 & -1 \end{bmatrix}$
Matriz cuadrada	Tiene la misma cantidad de filas que de columnas. Como su orden es $m \times m$, se suele decir simplemente que su orden es m.	$E = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$
Matriz nula	Todos sus elementos (o entradas) son 0.	$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz triangular superior	Es cuadrada, los elementos que están debajo de la diagonal principal son todos 0, y al menos uno de los restantes elementos es distinto de 0.	$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \end{bmatrix}$
Matriz identidad	Es cuadrada, los elementos de su diagonal principal son todos 1, y los restantes son 0. Se denota por $I_{n \times n}$.	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz traspuesta	Sea A una matriz. A^t es la matriz traspuesta de A si se obtiene de la matriz A intercambiando sus filas por sus columnas.	Si $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & 5\sqrt{2} \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ entonces $A^t = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & 0 \\ 5\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}$

La matriz traspuesta también puede definirse así:
sea la matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; A^t (la matriz traspuesta de A) es la matriz $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$. Una propiedad de la *matriz traspuesta* es: $(A^t)^t = A$.

Es decir, "la traspuesta de la traspuesta de una matriz A, es la matriz A".

En efecto:
Como $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$, entonces, aplicando nuevamente esta definición, se tiene que $(A^t)^t = [a_{ij}]_{m \times n} = A$.

- Sea $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & \sqrt[3]{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & \sqrt[3]{2} & 2x \end{bmatrix}$.

•¿Cuál es el valor de x?

•¿Qué tipo de matrices son $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $T = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

La *matriz nula* de orden $m \times n$, suele llamarse también *matriz cero*, y se denota con: $0_{m \times n}$ o simplemente con el símbolo 0.

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mn} \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo, una *matriz triangular inferior* es aquella que es cuadrada, y, además, los elementos que están sobre la diagonal principal son todos 0, y al menos uno de los restantes es distinto de 0.

Un ejemplo de este tipo de matriz es el que sigue:

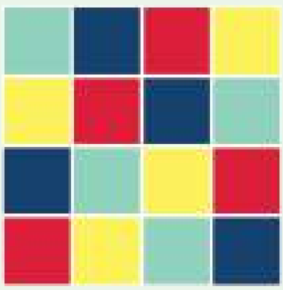
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Observa que una *matriz identidad*, independientemente del orden que ésta tenga, es tanto *triangular superior* como *triangular inferior*.

- Emplea el lenguaje matemático adecuado para diferenciar y operar con matrices.

Un "cuadrado latino" es una matriz cuadrada *n*×*n* en la que *n* símbolos aparecen solo una vez en cada fila y en cada columna.

Por ejemplo, el que sigue es un cuadrado latino de orden 4×4. Aquí los símbolos están dados por cuatro colores.



Los famosos *sudokus* son un caso particular de cuadrado latino:

1	2	4	
4		1	2
2		3	
	1		4

Ten en cuenta que, en el caso de las matrices de costos de producción M y N, su diferencia, *N-M*, representará cuánto varió este costo entre el año pasado y el presente.

En GeoGebra puedes definir y operar con matrices.
Por ejemplo: si escribes el comando {{0,-1},{-1,1}}, se genera la matriz: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(https://www.GeoGebra.org/calculator)

Adición de matrices

¿Sabes qué condición debe cumplirse para sumar dos o más matrices?

¿Cómo sumar matrices del mismo orden?

Considera la matriz $M = \begin{bmatrix} 166.5 & 194.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 277 \end{bmatrix}$ que mostramos en la lección anterior. Y supón que, para este año, los costos de producción de la misma prenda de vestir se expresaron a través de la matriz $N = \begin{bmatrix} 172 & 195 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 260 & 285 \end{bmatrix}$. Entonces, la suma de ambas matrices, $M + N$, representa la suma de los costos de producción de esta prenda de vestir durante dos años seguidos, para el caso de niños, niñas, mujeres y hombres.

En general, dadas las matrices: $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ y

$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, su suma está dada por la matriz:

$$(A + B)_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nota que la adición de matrices está definida solo en el caso de matrices del mismo orden. En caso contrario, la adición no está definida, es decir, no tiene sentido considerar su adición. Una forma equivalente de definir la adición de matrices es: si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, su suma está dada por la matriz $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$. Esta idea se puede generalizar al caso de la diferencia de matrices, así: si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, entonces su diferencia se define a través de la matriz $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$.

Observa el ejemplo sobre la suma y diferencia de dos matrices:

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & 5\sqrt{2} \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. ¿Cuál es su suma?

Nota que ambas matrices tienen orden 2 × 3, por tanto:

$$A+B=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & 2 & 5\sqrt{2}\\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right) & 2+(-1) & 5\sqrt{2}+\sqrt{2}\\ -1+1 & 0+(-1) & -3+(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\sqrt{2}\\ 0 & -1 & -4\end{bmatrix}.\ \text{Además,}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & 2 & 5\sqrt{2}\\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) & 2-(-1) & 5\sqrt{2}-\sqrt{2}\\ -1-1 & 0-(-1) & -3-(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 3 & 4\sqrt{2}\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

¿Qué propiedades verifica la adición de matrices?

Si consideramos el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, entonces, en ese conjunto se verifican las siguientes propiedades: (i) *asociatividad*, (ii) *conmutatividad*, (iii) existencia de una matriz que se comporta como *neutro aditivo*, y (iv) existencia de una *matriz opuesta* (también llamada simétrica) para cada matriz de ese conjunto.

Propiedad	En símbolos
Asociatividad	$A+(B+C)=(A+B)+C$
Conmutatividad	$A+B=B+A$
Neutro aditivo	$\exists 0, \forall A+0=0+A=A$
Matriz opuesta	$\forall A, \exists(-A): A+(-A)=0$

Observa que: $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$, pues la asociatividad se cumple en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, entonces

$$[a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}].$$

Por tanto $A+(B+C)=(A+B)+C$. Esto prueba la propiedad asociativa en el conjunto de las matrices de orden $m \times n$.

- **Calcula**:

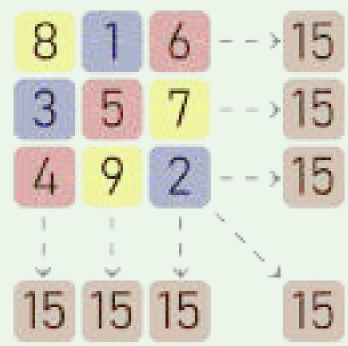
• $A+(A+A)$

• $\begin{bmatrix}-2 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 2x\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

• la opuesta de $T=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & -1 & 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

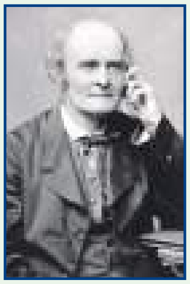
Verifica tus resultados en *GeoGebra*.

Los "cuadrados mágicos" (aquellos en los que se disponen números naturales sucesivos, de manera que la suma de los elementos de cada fila, de cada columna, y de cada diagonal, sea la misma) son, junto con los "cuadrados latinos", uno de los precursores de las matrices.
Existen referencias de cuadrados mágicos en China, hace unos 2,600 años.
Un ejemplo de cuadrado mágico de orden 3 × 3 es el que sigue:



- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices y sus tipos.

Cayley, uno de los matemáticos más importantes de la modernidad, contribuyó con el desarrollo de la Teoría de Matrices.



Fuente: Wikipedia

La multiplicación de una matriz por un escalar seguramente te recordará la “multiplicación de un escalar por un polinomio”, e incluso, la “multiplicación de un escalar por un vector”. Aunque con objetos matemáticos de distinta naturaleza, esta operación comparte las mismas propiedades.

En lo que sigue convendremos en que este número λ (“lambda”) es real o complejo, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$, o bien, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ten en cuenta que a tal escalar se le puede representar a través otra letra del alfabeto griego, o bien, con letras del nuestro. Se acostumbra que tal representación se haga en minúsculas.

En la expresión $0A=0$, el 0 del lado izquierdo de la igualdad representa al escalar 0. En cambio, el 0 del lado derecho representa a la matriz $0_{m\times n}$.
En Matemáticas esto es usual, con la intención de abreviar la escritura.

Multiplicación de una matriz por un escalar

¿Qué es un escalar? ¿Cuáles ejemplos puedes dar?

Multiplicación de un escalar por una matriz

Pongamos por caso la matriz de costos de producción $N=\begin{bmatrix} 172 & 195 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 260 & 285 \end{bmatrix}$ que viste en la lección anterior. Si se duplicara la producción de esta prenda de vestir, ello implicaría que los costos de producción se duplicarían también. Esto podría expresarse en nueva matriz como sigue:

$$2\cdot N=\begin{bmatrix} 2\cdot 172 & 2\cdot 195 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 260 & 2\cdot 285 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 244 & 390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 520 & 570 \end{bmatrix}$$

En general, dada una matriz $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ cualquiera, es posible multiplicarla por un número, de manera que éste afecte a cada uno de los elementos o entradas de la matriz, así:

$$\lambda A_{m\times n}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta operación se denomina multiplicación de un número (también llamado escalar) por una matriz. Y verifica las siguientes propiedades:

Propiedad	En símbolos
Identidad	$1A = A$
Multiplicación del 0 por una matriz	$0A = 0$
Multiplicación de un escalar cualquiera por la matriz 0	$\alpha 0 = 0$
Asociativa	$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
Distributiva	$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

Un problema interesante consiste en probar que estas propiedades son ciertas. Por ejemplo: para demostrar que $1A = A$, considera una matriz cualquiera $A_{m\times n}$ y el escalar $\lambda = 1$. Y, aplicando la definición anterior, obtendrás:

$$1A_{m\times n}=\begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} & \cdots & 1a_{1n} \\ 1a_{21} & 1a_{22} & \cdots & 1a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1a_{m1} & 1a_{m2} & \cdots & 1a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=A_{m\times n}$$

Y esto completa la prueba.

Las pruebas de $0A = 0$ y $\alpha 0 = 0$, para cualquier escalar α, como advertirás, son similares a esta. Probemos una propiedad más: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, es decir, la multiplicación por un escalar se distribuye con respecto a la adición de matrices. Para ello, considera dos matrices cualesquiera $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$. Y sea α un escalar arbitrario. Entonces, tomemos como punto de partida la expresión $\alpha(A + B)$:

$$\alpha(A+B) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \cdots & \alpha(a_{1n}+b_{1n}) \\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \cdots & \alpha(a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha(a_{m1}+b_{m1}) & \cdots & \alpha(a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}+\alpha b_{1n} \\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}+\alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1}+\alpha b_{m1} & \alpha a_{m2}+\alpha b_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}+\alpha b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B.$$

- Sean $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & 5\sqrt{2} \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcula:

- $-\frac{1}{2}(3A)$
- $-2(A + B)$.

Justifica cada paso y **compara** con el criterio de tus compaeros. Luego **verifica** los resultados en *GeoGebra*.

Frobenius es otro de los matemáticos que realizó aportes al álgebra de matrices.

Fuente:Wikipedia

(1) en primer lugar, se escribieron las matrices *A* y *B* en su forma rectangular, y luego (2) se sumaron las matrices, (3) se aplicó a definición de multiplicación de una matriz por un escalar, (4) se aplicó la propiedad distributiva de la multiplicación de un escalar con respecto a la adición de escalares, y finalmente, (5) la definición de adición de matrices y (6) la definición de multiplicación de una matriz por un escalar.

- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices y sus tipos, y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Multiplicación de matrices

¿En qué consiste una combinación lineal?

¿En cuáles casos está definida la multiplicación de matrices?

Considera ahora el caso de las matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B, condición que será necesaria para que el producto $A \cdot B$ (o simplemente AB) esté definido. Supongamos que la matriz A tiene orden $m \times n$, y que la matriz B tiene orden $n \times p$, entonces el elemento (o entrada)

$$c_{ij}$$

de la matriz producto AB, se obtiene de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

c_{ij} es una "combinación lineal", es decir, consiste en la suma parejas de elementos multiplicados entre sí. En este caso, los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ los tomamos de la fila i de la matriz A. Y los elementos $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ los tomamos de la columna j de la matriz B.

La representación rectangular de estas matrices te permitirá visualizar esta expresión:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

Por ejemplo: sean las matrices $N = \begin{bmatrix} 172 & 195 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 260 & 285 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ (que viste en la lección previa) y $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times 1}$.

Nota que como el número de columnas de N es 4, que es igual al número de filas de E. Por tal razón el producto NE existe, tiene orden 2×1, y está dado por:

$$NE = \begin{bmatrix} 172 & 195 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 260 & 285 \end{bmatrix}_{2\times 4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 172 \cdot 1 + 195 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 260 \cdot 1 + 285 \cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 367 \\ 545 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Puedes comprobar tus cálculos relacionados con la multiplicación de matrices utilizando la calculadora de GeoGebra: https://www.geogebra.org/suite

El elemento ubicado en la fila 1 y en la columna 1 de la matriz *NE* es el producto de la fila 1 de *N* por la columna 1 de *E*.
Del mismo modo, el elemento ubicado en la fila 2 de *NE* y en la columna 1, es el producto de la fila 2 de *N* por la columna 1 de *E*.

que puede interpretarse como el costo total de producción de la prenda de vestir durante este año para niños (observa la fila 1) y adultos (observa la fila 2).

Observa un ejemplo más: considera la matrices y $F=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ y $G=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 11\end{bmatrix}$. ¿Cuál es su valor? Para ello puedes proceder como antes :

$$FG=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 11\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}-1\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 0+2\cdot 3 & -1\cdot(-1)+2\cdot 11\\ 0\cdot 1+5\cdot 0 & 0\cdot 0+5\cdot 3 & 0\cdot(-1)+5\cdot 11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+0 & -0+6 & 1+22\\ 0+0 & 0+15 & 0+55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 6 & 23\\ 0 & 15 & 55\end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Ten en cuenta que aquí se multiplicó la primera fila de F por cada una de las columnas de G. Y luego se repitió este proceso, pero esta vez considerando a la segunda fila de F.

Como el número de columnas de F coincide con el número de filas de G, entonces el producto FG sí está definido.

Existen matrices que conmutan entre sí. Te invitamos a hallar un ejemplo de dos matrices que conmuten, es decir, donde: $AB = BA$.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Propiedad	En símbolos
Asociativa	$(AB)C = A(BC)$
Leyes distributivas	$A(B+C) = AB + AC$ $(B+C)A = BA + CA$
En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa	$AB \neq BA$

Mostremos un caso en el que $AB \neq BA$. Sean $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$.

Entonces: $AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 38 & -4\end{bmatrix}$. En cambio,

$BA=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 18\\ 9 & -12\end{bmatrix}$. Por tanto, $AB \neq BA$.

Comprueba estos cálculos por ti mismo, y luego, con apoyo en GeoGebra: https://www.GeoGebra.org/calculator

- **Calcula** $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y **comprueba** tus cálculos en *GeoGebra*.

- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Matriz inversa

¿Sabes cómo obtener la inversa de una matriz?

Matriz invertible: Una matriz A es *invertible* si verifica las condiciones: (i) A es cuadrada y (ii) existe otra matriz, también de orden n, simbolizada con A^{-1}, tal que:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

En este caso puede decirse que: "A tiene inversa" o que "A es no singular".

Caso contrario, se dice que "A no tiene inversa" o "A es singular".

Operaciones elementales de filas de una matriz: Existen tres operaciones, denominadas elementales, éstas son:

(1) Multiplicar una fila por un número (distinto de cero).

(2) Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

(3) Intercambiar dos filas.

Estas operaciones, seguramente te recordarán uno de los métodos que conoces para hallar la solución, si es que existe, de un Sistema de Ecuaciones Lineales.

Se hizo explícito el proceso de cálculo, cosa de que observes cómo operar con las filas.

Un método para la inversión de una matriz

Existen matrices cuadradas, como las que mostramos antes, cuyo producto es precisamente la matriz identidad. Cuando esto sucede se dice que una es la **inversa** de la otra.

Así, el proceso de "Inversión de una matriz A" consiste en hallar la matriz A^{-1}. Aquí estudiarás un método para ello, basado en *operaciones elementales de filas de una matriz*.

Por ejemplo, sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallemos, si es que existe, su inversa M^{-1}. Para ello, dispón la matriz identidad justo al lado derecho de la matriz dada; para abreviar la notación podemos escribir:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Y ahora debes aplicar las operaciones elementales de filas a ambas matrices, con la intención de que la matriz de la izquierda se transforme en la matriz Identidad. Observa:

En primer lugar, multiplica la 1ª fila por -1 (con la intención de que el primer elemento no nulo de esa fila sea 1):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Con ese elemento transformarás en 0 el o los elementos que están en la misma columna. Para ello, multiplica la 1ª fila por -2 y suma a la 2ª fila:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2(1)+2 & -2(-1)+0 & -2(-1)+0 & -2(0)+1 \end{array}\right]$$

Y esto es equivalente a escribir:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora transforma en 1 el primer elemento no nulo de la 2.ª fila. Para ello basta con multiplicar por la 2.ª fila por $\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Nota que ahora el primer elemento no nulo de cada fila en la matriz de la izquierda es 1. Además, el otro elemento de la 1.ª columna es 0. Así que solo falta transformar en 0 el otro elemento de la 2.ª columna. Para ello, suma la 2.ª fila a la 1.ª fila, así:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1+0 & -1+1 & -1+1 & 0+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Ahora, la matriz de la izquierda es la Identidad, y, la matriz de la derecha es la inversa que buscamos: $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Por tanto, se cumplirá que $MM^{-1} = I$.

Observa las propiedades de la inversa de una matriz

Propiedad	En símbolos
Inversa de la inversa	$(A^{-1})^{-1} = A$
Inversa de la traspuesta	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
Inversa del producto	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- **Calcula** la inversa de $E = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Luego **verifica** tu respuesta en *GeoGebra*.
- **Aporta** ejemplos de cada una de las propiedades de la inversa.

- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Actividad Grupal

Explorando dos matrices especiales

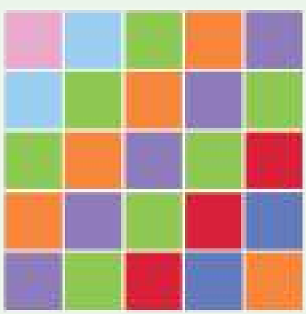
¿Qué haremos?

Construir inferencias sobre las matrices simétricas y anti-simétricas con apoyo en las operaciones estudiadas y en los recursos que ofrecen las tecnologías de cálculo en línea.

Como advertirás, "toda matriz simétrica es igual a su traspuesta". Así que, se puede escribir que:

$M = M^t$.

Un ejemplo de una matriz simétrica, ilustrándola con colores, es:



Y, en el caso de las matrices anti-simétricas, puede escribirse que:

$M^t = -M$.

¿Qué necesitamos?

Papel y acceso a *GeoGebra*.

¿Cómo nos organizamos?

Debes trabajar en equipos de tres integrantes, expresar tus ideas, tanto de forma verbal como escrita, y cooperar en todo momento con tus compañeros.

¿Cómo lo haremos?

A continuación, realizarás cálculos con la intención de construir una inferencia sobre estas matrices.

La potencia entera de una matriz simétrica

Una matriz especial es la denominada *simétrica*, esto es, una matriz en la que el elemento ubicado en la fila *i* y en la columna *j* es igual al elemento ubicado en la fila *j* y en la columna *i*. Un ejemplo de tal tipo de matriz es el que sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Algebraicamente podemos escribir que $a_{ij} = a_{ji}$.

Y otra es la que se define como *anti-simétrica*: matriz cuadrada en la que $a_{ij} = -a_{ji}$. Un ejemplo de tal matriz es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Con base en estas ideas:

Calcula los productos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ y } A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Compruébalos con apoyo en *GeoGebra*.

Observa los productos y responde: ¿qué tienen en común?

Construye una inferencia relacionada con la potencia *k-ésima* de A, esto es, de

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^k.$$

Repite estos pasos, pero esta vez considerando a la matriz B.

Puedes organizar tus ideas en una tabla como la que sigue:

Matriz	M^2	M^3	M^4	M^k
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$				
$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$				

Con apoyo en *GeoGebra*, considera otras matrices (simétricas y anti-simétricas), y chequea si tu inferencia se cumple o no para éstas. Registra tus resultados en otras filas de la tabla anterior.

¿Es anti-simétrica la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$?

Responde, además, en una matriz *anti-simétrica*: ¿puede ser distinto de cero algún elemento de la diagonal principal? Argumenta tu respuesta.

Una matriz *anti-simétrica* de orden n puede escribirse como sigue:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ -p_{12} & 0 & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{1n} & -p_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada grupo comunicará sus resultados a los demás grupos, y describirán el proceso que siguieron.

Coevaluación

Los estudiantes compararán sus resultados (tanto sus cálculos como sus inferencias), y revisarán, con apoyo de su docente, los casos con respuestas distintas; respetando e integrando el criterio de las demás personas.

Trata de visualizar los errores cometidos y de buscar soluciones a éstos.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Evaluación

- **Representa** una matriz $A_{4\times 2}$ en la que:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i+j \text{ es par}\\ -1 \text{ si } i+j \text{ es Impar}\end{cases}$$

- **Clasifica** las siguientes matrices:

$$I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}\pi & -\pi & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\pi & 1 & -\frac{1}{2}\pi\end{bmatrix},$$

$$S=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{m\times m} \text{ y}$$

$$T=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt[3]{2}\end{bmatrix}.$$

- **Considera** las matrices $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ y $B=[b_{ij}]_{m\times n}$. **Comprueba** que la traspuesta de $A+B$ es la suma de las traspuestas de A y de B. Es decir: $(A+B)^t = A^t + B^t$. Y aporta un ejemplo de esta propiedad.

- **Comprueba** la propiedad conmutativa de la adición de matrices de orden $m \times n$.

- **Considera** la matriz cero de orden 4. ¿Cuál es el valor de su potencia *n-ésima*?

- ¿Existen matrices distintas a la matriz cero, tales que su producto sea cero? De ser así, **comparte** tus ideas con tus compañeros, de lo contrario, **justifica** por qué.

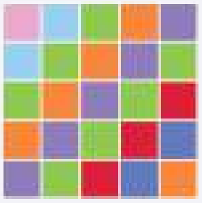
- **Da** un ejemplo de una matriz de orden 5 que sea tanto triangular superior como triangular inferior.

- ¿Es posible dar un ejemplo de una matriz que sea tanto simétrica como anti-simétrica? Si es así, **demuéstralo**, si no, **justifica** por qué.

- ¿Qué tipo de matriz es la que sigue?

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

- ¿Es la matriz que se muestra a continuación simétrica?



- **Completa** el siguiente sudoku:

1	2	4	
4		1	2
2		3	
	1		4

¿Qué tipo de matriz representa?

- **Da** otros ejemplos de cuadrados latinos.

- ¿Cuál es la traspuesta de $\begin{bmatrix}-\frac{5}{6} & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -\frac{2}{3} & \sqrt{5} & 1\end{bmatrix}$?

Utiliza herramientas tecnológicas

- **Utiliza** *GeoGebra* para calcular:
  - $\begin{bmatrix}1 & -1 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1 & 8\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}1 & -1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 0\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}9 & -11\\ -2 & 4\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1 & \sqrt[3]{3}\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 7\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}10\\ 11\\ 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{[illegible]} & \text{[illegible]}\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \text{[illegible]}\\ 0 & \text{[illegible]}\end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}^2$
  - $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}^3.$

¿Cuál o cuáles de las operaciones anteriores no están definidas? **Justifica** por qué.

Resuelve problemas

- ¿Tienen inversa las matrices que siguen? De ser así, **aplica** el método estudiado en esta unidad para hallarla.
  - $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- **Utiliza** *GeoGebra* para verificar que las matrices halladas en la actividad anterior se comportan como inversas de las matrices dadas. Nota: debes efectuar el producto MM^{-1} en cada caso.
- ¿Cuál valor sustituirías en lugar de x para que la matriz dada sea invertible?

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprueba tu propuesta aplicando las ideas y método estudiado en esta Unidad.

- ¿Existen matrices de orden 3 × 3 que no tengan inversa? Si es así, **muestra** un ejemplo de ello.
- **Demuestra**, en el caso general, las propiedades que siguen:

Propiedad	En símbolos
Conmutatividad	$A + B = B + A$
Neutro aditivo	$\exists 0, \forall A: A + 0 = 0 + A = A$
Matriz opuesta	$\forall A, \exists (-A): A + (-A) = 0$

Sugerencia: **considera** matrices cualesquiera A y B de orden $m \times n$. Y, además, **considera** la matriz cero de orden $m \times n$.

- ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? **Conversa** con tus compañeros y docente sobre ello.

Sean A y B matrices tales que el orden de A es $m \times n$, y el orden de B es $p \times q$. Entonces se verifica que:

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{p\times q}=[a_{ij}+b_{ij}]$$

$=[b_{ij}+a_{ij}]$ pues sus términos conmutan en $\mathbb{R}$ y también en $\mathbb{C}$

$$=[b_{ij}]_{p\times q}+[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=B+A.$$

- Dada la expresión:

$$2\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 5x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -30 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¿Tiene solución? ¿Tiene solución única? ¿Tiene infinitas soluciones? ¿O no tiene solución?

- **Observa** las matrices que siguen:

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 100 \end{bmatrix}$$

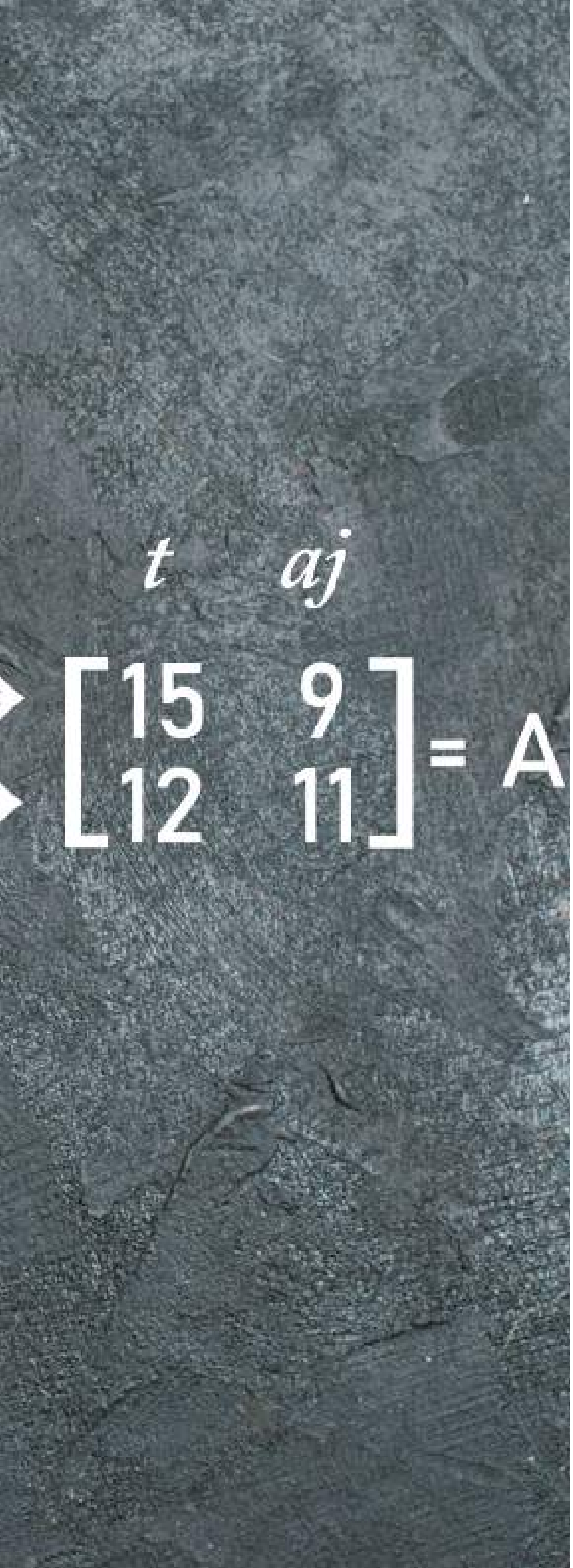
¿Qué tienen en común?

Descubre el patrón con el que están construidas.

Y **da** un ejemplo de otra matriz que guarde el mismo patrón.

Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 8

Matrices, ecuaciones y aplicaciones

Situación de aprendizaje

La imagen muestra una venta de tomates, ajíes y otros productos.

¿Es posible expresar a través de matrices el comportamiento de la venta de esos productos?

¿Cómo podemos apoyarnos en las operaciones conocidas con matrices para este fin?

Contenido

- Formas escalonadas de una matriz y ecuación matricial
- Otros ejemplos de ecuación matricial
- El caso de 2 ecuaciones y 2 incógnitas
- El caso de 3 ecuaciones y 3 incógnitas
- Ninguna o infinitas soluciones
- Actividad grupal
- Evaluación

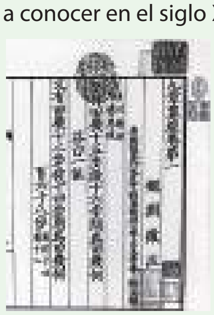
Forma escalonada de una matriz: Una matriz de orden $m \times n$ está en forma escalonada si verifica las siguientes condiciones:

- El primer elemento no nulo de cada fila es 1. Este elemento se llama "elemento principal".
- Si el elemento principal de una fila está en la columna *j*, entonces el elemento principal de las filas siguientes (si las vemos desde arriba hacia abajo) está en alguna columna *k*, con $j<k$.
- Si una o más filas contienen solo ceros, entonces esa o esas filas son las últimas.

Forma escalonada reducida de una matriz: Si una matriz escalonada, verifica, además, que:
Los elementos "sobre" y "por debajo" del elemento principal son 0, entonces se denomina matriz escalonada reducida (o bien, matriz escalón reducida por filas).

Ecuación Matricial: Es una ecuación en la que la incógnita es una matriz.

El método de **Eliminación de Gauss-Jordan** es un algoritmo que se emplea para obtener la inversa de una matriz (si es que existe), así como las soluciones (si es que éstas existen) de un sistema de ecuaciones lineales. El objetivo general de este método es transformar una matriz dada en una matriz escalona reducida.
En el libro chino Los nueve capítulos sobre el arte matemático (siglo II) ya se aplicaba el método de eliminación de Gauss-Jordan (que se dio a conocer en el siglo XVIII).



Formas escalonadas de una matriz y ecuación matricial

¿Recuerdas las operaciones elementales en una matriz?

Formas especiales de una matriz

En la unidad anterior estudiaste las operaciones elementales con las filas de una matriz. Aquí, las utilizarás para transformar una matriz en su **forma escalonada** , o bien, en su **forma escalonada reducida**. Esta transformación será de utilidad para determinar si un *Sistema de Ecuaciones Lineales* tiene solución o no y, en el caso de que la tenga, garantizar que exista o bien una única solución o infinitas soluciones. En primer lugar, es importante distinguir si una matriz es escalonada o no. Sean, por ejemplo, las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observa que la matriz A cumple las condiciones 1, 2 y 3, pero no la 4. La matriz B cumple las condiciones 1, 2, 3 y 4. En cambio, la matriz C no verifica las condiciones 2 y 4. La matriz Identidad de orden n es también un ejemplo de matriz escalonada reducida. Resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales se relaciona con "buscar" alguna de estas formas especiales. Ilustraremos esto con el ejemplo que se desarrolla a continuación.

Ejemplo: un paciente es recetado con 42 mg de ácido pantoténico y 76 mg de niacina diarios. Dos medicamentos M_1 y M_2, con los que cuenta, tienen la composición que se describe en la tabla:

Contenido (en mg)	M_1	M_2	Receta
Ácido pantoténico	10	12	42
Niacina	20	16	76

Es decir, 1 g de M_1 contiene 10 mg de ácido pantoténico y 20 mg de niacina. 1 g de M_2 contiene 12 mg de ácido pantoténico y 16 mg de niacina. Necesita saber si con estos dos medicamentos puede atender las indicaciones médicas. Este problema puede representarse como un sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneo, con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 10x + 12y = 42 \\ 20x + 16y = 76 \end{cases}$$

Ecuación matricial

Ahora bien, con base en el lenguaje matricial, se puede escribir:

$$AX = B$$

Ésta es una **ecuación matricial**, donde:

$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y, $B = \begin{bmatrix} 42 \\ 76 \end{bmatrix}$. A la matriz A se le denomina "matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones", la matriz X es la "matriz de incógnitas o variables" y la matriz B es la "matriz de términos independientes".

Si tal matriz A tiene inversa, entonces de $AX=B$, se concluye que:

$$X=A^{-1}B.$$

Esto da un método para hallar X.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 10 & 12 & 1 & 0 \\ 20 & 16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{10}f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 20 & 16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2: -20f_1 + f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{8}f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{f_1: -\frac{6}{5}f_2 + f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Y, finalmente, calcula $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Es decir, ingiriendo 3 g de M_1 y 1 g de M_2, diariamente, se atiende a la indicación médica.

- **Aporta** ejemplos de otras situaciones de la vida cotidiana que puedan modelarse con matrices. **Comparte** tu ejemplo con tu docente y compañeros.

Observa que si en la igualdad $AX = B$, multiplicamos A^{-1} a cada lado de la igualdad, entonces se tiene que:

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

Y, por tanto $IX = A^{-1}B$

Y como la matriz Identidad se comporta como neutro multiplicativo (aquí el número de columnas de I coincide con el número de filas de X)

Entonces: $X = A^{-1}B$.

Aquí indicamos las operaciones elementadas aplicadas. Por ejemplo: $\frac{1}{10}f_1$ significa "dividir entre diez la fila uno", $f2$: $-20f_1 + f_2$ significa "sustituir la fila dos por la suma de menos veinte veces la fila uno, con la fila dos", etcétera.

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es escalonada reducida. Y la matriz $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$.

- Identifica situaciones de la vida diaria que se modelan con matrices.
- Valora las múltiples aplicaciones de las matrices en la modelación y solución de diferentes áreas.

En general, dado el Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

éste puede escribirse como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes del sistema.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ es la matriz de incógnitas o variables, y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es la matriz de términos independientes.

Observa que hemos denotado a las incógnitas con las etiquetas x_1, x_2, …, x_n; pero también es posible utilizar otras etiquetas.

Esto es equivalente a decir que la adición de matrices es una "ley interna".

Algo similar sucede con la multiplicación de matrices: cuando se verifican las condiciones de la definición, la multiplicación de matrices es una operación cerrada (o bien, una ley interna).

Otros ejemplos de ecuación matricial

¿En qué consiste resolver una ecuación?

Las ecuaciones matriciales en contexto

El concepto de *ecuación* desempeña un papel importante en todas las Matemáticas; así como, en la modelación de un sinnúmero de problemas y situaciones del entorno cotidiano y de otras disciplinas. Las *ecuaciones matriciales* tienen un rol similar.

Ejemplo 1: La ecuación matricial que sigue ilustra la *temperatura promedio* en dos ciudades de la República Dominicana en dos días seguidos:

$$\begin{array}{l} ciudad\ A \rightarrow \\ ciudad\ B \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 29.1 & 28.2 \\ 27.9 & 28.7 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 30.2 & 29.9 \\ 28.8 & 29.0 \end{bmatrix}$$

La 1.ª columna corresponde a los datos del primer día de medición y la 2.ª columna a los datos del día siguiente. Como advertirás, X representa la variación de temperatura inter diaria (en ese lapso).

Aun cuando no se indique el orden de X, éste se puede deducir del contexto en el que se encuentra. Observa que, tanto el otro sumando del primer miembro de la igualdad como la expresión del segundo miembro, son matrices de orden 2 × 2. Por tanto, siendo la adición de matrices una operación cerrada , entonces X debe ser también una matriz del mismo orden.

Observa que la suma de dos matrices del mismo orden, tal como estudiaste en la unidad anterior, es una matriz de ese orden. Simbólicamente se expresa de este modo:

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Ejemplo 2: En la ecuación

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{7} \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

¿Cuál es el orden de la matriz X? Para deducir el orden de esta matriz, debes proceder como sigue.

Siendo el producto una matriz de orden 2×1 y el primero de los factores es de orden 2 × 2, entonces la matriz X debe, necesariamente, ser de orden 2 × 1; de acuerdo con la definición de multiplicación de matrices.

En este caso, el número de columnas de $\begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{7} \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ coincide con el número de filas de X. El número de columnas de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ coincide con el número de columnas de X.

Recuerda que: dadas las matrices $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$, entonces su producto es una matriz, llamémosla C, de orden $C_{m\times p}$.

Solución de una ecuación matricial

En el caso del ejemplo 1: considera la primera de las ecuaciones que mostramos antes. ¿Cómo se resuelve? Como X es de orden 2 × 2, puedes reescribir $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y, por tanto:

$$\begin{bmatrix} 29.1 & 28.2 \\ 27.9 & 28.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.1+a & 28.2+b \\ 27.9+c & 28.7+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.2 & 29.9 \\ 28.8 & 29.0 \end{bmatrix}$$

Lo que conduce, de acuerdo con la definición de igualdad de matrices, al sistema de ecuaciones $29.1 + a = 30.2$, $28.2 + b = 29.9$, $27.9 + c = 28.8$, y $28.7 + d = 29.0$. En consecuencia, $a = 1.1$, $b = 1.7$, $c = 0.9$, y $d = 0.3$. Así, $X = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$. Estos son los cambios de temperatura inter diaria.

Resolver una ecuación matricial consiste en el proceso de hallar el o los valores, si existen, de la o las incógnitas que esta contiene
Ten en cuenta que una ecuación, matricial o no, podría tener una única solución, no tener solución, o bien, tener varias o infinitas soluciones. ¿Podrías dar un ejemplo de cada caso?

En el Ejemplo 2: en la segunda ecuación, $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{7} \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{7} \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a - \frac{6}{7}b \\ a - 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Y esto conduce al sistema:

$\begin{Bmatrix} -a - \frac{6}{7}b = 1 \\ a - 3b = 0 \end{Bmatrix}$. Cuya solución es $b = -\frac{7}{27}$ y $a = -\frac{7}{+9}$. Es decir,

$X = \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{7}{27} \end{bmatrix}$. En ambos ejemplos, una ecuación matricial condujo a un sistema de ecuaciones.

El *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{Bmatrix} -a - \frac{6}{7}b = 1 \\ a - 3b = 0 \end{Bmatrix}$ puedes resolverlo con cualquiera de los métodos que conoces.

Gráfica de las ecuaciones del Ejemplo 2.

Resuelve problemas / Interpreta

- Un granjero vende tomates (t) y ajíes (aj) en dos puntos de la ciudad P_1 y P_2. La matriz que sigue reúne los datos de venta de estos productos (en kg):

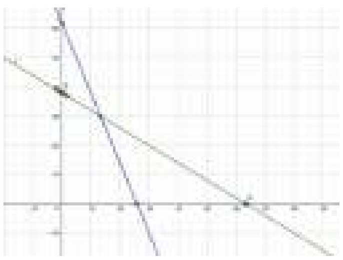
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & aj \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \rightarrow \\ P_2 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \end{array} = A.$$

La matriz $B = \begin{bmatrix} 75 \\ 26 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow t \\ \leftarrow aj \end{array}$. **Efectúa** AB e **interpreta** el resultado.

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con matrices.
- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices, sus tipos y los vincula a situaciones de la vida diaria.

En la antigüedad varias culturas ya resolvían problemas del contexto a través de ecuaciones. Ello se dio, por ejemplo, en las culturas egipcia y china, aun sin contar con las ventajas que, muchos siglos después, ofrecería la "notación algebraica".
El símbolo igual "=", tan común para nosotros hoy en día, fue propuesto por Robert Recorde a mediados del siglo XVI.

Como sabes, estas relaciones pueden representarse gráficamente como sigue:



La intersección entre ambas rectas, si es que existe, será la solución del sistema de ecuaciones.

En la Oficina Nacional de Estadística (ONE) de la República Dominicana encontrarás muchos datos con los que puedes formular problemas y modelarlos a través de matrices.

El caso de dos ecuaciones y dos incógnitas

¿Cuáles métodos de solución conoces para un Sistema de Ecuaciones Lineales

Modelando un problema sobre carbohidratos y proteínas

Considera la siguiente situación: En una dieta especial para un grupo de animales se deben suministrar dos tipos de alimentos C_1 y C_2, cuyas propiedades se describen en la siguiente tabla.

Contenido	C_1	C_2
Carbohidratos	6	10
Proteína	12	5

Todas las cantidades están expresadas en mg, que corresponden a la proporción con respecto a 1 g de alimento. El especialista ha recomendado que este grupo de animales debe ingerir diariamente 380 mg de carbohidratos y 310 mg de proteínas, con base en la mezcla de esos alimentos.

La pregunta central es: ¿cuánto alimento de C_1 y de C_2 deben suministrarse diariamente para seguir con la indicación del especialista? Este problema puede escribirse así :

$$\begin{cases} 6x + 10y = 380 \\ 12x + 5y = 310 \end{cases}$$

Donde x representa la cantidad de alimento C_1, y representa la cantidad de alimento C_2. Es decir, tal problema se puede modelar a través de un *Sistema de Ecuaciones Lineales* y este, a su vez, puede expresarse en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380 \\ 310 \end{bmatrix}$$

Vale decir, a través de una ecuación matricial, donde $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es la matriz columna que contiene las incógnitas o variables y, $B = \begin{bmatrix} 380 \\ 310 \end{bmatrix}$ es la matriz que contiene los términos independientes.

Una manera abreviada de escribir este sistema es:

$$AX = B$$

¿Cuál es su solución (si es que existe)? Para responder a esto, debes examinar si A tiene inversa:

Haciendo $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, calcula $ad - bc$ así:

$$6 \cdot 5 - 10 \cdot 12 = -90 \neq 0$$

Por tanto, A tiene inversa. Tal inversa la puedes obtener como sigue:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-90}\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{-90}(5) & \tfrac{1}{-90}(-10) \\ \tfrac{1}{-90}-12 & \tfrac{1}{-90}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{18} & \tfrac{1}{9} \\ \tfrac{2}{15} & -\tfrac{1}{15} \end{bmatrix}$$

.

Ahora, de $AX = B$, se tiene que : $X = A^{-1}B$.

Solo resta efectuar tal cálculo:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{18} & \tfrac{1}{9} \\ \tfrac{2}{15} & -\tfrac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 380 \\ 310 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{18}(380) + \tfrac{1}{9}(310) \\ \tfrac{2}{15}(380) - \tfrac{1}{15}(310) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{40}{3} \\ 30 \end{bmatrix}$$

Entonces, $x = \dfrac{40}{3}$ y $y = 30$. Es decir, a $\dfrac{40}{3}$ de C_1 se debe agregar 30 de C_2.

Modela y representa / Utiliza herramientas tecnológicas

- Luego de un tiempo, el especialista indicó que este mismo grupo de animales ingiera diariamente 450 mg de carbohidratos y 360 mg de proteínas, con base en la mezcla de C_1 y C_2.

  ¿Cuál debe ser ahora esa mezcla? **Verifica** tus cálculos en *GeoGebra*.

Recuerda que una forma abreviada de calcular la inversa de una matriz 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, en la que $ad - bc \neq 0$, es:

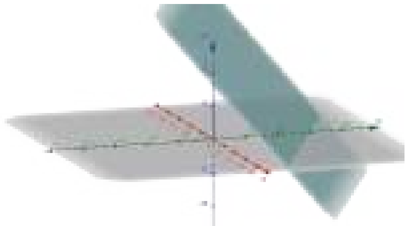
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

La resolución 0037-2021 del Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la República Dominicana respalda la protección de las especies que se encuentran en peligro de extinción o en estado de amenaza.

Muchos problemas que tienen que ver con la *protección de las especies* pueden modelarse a través de *ecuaciones matriciales*.

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para diferenciar y operar con matrices.
- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices, sus tipos y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

Con la Calculadora Gráfica de *GeoGebra* puedes representar cada una de estas ecuaciones.



El caso de tres ecuaciones y tres incógnitas

> ¿Qué método puede aplicarse para la solución de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas?

Elaboración de molduras en madera

Considera el siguiente problema: una carpintería, en la que se elaboran molduras de madera de tres tipos distintos M_1, M_2 y M_3, requiere de tres procesos para ello: *corte de la madera*, *torneado* y *lijado*. Cada moldura se culmina en el tiempo descrito en la tabla que se muestra enseguida. Además, los carpinteros disponen de 30 horas en total para el corte de la madera, 50 horas para el torneado y 40 horas para el lijado (a la semana).

¿Cuántas molduras de cada tipo se deben producir a la semana para aprovechar todas las horas de que disponen los carpinteros?

Proceso	M_1	M_2	M_3
Corte (h)	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
Torneado (h)	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
Lijado (h)	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
Tiempo total (h)	1.5	5	3.5

Toda esta información se puede escribir como : $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 30 \\ \frac{1}{2}x + 2y + \frac{5}{2}z = 50 \\ \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{2}z = 40 \end{cases}$

Con base en el lenguaje matricial sería: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Donde $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$. Como sabes, si la inversa de A existe, entonces de $AX = B$. En ese caso, se puede obtener X así: $X = A^{-1}B$. Así que, en primer lugar, debes determinar si existe A^{-1}. Una forma de hacerlo es transformando A en una matriz escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2:-\frac{1}{2}f_1+f_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3:-\frac{1}{2}f_1+f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3:-f_2+f_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{f_1:-2f_2+f_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[f_1:3f_3+f_1]{f_2:-2f_3+f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Solo resta calcular: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Es decir, si se elaboran 35 molduras M_1, 10 molduras M_2 y 5 molduras M_3 a la semana, entonces se aprovecharán todas las horas de que disponen los carpinteros.

Observa que, nuevamente, se han etiquetado las operaciones elementales aplicadas, con la intención de que sigas el proceso. Por ejemplo:

$2f_1$ significa "multiplicar por dos la primera uno".

f_2:$-\frac{1}{2}$ f_1+f_2 significa "sustituir la fila dos por: menos un medio de la fila uno sumada a la fila dos".

f_3:$-\frac{1}{2}$ f_1+f_3 significa "sustituir la fila tres por: menos un medio de la fila uno sumada a la fila tres".

Ten en cuenta que al obtener la *matriz identidad* (que hemos destacado en color azul), entonces la matriz de la derecha (marcada en rojo) es la *inversa de A*.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resuelve problemas / Utiliza herramientas tecnológicas

- **Considera** ahora que los datos de fabricación de otros tipos de molduras se expresaron en la ecuación matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 28 \\ 26 \end{bmatrix}$.

  (a) **Interpreta** cada matriz, (b) ¿tiene solución?, ¿cuál es?, (c) **interpreta** la respuesta, (d) **comprueba** tus cálculos en *GeoGebra*.

- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices, sus tipos y su inversa y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.


Fuente: Wikipedia

Wassily Leontief, economista, estadístico y profesor, ruso-estadounidense, introdujo el álgebra de Matrices al estudio de complejos problemas económicos, en especial para la estimación de los niveles de producción en un gran número de sectores productivos de una nación, así como de las relaciones económicas entre ellos. Sus trabajos le merecieron un importante Premio en memoria de Alfred Nobel.

Ninguna o infinitas soluciones

¿En cuáles casos un Sistema de Ecuaciones Lineales no tiene solución o tiene infinitas soluciones?

Un modelo sencillo de economía

La pregunta con la que abrimos esta lección es importante y permitirá complementar las ideas que has desarrollado en las lecciones anteriores.

Considera, a modo de ejemplo, una economía en la que participan tres sectores productivos: *agricultura*, *pesca* y *textiles*. Tal como se muestra en la tabla siguiente, las entradas en la tabla representan los flujos de dinero de cada sector productivo (por unidad de producción).

Sectores	Agricultura	Pesca	Textiles
Agricultura	0	1	3
Pesca	2	3	4
Textiles	3	1	2

Supongamos que las entradas están dadas en cientos de miles. (Para facilitar los cálculos hemos dividido cada entrada entre 100,000).

¿Qué significan las entradas en una fila?

Éstas indican el monto que el sector recibe (importa) de los otros sectores. ¿Qué significan las entradas en una columna? Precisamente lo que cada sector envía (exporta) a los otros sectores.

El problema consiste en calcular el costo de una unidad de producción en cada uno de los sectores (agricultura, pesca y textiles) y que se verifique que lo que recibe cada sector sea igual a su costo de producción.

Esto se conoce como "precio de equilibrio en una economía".

¿Por qué se igualó a x la primera ecuación?
Precisamente para que se cumpla la condición dada en el problema: "y que se verifique que lo que recibe cada sector sea igual a su costo de producción".
El mismo criterio se aplicó a las demás ecuaciones.

Observa que, con base en las condiciones del problema, es posible expresarlo a través del *sistema de ecuaciones lineales* que sigue:

$$\begin{cases} 1y + 3z = x \\ 2x + 3y + 4z = y \\ 3x + 1y + 2z = z \end{cases}$$

Se etiquetó con x el precio por unidad de producción del sector agricultura, con y el que corresponde al sector pesca y, con z el del sector textiles. Este sistema puede reescribirse así:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Estamos ante un Sistema de Ecuaciones Lineales *homogéneo*, que, como sabes, es equivalente a escribir:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Su solución es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2: -2f_1 + f_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3: -2f_1 + f_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3: -f_2 + f_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se anuló una fila, la ecuación que le corresponde es cierta sin importar qué valores tomen *x*, *y* y *z*. Así que las soluciones se hallan escribiendo las variables *x* e *y* en función de la variable *z*, así:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4} f_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1: \frac{1}{2} f_2 + f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $y = -\frac{5}{2}z$, y $x = \frac{1}{2}z$. Observa que la variable z puede tomar cualquier valor positivo. Hay infinitas soluciones (para cada valor positivo z habrá un "precio de equilibrio" en esa economía).

Ten en cuenta que aquí no fue necesario ampliar la matriz de coeficientes con la matriz de términos independientes, ya que, como el sistema es homogéneo, los elementos de la matriz columna *B* son todos 0 (En consecuencia, cualquier operación elemental que se aplique no afectará a los términos independientes).

Utiliza herramientas tecnológicas / Comunica

- (a) **Grafica**, con apoyo en *Geogebra*, la solución general y (b) **Aporta** ejemplos de varias soluciones particulares para este problema. **Discute** tus ideas y respuestas con tu docente y compañeros.

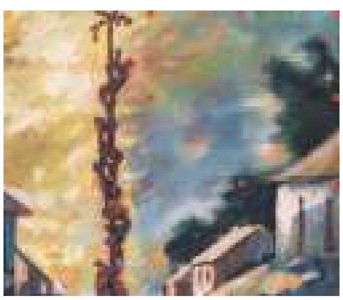
- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices, sus tipos y su inversa y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.
- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Actividad grupal

Imágenes y matrices

Las escalas de grises son de uso común en el ajuste de los parámetros de impresión y de digitalización de imágenes.

La imagen que sigue muestra una etapa del proceso de pixelado (ver la región demarcada con los cuadrados en color rojo).



Esta imagen corresponde a una obra del artista plástico de la República Dominicana: Yoryi Morel (1906-1979).

¿Qué haremos?

Estudiar un método para la digitalización de imágenes en escala de grises con apoyo en las matrices y transformarlas en otras versiones con mayor contraste.

¿Qué necesitamos?

Papel, escuadra y regla.

¿Cómo nos organizamos?

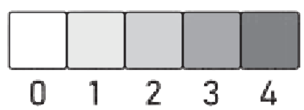
Trabaja en pareja, expresa tus ideas y coopera en todo momento con tu compañero.

¿Cómo lo haremos?

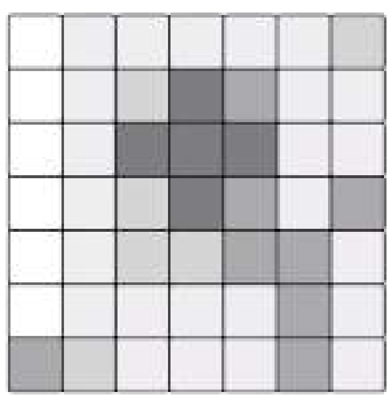
A continuación, construirán matrices con base en una imagen “pixelada” en escala de grises, con el objetivo de transformarla en una versión con mayor contraste.

Escala de grises, imágenes y matrices

Considera la siguiente escala de grises:



En esta escala, con una cámara de reconocimiento de objetos se ha representado una imagen en la cuadrícula que se muestra a continuación:



Con base en estas ideas:

Deduzcan la matriz $M_{7\times 7}$ que se corresponde con esta cuadrícula. Tengan en cuenta que las entradas de tal matriz son los números 0, 1, 2, 3 y 4.

Como advertirán, esta matriz puede transformarse con la intención de ilustrar ciertos efectos en la imagen de la cuadrícula. Por ejemplo, como saben, el "**negativo**" de una fotografía (y en general, de una imagen) se obtiene invirtiendo oscuridad e iluminación. Con base en esta idea, hallen la matriz del negativo de la imagen dada.

También es posible aumentar el "**contraste**", ¿cómo lograrlo? Una manera es cambiar el 1 en 0 y el 3 en 4. Escriban la matriz que se obtiene al aumentar el contraste.

Consideren la matriz siguiente:

$$T_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Intenten deducir cuál es la imagen que se muestra, sin necesidad de representar su cuadrícula en escala de grises.

Ahora, construyan su cuadrícula en escala de grises y comparen con la respuesta que dieron antes.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo presentará sus resultados a los demás equipos y describirá el proceso que siguieron.

Coevaluación

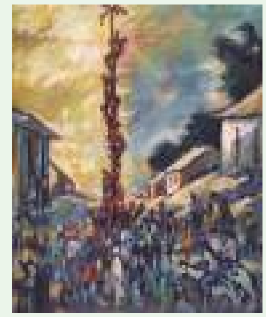
Los estudiantes compararán sus respuestas (tanto la matriz $M_{7\times 7}$ como las matrices con el **negativo** de la imagen y la de **contraste**) y revisarán, con apoyo de su docente, los casos con respuestas diferentes.

Identifiquen los errores cometidos y busquen sus soluciones.

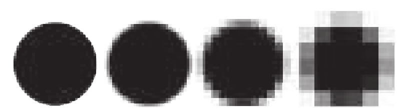
Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

La imagen que sigue es un ejemplo del proceso anterior (basada en una obra plástica de *Yoryi Morel*).



Disminuir la calidad de una imagen puede asociarse con algunos de los procesos que se han descrito aquí, así como con transformar la matriz inicial en una con menor cantidad de filas y de columnas.



- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con matrices, sus tipos y su inversa y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.
- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Evaluación

- Sea el sistema

$$\begin{cases} -x+y+-z=3 \\ x-2y+z=7 \\ 2x-y+2z=-1 \end{cases}$$

Escríbelo como una ecuación matricial.

- ¿Es la siguiente matriz escalonada o no? **Justicia** tu respuesta.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2z \end{bmatrix}.$$

- Sea $G=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ¿Es posible transformarla en una matriz escalonada? De ser afirmativa tu respuesta, **muestra** el proceso, de lo contrario, justifica porqué no.

- ¿Es la matriz siguiente escalonada reducida? **Justifica** tu respuesta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

- (a) **Da** un ejemplo de una matriz 2×2 que no tenga inversa, (b) de una matriz 2×2 que sí tenga inversa.

- ¿Tiene inversa una matriz de orden 2×1?

- Si al reducir por filas una matriz de coeficientes de un Sistema de Ecuaciones Lineales homogéneo, obtienes la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Es este sistema consistente o inconsistente?

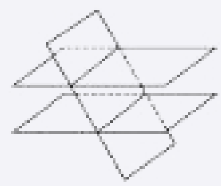
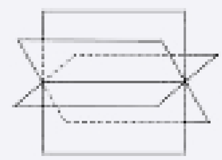
De ser consistente, ¿Cuál o cuáles son sus soluciones?

- **Considera** el sistema de ecuaciones lineales homogéneo: $AX = 0$, donde A es la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

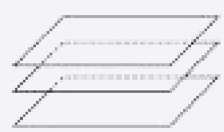
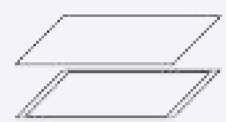
¿Es este sistema consistente o inconsistente? Argumenta tu respuesta y discute con tu docente y compañeros.

- **Considera** los casos que se ilustran:

Estos corresponden a la gráfica, en el Espacio, de tres planos. ¿Tienen solución o no los sistemas de ecuaciones asociados? Discute tus ideas con tu docente y compañeros.

Repite la actividad anterior para los casos:

- ¿Puede un sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas tener dos o más soluciones? Justifica tu respuesta. De ser posible, **aporta** una idea gráfica.

- Sea el sistema: $A_{2\times 2}X_{2\times 1} = B_{2\times 1}$. Si la matriz $A_{2\times 2}$ no tiene inversa, ¿qué conclusiones puede dar con respecto al sistema de ecuaciones asociado?

■ **Aporta** un ejemplo de un sistema de ecuaciones que no tenga solución. **Apóyate** en *Geogebra* para construir las ecuaciones y para su interpretación gráfica.

Utiliza herramientas tecnológicas

■ **Resuelve** cada sistema y utiliza Geogebra para representar las ecuaciones de cada sistema:

- $\begin{cases} 8x + 14y = 4 \\ 18x - 4y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 12x + 15y = 21 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + \frac{7}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ 4x - 2y + 6z = 2 \\ 2x + 8y - 4z = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + z = 1 \\ -x - y - z = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 4y = -1 \end{cases}$

Resuelve problemas

■ Se tiene en venta los productos de una cosecha (h_1 y h_2) en dos establecimientos (e_1 y e_2). La matriz que sigue compila los datos de venta de éstos (en kg):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 19 & 21 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

Considera la matriz $B = \begin{bmatrix} 82 \\ 32 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{array}$. Efectúa AB e interpreta el resultado.

■ Con base en la indicación del veterinario, un grupo de animales debe consumir dos tipos de compuestos alimenticios *A1* y *A2*, los cuales contienen (por cada 1 g de alimento):

Contenido (en mg)	A_1	A_2
carbohidratos	10	12
grasas	16	8

■ Ingerir diariamente 54 mg de carbohidratos y 64 mg de grasas, con base en la mezcla de ambos compuestos. ¿Cuánto alimento de A_1 y de A_2 deben suministrarse diariamente para seguir con la indicación del veterinario?

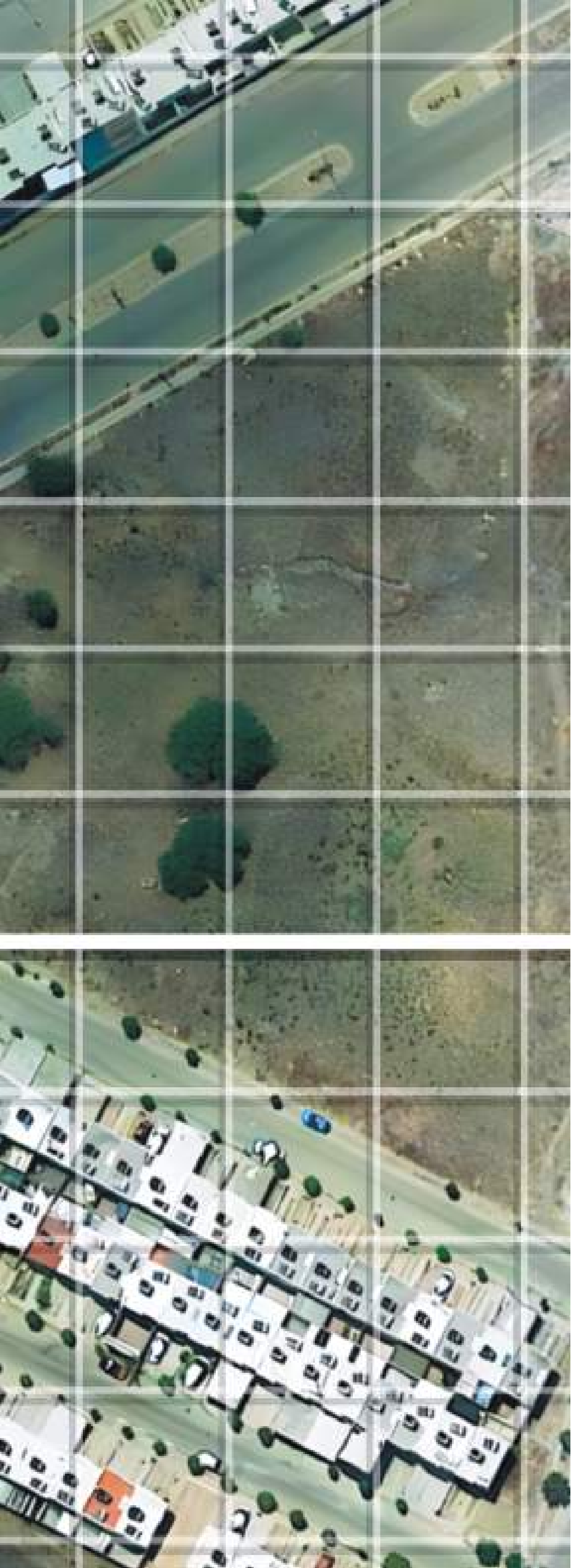
■ Se dispone de tres tipos de alimentos (*A*, *B* y *C*) que contienen por cada 100 g lo siguiente, y además, pueden mezclarse:

Contenido (en mg)	A	B	C
nutriente 1	15	10	18
nutriente 2	10	6	5
nutriente 3	6	12	14

¿Cuánto es necesario mezclar de cada alimento para aportar una dieta que contenga 94 mg del nutriente 1, 41 mg del nutriente 2, y 66 mg del nutriente 3?

Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 9

Determinantes y aplicaciones

Situación de aprendizaje

Un terreno con forma triangular será destinado a la construcción de una obra civil, para lo cual se requiere calcular su área.

¿Qué métodos conoces para hallarla?

Intenta calcular el área sin utilizar la conocida fórmula: $\frac{1}{2}bh$. ¿Es ello posible?

Contenido

- Determinantes de matrices 2 x 2 y 3 x 3
- Área de un triángulo
- Los determinantes de orden n
- El crecimiento de una población de insectos
- La inversa de una matriz
- Actividad grupal
- Evaluación

Es común denotar el determinante de una matriz *A* con el símbolo *det*(*A*), o bien con |*A*|.

Como sabes, la doble barra también se utiliza para indicar el valor absoluto de un número; sin embargo, no habrá lugar a confusión, pues el contexto permitirá hacer la interpretación correcta.

Los determinantes de matrices de orden 2 × 2 se denominan, simplemente, "determinantes de orden 2".

Los determinantes de matrices de orden 3 × 3, se denominan "determinantes de orden 3", y así sucesivamente.

Determinantes de matrices 2 × 2 y 3 × 3

¿Recuerdas qué es una matriz cuadrada?

Determinantes de orden 2 y de orden 3

A una matriz cuadrada se le puede asignar un número llamado *determinante*, el cual permite resolver sistemas de ecuaciones lineales e incluso, concluir si una matriz dada tiene o no inversa. Es decir, con la idea de determinante dispondrás de nuevos y alternativos métodos, distintos a los que ya estudiaste en las unidades anteriores.

Verás, en primer lugar, los determinantes de matrices de orden 2 × 2 y 3 × 3 y, posteriormente, el caso general; es decir, el de matrices de orden $n \times n$.

Dada una matriz A cualquiera, de orden 2 × 2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $det(A)$ se obtiene calculando el producto de los elementos de la diagonal principal y restando el producto de los elementos de la diagonal secundaria, así:

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Observa que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ refiere a la matriz de orden 2×2, en cambio, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ denota al determinante de esa matriz. La diferencia se encuentra en el uso de corchetes o de barras.

Por ejemplo, para la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$det(M) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5$$

Ahora, si la matriz dada es de orden 3 × 3, puedes calcular $det(A)$ aplicando la **regla de Sarrus**. Esto es, dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Debes: (i) escribir las dos primeras filas de la matriz A, debajo de ésta. Así, tendrás un arreglo de 5 filas y 3 columnas. (ii) trazar las diagonales que se muestran en el gráfico.

Pierre Sarrus (1798-1861) fue un destacado matemático francés, profesor en la Universidad de Estrasburgo. Publicó muchas obras relacionadas con la solución de sistemas de ecuaciones de varias incógnitas, pero también hizo contribuciones importantes a la física del movimiento.
Muchas de sus publicaciones se encuentran en la revista *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.


JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

$$
\begin{array}{rl}
A = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 & \;\; a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\
 & \;\; a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}
\end{array}
$$

Finalmente, (iii) calcular los productos de las diagonales destacadas, tanto en azul como en rojo (ten en cuenta que debes multiplicar por –1 los productos detacados en rojo), y efectuar las adiciones y sustracciones que correspondan. Ahora, puedes escribir:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Por ejemplo: considera la matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es el valor de *det*(*S*)? De acuerdo con la **regla de Sarrus**:

$$det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 0(-5)(-2) - 3 \cdot 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 \cdot 1 - 0(-5)0$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

En esta misma Unidad verás qué significado tiene el hecho de que la matriz de coeficientes de un *sistema de ecuaciones lineales* tenga como determinante al cero, o bien, un número distinto de cero.

- (a) **Calcula** los determinantes de: $T = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ y de $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. (b) ¿Es posible calcular el determinante de [1 -1]? **Argumenta** tu respuesta y discútela con tus compañeros y docente.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue uno de los matemáticos que contribuyó enormemente con la teoría de los determinantes, así como en muchas otras áreas de esta disciplina. Su vasta obra alcanzó 789 publicaciones.

Fuente: Wikipedia

El arreglo 5 × 3, que se obtiene luego de agregar las filas 1 y 2 de la matriz *S* debajo de ésta, es el que sigue:

$$
\begin{array}{rrr}
1 & -5 & 3 \\
0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & -5 & 3 \\
0 & 1 & -2
\end{array}
$$

A partir de éste, es muy fácil escribir cada uno de los productos y sumandos que contempla el cálculo del *det*(*S*).

- Emplea el lenguaje matemático adecuado para calcular determinantes de matrices de orden 2×2 y, utiliza la regla de Sarrus para obtener el determinante de matrices de orden 3×3.

El área de un triángulo

Para el diseño de grandes obras la asignación de coordenadas a los puntos de una región triangular y el concepto de *determinante*, pueden ser de mucha utilidad. En la imagen se muestra "La justicia", una obra del artista dominicano **Ramón Oviedo**, expuesta en el Palacio de la Suprema Corte de Justicia.

Fuente: artisticord.com

¿Qué métodos conoces para calcular el área de un triángulo y de un paralelogramo

El área de un triángulo con determinantes

Ejemplo: en el diseño de un gran *mural* se ha trazado una cuadrícula y se han asignado coordenadas a los puntos de intersección de ésta, tal como en un sistema de coordenadas cartesiano. La coordenada x de un punto representa la distancia en metros desde el extremo izquierdo del mural, y la coordenada y representa la distancia desde la base del mural.

En la obra destaca un triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(2,1)$ y $C(4,3)$. Si se necesita calcular la cantidad de material para cubrir esta superficie, esto conduce a responder la pregunta: ¿cuál es el área del ΔABC? Aquí verás un método para calcular esta área con apoyo en la idea de *determinante*. En este caso:

$$\text{área } \Delta ABC = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el signo se escoge de manera que el resultado sea positivo. Observa que las coordenadas x de cada punto se han dispuesto en la primera columna, las coordenadas y están en la segunda columna, y, la tercera columna consta de unos. Así:

$$\text{área } \Delta ABC = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{2}(1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 1) = \pm 2$$

Entonces, *área* $\Delta ABC = 2 \text{ m}^2$.

En general, si un triángulo tiene por vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, entonces su área está dada por el valor absoluto de la expresión:

$$\text{área } \Delta ABC = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La forma convencional de hallar el área del ΔABC es

área$\Delta ABC = \frac{1}{2}bh$.

Tomando como base la medida del segmento $\overline{AB}$ y como altura la medida del segmento $\overline{BC}$, conociendo que

$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

podemos escribir:

$d(A,B) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$

y

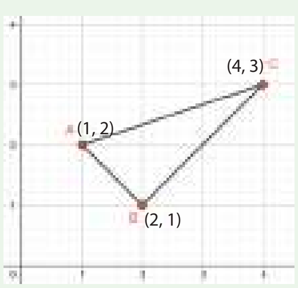
$d(B,C) = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$

Entonces:

área$\Delta ABC=$

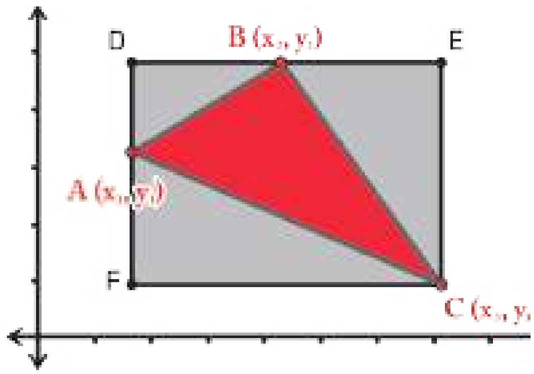
$\frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = \frac{1}{2}4 = 2$

Precisamente el mismo resultado que obtuvimos al calcular el determinante $\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.



¿Cómo puedes comprobar esta fórmula?

Considera el triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. Observa que estos puntos determinan el rectángulo $DECF$ que se muestra en el gráfico.



Ya con esto puedes deducir que las coordenadas de sus vértices son: $D(x_1, y_2)$, $E(x_3, y_2)$, $F(x_1, y_3)$, y el mismo C.

El plan es calcular el área del ΔABC como la diferencia del área del rectángulo $DECF$ y la de los triángulos destacados en gris.

En efecto, como sabes el *área* $\square DECF$:

$$\square DECF = (x_3 - x_1)(y_2 - y_3) = x_3\,y_2 - x_3\,y_3 - x_1\,y_2 + x_1\,y_3\,.$$

Por su parte, el área de cada triángulo marcado en gris es:

$$\text{área } \Delta FAC = \frac{1}{2}\,(x_3 - x_1)(y_1 - y_3)$$

$$\text{área } \Delta ADB = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\text{área } \Delta BEC = \frac{1}{2}\,(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$$

Entonces, considerando el valor absoluto:

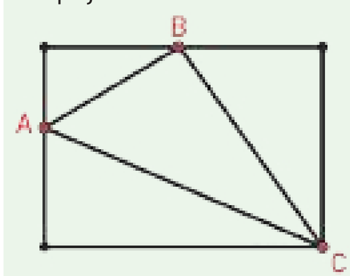
$$\text{área } \Delta ABC = \text{área } \square DECF - \text{área } \Delta FAC - \text{área} \Delta ADB - \text{área } \Delta BEC =$$

$$\tfrac{1}{2}\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_3 + x_3\,y_1 - x_3\,y_2 - x_2\,y_1 - x_1\,y_3) = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

- ¿Cuál es el área de un triángulo de vértices $A(3, 5)$, $B(1, 1)$ y $C(6, 2)$?

Como puedes observar, la idea de determinante proporciona un método alternativo y potente para calcular el área de triángulos, conocidas las coordenadas de sus vértices.

La idea de trazar el $\square$*DECF* muestra cómo una idea geométrica sencilla puede servir de base para demostrar una propiedad más compleja.



- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con determinantes y los vincula a situaciones de la vida diaria.

Los determinantes de orden *n*

Si en la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

eliges el elemento a_{22}, entonces:

(1) el menor de ese elemento es

$$M_{22}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=5-1=4$$

(2) y su cofactor es

$A_{22b}= (-1)^{2+2} M_{23} = 1 \cdot 4 = 4.$

En esta matriz se tendrán nueve menores y nueve cofactores.
En el caso de una matriz cuadrada de orden *n*, se tendrán $n \times n$ menores y $n \times n$ cofactores.

¿Cómo se denota una matriz cualquiera *A* de orden $n \times n$?

Menor, cofactor del elemento a_{ij} y determinante de orden *n*

En una matriz A $n \times n$ se distinguen los siguientes términos: (1) el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz, que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A. Y (2) el **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Observa que el "cofactor" A_{ij} del elemento a_{ij} es el "menor" de ese elemento afectado de un signo, y este signo estará dado por la expresión $(-1)^{i+j}$. Si la suma de las coordenadas de a_{ij} es par, entonces el cofactor de ese elemento conserva su signo. En cambio, si tal suma es impar, entonces el signo del cofactor cambiará.

Estos términos serán necesarios para definir el determinante de una matriz de orden $n \times n$.

Ejemplo 1: considera la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

Toma por caso el elemento a_{13} (aunque puedes seleccionar cualquier otro). Por tanto, el **menor** M_{13} es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila 1 y la columna 3 de A (las cuales se han destacado en color rojo). Con esto el cálculo se reduce a un determinante de orden 2:

$$M_{13}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 7\end{vmatrix}=0\cdot 7-(-1)(-1)=-1$$

El cofactor A_{ij} de a_{13} es:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 (-1) = 1(-1) = -1$$

Siendo $(-1)^{1+3}$ una potencia par, se conserva el signo de M_{13}.

Ya están dadas las condiciones para definir el *determinante de una matriz* $n \times n$. Tomando como referencia la fila 1 de la matriz A, $det(A)$ está dada por la expresión:

El desarrollo o expansión de un determinante por cofactores se debe al matemático y físico Pierre-Simón Laplace (1749 -1827).

Fuente: Wikipedia

$$det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Así, el determinante de A resulta de multiplicar cada elemento de la fila 1 por su cofactor correspondiente y luego sumar estos productos.

En este caso, se dice que $det(A)$ o $|A|$ o está expandido con respecto a la primera fila. En realidad, se obtendrá el mismo resultado si se expande con respecto a cualquiera otra de las filas e incluso, cualquier columna (esta es la **Propiedad 1** listada al margen). Como advertirás, conviene seleccionar la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros, con la intención de reducir los cálculos.

Ejemplo 2: dada la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ten presente que la 3.ª fila y la 2 ª columna tienen dos ceros. Escojamos la tercera fila, es decir, expandiremos $det(B)$ con respecto a esa fila:

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0B_{31} + 0B_{32} + \frac{1}{3}B_{33}$$

$$= 0(-1)^{3+1}M_{31} + 0(-1)^{3+2}M_{32} + \frac{1}{3}(-1)^{3+3}M_{33}$$

$$= \frac{1}{3}(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

- **Obtén** el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Sin hacer cálculos, ¿cuál es el valor de $det(B^t)$?
- **Conversa** sobre tus resultados y procedimiento con tu docente y compañeros.

Entre las propiedades de los determinantes se encuentran (aquí A tiene orden n):

Propiedad 1: El $det(A)$ es independiente de la fila o columna por la cual se expanda.

Propiedad 2: Si se intercambian dos filas (o dos columnas) en A, entonces $det(A)$ cambia de signo, pero no varía su valor absoluto.

Propiedad 3: Si una fila (o columna) de A de multiplica por un número, entonces $det(A)$ queda multiplicado por ese número.

Propiedad 4: $det(A)$ no se altera si sumamos a una fila (o columna) un múltiplo de otra fila (o columna).

Propiedad 5: $det(A) = det(A^t)$.

Propiedad 6: $det(A) = 0$ en los siguientes casos: (i) si A tiene dos filas o columnas iguales, (ii) si los elementos de una fila o columna son todos ceros, o bien, (iii) si los elementos de una fila o columna son combinación lineal de las demás.

Propiedad 7: $det(AB) = det(A)det(B)$, siempre que AB esté definido.

Si expandes el determinante de B con respecto a otra fila o columna, obtendrás el mismo resultado; es decir, el determinante no varía. Lo cual te dejamos como ejercicio. Por ejemplo, con respecto a la segunda columna:

$$det\,B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}.$$

- Aplica razonamientos matemáticos correctos para obtener el determinante de matrices de orden 3 a través de su expansión con respecto a una fila o a una columna.
- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Regla de Cramer: dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya ecuación matricial es $AX = B$; si $|A| \neq 0$, entonces sus soluciones tienen la forma:

$$x_1 = \frac{|A_{x1}|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|Ax_2|}{|A|}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{|A_{xn}|}{|A|}$$

donde A_{xj} es la matriz que resulta de reemplazar la columna j de A por los elementos de B.

Criterio de inversibilidad: una matriz cuadrada M tiene inversa si, y solo si, $|M| \neq 0$.
La aplicación de la regla de Cramer dependerá de que este criterio se cumpla.

El gráfico de dispersión que corresponde a los datos recogidos es:

El crecimiento de una población de insectos

¿Cuáles condiciones deben cumplirse para que una matriz tenga inversa?
¿Qué métodos conoces para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

El crecimiento de una población de insectos y la Regla de Cramer

Ejemplo: supongamos que se han tomado datos sobre cierta población de **insectos** en un ambiente de laboratorio, los cuales se han expresado a través de los puntos de coordenadas: $A(1, 4)$, $B(2, 9)$ y $C(3, 16)$. La coordenada x representa el tiempo de medición (en semanas), y la coordenada y indica el número de insectos en esa población. Un gráfico de dispersión da la idea al investigador de que esta población crece en la forma en que lo hace una de las ramas de una parábola. ¿Cuál es la función que describe ese crecimiento?

Como sabes, una función cuadrática puede escribirse como:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

En otras palabras, el problema consiste en hallar los coeficientes a_0, a_1 y a_2.

Observa que si sustituyes las coordenadas de $A(1, 4)$, $B(2, 9)$ y $C(3, 16)$ en $a_0+a_1x+a_2x^2$, tendrás el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 9 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 16 \end{cases}$$

La ecuación matricial $AX = B$ que corresponde a este sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Cuya solución puedes hallar de varias maneras. Aquí se seguirá el método conocido como **regla de Cramer**. Observa que el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, además, $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 1A_{12} + 1A_{13}$$

$$= (-1)^{1+1}M_{11} + (-1)^{1+2}M_{12} + (-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 + 1 = 2 \neq 0$$

Ahora, en la matriz de coeficientes A, reemplazas la primera columna con los elementos de B, con ello obtienes la matriz A_{a0}. Para ello, reemplazas la segunda columna para obtener la matriz A_{a1}. Luego, reemplazas también la tercera columna para obtener la matriz A_{a2}, y calculas :

$$|A_{a0}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \\ 16 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_{a1}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \\ 1 & 16 & 9 \end{vmatrix} = 4 \text{ y } |A_{a2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto, aplicando la *regla de Cramer* se obtiene:

$$a_0 = \frac{|A_{a0}|}{|A|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_1 = \frac{|A_{a1}|}{|A|} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_2 = \frac{|A_{a2}|}{|A|} = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces, la función que describe el crecimiento de esa población de insectos durante esas tres semanas de medición es:

$$y = 1 + 2x + x^2$$

La *regla de Cramer* será una alternativa a la *eliminación de Gauss*, siempre que A sea cuadrada y su determinante sea distinto de cero.

- En una comunidad el **consumo de energía eléctrica** ha crecido, tal como uno de brazos de la parábola. Partiendo de las mediciones: $P(1, 4)$, $Q(2, 10)$ y $R(3, 18)$, donde las coordenadas x y y son el mes de medición y el consumo en kWh (respectivamente), **encuentra** la función que describe este crecimiento (utilizando la *regla de Cramer*). **Comprueba** tus cálculos utilizando herramientas tecnológicas.

La *dinámica de poblaciones*, vale decir, el estudio de la variación del número de individuos en una población en cierto período de tiempo y bajo ciertas condiciones, es un área muy interesante en la que intervienen las matemáticas, la biología, la botánica y otras ciencias. La conservación de especies es uno de sus temas centrales; lo cual se asocia con la ciudadanía responsable y la ética. En estos estudios, el cálculo de **determinantes** resulta una tarea básica.

En la imagen que sigue, se muestra una de las especies de tortugas que anidan en la República Dominicana.

Comprueba estos cálculos con apoyo de herramientas tecnológicas, como *GeoGebra*)

- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a la *regla de Cramer* y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

La inversa de una matriz

Adjunta de una matriz: Sea la matriz

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Y sea

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyos elementos son los cofactores de *A*.

Entonces la matriz adjunta de *A* está dada por la traspuesta de su matriz de cofactores, en símbolos:

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Como sabes, un método para hallar la inversa de *A* consiste en aplicar las operaciones elementales de filas al siguiente arreglo, con la intención de transformar la matriz *A* en una matriz escalón reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 9 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puedes comprobar estos cálculos con apoyo de herramientas tecnológicas, como GeoGebra):

https://www.geogebra.org/

¿Cuál método conoces para calcular la inversa de una matriz?

El determinante como prueba de que una matriz tiene o no inversa

Como has visto, el *criterio de inversibilidad* permite concluir si una matriz dada tiene o no inversa. Por ejemplo, considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta se corresponde con la cantidad de tres vitaminas hidrosolubles: *niacina*, *riboflavina* y *tiamina* (en mg por cada gramo) en tres compuestos alimenticios suplementarios S_1, S_2 y S_3.

Vitaminas/Alimentos	S_1	S_2	S_3
niacina	8	9	10
riboflavina	2	2	1
tiamina	1	2	3

Expandiendo el determinante de *A* con respecto a la 1.ª fila:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8A_{11} + 9A_{12} + 10A_{13}$$

$$= 8(-1)^{1+1}A_{11} + 9(-1)^{1+2}A_{12} + 10(-1)^{1+3}A_{13}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Como $|A| \neq 0$, entonces *A* tiene inversa .

Ahora bien, esta inversa puede hallarse ampliando la matriz *A* con la matriz $I_{3\times3}$, y transformando *A* en una matriz escalón reducida por filas, tal como estudiaste en la Unidad 7; o bien, a través del proceso que te mostramos a continuación.

Para ello, es necesario apoyarnos en la **adjunta de una matriz**, es decir, en la traspuesta de la matriz de cofactores de *A*.

Cálculo de A^{-1} con base en det(A) y en la *adj*(A)

Para hallar la *adj*(A), calcula primero todos sus cofactores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{ij} = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{ij} = -\begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{ij} = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Del mismo modo puedes deducir que: A_{21} = -7, A_{22} = 14, A_{23} = -7, A_{31} = -11, A_{32} = 12 y A_{33} = -2.

Por tanto, la matriz de cofactores de A es: $C = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -7 & 14 & -7 \\ -11 & 12 & -2 \end{bmatrix}$

Ya con esto, puedes escribir:

$$adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -7 & 14 & -7 \\ -11 & 12 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -11 \\ -5 & 14 & 12 \\ 2 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora, apoyándote en la propiedad que vincula la inversa de una matriz con el determinante y su adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -7 & -11 \\ -5 & 14 & 12 \\ 2 & -7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 & -\frac{11}{7} \\ -\frac{5}{7} & 2 & \frac{12}{7} \\ \frac{2}{7} & -1 & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

- **Calcula** la inversa de $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, utilizando la propiedad anterior.

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, la inversa de A puede escribirse como la adjunta de A multiplicada por el inverso del determinante de A. En símbolos:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

Esta propiedad muestra un método alternativo para calcular, en los casos en que $det(A) \neq 0$, la inversa de una matriz cuadrada A.

Conociendo ya que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 & -\frac{11}{7} \\ -\frac{5}{7} & 2 & \frac{12}{7} \\ \frac{2}{7} & -1 & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Es posible resolver el sistema AX = B, donde: $A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es la matriz con las concentraciones de vitaminas hidrosolubles en tres tipos de compuestos alimenticios suplementarios, X es la matriz columna de la incógnitas y B es la matriz columna con los términos independientes. La matriz B podría contener, por ejemplo, las cantidades recetadas por un médico (en mg).

- Resuelve problemas propios de la matemática referidos al cálculo de la inversa de una matriz y los vincula a situaciones de la vida diaria.
- Usa menores y cofactores de una matriz cuadrada para calcular la adjunta de una matriz.
- Utiliza la matriz adjunta y el determinante de una matriz cuadrada para calcular la inversa de la matriz.
- Utiliza el determinante para probar la existencia y el cálculo de la inversa de una matriz.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

Actividad grupal

El rango de una matriz

El **rango** de una matriz *A*, *m*×*n*, se puede definir como el número de filas no nulas que tiene la matriz escalón, reducida por filas que es equivalente a *A*.
Se suele simbolizar con *rg*(*A*).

Para calcularlo: basta con aplicar operaciones elementales de filas para trasformar la matriz *A* en su forma escalonada, y se cuentan el número de filas no nulas en esta.

Por ejemplo: dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que las siguientes matrices son equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Como la forma escalonada de *A* no tiene filas nulas, entonces, *rg*(*A*) = 2.

El rango de una matriz permite conocer si este sistema tiene soluciones. De ser así, nos preguntamos cuántas tiene, o bien, si no tiene soluciones, tal como se plantea en la siguiente propiedad:

Teorema de Rouché-Frobenius: Dado el sistema de ecuaciones lineales *AX* = *B*, y sea *A´* la matriz ampliada de este sistema (es decir, la que se obtiene al agregar la columna de los términos independientes).

AX = *B* tiene solución si y solo si *rg*(*A*) = *rg*(*A´*).

Por ejemplo: si $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Entonces:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Entonces, *rg*(*A´*) = 2.

Y como *rg*(*A*) = rg(A´), entonces el sistema *AX*=*B* tiene solución.

¿Qué haremos?

Calcular el **rango** de una matriz cualquiera, cuadrada o no, con apoyo en el concepto de determinante.

¿Qué necesitamos?

Papel y acceso a *GeoGebra*.

¿Cómo nos organizamos?

Trabajar en parejas, expresando sus ideas y cooperando en todo momento con el compañero.

¿Cómo lo haremos?

Considera la matriz 3 × 4:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 32 \end{bmatrix}$$

En ella, así como en cualquier otra matriz, es posible elegir filas y columnas que formen matrices cuadradas de orden 3 × 3 o bien 2 × 2, tal como en los siguientes ejemplos:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 32 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 32 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 32 \end{bmatrix}$$

Observa que no es necesario que las filas y columnas elegidas sean contiguas. Con lo cual se formarían, entre otras, las matrices

$$T_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, T_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & 12 \\ 1 & 5 & 32 \end{bmatrix}, T_3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ etcétera.}$$

Este tipo de matrices se denominan submatrices de *T*. Serán necesarias para calcular *rg*(*T*), con un método distinto al de reducir *T* a su forma escalonada y contar sus filas no nulas.

Con esta idea como base:

Escriban todas las submatrices de T de orden 3.

Calculen el determinante de estas submatrices. Aquí pueden apoyarse en *GeoGebra*.

Si el determinante de alguna de estas submatrices es distinto de cero, entonces $rg(T) = 3$,y el proceso se detendría aquí .

Pero si no hallan ninguna submatriz de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, entonces deben escribir todas las submatrices de orden 2, y chequear si alguno de sus determinantes es distinto de cero. Si lo hallan, entonces $rg(T) = 2$.

Si no hallan ninguna submatriz de orden 2, cuyo determinante sea distinto de cero, entonces el $rg(T) = 1$.

¿Cuál es entonces el valor de $rg(T)$?

Como una actividad adicional, discute con tu compañero de equipo si existe o no alguna matriz cuyo rango sea cero. Si ello es posible, muestra un ejemplo de ello; y si no es posible, explica por qué.

En resumen, el orden de la mayor submatriz cuadrada en la que su determinante sea distinto de cero, es $rg(T)$.

Ello muestra, un método alternativo para el cálculo del rango de una matriz.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo presentará sus resultados a los demás equipos de la clase y describirá el proceso seguido.

Como advertirás, el rango de una matriz se asocia con los conceptos de independencia o dependencia lineal de las filas de una matriz.

Por ejemplo, si una matriz A, $m \times n$, verifica que $rg(A) = m$, ello significa que sus m filas son linealmente independientes.
Si, por ejemplo, su rango fuese 2, entonces solo dos de sus filas son *linealmente independientes*. El resto de las filas serían *combinación lineal* de estas.

Coevaluación

Los estudiantes compararán sus respuestas (tanto las listas de las submatrices de orden 3, las de orden 2, como el valor de $rg(T)$), y revisarán los cálculos, con apoyo de su docente, en los casos con respuestas diferentes.

Identifiquen los errores cometidos y busquen sus soluciones.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

- Resuelve problemas propios de la matemática referidos a las operaciones con determinantes.
- Calcula el rango de una matriz usando determinantes.
- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

Evaluación

- ¿Es posible calcular el determinante de la siguiente matriz?

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De ser así, ¿cuál es su valor? De no ser posible, **explica** por qué.

- **Considera** el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = -1 \\ 4x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

Apóyate en el concepto de determinante para hallar su solución, si es que la tiene.

- **Da** un ejemplo, si es que ello es posible, de una matriz cuyo determinante sea –1.

- **Considera** las matrices que se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el determinante de cada una?¿Qué propiedades sirven de argumento a tus respuestas?

- **Apóyate** en las propiedades de los determinantes para calcular mentalmente el determinante de:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dada la matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de $det(A)$? **Justifica** cada uno de tus cálculos.

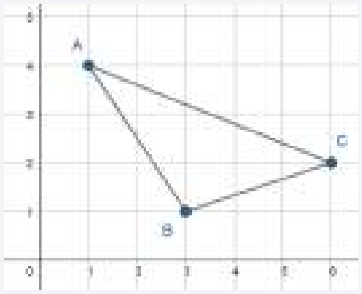
- Sea R la matriz dada en la actividad anterior. ¿Cuál es el $rg(R)$? En este caso, ¿cuál método es más rápido para hallar la respuesta?

- Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcula $det(A)$, expandiéndolo con respecto a uno de sus renglones.

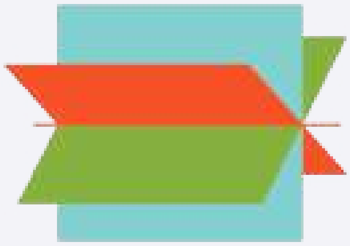
- Cuál es el área del triángulo que sigue?



- **Compara** los determinantes de las matrices:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } K = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Supongamos que tres planos de $\mathbb{R}^3$ se cortan en una recta, tal como se muestra en la imagen. Sea A es la matriz de coeficientes de un sistema ecuaciones asociado.



¿Cuál es $rg(A)$? Justifica tu respuesta.

- **Repite** la actividad anterior, en el caso de que los planos no tengan puntos en común:

Dado el sistema $AX = B$. Si la matriz A no tiene inversa, ¿a qué conclusión llegas con respecto a $det(A)$? ¿Es posible que $AX=B$ tenga solución?

- **Resuelve** cada uno de los sistemas dados apoyándote, de ser posible, en el método de Cramer:

  - $\begin{cases} -5x + 9y = 21 \\ -2x - 2y = 11 \end{cases}$

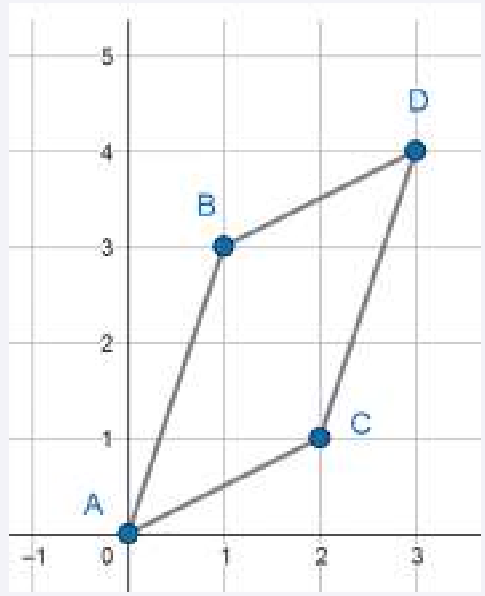
  - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \end{cases}$

  - $\begin{cases} -x + y - z = -5 \\ -y - 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

  - $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 4 \\ 8x + 8y + 8z = 8 \end{cases}$

  - **Da** un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones lineales en el que el rango de su matriz de coeficientes sea 1. Discute tus ideas, procedimiento y resultados con tus compañeros y docente.

- **Considera** el paralelogramo del gráfico:



Halla su área con apoyo en la idea de determinante.

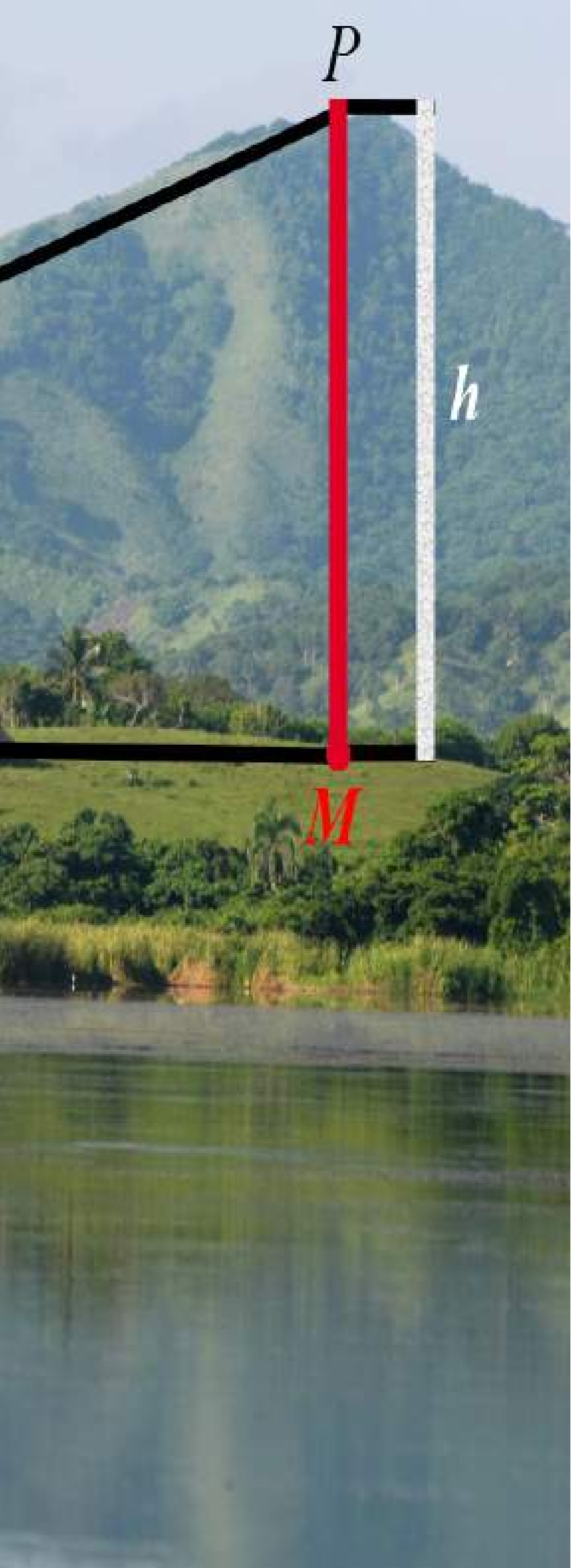
- Si tres compuestos alimenticios (A, B y C) contienen por cada 100 g lo descrito en la tabla.

Contenido (en mg)	*A*	*B*	*C*
Vitamina 1	7	9	12
Vitamina 2	14	11	9
Vitamina 3	5	8	13

Se desea mezclarlos con la intención de aportar una dieta que contenga 53 mg de Vitamina 1, 70 mg de Vitamina 2, y 47 mg del Vitamina 3. Utiliza determinantes para hallar la solución de este sistema, si existe.

Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.



Unidad 10

Introducción a la Trigonometría

Situación de aprendizaje

Un observador, localizado en el punto *A*, calculó el ángulo entre la horizontal y el punto más alto de una montaña. Además, estimó la distancia aproximada entre el punto de observación y el punto *M* a los pies de ésta. Con tal información:

¿es posible calcular la altura de la montaña?,

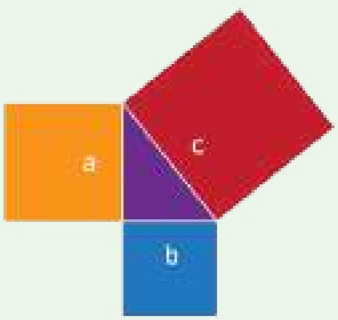
¿cómo puede obtenerse este valor?

Contenido

- Origen y desarrollo de la trigonometría
- Ángulos
- Sistemas de medida de ángulos
- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
- Ángulos de elevación y de depresión
- Actividad grupal
- Evaluación

Además de sus aplicaciones en la medición de terrenos, algunas culturas antiguas utilizaron la **trigonometría** para estimar la posición de embarcaciones a mar abierto, para calcular la distancia entre ciertas estrellas, predecir la posición de ciertos cuerpos celestes, etcétera.

Si los enteros a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, entonces se dice que a, b y c construyen una terna pitagórica.



Algunas de tales ternas se exponen en la tabla que sigue.

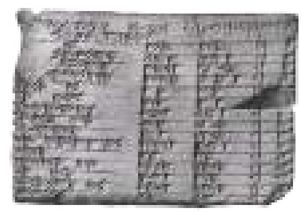
a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41

Origen y desarrollo de la trigonometría

¿Cuáles matemáticos de la antigüedad conoces? ¿Qué significan terna, arco y cuerda?

Algunas ideas en la antigüedad

Trigonometría es una palabra que utilizaron los **matemáticos griegos,** desde unos 600 años antes de Cristo. Para la matemática griega la trigonometría significó la "medición de los triángulos". Hoy en día, tal término abarca "el estudio de las razones (o relaciones numéricas) entre los elementos de los triángulos".



Fuente: wikipedia. org

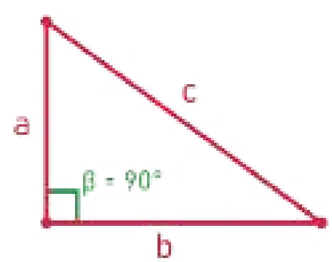
Si bien hemos hecho referencia a la matemática helénica (o griega), de la cual tenemos referencias importantes en matemáticos como *Tales*, *Pitágoras*, *Euclides*, *Eudoxio*, *Aristóteles*, entre otros, ya existía un amplio conocimiento geométrico (y en particular, trigonométrico) en otras culturas antiguas. Una de ellas fue la **cultura Babilónica**.

La imagen muestra la denominada *Tablilla Plimlton* 322. En este escrito babilónico, que se estima data de unos 1800 años antes de Cristo, se exponen ternas pitagóricas, vale decir, enteros a, b y c, tales que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

En otras palabras, ternas donde a y b son los catetos y, c es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Los egipcios introdujeron, aproximadamente en el mismo momento histórico que los babilonios, la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos (lo que estudiarás a lo largo de esta Unidad); una idea que, aun hoy, 3800 años después, se mantiene.



En el *Papiro de Rhind* (o *Papiro de Ahmes*) se expone el problema:

Una pirámide de 250 codos de altura tiene una base cuyo lado es de 360 codos, ¿cuál es su seked?

Para entonces, "seked" significaba la "inclinación de la cara de la pirámide", o, en el lenguaje actual, "la pendiente de la superficie que contiene a esa cara". ¿Cómo resolvieron los egipcios este problema?

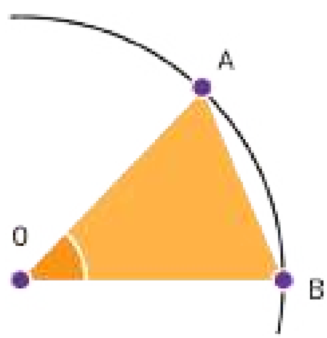
Para ello, dividieron la base en dos partes: $\frac{360}{2} = 180$. Luego, emplearon un recurso ingenioso, el cual fue buscar fracciones que multiplicadas por 250, y que luego, al sumar estos productos, diera como resultado 180. Observen que

$$\frac{1}{2} \cdot 250 + \frac{1}{5} \cdot 250 + \frac{1}{50} \cdot 250 = 180$$

Es decir, la suma de las fracciones buscadas es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$

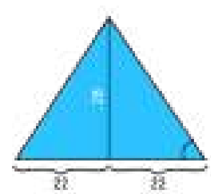
Como un codo equivale a 7 palmos, multiplicaron por 7 la suma anterior. Con lo cual: $7\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}\right) = 7\left(\frac{18}{25}\right) = \frac{126}{25} = \frac{5 \cdot 25 + 1}{25} = 5 + \frac{1}{25}$. Es decir, el *seked* es de $5 + \frac{1}{25}$ palmos por cada codo.

En la Grecia antigua hubo, como en otras culturas, importantes aportaciones a la trigonometría, una de éstas se debe a *Hiparco*. Su Tabla de cuerdas es equivalente a la moderna tabla de valores de la *función seno* (que también estudiarás en esta Unidad). Aquí, la "cuerda de un arco" se refiere a la longitud del segmento dado por la intersección de los dos segmentos que determinan ese arco.



- La *Gran Pirámide* (y otras más) se construyeron con una pendiente de 22 dedos por cada 28 dedos.

  - **Calcula** $\frac{22}{28}$ y luego $4 \cdot \frac{22}{28}$. ¿Qué observas?



Para el momento de la publicación del *Papiro de Rhind* o *Papiro de Ahmes*, las unidades de medida de longitud eran de tipo antropométricas.

Utilizaban, entre otras, el "codo", el "palmo" y el "dedo", junto con las equivalencias:

1 codo = 7 palmos = 28 dedos

Fuente: picryl.com

La cuerda del *arc AOB* (se lee "arco *AOB*") es el segmento $\overline{AB}$. Hiparco hizo cálculos desde los 0° hasta los 180°, y tomó nota de la longitud de la cuerda que se define en cada caso.

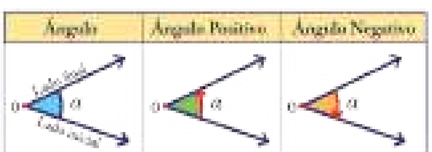
- Comunica sus ideas sobre el desarrollo histórico de la trigonometría.

Ángulos

¿Cómo pueden clasificarse los ángulos en un Plano?

Un **ángulo** en el plano se forma con dos rayos que tienen un origen común. A tales rayos se les denomina lados del ángulo, y al punto que es el origen de ambos rayos se le denomina vértice del ángulo.

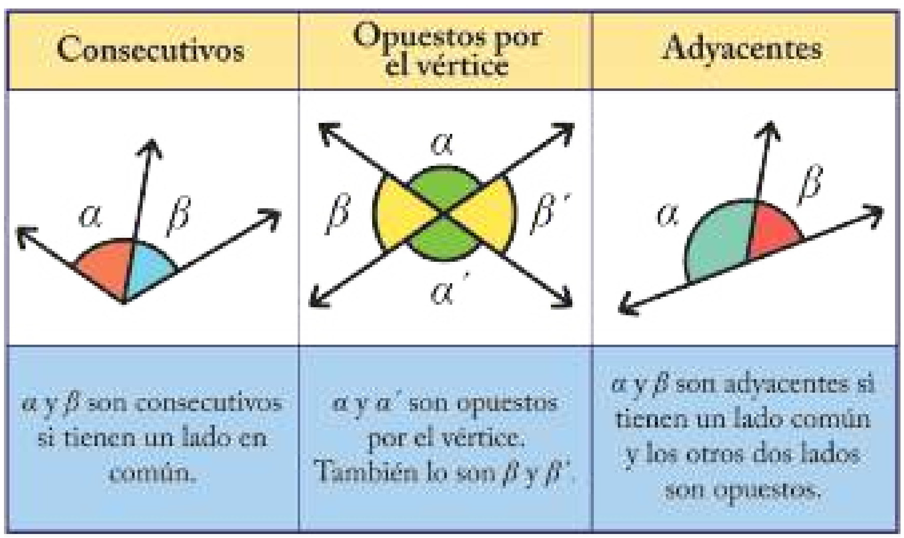
Asociamos a un ángulo la rotación de uno de sus rayos alrededor de un punto fijo (precisamente el vértice) desde cierta posición inicial hasta una posición final, y atendiendo a un sentido de rotación. Esta rotación puede ser “horario“ si se sigue el curso de rotación de las agujas del reloj; o “anti horario”, si tal rotación se hace en sentido contrario. Si el giro se hace en sentido horario entonces el ángulo se asume negativo. Si el giro es anti-horario este será positivo. Tal como puedes ver en la figura siguiente.

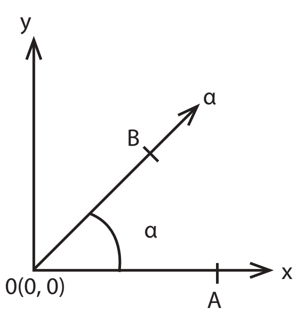


Clasificación de los ángulo

Los ángulos pueden clasificarse atendiendo a criterios como: (a) su medida (lo que implica las definiciones de ángulo agudo, recto y obtuso), o bien (b) según los lados que tengan en común.

La tabla que sigue ilustra estos conceptos.



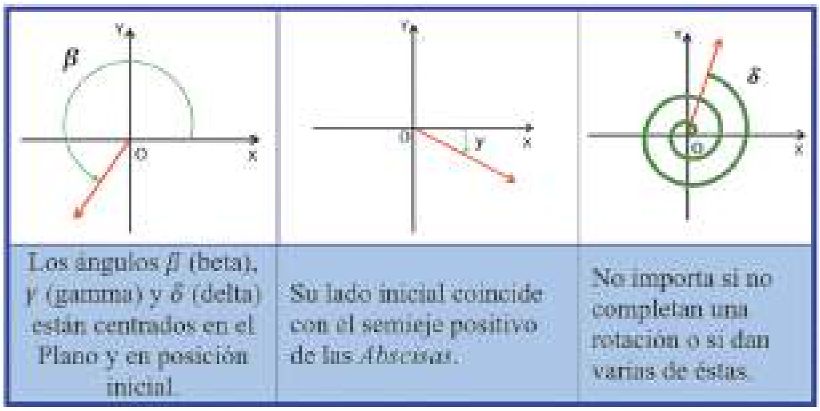


Ángulos centrados en el Plano y en posición normal

Sea P un plano cartesianas y origen en el punto O de coordenadas (0,0). El ángulo α se denomina centrado en posición normal (o que están en posición estándar) si, y solo si, el vértice de este ángulo coincide con el origen y, además, su lado inicial coincide con el semieje positivo de las *abscisas*.

Es decir, $\alpha = \angle AOB$ está centrado y en posición normal si:

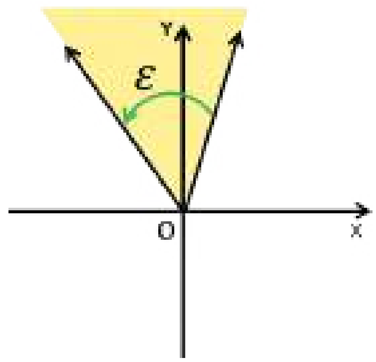
$O(0,0)$ y $A \in \overrightarrow{OX}$



Existen sensores que cuentan el número de revoluciones (rotaciones) de un punto (marcado con un emisor de cierta señal). Tal sistema puede adaptarse a un vehículo o a un motor.

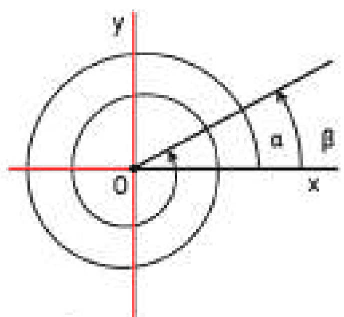
Conociendo el número de rotaciones (*k*) y el diámetro de la rueda (*D*), por ejemplo, es posible calcular la distancia que ha recorrido.

En cambio, el ángulo ε (épsilon), que se muestra en la figura, está centrado en el *Plano* pero no está en posición normal.



Por otra parte, existe la posibilidad de que dos o más ángulos tengan la misma semirrecta como lado inicial, y también, la misma semirrecta como lado final, pero que el número de giros que lo determinan sea distinto (la gráfica adjunta ilustra esta idea).

En ese caso, estos ángulos son distintos y se denominan ángulos coterminales. En la imagen que se muestra a la derecha, los ángulos α y *β* son coterminales. Si α y *β* fuesen negativos y verificaran las condiciones anteriores, también se dirán coterminales.



Ángulos coterminales

- **Da** ejemplos de ángulos en diversas situaciones de tu contexto. **Conversa** sobre ello con tus compañeros y docente.

- Resuelve situaciones de la comunidad al interpretar ideas matemáticas sobre el desarrollo histórico de la trigonometría y los vincula con situaciones del contexto.

Sistemas de medida de ángulos

¿Qué unidad conoces para expresar la medida de un ángulo?

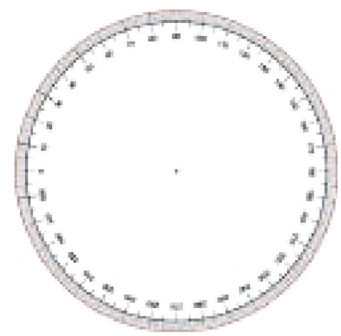
La medida de un ángulo también se puede expresar en el denominado **Sistema Centesimal**. Este consiste en la división del círculo en 400 ángulos iguales, con un vértice común, cada una de estas partes se llama "grado centesimal" y se denota con la letra "g" como súper-índice, por ejemplo:

$$200^g$$

En el ejemplo anterior, advertirás que $200^g = 180^o$.

Grados sexagesimales y radianes

La medida de un ángulo cualquiera α se identifica con el número de rotaciones, con respecto a su vértice, que es necesaria para trasladar el lado inicial sobre el lado final. De forma coloquial puede decirse que la medida de α indica "cuánto abre el ángulo".

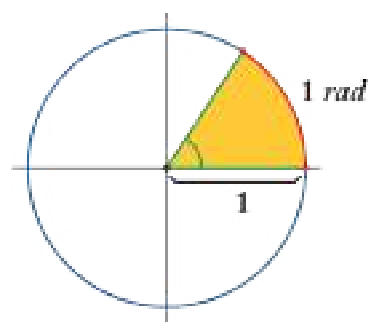


Una unidad de medida para los ángulos es el grado (se abrevia con el símbolo: º). Un ángulo cuya medida es 1º (se lee: "un grado sexagesimal") se obtiene al rotar el lado final de este una tricentésima sexagésima parte $\left(\frac{1}{360}\right)$ de una rotación completa.

Otra unidad de medida de los ángulos es el **radián** (se abrevia con: **rad**). Para ello se considera un círculo de radio 1. El centro de este círculo es también el vértice del ángulo a medir. Entonces, la medida de tal ángulo es la longitud del arco que este subtiende.

Los babilonios tenían un sistema de numeración de base 60, es decir, sexagesimal. Ellos, junto a otras culturas (como la persa) utilizaban un calendario con 360 días para cada año. En estas ideas se encuentra, quizá, su idea de dividir la circunferencia en trescientas sesenta partes iguales:

Fuente: picryl.com



Como sabes, la longitud de la circunferencia de este círculo de radio 1, es $C = 2\pi$. En consecuencia, un ángulo que se corresponda con una rotación completa tiene una medida de:

$$2\pi \ rad$$

Un ángulo llano (180º) equivale entonces a $\frac{1}{2}(2\pi \ rad) = \pi \ rad$. Y un ángulo recto (90º) equivale a $\frac{1}{4}(2\pi \ rad) = \frac{1}{2}\pi \ rad$.

Lo anterior nos permite escribir: $360^o = 2\pi \ rad$. Por tanto, $180^o = \pi \ rad$. Y:

$$90^o = \frac{1}{2}\pi \ rad$$

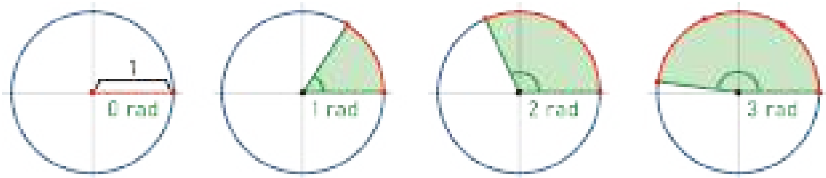
Y con base en estas equivalencias podemos escribir: $1^o = \frac{\pi}{180} rad$.

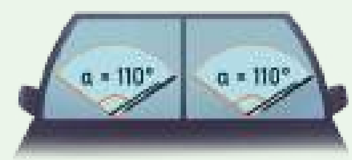
$$1 \ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

Con lo cual pueden deducirse las reglas de conversión entre grados sexagesimales y radianes: (a) para convertir grados sexagesimales en radianes, basta con multiplicar por $\frac{\pi}{180}$. Y (b) para convertir de radianes a grados sexagesimales, se multiplica por $\frac{180}{\pi}$.

Ejemplo 1: ¿cuánto equivale 1 *rad* en grados sexagesimales? y, ¿cuánto equivale 1° en *rad*? 1 *rad* ≈ 57.29°. Y, por otra parte, 1° ≈ 0.01 *rad*.

Ejemplo 2: ¿cuánto equivale 30° en radianes? Para ello, debes proceder como sigue: $30° = 30\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$ *rad*. La imagen adjunta muestra la representación de ángulos con medidas 0 *rad*, 1 *rad*, 2 *rad* y 3 *rad*.





El modelo de limpia-parabrisas de la imagen tiene un recorrido que se corresponde con un ángulo de 110°. ¿Cuál es su equivalente de radianes?

Para obtener 1 *rad* ≈ 57.29° y 1° ≈ 0.01 *rad*, aproximamos hasta las centésimas.

$\alpha = 45°$ indica, naturalmente, que la medida de tal ángulo es "45 grados sexagesimales", o simplemente "45 grados"; pero $\beta = \frac{\pi}{9}$ *rad*, también puede escribirse, sin lugar a ninguna ambigüedad, como $\beta = \frac{\pi}{9}$ (y se sobreentiende que está expresado en *radianes*). Las ideas anteriores nos permiten escribir los ángulos coterminales a un ángulo α así:

$$\alpha + n \cdot 360°, \text{ o bien, } \alpha + n \cdot 2\pi.$$

Es decir, se suman *n* rotaciones completas.

Ten en cuenta que los ángulos medidos en grados sexagesimales siempre acompañarán el número del símbolo °, en cambio, los ángulos medidos en radianes pueden indicar o no el símbolo *rad*.

- En un reloj, al cabo de 1 hora, la manecilla que marca las horas recorre $\frac{1}{12}$ del círculo. Y la manecilla que marca los minutos da 1 rotación completa. Si el reloj marca las 3:30 p.m., ¿cuántos *rad* recorren ambas manecillas hasta que sean las 6:15 p.m.?

- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

¿En qué consiste el Teorema de Pitágoras?

En la tabla se abrevian los nombres de estas razones.

sen = *seno*

cos = *coseno*

tan = *tangente*

csc = *cosecante*

sec = *secante*

cot = *cotangente*

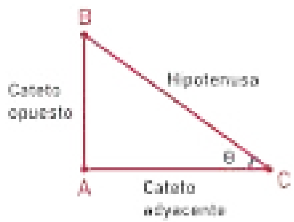
Observa, además, que *csc θ* es la razón inversa de *sen θ*; la *sec θ* es la inversa de *cos θ*; y *cot θ* es la inversa de *tan θ*:

$$csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$$

$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}$$

$$cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}$$

Razones trigonométricas



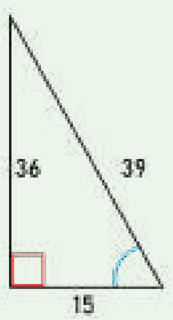
Sea ΔABC un triángulo rectángulo. En esta lección nos ocuparemos de estudiar las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, denominadas razones trigonométricas, así como algunas de sus múltiples aplicaciones.

Identifiquemos con θ (se lee "theta") uno de los ángulos agudos de este (observa la figura adjunta).

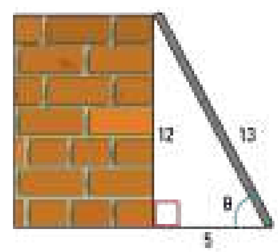
Las razones que siguen, son válidas en cualquier triángulo rectángulo, con independencia de las medidas de sus lados; éstas solo dependen de θ.

Razones trigonométricas		
$sen\ \theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$cos\ \theta = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$tan\ \theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
$csc\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$sec\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$	$cot\ \theta = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Observa que un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 15 y 36, y su hipotenusa mida 39, tendrá exactamente las mismas razones que las del ejemplo 1. Compruébalo.



Ejemplo 1: Una escalera (con una longitud de 13 m) está apoyada sobre un muro de 12 m de altura, tal como se muestra en la figura. ¿Cuáles son la razones trigonométricas del ángulo θ?

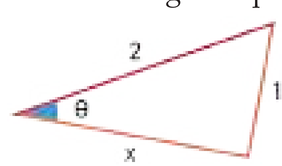


En este caso, tales razones son:

$sen\ \theta = \frac{12}{13}$ $\quad cos\ \theta = \frac{5}{13}$ $\quad tan\ \theta = \frac{12}{5}$

$csc\ \theta = \frac{13}{12}$ $\quad sec\ \theta = \frac{13}{5}$ $\quad cot\ \theta = \frac{5}{12}$

Ejemplo 2: Si se conoce que en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos verifica que $sen\ \theta = \frac{1}{2}$, ¿es posible deducir las medidas de uno de los triángulos que cumple esta condición? ¿pueden escribirse todas las razones trigonométricas solo con esta información? Como $sen\ \theta = \frac{1}{2} = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, entonces uno de los triángulos que satisface esta



condición es el que se muestra en la figura. Sólo resta deducir la longitud del cateto adyacente (x). Para esto te puedes apoyar en el *Teorema de Pitágoras*: $2^2 = 1^2 + x^2$. Con lo cual, $x^2 = 4 - 1 = 3$.

Es decir, descartando la solución negativa de esta ecuación (pues nos referimos a longitudes), $x = \sqrt{3}$. Ya con esto, puedes escribir:

$cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tan\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $csc\,\theta = 2$, $sec\,\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $cot\,\theta = \sqrt{3}.$

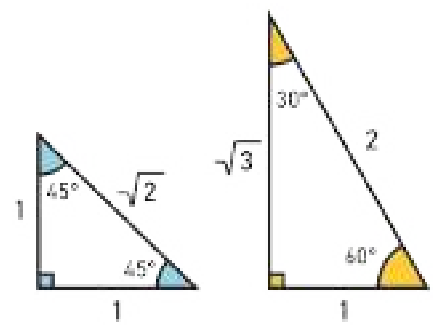
Para calcular el valor aproximado de una relación trigonométrica debes programar la calculadora en la unidad de medida en la que esté expresado el ángulo. Por ejemplo:
¿Cuál es el *sen* 2? y ¿Cuál es el *sen* 2°? En el primer caso, se sobreentiende que el ángulo está dado en radianes. Y en el segundo, se indica que este se expresa en grados sexagesimales.
Aproximando los resultados con 3 decimales, se tiene que:

sen 2° ≈ 0.034

sen 2 ≈ 0.909

Razones trigonométricas especiales

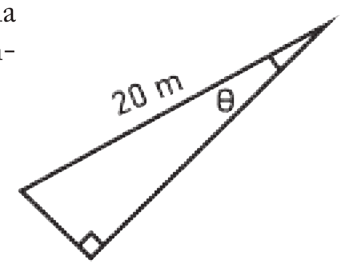
Existen razones trigonométricas que se utilizan con frecuencia, tal es el caso de las que corresponden con ángulos de 30º, 45º y 60º (es decir: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$). Estas pueden deducirse con base en las figuras adjuntas y aplicando el *Teorema de Pitágoras* (una consiste en un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, y la otra, en un triángulo rectángulo en el que uno de sus catetos mide 1 y la hipotenusa mide 2. Tales razones son:



θ	θ	$sen\,\theta$	$cos\,\theta$	$tan\,\theta$	$csc\,\theta$	$sec\,\theta$	$cot\,\theta$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Es importante recordar todas estas razones trigonométricas especiales. Para otros ángulos puede utilizarse la calculadora.

- Una superficie triangular, justo a uno de los lados de una edificación, será utilizada para un jardín. Se sabe que c = 20 y se quiere que θ = 20.5°. ¿Cuál es la longitud de los catetos de este triángulo?



- Se expresa con criterios claros al interpretar los procesos implicados en la resolución de triángulos rectángulos, oblicuángulos e identidades trigonométricas asociadas a situaciones matemáticas.
- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Ángulos de elevación y de depresión

Los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión tienen aplicaciones en la Navegación, en la Topografía, en la Ingeniería Civil, en la planificación de sistemas de servicio de agua potable, de los de desagüe, etc. Además, en la antigüedad, y aún hoy en día, estos se utilizan para calcular la posición de los cuerpos celestes, para estimar la distancia desde la Tierra hasta algunas estrellas cercanas, etc.

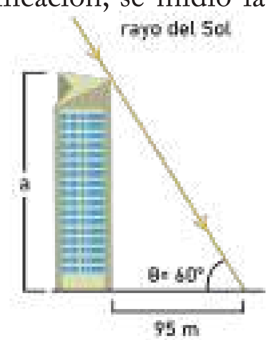
¿En cuáles situaciones has escuchado hablar de ángulos de elevación y ángulos de depresión?

Ángulo de elevación y depresión

Supongamos que una persona observa un punto sobre cierto objeto. A la recta que determinan el ojo de esa persona y el punto que este observa, se llama *línea de visión*. Si el punto observado se encuentra sobre la horizontal, entonces el ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión se denomina **ángulo de elevación**. En cambio, si el punto observado se halla bajo la horizontal, entonces el ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión se denomina **ángulo de depresión**. La imagen adjunta ilustra estas ideas.

Estas ideas son fundamentales para la solución de problemas internos a la Matemática, pero también del contexto.

Ejemplo 1: Para estimar la altura de una edificación, se midió la distancia desde el punto medio de su base hasta el punto en el que se proyecta su sombra sobre el piso. Además, se midió el ángulo θ que determinan la horizontal (dada por el piso) y la recta que contiene al rayo de *Sol* que muestra la figura. Supongamos que la edificación es perpendicular a la horizontal. ¿Cuál es la altura de este edificio?



Observa que, la altura de la edificación es el lado opuesto al ángulo de elevación ($\theta = 60^o$). Además, se conoce la longitud del lado adyacente a este ángulo. Por tanto, puedes apoyarte en la relación:

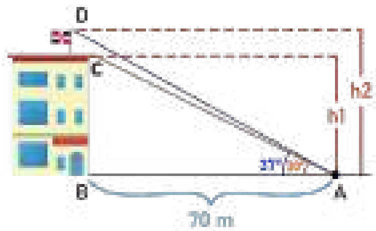
tan 60º es una de las razones trigonométricas especiales.

$$tan\,\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Por tanto, *tan* $60^o = \frac{a}{95}$. Y esto implica que:

$$a = 95\,tan\,60^0\text{m} = 95\sqrt{3}\,\text{m} \approx 164.54\text{m}.$$

Ejemplo 2: Un observador mide los ángulos de elevación que se indican en la figura adjunta. Con esta información, ¿es posible estimar las alturas h_1 y h_2?

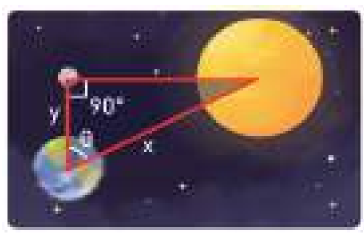


Supongamos que la horizontal es perpendicular a la edificación y al asta de la bandera. En tal caso, ΔABC y ΔABD son triángulos rectángulos. Así que puedes aplicar la idea del *ejemplo* 1: $tan\,30^0 = \frac{h_1}{70}$.

$$h_1 = 70\,tan\,30^0 = 70\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 40.41\text{ m}$$

Para hallar el valor de *tan* 37°, debes utilizar la calculadora.

Por otra parte, tan $tan\,37^0 = \frac{h_2}{70}$, por tanto, $h_2 = 70tan37^o \approx 52.74$m. Ambas medidas están expresadas en metros. Así, que es posible estimar ambas alturas. Además, la diferencia $h_2 - h_1 \approx 52.74\text{-}40.41 \approx 12.33$, es aproximadamente, la altura (en metros) del asta de la bandera.



Ejemplo 3: Se sabe que la distancia de la *Tierra* a la *Luna* es de aproximadamente 386,242 km. En "fase de media Luna", el ángulo, Tierra-Luna-Sol, es de 90°. Y el ángulo θ, Sol-Tierra-Luna es de 89.85°. Con estos datos puedes estimar la distancia de la Tierra al Sol:

$$cos\,89.85^0 = \frac{y}{x} = \frac{386,242}{x}$$

Por tanto, $x \approx \frac{386,242}{cos\,89.85^0}\text{km} \approx \frac{386,242}{0.0026}\text{km} \approx 148,554,615.384$ km.

- El radio de la Luna es de aprox. 1,609 km. Y la distancia, aproximadamente, de la Tierra a la Luna es de 386,242 km. Se desea apuntar, con un rayo láser, el centro de la Luna, pero se cometió un error de 0.25°. ¿A qué distancia del centro de la Luna pasa este rayo?

- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar de manera precisa modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Actividad grupal

Estimando la altura de un edificio

¿Qué haremos?

Estimarán la altura de un edificio utilizando un astrolabio.

La imagen muestra un astrolabio persa del siglo XVIII.

Este instrumento de medición se utilizó en varias culturas hace más de dos mil años.

Fuente: Wikipedia.org

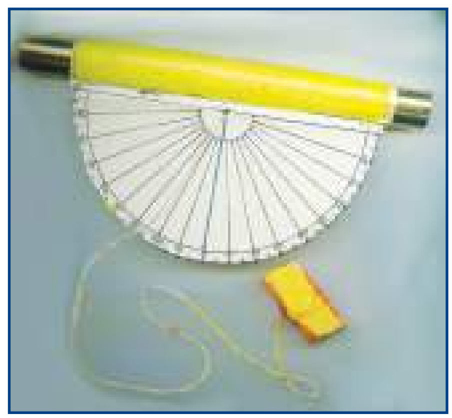
¿Qué necesitamos?

Un transportador (o una plantilla impresa en papel de un transportador), *calimete*, cinta adhesiva, cuerda o hilo, una plomada (puede ser una pieza pequeña de madera o de algún otro material), papel, lápiz y calculadora.

¿Cómo nos organizamos?

Trabajen en equipos de 3 o 4 integrantes, expresen sus ideas, y cooperen en todo momento con sus compañeros.

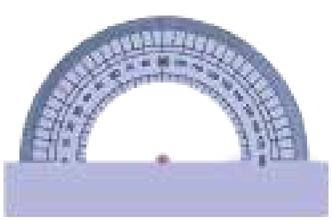
¿Cómo lo haremos?



En primer lugar, construirán un **astrolabio**. Para ello deben fijar cuidadosamente el borde recto del transportador al calimete, tal como se muestra en la imagen. El calimete tendrá la función de guía de observación.

Si cuentan con un transportador de plástico, soliciten apoyo a un familiar para perforarlo justo en el centro del círculo que este define.

Algunos transportadores ya cuentan con la perforación indicada.

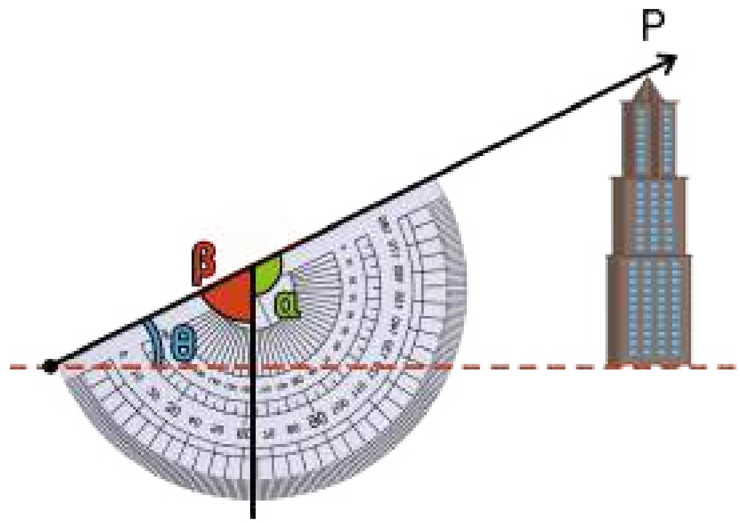


Ahora aten la plomada a un extremo del hilo (o cuerda), y fijen el otro extremo al centro del transportador. Y ya estarán listos para medir ángulos de elevación.

Seleccionen, con apoyo de su docente, una edificación o estructura (en lo posible, de gran altura). Puede ser el punto más alto del asta de una bandera, la edificación escolar, alguna construcción con valor arquitectónico o histórico, etc. Para su selección, consideren factores como el tiempo disponible para esta actividad y su cercanía.

Seleccionen un punto en esta edificación o estructura del cual estimarán su altura (aquí lo etiquetaremos con la letra *P*).

Utilicen el astrolabio para medir el ángulo entre la horizontal que define el piso y la línea de observación hacia el punto más alto de la edificación o estructura seleccionada (ángulo de elevación). Observen que el hilo que sostiene la plomada indicará los ángulos α y β. Y, con éstos, pueden calcular el ángulo θ. El ángulo θ, como advertirán, es precisamente el *ángulo de elevación*.



Midan la distancia (*d*) desde el punto de observación al punto de intersección de horizontal con la recta perpendicular a esta que pasa por el punto más alto observado.

¿Cuál razón trigonométrica deben aplicar para estimar la altura de *P*?

Realicen los cálculos necesarios para ello. Además, discute con tus compañeros otros métodos para estimar la altura del punto *P*. Respetando en todo momento sus opiniones.

Presentación y socialización de las actividades

- Un miembro de cada equipo presentará sus resultados a los demás grupos, y describirá el proceso seguido. Además, presentarán otros métodos para estimar la altura del punto *P*.
- Todo el curso organizará una exposición de los astrolabios que han construido y de la estimación que llevaron a cabo.

Coevaluación

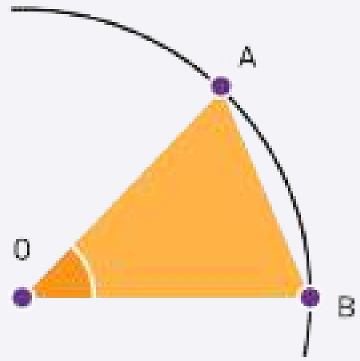
Los estudiantes revisarán sus cálculos, con apoyo de su docente, identificarán los errores cometidos y buscarán soluciones para éstos.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

- Interpreta situaciones diversas empleando los conocimientos matemáticos y mostrando interés y respeto hacia las aportaciones de los demás para contribuir con la solidaridad y convivencia pacífica.

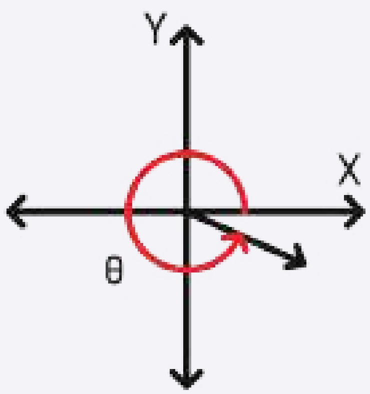
- ¿Cuál es la cuerda del *arc BOA*?



- **Da** ejemplos de ángulos centrados en posición normal, positivos, negativos, opuestos por el vértice, complementarios suplementarios, y coterminales.

- (a) Sea $\alpha = 60^{o}$, **haz** una lista con 5 ángulos positivos coterminales con α. (b) Y una lista de 5 ángulos negativos coterminales con α. (c) Justifica tus respuestas anteriores.

- Clasifica el siguiente ángulo:



- **Halla** la medida en radianes de cada uno de los ángulos cuya medida en grados sexagesimales es: (a) 120^0, (b) 720^0, (c) 315^0, (d) 95^0, (e) 2^0, (f) 10^0, (g) -98^0, (h) 0^0, (i) -72°.

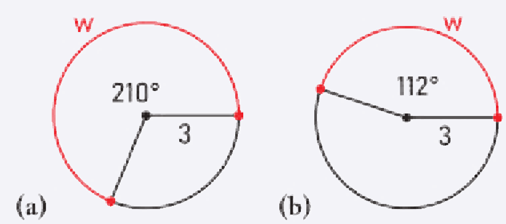
- **Halla** la expresión en grados sexagesimales de los ángulos cuya medida es (a) $-\frac{\pi}{2}$, (b) $-\frac{3\pi}{2}$, (c) 3π, (d) $-\frac{12\pi}{5}$, (e) -8π, (f) $\frac{\pi}{12}$, (g) $-\frac{10\pi}{9}$, (h) $-\frac{4\pi}{3}$.

- **Utiliza** la calculadora para completar (en tu cuaderno) la tabla que sigue:

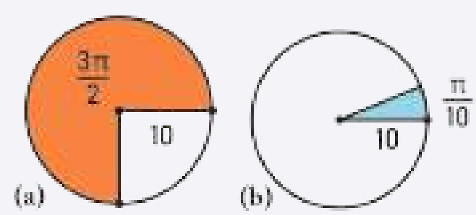
θ	$sen\ \theta$	$cos\ \theta$	$tan\ \theta$	$csc\ \theta$	$sec\ \theta$	$cot\ \theta$
315°						
95°						
10°						
-10°						
0°						

- **Encuentra** un ángulo comprendido entre 0^{o} y 360° que sea coterminal con 711^0.

- Se sabe que la "longitud de un arco" (w) que subtiende un ángulo central θ (expresado en radianes), es: $w = r\theta$, donde r es el radio del círculo correspondiente. Con base en esta relación, **halla** la longitud del arco w en cada caso:

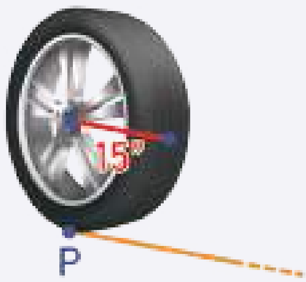


- Se desea producir dos piezas como las que se muestran a continuación. El sector circular que se ha destacado en color será cubierto con un esmalte especial. Y se necesita saber el área de estos sectores circulares.



Notas: La medida del radio, en cada caso, está dada en cm. Además, se sabe que en un círculo de radio *r*, el área (*A*) de un sector circular determinado por un ángulo central θ (expresado en radianes) es: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

- Un vehículo tiene ruedas con un radio de 15 pulgadas. ¿Qué tanto se desplazará si su dirección es una línea recta, sin deslizamiento ni roce, si sus ruedas rotan 30 veces?



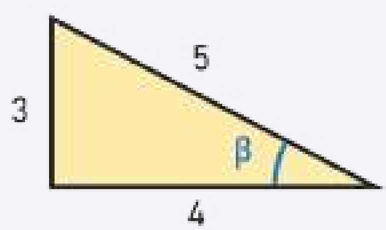
- Un dispositivo automático de riego tiene un alcance de 15 m y una capacidad de giro de $\theta = \frac{\pi}{2}$. **Calcula** el área del sector circular que es irrigado por este dispositivo.

- **Construye** una lista de ángulos α para los que *sen* α = 0.
- **Repite** la actividad anterior pero esta vez considerando ángulos α para los que *cos* α = 0.
- Se estimó el ángulo de elevación α en 17⁰. Y se calculó la distancia aproximada entre el punto de observación *A* y el punto *Q*, la cual es de 50 km.

Con estos datos, ¿es posible calcular la altura (*h*) aproximada de la montaña?

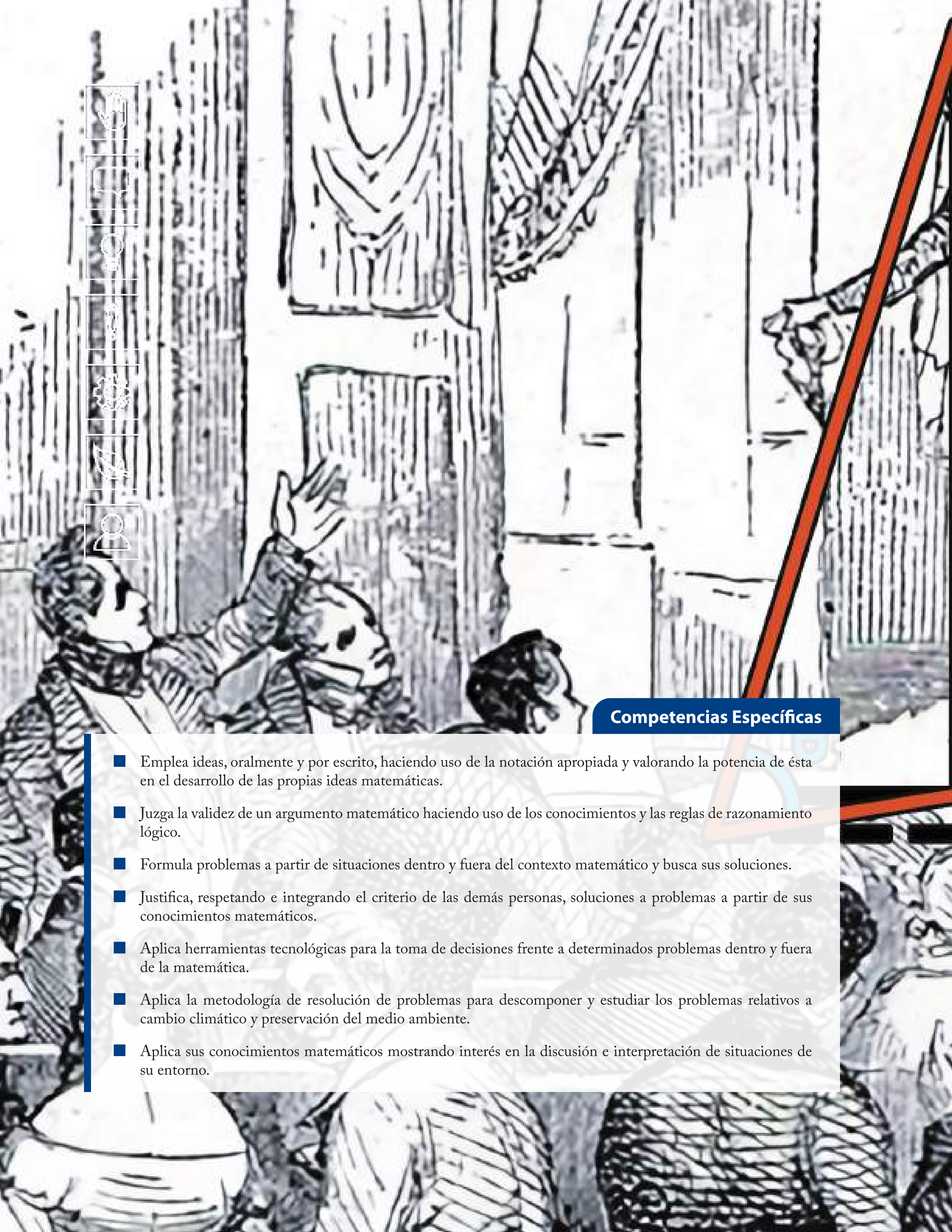
- Conociendo que el radio de la Luna es de aproximadamente 1,609 km, y que la distancia, también aproximada, de la Tierra a la Luna es de 386,242 km. Se desea apuntar, con un láser, el centro de la Luna. **Suponga** que se cometió un error de 0.2⁰. ¿A qué distancia del centro de la Luna pasará este láser?

- Un triángulo tiene las medidas que se indican en la figura.



¿Este triángulo es rectángulo? En caso de que los sea, describe todas las razones trigonométricas del ángulo *β*.

- ¿Qué aprendiste de estas actividades? ¿Qué puedes mejorar? ¿Cómo puedes hacerlo?



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

Unidad 11

Gráfica de las funciones trigonométricas

Situación de aprendizaje

Un espectador, sentado en cierta hilera de un teatro, tiene un ángulo de observación en correspondencia con la distancia que este tiene del escenario, y de la altura del mismo. En este tipo de situaciones intervienen las funciones trigonométricas, como herramientas de análisis.

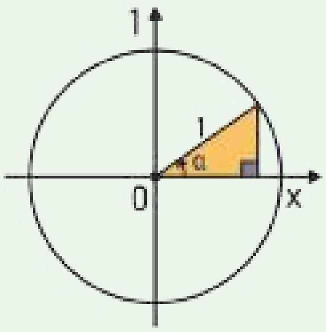
¿Qué relaciones puedes deducir de la información que se da en la imagen adjunta?

Contenido

- Gráficas de las funciones seno y coseno
- Gráfica de la función tangente
- Gráfica de la función arco seno
- Gráfica de la función arco coseno
- Gráfica de la función arco tangente
- Actividad grupal
- Evaluación

Si una función f, es tal que $f(x+P)=f(x)$, es decir, si sus imágenes se repiten cada cierto intervalo, entonces el menor valor positivo P que satisface la igualdad anterior es el **período** de f. Y se dice que la unción f es **periódica**.

Una circunferencia goniométrica unitaria, es aquella cuyo radio es 1 (tiene longitud 1) y su centro coincide con el centro del Sistema de coordenadas (0,0). En esta pueden deducirse, con mayor facilidad, las razones trigonométricas de triángulos rectángulos, como el que se muestra en la imagen que sigue:



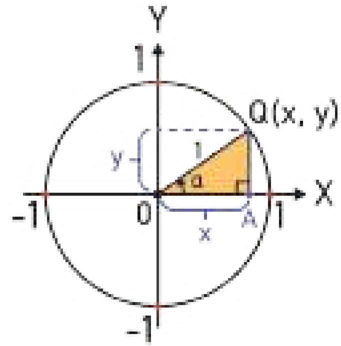
En la Unidad anterior se estudiaron las razones trigonométricas de ángulos, expresados en grados sexagesimales o en radianes. En esta Unidad se definen funciones trigonométricas de números reales.

Gráficas de las funciones seno y coseno

¿Cuáles son las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo?

Las coordenadas de un punto Q de la circunferencia goniométrica en función del ángulo α

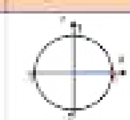
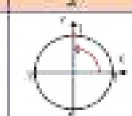
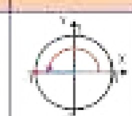
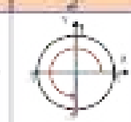
La circunferencia que se expone se denomina goniométrica. En esta hemos representado un punto cualquiera $Q(x, y)$. Observa que, el triángulo ΔOAQ es rectángulo con hipotenusa igual a 1. Como sabemos que: $sen\ \alpha = (\overline{AQ}) = y$, y que, además, $cos\ \alpha = (\overline{OA}) = x$, entonces, el punto Q puede escribirse en términos de estas razones trigonométricas del ángulo α:



$$Q(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$$

Este resultado es importante, pues nos informa que las coordenadas de Q dependen de α, se dice también que "están en función de α".

Con base en este resultado, se pueden definir las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$, donde el argumento x es un número real cualquiera, es decir, $x \in \mathbb{R}$.

Ángulo	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Gráfica					
$f(x) = sen\ x$	0	1	0	-1	0
$g(x) = cos\ x$	1	0	-1	0	1

Observa que para un ángulo de 0 radianes, el punto Q tiene coordenadas $Q(1, 0)$. Para los ángulos: $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π, las coordenadas del punto Q serán respectivamente: $Q(0, 1)$, $Q(-1, 0)$, $Q(0, -1)$ y $Q(1, 0)$.

Como la longitud de esta circunferencia es 2π, entonces, n rotaciones completas hacen que el punto Q este en el mismo lugar geométrico. Simbólicamente:

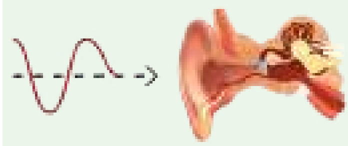
$senx = sen(x \pm n2\pi), n \in \mathbb{Z}.$

$cosx = cos(x \pm n2\pi)\ n \in \mathbb{Z}.$

Es por ello que, las funciones definidas (seno y coseno) son **periódicas**, y su período P es 2π. Una consecuencia de lo anterior, es que la gráfica de estas funciones en el intervalo 0 a 2π se repetirá en ambos sentidos, indefinidamente. Advertirás también, que si expresas el ángulo en radianes, tal como en la tabla anterior, la longitud del arco de circunferencia que tiene como extremos los puntos $(1, 0)$ y $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, es decir, hasta el punto Q, es precisamente α.

Las funciones trigonométricas en general, tienen vastas aplicaciones en la física, ingeniería, arquitectura, música, etc.

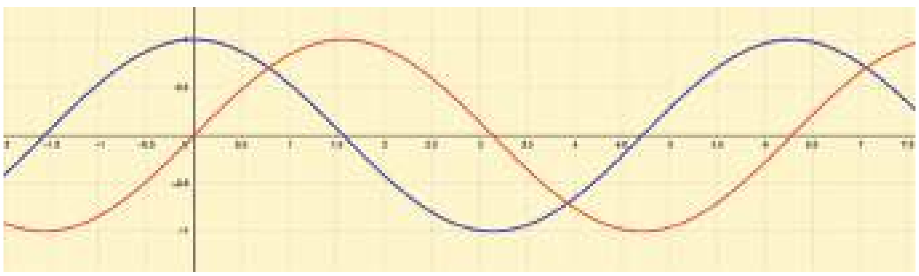
Algunas de las propiedades del sonido, por ejemplo, pueden analizarse con base en este tipo de funciones.



Fuente: Freepik.com

Las gráficas de *f*(*x*) = *sen x* y *g*(*x*) = *cos x*

Las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, en color rojo, y $g(x) = \cos x$, en azul, se muestran a continuación. Ambas se han representado en el mismo *Sistema de Coordenadas*.



$f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ verifican que:

	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$g(x) = \cos x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Período	$P = 2\pi$	$P = 2\pi$
Paridad	Es una función impar, ya que: $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$	Es una función par, ya que: $\cos x = \cos(-x)$

Una función *f* (cualquiera) se dice impar si verifica que: $f(x) = -f(-x)$.

Y *una función f* (cualquiera) se dice que es par si: $f(x) = f(-x)$.

Estas ideas se aplican en la descripción de las funciones seno y coseno.

Además, ambas funciones son crecientes en ciertos intervalos y decrecientes en otros.

- ¿En cuáles intervalos es creciente y en cuáles es decreciente $f(x) = \operatorname{sen} x$?
- **Responde** lo anterior en el caso de $f(x) = \cos x$. **Discute** tus ideas con tus compañeros y el docente.

- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos, integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Una función *f* está **acotada** si lo está superior e inferiormente. Es decir, $r' \leq f(x) \leq r$.

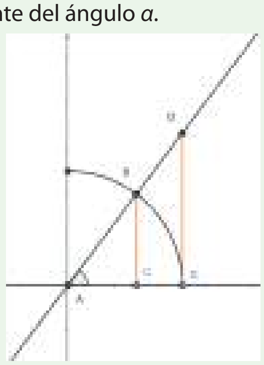
Una función *f* está acotada superiormente si existe un número real *r* tal que $f(x) \leq r$, para cualquier *x* en el dominio de *f*.

Una función *f* está acotada inferiormente si existe un número real *r'* tal que $f(x) \geq r'$, para cualquier *x* en el dominio de *f*.

Dada una circunferencia de radio 1, y una recta cualquiera $\overleftrightarrow{AB}$, que contiene al centro de esta, se determina el triángulo rectángulo ΔABC.
Si etiquetamos el ángulo $\angle BAC$ como *α*, entonces, aplicando la idea de semejanza:

$$tan\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$$

En otras palabras, la medida del segmento *DE* representa a la tangente del ángulo *α*.



En esto se basa la gráfica del ejemplo 1.

Gráfica de la función tangente

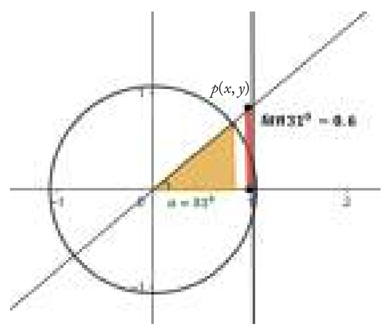
¿Cuál es la definición de la tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo?

Un comentario sobre la función tangente

La tangente de un ángulo sirve de base para definir la función $h(x) = tan\ x$. Para ello puedes apoyarte, como en la lección previa, en la circunferencia de radio 1. La comprensión de la gráfica de la tangente, permitirá comprender la gráfica de la función tangente.

Ejemplo 1:

Para $\alpha = 31°$, se tiene que $tan 31° = \frac{sen 31^0}{cos\ 31^0} \approx \frac{0.52}{0.86} \approx 0.6$



Como advertirás, el punto *P* que tiene como coordenada *x* a 1, posee como coordenada *y* a la tangente del ángulo α. Es decir, se cumple que:

$$tan\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} = y$$

La gráfica de la función *tan x*

Ejemplo 2:

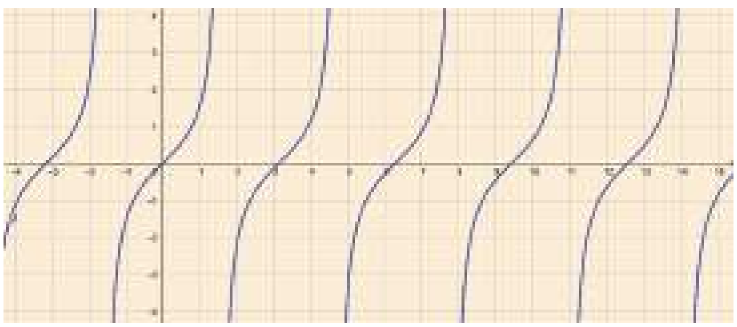
Luego, la gráfica de la función $h(x) = tan\ x$ puede obtenerse representando en el *Plano Cartesiano* los puntos $(x, tan\ x)$. Naturalmente, también puedes apoyarte en una calculadora gráfica.

Observa que, a diferencia de las funciones seno y coseno, el dominio de $h(x) = tan\ x$, incluye a los números reales, con excepción de los que hacen que el denominador sea 0, pues en ese caso $tan\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$ no estaría definida. Y estos valores de x se corresponden con los ángulos cuya medida es:

$$\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

Donde n es un número entero cualquiera. En efecto, si $n = 1$, la expresión anterior se transforma en $\frac{\pi}{2}$. Y en ese caso, $cos\frac{\pi}{2} = 0$, con lo que la tangente no estaría definida, tal como comentamos antes. Algo similar sucede para otros valores (enteros) de n. En cambio, su rango es todo $\mathbb{R}$, como podrás observar en la gráfica que sigue.

Además, esta función es periódica, ya que su comportamiento en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se repite indefinidamente a izquierda y a derecha. Para saber cuál es su período, basta con calcular la longitud o medida de ese intervalo, así: $P = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$.



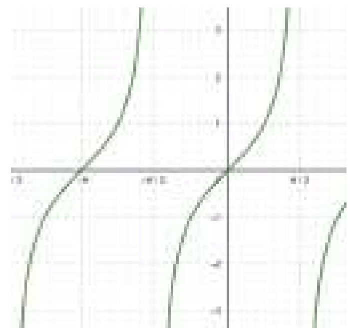
Otra pregunta importante es ¿en cuáles puntos se anula esta función? Lo que equivale a preguntarse por los "ceros de la función", es decir, por los cortes de la gráfica con el eje X. Tales puntos de corte se obtienen cuando $x = n\pi$, con n un entero cualquiera. En efecto:

$$tan\ x = tan(n\pi) = 0.$$

Observa, además, que mientras las funciones seno y coseno están **acotadas**, pues su rango es el intervalo $[-1, 1]$, la función $h(x) = tan\ x$ no lo está.

- La función $h(x) = tan\ x$, ¿es par o impar? **Apoya** tus cálculos y el razonamiento en el uso de *Geogebra*. **Discute** tu respuesta y argumentos con tus compañeros y el docente.

Observa que en la gráfica del ejemplo 2, las unidades en el eje X están dadas en **valores reales**. Pero también puedes indicar en este eje unidades en **radianes**, tal como en la gráfica que sigue:

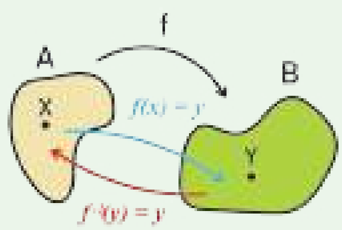


- Aplica herramientas y software tecnológicos en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones, para la toma de decisiones dentro y fuera de la matemática.

Observa que los puntos $P(x,y)$ y $Q(x^*,y)$, que son los cortes de la recta horizontal con la parábola, tienen la misma imagen (el valor "y"), pero tienen pre-imágenes distintas (los valores "x" y "x^*"). Por tanto, esta función, con ese dominio, no es inyectiva.

La idea de representar o imaginar una recta horizontal y observar el número de cortes que esta tiene con la curva, se denomina prueba de la recta horizontal.

Un diagrama que ejemplifica el concepto de función inversa es el siguiente:

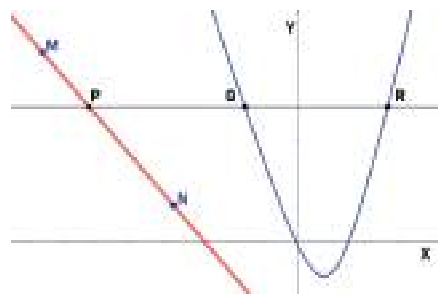


Si $\cos \theta = 0.5$ ¿cuál es el valor de $\sec \theta$?

Gráfica de la función arcoseno

¿Qué ejemplos puedes dar de funciones que tengan inversa?

Una observación sobre las funciones inversas



Si una función f es "uno a uno" o "inyectiva", entonces, se verifica que para cada y en su conjunto de imágenes o rango, existe un único elemento x en el dominio, tal que $f(x)=y$. Gráficamente esto se traduce en el hecho de que una recta horizontal que corte a la curva de f, lo hará en un único punto. En caso contrario, la función no será "uno a uno". La imagen que se muestra ilustra esta idea. En esta, la recta $\overleftrightarrow{MN}$ es la gráfica de una función "uno a uno", ya que cualquier recta horizontal la corta exactamente en un punto. En cambio, la parábola, cuando es cortada, lo es en dos puntos, salvo en el vértice; por tanto, no es "uno a uno".

La observación anterior es importante, pues para que una función f tenga inversa (en símbolo: f^{-1}) debe ser "uno a uno". De las lecciones previas, sabes que las funciones seno, coseno y tangente no lo son, pero si se restringen sus dominios, de manera que verifiquen la inyectividad, sí pueden tener inversa.

La función inversa del seno

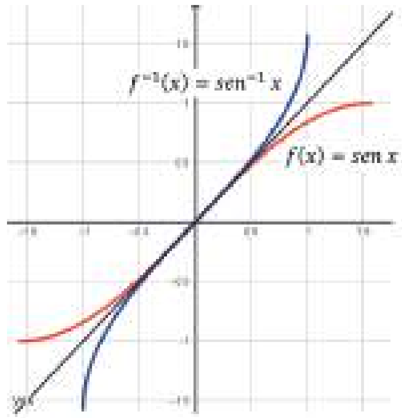
Como advertirás, existen infinitas formas de restringir el dominio de la función $f(x)=sen\ x$, para que f sea "uno a uno".

Ejemplo 1:

Tomando el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tendrá que cualquier recta horizontal que corte la gráfica de $f(x)=sen\ x$, lo hará en un único punto. Ya con esto, puede definirse la función inversa: sen^{-1}.

Así, $sen^{-1}(y) = x$, si y solo si $sen\ x = y$.

La gráfica muestra, en rojo, la curva que corresponde a la función $f(x) = sen\ x$, tomando como dominio el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (y no todo $\mathbb{R}$). Se muestra también la función inversa de $f(x) = sen\ x$, en azul, en símbolos: $f^{-1}(x) = sen^{-1}x$.



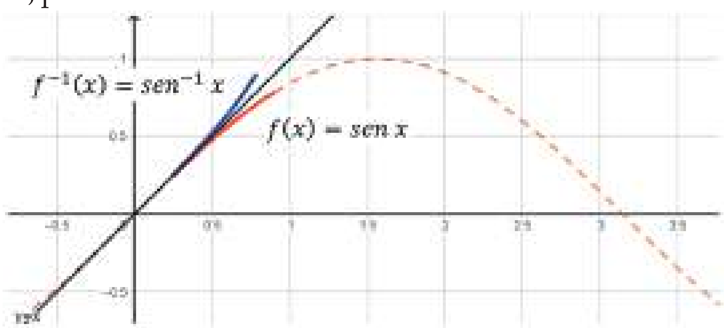
A la inversa de la función seno se le denomina **arcoseno** y se simboliza con: *arcsen x*.

¿Cuál es el dominio de arcsen x? Precisamente el intervalo [-1, 1]. Y su rango es el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Como advertirás, la gráfica de la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}x = arcsen\ x$, se obtiene reflejando sobre la recta $y = x$ a la gráfica de la función seno.

Ejemplo 2:

En el intervalo [0.25, 0.9], la función seno es también inyectiva. En consecuencia, puede definirse su inversa $sen^{-1}x$ con esta restricción.



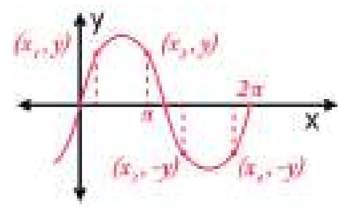
Ejemplo 3:

¿Cómo evaluar la función inversa del seno? (a) Sea, por ejemplo, $x = -0.5$, entonces, $sen^{-1}(-0.5) = -\frac{\pi}{6}$, ya que, $sen(-\frac{\pi}{6}) = sen(30^o) = -0.5$. (b) ¿Cuál es el sen^{-1} (1.1)? Observa que, 1.1>1, por tanto, no está en el intervalo [-1, 1], que es el dominio del arcoseno. Entonces, puedes concluir que, sen^{-1} (1.1) no está definido.

- **Da** ejemplos de otros intervalos para los que puede definirse el *arcsen x*. **Discute** tus ideas con tus compañeros y el docente.

En otras palabras, el *arcsen x* es un número en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tal que su seno es *x*.

De acuerdo a la gráfica encuentre $x_1+x_2+x_3+x_4$

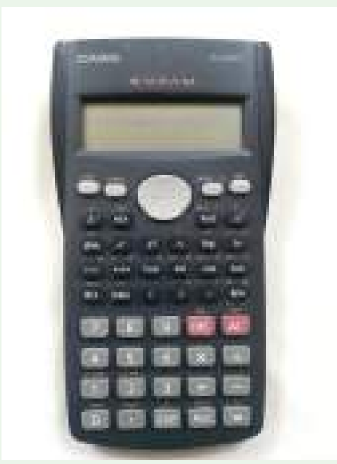


- Justifica procesos implicados en determinados problemas matemáticos, integrando sus propios conocimientos y el criterio de las demás personas.

Gráfica de la función arcocoseno

¿En qué consiste restringir el dominio de una función?

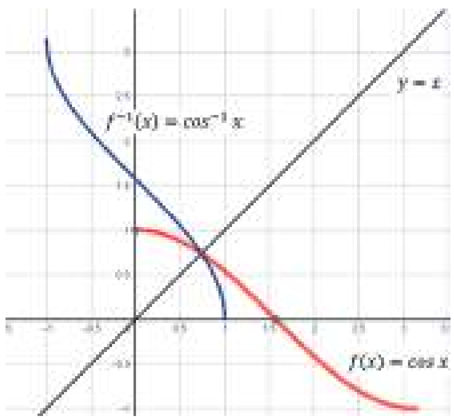
En una calculadora científica puedes digitar la tecla SHIFT seguida de la tecla *cos*, luego escribes el argumento (el número) de la función $cos^{-1}(x)$, y finalmente la tecla =.



La función inversa del coseno

Para definir la inversa de la función coseno, se debe proceder de un modo similar a como se hizo en el caso del *arcsen x*. Esto es, restringiremos el dominio de $f(x) = cos\ x$, con tal que f sea inyectiva. Ello implicará que f tendrá inversa.

Ejemplo 1:



En el intervalo $[0, \pi]$ la función coseno recorre su rango una vez, lo cual puedes apreciar en la gráfica.

Se ha destacado en color rojo la curva que corresponde a $f(x) = cos\ x$ restringiendo el domino a $[0, \pi]$. A partir de aquí, con base en la reflexión de esta curva con respecto a la recta de ecuación $y = x$, se traza la curva que corresponde a $f^{-1}(x) = cos^{-1}\ x$.

Esta técnica de graficación se basa en la interpretación (geométrica) de f y de f^{-1}. Pero también puedes construir una aproximación a la curva de f^{-1} apoyándote en la representación de una serie de puntos, obtenidos con la calculadora.

La inversa de la función coseno se denomina arcocoseno y se simboliza con:

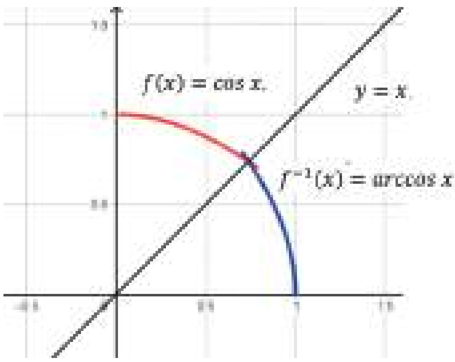
$$arccos\ x = cos^{-1}\ x.$$

Es decir:

$$cos^{-1}(y) = x, \text{ si y solo si } cos\ x = y.$$

Evidentemente, el dominio del *arccos x* es el intervalo $[-1,1]$. Y su rango es el intervalo $[0, \pi]$. Y tal como se describió en la lección previa, existen infinitas posibilidades de restricción del dominio de $f(x) = cos\ x$ que permiten definir el *arccos x*.

Ejemplo 2:



Si se asume como dominio de $f(x) = \cos x$ al intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, entonces, tal como se vio antes, f también tendrá inversa. La gráfica de f y de su inversa, es decir, de $f^{-1}(x) = \arccos x$, se muestran a continuación.

Observa que, en este caso, la sección de la curva de $f(x) = \cos x$, está limitada al intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Y, con la técnica de reflejar esta curva sobre la recta $y = x$, se obtiene la gráfica del *arccos x*.

En consecuencia, el *arccos x* tiene como dominio el conjunto $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$; y tiene como rango al intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

¿Cómo evaluar el arcocoseno en un punto de su dominio?

Ejemplo 3:

Sea la función coseno con dominio en $[0, \frac{\pi}{2}]$, (a) ¿Cuál es el valor de arccos (0)? Para ello puedes escribir: $\arccos(0) = \cos^{-1}(0)$.

Y esta igualdad lleva a pregutarnos, ¿cuál el número en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno es igual a 0? Precisamente $\frac{\pi}{2}$, ya que:

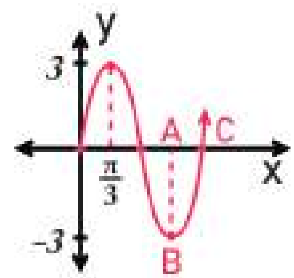
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(90^\circ) = 0.$$

Entonces, puedes concluir que: $\arccos(0) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

(b) ¿Cuál es el valor de $\arccos\left(\frac{11}{12}\right)$? En este caso, puedes utilizar la calculadora (programa en modo radianes), y obtendrás: $\cos^{-1}\left(\frac{11}{12}\right) \approx 0.411$.

- **Define** otro dominio para $f(x) = \cos x$, distinto a los expuestos en los ejemplos anteriores, tal que pueda definirse su inversa.

Encuentre las coordenadas de los puntos *A, B* y *C*



- Aplica herramientas y software tecnológicos, en la interpretación y análisis de distintos problemas y situaciones para la toma de decisiones, dentro y fuera de la matemática.

Gráfica de la función arco tangente

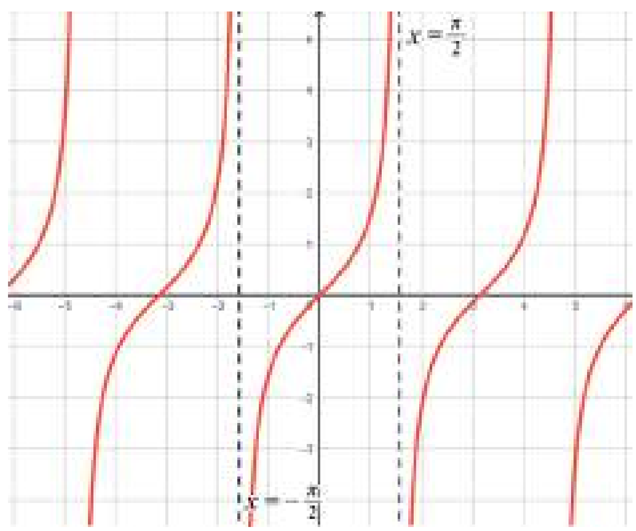
¿Cuál es el domino y el rango de la función tangente?

Los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión tienen aplicaciones en la navegación, en la topografía, en la ingeniería civil, en la planificación de sistemas de servicio de agua potable, de los de desagüe, etc. Además, en la antigüedad, y aún hoy en día, estos se utilizan para calcular la posición de los cuerpos celestes, para estimar la distancia desde la tierra hasta algunas estrellas cercanas, etc.

La inversa de la función tangente

Solo resta estudiar la inversa de la función $f(x) = tan\ x$. La gráfica que sigue, muestra las curvas que corresponden a la función tangente. Para que su inversa exista, debemos, como antes, restringir el dominio. Una manera de hacerlo es considerar solamente el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Observa que, en ese intervalo, se verifica la "prueba de la recta horizontal", es decir, si $x \neq x^*$, entonces, $tan\ x \neq tan(x^*)$, esto puedes interpretarlo así: a pre-imágenes distintas se le asocian imágenes distintas.



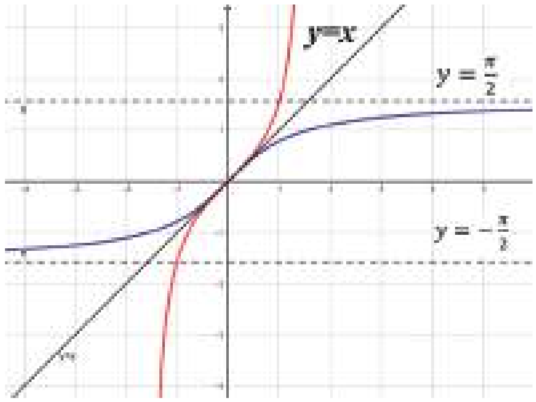
Una pregunta en este punto es: ¿por qué no se considera al intervalo cerrado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ como dominio de la función tangente? Recuerda que: tanto $cos(-\frac{\pi}{2})$ como $cos(\frac{\pi}{2})$ son iguales a 0. Por tanto, la tangente de esos ángulos, dada por el cociente del seno sobre el coseno, no está definida.

Luego, para el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se define la inversa de la función tangente o **arcotangente** en símbolos: ***tan*$^{-1}$**, o bien, ***arctan***, de la siguiente forma: para cuaquier número real x:

$$tan^{-1}\ x = y, \text{ si y solo si, } tan\ y = x.$$

Con x un número real cualquiera.

Y ya estás en condiciones de construir la gráfica del *arctan x*. Lo cual puede hacerse representando en el *Plano Cartesiano* una serie de puntos, con apoyo en la calculadora o con el método de reflejar la curva de la tangente, en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, con respecto a la recta $y = x$.

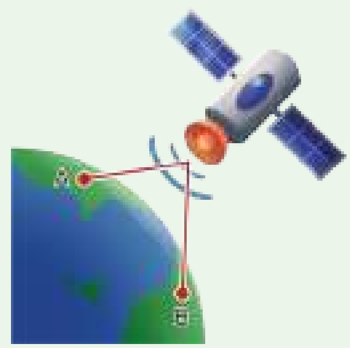


La curva en color azul describe la función *arctan x*.

Como observas, las imágenes de la función *arctan x* están en el intervalo: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Como $tan(-\frac{\pi}{2})$ y $\tan(\frac{\pi}{2})$ no existen, entonces, los puntos $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ no están en el rango de la *arctan x* y las rectas $y = \frac{\pi}{2}$ y $y = -\frac{\pi}{2}$ son sus asíntotas horizontales.

Una interesante aplicación de las funciones trigonométricas, se encuentra en determinar qué tan alta debe ser la órbita de un satélite de observación para captar, en una misma toma, a dos puntos sobre la superficie de la tierra.



¿Cómo evaluar el *arctan x***?**

Ejemplo 1:

¿Cuál es el valor de *arctan*(1)? Para responder esto debes preguntarte: ¿qué número en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ verifica que su tangente sea igual a 1? Y, ¿cómo sabes, $tan 45^\circ = tan(\frac{\pi}{4}) = 1$?

Por tal razón: $arctan(1) = tan^{-1}(1) = (\frac{\pi}{4})$.

Ejemplo 2:

¿Cuál es el valor de *arctan*(-33)? En este caso, puedes apoyarte en la calculadora y escribir:

$arctan(-33) = tan^{-1}(-33) \approx -88.26429$.

- (a) **Obtén** el valor de $arctan\sqrt{2}$. (b) ¿Existe el arcoseno de 0? (c) **Da** un ejemplo de otro intervalo que pueda servir de dominio a la función tangente, tal que exista su inversa.

- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar, de manera precisa, modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Actividad grupal

Representación gráfica de las funciones inversas de la secante, la cosecante y la cotangente

¿Qué haremos?

A partir de las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente, construirán las gráficas de sus funciones inversas.

¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, transportador y calculadoras (científica y gráfica).

¿Cómo nos organizamos?

Trabajen en equipos de 3 ó 4 integrantes, expresen sus ideas matemáticas, y cooperen en todo momento con sus compañeros.

¿Cómo lo haremos?

Reproduzcan en sus cuadernos las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente, que se muestran en las figuras que siguen.

En esta gráfica se han indicado unidades en radianes, en el eje *X*.

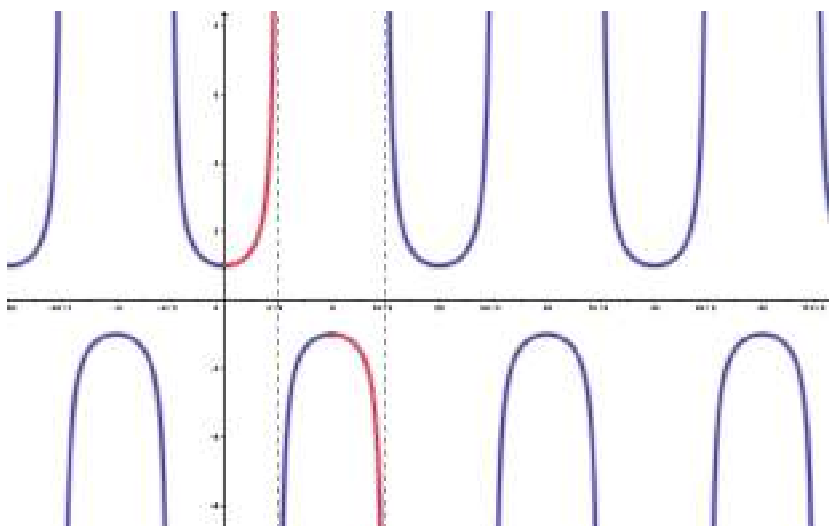


Figura 1. *F unción secante f, restringiendo su dominio a Dom f =* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Observen que se ha restringido el dominio de f al conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Por tal razón, la curva que corresponde a $y = sec\ x$, se compone de los “brazos” destacados en color rojo.

En ese intervalo, tal como han estudiado a lo largo de esta Unidad, $y = sec\ x$, tendrá inversa.

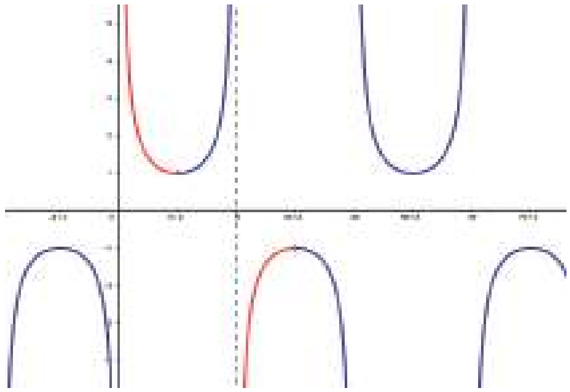


Figura 2. *Función cosecante g, Dom g* = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

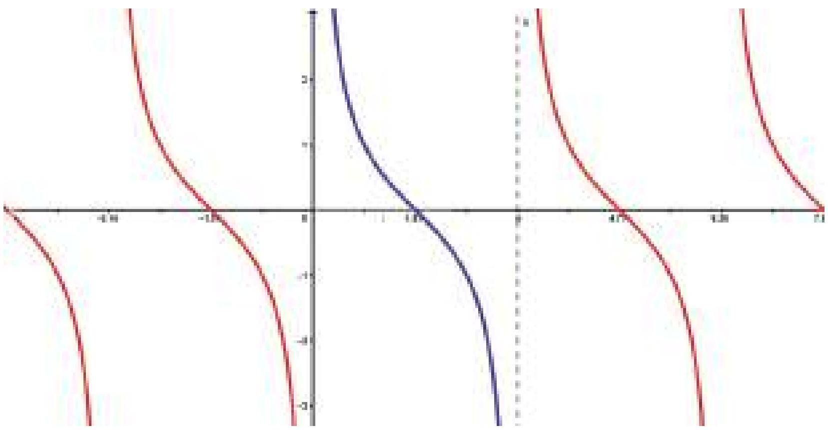


Figura 3. *Función cotangente h, Dom h* = $(0, \pi)$.

Utilicen la técnica de reflejar las curvas que corresponden a cada una de estas funciones, para obtener sus inversas.

Calculen (con apoyo en una calculadora) en cada caso, el valor de la función inversa, para algunos valores de su dominio. Y representen los puntos obtenidos en las gráficas correspondientes.

En esta gráfica de la función cosecante, también se indicaron unidades en radianes, en el eje *X*.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo presentará sus resultados a los demás grupos, y describirá el proceso seguido.

Coevaluación

Los estudiantes revisarán sus gráficas, con apoyo del docente, identificarán los errores cometidos y buscarán soluciones para estos.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar? ¿Cómo puedes hacerlo?

- Integra la tecnología en los procesos matemáticos para interpretar, de manera precisa, modelos asociados a situaciones dentro y fuera de la matemática.

Evaluación

- **Construye** una tabla de valores para la función $f(x) = sen\ x$. Puedes seleccionar 10 números reales, dentro del intervalo $[0, 2\pi]$.

	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_{10})$
x_n				

  - **Representa** los puntos obtenidos en el *Plano Cartesiano*.
  - **Traza** la curva que se corresponde con tales puntos.
  - **Compara** tu gráfica con la construida en la primera lección de esta Unidad.
  - **Detecta** los posibles errores y haz los ajustes necesarios.

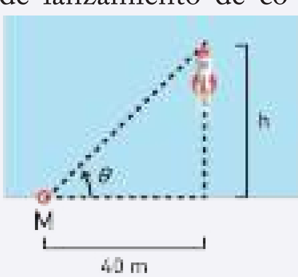
- **Selecciona** un número real k cualquiera, siempre que $k \neq 0$, y construye la tabla que sigue para la función $f(x) = 2sen\ x$.

	$f(x_1)+k$	$f(x_2)+k$	...	$f(x_{10})+k$
x_n				

  - **Representa** los puntos obtenidos.
  - **Traza** la curva asociada.
  - **Compara** la gráfica de $f(x) + k$ con la de $f(x)$.
  - ¿Qué conclusiones puedes dar? Discute tus ideas con tus compañeros y el docente.

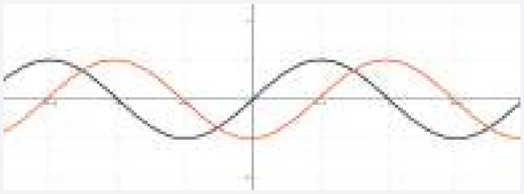
- **Repite** la actividad anterior, pero esta vez considerando la misma función $f(x) - k$. ¿A cuáles conclusiones llegas?

- En un experimento de lanzamiento de cohetes en vertical, un observador se aleja 40 m del dispositivo de lanzamiento, y capta desde allí, una imagen del cohete a un ángulo de elevación θ.



Escribe la altura h del cohete en términos del ángulo de elevación θ.

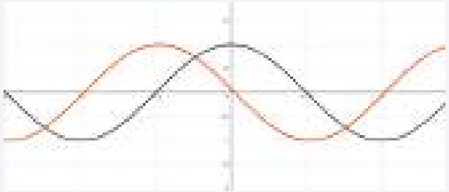
- ¿Cuántos ceros alcanza la función $sen\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?
- ¿Cuántos ceros alcanza la función $(sen\ x) + k$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?
- ¿Cómo se afectará la gráfica de $f(x) = cos\ x$, si se le suma o resta a $f(x)$ una constante k.
- La imagen que sigue, muestra las curvas que corresponden a la función $f(x) = sen\ x$ (en color negro) y a una traslación de esta (en color rojo).



¿Cuál es la expresión que define a la función trasladada?

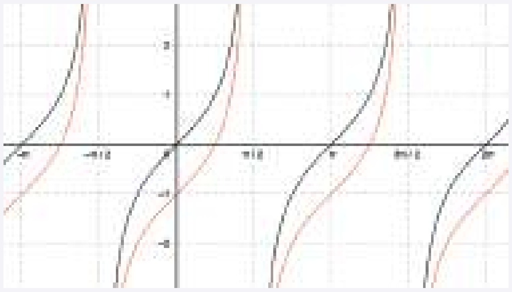
Discute tus ideas con tus compañeros y docente.

- ¿Por qué $tan\ x$ no está definida en $x = \frac{3\pi}{2}$?
- Si se restringe el dominio de $tan\ x$ al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ¿está definida $tan^{-1}\ x$ en $\frac{\pi}{2}$? **Justifica** tu respuesta.
- En la imagen se muestra la gráfica de $cos\ x$, en color negro.



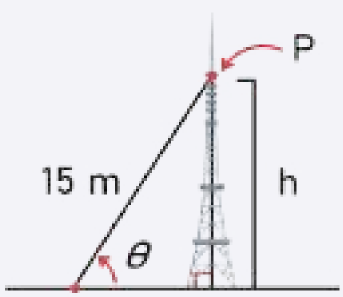
Se muestra, además, una traslación de esta función. ¿Cuál es la expresión simbólica de dicha traslación? **Discute** tus ideas con tus compañeros y el docente.

- A continuación, se muestra la gráfica de la función tangente, en color negro, así como de una traslación de esta, en color rojo.



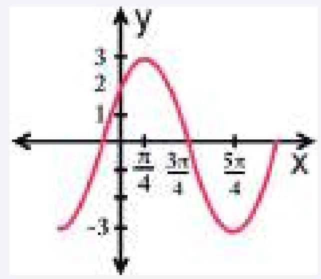
¿Cómo puede obtenerse esta traslación, a partir de *tan x*?

- **Calcula** (a) $tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, (b) cos^{-1} (2), (c) $sen^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ y (d) sec^{-1} (2). **Apóyate** tanto en la tabla de valores de las razones trigonométricas para ángulos especiales, como en la calculadora.
- ¿Cuál es el valor aproximado de cot^{-1} (0.569)?
- ¿Existe $cot^{-1}(0)$? **Observa** la gráfica de cot^{-1} y **justifica** tu respuesta.
- Una guaya de seguridad de 15 m sostiene una estructura, justo en un punto *P* de altura *h*, tal como se muestra en la imagen que sigue.

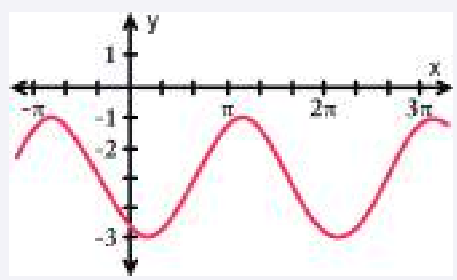


  - **Escribe** el ángulo θ como en términos de la altura *h*.
  - ¿Cuál es la medida del ángulo θ?
  - ¿Cuáles son los cortes con el eje *X* de la función *f*, descrita en la actividad anterior?

- ¿Cuál es el valor de la expresión $cos^{-1}(cos\ x)$? Si se toma como intervalo para el argumento, *x* a $[0, \pi]$. **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuál es el valor aproximado de $sen^{-1}(0.16573)$?
- ¿Cuál es el valor de la expresión $cos(cos^{-1}x)$? Si se toma como conjunto para las *x* a [-1, 1].
- **Escribe** una ecuación para representar la gráfica que se muestra, usando
  - La función seno
  - La función coseno



- **Consulte** el gráfico de la curva sinusoidal.
  - ¿Cuál es la amplitud?
  - ¿Cuál es el período?
  - ¿Cuál es el cambio de fase?
  - ¿Cuál es el rango?
  - ¿Cuál es la ecuación la curva?



Competencias Específicas

- Emplea ideas, oralmente y por escrito, haciendo uso de la notación apropiada y valorando la potencia de ésta en el desarrollo de las propias ideas matemáticas.
- Juzga la validez de un argumento matemático haciendo uso de los conocimientos y las reglas de razonamiento lógico.
- Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera del contexto matemático y busca sus soluciones.
- Justifica, respetando e integrando el criterio de las demás personas, soluciones a problemas a partir de sus conocimientos matemáticos.
- Aplica herramientas tecnológicas para la toma de decisiones frente a determinados problemas dentro y fuera de la matemática.
- Aplica la metodología de resolución de problemas para descomponer y estudiar los problemas relativos a cambio climático y preservación del medio ambiente.
- Aplica sus conocimientos matemáticos mostrando interés en la discusión e interpretación de situaciones de su entorno.

Unidad 12

Resolución de triángulos oblicuángulos

Situación de aprendizaje

En la imagen se muestran los ángulos de elevación desde dos puntos de observación hasta el punto más alto del monumento.

¿Es posible calcular la altura del monumento solo con esta información?

¿Falta algún dato adicional?

¿Qué relaciones trigonométricas pueden aplicarse aquí?

Contenido

Una identidad trigonométrica es una igualdad $f(x) = g(x)$ que se cumple para cualquier valor de x, siendo f y g funciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas

¿Cuáles son los valores reales de x para los cuales se cumple la igualdad $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$?

Las identidades trigonométricas fundamentales

Relación de las funciones trigonométricas seno y coseno, definidas para todo número real x, con la trigonometría del ángulo.

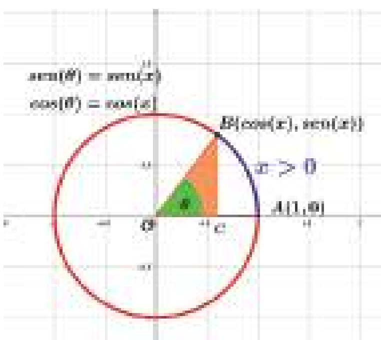


Figura 1

Las identidades trigonométricas son deducidas directamente de las definiciones de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, se denominan identidades fundamentales.

Entre las identidades trigonométricas fundamentales, se encuentran las llamadas recíprocas y pitagóricas. Estas identidades permiten verificar otras identidades y resolver ecuaciones trigonométricas.

Tal como se muestra en la figura 1, en el triángulo rectángulo ΔOCB, dado que la hipotenusa tiene medida 1, es posible escribir las razones trigonométricas:

$$sen(x) = \overline{BC}, \cos(x) = \overline{OC}, tan(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}.$$

$$csc(x) = \frac{1}{\overline{BC}}, sec(x) = \frac{1}{\overline{OC}} \text{ y } cot(x) = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}.$$

Observa que, las igualdades $sen\ x = \overline{BC}$ y $csc\ x = \frac{1}{\overline{BC}}$ permiten concluir que, $\csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$. Las identidades recíprocas restantes se obtienen de manera similar. Además, $sen(x) = \overline{BC}, cos(x) = \overline{OC}, tan(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}$ implica que $\tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$.

Demostración de las identidades Pitagóricas

Al aplicar el Teorema de Pitágoras, con relación al triángulo rectángulo ΔOCB de la figura 1, se cumple que $(\overline{BC})^2 + (\overline{OC})^2 = 1$. Sustituyendo las relaciones anteriores en esta última, se concluye que:
$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$.

Si se toma la identidad anterior como punto de partida, puedes dividir cada miembro de la igualdad entre $cos^2(x)$, siempre que $cos(x) \neq 0$. En consecuencia, $\frac{sen^2 x}{cos^2 x} + \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$.

Lo anterior implica que, $\left(\frac{sen\ x}{cos\ x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{cos\ x}\right)^2$. Es decir,
$tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$.

De modo similar, al dividir $sen^2x + cos^2x = 1$ entre sen^2x, siempre que $sen^2x \neq 0$. Se obtiene la identidad pitagórica:

$$1+cot^2(x) = csc^2(x)$$

Verificación de identidades trigonométricas

Para verificar una identidad trigonométrica se aplica alguno de los dos métodos siguientes:

Método I: utiliza las identidades fundamentales, u otras ya demostradas, para que un lado de la igualdad tome exactamente la forma del otro.

Método II: convierte los lados de la igualdad hasta obtener la misma expresión en ambos.

Ejemplo: aplica el método I para verificar la identidad trigonométrica, $\dfrac{1-2\,cos^2(x)}{sen(x)cos(x)} = tan(x) - cot(x)$.

Solución: a partir del lado izquierdo de la igualdad.

Procedimiento	Transformación
Sustituir $1 = sen^2(x) + cos^2(x)$	$\dfrac{1-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} = \dfrac{sen^2(x)+cos^2(x)-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)}$
Sumar términos semejantes.	$\dfrac{1-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} = \dfrac{sen^2(x)-cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)}$
Expresar como diferencia de cocientes.	$\dfrac{1-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} = \dfrac{sen^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} - \dfrac{cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)}$
Simplificar.	$\dfrac{1-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} = \dfrac{sen(x)}{cos\,(x)} - \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$
$\dfrac{sen(x)}{cos\,(x)} = tan\,(x)$ $\dfrac{cos(x)}{sen(x)} = cot\,(x)$	$\dfrac{1-2cos^2(x)}{sen(x)cos\,(x)} = tan(x) - cot\,(x)$

- **Aplica** el método II para verificar la identidad trigonométrica, $\dfrac{1+cot(x)}{csc(x)} = \dfrac{1+tan(x)}{sec(x)}$.

La astronomía fue una de las áreas que motivó importantes desarrollos de la trigonometría en varias culturas alrededor del mundo.

Identidades recíprocas
$\csc x = \dfrac{1}{sen\ x}$
$\sec x = \dfrac{1}{cos\ x}$
$\cot x = \dfrac{1}{tan\ x}$
Identidades Pitagóricas
$sen^2\,x + cos^2\,x = 1$
$tan^2\,x + 1 = sec^2\,x$
$1 + cot^2\,x = csc^2\,x$

Una observación sobre la notación utilizada. Como advertirás, se ha utilizado aquí la notación $sen^2(x)$, en vez de $(sen(x))^2$. Y, lo mismo en el caso de $cos^2(x)$, $tan^2(x)$, etc. Ésta es una de las convenciones más generalizadas.

- Comunica sus ideas en el desarrollo histórico de la trigonometría y las vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno.

Otras identidades trigonométricas fundamentales

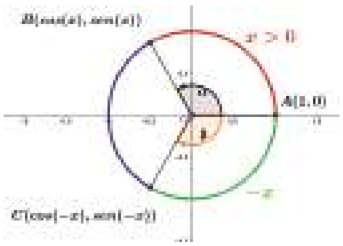


Figura 2

Además de las identidades trigonométricas recíprocas y pitagóricas, ¿existen otras que sean deducibles directamente de la definición de funciones trigonométricas?

Existen identidades trigonométricas fundamentales que tienen que ver con el seno y el coseno de un ángulo dado y de su opuesto.

Identidades par e impar
$sen(-x) = -sen(x)$
$cos(-x) = cos(x)$
$tan(-x) = -tan(x)$
$sec(-x) = sec(x)$
$csc(-x) = -csc(x)$
$cot\, x = -cot(x)$

Identidades pares-impares

Propiedad: para todo número real x se verifica que:

- $sen(-x) = -sen(x)$ identidad impar
- $cos(-x) = cos(x)$ identidad par

Demostración: considera la circunferencia unitaria y x un número real positivo, como se muestra en la figura 2. Al aplicar la definición de las funciones seno y coseno, el punto $B(a_1, b_1)$ representado es tal que,

$$a_1 = cos(x) \text{ y } b_1 = sen(x).$$

El punto $C(a_2, b_2)$ es tal que,

$$a_2 = cos(-x) \text{ y } b_2 = sen(-x)$$

Los puntos $B(a_1, b_1)$ y $C(a_2, b_2)$ son simétricos respecto al eje de las abscisas, por lo tanto:

$$a_2 = a_1 \rightarrow cos(-x) = cos(x)$$

$$b_2 = -b_1 \rightarrow sen(-x) = -sen(x)$$

En la demostración se ha considerado sin pérdida de generalidad a x como un número real positivo, pues una argumentación similar se aplica si x representa un número real negativo. En el caso $x = 0$, ambas igualdades enunciadas en la propiedad, se cumplen.

Propiedad: para todo número real $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$ siendo $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que, $tan(-x) = -tan(x)$ (identidad impar).

Demostración:

$$tan(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{cos(x)} \rightarrow tan(-x) = -tan(x).$$

Después de una tormenta, Daniel notó que un árbol se había inclinado 20° desde la vertical y que cuando estaba parado directamente debajo la copa del árbol, su distancia a la base del árbol era de 3 metros ¿Qué tan alto había sido el árbol?

Expresiones equivalentes para $cos(\pi \pm x)$ **y** $sen(\pi \pm x)$

¿Qué sucede si se suma π al argumento de las funciones seno y coseno?

Propiedad: para todo número real x se verifica que:

- $cos(x + \pi) = -cos(x)$
- $sen(x + \pi) = -sen(x)$

Demostración: considera la circunferencia unitaria y x un número real positivo, como se muestra en la figura 3. Al aplicar la definición de las funciones seno y coseno, el punto $B(a_1, b_1)$ representado es tal que,

$$a_1 = cos(x) \text{ y } b_1 = sen(x).$$

La longitud del arco $\widehat{BC}$ es igual a π, por tanto, la longitud del arco $\widehat{AC}$, (medido en sentido antihorario) es igual a $x + \pi$, de modo que el punto $C(a_2, b_2)$ representado es tal que,

$$a_2 = cos(x + \pi) \text{ y } b_2 = sen(x + \pi).$$

Los puntos $B(a_1, b_1)$ y $C(a_2, b_2)$ son simétricos respecto al origen de coordenadas, así que, $a_2 = -a_1$ y $b_2 = -b_1$, permite concluir que,

$$cos(x + \pi) = -cos(x) \text{ y } sen(x + \pi) = -sen(x).$$

Propiedad: para todo número real x se verifica que:

- $sen(\pi - x) = sen(x)$
- $cos(\pi - x) = -cos(x)$

Demostración: en las identidades anteriormente demostradas se sustituye x por $-x$, entonces,

$$cos(-x + \pi) = -cos(-x) \rightarrow cos(\pi - x) = -cos(x).$$

$$sen(-x + \pi) = -sen(-x) \rightarrow sen(\pi - x) = sen(x).$$

- **Demuestra** que la función $f(x) = tan^2(x) + cos(x)$ es par.
- **Demuestra** que la función $g(x) = sen(2x) + cot(3x)$ es impar.

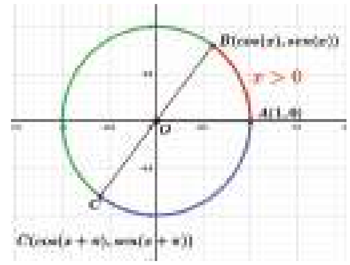
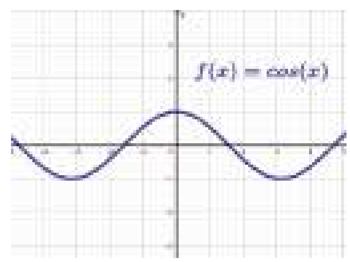


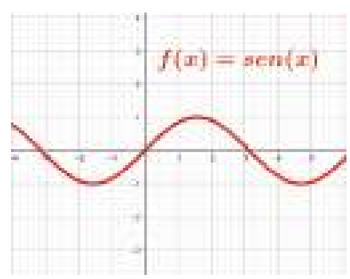
Figura 3

La función $f(x) = cos(x)$ es una función par, pues $f(-x) = f(x)$
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de las ordenadas (Y)



2. La función $g(x) = sen(x)$ es impar, pues $f(-x) = -f(x)$

La gráfica de una función par es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas.



- Comunica sus ideas en el desarrollo histórico de la trigonometría y las vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno.

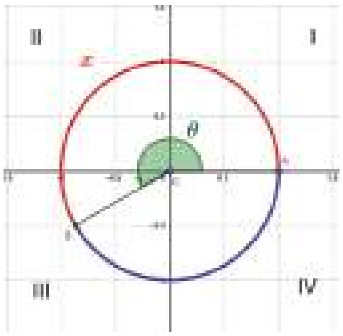


Figura 4

Aplicaciones de las funciones trigonométricas

¿Qué procedimiento algebraico aplicarías para hallar *tan*(*x*), si sabes que *cos*(*x*) = $-\frac{1}{2}$?

Con relación a la figura 4, se obtiene:

cos(*x*) = *cos*(θ)

sen(*x*) = *sen*(θ)

Cálculo de todos los valores de las funciones trigonométricas, conocido uno de ellos

Ejemplo 1: si *sen x* = -0.5 y *x* representa la medida de un ángulo θ en posición estándar, cuyo lado terminal está en el III cuadrante, ¿cuáles son los valores de las demás funciones trigonométricas para este *x*?

Solución: para responder a esto, puedes sustituir *sen x* = -0.5 = $-\frac{1}{2}$ en la identidad $sen^2x + cos^2x = 1$, con lo cual:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 x=1\rightarrow \cos^2 x=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 cos\ x=\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

Como el ángulo θ, cuya medida es x , tiene lado terminal en el III cuadrante, (ver figura 4) su coseno es negativo. Por tanto, $cos\ x=-\sqrt{\tfrac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-0.87.$

Luego, si ya conoces *sen*(*x*) y *cos*(*x*), puedes escribir todos los valores de las demás funciones trigonométricas, apoyándote en las identidades recíprocas:

La expresión "*x* representa la medida de un ángulo *θ* en posición estándar, cuyo lado terminal está en el III cuadrante", que suele sustituirse por "ángulo *x* tiene su lado terminal en el III cuadrante" advirtiendo que *x* representa un número real y *θ* un ángulo.

$sen\ x=-\frac{1}{2}$	$cos\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan x=\frac{sen\ x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\csc x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}=-2$	$\sec x=\frac{1}{\cos x}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\sqrt{3}$

Ejemplo 2: supongamos que el ángulo *x* tiene su lado final en el II cuadrante (en este caso, es frecuente decir, simplemente, que el ángulo *x* está en el II cuadrante). ¿Cómo escribir la *cot x* en función del *sen x*?

Solución: para ello, puedes apoyarte en la identidad $cot x=\frac{1}{tan}x.$ Como $tan x=\frac{sen\ x}{cos\ x}$, entonces $cot x=\frac{1}{tan\ x}=\frac{cos x}{sen\ x}.$

Solo resta expresar el *cos x* términos de *sen x*.

Esto último se logra despejando *cos x* de la identidad $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$, así: $cos^2\ x = 1 - sen^2\ x$

$$cos\ x=\pm\sqrt{(1-sen^2 x)}$$

Solo debes preguntarte ahora por el signo del *cos x* en el II cuadrante; que, como sabes, es negativo. Entonces $\cos x = -\sqrt{1 - sen^2 x}$.

Finalmente, sustituimos esto en la expresión para *cot x*:

$$\cot x = \frac{\cos x}{sen\ x} = -\frac{\sqrt{1 - sen^2 x}}{sen\ x}$$

Aplicaciones de las funciones trigonométricas

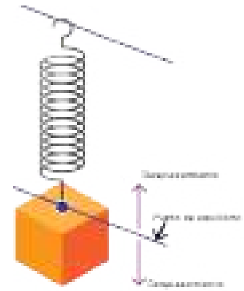


Figura 5

Ejemplo 3: una masa está sostenida al extremo de un resorte, tal como se muestra en la figura 5, si se parte desde el momento en el que tal masa está en equilibrio, su desplazamiento está dado por la ecuación:

$$f(x) = 4\ cos(3\pi x)$$

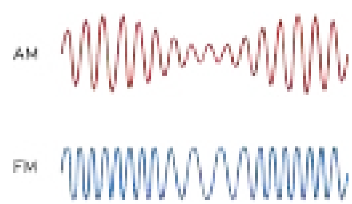
En la que x indica el tiempo en segundos, y $f(x)$ expresa el desplazamiento en pulgadas. Por ejemplo, para x=1, el desplazamiento de esta masa será:

$$f(1) = 4\ cos(3\pi) = 4(-1) = -4.$$

Un desplazamiento negativo significa que el resorte se comprime 4 pulgadas, con respecto al punto de equilibrio.

Ejemplo 4: una onda sonora es modelada por la función trigonométrica $f(t) = sen(4.5t) + sen(3.5t)$, siendo $f(t)$ la presión en la parte exterior del tímpano en el tiempo t (segundos). Utilizando software *GeoGebra*, se obtiene la gráfica de la función (figura 6). Se observa que la amplitud es variable, y está descrita por la función $g(t) = 2cos(\frac{t}{2})$. Este modelo representa un ejemplo de onda AM (Amplitud modulada).

Las ondas sonoras que emite una radio pueden ser de dos tipos: AM (Amplitud Modulada) y FM (Frecuencia Modulada). En la primera de ellas, la onda cambia o modula su amplitud, pero su frecuencia permanece constante. En la segunda, la onda mantiene su amplitud, pero su frecuencia cambia.



Las funciones trigonométricas se aplican en las representaciones de amplitud y frecuencia modulada.

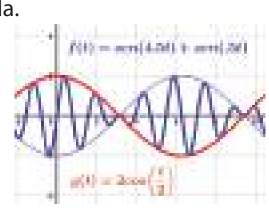


Figura 6

- **Escribe** una expresión equivalente a $\frac{tan^2(x)}{(1 - cos^2(x))^2}$ que solo dependa de $sen(x)$.
- **Calcula** el desplazamiento de la masa dada en el ejemplo 3, para x igual a $0, \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}\right),$ y $\left(\frac{3}{4}\right)$ segundos.

- Comunica sus ideas en el desarrollo histórico de la trigonometría y las vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno.

Ley de los senos

La **Ley del seno**, también conocida como **Ley de los senos**, era ya conocida por la cultura persa, alrededor del siglo X. *Nasir al-Din al-Tusi* fue un destacado científico persa-chií, que es uno de los que se le atribuye la Ley del seno.

Fuente: picryl.com

¿Conoces alguna fórmula que relacione las medidas de los lados de un triángulo no rectángulo con las medidas de sus ángulos interiores?

Hasta ahora se han estudiado razones trigonométricas que solo aplican en el caso de los triángulos rectángulos, pero, ¿qué sucede respecto a los triángulos no rectángulos, denominados triángulos oblicuos?

Demostración de la Ley de los senos

En un triángulo ΔABC oblicuo, tal como el que se muestra en la figura 7 se ha etiquetado con *a*, *b* y *c* a las medidas de los lados, y a los vértices con *A*, *B* y *C*, respectivamente.

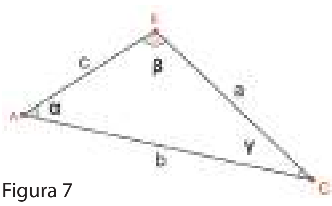


Figura 7

En este se verifican las siguientes igualdades, conocidas como *Ley de los senos*.

$$\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}$$

Es decir, en un triángulo cualquiera Δ*ABC*, la razón entre el seno de alguno de sus ángulos interiores y la medida del lado opuesto a ese ángulo es constante.

Observa que, como consecuencia de las propiedades simétrica y transitiva de la relación de igualdad, esta ley abarca en realidad tres igualdades:

1. $\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b}$ 2. $\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \gamma}{c}$ 3. $\frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}$

Para demostrar la ley de los senos, se realiza una construcción auxiliar que consiste en particionar el Δ*ABC* en dos triángulos rectángulos (figura 8). Para ello, en este caso, basta con trazar el segmento con extremos en *B* y en *D*, de manera que sea perpendicular a $\overline{AC}$. Así, $\overline{BD}$ tiene medida *h*, es decir, es precisamente una de las alturas de este triángulo.

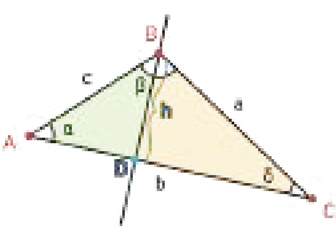


Figura 8

Observa ahora, que en el triángulo Δ*ABD*, $sen\ \alpha = \frac{h}{c}$.
Es decir: $h = c\ sen\ \alpha$.

Luego, en el Δ*BCD* se cumple que $sen\ \gamma = \frac{h}{a}$, con lo cual: $h = a\ sen\ \gamma$.

Igualando estas dos expresiones, se tiene que $c\ sen\ \alpha = a\ sen\ \gamma$. Lo cual equivale a escribir: $\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \gamma}{c}$.
Con un razonamiento similar se demuestran (1) y (3).

Aplicaciones de la Ley de los senos

Ejemplo 1: en un mismo instante se han medido, desde los puntos A y B, los ángulos de elevación hacia un globo meteorológico (figura 9). Si se sabe que $\overline{AC}$ =200 m, ¿cuál es la distancia desde C hasta el globo meteorológico?

Solución: se halla la medida del ángulo correspondiente al vértice A, $\angle ABC = 180^0 - (50.8^0 + 83^0) = 46.2^0$. La medida de este ángulo será necesaria para el siguiente cálculo. Ahora, con base en la *Ley de los Senos*:

$$\frac{sen\ 50.8^0}{a} = \frac{sen\ 46.2^0}{b}$$

Sustituyendo el valor $b = \overline{AC} = 200$, se obtiene,

$$\frac{sen\ 50.8^0}{a} = \frac{sen\ 46.2^0}{200\text{ m}}$$

Permite escribir que, $a = 200\frac{sen\ 50.8^0}{sen\ 46.2^0} \approx 214.74$ Se concluye que la distancia desde el punto C al globo meteorológico es de 214.74 metros.

Ejemplo 2: un funicular lleva pasajeros del punto A, que se encuentra a 2 kilómetros de la base de una montaña, hasta la estación de un mirador en la cima de la montaña en el punto B, como se muestra en la figura 10. El ángulo de elevación de B desde A es 20°, mientras que el ángulo de elevación de B desde el pie de la montaña es de 50°, ¿qué distancia recorre el funicular entre A y B?

Solución: se halla el ángulo en el vértice C, $\angle ACB = 180^0 - 50^0 = 130^0$, y se halla el ángulo en el vértice B, $\angle ABC = 180^0 - 20^0 - 130^0 = 30^0$, para aplicar la *Ley de los senos*, $\frac{sen\,(130^0)}{\overline{AB}} = \frac{sen\,(30^0)}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{sen\,(30^0)}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$

Se obtiene, $\overline{AB} = 4sen\,(130^0) = 3.06$. Entre A y B el funicular recorre 3.06 kilómetros.

- **Resuelve:** en el ejemplo 1, luego un tiempo t, los ángulos de elevación son de 58.1° y 76°. ¿Cuál es ahora la distancia a?

La **Ley de los senos** puede aplicarse si se conocen:

(a) Un lado y dos ángulos, tal como en el ejemplo del globo meteorológico.

(b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de éstos.

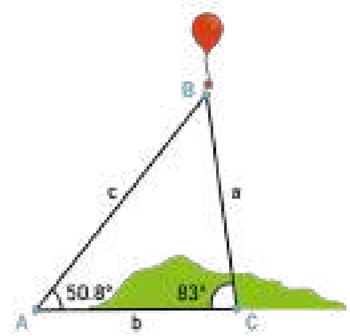


Figura 9

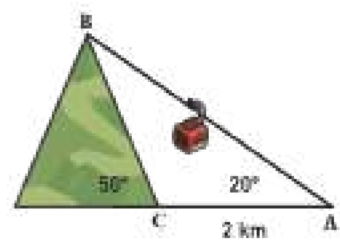


Figura 10. Fuente: Freepik

- Comunica sus ideas en el desarrollo histórico de la trigonometría y las vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno.
- Se expresa con criterios claros al interpretar los procesos implicados en la resolución de triángulos rectángulos, oblicuángulos e identidades trigonométricas asociadas a situaciones matemáticas.

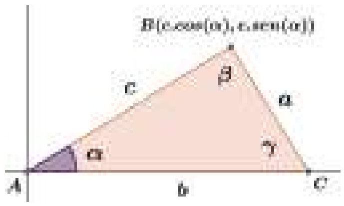


Figura 11

Ley de los cosenos

¿Qué relación algébrica existe entre los lados de un triángulo oblicuángulo y los cosenos de sus ángulos interiores?

Ley de los cosenos

Si ΔABC es un triángulo cualquiera como el mostrado en la figura 11, donde α es el ángulo en A, β es el ángulo en B, y γ es el ángulo en C, entonces se verifican las igualdades que siguen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Las tres igualdades anteriores, con relación a un triángulo oblicuángulo, como el que se ha indicado, constituyen la **Ley de los cosenos**.

La Ley de los cosenos es aplicable en un triángulo, solo en alguno de los dos casos siguientes:

- Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Cuando se conocen los tres lados.

La **Ley del coseno**, también denominada **Ley de los Cosenos** o **Teorema de al-Kashi**, expresa que el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus otros lados, menos el doble del producto de esos otros lados por el coseno del ángulo que estos determinan.

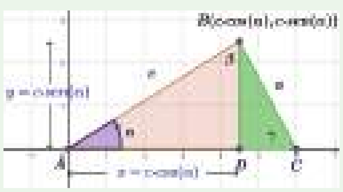


Figura 12

Demostración de la ley de los cosenos

Dado el triángulo ΔABC, se traza un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que el punto A quede en el origen del Sistema de Coordenadas, y el punto C quede en el eje X.

¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

Al trazar un segmento auxiliar con extremo en B y el otro extremo en el eje X (figura 12), perpendicular al eje X, este indicará la coordenada x del punto B. Esta coordenada puede hallarse aplicando la razón trigonométrica: $\cos \alpha = \frac{x}{c}$. Con lo cual, $x = c \cdot \cos \alpha$.

Por su parte, la coordenada y del punto B se obtiene aplicando la razón trigonométrica: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{c}$. Por tanto, $y = c \cos \alpha$.

Así, las coordenadas del punto B son $(c \cdot \cos \alpha, c \cdot \operatorname{sen} \alpha)$.

Si en $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, se sustituye $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces,

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

Solo resta aplicar el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ΔBDC. Observa que su hipotenusa mide a. Sus catetos,

$\overline{DC} = b - c \cdot \cos, \ \overline{BD} = c \cdot \operatorname{sen} a$

Entonces:

$$a^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\,sen\,\alpha)^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha + c^2 sen^2\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

De forma similar, se demuestran las otras dos ecuaciones (para lo cual se ubica en el origen cada uno de los dos vértices restantes).

Si en $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, se sustituye $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces,

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

Por tanto, la Ley de los cosenos es una generalización del Teorema de Pitágoras.

Aplicación de la Ley de los cosenos

En la demostración de una de las ecuaciones de la Ley del Coseno, se aplicó una de las identidades trigonométricas fundamentales: $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$.

Ejemplo: se requiere calcular la distancia entre los puntos B y C, a las orillas de un lago, con la intención de instalar una línea eléctrica sub-acuática (figura 13). Para hacerlo, con apoyo en la *Ley del Coseno*, basta con obtener los datos que se muestran en la figura, en este caso $\alpha = 40°$. Entonces:

$$(\overline{BC})^2 = (380)^2 + (340)^2 - 2(380)(340)\cos 40°$$

En consecuencia: $\overline{BC} \approx 249.12$ m.

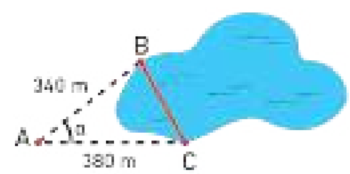


Figura 13

- Los lados de un terreno triangular miden 128, 107 y 55 metros de longitud. **Determina** el mayor valor de los ángulos del terreno. **Compara** tus resultados con dos de tus compañeros y **redacten** una conclusión respecto a la utilidad de las Leyes de senos y cosenos.

- **Haz** un listado de los temas estudiados en esta unidad, ¿consideras que tu preparación previa ha sido favorable para la comprensión del contenido aquí desarrollado?

- Se expresa con argumentos convincentes y bien articulados al interpretar sus ideas en el desarrollo histórico de la trigonometría y los vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno en situaciones del contexto.

Actividad grupal

Estimando la altura de un monumento

Las leyes estudiadas en esta Unidad, así como las identidades y razones trigonométricas, representan herramientas potentes para calcular distancias inaccesibles o de difícil acceso, así como la medida de los ángulos comprendidos.

¿Qué haremos?

Estimar la altura de un monumento arquitectónico e histórico de la República Dominicana, con base en los conceptos y propiedades trigonométricas.

¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, transportador, *calimete*, cinta adhesiva, cuerda o hilo, una plomada (puede ser una pieza pequeña de madera o de algún otro material) y calculadora científica.

Con métodos similares al aplicado en esta Actividad Grupal, pueden calcularse grandes distancias, como, por ejemplo, la que hay desde la Tierra a la Luna.

Imagen: "La escuela de Atenas" (detalle), obra pictórica de Rafael (1,483-1,520). Fuente. wikipedia.org

¿Cómo nos organizamos?

Trabajen en equipos de 3 o 4 integrantes, expresen sus ideas con sus compañeros.

¿Cómo lo haremos?

Deben seleccionar un monumento arquitectónico e histórico de la República Dominicana que se encuentre en su localidad. Incluso, pueden seleccionar la edificación escolar.

En la imagen se muestra, a manera de ejemplo, el Monumento de *Fray Antonio de Montesinos* (ubicado en la ciudad de Santo Domingo, como un homenaje a su lucha por la dignidad de los pueblos indígenas y en contra de la esclavitud).

Necesitarán construir un instrumento de medición de ángulos como el que se encuentra en esta página al margen. El calimete puede ser utilizado como guía de observación, el cual puede fijarse al transportador con la cinta adhesiva.

Deben marcar dos puntos de observación A y B (alineados con respecto a la base de la altura de P).

Midan la distancia $\overline{AB}$.

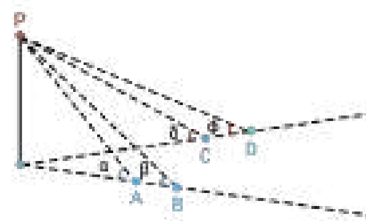
Seleccionen un punto a observar, en el ejemplo es el punto P, justo en lo más alto del Monumento.

Estimen, utilizando el instrumento que construyeron, la medida de los ángulos de elevación α y β.

Calculen, con base en los conceptos y propiedades trigonométricas, las distancias $\overline{AP}$, y $\overline{BP}$.

¿Cuál es la altura del punto P?

Luego, seleccionen otros dos puntos de observación, etiquétenlos con C y D (alineados con respecto a la base de la altura de P), y calculen nuevamente la altura del punto P.



Elaboren un reporte de su investigación.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo presentará sus resultados a los demás grupos, y describirá el proceso seguido.

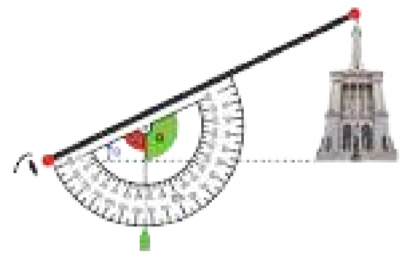
Coevaluación

Los estudiantes, con apoyo de su docente, revisarán sus cálculos, para identificar posibles errores cometidos, buscar soluciones para estos y describir formas de aumentar la precisión en las mediciones.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar? ¿Cómo puedes hacerlo?

La estimación de la medida de los ángulos de elevación pueden hacerla con apoyo en un instrumento como el que se muestra (conocido como **teodolito**).



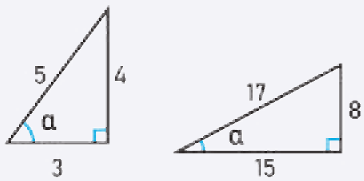
Se sugiere el siguiente enlace, para observar la construcción de un teodolito casero, con la finalidad de utilizar en la actividad grupal

- Resuelve situaciones de la comunidad al interpretar ideas matemáticas en el desarrollo histórico de la trigonometría y los vincula con las funciones trigonométricas y la ley de seno y del coseno en situaciones del contexto.
- Formula problemas y situaciones del contexto asociados a la resolución de triángulos rectángulos, oblicuángulos e identidades trigonométricas y contrasta con sus compañeros las posibles vías de solución.

■ Para cada uno de los ángulos dados, **escribe** las otras cinco razones trigonométricas de α , suponiendo que α es un ángulo agudo.

- $sen\ \alpha = \left(\frac{1}{4}\right)$
- $cos\ \alpha = 1$
- $tan\ \alpha = \sqrt{2}$

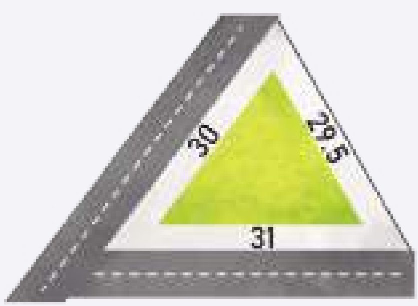
■ **Halla** las seis razones trigonométricas asociadas al ángulo α.



(a) (b)

■ ¿Es $f(\alpha) = tan\ \alpha$ una función par? ¿O es impar? **Justifica** tu respuesta y discútela con tus compañeros y docente.

■ Sea el terreno triangular cuyo croquis se muestra en la imagen, ¿cuál es su área?



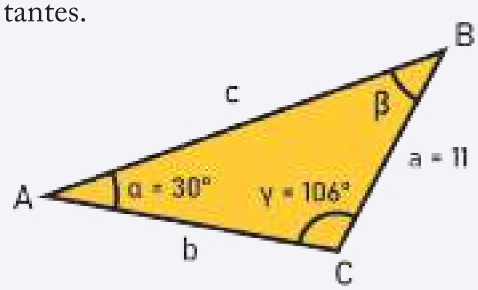
■ **Evalúa** cada una de las expresiones dadas sin utilizar la calculadora:

- *sen* 30º *csc* 30º
- (*sen* 240º)^2 + (*cos* 240º)^2

■ Si en un triángulo se conocen las medidas de un lado y de dos de sus ángulos, o bien, la medida de dos de sus lados y del ángulo opuesto a uno de esos lados, ¿cuál de las Leyes (del seno o del coseno) puede aplicarse?

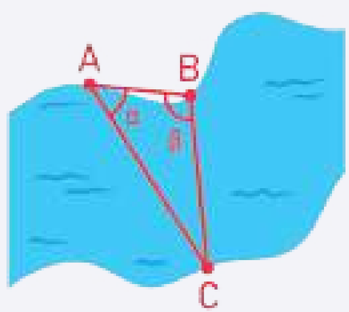
■ Si en un triángulo se conoce la medida de dos de sus lados y del ángulo comprendido entre ellos, o bien, la medida de sus tres lados, ¿cuál de las leyes (del seno o del coseno) puede aplicarse?

■ Dada la información que se muestra en el triángulo ΔABC, **halle** todas las medidas faltantes.



■ Para estimar la distancia entre los puntos *A* y *C* en las orillas opuestas de un río, un especialista siguió el procedimiento que se describe:

- Seleccionó un punto *B* ubicado en la misma orilla que el punto *A*.
- Midió la distancia *AB*, que, en este caso fue de 50 m.
- Midió los ángulos α y β (α = 48º y β = 103º).



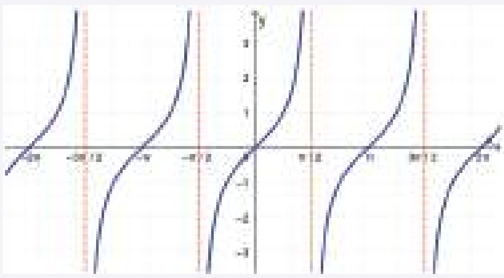
Con esta información, **calcula** *AC*

■ ¿Cuál es el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas?

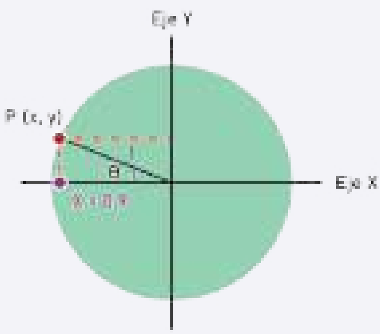
- *cos* 150º

- *tan* 60º
- *sen* (-90º)
- $cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$

■ ¿Para cuáles valores de θ es *tan* θ = 0? **Construye** una tabla con algunos de estos valores. ¿Qué implicación tiene ello en la gráfica de la función $f(\theta)$ = *tan* θ?



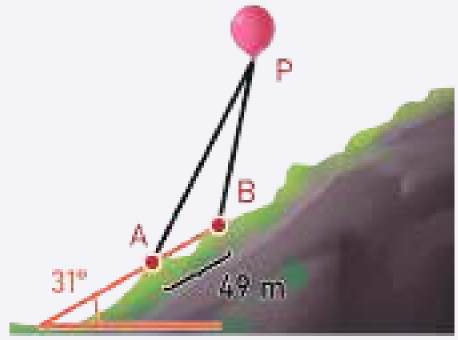
■ El punto de coordenadas $P(x,y) = \left(-0.9, \sqrt{0.19}\right)$ está ubicado en la circunferencia unitaria que se muestra en la figura.



Determina el ángulo θ, y **halla** los valores de todas las funciones trigonométricas en θ.

■ Dos observadores, ubicados en la ladera de una montaña, miden los ángulos de elevación hacia un globo de captación de datos atmosféricos ($\angle A$ = 30º y $\angle B$ = 51º). Además, estimaron que la pendiente de la colina describe un ángulo de 31º.

Ambos observadores están separados por una distancia de 49 m.



¿Cuál es la distancia desde B hasta el globo de captación de datos?

¿Cuál es la distancia desde A hasta el globo de captación de datos?

Calcule, además, la medida del ángulo $\angle APB$.

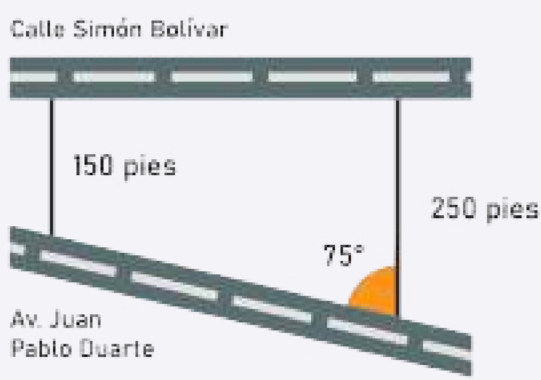
■ ¿Son las expresiones que siguen identidades trigonométricas? **Justifica** tu respuesta.

- $sen(x) = tan(x)sec(x)$
- $cos(x) = cot(x)csc(x)$

■ José posee un solar que limita con la calle Simón Bolívar y la Avenida Juan Pablo Duarte.

¿Qué longitud tiene el frente del solar en la Simón Bolívar?

¿ Qué longitud tiene el frente del solar la Avenida Juan Pablo Duarte?



BIBLIOGRAFÍA

Referencias de Matemática

- Albertí M. (2,018). *Las matemáticas en la vida cotidiana. La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión*. Madrid: Catarata.
- Andonegui, M. (2005). *El conocimiento matemático.* Serie desarrollo del pensamiento matemático N°1.
- Corbalán F. (1,995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Madrid: Graó.
- Grossman S. (1,988). *Aplicaciones del algebra lineal.* Grupo Editorial Iberoamérica.
- Kindle, Joseph, 2001; *Geometría Analítica.* Serie Schaum; México.
- Lehmann, Charles, 1988; *Geometría Analítica,* Editorial Limusa; México.
- Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall
- Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
- Pimm D. (1,987). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte / Morata.
- Socas M., Camacho M. y Hernández J. (1,998). *Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria.* Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32(Mayo/Agosto), 73-86.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precalculo: Matematicas para el cálculo*. Sexta Edición.
- Tall D. (ed.) (2,002). *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers.
- Vázquez, S. A. 2002; *Fundamentos de Geometría Analítica.* Editorial Thompson; México.

Referencias curriculares

- Germán, L., Mejía, G. E. S., Morales, J. E., Báez, E. E. R., & Diaz, Y. *Educación Vial Nivel Secundario*. https:/www.educando.edu.do/portal/wp-content/uploads/2023/03/Fasciculo-Educacion-Vial-NS.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2022). *Adecuación Curricular.* Dirección General de Currículo. Santo Domingo: MINERD. Tomado de: https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/docs/direccion-generalde-curriculo/IgwQ-adecuacion-curricular-nivel-secudariopdf.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016a). *Diseño Curricular Nivel Primario: Primer Ciclo.* Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana. [Links]
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2016). *Diseño curricular nivel secundario, primer ciclo.* Santo Domingo: MINERD. Recuperado de https://bit.ly/2wcvlnk
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016b). *Bases de la Revisión y Actualización Curricular.* Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana.
- Polanco Rivera, J. G., Cabrera , S. ., & Robles, V. . (2023). *Caracterización del currículo: su desarrollo evolutivo según los enfoques curriculares en el contexto de la enseñanza preuniversitaria de República Dominicana.* Revista De Investigación Y Evaluación Educativa. 10(1), 88–107. https://doi.org/10.47554/revie.vol10.num1.2023.pp88-107

Obras de referencia general

- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA (2013): *Diccionario del español dominicano,* Santo Domingo, Editora Judicial.
- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA. *Diccionario fraseológico del español dominicano.* Santo Domingo: Editora Judicial S.R.L., 2016. 626 pp. (ISBN: 978-9945-
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2006). *Diccionario esencial de la lengua española.* Espasa Calpe.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2010): *Ortografía de la lengua española*. Madrid, Espasa Libros.
- Rimoli, R. O. (2012). *Diccionario de Términos ambientales.* Santo Domingo: Instituto Panamericano de Geografía e Historia, Sección Nacional de República Dominicana.
- Rodríguez Rancier, E., & Despotovic, N. (2011). *Diccionario enciclopédico dominicano de medio ambiente.* Washington, DC/Santo Domingo: Global Foundation for Democracy and Development (GFDD)-Fundación Global Democracia y Desarrollo (Funglode).
- Sáez, J. L. (S. J.) (1992). *Breve historia política de la República Dominicana* (1492-1992). Revista Estudios Sociales, 25(89/90).
- Urbina Barrera, F., & Hernandez-Laroche, A. (2023). *Diccionario de la inmigración y la Otredad en las Américas en la sigo XXI.*
- UNESCO. (2017). *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación*. París: UNESCO.
- Varios autores (2003). *Enciclopedia ilustrada de la República Dominicana* (11T). Santo Domingo, Republica Dominicana: Eduprogreso, SA.

Webgrafía general

- Portal del Archivo General de la Nación. https://agn.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional para la niñez y la adolescencia https://conani.gob.do/
- Portal de la educación dominicana. https://www.educando.edu.do/
- Portal del Instituto Geográfico Nacional. https://www.ign.gob.do/
- Portal del Ministerio de Educación de la República Dominicana. https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/
- Portal del Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la República Dominicana. https://ambiente.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional de Discapacidad. https://conadis.gob.do/
- Portal de Servicios del Gobierno Dominicano. https://www.gob.do/
- Galería de arte dominicano. https://www.galeriadeartedominicana.com/

- Portal educativo de ciencias, salud y medioambiente. https://ambientech.org/
- Portal educativo para el estudio de las matemáticas. https://www.geogebra.org/
- Portal educativo para tareas escolares. https://www.educapeques.com/
- Portal educativo de lengua http://www.eldigoras.com/eldyele/lng11profyestpsb.html
- Potal de lecturas literarias y aprendizaje de la lengua http://innovacion.iems.edu.mx/portal_lengua/
- Biblioteca de literatura infantil y juvenil. https://www.cervantesvirtual.com/
- Portal de educación infantil. https://www.mundoprimaria.com/
- Recursos educativos de preescolar. https://www.twinkl.es/
- Recursos educativos diversos. https://www.edufichas.com/
- Recursos para educación secundaria. https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/secundaria/

AUTORES

- **Esther Morales.**

  Licenciada en Educación Mención Matemática, Magíster en Educación Mención Enseñanza de la Matemática y Doctora en Intervención Psicopedagógica en Contextos Educativos. Profesora jubilada con categoría Titular de la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre". Venezuela, en la que obtuvo diferentes reconocimientos por su desempeño en labores académicas y de investigación. Durante su experiencia como docente de secundaria ganó el concurso nacional "estímulo al docente" y obtuvo reconocimientos por la formación matemática de jóvenes ganadores de la olimpiada de matemática venezolana. Ha desarrollado y publicado diferentes trabajos relacionados con: el desarrollo de destrezas cognoscitivas, evaluación de los aprendizajes, resolución de problemas, estrategias metacognitivas, entre otros. Ha publicado diferentes textos en el área de las matemáticas: *Precálculo, Cálculo con Geometría Analítica, Matemática Superior, Geometría Descriptiva, Álgebra Superior I y Álgebra Superior II.*

- **Wladimir Serrano.**

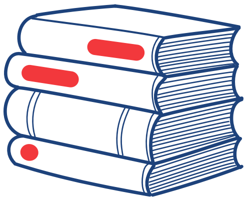
  Es Profesor de Matemática, Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática y Doctor en Educación. Realizó cursos de Post-doctorado en Desarrollo Estratégico de la Nación. Ha sido profesor invitado en la Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática del IPC, editor del "Boletín EM", de "Cientos" y de "La Garcita Azul", así como presidente de AsoVeMaT en su región Capital. Entre sus publicaciones se encuentran: *Elementos de álgebra; Álgebra 1; El lenguaje matemático; Las actividades matemáticas, el saber y los libros de texto; Investigaciones en educación matemática, aportes desde una unidad de investigación; El Boletín EM en la historia;* entre otras.

CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

Los libros de textos deben de tener una larga vida. Si sigues estos consejos, los libros podrán ser usados por tus hermanas, hermanos y otros estudiantes el próximo año escolar. De esta forma cuidamos el medioambiente y el patrimonio público nacional. Con estas acciones demostramos ser responsables.

1 **Forra los libros inmediatamente entregados**

El forro no debe dañar el libro, usa forros con adhesivos.

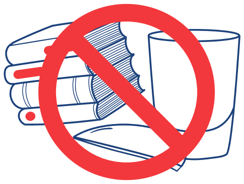


2 **Coloca una etiqueta con tu nombre en el forro**

Nunca debes colocar la etiqueta de tu nombre pegada al libro. Así el estudiante siguiente lo encontrará como nuevo y podrá volver a usarlo.

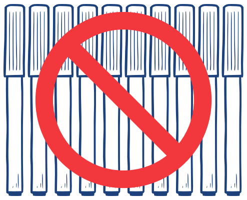
3 **Guarda los libros de texto una vez usados**

No los dejes abiertos en la mesa y evita comer o beber mientras estudias. Los líquidos son el peor enemigo de tus libros.



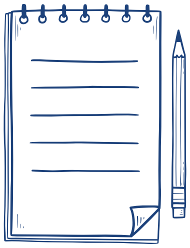
4 **No subrayes con lapiceros o bolígrafos**

Evita el uso del lapicero, al utilizar la borra se daña el papel y la tinta del texto. En caso de ser necesario usa lápiz HB o B.



5 **Estudia haciendo resúmenes o esquemas**

Utiliza tu cuaderno para hacer resúmenes, esquemas y todos los ejercicios que aparecen en los libros.



CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

6 Evita introducir objetos dentro del libro

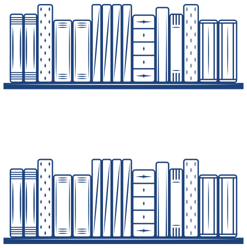
No marques las páginas introduciendo objetos en el libro. Si hay la necesidad de marcar, utiliza trozos de papel.

7 Organiza tus libros en la mochila

Organiza los libros y todos los materiales escolares en la mochila. Coloca la comida y los líquidos aparte.

8 En casa, reserva un espacio exclusivo para tus libros

Coloca tus libros de forma vertical con el lomo hacia afuera para que se vea el título. Así estarán siempre bien conservados.

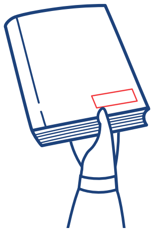


9 Utiliza el libro con cuidado

Evita forzarlos apretando o doblando excesivamente por el medio, evita forzar la encuadernación en el lomo del libro.

10 Lleva un control de los libros que prestas

Cuando prestes un libro, debes tener control sobre el préstamo y la fecha de devolución de tu libro.



PROYECTO LIBRO ABIERTO

El Proyecto Libro Abierto es una iniciativa del **Ministerio de Educación de la República Dominicana, (MINERD)**, que busca el desarrollo de contenidos y recursos didácticos, a través de diferentes plataformas digitales e impresas, con la finalidad de ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes dominicanos.

A partir de esta importante invención, el Ministerio de Educación presta especial atención a la necesidad de distribución de estos recursos y contenidos didácticos a las diferentes escuelas y liceos que conforman el sistema público de educación de la República Dominicana.

Este libro es una puerta abierta al universo virtual de conocimientos y referencias que aparecen representadas por el uso de los códigos QR de cada una de las unidades. Es una manera de ir más lejos en la búsqueda de informaciones porque permite a los estudiantes entrar en las redes, en las bibliotecas en línea, en informaciones especializadas que están cambiando por la entrada de nuevas discusiones y conocimientos científicos, en centros especializados en línea y en las rutas virtuales con las que se construyen los nuevos conocimientos que van surgiendo en las academias actuales. Se trata de un Libro Abierto con el que los estudiantes podrán emplear todas sus energías navegando y contrastando las informaciones que tiene esta colección.

Libro abierto

Para consultar el Diseño Curricular:

Dirección General de Currículo
www.ministeriodeeducacion.gob.do

Himno Nacional de la República Dominicana

I

Quisqueyanos valientes, alcemos
Nuestro canto con viva emoción,
Y del mundo a la faz ostentemos
Nuestro invicto glorioso pendón.

II

¡Salve! el pueblo que, intrépido y fuerte,
A la guerra a morir se lanzó,
Cuando en bélico reto de muerte
Sus cadenas de esclavo rompió.

III

Ningún pueblo ser libre merece
Si es esclavo indolente y servil;
Si en su pecho la llama no crece
Que templó el heroísmo viril,

IV

Mas Quisqueya la indómita y brava
Siempre altiva la frente alzará;
Que si fuese mil veces esclava
Otras tantas ser libre sabrá.

V

Que si dolo y ardid la expusieron
De un intruso señor al desdén,
¡Las Carreras! ¡Beller!, campos fueron
Que cubiertos de gloria se ven.

VI

Que en la cima de heroico baluarte
De los libres el verbo encarnó,
Donde el genio de Sánchez y Duarte
A ser libre o morir enseñó.

VII

Y si pudo inconsulto caudillo
De esas glorias el brillo empañar,
De la guerra se vio en Capotillo
La bandera de fuego ondear.

VIII

Y el incendio que atónito deja
De Castilla al soberbio León,
De las playas gloriosas le aleja
Donde flota el cruzado pendón.

IX

Compatriotas, mostremos erguida
Nuestra frente, orgullosos de hoy más;
Que Quisqueya será destruida
Pero sierva de nuevo, ¡jamás!

X

Que es santuario de amor cada pecho
Do la patria se siente vivir;
Y es su escudo invencible: el derecho;
Y es su lema: ser libre o morir.

XI

¡Libertad! que aún se yergue serena
La Victoria en su carro triunfal,
Y el clarín de la guerra aún resuena
Pregonando su gloria inmortal.

XII

¡Libertad! Que los ecos se agiten
Mientras llenos de noble ansiedad
Nuestros campos de gloria repiten
¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD!.

Letra: Emilio Prud'Homme | Música: José Reyes

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA

EDUCACIÓN

Libro abierto

SERIE 1