

G.M. Fichtenholz

**Rachunek
różniczkowy
i całkowy**

WYDAWNICTWO
NAUKOWE
PWN

tom 2

ROZDZIAŁ VIII

FUNKCJA PIERWOTNA (CAŁKA NIEOZNACZONA)

§ 1. Całka nieoznaczona i najprostsze sposoby jej obliczania

263. Pojęcie funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej). W wielu zagadnieniach nauki i techniki mamy do czynienia nie ze znajdowaniem pochodnej danej funkcji, lecz na odwrót — z wyznaczaniem funkcji o danej pochodnej. W ustępie 91 zakładając, że znane jest nam równanie ruchu $s = s(t)$, tj. zależność drogi od czasu, otrzymaliśmy za pomocą różniczkowania najpierw prędkość $v = \frac{ds}{dt}$, a następnie przyśpieszenie $a = \frac{dv}{dt}$. Często jednak trzeba rozwiązywać zadanie odwrotne: przyśpieszenie a jest dane jako funkcja czasu t : $a = a(t)$. Należy wyznaczyć prędkość v i przebytą drogę s w zależności od t . Tak więc w tym wypadku trzeba wyznaczyć funkcję v , której pochodną jest dana funkcja, następnie zaś znając funkcję v znaleźć taką funkcję $s = s(t)$, której pochodną jest v .

Podamy następującą definicję:

Funkcja $F(x)$ nazywa się *funkcją pierwotną* funkcji $f(x)$ lub *całką z $f(x)$* w danym przedziale, jeśli w całym tym przedziale $f(x)$ jest pochodną funkcji $F(x)$ lub, co na jedno wychodzi, $f(x) dx$ jest różniczką $F(x)$:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{lub} \quad dF(x) = f(x) dx \quad (1).$$

Znalezienie wszystkich funkcji pierwotnych danej funkcji nazywa się jej *calkowaniem*; jest to jedno z zadań rachunku całkowego. Jak widać, jest to zagadnienie odwrotne do zasadniczego zagadnienia rachunku różniczkowego.

TWIERDZENIE. Jeśli w pewnym przedziale \mathcal{X} (skończonym lub nieskończonym, domkniętym lub nie) $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to funkcja $F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą, jest również funkcją pierwotną $f(x)$. Na odwrót, każda funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ w przedziale \mathcal{X} może być przedstawiona w tej postaci.

(1) Mówimy również, że funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną (lub całką) wyrażenia różniczkowego $f(x)dx$.

Dowód. To, że wraz z $F(x)$ także $F(x) + C$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, jest zupełnie oczywiste, ponieważ $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$.

Niech teraz $\Phi(x)$ będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, wówczas w przedziale X jest

$$\Phi(x) = f(x).$$

Ponieważ funkcje $F(x)$ i $\Phi(x)$ mają w rozpatrywanym przedziale tę samą pochodną, różnią się one o stałą [131, wniosek], zatem

$$\Phi(x) = F(x) + C_2$$

co należało udowodnić.

Z powyższego twierdzenia wynika, że wystarczy znaleźć tylko jedną funkcję pierwotną $F(x)$ danej funkcji $f(x)$, aby znać wszystkie inne funkcje pierwotne, różnią się one bowiem od siebie stałym składnikiem.

Na mocy tego wyrażenie $F(x) + C$, gdzie C jest stałą dowolną, jest ogólną postacią funkcji, która ma pochodną równą $f(x)$ lub różniczkę $f(x) dx$. Wyrażenie to nazywa się całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$; oznacza się je symbolem

$$\int f(x) dx,$$

w którym tkwi już w sposób niejawny stała dowolna. Iloczyn $f(x) dx$ nazywa się wyrażeniem podcałkowym, a funkcja $f(x)$ — funkcją podcałkową.

PRZYKŁAD. Niech $f(x) = x^2$; wówczas, jak łatwo widać, całkę nieoznaczoną tej funkcji będzie

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Można to łatwo sprawdzić wykonując operację odwrotną — różniczkowanie.

Zwracamy uwagę czytelnika na to, że pod znakiem całki \int piszemy różniczkę szukanej funkcji pierwotnej, nie zaś pochodną (w naszym przykładzie $x^2 dx$ a nie x^2). Historyczną genezę tego oznaczenia wyjaśnimy dalej [294]. Jest ono zresztą bardzo wygodne i zachowanie go jest celowe.

Z definicji całki nieoznaczonej wynikają bezpośrednio następujące jej własności:

1. $d \int f(x) dx = f(x) dx$,
- tj. znaki d i \int redukują się wzajemnie, gdy pierwszy umieszcza się przed drugim.
2. Ponieważ $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $F'(x)$, więc

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

co można napisać tak:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Widzimy stąd, że znaki d i \int stojące przed $F(x)$ redukują się również wtedy, gdy d znajduje się po \int , ale wówczas do $F(x)$ należy dodać stałą dowolną.

Powracając do tego zadania z mechaniki, które postawiliśmy na początku, możemy teraz napisać

$$v = \int a(t) dt \quad \text{i} \quad s = \int v(t) dt.$$

Załóżmy na przykład, że rozpatrujemy ruch jednostajnie przyśpieszony odbywający się pod działaniem siły ciężkości, wówczas $a = g$ (jeśli za dodatni uważać kierunek pionowy z góry w dół) i jak łatwo zauważyc

$$v = \int g dt = gt + C.$$

Otrzymaliśmy wzór na prędkość v , do którego oprócz czasu t wchodzi jeszcze stała C . Przy różnych wartościach C będziemy otrzymywali różne wartości prędkości dla tej samej chwili t , tak więc nasze dane nie wystarczają do całkowitego rozwiązania zadania. Aby otrzymać zupełnie określone rozwiązanie zagadnienia, wystarczy znać prędkość w pewnej określonej chwili. Jeśli na przykład wiadomo, że w chwili $t = t_0$ prędkość $v = v_0$, to po podstawieniu tych wartości do otrzymanego wzoru na prędkość mamy

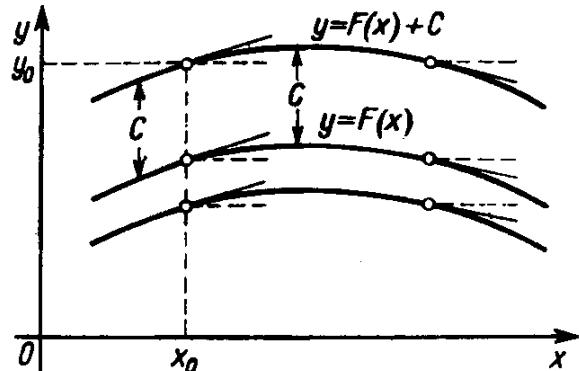
$$v_0 = gt_0 + C, \quad \text{skąd} \quad C = v_0 - gt_0.$$

Teraz nasze rozwiązanie otrzymuje już w pełni określoną postać

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

Znajdziemy następnie wzór na drogę s . Mamy

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0] dt = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'.$$



Rys. 1

Łatwo jest sprawdzić różniczkowaniem, że funkcję pierwotną można wziąć w takiej postaci. Nieznaną nową stałą C' można wyznaczyć, jeśli na przykład dana jest droga $s = s_0$ w chwili $t = t_0$. Obliczywszy, że $C' = s_0$, napiszemy rozwiązanie w ostatecznej postaci

$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Wartości t_0, s_0, v_0 nazywają się *wartościami początkowymi* wielkości t, s i v .

Jak wiadomo, pochodna funkcji $y = F(x)$ daje współczynnik kątowy stycznej do wykresu tej funkcji. Zadanie znalezienia funkcji pierwotnej $F(x)$ danej funkcji $f(x)$ można więc interpretować w następujący sposób: trzeba znaleźć krzywą $y = F(x)$, dla której zachodziłoby dane prawo zmiany współczynnika kątowego stycznej:

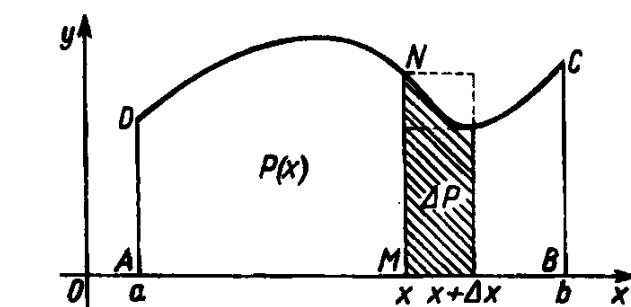
$$\operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

Jeśli $y = F(x)$ jest jedną z tych krzywych, to wszystkie pozostałe można otrzymać z niej po prostu przez przesunięcie o dowolny odcinek C równolegle do osi y (rys. 1). Na to, by z tego zbioru krzywych wyróżnić jedną, wystarczy na przykład przyjąć punkt (x_0, y_0) , przez który krzywa ta ma przeходить. Warunek początkowy $y_0 = F(x_0) + C$ da nam $C = y_0 - F(x_0)$.

264. Całka i obliczanie pola. Znacznie ważniejsza jest interpretacja funkcji pierwotnej jako pola figury krzywoliniowej. Ponieważ pojęcie funkcji pierwotnej było historycznie blisko związane z zadaniem obliczania pola, zajmiemy się tym zadaniem już teraz, korzystając z intuicyjnego pojęcia pola figury płaskiej i odkładając ścisłe sformułowanie zagadnienia do rozdziału X.

Niech w przedziale $\langle a, b \rangle$ będzie dana funkcja ciągła $y = f(x)$ przyjmująca tylko dodatnie (nieujemne) wartości. Rozpatrzmy figurę $ABCD$ (rys. 2), ograniczoną przez krzywą $y = f(x)$, dwa odcinki prostych $x = a$ i $x = b$ oraz odcinek osi x ; figurę tego typu nazywamy *trapezem krzywoliniowym*. Chcąc określić wielkość pola $|P|$ tej figury, zbadajmy

zachowanie się pola zmiennej figury $AMND$ zawartej między prostą początkową $x = a$ i prostą pionową odpowiadającą dowolnej wartości x z przedziału $\langle a, b \rangle$. Przy zmianie x to ostatnie pole będzie się również zmieniało, przy czym każdemu x odpowiada w pełni określona wartość pola, a więc pole trapezu krzywoliniowego $AMND$ jest pewną funkcją zmiennej x . Oznaczmy tę funkcję za pomocą symbolu $|P(x)|$.



Rys. 2

Postawmy sobie najpierw za zadanie znalezienie pochodnej tej funkcji. W tym celu nadajmy zmiennej x pewien przyrost Δx , na przykład dodatni. Wówczas pole $|P(x)|$ otrzyma przyrost $|\Delta P|$.

Oznaczmy przez m i M odpowiednio najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x, x + \Delta x \rangle$ [85] i porównajmy pole $|\Delta P|$ z polami prostokątów zbudowanych na podstawie Δx i mających wysokość m i M . Oczywiście

$$m\Delta x < |\Delta P| < M\Delta x,$$

skąd

$$m < \frac{|\Delta P|}{\Delta x} < M.$$

Jeśli $\Delta x \rightarrow 0$, to dzięki ciągłości funkcji f , zarówno m jak i M będą dążyły do $f(x)$ i dlatego

$$|P'(x)| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta P|}{\Delta x} = f(x).$$

Tak więc doszliśmy do znanego twierdzenia nazywanego zwykle *twierdzeniem Newtona i Leibniza* ⁽¹⁾:

Pochodna pola zmiennego $|P(x)|$ względem odciętej końcowej x jest równa rzędnej końcowej $y = f(x)$.

⁽¹⁾ W rzeczywistości twierdzenie to, co prawda w innej formie, opublikował jeszcze Izaak Barrow, nauczyciel Newtona.

Innymi słowy, *pole zmienne* $|P(x)|$ jest funkcją pierwotną danej funkcji $y = f(x)$. Spośród wszystkich innych ta funkcja pierwotna wyróżnia się tym, że jest równa zeru dla $x = a$. Jeśli więc znamy jakąkolwiek funkcję pierwotną $F(x)$ funkcji $f(x)$, to na mocy twierdzenia z poprzedniego ustępu

$$|P(x)| = F(x) + C,$$

gdzie stałą C można łatwo wyznaczyć podstawiając $x = a$:

$$0 = F(a) + C,$$

skąd

$$C = -F(a).$$

Ostatecznie więc

$$|P(x)| = F(x) - F(a).$$

W szczególności, aby otrzymać pole P całego trapezu krzywoliniowego $ABCD$, trzeba wziąć $x = b$, a więc

$$|P| = F(b) - F(a).$$

Obliczmy na przykład pole $P(x)$ figury ograniczonej parabolą $y = ax^2$, rzędną odpowiadającą danej odciętej x i odcinkiem osi x (rys. 3). Ponieważ parabola przecina oś x w początku współrzędnych, wartość początkowa x jest 0. Dla funkcji $f(x) = ax^2$ łatwo znaleźć funkcję pierwotną $F(x) = \frac{1}{3}ax^3$. Funkcja ta jest równa zeru właśnie dla $x = 0$, a więc

$$|P(x)| = F(x) = \frac{1}{3}ax^3 = \frac{1}{3}xy$$

[porównaj 32,4)].

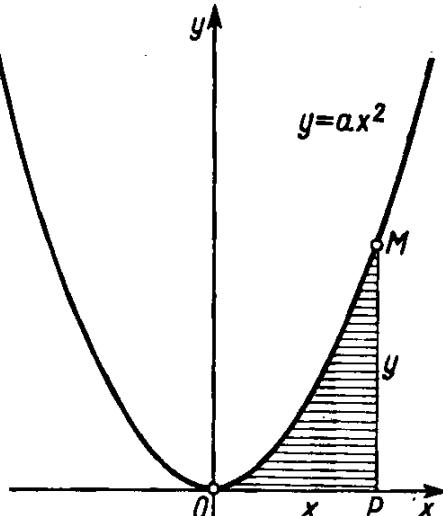
Wobec związku zachodzącego między obliczaniem całek i obliczaniem pól figur płaskich, tj. ich kwadraturą, przyjęte jest nazywać *kwadraturą* również samo obliczanie całek.

Aby rozszerzyć wszystko co powiedziano wyżej na wypadek funkcji przybierającej także wartości ujemne, wystarczy przyjąć umowę, że będziemy uważali za ujemne części figury położone pod osią x .

Tak więc jakąkolwiek funkcję $f(x)$ ciągłą w przedziale (a, b) będziemy rozpatrywali, czytelnik może sobie zawsze wyobrażać jej funkcję pierwotną jako zmienne pole figury ograniczonej wykresem danej funkcji. Nie można jednak, rzecz jasna, uważać tej ilustracji geometrycznej za dowód istnienia funkcji pierwotnej, ponieważ samo pojęcie pola nie zostało jeszcze scisłe zdefiniowane.

W kolejnym rozdziale [305] będziemy w stanie dać scisły i przy tym czysto analityczny dowód tego ważnego faktu, że *każda funkcja $f(x)$ ciągła w danym przedziale ma w nim funkcję pierwotną*. Twierdzenie to przyjmujemy już teraz, na razie bez dowodu.

W tym rozdziale będziemy mówili o funkcjach pierwotnych tylko funkcji ciągłych.



Rys. 3

Jeśli konkretnie dana funkcja ma punkty nieciągłości, to będziemy ją rozpatrywali tylko w przedziałach ciągłości. Dlatego zakładając, że spełnione jest wypisowane wyżej twierdzenie, nie musimy zastrzegać sobie za każdym razem istnienia całek: wszystkie rozpatrywane przez nas całki istnieją.

265. Tablica całek podstawowych. Każdy wzór rachunku różniczkowego orzekający, że pochodną pewnej funkcji $F(x)$ jest $f(x)$, prowadzi bezpośrednio do odpowiedniego wzoru rachunku całkowego

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Na podstawie wzorów z ustępu 95, według których obliczaliśmy pochodne funkcji elementarnych, jak również niektórych wzorów wyprowadzonych później (dla funkcji hiperbolicznych) możemy ułożyć następującą tablicę całek:

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$
3. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C.$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
12. $\int \sinh x dx = \cosh x + C.$
13. $\int \cosh x dx = \sinh x + C.$
14. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{ctgh} x + C.$
15. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + C.$

Wzór 4 wymaga pewnego objaśnienia. Może on być stosowany w dowolnym przedziale nie zawierającym zera. Rzeczywiście, jeśli przedział ten leży na prawo od zera, a więc $x > 0$, to ze znanego wzoru $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ wynika bezpośrednio, że

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Jeśli natomiast przedział leży na lewo od zera, a więc $x < 0$, to różniczkując możemy się łatwo przekonać, że $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$, skąd

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$$

Oba te wzory połączone razem dają wzór 4.

Wprowadzenie reguł całkowania pozwoli nam rozszerzyć możliwość znajdowania całek.

266. Najprostsze reguły całkowania

I. Jeśli a jest stałą ($a \neq 0$), to

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

Rzeczywiście, różniczkując wyrażenie stojące po prawej stronie otrzymujemy [105,I]:

$$d \left[a \cdot \int f(x) dx \right] = a \cdot d \left[\int f(x) dx \right] = a \cdot f(x) dx,$$

a więc jest to funkcja pierwotna wyrażenia $a \cdot f(x) dx$, c.b.d.o.

Tak więc czynnik stały można wynosić spod znaku całki.

II. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Różniczkujemy wyrażenie stojące po prawej stronie [105,II]:

$$d \left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right] = d \int f(x) dx \pm d \int g(x) dx = [f(x) \pm g(x)] dx;$$

jest ono więc funkcją pierwotną ostatniej różniczki, c.b.d.o.

Całka nieoznaczona sumy (różnicy) różniczek równa się sumie (różnicy) całek każdej z różniczek z osobna.

Uwaga. W związku z dwoma powyższymi wzorami zauważmy rzecz następującą. We wzorach tych występują całki nieoznaczone, z których każda zawiera stałą dowolną. Równości tego typu rozumiane są w tym sensie, że różnica prawej i lewej strony jest stała. Można również traktować takie równości dosłownie, lecz wówczas jedna z występujących w nich całek przestaje być dowolną funkcją pierwotną: jej stałą wyznacza się po wyborze stałych w pozostałych całkach. O tej ważnej uwadze trzeba pamiętać na przyszłość.

III. Jeśli

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C'.$$

Rzeczywiście, założona równość jest równoważna z następującą:

$$\frac{d}{dt} F(t) = F'(t) = f(t).$$

Wówczas jednak

$$\frac{d}{dx} F(ax+b) = F'(ax+b) a = af(ax+b),$$

a więc

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

tzn. $\frac{1}{a} F(ax+b)$ jest rzeczywiście funkcją pierwotną funkcji $f(ax+b)$.

Szczególnie często spotyka się przypadki, gdy $a = 1$ lub $b = 0$:

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C_1,$$

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(x) + C_2.$$

Reguła III jest bardzo szczególnym przypadkiem reguły zamiany zmiennych w całce nieoznaczonej, o czym będzie mowa dalej [268].

267. Przykłady

$$1) \int (6x^2 - 3x + 5) dx.$$

Korzystając z reguł II i I oraz wzorów 3,2 otrzymujemy

$$\int (6x^2 - 3x + 5) dx = \int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = 2x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + C.$$

2) Łatwo jest też scałkować wielomian w postaci ogólnej

$$\begin{aligned} \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx &= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \dots + a_{n-1} \int x dx + a_n \int dx = \\ &= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C. \end{aligned} \quad (\text{II,I;3,2})$$

$$3) \int (2x^2 + 1)^3 dx = \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) dx = \frac{8}{7} x^7 + \frac{12}{5} x^5 + 2x^3 + x + C. \quad (\text{przykład 2})$$

$$\begin{aligned} 4) \int (1 + \sqrt{x})^4 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2) dx = \\ &= \int dx + 4 \int x^{1/2} dx + 6 \int x dx + 4 \int x^{3/2} dx + \int x^2 dx = \\ &= x + \frac{8}{3} x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5} x^{5/2} + \frac{1}{3} x^3 + C. \end{aligned} \quad (\text{II,I;3,2})$$

$$5) \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2} dx = \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ = \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int dx - \int \frac{dx}{x} - \int x^{-2} dx = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C. \quad (\text{II,I;3,2,4})$$

$$6) \int \frac{(x-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{7/6} dx - \int x^{1/6} dx = \\ = \frac{6}{13}x^{13/6} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C. \quad (\text{II;3})$$

Podamy kilka przykładów na zastosowanie reguły III:

$$7) \text{(a)} \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \quad (\text{III;4})$$

$$\text{(b)} \int \frac{dx}{(x-a)^k} = (x-a)^k dx = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = \\ = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k > 1). \quad (\text{III;3})$$

$$8) \text{(a)} \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C \quad (m \neq 0), \quad (\text{III;8})$$

$$\text{(b)} \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + C \quad (m \neq 0), \quad (\text{III;9})$$

$$\text{(c)} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C. \quad (\text{III;7})$$

$$9) \text{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0), \quad (\text{III;6})$$

$$\text{(b)} \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad (\text{III;5})$$

Przykłady na wszystkie reguły:

$$(10) \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x} dx = \int (e^{2x}-e^x+1-e^{-x}) dx = \frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+e^{-x}+C. \quad (\text{II,III;7,2})$$

$$(11) \int \frac{ax+b}{cx+d} dx.$$

Dzieląc licznik przez mianownik możemy zapisać wyrażenia podcałkowe w postaci

$$\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cx+d}.$$

Stąd szukana całka równa się

$$\frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln|cx+d| + C. \quad (\text{II,I,III;2,4})$$

$$(12) \int \frac{2x^2-3x+1}{x+1} dx = \int \left(2x-5 + \frac{6}{x+1} \right) dx = x^2-5x+6 \ln|x+1| + C.$$

Całkowanie ułamka o skomplikowanym mianowniku można sobie ułatwić przez rozkład tego ułamka na sumę ułamków o mianownikach prostszych. Na przykład

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right);$$

dlatego jest [por. przykład 7(a)]

$$(13) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Dla ułamków postaci ogólniejszej

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

można podać na przykład taki sposób. Oczywiście $(x+a)-(x+b) = a-b$. Zachodzi więc tożsamość

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right).$$

Tak więc

$$(14) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$$

W szczególności

$$15) (a) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C,$$

$$(b) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C.$$

$$(16) \int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} \quad (\text{przy } B^2 - AC > 0).$$

Mianownik rozkłada się na czynniki rzeczywiste $A(x-\alpha)(x-\beta)$, gdzie

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Wówczas według przykładu 14) podstawiając w nim $a = -\beta$, $b = -\alpha$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln \left| \frac{Ax + B - \sqrt{B^2 - AC}}{Ax + B + \sqrt{B^2 - AC}} \right| + C'.$$

Niektóre wyrażenia trygonometryczne po dokonaniu pewnych przekształceń elementarnych dają się całkować w bardzo prosty sposób.

Jak wiadomo

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2},$$

skąd

$$17) (a) \int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \quad (m \neq 0),$$

$$(b) \int \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \quad (m \neq 0).$$

Ogólnie

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

Przyjmując, że $m \pm n \neq 0$, otrzymujemy następujące całki:

$$18) \text{ (a)} \int \sin mx \cos nx dx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x + C,$$

$$\text{(b)} \int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x + C,$$

$$\text{(c)} \int \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + C.$$

Rozpatrzymy na zakończenie nieco bardziej skomplikowany przykład.

$$19) \text{ (a)} \int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ponieważ

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^n [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2 \sin x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x,$$

więc wyrażenie podcałkowe sprowadza się do $2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x$ i szukana całka równa się

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C.$$

Analogicznie

$$\text{(b)} \int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = x + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin 2kx}{2k} + C.$$

268. Całkowanie przez podstawienie. Wyłożyliśmy tu jeden z najsilniejszych sposobów całkowania — metodę całkowania przez *podstawienie*, czyli *zamianę zmiennej*. U podstaw tej metody leży następujący prosty fakt.

Jeśli wiadomo, że

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

to

$$\int g(\omega(x)) \omega'(x) dx = G(\omega(x)) + C.$$

(O wszystkich występujących tu funkcjach $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ zakładamy, że są ciągłe).

Wynika to bezpośrednio z reguł różniczkowania funkcji złożonej [98]:

$$\frac{d}{dx} G(\omega(x)) = G'(\omega(x)) \omega'(x) = g(\omega(x)) \omega'(x),$$

jeśli wziąć pod uwagę, że $G'(t) = g(t)$. To samo można wyrazić inaczej mówiąc, że równość

$$dG(t) = g(t) dt$$

pozostaje w mocy także przy zamianie zmiennej niezależnej t na funkcję $\omega(x)$ [106].

Przypuśćmy, że trzeba obliczyć całkę

$$\int f(x) dx.$$

W wielu przypadkach udaje się wybrać jako nową zmienną taką funkcję $t = \omega(x)$ zmiennej x , żeby wyrażenie podcałkowe mogło być napisane w postaci

$$f(x) dx = g(\omega(x)) \omega'(x) dx,$$

gdzie $g(t)$ jest funkcją łatwiejszą do całkowania niż $f(x)$. Wtedy na mocy poprzedniego wystarczy znaleźć całkę

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

aby przez podstawienie $t = \omega(x)$ otrzymać z niej całkę szukaną. Zwykle piszemy po prostu

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt,$$

rozumując przez to, że w funkcji zmiennej t , wyrażonej całką stojącą po prawej stronie, wykonano już wspomniane podstawienie.

Obliczmy na przykład całkę

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

Ponieważ $d \sin x = \cos x dx$, więc podstawiając $t = \sin x$ przekształcimy wyrażenie podcałkowe do postaci

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d\sin x = t^3 dt.$$

Ciąka ostatniego wyrażenia może być obliczona z łatwością:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Pozostaje tylko powrócić do zmiennej x podstawiając $\sin x$ zamiast t

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Zwracamy uwagę czytelnika na to, że przy wyborze podstawienia $t = \omega(x)$ upraszczającego wyrażenie podcałkowe trzeba pamiętać, że w jego skład musi wejść czynnik $\omega'(x) dx$ dający różniczkę nowej zmiennej, dt [patrz (1)]. W poprzednim przykładzie podstawienie $t = \sin x$ było dogodne dzięki obecności czynnika $\cos x dx = dt$.

W związku z tym interesujący jest przykład

$$\int \sin^3 x dx.$$

Tu podstawienie $t = \sin x$ nie mogłoby być zastosowane właśnie ze względu na brak wspomnianego czynnika. Jeśli spróbować wyodrębnić z wyrażenia podcałkowego jako różniczkę nowej zmiennej czynnik $\sin x dx$ lub jeszcze lepiej, $-\sin x dx$, to doprowadzi to do podstawienia $t = \cos x$. Ponieważ wyrażenie, które pozostało,

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

upraszcza się przez takie podstawienie, podstawienie to może tu być użyte. Mamy

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Przy pewnej wprawie w wykonywaniu podstawień można nie pisać nawet zmiennej t . Na przykład w całce

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d \sin x$$

można w pamięci traktować $\sin x$ jako nową zmienną i od razu otrzymać wynik. Analogicznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d \frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d \frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Przeprowadzamy tu w pamięci podstawienie $t = x/a$.

Czytelnik widzi teraz, że reguła III,266 sprowadza się właściwie do podstawienia liniowego $t = ax + b$:

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) \, d(ax + b) = \frac{1}{a} \int f(t) \, dt.$$

Niekiedy używa się podstawień w inny sposób niż pokazany wyżej. Podstawią się mianowicie za x do wyrażenia podcałkowego $f(x) \, dx$ bezpośrednio funkcję $x = \varphi(t)$ nowej zmiennej t i otrzymuje się w wyniku wyrażenie

$$f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = g(t) \, dt.$$

Jeśli w tym wyrażeniu dokonać podstawienia $t = \omega(x)$, gdzie $\omega(x)$ jest funkcją odwrotną względem $\varphi(t)$, to powrócimy oczywiście do wyjściowego wyrażenia podcałkowego $f(x) \, dx$. Zachodzi więc, jak i w poprzednim wypadku, równość (2), gdzie po prawej stronie po obliczeniu całki — trzeba podstawić $t = \omega(x)$.

Obliczmy na przykład całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Jeśli podstawimy $x = t^6$ (żeby dały się wyciągnąć wszystkie pierwiastki), to otrzymamy $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$ i

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{t^2 \, dt}{1 + t^2} = 6 \left\{ \int dt - \int \frac{dt}{1 + t^2} \right\} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

Pozostaje teraz przejść do zmiennej x według wzoru $t = \sqrt[6]{x}$, aby otrzymać ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x} (1 + \sqrt[3]{x})} = 6 (\sqrt[6]{x} - \operatorname{arc tg} \sqrt[6]{x}) + C.$$

Ciekawszy jest przykład

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Różnica kwadratów pod pierwiastkiem (pierwszy z nich jest stały) nasuwa myśl o podstawieniu trygonometrycznym $x = a \sin t$ ⁽¹⁾. Mamy

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt$$

oraz

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

Całkę tę już znamy:

$$a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right] + C$$

[267, (17)(a)]. Aby przejść do x , podstawiamy $t = \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}$; przekształcenie drugiego składnika ułatwia się przez to, że

$$\frac{1}{4} a^2 \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ostatecznie

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc sin} \frac{x}{a} + C.$$

Umiejętność odnajdywania dogodnych podstawnień zdobywa się przez ćwiczenia. Chociaż nie można dać na to ogólnych reguł, pewne uwagi szczegółowe ułatwiające odnajdywanie takich podstawnień znajdzie czytelnik w następnym ustępie. W klasycznych przypadkach podstawnienia będą podane po prostu w podręczniku.

269. Przykłady

1) (a) $\int e^{x^2} x dx$, (b) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$, (c) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$.

(a) **Rozwiążanie.** Podstawiając $t = x^2$ otrzymujemy $dt = 2x dx$, a więc

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

(b) **Wskazówka.** To samo podstawnienie. Odpowiedź: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$.

W obu przypadkach całki miały postać

$$\int g(x^2) x dx = \frac{1}{3} \int g(x^2) d(x^2),$$

gdzie g jest funkcją dogodną do całkowania. Dla takich całek należy zastosować podstawnienie $t = x^2$.

⁽¹⁾ Warto zauważyc, iż przyjmujemy, że x zmienia się w przedziale $(-a, a)$, a t w $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

A więc $t = \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}$.

Analogiczne całki postaci

$$\int g(x^3) x^2 dx = \frac{1}{3} \int g(x^3) d(x^3)$$

mogą być obliczane przez zastosowanie podstawienia $t = x^3$ itd. Tego typu jest właśnie trzecia całka.

(c) Odpowiedź: $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C$.

2) $\int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x dx$ ($\mu \neq -1$).

Rozwiązanie. Można przyjąć tu $t = x^2$, ale łatwiej jest od razu wziąć $u = \alpha x^2 + \beta$, bowiem czynnik $x dx$ różni się od $du = 2\alpha x dx$ tylko współczynnikiem liczbowym. Mamy więc

$$\int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x dx = \frac{1}{2\alpha} \int u^\mu du = \frac{1}{2\alpha(\mu+1)} u^{\mu+1} + C = \frac{1}{2\alpha(\mu+1)} (\alpha x^2 + \beta)^{\mu+1} + C.$$

3) (a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$, (b) $\int \frac{dx}{x \ln x}$, (c) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Wskazówka. Wszystkie te całki mają postać

$$\int g(\ln x) \frac{dx}{x} = \int g(\ln x) d \ln x$$

i mogą być obliczone za pomocą podstawienia $t = \ln x$.

Odpowiedź: (a) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$, (b) $\ln |\ln x| + C$, (c) $-\frac{1}{\ln x} + C$.

4) Całki postaci

$$\int g(\sin x) \cos x dx, \quad \int g(\cos x) \sin x dx, \quad \int g(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

oblicza się odpowiednio za pomocą podstawień

$$t = \sin x, \quad u = \cos x, \quad v = \operatorname{tg} x.$$

Na przykład

$$(a) \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin x + C,$$

$$(b) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + C = - \ln |\cos x| + C,$$

$$(c) \int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} = \int \frac{dx / \cos^2 x}{A^2 \operatorname{tg}^2 x + B^2} = \int \frac{dv}{A^2 v^2 + B^2} = \\ = \frac{1}{AB} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Av}{B} + C = \frac{1}{AB} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{A}{B} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

$$5) (a) \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}, \quad (b) \int \operatorname{ctg} x dx, \quad (c) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx, \quad (d) \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Rozwiązanie. (a) Jeśli podstawimy $t = x^2 + 1$, to licznik $2x dx$ daje dokładnie dt , całka sprowadza się do

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln (x^2 + 1) + C.$$

Zauważmy, że zawsze, gdy całka ma postać

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)},$$

a więc gdy w wyrażeniu podcałkowym licznik jest różniczką mianownika, podstawienie $t = f(x)$ prowadzi do celu:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$

Zgodnie z powyższym mamy

$$(b) \quad \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C, \quad [\text{por. 4)(b)}];$$

$$(c) \quad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} \ln (e^{2x}+1) + C,$$

$$(d) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx/\cos^2 x}{\operatorname{tg} x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

6) Z ostatniej całki otrzymujemy łatwo dwie następujące pożyteczne całki:

$$(a) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + C,$$

$$(b) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}\pi)}{\sin(x + \frac{1}{2}\pi)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi \right) \right| + C.$$

$$7) (a) \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{2}{3} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{3/2} + C,$$

$$(b) \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2+1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + C,$$

$$(c) \quad \int \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \operatorname{tg} \frac{1}{x} d \frac{1}{x} = \ln \left| \cos \frac{1}{x} \right| + C$$

[patrz. 4)(b)].

Podamy teraz kilka przykładów całkowania wyrażeń zawierających dwumiany kształtu $a^2 - x^2$, $x^2 + a^2$ i $x^2 - a^2$. W tych przypadkach wygodnie bywa zwykle zastąpić x przez funkcję trygonometryczną lub hiperboliczną nowej zmiennej t i skorzystać z równości

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad 1 - \operatorname{tgh}^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

$$8) \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Podstawienie: $x = a \operatorname{tg} t$ ⁽¹⁾, $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$, $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, a więc

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cos t) + C. \quad [267,(17)(a)].$$

⁽¹⁾ Przy czym wystarczy założyć, że t zmienia się między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$.

Przejdzmy teraz do zmiennej x podstawiając z powrotem $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ i wyrażając $\sin t$ i $\cos t$ przez $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Tu wygodniej jest stosować podstawienie hiperboliczne. Rozważmy na przykład dolny znak. Podstawiamy $x = a \cosh t$ ($x > 0, t > 0$), $dx = a \sinh t dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t$. Całka sprowadzi się po prostu do $\int dt = t + C$. Aby przejść do x , przypomnijmy sobie funkcję odwrotną względem cosinusa hiperbolicznego [49,3)]; otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1} \right) + C = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C',$$

przy czym do stałej C' włączamy także składnik $-\ln a$.

$$10) \text{ (a)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}, \quad \text{(c)} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

W danym przypadku do celu prowadzi równie łatwo podstawienie trygonometryczne jak i hiperboliczne. Weźmy na przykład w drugiej całce $x = \frac{a}{\cos t}$, $dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t}$, wówczas

$$x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t \text{ i } \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Podstawienie $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$ sprowadza tę całkę do postaci

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C.$$

[p. 6) (a)]. Ale

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

a więc ostatecznie

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C.$$

Rozpatrzmy na zakończenie jeszcze dwa przykłady całkowania przez zamianę zmiennej, w których podstawienie nie jest co prawda tak naturalne jak w poprzednich przypadkach, ale za to szybko prowadzi do celu.

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \quad (\alpha \text{ dodatnie, ujemne lub zero}).$$

Przyjmijmy $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$ i weźmy t jako nową zmienną. Podnosząc obustronnie do kwadratu i redukując x^2 otrzymamy

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},$$

a więc

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = t - \frac{t^2 - \alpha}{2t} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt.$$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C \quad [\text{por. 9}]$$

$$(13) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} \quad (\alpha < x < \beta).$$

Podstawmy $x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$), gdzie φ jest nową zmienną. Wówczas

$$x - \alpha = (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi, \quad \beta - x = (\beta - \alpha) \cos^2 \varphi, \quad dx = 2(\beta - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Tak więc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2 \int d\varphi = 2\varphi + C = 2 \arctg \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

270. Całkowanie przez części. Niech $u = f(x)$ i $v = g(x)$ będą funkcjami x mającymi ciągle pochodne $u' = f'(x)$ i $v' = g'(x)$. Wówczas na mocy reguły różniczkowania $d(uv) = u dv + v du$ lub $u dv = d(uv) - v du$. Funkcją pierwotną wyrażenia $d(uv)$ będzie oczywiście uv , zachodzi więc wzór

$$(3) \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Wzór ten wyraża regułę całkowania przez części. Sprowadza on całkowanie wyrażenia $u dv = uv' dx$ do całkowania wyrażenia $v du = vu' dx$.

Obliczmy na przykład całkę $x \cos x dx$. Przyjmujemy

$$u = x, \quad dv = \cos x dx, \quad \text{a więc} \quad du = dx, \quad v = \sin x \quad (1).$$

na mocy wzoru (3) jest

$$(4) \quad \int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Tak więc całkowanie przez części pozwoliło nam zastąpić skomplikowaną funkcję podcałkową $x \cos x$ przez prostszą funkcję $\sin x$. Jednocześnie, aby otrzymać v , trzeba było scałkować wyrażenie $\cos x dx$. Stąd bierze się nazwa całkowanie przez części.

Stosując wzór (3) do obliczania danej całki, musimy rozbić wyrażenie podcałkowe na dwa czynniki u i $dv = v' dx$, z których pierwszy różniczkujemy, a drugi całkujemy przy przejściu do całki znajdującej się po prawej stronie. Należy się postarać o to, aby całkowanie różniczki dv nie sprawiało trudności i aby zamiana u na du i v prowadziła

(1) Ponieważ cel, do którego dążymy może być osiągnięty, gdy potrafimy przedstawić $\cos x dx$ w postaci dv choćby na jeden sposób, nie ma potrzeby pisać dla v najogólniejszego wyrażenia zawierającego stałą dowolną. Należy o tym pamiętać dalej.

ostatecznie do uproszczenia wyrażenia podcałkowego. Tak na przykład w rozpatrywanym przykładzie byłoby, jak widać, niewygodnie przyjąć $x dx$ za dv , a $\cos x$ za u .

Przy pewnej wprawie nie trzeba wprowadzać oznaczeń u , v , można od razu zastosować wzór [por. (4)].

Reguła całkowania przez części ma mniejsze zastosowanie niż całkowanie przez podstawienie. Istnieją jednak klasy całek, na przykład

$$\int x^k \ln^n x \, dx, \quad \int x^k \sin bx \, dx, \quad \int x^k \cos bx \, dx, \quad \int x^k e^{ax} \, dx$$

i inne, które obliczamy właśnie za pomocą całkowania przez części.

Powtórne zastosowanie reguły całkowania przez części prowadzi do tak zwanego uogólnionego wzoru na całkowanie przez części.

Załóżmy, że funkcje u i v mają w rozpatrywanym przedziale ciągle pochodne wszystkich rzędów do $n+1$ włącznie: u' , v' , u'' , v'' , ..., $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$.

Podstawiając do wzoru (3) zamiast v wyrażenie $v^{(n)}$ otrzymujemy

$$\int uv^{(n+1)} \, dx = \int u \, dv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)} \, du = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)} \, dx.$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \int u'v^{(n)} \, dx &= u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)} \, dx, \\ \int u''v^{(n-1)} \, dx &= u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)} \, dx, \\ &\dots \\ \int u^{(n)}v' \, dx &= u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v \, dx. \end{aligned}$$

Mnożąc te równości kolejno przez $+1$ lub -1 i dodając je stronami otrzymujemy po redukcji jednakowych całek po obu stronach równości wzór

$$(5) \quad \int uv^{(n+1)} \, dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v \, dx.$$

Szczególnie wygodny jest ten wzór wówczas, gdy jednym z czynników jest wielomian algebraiczny. Jeśli u jest wielomianem stopnia n , to $u^{(n+1)}$ jest równe tożsamościowo zeru i dla całki znajdującej się po lewej stronie równości otrzymujemy ostateczny wynik.

Przejdzmy do przykładów.

271. Przykłady

$$1) \int x^3 \ln x \, dx.$$

Różniczkowanie $\ln x$ prowadzi do uproszczenia, przyjmujemy więc

$$u = \ln x, \quad dv = x^3 \, dx, \quad \text{a zatem} \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{4} x^4.$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

$$2) (a) \int \ln x \, dx, \quad (b) \int \arctan x \, dx, \quad (c) \int \arcsin x \, dx.$$

Przyjmując we wszystkich przypadkach $dx = dv$ otrzymujemy

$$(a) \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\begin{aligned} (b) \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int x \, d \arctan x = x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

[p. 269,5) (a)];

$$(c) \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \, d \arcsin x = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad [\text{patrz 269, 2).}]$$

3) $\int x^2 \sin x \, dx.$

Mamy

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) dx^2 = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Tak więc sprowadziliśmy szukaną całkę do znanej już [270, (4)]; podstawiając jej wartość otrzymujemy

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Zastosowaliśmy tu regułę całkowania przez części dwukrotnie.

Tak samo przez wielokrotne zastosowanie powyższej reguły można obliczyć całki

$$\int P(x) e^{ax} \, dx, \quad \int P(x) \sin bx \, dx, \quad \int P(x) \cos bx \, dx,$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem zmiennej x .

4) Jeśli skorzystamy z uogólnionego wzoru na całkowanie przez części, to można otrzymać od razu ogólne wyrażenia dla całek tego typu.

Biorąc $v^{(n+1)} = e^{ax}$ otrzymujemy

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3} \quad \text{itd.}$$

Jeśli $P(x)$ jest wielomianem stopnia n , to na mocy wzoru (5) otrzymujemy

$$\int P(x) e^{ax} \, dx = e^{ax} \left[\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \dots \right] + C.$$

Analogicznie, jeśli wziąć $v^{(n+1)} = \sin bx$, to

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \quad v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3} \quad \text{itd.}$$

Stąd wzór

$$\int P(x) \sin bx \, dx = \sin bx \left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P''}{b^4} + \dots \right] - \cos bx \left[\frac{P}{b} - \frac{P'}{b^3} + \dots \right] + C.$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór

$$\int P(x) \cos bx \, dx = \sin bx \left[\frac{P}{b} - \frac{P'}{b^3} + \dots \right] + \cos bx \left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P''}{b^4} + \dots \right] + C.$$

5) $\int x^3 \ln^2 x \, dx.$

Mamy

$$\int \ln^2 x \, d \frac{1}{4} x^4 = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{4} \int x^4 d \ln^2 x = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x \, dx$$

obliczenie sprowadza się do całki 1). Ostatecznie

$$\int x^3 \ln^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right) + C = \frac{1}{4} x^4 \left(\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right) + C.$$

Tak samo kolejno obliczamy całkę

$$\int x^k \ln^m x \, dx,$$

gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą ($k \neq -1$), a $m = 1, 2, 3, \dots$. Jeśli zastosować do tej całki wzór na całkowanie przez części, przyjmując $u = \ln^m x$, to otrzymamy wzór redukcyjny

$$\int x^k \ln^m x \, dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x - \frac{m}{k+1} \int x^k \ln^{m-1} x \, dx,$$

na mocy którego obliczenie rozpatrywanej całki sprowadza się do obliczenia całki tej samej postaci, ale z wykładnikiem przy $\ln x$ o jeden mniejszym.

Podstawienie $t = \ln x$ sprowadza zresztą rozpatrywaną całkę do postaci $\int t^m e^{(k+1)t} dt$ zbadanej już w 3) i w 4).

6) Ciekawy przykład stanowią całki

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Jeśli zastosować do nich całkowanie przez części biorąc w obu przypadkach powiedzmy $dv = e^{ax}$, $v = -\frac{1}{a} e^{ax}$, to otrzymamy

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Tak więc każda z tych całek wyraża się przez drugą⁽¹⁾.

Jeśli teraz podstawimy do pierwszego wzoru wyrażenie z drugiego wzoru, to otrzymamy równanie względem pierwszej całki, z którego wynika, że

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Analogicznie obliczymy drugą całkę

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C'$$

7) Jako ostatni przykład zastosowania metody całkowania przez części wyprowadzimy wzór reducyjny na obliczenie całki

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Zastosujmy do niej wzór (3) przyjmując

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad \text{a więc} \quad du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx, \quad v = x.$$

Otrzymujemy

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx.$$

Tę ostatnią całkę można przekształcić w sposób następujący:

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Podstawiając to wyrażenie do poprzedniej równości otrzymujemy

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

skąd

$$(6) \quad J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_n.$$

⁽¹⁾ Jeśli przez całki rozumieć określone funkcje pierwotne [por. uwaga w 266], to chcąc w drugim wzorze mieć te same funkcje i co w pierwszym, musielibyśmy ściśle rzecz biorąc dodać do prawej strony pewną stałą. Oczywiście zostałaby ona pochłonięta w ostatecznych wzorach przez stałe C i C' .

Otrzymany wzór sprowadza obliczenie całki J_{n+1} do obliczenia całki J_n ze wskaźnikiem o jeden mniejszym. Znając całkę

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a}$$

[267,9] (b); bierzemy jedną z jej wartości] znajdziemy według tego wzoru dla $n = 1$

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a},$$

co otrzymaliśmy wyżej inną drogą [p. 269,8)]. Biorąc we wzorze (6) $n = 2$ otrzymujemy następnie

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a}$$

itd. W ten sposób można obliczyć całkę J_n dla dowolnego n naturalnego.

§ 2. Całkowanie funkcji wymiernych

272. Sformułowanie zagadnienia o całkowaniu w postaci skończonej. Zapoznaliśmy się z elementarnymi sposobami obliczania całek nieoznaczonych. Sposoby te nie wyznaczają dokładnie drogi, po której należy pójść, aby obliczyć daną całkę, pozostawiając wiele umiejętnościom obliczającego. W tym i następnych paragrafach zatrzymamy się dokładniej na pewnych ważnych klasach funkcji i dla ich całek ustalimy zupełnie określony schemat obliczeń.

Wyjaśnimy obecnie, co mianowicie będzie nas interesowało przy całkowaniu funkcji wspomnianych klas i na jakiej zasadzie wyróżniamy te właśnie klasy.

W ustępie 51 scharakteryzowaliśmy zbiór tych funkcji do których w pierwszym rzędzie stosuje się analiza. Są to tak zwane funkcje elementarne i funkcje, które mogą być wyrażone przez nie za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych i superpozycji bez stosowania przejścia do granicy.

W rozdziale III widzieliśmy, że wszystkie takie funkcje są różniczkowalne i ich pochodne należą do tego samego zbioru. Inaczej ma się sprawa z ich całkami; bardzo często okazuje się, że całka funkcji należącej do wspomnianej klasy, sama do tej klasy nie należy, tzn. nie wyraża się przez funkcje elementarne za pomocą skończonej liczby wymienionych wyżej operacji. Do takich całek, na pewno nie wyrażających się w postaci skończonej, należą na przykład całki

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

inne przykłady tego rodzaju będą przytoczone dalej [ustępy 280, 289, 290 i następne].

Należy podkreślić, że wszystkie te całki istnieją realnie⁽¹⁾, są to tylko zupełnie nowe funkcje i nie sprowadzają się do tych funkcji, które nazwaliśmy funkcjami elementarnymi⁽²⁾.

Znane są stosunkowo niewielkie ogólne klasy funkcji, które mogą być całkowane w postaci skończonej, klasami tymi zajmiemy się obecnie. Na pierwszym miejscu wśród nich należy postawić ważną klasę funkcji wymiernych.

273. Ułamki proste i ich całkowanie. Ponieważ z ułamka wymiernego niewłaściwego można wyłączyć część całkowitą, której całkowanie nie przedstawia trudności, wystarczy zająć się całkowaniem ułamków właściwych, tzn. takich, w których stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika.

Spośród nich rozpatrzymy tutaj tak zwane *ułamki proste*. Będą to ułamki następujących czterech typów:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} \quad (m = 2, 3, \dots),$$

gdzie A, M, N, a, p, q są liczbami rzeczywistymi. Oprócz tego zakładamy, że trójmian x^2+px+q w ułamkach typu III i IV nie ma pierwiastków rzeczywistych, a więc

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \text{czyli} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Ułamki postaci I i II umiemy [267,7] już całkować:

$$A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C, \quad A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{(k-1)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Co się zaś tyczy ułamków postaci III i IV, to całkowanie ich upraszcza się przez następujące podstawienie. Wydzielamy z wyrażenia x^2+px+q pełny kwadrat dwumianu

$$x^2+px+q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Ostatnie wyrażenie w nawiasie jest zgodnie z założeniem liczbą dodatnią równą a^2 , jeśli przyjąć

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

⁽¹⁾ Patrz, co mówi się o tym w ustępie 264 Powrócimy do tego niżej, w ustępie 305.

⁽²⁾ Aby pomóc czytelnikowi oswoić się z tym faktem, przypominamy, że całki

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

funkcji wymiernych same już nie są funkcjami wymiernymi. Gdyby więc „elementarnymi” funkcjami były dla nas funkcje wymierne, to już wymienione całki funkcji „elementarnych” nie wyrażałyby się przez funkcje „elementarne”, lecz byłyby funkcjami „nieelementarnymi” nowego rodzaju — $\ln x$ i $\operatorname{arc tg} x$.

Zastosujemy teraz podstawienie

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt,$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2, \quad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right).$$

W przypadku III otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{1}{2} Mp \right)}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \arctg \frac{t}{a} + C \end{aligned}$$

lub wracając do x i podstawiając zamiast a jego wartość

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

W przypadku IV to samo podstawienie daje

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{1}{2} Mp \right)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} \end{aligned}$$

Pierwsza całka po prawej stronie równości może być łatwo obliczona przez podstawienie $t^2 + a^2 = u$, $2t dt = du$

$$(2) \quad \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{u^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C.$$

Natomiast druga po prawej stronie przy dowolnym m może być obliczona ze wzoru redukcyjnego (6) 271. Pozostaje więc tylko podstawić z powrotem w wyniku $t = \frac{2x + p}{2}$, aby powrócić do zmiennej x .

Tym wyczerpuje się zagadnienie całkowania ułamków prostych.

274. Rozkład ułamków właściwych na ułamki proste. Zatrzymamy się teraz na pewnym twierdzeniu z algebra, które ma jednak zasadnicze znaczenie w teorii całkowania ułamków wymiernych.

Każdy ułamek właściwy

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

można przedstawić w postaci sumy skończonej liczby ułamków prostych.

Ten rozkład ułamka właściwego na ułamki proste związany jest ściśle z rozkładem mianownika ułamka $Q(x)$ na czynniki pierwsze. Jak wiadomo każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się jednoznacznie na czynniki rzeczywiste postaci $x-a$ i x^2+px+q , przy czym zakłada się, że czynniki stopnia drugiego nie mają pierwiastków rzeczywistych, a więc nie rozkładają się z kolei na czynniki liniowe rzeczywiste. Łącząc ze sobą jednakowe czynniki, jeśli takowe są, i przyjmując dla uproszczenia, że wspólny czynnik przy najwyższej potędze wielomianu $Q(x)$ jest równy jedności, można zapisać schematycznie rozkład tego wielomianu w postaci

$$(3) \quad Q(x) = (x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^m \cdots,$$

gdzie k, \dots, m, \dots są liczbami naturalnymi.

Zauważmy, że jeśli stopień wielomianu Q jest n , to oczywiście suma wszystkich wykładników k dodana do sumy wszystkich wykładników m da dokładnie n :

$$(4) \quad \sum k + 2 \sum m = n.$$

Dla dowodu twierdzenia o rozkładzie na ułamki proste udowodnimy najpierw następujące dwa twierdzenia pomocnicze.

1° Rozpatrzmy jakikolwiek czynnik liniowy $x-a$ występujący w rozkładzie mianownika z wykładnikiem $k \geq 1$. Mamy

$$Q(x) = (x - a)^k Q_1(x),$$

gdzie wielomian Q_1 nie dzieli się już przez $x-a$. Wówczas dany ułamek właściwy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^k Q_1(x)}$$

może być przedstawiony w postaci sumy ułamków właściwych

$$\frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P(x)}{(x - a)^{k-1} Q_1(x)} \text{ (1)},$$

z których pierwszy jest ułamkiem prostym, a mianownik drugiego zawiera czynnik $x-a$ w potędze niższej niż poprzednio.

Aby to udowodnić, wystarczy wybrać liczbę A i wielomian $P_1(x)$ tak, by spełniona była tożsamość

$$P(x) - A Q_1(x) = (x - a) P_1(x).$$

Określamy najpierw A tak, by lewa strona dzieliła się przez $x-a$. Na mocy znanego twierdzenia Bezouta wystarczy w tym celu, by dla $x=a$ lewa strona była równa zeru. Otrzymujemy stąd

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

(1) Litery P, Q z różnymi wskaźnikami oznaczają tu wielomiany, a litery A, M, N – liczby stałe.

Wyrażenie to ma sens właśnie dlatego, że zgodnie z twierdzeniem Bezouta $Q_1(a) \neq 0$ jako niepodzielne przez $x-a$. Przy takim wyborze A wielomian P_1 będzie określony po prostu jako iloraz.

2° Niech teraz x^2+px+q będzie jakimś czynnikiem stopnia drugiego występującym w rozkładzie mianownika z wykładnikiem $m \geq 1$. W tym przypadku można przyjąć

$$Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_1(x),$$

gdzie wielomian Q_1 nie dzieli się przez trójmian x^2+px+q . Wówczas dany ułamek właściwy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}$$

może być przedstawiony w postaci sumy ułamków właściwych

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} Q_1(x)},$$

z których pierwszy jest już ułamkiem prostym, a drugi zawiera znów w mianowniku wspomniany trójmian, ale w niższej potędze.

Dla dowodu wystarcza dobrać liczby M, N i wielomian $P_1(x)$ tak, by zachodziła tożsamość

$$P(x) - (Mx+N) Q_1(x) = (x^2+px+q) P_1(x).$$

Określmy M i N tak, by tym razem lewa strona dzieliła się przez trójmian kwadratowy x^2+px+q . Niech $\alpha x+\beta$ i $\gamma x+\delta$ będą odpowiednimi resztami z dzielenia P i Q_1 przez ten trójmian. Wówczas zagadnienie sprowadzi się do tego, by wyrażenie

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta) = -\gamma Mx^2+(\alpha-\delta M-\gamma N)x+(\beta-\delta N)$$

dzieliło się przez x^2+px+q . Wykonując dzielenie otrzymujemy resztę

$$[(\gamma\delta-\alpha)M-\gamma N+\alpha]x+[\gamma\delta M-\delta N+\beta].$$

Musimy przyrównać do zera oba te współczynniki i w ten sposób otrzymamy dla wyznaczenia M i N układ dwóch równań liniowych o wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2$$

różnym od zera. Rzeczywiście dla $\gamma \neq 0$ wyznacznik ten można napisać w postaci

$$\gamma^2 \left[\left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 + p \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) + q \right].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest wartością trójmianu x^2+px+q w punkcie $x = -\delta/\gamma$, nie może więc być zerem, bowiem trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych. Dla $\gamma = 0$ wyznacznik sprowadzi się do δ^2 , a w tym przypadku z góry można powiedzieć, że δ nie jest zerem, gdyż wielomian Q_1 nie dzieli się przez x^2+px+q .

Po obliczeniu w taki sposób wartości M i N , możemy także i tu wyznaczyć bez trudu wielomian P_1 jako iloraz.

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia wysłownego na początku ustępu. Dowód sprowadzi się do kilkakrotnego zastosowania twierdzeń 1° i 2°, które pozwalają kolejno wydzielać ułamki proste z danego ułamka właściwego aż do jego wyczerpania.

Jeśli czynnik $x-a$ wchodzi w skład Q tylko w pierwszej potędze, to na mocy 1° (dla $k=1$) przyporządkujemy mu jeden jedyny ułamek prosty postaci

$$\frac{A}{x-a}$$

W przypadku gdy wykładnik potęgi wyrażenia $x-a$ jest równy $k > 1$, wydzielamy na podstawie 1° ułamek prosty

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Do ułamka, który pozostało, zastosujemy znowu twierdzenie 1° i wydzielimy ułamek prosty

$$\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$$

itd., dopóki czynnik $x-a$ w ogóle nie zniknie z rozkładu mianownika. Tak więc w rozpatrywanym przypadku czynnikowi $(x-a)^k$ ($k > 1$) będzie odpowiadała grupa licząca k ułamków prostych

$$(5) \quad \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Zastosujemy kolejno takie samo rozumowanie do każdego z pozostałych czynników liniowych, dopóki mianownik nie zostanie wyczerpany lub w jego rozkładzie nie pozostały same czynniki stopnia drugiego.

Analogicznie, korzystając z 2°, czynnikowi kwadratowemu x^2+px+q występującemu w pierwszej potędze przyporządkujemy jeden tylko ułamek prosty postaci

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

jeśli natomiast czynnik ten występuje w potędze $m > 1$ — grupę m ułamków prostych

$$(6) \quad \frac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

To samo można zrobić z pozostałymi czynnikami kwadratowymi, jeśli takowe jeszcze są. Kończy to dowód twierdzenia.

275. Wyznaczenie współczynników. Całkowanie ułamków właściwych. Tak więc, jeśli znany jest rozkład (3), znane są tym samym mianowniki ułamków prostych, na które rozkłada się dany ułamek P/Q . Zajmiemy się wyznaczeniem liczników, tzn. współczynnikami

ków A, M, N . Ponieważ liczniki grupy ułamków (5) zawierają k współczynników, a liczniki grupy ułamków (6) $2m$ współczynników, przeto na mocy (4) jest ich razem n .

Dla wyznaczenia wspomnianych współczynników stosuje się zwykle *metodę wspólnych współczynników nieoznaczonych*. Polega ona na tym, że znając kształt rozkładu ułamka P/Q , piszemy go po prawej stronie ze współczynnikami nieoznaczonymi w licznikach. Wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków prostych jest oczywiście Q , dodając je otrzymujemy ułamek właściwy⁽¹⁾. Jeśli odrzucimy teraz z lewej i z prawej strony równości mianownik Q , to otrzymamy równość dwóch wielomianów stopnia $(n-1)$ będącą tożsamością względem x . Współczynnikami przy różnych potęgach wielomianu po prawej stronie będą jednorodne wielomiany liniowe względem n nieoznaczonych współczynników. Przyrównując je do odpowiednich współczynników liczbowych wielomianu P , otrzymujemy wreszcie układ n równań liniowych, z których wyznaczymy współczynniki literowe. Ponieważ możliwość rozkładu na ułamki proste została udowodniona, wspomniany układ nigdy nie może być sprzeczny.

Co więcej, wspomniany układ równań liniowych ma rozwiązanie jakikolwiek będzie zespół wyrazów wolnych współczynników wielomianu P , a zatem wyznacznik tego układu musi być różny od zera. Innymi słowy, układ ten jest zawsze oznaczony. Ta prosta uwaga dowodzi jednocześnie jednoznaczności rozkładu ułamka właściwego na ułamki proste. Objasnimy to, o czym mówiliśmy, na przykładzie.

PRZYKŁAD. Niech będzie dany ułamek $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. Na mocy ogólnego twierdzenia ma on rozkład

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Współczynniki A, B, C, D, E wyznaczymy z tożsamości

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach x po lewej i po prawej stronie równości otrzymujemy układ pięciu równań

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+C=0, \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\ x^0 & A-2C-2E=13. \end{array}$$

Stąd

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

Ostatecznie

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Stwierdzony powyżej fakt algebraiczny ma bezpośrednie zastosowanie do całkowania funkcji wymiernych. Jak widzieliśmy w ustępie 273, ułamki proste można całkować w postaci skończonej. Możemy to samo powiedzieć teraz o dowolnym ułamku wymiernym.

(1) Suma ułamków wymiernych właściwych jest znowu ułamkiem właściwym.

Jeśli przyjrzeć się tym funkcjom, za pomocą których wyrażają się całki wielomianów i ułamków właściwych, to można sformułować wynik ten dokładniej:

Całka dowolnej funkcji wymiernej wyraża się w postaci skończonej przez funkcję wymierną, logarytm i arcus tangens.

Wracając do rozpatrzzonego powyżej przykładu i przypominając sobie wzory z ustępu 273 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arc tg} x + C. \end{aligned}$$

276. Wydzielenie części wymiernej całki. Istnieje sposób podany przez M. W. Ostrogradskiego, za pomocą którego obliczanie całki wymiernego ułamka właściwego znacznie się upraszcza. Sposób ten pozwala drogą czysto algebraiczną wydzielić część wymierną całki.

Widzieliśmy [273], że składniki wymierne całki otrzymujemy przy całkowaniu ułamków prostych postaci II i IV. W pierwszym przypadku całkę można napisać od razu

$$(7) \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Zbadajmy teraz, jaką postać ma część wymierna całki

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx \quad (m > 1, q - \frac{1}{4} p^2 > 0)$$

Stosując znane nam już podstawienie $x + \frac{1}{2}p = t$ wykorzystujemy równości (1), (2) i wzór redukcyjny (6) z ustępu 271 dla $n = m-1$. Gdy wróćmy do zmiennej x , otrzymamy

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

gdzie M' , N' i α oznaczają pewne współczynniki stałe. Na mocy tego samego wzoru zastępując m przez $m-1$, otrzymujemy dla ostatniej całki (jeśli $m > 2$)

$$\int \frac{\alpha dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

itd., dopóki nie sprowadzimy wykładnika potęgi trójmianu x^2+px+q w całce po prawej stronie do jedności. Wszystkie wydzielane kolejno wyrazy są ułamkami właściwymi. Łącząc je razem otrzymamy wynik w postaci następującej:

$$(8) \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

gdzie $R(x)$ jest wielomianem stopnia niższego niż mianownik ⁽¹⁾, a λ jest stałą.

⁽¹⁾ Patrz odsyłacz na str. 32.

Niech będzie dany ułamek właściwy P/Q , o którym zakładamy, że jest nieskracalny i że jego mianownik Q jest rozłożony na czynniki pierwsze [patrz (3)]. Wówczas całka tego ułamka zapisze się w postaci sumy całek ułamków postaci (5) [lub (6)]. Jeśli k (lub m) jest większe od jedności, to całki wszystkich ułamków grupy (5) lub (6) oprócz pierwszej przekształcają się według wzoru (7) [lub (8)]. Łącząc wszystkie te wyniki otrzymujemy ostateczny wzór w postaci

$$(9) \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

Część wymierną całki P_1/Q_1 otrzymujemy w wyniku dodawania wydzielonych wyżej części wymiernych, jest więc ona przede wszystkim ułamkiem właściwym, a jej mianownik Q_1 ma rozkład

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \dots (x^2+px+q)^{m-1} \dots$$

Co się zaś tyczy ułamka P_2/Q_2 , który pozostał pod znakiem całki, to otrzymuje się go z dodawania ułamków postaci I i III, a więc jest on również ułamkiem właściwym

$$Q_2(x) = (x-a) \dots (x^2+px+q) \dots$$

Oczywiście [patrz (3)] $Q = Q_1 Q_2$.

Wzór (9) nazywa się wzorem Ostrogradskiego.

Różniczkując można przedstawić go w postaci równoważnej

$$(10) \quad \frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1} \right]' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Widzieliśmy, że wielomiany Q_1 i Q_2 można łatwo znaleźć, jeśli znamy rozkład (3) wielomianu Q . Mogą być one jednak wyznaczone również bez tego rozkładu. Rzeczywiście, ponieważ pochodna Q' zawiera wszystkie czynniki pierwsze, na które rozkłada się Q w potędze o jeden niższej, Q_1 jest największym wspólnym dzielnikiem Q i Q' , a więc można go obliczyć z tych wielomianów na przykład przez kolejne dzielenie (czyli za pomocą algorytmu Euklidesa, przyp. tłum). Jeśli znamy Q_1 , to Q_2 wyznaczamy dzieląc po prostu Q przez Q_1 .

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem dzielników P_1 i P_2 we wzorze (10). Skorzystamy w tym celu także z metody współczynników nieoznaczonych.

Oznaczmy stopnie wielomianów Q , Q_1 , Q_2 odpowiednio przez n , n_1 , n_2 , wówczas, $n_1+n_2 = n$. Stopnie wielomianów P , P_1 , P_2 nie przewyższają odpowiednio $n-1$, n_1-1 , n_2-1 . Podstawmy za P_1 i P_2 wielomiany stopnia n_1-1 i n_2-1 o współczynnikach literowych. Współczynników tych będzie razem n_1+n_2 , tzn. n . Zróżniczając (10) obustronnie, otrzymujemy

$$\frac{P'_1 Q_1 - P_1 Q'_1}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

Wykażemy teraz, że pierwszy ułamek można zawsze sprowadzić do mianownika Q w ten sposób, aby licznik pozostał wielomianem. Istotnie,

$$\frac{P'_1 Q_1 - P_1 Q'_1}{Q_1^2} = \frac{P'_1 Q_2 - P_1 \frac{Q'_1 Q_2}{Q_1}}{Q_1 Q_2} = \frac{P'_1 Q_2 - P_1 H}{Q},$$

gdzie H oznacza iloraz $Q'_1 Q_2 / Q_1$. Iloraz ten można jednak przedstawić w postaci wielomianu. Rzeczywiście, jeśli $(x-a)^k$ przy $k \geq 1$ wchodzi w skład Q_1 , to $(x-a)^{k-1}$ wchodzi do Q'_1 , a $x-a$ do Q_2 . Do takiego samego wniosku dojdziemy, gdy chodzi o wielomian kształtu $(x^2+px+q)^m$ dla $m \geq 1$. Tak więc licznik ułamka H dzieli się bez reszty przez mianownik, można zatem dalej traktować H jako wielomian stopnia n_2-1 .

Uwalniając się od wspólnego mianownika Q otrzymujemy tożsamość dwóch wielomianów stopnia $n-1$:

$$P'_1 Q_2 - P_1 H + P_2 Q_1 = P.$$

Jak i wyżej otrzymujemy stąd dla wyznaczenia wprowadzonych n nieoznaczonych współczynników układ n równań liniowych.

Ponieważ możliwość rozkładu (10) została udowodniona dla dowolnego P , więc wspomniany układ musi być niesprzeczny przy wszelkich wyrazach wolnych. Stąd już samo przez sieć wynika, że wyznacznik układu musi być różny od zera, a więc układ jest oznaczony i rozkład (10) jest określony dla danych mianowników Q_1 i Q_2 — jednoznacznie ⁽¹⁾.

PRZYKŁAD. Wydzielić część wymierną całki

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

Mamy

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1} \right] + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

skąd

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 = \\ = (2ax+b)(x^2+x^2+x+1) - (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

Przyporządkowując współczynniki przy jednakowych potęgach x z obu stron równości otrzymujemy układ równań, z którego wyznaczymy niewiadome a, b, \dots, f :

$$\begin{array}{l|l} x^5 & d = 0 \quad (\text{dalej } d \text{ nie bierzemy już pod uwagę}), \\ x^4 & -a+e = 4, \\ x^3 & -2b+e+f = 4, \\ x^2 & a-b-3c+e+f = 16, \\ x^1 & 2a-2c+e+f = 12, \\ x^0 & b-c+f = 8, \end{array}$$

skąd

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = -4, \quad d = 0, \quad e = 3, \quad f = 3.$$

⁽¹⁾ Porównaj analogiczną uwagę dotyczącą rozkładu ułamka właściwego na ułamki proste str. 32.

Tak więc szukana całka jest równa

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx &= -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3 \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3 \operatorname{arc tg} x + C. \end{aligned}$$

W przykładzie tym obliczenie ostatniej całki można było łatwo wykonać od razu. W innych przypadkach trzeba znowu rozkładać na ułamki proste. Można zresztą czynność tę połączyć z poprzednią.

277. Przykłady. Podamy dalsze przykłady całkowania funkcji wymiernych.

1) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. Rozkład na ułamki proste otrzymujemy tu poprzez nieskomplikowane przekształcenia

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arc tg} x + C$.

2) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx$.

Mamy

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})(x-\frac{5}{2})} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}} + \frac{C}{x-\frac{5}{2}},$$

skąd wynika tożsamość

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} = A(x+\frac{3}{2})(x-\frac{5}{2}) + B(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}) + C(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}).$$

Zamiast przyrównywać współczynniki przy jednakowych potęgach x w obu stronach równości, można postąpić inaczej. Podstawmy w tej tożsamości kolejno $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. Otrzymujemy od razu $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{8}, C = \frac{3}{8}$, przy każdym bowiem podstawieniu z prawej strony pozostaje tylko jeden składnik.

Odpowiedź: $\frac{1}{4} \ln |x-\frac{1}{2}| - \frac{1}{8} \ln |x+\frac{3}{2}| + \frac{3}{8} \ln |x-\frac{5}{2}| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3} \right| + C'$.

3) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Ponieważ

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

przeto szukamy rozkładu w postaci

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Z tożsamości

$$1 = (Ax+B)(x^2+x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

(1) Stała C' różni się oczywiście od stałej C o $-\frac{1}{2} \ln 2$.

otrzymujemy układ równań

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0, \\ x^1 & A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0, \\ x^0 & B+D=1, \end{array}$$

skąd

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg}(x\sqrt{2}-1) + C. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na sumę arkus tangensów [50] można wynik ten napisać w postaci

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$$

Trzeba zauważyć jednak, że wyrażenie to ma sens tylko dla przedziałów $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ z osobna wziętych, gdyż w punktach $x = \pm 1$ traci ono sens. Stała C' będzie dla tych przedziałów równa odpowiednio

$$C - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad C, \quad C + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Skokowa zmiana stałej kompensuje nieciągłość samej funkcji w punktach $x = \pm 1$.

$$(4) \int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} dx.$$

Uciekniemy się do wydzielania części wymiernej całki. Mamy

$$Q_1 = (x^2-2x+2)^2, \quad Q_2 = (x-1)(x^2-2x+2),$$

tak więc

$$\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} = \left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2-2x+2)^2} \right]' + \frac{e}{x-1} + \frac{fx+g}{x^2-2x+2},$$

przy czym od razu już rozkładamy na ułamki proste to wyrażenie, które podlega jeszcze całkowaniu po wydzieleniu części wymiernej całki.

Tożsamość

$$2x^4-4x^3+24x^2-40x+20 = (3ax^2+2bx+c)(x^2-2x+2)(x-1) - (ax^3+bx^2+cx+d) \cdot 2(2x-2)(x-1) + e(x^2-2x+2)^3 + (fx+g)(x-1)(x^2+2x+2)^2$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{array}{l|l} x^6 & e+f=0, \\ x^5 & -a-6e-5f+g=0, \\ x^4 & -a-2b+18e+12f-5g=2, \\ x^3 & 8a+2b-3c-32e-16f+12g=-4, \\ x^2 & -6a+4b+5c-4d+36e+12f-16g=24, \\ x^1 & -4b+8d-24e-4f+12g=-40, \\ x^0 & -2c-4d+8e-4g=20, \end{array}$$

skąd

$$a=2, \quad b=6, \quad c=8, \quad d=-9, \quad e=2, \quad f=-2, \quad g=4.$$

Odpowiedź: $\frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + C.$

5) $\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3} dx.$

Wydzielając część wymierną całki otrzymujemy

$$Q_1 = (x+1)(x^2+x+1)^2, \quad Q_2 = (x+1)(x^2+x+1).$$

Rozkładu szukamy w postaci

$$\left[\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x+1)(x^2+x+1)^2} \right]' + \frac{fx^2 + gx + h}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Z układu równań

$$\begin{array}{l|l} x^7 & f = 0, \\ x^6 & -a+g = 1, \\ x^5 & a-2b+3g+h = -1, \\ x^4 & 5a-b-3c+5g+3h = 1, \\ x^3 & 4a+3b-3c-4d+5g+5h = 2, \\ x^2 & 3b+c-5d-5e+3g+5h = 3, \\ x^1 & 2c-d-7e+g+3h = 3, \\ x^0 & d-3e+h = 3 \end{array}$$

znajdujemy

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = -2, \quad d = 0, \quad e = -1, \quad f = g = h = 0.$$

Tak więc całka sprowadza się tu do funkcji wymiernej

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} + C.$$

§ 3. Całkowanie pewnych wyrażeń zawierających pierwiastki

278. Całkowanie wyrażeń postaci $R(x, \sqrt[m]{(\alpha x + \beta)/(\alpha x + \delta)})$ ⁽¹⁾. Nauczyliśmy się już całkować w postaci skończonej różniczki wymierne. W dalszym ciągu zasadniczym sposobem całkowania różnych klas wyrażeń różniczkowych będzie znalezienie takich podstawień $t = \omega(x)$, które sprowadzą wyrażenie podcałkowe do postaci wymiernej i umożliwią przedstawienie całki jako funkcji t w postaci skończonej. Jeśli przy tym sama funkcja $\omega(x)$, którą należy podstawić za t , wyraża się przez funkcje elementarne, to całka wyrazi się również jako funkcja x w postaci skończonej.

Sposób ten nazwiemy *metodą sprowadzenia wyrażenia podcałkowego do postaci wymiernej*.

(1) Umawiamy się raz na zawsze oznaczać literą R funkcję wymierną swoich argumentów.

Jako pierwszy przykład jej zastosowania rozpatrzymy całkę postaci

$$(1) \quad \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx,$$

gdzie R oznacza funkcję wymierną dwóch argumentów, m — liczbę naturalną, a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są stałymi. Podstawmy

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} dx, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

$$x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Całka (1) przejdzie w całkę

$$\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt;$$

tu różniczka ma już postać wymierną, gdyż R, φ, φ' są funkcjami wymiernymi. Obliczywszy tę całkę według reguły poprzedniego paragrafu, powróćmy do starej zmiennej podstawiając z powrotem $t = \omega(x)$.

Do całki (1) sprowadzają się także ogólniejsze całki

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots\right) dx,$$

gdzie wszystkie wykładniki r, s, \dots są wymierne. Wystarczy tylko wszystkie te wykładniki sprowadzić do wspólnego mianownika m , by otrzymać pod znakiem całki funkcję wymierną zmiennej x i pierwiastka $\sqrt[m]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)}$.

PRZYKŁADY.

$$1) \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$$

Tutaj funkcja wymierna $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ sprowadziła się po prostu do funkcji liniowej. Przyjmijmy $t = \sqrt{x+1}$, $dx = 2t dt$, wówczas

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx &= 2 \int \frac{t+2}{t^3 - 1} dt = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

pozostaje tylko podstawić jeszcze $t = \sqrt{x+1}$.

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}.$$

Przyjmujemy

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, \quad dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3 - 1)^2};$$

wówczas

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \int \frac{-3dt}{t^3 - 1} = \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

gdzie $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

279. Całkowanie różniczek dwumiennych. Przykłady. Różniczkami dwumiennymi nazywają się wyrażenia postaci

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

gdzie a, b są stałe, a wykładniki m, n, p są liczbami wymiernymi. Wyjaśnimy, w jakich wypadkach wyrażenia te można całkować w postaci skończonej.

Jeden z takich przypadków jest widoczny od razu: jeśli p jest liczbą całkowitą (dodatnią, zerem lub ujemną), to rozpatrywane wyrażenie należy do typu zbadanego w poprzednim ustępie. Jeśli oznaczymy mianowicie przez λ najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników ułamków m i n , to będziemy mieli do czynienia z wyrażeniem postaci $R(\sqrt[\lambda]{x}) dx$, a więc dla sprowadzenia go do postaci wymiernej wystarczy podstawić $t = \sqrt[\lambda]{x}$.

Przekształćmy teraz dane wyrażenie za pomocą podstawienia $z = x^n$. Otrzymamy

$$x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n} (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Oznaczając krótko

$$\frac{m+1}{n}-1 = q$$

mamy

$$(2) \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a+bz)^p z^q dz.$$

Jeśli q jest liczbą całkowitą, to otrzymamy znów wyrażenie zbadanego już typu. Rzeczywiście, jeśli oznaczymy mianownik ułamka p przez v , to wyrażenie przekształcone będzie miało postać $R(z, \sqrt[v]{a+bz})$. Sprowadzenie do postaci wymiernej wyrażenia podcałkowego można też osiągnąć od razu przez podstawienie

$$t = \sqrt[v]{a+bz} = \sqrt[v]{a+bx^n}.$$

Przepiszmy wreszcie drugą z całek (2) tak:

$$\int \left(\frac{a+bz}{z} \right)^p z^{p+q} dz.$$

Łatwo dostrzec, że jeżeli $p+q$ jest całkowite, to otrzymamy także przypadek zbadany: wyrażenie przekształcone ma postać $R\left(z, \sqrt[v]{\frac{a+bz}{z}}\right)$. Wyrażenie podcałkowe

w danej całce sprowadza się od razu do postaci wymiernej przez podstawienie:

$$t = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{z}} = \sqrt[n]{ax^{-n}+b}.$$

Tak więc *obie całki (2) mogą być wyrażone w postaci skończonej, jeśli jedna z liczb*

$$p, \quad q, \quad p+q$$

lub — co na to samo wychodzi — jedna z liczb

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

jest całkowita.

Te przypadki całkowalności znał właściwie już Newton. Jednak dopiero w połowie zeszłego wieku Czebyszew stwierdził ważny fakt, że nie ma innych przypadków całkowalności w postaci skończonej różniczek dwumiennych.

PRZYKŁADY.

$$1) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3} dx.$$

Tutaj $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Ponieważ

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2,$$

mamy więc drugi przypadek całkowalności. Biorąc pod uwagę, że $\nu = 3$, podstawmy w myśl ogólnej reguły

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt,$$

wówczas

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4(4t^3 - 7) + C \quad \text{itd.}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4} dx.$$

Tym razem $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$. Trzeci przypadek całkowalności, ponieważ $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$. Tutaj $\nu = 4$. Podstawmy

$$t = \sqrt[4]{x^{-4}+1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x = (t^4-1)^{-1/4}, \quad dx = -t^3(t^4-1)^{-5/4} dt,$$

a więc

$$\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-1/4},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C$$

itd.

$$3) \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}dx.$$

Tu $m = -1$, $n = 5$, $p = -\frac{1}{3}$; drugi przypadek: $\frac{m+1}{n} = 0$, $v = 3$. Podstawmy

$$t = \sqrt[3]{1-x^5}, \quad x = (t^3-1)^{1/5}, \quad dx = \frac{3}{5} t^2(t^3-1)^{-4/5}dt;$$

mamy

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5} \int \frac{t dt}{t^3-1} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1} \right) dt = \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

itd.

280. Wzory redukcyjne. Ponieważ całkę różniczki dwumiennej można przekształcić zawsze [patrz (2)] do postaci

$$J_{p,q} = \int (a+bz)^p z^q dz,$$

więc w dalszym ciągu ograniczymy się do rozpatrywania tych właśnie całek.

Wyprowadzimy kilka wzorów redukcyjnych, za pomocą których całka (3) może być, ogólnie rzecz biorąc, wyrażona przez podobną całkę $J_{p',q'}$, gdzie p' i q' różnią się od p i q o dowolne liczby całkowite.

Całkując tożsamości

$$(a+bz)^{p+1} z^q = a(a+bz)^p z^q + b(a+bz)^p z^{q+1},$$

$$\frac{d}{dz} [(a+bz)^{p+1} z^{q+1}] = (p+1)b(a+bz)^p z^{q+1} + (q+1)(a+bz)^{p+1} z^q,$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} J_{p+1,q} &= aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1}, \\ (a+bz)^{p+1} z^{q+1} &= (p+1)bJ_{p,q+1} + (q+1)J_{p+1,q}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd dwa pierwsze wzory

$$(I) \quad J_{p,q} = -\frac{(a+bz)^{q+1} z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)} J_{p+1,q} \quad (p \neq -1),$$

$$(II) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^{p+1} z^{q+1}}{a(q+1)} - b \frac{p+q+2}{a(q+1)} J_{p,q+1} \quad (q \neq -1),$$

które pozwalają zwiększyć wykładnik p lub q o jednośc, jeśli tylko suma $p+q$ jest różna od -1 .

Rozwiązujeć te równości względem $J_{p+1,q}$, $J_{p,q+1}$ i zastępując p i q odpowiednio przez $p-1$ i $q-1$ otrzymujemy wzory

$$(III) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^p z^{q+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1} J_{p-1,q} \quad (p+q \neq -1),$$

$$(IV) \quad J_{p,q} = \frac{(a+bz)^{p+1} z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)} J_{p,q-1},$$

które pozwalają zmniejszyć wykładnik p lub q o jednośc, jeśli tylko suma $p+q$ jest różna od -1 .

Jeśli ani p , ani q , ani $p+q$ nie są liczbami całkowitymi, tak że całka $J_{p,q}$ nie wyraża się w postaci skończonej przez funkcje elementarne, wzory redukcyjne można stosować wielokrotnie bez żadnych ograniczeń. Za ich pomocą można na przykład sprowadzić parametry p i q do ułamków właściwych.

Zatrzymamy się na ciekawszym dla nas przypadku, gdy całka może być obliczona w postaci skończonej. Można przy tym założyć, że wykładnik p lub q jest całkowity, gdyż przypadek, gdy $p+q$ jest całkowite sprowadza się do przypadku całkowitego q przez podstawienie $z = 1/u$.

Wtedy kilkakrotne kolejne zastosowanie wyprowadzonych wzorów pozwala sprowadzić wykładnik całkowity p lub q do 0, jeśli był on dodatni, lub do -1 , gdy był on ujemny. Na tym zwykle kończy się całkowanie lub w każdym razie znacznie upraszcza.

PRZYKŁADY.

1) Rozpatrzymy całkę ⁽¹⁾

$$H_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (m - całkowite).$$

Tutaj $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, dlatego gdy m jest nieparzyste, $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}$ jest liczbą całkowitą, a gdy m jest parzyste, parzyste jest $\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$, a więc w obu przypadkach można obliczyć całki w postaci skończonej. Podstawienie $z = x^2$ sprowadza nąszą całkę do postaci

$$\frac{1}{2} \int (1-z)^{-1/2} z^{(m-1)/2} dz = J_{-1/2, (m-1)/2}.$$

Jeśli przy założeniu, że $m > 1$, zastosujemy do tej całki wzór (IV), to otrzymujemy

$$J_{-1/2, (m-1)/2} = -2 \frac{(1-z)^{1/2} z^{(m-1)/2}}{m} + \frac{m-1}{m} J_{-1/2, (m-3)/2}$$

lub powracając do danej całki

$$H_m = \frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

Zmniejszając m o 2 wzór ten pozwala sprowadzić stopniowo obliczenie H_m albo do

$$H_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

dla m nieparzystego, albo do

$$H_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

dla m parzystego.

⁽¹⁾ Analogicznie można też badać całki

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}} dx, \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Niech teraz $m < -1$, a więc $m = -\mu$, $\mu > 1$. Zastosujemy tym razem wzór (II)

$$J_{-1/2, (m-1)/2} = 2 \frac{(1-z)^{1/2} z^{(m+1)/2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} J_{-1/2, (m+1)/2},$$

skąd

$$H_{-\mu} = - \frac{x^{-(\mu-1)} \sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1} H_{-(\mu-2)}.$$

Z pomocą tego wzoru możemy zmniejszać wartość μ o 2 i stopniowo sprowadzić obliczenia $H_{-\mu}$ albo do

$$H_{-1} = \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$$

dla μ nieparzystego, albo do

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

dla μ parzystego.

2) Jeśli do całki ⁽¹⁾

$$J_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \int (a^2+z)^{-(n+1)} z^{-1/2} dz = J_{-(n+1), -1/2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

zastosować wzór (I):

$$J_{-(n+1), -1/2} \frac{(a^2+z)^{-n} z^{1/2}}{na^2} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_{-n, -1/2},$$

to powracając do J_n otrzymamy znany nam już [271, (6)] wzór redukcyjny

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_n.$$

281. Całkowanie wyrażeń postaci $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Podstawienia Eulera. Przechodzimy do rozpatrzenia bardzo ważnej klasy całek

$$(4) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$$

Zakładamy oczywiście, że trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków równych, a więc że jego pierwiastek kwadratowy nie może być zastąpiony wyrażeniem wymiernym. Zapoznamy się z trzema podstawieniami, zwanymi *podstawieniami Eulera*, za pomocą których można zawsze sprowadzić do postaci wymiernej wyrażenie podcałkowe.

Pierwsze podstawienie może być zastosowane w przypadku, gdy $a > 0$. Przyjmujemy wówczas

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax} \quad (2).$$

(1) Analogicznie można też badać całkę

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}.$$

(2) Można przyjąć również $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{ax}$.

Podnosząc tę równość stronami do kwadratu otrzymujemy po zredukowaniu po obu stronach składników ax^2 równość $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, a więc:

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt.$$

Cały dowcip podstawienia Eulera polega na tym, że dla wyznaczenia x otrzymujemy równanie pierwszego stopnia, a więc x , a jednocześnie także pierwiastek $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ wyraża się wymiernie przez t .

Jeśli otrzymane wyrażenie podstawimy do wzoru (4), to zadanie sprowadzi się do całkowania funkcji wymiernej zmiennej t . Powracając w wyniku do x , trzeba będzie podstawić $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$.

Drugie podstawienie można zastosować, jeśli $c > 0$. W tym przypadku można przyjąć

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad (1).$$

Jeśli podniesiemy obie strony do kwadratu, zredukujemy po obu stronach c i skrócimy przez x , to otrzymamy $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$ — znowu równanie stopnia pierwszego względem x . Stąd

$$x = \frac{2\sqrt{a}t - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt.$$

Podstawiając to do wzoru (4), sprowadzimy wyrażenie podcałkowe do postaci wymiernej. Po scałkowaniu podstawimy w wyniku

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}.$$

Uwaga I. Rozpatrzone wyżej przypadki ($a > 0$ i $c > 0$) sprowadzają się wzajemnie do siebie przez podstawienie $x = 1/z$. Dlatego można zawsze uniknąć korzystania z drugiego podstawienia.

Wreszcie trzecie podstawienie może być stosowane w przypadku, gdy trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste λ i μ . Wówczas trójmian ten, jak wiadomo, rozkłada się na czynniki liniowe

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

(1) Lub $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$.

Przyjmijmy

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymamy po skróceniu przez $x - \lambda$ równanie pierwszego stopnia $a(x - \mu) = t^2(x - \lambda)$, a więc

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a},$$

$$dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2} dt$$

itd.

Uwaga II. Przy przyjętych założeniach pierwiastek $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)}$ (powiedzmy, że $x > \lambda$) można sprowadzić do postaci

$$(x - \lambda) \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

a więc w rozpatrywanym przypadku

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R_1 \left(x, \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}} \right),$$

i w gruncie rzeczy mamy do czynienia z różniczką typu zbadanego w ustępie 278. Trzecie podstawienie Eulera, które można napisać w postaci

$$t = \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

pokrywa się z podstawieniem podanym w ustępie 278.

Wykażemy teraz, że pierwsze i trzecie podstawienie Eulera wystarczają do sprowadzenia wyrażenia podcałkowego (4) do postaci wymiernej we wszystkich możliwych wypadkach. Rzeczywiście, jeśli trójmian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki rzeczywiste, to jak widzieliśmy może być zastosowane podstawienie trzecie. Jeśli natomiast nie ma pierwiastków rzeczywistych, tzn. $b^2 - 4ac < 0$, to trójmian

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b^2) + (4ac - b^2)]$$

ma dla wszystkich wartości x znak współczynnika a . Przypadek gdy $a < 0$, nie interesuje nas, wówczas bowiem pierwiastek w ogóle nie ma wartości rzeczywistych. W przypadku gdy $a > 0$ można zastosować podstawienie pierwsze.

Rozważania te prowadzą jednocześnie do ogólnego twierdzenia:

Calki postaci (4) można zawsze obliczyć w postaci skończonej, przy czym dla ich przedstawienia potrzebne są jeszcze — oprócz funkcji, przez które wyrażają się całki różniczek wymiernych — pierwiastki kwadratowe.

282. Geometriczna interpretacja podstawień Eulera. Podstawienia Eulera, pozornie tak bardzo sztuczne, mogą być jednak otrzymane z poglądowych rozważań geometrycznych.

Rozpatrzmy krzywą drugiego stopnia

$$y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{lub} \quad y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Jeśli weźmiemy na tej krzywej dowolny punkt (x_0, y_0) , tak że będzie

$$(5) \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

to przechodząca przez ten punkt sieczna $y - y_0 = t(x - x_0)$ przetnie krzywą jeszcze w jednym tylko punkcie (x, y) . Współrzędne tego punktu znajdziemy prostym rachunkiem. Eliminując y z równania krzywej i równania siecznej otrzymujemy

$$[y_0 + t(x - x_0)]^2 = ax^2 + bx + c,$$

skąd uwzględniając (5) otrzymujemy

$$2y_0 t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)$$

lub, po uproszczeniu przez $x - x_0$,

$$2y_0 t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b.$$

Tak więc odcięta x , a wraz z nią rzędna y , drugiego punktu przecięcia są funkcjami wymiernymi zmiennego współczynnika kątowego t . Zmieniając odpowiednio t można oczywiście zmusić punkt (x, y) do obiegnięcia całej krzywej.

Jasne jest teraz, że zależność

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = t(x - x_0)$$

wyznacza to podstawienie, które na pewno sprowadza do postaci wymiernej wyrażenie podcałkowe w (4).

Niech trójmian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki rzeczywiste λ i μ ; oznacza to, że nasza krzywa przecina osią x w punktach $(\lambda, 0)$ i $(\mu, 0)$. Biorąc na przykład pierwszy z nich za punkt (x_0, y_0) otrzymamy trzecie podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

Jeśli $c > 0$, to krzywa przecina osią y w punktach $(0, \pm \sqrt{c})$. Biorąc jeden z nich jako punkt (x_0, y_0) otrzymamy drugie podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c} = tx.$$

Wreszcie pierwsze podstawienie Eulera otrzymujemy w gruncie rzeczy w ten sam sposób z tym, że jako punkt (x_0, y_0) przyjmujemy punkt w nieskończoności na krzywej. Zakładając mianowicie, że $a > 0$ (w tym przypadku krzywa będzie hiperbolą) rozpatrzmy asymptotę krzywej $y = \pm \sqrt{a}x$ i przetniemy krzywą prostymi $y = t \pm \sqrt{a}x$ równoległymi do asymptoty (będą one przechodziły przez wspomniany punkt w nieskończono-

ści). Każda taka prosta przecina krzywą w drugim punkcie (x, y) , którego współrzędne są funkcjami wymiernymi zmiennej t . Stąd bierze się podstawienie:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} x.$$

283. Przykłady. Znamy już dwie całki podstawowe [269, 9) i 12); 268]:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

należące do całek rozpatrywanego typu. Wychodząc z nich można obliczyć także inne całki.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$. Przy obliczaniu tej całki będziemy rozróżniali dwa przypadki: $\alpha > 0$ i $\alpha < 0$. Jeśli $\alpha > 0$, to całkę można łatwo przekształcić w jedną z całek podstawowych (przy $\beta/\alpha = \pm a^2$)

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}} \right| + C.$$

Mogna pomnożyć jeszcze argument logarytmu przez α , przez co wprowadzimy dodatkowy składnik $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \alpha$; odbije się to więc tylko na C . Otrzymamy ostatecznie

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}| + C' \quad (\alpha > 0).$$

Jeśli zaś $\alpha < 0$, a więc $\alpha = -|\alpha|$, pierwiastek napiszemy w postaci $\sqrt{\beta - |\alpha|x^2}$. Na to, by pierwiastek ten mógł mieć w ogóle wartości rzeczywiste, trzeba założyć, że $\beta > 0$. Całka przekształca się w drugą całkę podstawową (przy $\beta/|\alpha| = a^2$) i

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} x \right) + C \quad (\alpha < 0).$$

Wiele innych całek sprowadza się za pomocą elementarnych chwytów do całek (6) i (7). Na przykład 2) $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx$ całkuje się przez części:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx &= x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int x d \sqrt{\alpha x^2 + \beta} = x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = \\ &= x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} \end{aligned}$$

Po prawej stronie otrzymujemy znowu szukaną całkę. Przenosząc ją na lewo i dzieląc obie strony równości przez 2 otrzymamy

$$(8) \quad \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{1}{2} \beta \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}.$$

Aby otrzymać ostateczny wynik, trzeba wyrazić ostatnią całkę ze wzoru (6) lub (7) w zależności od tego czy $\alpha > 0$, czy też $\alpha < 0$.

3) Całki

$$(a) \int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad (b) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad (c) \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}}$$

sprowadzają się przez proste podstawienie $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ do znanych już całek. Dla ustalenia uwagi założymy, że $\alpha > 0$ i $t > 0$. Otrzymujemy

$$(a) \int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}}.$$

Dalsze obliczenia wykonujemy według wzoru (6) lub (7) w zależności od znaku β .

$$(b) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = - \int \frac{t dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} = - \frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha + \beta t^2} + C = - \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{\beta x} + C.$$

Analogicznie

$$(c) \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}} = - \int \frac{t dt}{(\alpha + \beta t^2)^{3/2}} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{2}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} + C = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} + C.$$

4) Przekształcenia tożsamościowe wyrażenia podcałkowego sprowadzają następujące całki do całek już obliczonych:

$$(a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad (b) \int \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{x} dx, \quad (c) \int \frac{x^2}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}} dx.$$

Mamy:

$$(a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = \frac{1}{\alpha} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$$

lub na mocy wzoru (8)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{2\alpha} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \frac{\beta}{2\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} \quad \text{itd. [patrz 1)],}$$

$$(b) \int \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{x} dx = \int \frac{\alpha x^2 + \beta}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = \alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} + \beta \int \frac{dx}{x \sqrt{\alpha x^2 + \beta}},$$

pierwsza całka może być obliczona od razu, druga była obliczona w 3); wreszcie

$$(c) \int \frac{x^2}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}} dx = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}}$$

[patrz 1) i 3)].

5) Jeśli pod pierwiastkiem znajduje się pełny trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$, wygodnie jest sprowadzić go przez podstawienie liniowe do dwumianu. Wydzielimy w tym celu pełny kwadrat

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + 4ac - b^2]$$

i przyjmujemy $t = 2ax + b$. W ten sposób na przykład otrzymamy ze wzorów (6) i (7) dla $a > 0$

$$(6^*) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| + C = \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| ax + \frac{1}{2}b + \sqrt{a(ax^2+bx+c)} \right| + C'$$

a dla $a < 0$

$$(7^*) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$$

6) Zajmiemy się teraz podstawieniami Eulera. W ustępie 269, 12) zastosowaliśmy właściwie pierwsze podstawienie do obliczenia całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Chociaż drugą całkę podstawową

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

znamy już z rozważań elementarnych, jednak jako ćwiczenie zastosujemy do niej podstawienie Eulera.

(a) Jeśli zastosujemy najpierw trzecie podstawienie $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$, to otrzymamy

$$x = a \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4at dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$$

oraz

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctg t + C = 2 \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Ponieważ zachodzi tożsamość

$$2 \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \quad (-a < x < a),$$

więc wynik ten różni się tylko kształtem od znanego nam już wyniku.

Czytelnik powinien dalej też liczyć się z możliwością otrzymywania różnych form tej samej całki w zależności od metody zastosowanej do jej obliczania.

(b) Jeśli zastosujemy do tej całki drugie podstawienie $\sqrt{a^2-x^2} = xt-a$, otrzymamy analogicznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2 \int \frac{dt}{t^2+1} = -2 \arctg t + C = -2 \arctg \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Napotykamy tu inną ciekawą osobliwość ⁽¹⁾: wynik ten jest poprawny osobno dla przedziału $(-a, 0)$ i osobno dla przedziału $(0, a)$, w punkcie $x=0$ bowiem wyrażenie

$$-2 \arctg \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

pozbawione jest sensu. Granice tego wyrażenia przy $x \rightarrow -0$ i przy $x \rightarrow +0$ są różne, równe się one odpowiednio π i $-\pi$. Wybierając dla wspomnianych przedziałów różne wartości stałej C tak, by druga wartość była większa od pierwszej o 2π , możemy zestawić funkcję ciągłą w całym przedziale $(-a, a)$, jeśli przyjąć jako jej wartość dla $x=0$ wspólną granicę lewostronną i prawostronną.

⁽¹⁾ Por. na przykład [3] 277].

I tym razem otrzymaliśmy poprzedni wynik tylko w innej formie, ponieważ zachodzą tożsamości

$$-2\arctg \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} - \pi & \text{dla } 0 < x < a, \\ \arcsin \frac{x}{a} + \pi & \text{dla } -a < x < 0. \end{cases}$$

7) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(a) Zastosujemy najpierw pierwsze podstawienie $\sqrt{x^2-x+1} = t-x$; otrzymamy

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \quad dx = 2 \frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2} dt = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2} \right] dt = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t-1} + 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t-1| + C. \end{aligned}$$

Jeżeli podstawimy tu $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$, to otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} - \\ &\quad -\frac{3}{2} 2 \ln |2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1| + 2 \ln |x+\sqrt{x^2-x+1}| + C. \end{aligned}$$

(b) Zastosujemy teraz drugie podstawienie: $\sqrt{x^2-x+1} = tx-1$, mamy

$$x = \frac{2t-1}{t^2-1}, \quad dx = -2 \frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2} dt, \quad \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{t^2-1}, \quad x+\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t}{t-1},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2} dt = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2} \right] dt = \\ &= \frac{3}{t+1} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{3}{2} \ln |t+1| + C'. \end{aligned}$$

Pozostaje teraz podstawić $t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$ i po oczywistych uproszczeniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + 2 \ln |\sqrt{x^2-x+1}+1| - \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2-x+1}-x+1| - \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2-x+1}+x+1| + C'. \end{aligned}$$

Wyrażenie to chociaż różni się kształtem od otrzymanego wyżej, jednak pokrywa się z nim, gdy $C' = C + \frac{3}{2}$

$$8) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(a) Ponieważ pierwiastki wyrażenia podcałkowego są rzeczywiste, można więc zastosować trzecie podstawienie $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$, tu $-a < x < a$ i $t > 0$. Mamy

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4at dt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1},$$

$$x^2 + a^2 = \frac{2a^2(t^4 + 1)}{(t^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{1}{2a^2} \int \frac{2t^2+2}{t^4+1} dt = \frac{1}{2a^2} \int \left[\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1} \right] dt = \\ &= \frac{1}{a^2\sqrt{2}} [\operatorname{arc tg}(t\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc tg}(t\sqrt{2}-1)] + C, \end{aligned}$$

gdzie trzeba podstawić jeszcze: $t = \sqrt{(a+x)/(a-x)}$, aby otrzymać ostateczny wynik.

Korzystając ze wzoru na sumę arkus tangensów i oczywistej tożsamości

$$\operatorname{arc tg} \frac{1}{\alpha} = -\operatorname{arc tg} \alpha \pm \frac{1}{2}\pi \quad (\text{dla } \alpha > 0 \text{ lub } \alpha < 0),$$

można napisać wynik w prostszej postaci

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}} + C_1 \quad (\text{gdzie } C_1 = C + \frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}})$$

(b) Jeżeli zastosujemy do tej całki drugie podstawienie $\sqrt{a^2-x^2} = tx-a$, to otrzymamy

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{2}} [\operatorname{arc tg}(\sqrt{2}+1)t + \operatorname{arc tg}(\sqrt{2}-1)t] + C',$$

gdzie $t = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Wynik ten jest dobry dla każdego z przedziałów $(-a, 0)$ i $(0, a)$ z osobna. Łatwo zauważyc, że zmieniając wartość C' przy przejściu przez 0 można wynik ten uczynić przydatnym dla całego przedziału $(-a, a)$. Jeśli przekształcić wreszcie ten wynik według wzoru na sumę arkus tangensów, to pokryje się on z poprzednim wynikiem.

$$9) \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}.$$

Pierwsze podstawienie $\sqrt{x^2+\mu} = t-x$ daje

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}} = 2 \int \frac{2t dt}{t^4 + 2(2\lambda-\mu)t^2 + \mu^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 2(2\lambda-\mu)u + \mu^2}.$$

Tak więc zadanie sprowadza się do obliczenia całki elementarnej. Do otrzymanego wyniku należy podstawić

$$u = t^2 = (x + \sqrt{x^2+\mu})^2.$$

284. Inne sposoby obliczania. Chociaż podstawienia Eulera rozwiązuje zasadniczo we wszystkich wypadkach zagadnienie obliczania w postaci skończonej całek typu (4), niekiedy jednak przy ich stosowaniu nawet proste różniczki prowadzą do skomplikowanych rachunków. Wobec ważności całek rozpatrywanego typu podamy również inne sposoby ich obliczania.

Wprowadźmy skrócone oznaczenie

$$Y = ax^2 + bx + c \quad i \quad y = \sqrt{Y}.$$

Funkcja wymierna $R(x, y)$ może być zapisana w postaci ilorazu dwóch wielomianów zmiennych x i y . Zastępując y^2 wszędzie przez Y sprowadzimy $R(x, y)$ do postaci

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x) y}{P_3(x) + P_4(x) y},$$

gdzie $P_i(x)$ są wielomianami. Mnożąc licznik i mianownik tego ułamka przez wyrażenie $P_3(x) - P_4(x) y$ i zastępując znów y^2 przez Y otrzymujemy nową postać R

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x) y.$$

Całkę pierwszego składnika po prawej stronie umiemy już wyrazić w postaci skończonej, pozostało więc zająć się drugim składnikiem. Mnożąc i dzieląc go przez y otrzymujemy ostatecznie wyrażenie

$$R^*(x) \frac{1}{y} = R^*(x) \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Zajmiemy się całkowaniem tego wyrażenia.

Przede wszystkim wydzielimy z funkcji wymiernej $R^*(x)$ część całkowitą $P(x)$, a ułamek właściwy wyobrażimy sobie jako rozłożony na ułamki proste [274]. Wówczas całkowanie otrzymanego wyrażenia sprowadzi się do obliczenia całek następujących trzech typów:

$$\text{I. } \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad \text{II. } \int \frac{A dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gdzie wszystkie współczynniki są rzeczywiste, a pierwiastki trójmianu $x^2 + px + q$ są ujęte. Rozpatrzymy każdy z tych typów oddzielnie.

I. Przyjmijmy

$$V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{Y}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Łatwo jest wyprowadzić wzór redukcyjny dla tych całek. W tym celu, zakładając, że

$m \geq 1$, obliczmy pochodną

$$\begin{aligned} (x^{m-1} \sqrt{Y})' &= (m-1) x^{m-2} \sqrt{Y} + \frac{x^{m-1} Y'}{2\sqrt{Y}} = \\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}} = \\ &= ma \frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b \frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)c \frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}} \end{aligned}$$

i scałkujmy otrzymaną tożsamość; otrzymamy

$$x^{m-1} \sqrt{Y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right) bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}.$$

Biorąc tu $m = 1$ znajdziemy

$$V_1 = \frac{1}{a} \sqrt{Y} - \frac{b}{2a} V_0.$$

Biorąc następnie $m = 2$ i wykorzystując wyrażenie dla V_1 otrzymujemy

$$V_2 = \frac{1}{4a^2} (2ax - 3b) \sqrt{Y} + \frac{1}{8a^2} (3b^2 - 4ac) V_0.$$

Postępując tak dalej dojdziemy do ogólnego wzoru

$$V_m = p_{m-1}(x) \sqrt{Y} + \lambda_m V_0,$$

gdzie $p_{m-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $m-1$, a $\lambda_m = \text{const.}$ Tak więc wszystkie całki V_m sprowadzają się do V_0 .

Jeżeli w całce I wielomian $P(x)$ będzie stopnia n , to całka ta będzie kombinacją liniową całek V_0, V_1, \dots, V_n , a więc na mocy poprzedniego wzoru można ją napisać w postaci

$$(9) \quad \int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}} dx = Q(x) \sqrt{Y} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{Y}},$$

gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem stopnia $n-1$, a $\lambda = \text{const.}$

Samo wyznaczenie wielomianu $Q(x)$ i stałej λ dokonuje się zwykle metodą współczynników nieoznaczonych. Różniczkując (9) i mnożąc obie strony otrzymanej równości przez \sqrt{Y} otrzymujemy

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2} Q(x)(2ax + b) + \lambda.$$

Jeśli zamiast $Q(x)$ podstawimy tu wielomian stopnia $n-1$ o współczynnikach nieoznaczonych, to otrzymamy po obu stronach wielomiany stopnia n . Przyczynając współczynniki

otrzymamy układ $n+1$ równań liniowych, z których wyznaczymy n współczynników wielomianu $Q(x)$ i stałą λ ⁽¹⁾.

Uwaga. Wzór (9) wydziela część algebraiczną całki

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}} dx .$$

Podobnego wydzielenia części algebraicznej można by dokonać także dla całki w ogólnej postaci

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}} dx ,$$

gdzie R jest dowolną funkcją wymierną. Nie będziemy się jednak na tym zatrzymywali.

II. Całka

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{Y}}$$

sprowadza się przez podstawienie $x-\alpha = 1/t$ do rozpatzonego wyżej typu. Rzeczywiście, mamy

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2},$$

a więc (uważając na przykład, że $x > \alpha$ i $t > 0$) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} = - \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}$$

Jeżeli $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, tzn. jeżeli α jest pierwiastkiem trójmianu Y , to rzecz się upraszcza — otrzymujemy całkę typu rozpatzonego w ustępie 278.

III. (a) Przechodząc do ostatniej całki rozpatrzymy osobno przypadek, gdy trójmian $ax^2 + bx + c$ różni się od trójmianu $x^2 + px + q$ tylko czynnikiem a . Wówczas szukana całka ma postać

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}} dx .$$

Można ją łatwo przedstawić jako sumę dwóch całek

$$\frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}},$$

z których pierwszą można obliczyć od razu za pomocą podstawienia $t = ax^2 + bx + c$.

(1) Z udowodnionego wynika, że układ ten będzie rozwiązywalny dla dowolnych wartości wyrazów wolnych, wówczas zaś wyznacznik układu musi być różny od zera i układ jest zawsze określony. Tym samym udowodniona została też jednoznaczność przedstawienia (9). (Por. str. 32 i 35).

Dla obliczenia całki

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}} = \int \frac{dx}{Y^{(2m+1)/2}}$$

najdogodniej będzie użyć tak zwanego *podstawienia Abela*

$$t = (\sqrt{Y})' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax + \frac{1}{2}b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Podnosząc do kwadratu i mnożąc przez $4Y$ otrzymujemy równość

$$4t^2 Y = (Y')^2 = 4a^2 x^2 + 4abx + b^2,$$

która odejmiemy od pomnożonej przez $4a$ równości

$$Y = ax^2 + bx + c.$$

W wyniku otrzymujemy

$$4(a - t^2) Y = 4ac - b^2,$$

skąd

$$(10) \quad Y^m = \left(\frac{4ac - b^2}{4} \right)^m \cdot \frac{1}{(a - t^2)^m}.$$

Różniczkując teraz równość

$$t\sqrt{Y} = ax + \frac{1}{2}b$$

znajdujemy

$$\sqrt{Y} dt + t^2 dx = a dx,$$

a więc

$$(11) \quad \frac{dx}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{a - t^2}.$$

Z (11) i (10) otrzymujemy

$$\frac{dx}{Y^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^m (a - t^2)^{m-1} dt$$

i wreszcie

$$(12) \quad \int \frac{dx}{Y^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^m \int (a - t^2)^{m-1} dt.$$

Tak więc całe zadanie sprowadza się do obliczenia całki z wielomianu.

W szczególności dla $m = 1$ otrzymujemy na przykład

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2}{4ac-b^2} \cdot \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

(b) W przypadku ogólnym, aby otrzymać wyrażenie bardziej symetryczne, przyjmijmy

$$ax^2+bx+c = a(x^2+p'x+q'),$$

przy czym będziemy mogli teraz założyć, że trójmian w nawiasach nie jest identyczny z trójmianem x^2+px+q . Postawimy sobie za zadanie tak przekształcić zmienną x , aby w obu trójmianach jednocześnie znikły składniki stopnia pierwszego.

Niech najpierw $p \neq p'$. Wtedy możemy osiągnąć cel za pomocą podstawienia ułamkowo-liniowego

$$(13) \quad x = \frac{\mu t + v}{t+1}$$

wybierając odpowiednio współczynniki μ i v . Będzie

$$x^2+px+q = \frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2 + [2\mu v + p(\mu+v)+2q]t + (v^2+pv+q)}{(t+1)^2}$$

analogicznie dla drugiego trójmianu. Szukane współczynniki wyznaczamy z warunków

$$2\mu v + p(\mu+v) + 2q = 0, \quad 2\mu v + p'(\mu+v) + 2q' = 0$$

lub

$$\mu+v = -2 \frac{q-q'}{p-p'}, \quad \mu v = \frac{p'q-pq'}{p-p'}.$$

Tak więc μ i v są pierwiastkami równania kwadratowego

$$(p-p')z^2 + 2(q-q')z + (p'q-pq') = 0.$$

Na to by pierwiastki te były rzeczywiste i różne ⁽¹⁾ potrzeba i wystarcza, by spełniony był warunek

$$(q-q')^2 - (p-p')(p'q-pq') > 0.$$

Przekonamy się, że warunek ten jest spełniony.

Przepiszmy warunek (14) w postaci równoważnej

$$(14*) \quad [2(q+q')-pp']^2 > (4q-p^2)(4q'-p'^2).$$

Wiadomo, że $4q-p^2 > 0$, gdyż trójmian x^2+px+q ma pierwiastki ujęte; dlatego nierówność (14*) jest na pewno spełniona, jeśli jednocześnie jest $4q'-p'^2 < 0$. Pozostaje więc

⁽¹⁾ Dla $\mu = v$ podstawnie traci sens, sprowadza się bowiem do $x = \mu$.

zbadać przypadek, gdy również $4q' - p'^2 > 0$. Wówczas $q > 0$, $q' > 0$ i $4\sqrt{qq'} > pp'$ i mamy po kolei (1)

$$\begin{aligned}[2(q+q')-pp']^2 &\geq [4\sqrt{qq'}-pp']^2 = \\ &= (4q-p^2)(4q'-p'^2)+4(p\sqrt{q'}-p'\sqrt{q})^2 \geq (4q-p^2)(4q'-p'^2).\end{aligned}$$

Tutaj dwa razy występuje znak nierówności słabej, ale równość nie może mieć miejsca w obu wypadkach jednocześnie: jeśli $q \neq q'$, to równość na pewno nie zachodzi w pierwszym przypadku, jeśli zaś $q = q'$, to na pewno nie zachodzi w drugim. Tak więc nierówność (14*), a wraz z nią (14), została udowodniona.

Wykonując podstawienie, przekształcimy całkę do postaci

$$\int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}},$$

gdzie $P(t)$ jest wielomianem stopnia $2m-1$, a $\lambda > 0$. Stosując znowu (dla $m > 1$) rozkład ułamka właściwego

$$\frac{P(t)}{(t^2 + \lambda)^m}$$

na ułamki proste dojdziemy do sumy całek postaci

$$\int \frac{At+B}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} dt \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

W szczególnym przypadku, gdy $p = p'$, redukcję wyrażeń stopnia pierwszego osiągamy jeszcze prościej — przez podstawienie $x = t - p/2$, i bezpośrednio dochodzimy do całki o wskazanej przed chwilą postaci.

Otrzymana całka rozkłada się w sposób naturalny na dwie:

$$\frac{A}{\alpha} \int \frac{\alpha t dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

Pierwszą z nich można łatwo obliczyć stosując podstawienie $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$. Do drugiej można zastosować znane nam już podstawienie Abela

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

Na mocy (11) mamy

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \frac{du}{\alpha - u^2};$$

(1) Ponieważ $\frac{q+q'}{2} > \sqrt{qq'}$.

oprócz tego, jak łatwo obliczyć, jest

$$t^2 + \lambda = \frac{(\beta - \alpha\lambda) u^2 + \lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha - u^2)}.$$

Dlatego

$$\int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \alpha^m \int \frac{(\alpha - u^2)^{m-1}}{[(\beta - \alpha\lambda) u^2 + \lambda\alpha^2]^m} du$$

i szukana całka sprowadza się do całki z funkcji wymiernej.

Uwaga. Oprócz tego, że w ustępie tym podaliśmy wiele nowych sposobów obliczania całek typu (4), przeprowadzone rozumowania stanowią nowy dowód twierdzenia sformułowanego na końcu ustępu 281, niezależny od poprzedniego.

285. Przykłady

$$1) \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

Przyjmujemy

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + d \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}},$$

skąd

$$x^3 - x + 1 = (2ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (ax^2 + bx + c)(x + 1) + d.$$

Z układu równań

$$3a = 1, \quad 5a + 2b = 0, \quad 4a + 3b + c = -1, \quad 2b + c + d = 1$$

otrzymujemy następujące wartości współczynników: $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = \frac{5}{2}$. Jeśli więc uwzględnimy przykład 5) z 283, otrzymamy ostatecznie

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}}.$$

Podstawienie $x-1 = 1/t$ (jeśli, powiedzmy, $x > 1$ i $t > 0$) sprowadza całkę do postaci

$$-\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Ciąkę tę łatwo obliczyć środkami elementarnymi [patrz. 283, 4)].

Odpowiedź:

$$\frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2} + C = \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin \frac{\sqrt{2}}{x-1} + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{(2x^2 - x + 2)^{7/2}}.$$

Podstawienie Abela

$$t = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2 - x + 2}}$$

przekształca całkę następująco:

$$\frac{64}{3375} \int (2-t^2)^2 dt ;$$

teraz można albo powtórzyć w wypadku szczególnym ogólne rachunki z 284, III (a), albo skorzystać z górowego wzoru (12).

Odpowiedź: $\frac{64}{3375} \left\{ 2 \frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{1/2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}} + \frac{1}{160} \cdot \frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}} \right\} + C.$

4) $\int \frac{(x+3) dx}{(x^2-x+1) \sqrt{x^2+x+1}} .$

Podstawienie

$$x = \frac{\mu t + v}{t+1}$$

daje

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\mu^2 \pm \mu + 1)t^2 + [2\mu v \pm (\mu + v) + 2]t + (v^2 + v + 1)}{(t+1)^2} .$$

Warunki $2\mu v + (\mu + v) + 2 = 0$ lub $\mu + v = 0$, $\mu v = -1$ będą spełnione na przykład dla $\mu = 1$, $v = -1$. Mamy

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}, \quad x+3 = \frac{4t+2}{t+1}, \quad x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{3t^2 + 1}}{t+1},$$

jeśli przyjąć dla ustalenia uwagi, że $t+1 > 0$, tzn. $x < 1$. Tak więc

$$\int \frac{(x+3) dx}{(x^2-x+1) \sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{(8t+4) dt}{(t^2+3) \sqrt{3t^2+1}} .$$

Otrzymana całka równa się sumie całek

$$8 \int \frac{t dt}{(t^2+3) \sqrt{3t^2+1}} + 4 \int \frac{dt}{(t^2+3) \sqrt{3t^2+1}} .$$

Pierwszą całkę można, jak widać, łatwo obliczyć za pomocą podstawienia $u = \sqrt{3t^2+1}$ i równa się ona $\sqrt{8} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + C'$. Do drugiej zastosujemy podstawienie Abela

$$u = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},$$

które sprowadza ją do postaci

$$12 \int \frac{du}{27-8u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u} \right| + C'' .$$

Pozostaje tylko powrócić do zmiennej x .

$$5) \int \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1} - x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} dx.$$

Wskazówka: Przedstawić funkcję podcałkową w postaci

$$\begin{aligned} \frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1} - \frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \\ = (2x^3-x^2+3x-3) + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}; \end{aligned}$$

do trzeciego składnika zastosować metodę z ustępu 284, I, do ostatniego zaś — podstawienie $x+1 = 1/t$

§ 4. Całkowanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne i funkcję wykładniczą

286. Całkowanie różniczek $R(\sin x, \cos x) dx$. Różniczki tego typu można zawsze sprowadzić do postaci wymiernej podstawieniem $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x (-\pi < x < \pi)$. Rzeczywiście,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arc tg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2},$$

a więc

$$R(\sin x, \cos x) dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Tak więc całki typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

mogą być zawsze obliczone w postaci skończonej. Wyrażają się one przez funkcje, które spotykamy przy całkowaniu różniczek wymiernych oraz przez funkcje trygonometryczne.

Wspomniane podstawienie uniwersalne dla całek typu (1) prowadzi niekiedy do skomplikowanych rachunków. Podamy dalej przypadki, gdy cel ten można osiągnąć za pomocą prostszych podstawień. Najpierw zrobimy następującą elementarną uwagę z dziedziny algebry.

Jeśli funkcja wymierna całkowita lub ułamkowa $R(u, v)$ nie zmienia swej wartości przy zmianie znaku jednego z argumentów, na przykład u , tzn. jeśli

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

to można ją sprowadzić do postaci

$$R(u, v) = R_1(u^2, v)$$

zawierającej tylko parzyste potęgi u .

Jeśli natomiast przy zmianie znaku u funkcja $R(u, v)$ też zmienia znak, tzn. jeśli

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

to można ją sprowadzić do postaci

$$R(u, v) = R_2(u^2, v) u.$$

To ostatnie wynika od razu z poprzedniej uwagi, jeśli zastosować ją do funkcji $R(u, v)/u$.

I. Niech teraz $R(u, v)$ zmienia znak przy zmianie znaku u , wówczas

$$R(\sin x, \cos x) dx = R_0(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = -R_0(1 - \cos^2 x, \cos x) d \cos x$$

i postać wymierną można osiągnąć podstawieniem $t = \cos x$.

II. Analogicznie, jeśli $R(u, v)$ zmienia znak przy zmianie znaku v , to

$$R(\sin x, \cos x) dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = R_0^*(\sin x, 1 - \sin^2 x) d \sin x,$$

i do postaci wymiernej można dojść przez podstawienie $t = \sin x$.

III. Założymy wreszcie, że funkcja $R(u, v)$ nie zmienia swej wartości przy jednoczesnej zmianie znaków u i v

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

W tym przypadku pisząc zamiast u wyrażenie $\frac{u}{v} v$ otrzymujemy

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v} v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Z własności funkcji R wynika, że jeśli zmienić znaki u i v , to

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

bo iloraz u/v nie zmienia się przy tym, a wówczas jak już wiemy, jest

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Dlatego

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right),$$

tj. po prostu

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\operatorname{tg} x).$$

Cel może tu być osiągnięty za pomocą podstawienia $t = \operatorname{tg} x$ ($-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$), bo

$$R(\sin x, \cos x) dx = \tilde{R}(t) \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{itd.}$$

Uwaga. Należy dodać, że każde wyrażenie wymierne $R(u, v)$ można zawsze przedstawić w postaci sumy trzech wyrażeń wymienionego wyżej typu. Można na przykład przyjąć

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

Pierwsze z tych wyrażeń zmienia znak przy zmianie znaku u , drugie zmienia znak przy zmianie znaku v , a trzecie nie zmienia wartości przy jednoczesnej zmianie znaku u i v . Rozbijając wyrażenie $R(\sin x, \cos x)$ na odpowiednie składniki można do pierwszego z nich zastosować podstawienie $t = \cos x$, do drugiego podstawienie $t = \sin x$ i do trzeciego wreszcie podstawienie $t = \operatorname{tg} x$. Tak więc dla obliczania całek typu (1) wystarczą te trzy podstawienia.

287. Całkowanie wyrażeń $\sin^v x \cos^\mu x$. Będziemy uważali, że v i μ są liczbami wymiernymi i że zmienna x zmienia się w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Wówczas podstawienie $z = \sin^2 x$, $dz = 2 \sin x \cos x dx$ daje

$$\begin{aligned} \sin^v x \cos^\mu x dx &= \frac{1}{2} \sin^{v-1} x (1 - \sin^2 x)^{(\mu-1)/2} 2 \sin x \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} (1 - z)^{(\mu-1)/2} z^{(v-1)/2} dz, \end{aligned}$$

a więc wszystko sprowadza się do całkowania różniczki dwumiennej [279]

$$\int \sin^v x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2} \int (1 - z)^{(\mu-1)/2} z^{(v-1)/2} dz = \frac{1}{2} J_{(\mu-1)/2, (v-1)/2}.$$

Przypominając sobie przypadki całkowalności różniczek dwumiejszych widzimy teraz, że nasza całka może być obliczona w postaci skończonej jeśli: 1) $(\mu-1)/2$ (lub $(v-1)/2$) jest liczbą całkowitą, tzn. jeśli μ (lub v) jest liczbą całkowitą nieparzystą, lub 2) jeśli $(\mu+v)/2$ jest liczbą całkowitą, tzn. jeśli $\mu+v$ jest liczbą całkowitą parzystą.

Należy tu w szczególności przypadek, gdy oba wykładniki μ i v są całkowite, zresztą wówczas wyrażenie $\sin^v x \cos^\mu x$ jest wymierne względem $\sin x$ i $\cos x$, tzn. należy do klasy wyrażeń rozpatrzonych już w ustępie poprzednim.

W tym przypadku, jeżeli wykładnik v (lub μ) jest nieparzysty, wyrażenie możemy od razu sprowadzić do postaci wymiernej przez podstawienie $t = \cos x$ (lub $t = \sin x$). Jeśli natomiast oba wykładniki v i μ są parzyste (jak również gdy oba są nieparzyste), można w tym celu zastosować podstawienie $t = \operatorname{tg} x$ lub $t = \operatorname{ctg} x$.

Zauważmy, że jeśli wykładniki v i μ są liczbami dodatnimi parzystymi, to dogodniejszy jest inny chwyt polegający na zastosowaniu wzorów

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Jeśli mianowicie $v = 2n, \mu = 2m$, to dla $v \geq \mu$ będzie

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^{2m} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{n-m},$$

a dla $v < \mu$

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^{2n} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{m-n}.$$

Po otworzeniu nawiasów otrzymamy sumę składników typu

$$C \sin^{v'} 2x \cos^{\mu'} 2x,$$

gdzie $v' + \mu' \leq n+m = \frac{v+\mu}{2}$. Te składniki, w których choćby jeden z wykładników v' , μ' jest liczbą nieparzystą można całkować łatwo podanym wyżej sposobem. Z pozostałymi składnikami postępujemy podobnie przechodząc do $\sin 4x$ i $\cos 4x$ itd. Ponieważ przy każdym takim kroku suma wykładników zmniejsza się co najmniej dwa razy, proces kończy się szybko.

Powróćmy do udowodnionej wyżej zależności (2). Możemy teraz korzystać z wzorów redukcyjnych dla całek dwumiennych [280], ażeby, przyjawszy

$$a = 1, \quad b = -1, \quad p = \frac{\mu-1}{2}, \quad q = \frac{v-1}{2},$$

wyprowadzić wzory redukcyjne dla całek rozpatrywanego typu.

W ten sposób otrzymujemy następujące wzory (które oczywiście można także wyprowadzić niezależnie):

$$(I) \int \sin^v x \cos^\mu x dx = -\frac{\sin^{v+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \frac{v+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^v x \cos^{\mu+2} x dx \quad (\mu \neq -1),$$

$$(II) \int \sin^v x \cos^\mu x dx = \frac{\sin^{v+1} x \sin^{\mu+1} x}{v+1} + \frac{v+\mu+2}{v+1} \int \sin^{v+2} x \cos^\mu x dx \quad (v \neq -1),$$

$$(III) \int \sin^v x \cos^\mu x dx = \frac{\sin^{v+1} x \cos^{\mu-1} x}{v+\mu} + \frac{\mu-1}{v+\mu} \int \sin^v x \cos^{\mu-2} x dx \quad (v+\mu \neq 0),$$

$$(IV) \int \sin^v x \cos^\mu x dx = -\frac{\sin^{v-1} x \cos^{\mu+1} x}{v+\mu} + \frac{v-1}{v+\mu} \int \sin^{v-2} x \cos^\mu x dx \quad (v+\mu \neq 0).$$

Wzory te pozwalają, ogólnie, zwiększać lub zmniejszać wykładnik v lub μ o 2 (poza wspanianymi wyjątkami). Jeśli oba wykładniki v i μ są liczbami całkowitymi, to przez kolejne zastosowanie wzorów redukcyjnych można sprowadzić całkę do jednej z dziewięciu całek elementarnych odpowiadających różnym kombinacjom wartości v i μ równych $-1, 0$ lub 1 :

$$1) \int dx = x,$$

$$6) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x|,$$

$$2) \int \cos x dx = \sin x,$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right|,$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \pi \right) \right|,$$

$$8) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x|,$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$5) \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2},$$

288. Przykłady

1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. Wyrażenie podcałkowe zmienia znak przy zamianie $\cos x$ na $-\cos x$. Podstawienie $t = \sin x$ daje

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int t^2 (1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$. Wyrażenie podcałkowe zmienia znak przy zamianie $\sin x$ na $-\sin x$. Podstawienie $t = \cos x$ daje

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = - \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + C.$$

3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. Wyrażenie podcałkowe nie zmienia swojej wartości przy zamianie $\sin x$ na $-\sin x$ i $\cos x$ na $-\cos x$. Podstawienie $t = \operatorname{tg} x$ daje

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

4) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. Tu można użyć tego samego podstawienia, ale łatwiej jest skorzystać ze wzorów na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (\cos 2x + 1) = \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4x),$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$$

5) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$. Można użyć podstawienia $t = \sin x$, ale łatwiej jest zastosować

wzór redukcyjny (II).

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. Można tu zastosować podstawienie $t = \sin x$, ale łatwiej jest zastosować dwukrotnie wzór redukcyjny (I):

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^2 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

z kolei

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

a więc

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$. Można zastosować podstawienie $t = \cos x$, ale prościej jest skorzystać z wzorów redukcyjnych (II) i (III):

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos^5 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx,$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \frac{1}{3} \cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

skąd po upraszczających przekształceniach

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

8) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}$. Podstawienie $t = \cos x$ daje

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x (2 \cos^2 x - 1)} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{1-\sqrt{2} \cos x} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

9) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Ponieważ przy zmianie znaków $\sin x$ i $\cos x$ wyrażenie podcałkowe nie zmienia się, można tu zastosować podstawienie $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{t^2 dt}{(1+t)(1+t^2)^2} = \\ &= \int \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right] dt = \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+t}{1+t^2} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

10) $\int \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \sin x \cos x + C \sin^2 x}$ przy $AC - B^2 > 0$. Przyjmując, że $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, dojdziemy za pomocą podstawienia $t = \operatorname{tg} x$ do całki postaci

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C'$.

$$11) \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(a + bt)(1 + t^2)} \quad \text{dla } t = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi\right).$$

Rozkładając na ułamki proste

$$\frac{1}{(a + bt)(1 + t^2)} = \frac{A}{a + bt} + \frac{Bt + C}{1 + t^2}$$

otrzymujemy dla wyznaczenia współczynników A, B, C równania

$$A + bB = 0, \quad aB + bC = 0, \quad A + aC = 1,$$

skąd $A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad B = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

Odpowiedź: $\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln \frac{a + bt}{\sqrt{1 + t^2}} + C' = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|] + C'$.

12) Do tej samej całki można sprowadzić następujące dwie całki:

$$T_1 = \int \frac{\sin x \, dx}{a \cos x + b \sin x}, \quad T_2 = \int \frac{\cos x \, dx}{a \cos x + b \sin x}.$$

Zresztą łatwiej je obliczyć wychodząc związań z równości $bT_1 + aT_2 = \int dx = x + C_1$,

$$-a_1 T_1 + bT_2 = \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} \, dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} = \ln |a \cos x + b \sin x| + C_2,$$

skąd otrzymujemy

$$T_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} [bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|] + C,$$

$$T_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|] + C'.$$

$$13) \frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \, dx \quad (0 < r < 1, \quad -\pi < x < \pi).$$

Zastosujemy tu uniwersalne podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ i otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \, dx &= (1 - r^2) \int \frac{dt}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1+r}{1-r} t \right) + C = \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Do tej całki sprowadza się również następująca:

$$\int \frac{1-r \cos x}{1-2r \cos x+r^2} dx = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x+r^2} \right] dx = \frac{1}{2} x + \arctg \left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \tg \frac{x}{2} \right) + C.$$

14) $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ przy założeniu, że $|a| > |b|$ albo $|a| < |b|$ ($-\pi < x < \pi$).

Niech najpierw będzie $|a| > |b|$ i ponadto $a > 0$, co nie zmniejsza ogólności. Podstawienie $t = \tg \frac{x}{2}$, tak samo jak w rozpatrzonym przed chwilą przypadku szczególnym, daje

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tg \frac{x}{2} \right) + C.$$

Można przekształcić to wyrażenie do postaci

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} + C',$$

przy czym znak plus bierzemy, gdy $0 < x < \pi$, a minus, gdy $-\pi < x < 0$. Wartość stałej C' wzrasta przy przejściu x przez 0 o $\pi/\sqrt{a^2-b^2}$.

Niech teraz $|a| < |b|$ i $b > 0$. To samo podstawienie daje

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \int \frac{2 dt}{(b+a)-(b-a)t^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}t}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}t} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \tg \frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \tg \frac{1}{2}x} \right| + C. \end{aligned}$$

Wyrażenie to przekształca się łatwo do postaci

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^2-a^2} \sin x}{a+b \cos x} \right| + C.$$

Całka $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ sprowadza się do poprzedniej przez podstawienie $x = \frac{1}{2}\pi \pm t$.

15) Do całki 14) sprowadza się wreszcie całka $\int \frac{dx}{a+b \cos x + c \sin x}$. Jeśli wprowadzić kąt α spełniający warunki

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

to całkę można przepisać w postaci

$$\int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2+c^2} \cos(x-\alpha)};$$

stosujemy podstawienie $t = x - \alpha$. Tutaj też oczywiście ciekawe są przypadki, gdy $|a| > \sqrt{b^2+c^2}$ i $|a| < \sqrt{b^2+c^2}$.

289. Przegląd innych przypadków. W ustępie 271,4 widzieliśmy już, jak całkuje się wyrażenia typu

$$P(x) e^{ax} dx, \quad P(x) \sin bx dx, \quad P(x) \cos bx dx,$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem. Warto zaznaczyć, że wyrażenia ułamkowych

$$\frac{e^x}{x^n} dx, \quad \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \frac{\cos x}{x^n} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

nie można już całkować w postaci skończonej.

Całkowaniem przez części łatwo jest wyprowadzić dla całek z tych wyrażeń wzory redukcyjne i sprowadzić je odpowiednio do trzech całek podstawowych

$$\text{I. } \int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \text{li } y \text{ (1)} \quad (\text{logarytm całkowy});$$

$$\text{II. } \int \frac{\sin x}{x} dx = \text{si } x \quad (\text{sinus całkowy});$$

$$\text{III. } \int \frac{\cos x}{x} dx = \text{ci } x \quad (\text{kosinus całkowy}) \text{ (2).}$$

Znamy już [271, 6)] całki

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Biorąc je za punkt wyjścia można obliczyć w postaci skończonej całki

$$\int x^n e^{ax} \sin bx dx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bx dx.$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ Całkując mianowicie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} \sin bx dx &= x^n \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \\ &\quad - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} \cos bx dx &= x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \\ &\quad - \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

(1) Podstawienie $x = \ln y$.

(2) Zresztą we wszystkich trzech wypadkach należy jeszcze ustalić stałą dowolną. Zrobimy to później.

Te wzory redukcyjne pozwalają sprowadzić interesujące nas całki do przypadku $n = 0$.

Jeśli przez $P(\dots)$ nadal oznaczamy wielomian, to jako ostateczny wynik otrzymujemy twierdzenie, że w postaci skończonej można obliczyć całki postaci

$$\int P(x, e^{ax}, e^{a''x}, \dots, \sin b'x, \sin b''x, \dots, \cos b'x, \cos b''x, \dots) dx,$$

gdzie $a', a'', b' b'', \dots$ są stałymi.

Sprowadza się to do całkowania wyrażenia

$$x^n e^{ax} \sin^{k'} b'x \sin^{k''} b''x \dots \cos^{m'} b'x \dots$$

Jeśli skorzystamy z elementarnych wzorów trygonometrycznych

$$\sin^2 bx = \frac{1 - \cos 2bx}{2},$$

$$\sin b'x \sin b''x = \frac{1}{2} [\cos(b' - b'')x - \cos(b' + b'')x]$$

i podobnych, to łatwo możemy rozbić rozpatrywane wyrażenia na składniki postaci $Ax^n e^{ax} \sin bx$ i $Bx^n e^{ax} \cos bx$, z którymi umiemy sobie już poradzić.

§ 5. Całki eliptyczne

290. Uwagi ogólne i definicje. Rozpatrzmy całkę postaci

$$(1) \quad R(x, y) dx,$$

gdzie y jest funkcją algebraiczną zmiennej x , tzn. [205] spełnia równanie

$$(2) \quad P(x, y) = 0,$$

gdzie P jest wielomianem względem zmiennych x i y . Całki tego rodzaju otrzymały nazwę *całek Abela*. Należą do nich całki

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

zbadane w § 3.

Rzeczywiście, funkcje

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

spełniają odpowiednio równania algebraiczne

$$(\gamma x + \delta)^m - (\alpha x + \beta) = 0 \quad \text{i} \quad y^m - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

Z geometrycznego punktu widzenia wiążemy całkę Abela (1) z tą krzywą algebraiczną, która określona jest równaniem (2). Na przykład całka

$$(3) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

związana jest z krzywą drugiego stopnia $y^2 = ax^2 + bx + c$.

Jeśli krzywa (2) może być przedstawiona parametrycznie równaniami

$$x = r_1(t), \quad y = r_2(t)$$

tak, że funkcje $r_1(t)$ i $r_2(t)$ są wymierne (w tym wypadku krzywa nazywa się jednobieżna⁽¹⁾), to w całce (1) można sprowadzić wyrażenie podcałkowe do postaci wymiernej, podstawienie $x = r_1(t)$ sprowadza je mianowicie do postaci

$$R(r_1(t), r_2(t)) r'_1(t) dt.$$

Do klasy tej należą oba wspomniane wyżej przypadki. W szczególności możliwość sprowadzenia do postaci wymiernej wyrażenia podcałkowego w całce typu (3) związana jest z tym właśnie faktem, że krzywa drugiego stopnia jest jednobieżna [281, 282].

Oczywiście zmienne x i t związane są równaniem algebraicznym, a więc t jest funkcją algebraiczną zmiennej x . Jeśli rozszerzyć klasę funkcji elementarnych włączając do niej także wszystkie funkcje algebraiczne, możemy powiedzieć, że w przypadku jednobieżności krzywej (2) całka (1) da się zawsze wyrazić w postaci skończonej przez funkcje elementarne.

Taka sytuacja jest jednak w pewnym sensie wyjątkowa. Na ogół krzywa (1) nie jest jednobieżna, a wówczas, jak można udowodnić, całka (1) na pewno nie zawsze, tzn. nie dla każdej funkcji R , może być wyrażona w postaci skończonej, chociaż możliwość ta nie jest wykluczona dla pewnych konkretnych R .

Napotykamy to już przy rozpatrywaniu ważnej klasy całek

$$(4) \quad \int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx$$

zawierających pierwiastek kwadratowy z wielomianów stopnia 3-go i 4-go i zbliżonych do całek (3). Całki typu (4) nie wyrażają się już z reguły w postaci skończonej przez funkcje elementarne nawet przy rozszerzonym rozumieniu tego terminu. Dlatego też zapoznanie się z nimi odłożyliśmy do ostatniego paragrafu, aby nie przerywać zasadniczej linii wykładu w tym rozdziale, poświęconym przede wszystkim zbadaniu tych klas całek, które mogą być obliczone w postaci skończonej.

O wielomianach pod pierwiastkiem we wzorach (4) zakłada się, że mają współczynniki rzeczywiste. Oprócz tego będziemy zakładali zawsze, że nie mają one pierwiastków wielokrotnych, gdyż w przeciwnym razie można by było wynieść spod pierwiastka czynnik liniowy, zadanie sprowadziłoby się wówczas do całkowania wyrażeń zbadanych już wcześniej i całka wyraziłaby się w postaci skończonej. To ostatnie może się niekiedy zdarzyć także, gdy nie ma pierwiastków wielokrotnych. Łatwo jest na przykład sprawdzić, że

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C, \quad \int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}} dx = x \sqrt{2x^3+1} + C.$$

⁽¹⁾ Można dać także czysto geometryczną definicję krzywej jednobieżnej, nie będącym się jednak na tym zatrzymywali.

Całki z wyrażeń postaci (4) nazywają się *calkami eliptycznymi* (w związku z tym, że po raz pierwszy zetknęto się z nimi przy obliczaniu długości elipsy [331,8]). Zresztą nazwa ta w ścisłym sensie dotyczy zwykle tylko tych spośród omawianych całek, których nie można obliczyć w postaci skończonej, natomiast inne, w rodzaju podanych przed chwilą, nazywają się *pseudoeliptyczne*.

Badanie i układanie tablic wartości całek wyrażeń (4) przy dowolnych współczynnikach a, b, c, \dots jest, rzecz jasna, kłopotliwe. Dlatego naturalne jest dążenie do sprowadzenia wszystkich tych całek do kilku takich, w których występowałoby możliwie jak najmniej dowolnych współczynników (parametrów).

Można to osiągnąć za pomocą elementarnych przekształceń, które rozpatrzymy w następnych ustępach.

291. Przekształcenia pomocnicze. 1° Zauważmy przede wszystkim, że wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy pod pierwiastkiem jest wielomian stopnia 4, gdyż do niego łatwo jest sprowadzić przypadek, gdy pod pierwiastkiem jest wielomian trzeciego stopnia. Istotnie, wielomian trzeciego stopnia $ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach rzeczywistych musi mieć pierwiastek rzeczywisty [81], powiedzmy λ , można go więc rozłożyć na wielomiany o współczynnikach rzeczywistych

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \lambda)(x^2 + px + q).$$

Sprowadzenie do żądanej postaci osiągamy przez podstawienie $x - \lambda = t^2$ (lub $x - \lambda = -t^2$)

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + \dots}) dx = \int R(t^2 + \lambda, t\sqrt{at^4 + \dots}) 2t dt.$$

Będziemy dalej rozpatrywali tylko różniczki zawierające pierwiastek wielomianu czwartego stopnia.

2° Na mocy znanego twierdzenia algebra, wielomian czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych może być przedstawiony w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych:

$$(5) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Postaramy się teraz — za pomocą odpowiednio dobranego podstawienia — zlikwidować wyrażenia stopnia pierwszego jednocześnie w obu trójmianach. Spotkaliśmy się już z podobnym zadaniem w ustępie 284, III (b).

Jeśli $p = p'$, to cel nasz może być osiągnięty przez proste podstawienie $x = t - \frac{1}{2}p$. Niech więc teraz $p \neq p'$; w tym przypadku skorzystamy, jak wyżej, z podstawienia

$$x = \frac{\mu t + v}{t + 1}.$$

Możliwość znalezienia rzeczywistych i przy tym różnych wartości dla współczynników μ i v jest uwarunkowana, jak widzieliśmy, spełnieniem nierówności

$$(6) \quad (q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0.$$

Nierówność tę udowodniliśmy przy założeniu, że jeden z rozpatrywanych trójmianów ma pierwiastki urojone, co odgrywało w naszych rozważaniach istotną rolę. Niech teraz oba trójmiany (5) mają pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy, pierwszy — pierwiastki α i β , a drugi — γ i δ . Podstawiając

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta, \quad p' = -(\gamma + \delta), \quad q' = \gamma\delta,$$

można napisać (6) w postaci

$$(6') \quad (\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0.$$

Na to, by nierówność ta zachodziła, wystarczy postarać się o to, by pierwiastki tych trójmianów nie przepłatały się (żeby było na przykład $\alpha > \beta > \gamma > \delta$), co leży w naszej mocy (1).

Tak więc wybierając odpowiednio μ i ν otrzymujemy za pomocą wspomnianego podstawienia

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + \dots}) dx = \int R\left(\frac{\mu t + \nu}{t+1}, \frac{\sqrt{(M+Nt^2)(M'+N't^2)}}{(t+1)^2}\right) \frac{\mu - \nu}{(t+1)^2} dt,$$

co można także (jeśli wyłączyć wypadki zwydrodnienia, gdy któryś ze współczynników M, N, M', N' jest zerem) napisać w postaci

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}) dt.$$

gdzie A, m i m' są różne od zera.

3° Za pomocą rozważań zupełnie analogicznych do tych, które były zastosowane na początku ustępu 284 można sprowadzić tę całkę do następującej:

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} dt$$

z dokładnością do całki z funkcji wymiernej.

Rozłożymy teraz funkcję wymierną $R^*(t)$ na dwa składniki

$$R^*(t) = \frac{R^*(t) + R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t) - R^*(-t)}{2}.$$

Pierwszy z nich nie zmienia swojej wartości przy zamianie t na $-t$, sprowadza się więc do funkcji wymiernej $R_1(t^2)$ zmiennej t^2 , drugi zaś przy wspomnianej zamianie zmienia znak,

(1) Zauważmy przy sposobności, że przedstawienie nierówności (6) w postaci (6') może być wykorzystane do dowodu tej nierówności również w tych przypadkach, gdy pierwiastki α, β, \dots nie są rzeczywiste. Jeśli tylko pierwszy trójmian ma nierzeczywiste, a więc zespolone sprzężone pierwiastki α i β , a liczby γ i δ są rzeczywiste, to czynniki $\alpha - \gamma$ i $\beta - \gamma$ są sprzężone, a więc iloczyn ich jest, jak wiadomo, liczbą rzeczywistą dodatnią; to samo dotyczy też czynników $\alpha - \delta$ i $\beta - \delta$. Jeśli zaś zarówno pierwiastki α, β , jak i pierwiastki γ, δ są liczbami zespolonymi parami sprzężonymi, to są także sprzężone czynniki $\alpha - \gamma$ i $\beta - \delta$, jak również $\alpha - \delta$ i $\beta - \gamma$ i iloczyny ich dadzą znów liczby rzeczywiste dodatnie.

ma więc postać $R_2(t^2) t$ (1). Rozpatrywaną całkę możemy przedstawić jako sumę całek

$$\int \frac{R_1(t^2) dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2) t dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}.$$

Jednakże druga z nich sprowadza się od razu przez podstawienie $u = t^2$ do całki elementarnej

$$\frac{1}{2} \int \frac{R_2(u) du}{\sqrt{A(1+mu)(1+m'u)}},$$

która można obliczyć w postaci skończonej. Pozostaje więc do dalszego badania tylko całka

$$(7) \quad \int \frac{R_1(t^2) dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}.$$

292. Sprowadzenie do postaci kanonicznej. Wykażemy wreszcie, że każdą całkę typu (7) można przedstawić w postaci

$$(8) \quad \int \frac{R(z^2) dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

gdzie k jest pewną liczbą dodatnią mniejszą od jedności, $0 < k < 1$. Tę postać całki nazywamy *postacią kanoniczną*.

Przyjmijmy krótko

$$y = \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy tutaj uważać, że $A = \pm 1$. Ponadto ograniczymy się, dla ustalenia uwagi, do dodatnich wartości t . Rozpatrzymy teraz różne możliwe kombinacje znaków A , m , m' i w każdym przypadku wskażemy podstawienie sprowadzające bezpośrednio całkę (7) do postaci kanonicznej.

1) $A = +1$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$ ($h > h' > 0$). Na to, by pierwiastek miał wartości rzeczywiste, potrzeba, aby $t < \frac{1}{h}$ lub $t > \frac{1}{h'}$. Podstawiamy

$$ht = z, \quad \text{gdzie} \quad 0 < z < 1, \quad \text{lub} \quad z > \frac{h}{h'}.$$

Wówczas

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h \sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

za k należy tu więc przyjąć h'/h .

(1) Porównaj uwagę w podobnej sprawie w ustępie 286.

2) $A = +1, m = -h^2, m' = h'^2$ ($h, h' > 0$). Ażeby pierwiastek miał wartości rzeczywiste, ograniczymy się do wartości $t < 1/h$. Podstawiamy

$$ht = \sqrt{1-z^2}, \quad \text{gdzie } 0 < z \leq 1.$$

Wówczas

$$\frac{dt}{y} = -\frac{1}{\sqrt{h^2+h'^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

i można przyjąć $k = h'/\sqrt{h^2+h'^2}$.

3) $A = +1, m = h^2, m' = h'^2$ ($h > h' > 0$). Zmiana t nie jest niczym ograniczona. Podstawmy

$$ht = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{gdzie } 0 \leq z < 1.$$

W tym przypadku

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

i $k = \sqrt{h^2-h'^2}/h$.

4) $A = -1, m = -h^2, m' = h'^2$ ($h, h' > 0$). Zmienna t musi spełniać nierówność $t > \frac{1}{h}$. Podstawiamy

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{gdzie } 0 < z < 1,$$

a więc

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

i $k = h/\sqrt{h^2+h'^2}$.

5) $A = -1, m = -h^2, m' = -h'^2$ ($h > h' > 0$). Zmienna t może się zmieniać tylko między $1/h$ i $1/h'$. Podstawienie

$$h't = \sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}}z^2, \quad \text{gdzie } 0 < z < 1,$$

daje

$$\frac{dt}{y} = -\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

i $k = \sqrt{h^2 - h'^2}/h$. Wyczerpaliśmy przez to wszystkie możliwe przypadki, gdyby bowiem było $A = -1$ i $m > 0, m' > 0$, pierwiastek nie mógłby w ogóle mieć wartości rzeczywistych. Nie mówiliśmy nic o czynniku $R_1(z^2)$, gdyż we wszystkich przypadkach przekształcał się on oczywiście w funkcję wymierną zmiennej z^2 .

Zauważmy jeszcze, że rozpatrując całkę (8) możemy poprzednią na wartościach $z < 1$; przypadek $z > 1/k$ sprowadza się do poprzedniego przez podstawienie $tz = 1/\zeta$, gdzie $\zeta < 1$.

293. Całki eliptyczne pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju. Pozostają teraz do zbadania najprostsze z całek postaci (8), do których można sprowadzić wszystkie pozostałe całki tej postaci, a więc ostatecznie wszystkie w ogóle całki eliptyczne.

Wydzielmy z funkcji wymiernej $R(x)$ występującej w wyrażeniu podcałkowym (8) część całkowitą $P(x)$, a ułamek właściwy rozłożmy na ułamki proste. Jeśli nie połączymy pierwiastków zespolonych sprzężonych mianownika (jak to robiliśmy w 274), lecz będziemy je rozpatrywać oddzielnie, podobnie jak pierwiastki rzeczywiste, to $R(x)$ można przedstawić w postaci sumy pomnożonych przez współczynniki liczbowe potęg x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) i ułamków postaci $1/(x-a)^m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), gdzie a może być także liczbą zespoloną. Jasne jest stąd, że całka (8) jest w wypadku ogólnym kombinacją liniową całek:

$$I_n = \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$H_m = \int \frac{dz}{(z^2 - a)^m \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Zatrzymajmy się na całkach I_n . Jeśli scałkujemy łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$\begin{aligned} [z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}]' &= \\ &= (2n-3) z^{2n-4} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} + z^{2n-3} \frac{2k^2 z^3 - (k^2 + 1) z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \\ &= \frac{(2n-1) k^2 z^{2n} - (2n-2) (k^2 + 1) z^{2n-2} + (2n-3) z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \end{aligned}$$

to otrzymamy redukcyjną zależność

$$(9) \quad (2n-1) k^2 I_n - (2n-2) (k^2 + 1) I_{n-1} + (2n-3) I_{n-2} = z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)},$$

wiączącą trzy kolejne całki I_n . Przyjmując tu $n = 2$, wyrazimy I_2 przez I_0 i I_1 ; jeśli wziąć $n = 3$ i zamiast I_2 podstawić jej wyrażenie przez I_0 i I_1 , to również I_3 wyrazi się przez te całki. Kontynuując w ten sposób, łatwo przekonamy się, że każda z całek I^n ($n \geq 2$) wyraża się przez I_0 i I_1 , a uwzględniając (9) można nawet wyprowadzić wiążący je wzór

$$I_n = \alpha_n I_0 + \beta_n I_1 + q_{2n-3}(z) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)},$$

gdzie α_n i β_n są stałe, a $q_{2n-3}(z)$ jest wielomianem nieparzystym stopnia $2n-3$. Oczywiście

wiście jeśli $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej x , to

$$(10) \quad \int \frac{P_n(z^2) dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \alpha I_0 + \beta I_1 + z Q_{n-2}(z^2) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

gdzie α_n i β_n są stałe, a $Q_{n-2}(x)$ jest pewnym wielomianem stopnia $n-2$ zmiennej x . Wyznaczyć te stałe i współczynniki wielomianu Q można (jeśli wielomian P jest konkretnie dany) metodą współczynników nieoznaczonych [porównaj 284,1].

Zauważmy, że ze wzoru (9) można by było wyznaczyć całki I_n przez I_0 i I_1 także dla ujemnych wartości $n = -1, -2, \dots$, a więc w całkach H_m wystarczy ograniczyć się do $a \neq 0$.

Przechodząc do całek H_m (powiedzmy przy rzeczywistym a), w podobny sposób wprowadzimy dla nich wzór redukcyjny

$$(2m-2) [-a + (k^2+1)a^2 - k^2a^3] H_m - (2m-3) [1 - 2a(k^2+1) + 3k^2a^2] H_{m-1} + \\ + 2(m-4) [(k^2+1) - 3k^2a] H_{m-2} - (2m-5) k^2 H_{m-3} = \frac{z}{(z^2-a)^{m-1}} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

słuszny również dla $m = 0$ i m ujemnych. Wobec tego wszystkie H_m wyrażają się przez trzy spośród nich

$$H_1 = \frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ H_0 = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_0, \\ H_{-1} = \frac{(z^2-a) dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0,$$

więc ostatecznie przez I_0 , I_1 i H_1 .

Podkreślamy, że wszystko to pozostaje w mocy również dla zespolonych wartości parametru a , nie będziemy się jednak wdawali w związkę z tym w objaśnienia odsyłając czytelnika do § 5 rozdziału XII.

Tak więc w wyniku wszystkich naszych rozważań dochodzimy do ogólnego wniosku: *wszystkie całki eliptyczne sprowadzają się za pomocą elementarnych podstawień i z dokładnością do składników wyrażających się w postaci skończonej⁽¹⁾ do następujących trzech wzorcowych całek podstawowych:*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1)$$

⁽¹⁾ Chociaż wyżej daliśmy wystarczające wskazówki na to, by zagadnienie sprowadzenia dowolnej całki eliptycznej do trzech wyżej wspomnianych całek można było uważać w zasadzie za rozwiązane, jednak w praktyce można na tej drodze napotkać trudności. W specjalnych monografiach poświęconych całkom eliptycznym i pokrewnym zagadnieniom można znaleźć inne, wygodniejsze w praktyce metody prowadzące do tego celu.

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1)$$

(ostatnią z nich otrzymujemy z H_1 , wprowadzając zamiast $a \neq 0$ nowy parametr $k = -\frac{1}{a}$).

Całek tych, jak pokazał Liouville, nie można już wyrazić w postaci skończonej przez funkcje elementarne. Legendre nazwał je *całkami eliptycznymi* odpowiednio *pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju*. Pierwsze dwie z nich zawierają tylko jeden parametr k , ostatnia zawiera oprócz tego parametru jeszcze parametr zespolony h .

Legendre uproszczył te całki jeszcze bardziej, wykonując w nich podstawienie $z = \sin \varphi$ (φ zmienia się od 0 do $\frac{1}{2}\pi$). Po tym podstawieniu pierwsza z tych całek przyjmuje postać

$$(11) \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}}.$$

Druga przekształca się w sposób następujący:

$$\int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi} d\varphi,$$

tzn. sprowadza się do poprzedniej całki i do nowej całki

$$(12) \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Wreszcie trzecia całka przechodzi przy powyższym podstawieniu w całkę

$$(13) \quad \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}}.$$

Ciągi (11), (12) i (13) nazywają się także *całkami eliptycznymi pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju w postaci Legendre'a*.

Szczególnie ważne i często używane są dwie pierwsze z nich. Jeśli uważać, że całki te znikają dla $\varphi = 0$ i ustalić w ten sposób zawarte w nich stałe dowolne, to otrzymamy dwie zupełnie określone funkcje zmiennej φ , które Legendre oznaczył odpowiednio przez $F(k, \varphi)$ i $E(k, \varphi)$. Wskazany jest tutaj oprócz zmiennej niezależnej φ także występujący w całce parametr k , zwany *modułem*.

Legendre ułożył obszerne wartości tablice tych funkcji dla różnych φ i różnych k . W tablicach tych nie tylko argument φ jest traktowany jako kąt i wyrażony w stopniach, lecz także moduł k (ułamek właściwy!) jest traktowany jako sinus pewnego kąta θ , który to kąt podaje się w tablicach zamiast modułu, i to również w stopniach.

Oprócz tego Legendre, a także i inni uczeni zbadali bardzo głębokie własności tych funkcji, wyprowadzili dla nich wiele wzorów itd. Dzięki temu funkcje F i E Legendre'a weszły w zakres funkcji, które spotykamy w analizie i jej zastosowaniach, na równi z funkcjami elementarnymi.

Niższa część rachunku całkowego, do której musimy się tymczasem ograniczyć, zajmuje się „całkowaniem w postaci skończonej”. Byłoby jednak błędem sądzić, że cele rachunku całkowego w ogóle ograniczają się do tego: całki eliptyczne F i E stanowią przykłady takich funkcji, które badane są owocnie właśnie poprzez ich wyrażenia całkowe i które stosuje się z powodzeniem, chociaż nie można ich przedstawić w skończonej postaci przez funkcje elementarne.

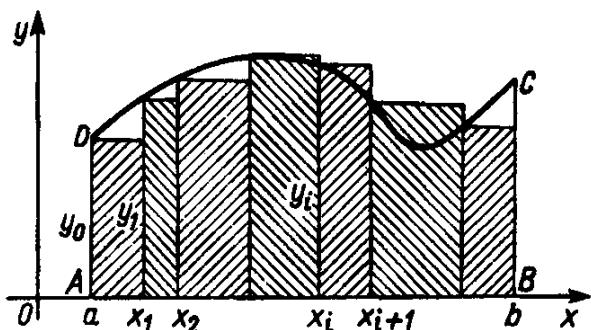
Powrócimy jeszcze do całek F i E w następnym rozdziale i w ogóle nie raz będziemy się z nimi spotykali w dalszym ciągu.

ROZDZIAŁ IX

CAŁKA OZNACZONA

§ 1. Definicja i warunki istnienia całki oznaczonej

294. Inne podejście do zadania o polu. Powróćmy do zadania obliczenia pola P trapezu krzywoliniowego $ABCD$ (rys. 4). Zadaniem tym zajmowaliśmy się już w 264. Omówimy teraz inne podejście do rozwiązania tego zadania ⁽¹⁾.



Rys. 4

Podzielmy podstawę AB naszej figury w dowolny sposób na mniejsze odcinki i poprowadźmy przez punkty podziału odcinki pionowe; w ten sposób trapez krzywoliniowy rozcinamy na pewną ilość pasków (patrz rysunek 4).

Każdy taki pasek zastąpimy teraz w przybliżeniu pewnym prostokątem o tej samej podstawie, co dany pasek, i o wysokości równej jednej z rzędnych wykresu w pasku, na przykład skrajnej z lewej strony. W ten sposób figurę

krzywoliniową zastąpimy pewną figurą schodkową, składającą się z poszczególnych prostokątów.

Niech liczby

$$(1) \quad x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

oznaczają odcięte punktów podziału. Podstawa i -tego prostokąta ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ma długość równą różnicę $x_{i+1} - x_i$, którą będziemy oznaczać symbolem Δx_i . Jeśli chodzi o wysokość tego prostokąta, to z tego co powiedzieliśmy widać, że jest ona równa $y_i = f(x_i)$. Zatem pole i -tego prostokąta będzie równe $y_i \Delta x_i = f(x_i) \Delta x_i$.

Sumując pola wszystkich prostokątów otrzymamy w przybliżeniu pole P trapezu krzywoliniowego

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \quad \text{lub} \quad P \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

⁽¹⁾ Uogólnimy przy tym ideę, którą raz już zastosowaliśmy do szczególnego przykładu [32,4].

Przy nieograniczonym zmniejszaniu się wszystkich Δx_i , błąd w tej równości zmierza do zera. Dokładne pole P otrzymujemy jako granicę

$$(2) \quad P = \lim \sum y_i \Delta x_i = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i.$$

przy założeniu, że wielkości Δx_i dążą do zera jednocześnie.

Ten sam sposób można zastosować do obliczenia pola $P(x)$ figury $AMND$ (rys. 2), ale w tym przypadku należałoby dzielić na części odcinek AM . Zauważmy jeszcze, że przypadek, kiedy funkcja $y = f(x)$ przyjmuje również i ujemne wartości, jest rozstrzygnięty dzięki uwadze zawartej w ustępie 264, że pole części figury znajdującej się pod osią x uważamy za ujemne.

Dla oznaczenia sumy postaci $\sum y \Delta x$ (a dokładniej mówiąc — granicy tej sumy) Leibniz wprowadził symbol $\int y dx$, gdzie $y dx$ przypomina typowy składnik sumy, a znak \int jest wystylizowaną literą S — pierwszą literą łacińskiego słowa *summa* ⁽¹⁾.

Ponieważ pole, otrzymane jako wartość graniczna, okazuje się jednocześnie funkcją pierwotną funkcji y , więc również dla oznaczenia funkcji pierwotnej zachował się ten sam symbol. W konsekwencji po wprowadzeniu oznaczenia funkcyjnego pisano

$$\int f(x) dx$$

w przypadku pola zmennego, i

$$\int_a^b f(x) dx$$

w przypadku pola ustalonej figury $ABCD$, odpowiadającej przebiegowi zmiennej x od a do b .

Posłużyliśmy się intuicyjnym przedstawieniem zadania znajdowania pola po to, żeby w sposób naturalny podejść do rozpatrywania granic sum specjalnych postaci (2) (które, historycznie rzecz biorąc, były wprowadzone właśnie w związku z zadaniem obliczania pola). Jednakże samo pojęcie pola wymaga sprecyzowania, i — jeśli chodzi o trapezy krzywoliniowe — to można to osiągnąć właśnie za pomocą wspomnianych granic. Rozumie się, że najpierw należy zbadać same granice (2), abstrahując od ich znaczenia geometrycznego. Temu właśnie poświęcimy niniejszy rozdział.

Granice postaci (2) odgrywają szczególnie ważną rolę w analizie matematycznej i w rozmaitych jej zastosowaniach. Dlatego też rozwinięte tu idee w różnych wariantach będą się niejednokrotnie powtarzały w całej książce.

295. Definicja. Niech będzie dana funkcja $f(x)$ określona w pewnym przedziale $\langle a, b \rangle$. Rozbijamy ten przedział w dowolny sposób na części, wstawiając pomiędzy a i b punkty podziału (1). Największą z różnic $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) w dalszym ciągu będziemy oznaczali przez λ .

⁽¹⁾ Polski termin *całka* wprowadził Jan Śniadecki jako odpowiednik terminu *integral* (od łacińskiego *integer* — całkowity) wprowadzonego przez ucznia i współpracownika Leibniza Jana Bernoulliego. Leibniz mówił początkowo „*summa*” (przyp. tłumacza).

W każdym z odcinków $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ wybierzmy dowolny punkt $x = \xi_i$ (¹):

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

i utwórzmy sumę

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Mówimy, że suma σ ma przy $\lambda \rightarrow 0$ skończoną granicę I , jeśli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że jeśli tylko $\lambda < \delta$ (tzn. jeśli rozpatrywany odcinek jest rozbity na części długości $\Delta x_i < \delta$), to nierówność

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

zachodzi przy dowolnym wyborze liczb ξ_i .

Zapisujemy to w sposób następujący:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Jak zwykle, tej definicji „w języku $\varepsilon - \delta$ ”, przeciwstawimy definicję „w języku ciągów”. Wyobraźmy sobie, że przedział $\langle a, b \rangle$ rozbijamy kolejno na części, najpierw jednym sposobem, następnie — drugim, trzecim itd. Taki ciąg podziałów przedziału na części nazywa się *normalny*, jeśli odpowiedni ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ wartości λ jest zbieżny do zera.

Równość (3) można teraz rozumieć w ten sposób, że ciąg wartości sumy σ , odpowiadający dowolnemu ciągowi podziałów normalnych rozpatrywanego przedziału, jest zawsze zbieżny do granicy równej I , niezależnie od wyboru punktów ξ_i .

Dowód równoważności obu tych definicji można przeprowadzić analogicznie, jak w ustępie 53. Druga z tych definicji umożliwia przeniesienie podstawowych pojęć i twierdzeń teorii granic na przypadek granicy tego nowego rodzaju.

Skończoną granicę I sum σ przy $\lambda \rightarrow 0$ nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ i oznamy symbolem

$$I = \int_a^b f(x) dx;$$

w przypadku, kiedy granica taka istnieje, funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Liczby a i b noszą odpowiednio nazwy *dolnej* i *górnzej granicy całki*. Przy ustalonych granicach całka jest liczbą stałą.

Podana definicja pochodzi od Riemanna, który pierwszy wypowiedział ją w postaci ogólnej oraz zbadał zakres jej zastosowania. Dlatego sumę σ nazywa się czasami sumą *Riemanna* (²); w książce tej natomiast wolimy sumę σ nazywać sumą całkową dla podkreślenia jej związku z całką.

(¹) Poprzednio jako ξ_i braliśmy we wszystkich przypadkach najmniejszą wartość x_i .

(²) W rzeczywistości już Cauchy posługiwał się wyraźnie granicami podobnych sum, jednakże tylko w przypadku funkcji ciągłych.

Podstawimy sobie teraz za zadanie znalezienie warunków, przy których suma całkowa σ ma skończoną granicę, tzn. warunków, przy których istnieje całka oznaczona (4).

Zauważymy przede wszystkim, że podana definicja może być zastosowana jedynie dla funkcji ograniczonej. Rzeczywiście, gdyby funkcja $f(x)$ była w przedziale $\langle a, b \rangle$ nieograniczona, to w dowolnym podziale tego przedziału na części znaleźćbyśmy przynajmniej jeden taki podprzedział, w którym własność ta byłaby zachowana. Wtedy wybierając odpowiednio w tym podprzedziale punkt ξ można by sprawić, żeby $f(\xi)$, a więc i suma σ były dowolnie duże; w tych warunkach oczywiście nie może istnieć skończona granica sum σ . A więc *funkcja całkowalna jest zawsze ograniczona*.

Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy z góry zakładali, że rozpatrywana funkcja $f(x)$ jest ograniczona, tzn. że

$$m \leq f(x) \leq M$$

dla $a \leq x \leq b$.

296. Sumy Darboux. Jako pomocnicze narzędzie badania, na równi z sumami całkowymi wprowadzimy za przykładem Darboux jeszcze inne sumy, podobne do nich, chociaż prostsze.

Oznaczmy odpowiednio przez m_i i M_i kresy dolny i górny funkcji $f(x)$ w i -tym przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ i utwórzmy sumy

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Sumy te noszą odpowiednio nazwy *dolnej i górnej sumy całkowej*, lub krótko *sum Darboux*.

W szczególnym przypadku, kiedy funkcja $f(x)$ jest ciągła, są one po prostu równe najmniejszej i największej z sum całkowych odpowiadających danemu podziałowi rozpatrywanego przedziału, ponieważ w tym przypadku funkcja $f(x)$ osiąga w każdym przedziale swój kres dolny i górny, a więc punkty ξ_i można wybrać tak, żeby było

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{lub} \quad f(\xi_i) = M_i.$$

W przypadku ogólnym mamy wprost z definicji kresów dolnego i górnego

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Mnożąc stronami obie te nierówności przez Δx_i (Δx_i jest dodatnie) i sumując je względem i otrzymujemy

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Dla ustalonego podziału sumy s i S są już ustalonimi liczbami, natomiast suma σ jest zmienna — zależy od wyboru punktów ξ_i . Jednakże, łatwo zauważyc, że przez odpowiedni wybór punktów ξ_i można otrzymać wartości $f(\xi_i)$ dowolnie mało różniące się albo od m_i , albo od M_i , a tym samym sumę σ można dowolnie przybliżyć do s lub do S . Wobec tego poprzednie nierówności prowadzą do następującej, już ogólnej uwagi: *przy danym podziale przedziału sumy Darboux s i S są odpowiednio kresami górnym i dolnym sum całkowych*.

Sumy Darboux mają następujące, proste własności:

WŁASNOŚĆ 1. Jeśli do danych punktów podziału dodamy nowe punkty, to może to spowodować jedynie co najwyżej zwiększenie się dolnych sum Darboux i zmniejszenie się górnych.

Dowód. W dowodzie tej własności wystarczy ograniczyć się do przypadku, w którym do danych już punktów podziału dodajemy tylko jeden nowy punkt podziału x' .

Założymy, że punkt ten leży między x_k a x_{k+1} ; mamy więc

$$x_k \leq x' \leq x_{k+1}.$$

Jeśli teraz przez S' oznaczymy nową sumę górną, to od poprzedniej sumy S będzie się ona różniła tylko tym, że w sumie S przedziałowi $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ odpowiada składnik

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

a w nowej sumie S' temu samemu przedziałowi odpowiada suma dwóch składników

$$M'_k(x' - x_k) + M''_k(x_{k+1} - x'),$$

gdzie M'_k i M''_k oznaczają odpowiednio kresy górne funkcji $f(x)$ w przedziałach $\langle x_k, x' \rangle$ i $\langle x', x_{k+1} \rangle$. Ponieważ są to podprzedziały przedziału (x_k, x_{k+1}) , więc

$$M'_k \leq M_k, \quad M''_k \leq M_k,$$

a stąd mamy dalej

$$M'_k(x' - x_k) \leq M_k(x' - x_k),$$

$$M''_k(x_{k+1} - x') \leq M_k(x_{k+1} - x').$$

Dodając stronami te nierówności, otrzymujemy

$$M'_k(x' - x_k) + M''_k(x_{k+1} - x') \leq M_k(x_{k+1} - x_k).$$

Stąd wynika już, że $S' \leq S$. Dowód dla sumy dolnej przebiega analogicznie.

Uwaga. Ponieważ różnice $M_k - M'_k$ i $M_k - M''_k$ nie są oczywiście większe od oscylacji Ω funkcji $f(x)$ w całym przedziale $\langle a, b \rangle$, więc różnica $S - S'$ nie może być większa od iloczynu $\Omega \Delta x_k$. Uwaga ta pozostaje słuszna również w przypadku, kiedy w przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ wybrano jeszcze pewną ilość nowych punktów podziału.

WŁASNOŚĆ 2. Każda dolna suma Darboux jest mniejsza od każdej sumy górnej, nawet wtedy, kiedy sumy te odpowiadają różnym podziałom przedziału.

Dowód. Przedział $\langle a, b \rangle$ rozbijamy w dowolny sposób na mniejsze podprzedziały i znajdujemy sumy Darboux

$$(I) \quad s_1 \quad \text{i} \quad S_1.$$

Rozpatrzmy teraz jakiś inny podział przedziału $\langle a, b \rangle$, nie związany niczym z poprzednim podziałem. Oznaczmy sumy Darboux odpowiadające temu nowemu podziałowi przez

$$(II) \quad s_2 \quad \text{i} \quad S_2.$$

Należy więc udowodnić, że $s_1 \leq S_2$. W tym celu rozpatrzmy trzeci, pomocniczy podział przedziału $\langle a, b \rangle$. Jako punkty dzielące wybierzemy teraz wszystkie punkty dzielące

występujące w obu poprzednich podziałach. Temu trzeciemu podziałowi niech odpowiadają sumy Darboux

$$(III) \quad s_3 \quad i \quad S_3.$$

Ponieważ trzeci podział możemy otrzymać z pierwszego przez dodanie nowych punktów dzielących, więc na podstawie udowodnionej już własności sum Darboux (własność 1) mamy

$$s_1 \leqslant s_3.$$

Podobnie podział trzeci możemy otrzymać z drugiego, a zatem analogicznie mamy

$$S_3 \leqslant S_2.$$

Ponieważ ponadto $s_3 \leqslant S_3$, więc z otrzymanych nierówności wynika, że

$$s_1 \leqslant S_2,$$

co należało właśnie udowodnić.

Z dowiedzionej własności wynika, że zbiór $\{s\}$ wszystkich sum dolnych jest ograniczony z góry, na przykład przez dowolną sumę górną S . Wobec tego [11] zbiór ten ma kres górny

$$I_* = \sup \{s\},$$

a ponadto dla dowolnej sumy górnej S zachodzi nierówność

$$I_* \leqslant S.$$

Ponieważ zbiór $\{S\}$ sum górnych jest wobec tego ograniczony z dołu przez I^* , ma on zatem kres dolny

$$I^* = \inf \{S\},$$

który spełnia oczywiście nierówność

$$I_* \leqslant I^*.$$

Podsumowując wszystko, co powiedzieliśmy, mamy ostatecznie

$$(5) \quad s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$$

dla dowolnej dolnej i dowolnej górnej sumy Darboux.

Liczby I_* i I^* nazywają się odpowiednio *dolną i górną całką Darboux* [por. dalej 301].

297. Warunek istnienia całki. Teraz już za pomocą sum Darboux łatwo można sformułować warunek istnienia całki.

TWIERDZENIE. *Na to, żeby istniała całka oznaczona, potrzeba i wystarcza, żeby było*

$$(6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Do wyjaśnienia, w jakim sensie należy tu rozumieć granicę, wystarczą uwagi sformułowane w ustępie 295. Na przykład w języku $\varepsilon - \delta$ warunek (6) oznacza, że do każdej liczby

$\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że skoro tylko $\lambda < \delta$ (tzn. jeśli przedział jest rozbity na odcinki o długościach $\Delta x_i < \delta$), to wtedy spełniona jest nierówność

$$S - s < \varepsilon.$$

Dowód konieczności warunku (6). Zakładamy, że całka (4) istnieje. Zatem do każdego danego $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $\delta > 0$, że jeśli tylko wszystkie $\Delta x_i < \delta$, to nierówność

$$|\sigma - I| < \varepsilon, \quad \text{czyli} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

jest spełniona przy dowolnym wyborze liczb ξ_i w każdym z przedziałów podziału. Wiemy już jednak, że sumy s i S są — przy danym podziale przedziału — odpowiednio kresami dolnymi i górnymi sum całkowych; spełniają one zatem nierówności

$$I - \varepsilon \leq s \leq S \leq I + \varepsilon,$$

a ponieważ

$$(7) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I,$$

wynika już stąd równość (6).

Dowód dostateczności warunku (6). Założymy, że spełniony jest warunek (6), wtedy z (5) wynika od razu, że $I_* = I^*$. Oznaczając $I_* = I^* = I$ mamy ponadto

$$(5^*) \quad s \leq I \leq S.$$

Jeśli przez σ rozumiemy jedną z wartości sumy całkowej odpowiadającej temu samemu podziałowi przedziału co i sumy s i S , to jak wiemy, zachodzi nierówność

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Jeśli wreszcie założyć, że wszystkie Δx_i są dostatecznie małe, to z warunku (6) wynika, że sumy s i S różnią się o mniej niż o dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. To samo jest prawdą również dla różnicy liczb σ i I leżących w przedziale (s, S) , tzn.

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

Zatem I jest granicą sum σ , czyli I jest całką oznaczoną.

Jeśli oscylację $M_i - m_i$ funkcji w i -tym przedziale podziału oznaczymy przez ω_i , to będziemy mieli

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

i wobec tego warunek istnienia całki oznaczonej możemy napisać w postaci

$$(8) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

w której to postaci warunek ten jest najczęściej używany.

298. Klasy funkcji całkowalnych. Zastosujemy teraz znalezione kryterium do ustalenia pewnych klas funkcji całkowalnych.

1. *Każda funkcja ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ jest w tym przedziale całkowalna.*

Dowód. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła, to na mocy wniosku z twierdzenia Cantora [87] do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\delta > 0$, że jeśli tylko przedział $\langle a, b \rangle$ jest rozbity na odcinki o długościach $\Delta x_i < \delta$, to wszystkie ω_i spełniają nierówność $\omega_i < \varepsilon$. Stąd mamy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

Ponieważ $b-a$ jest liczbą stałą, a ε jest dowolnie małe, więc w tym przypadku zachodzi warunek (8), a stąd wynika już istnienie całki.

Udowodnione twierdzenie można jeszcze trochę uogólnić.

II. *Każda funkcja $f(x)$ ograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$ i mająca w nim tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości jest całkowalna.*

Dowód. Oznaczamy punkty nieciągłości przez x' , x'' , ..., $x^{(k)}$. Niech będzie dana dowolna liczba $\varepsilon > 0$. Dobieramy do punktów nieciągłości ich otoczenia

$$(x' - \varepsilon', x' + \varepsilon'), \quad (x'' - \varepsilon'', x'' + \varepsilon''), \quad \dots, \quad (x^{(k)} - \varepsilon^{(k)}, x^{(k)} + \varepsilon^{(k)})$$

w ten sposób, żeby długość każdego z nich była mniejsza niż ε . W pozostałych przedziałach (domkniętych) funkcja $f(x)$ jest ciągła i możemy do każdego z nich z osobna zastosować wniosek z twierdzenia Cantora. Z liczb δ dobranych do danego ε wybieramy najmniejszą (która również będziemy oznaczali literą δ). Liczba ta będzie już dobra dla każdego z wyżej wspomnianych przedziałów. Możemy ją przy tym oczywiście tak dobrą, żeby było $\delta < \varepsilon$. Rozbijamy teraz rozpatrywany przedział na części o długościach Δx_i mniejszych niż δ . Otrzymamy w ten sposób dwa rodzaje przedziałów podziału:

1) Przedziały leżące całkowicie na zewnątrz wybranych poprzednio otoczeń punktów nieciągłości funkcji $f(x)$. Oscylacja ω_i funkcji w tych przedziałach jest mniejsza od ε .

2) Przedziały albo całkowicie zawarte wewnątrz wyróżnionych otoczeń, albo też częściowo na nie zachodzące.

Ponieważ funkcja $f(x)$ jest z założenia ograniczona, więc jej oscylacja Ω w całym przedziale $\langle a, b \rangle$ jest skończona, a wobec tego jej oscylacja w każdym podprzedziale jest mniejsza niż Ω .

Sumę

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

rozbijamy na dwie części

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

w których sumowanie przebiega odpowiednio po przedziałach pierwszego rodzaju i po przedziałach drugiego rodzaju.

Dla pierwszej sumy, podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, mamy

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a).$$

Jeśli chodzi o drugą sumę, to zauważmy, że suma długości wszystkich przedziałów leżących całkowicie w wybranych otoczeniach jest mniejsza niż $k\varepsilon$; natomiast przedziałów zachodzących tylko częściowo na te otoczenia może być najwyżej $2k$, więc suma ich długości jest mniejsza niż $2k\delta$, zatem również mniejsza niż $2k\varepsilon$. Stąd wynika nierówność

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 3k\varepsilon.$$

W ten sposób dla $\Delta x_i < \delta$ otrzymujemy wreszcie

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon [(b-a) + 3k\Omega].$$

Z ostatniej nierówności wynika już nasze twierdzenie, ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn dowolnie małej liczby ε przez czynnik stały.

Na koniec wskażemy jeszcze jedną prostą klasę funkcji całkowalnych nie pokrywającą się z żadną z dwóch poprzednich klas.

III. Funkcja monotoniczna i ograniczona jest całkowalna.

Dowód. Niech będzie dana funkcja $f(x)$ monotonicznie rosnąca. Jej oscylacja w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ jest równa

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Bierzemy teraz dowolne $\varepsilon > 0$ i przyjmujemy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Jeśli tylko $\Delta x_i < \delta$, to

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_i [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

skąd wynika już całkowalność funkcji $f(x)$.

299. Własności funkcji całkowalnych. Z kryterium podanego w ustępie 297 można wyprowadzić kilka interesujących, ogólnych własności funkcji całkowalnych.

I. *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to całkowalne są w tym przedziale również funkcje $|f(x)|$ i $kf(x)$, gdzie $k = \text{const}$.*

Dowód przeprowadzimy dla funkcji $|f(x)|$. Ponieważ dla dowolnych dwóch punktów x' i x'' leżących w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ mamy [17]

$$|f(x'')| - |f(x')| \leq |f(x'') - f(x')|,$$

więc oscylacja ω^* funkcji $|f(x)|$ w tym przedziale jest mniejsza niż ω_i [85]. Stąd wynika nierówność

$$\sum_i \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i \Delta x_i;$$

ponieważ zaś ostatnia suma dąży do zera (przy $\lambda \rightarrow 0$), więc pierwsza również dąży do zera, a stąd wynika już całkowalność funkcji $|f(x)|$.

II. Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$, to suma, różnica i iloczyn tych funkcji są także całkowalne.

Dowód ograniczamy do przypadku iloczynu $f(x)g(x)$.

Niech będzie $|f(x)| \leq K$, $|g(x)| \leq L$. Wybierzmy w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ dowolne punkty x' , x'' i rozpatrzmy różnicę

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x').$$

Jeśli przez ω_i , $\bar{\omega}_i$ oznaczymy odpowiednio oscylacje funkcji $f(x)$ i $g(x)$ w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, to otrzymamy

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq L\omega_i + K\bar{\omega}_i.$$

Ale wtedy [85] również i dla oscylacji Ω_i funkcji $f(x)g(x)$ w tym przedziale będziemy mieli nierówność

$$\Omega_i \leq L\omega_i + K\bar{\omega}_i,$$

skąd

$$\sum \Omega_i \Delta x_i \leq L \sum \omega_i \Delta x_i + K \sum \bar{\omega}_i \Delta x_i.$$

Ponieważ obie sumy dążą do zera (gdy $\lambda \rightarrow 0$), więc również pierwsza suma dąży do zera, a to już dowodzi całkowalności funkcji $f(x)g(x)$.

III. Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to jest ona również całkowalna w dowolnym podprzedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ tego przedziału. Na odwrót, jeśli przedział $\langle a, b \rangle$ można rozbić na mniejsze przedziały takie, że w każdym z nich funkcja $f(x)$ jest całkowalna, to jest ona również całkowalna w całym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Dowód. Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$; utworzymy dla tego przedziału sumę $\sum \omega_i \Delta x_i$ (przyjmując, że α i β należą do punktów podziału). Analogiczną sumę dla przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$ otrzymujemy przez opuszczenie w poprzedniej sumie niektórych (dodatnich) składników; jest ona więc na pewno zbieżna do zera, jeśli tylko zbieżna jest do zera pierwsza suma.

Przypuśćmy teraz, że przedział $\langle a, b \rangle$ jest rozbity na dwa podprzedziały $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$ (gdzie $a < c < b$) i że w każdym z nich funkcja $f(x)$ jest całkowalna. Utwórzmy znowu sumę $\sum \omega_i \Delta x_i$ odpowiadającą jakiemuś podziałowi przedziału $\langle a, b \rangle$; jeśli punkt c jest jednym z punktów podziału, to wymieniona suma składa się z dwóch analogicznych sum, utworzonych dla przedziałów $\langle a, c \rangle$ oraz $\langle c, b \rangle$ i dąży do zera wraz z nimi. Wniosek ten pozostaje w mocy także i w przypadku, kiedy c nie jest punktem podziału: dodając bowiem jeden nowy punkt podziału zmienimy tylko jeden składnik sumy, który sam oczywiście dąży do zera.

IV. Jeśli zmienimy wartości funkcji całkowalnej w skończonej liczbie ($= k$) punktów, to otrzymana w ten sposób nowa funkcja będzie nadal całkowalna.

Dowód jest prosty z uwagi na to, że wspomniane zmiany wystąpią co najwyżej w k składnikach sumy $\sum \omega_i \Delta x_i$.

Łatwo zauważyc że nie wywoła to zmiany wartości samej całki. Wynika to stąd, że dla obydwu funkcji — pierwotnej i zmienionej — punkty ξ_i , występujące w sumie całkowej, zawsze można tak wybrać, żeby nie pokrywały się z tymi punktami, w których różnią się wartości funkcji.

Uwaga. Własność ta umożliwia nam rozpatrywanie całki $\int_a^b f(x) dx$ nawet wtedy, kiedy funkcja $f(x)$ jest nieokreślona w skończonej liczbie punktów przedziału $\langle a, b \rangle$. W tym przypadku bowiem można naszej funkcji przypisać w tych punktach zupełnie dowolne wartości i można rozpatrywać całkę funkcji określonej już w ten sposób w całym przedziale. Jak widzieliśmy ani istnienie tej całki, ani jej wartość nie zależą od wartości, jakie nadamy funkcji w tych punktach, w których nie była ona określona.

300. Przykłady i uzupełnienia. Jako ćwiczenie podamy kilka przykładów zastosowania kryterium z ustępu 297 do konkretnych funkcji.

1) Powróćmy do funkcji, rozpatrywanej już w ustępie 70, 8): $f(x) = 1/q$, jeśli x jest nieskracalnym ułamkiem p/q , i $f(x) = 0$ w pozostałych punktach przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Przedział $\langle 0, 1 \rangle$ rozbijamy na podprzedziały długości $\Delta x_i < \lambda$. Niech N oznacza dowolną liczbę naturalną. Wszystkie przedziały danego podziału rozdzielimy na dwie klasy:

(a) Do pierwszej klasy zaliczamy przedziały, w których leżą liczby p/q o mianownikach $q \leq N$; ponieważ liczb o tej własności jest skończenie wiele, więc oznaczając ich liczbę przez $k = k_N$ widzimy, że odcinków pierwszego rodzaju nie może być więcej niż $2k_N$, a suma ich długości nie przekroczy $2k_N \lambda$.

(b) Do drugiej klasy zaliczamy te podprzedziały, które nie zawierają liczb wspomnianej postaci; oscylacja ω_i funkcji w każdym z tych przedziałów jest oczywiście mniejsza niż $1/N$.

Jeśli sumę $\sum \omega_i \Delta x_i$ rozbijemy odpowiednio na dwie sumy, a następnie oszacujemy te sumy częściowe każdą z osobna, to otrzymamy

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

Wybierając najpierw $N > \frac{2}{\varepsilon}$, a następnie $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$, będziemy mieli $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, co dowodzi całkowalności funkcji.

Przykład ten jest interesujący dlatego, że funkcja ta ma nieskończonie wiele punktów nieciągłości, a mimo to jest całkowalna. Przykłady tego rodzaju można zresztą budować opierając się na twierdzeniu III.

2) Rozpatrzymy teraz jeszcze raz funkcję Dirichleta [46; 70, 7]): $\chi(x) = 1$, jeśli x jest liczbą wymierną, i $\chi(x) = 0$, jeśli x jest liczbą niewymierną. Ponieważ w każdym podprzedziale przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ oscylacja tej funkcji $\omega = 1$, więc również $\sum \omega_i \Delta x_i = 1$, a zatem funkcja ta nie jest całkowalna.

3) Kryterium istnienia całki oznaczonej wyrowadzone w ustępie 297 można przedstawić w następującej postaci:

Na to, aby istniała całka oznaczona danej funkcji, potrzeba i wystarcza, by do każdych dwóch liczb $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ można było dobrać takie $\delta > 0$, że jeśli tylko wszystkie $\Delta x_i < \delta$, to suma

$$\sum_{i'} \Delta x_i,$$

długości tych odcinków, w których oscylacje spełniają nierówność

$$\omega_{i'} > \varepsilon,$$

jest mniejsza niż σ .

Konieczność tego warunku wynika z nierówności

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i > \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} > \epsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''},$$

jeśli tylko dobierzemy δ tak, żeby pierwsza suma była mniejsza niż $\epsilon\sigma$

Dostateczność warunku wynika z oszacowania

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_i \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \epsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega\sigma + \epsilon(b-a)$$

(Ω oznacza tu jak zwykle oscylację funkcji w całym rozpatrywanym przedziale; symbolem i'' numerowane są te podprzedziały, w których oscylację $\omega_{i''} < \epsilon$).

4) Nową postać kryterium całkowalności zastosujemy do dowodu następującego twierdzenia:

Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ i przyjmuje wartości z przedziału $\langle c, d \rangle$, w którym funkcja $\varphi(y)$ jest ciągła, to funkcja złożona $\varphi(f(x))$ jest także całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Niech będą dane dwie dowolne liczby $\epsilon > 0$ i $\sigma > 0$. Ponieważ funkcja $\varphi(y)$ jest ciągła, więc do liczby ϵ można dobrać takie $\eta > 0$, że w dowolnym przedziale wartości o długości mniejszej niż η oscylacja funkcji φ będzie mniejsza niż ϵ .

Z całkowalności funkcji f wynika, że do liczb η i σ można dobrać takie δ , że jeśli tylko przedział jest rozbity na podprzedziały Δx_i o długościach mniejszych niż δ , to suma $\sum_i \Delta x_i$ długości tych spośród podprzedziałów, w których oscylacja funkcji $\omega_i(f) \geq \eta$, jest sama mniejsza niż σ [patrz 3)]. Dla pozostałych podprzedziałów mamy $\omega_{i'}(f) < \eta$, więc ze sposobu wyboru liczby η wynika już, że $\omega_{i'}[\varphi(f)] < \epsilon$. Widzimy zatem, że oscylacje funkcji złożonej $\varphi(f(x))$ mogą być $> \epsilon$ tylko w niektórych podprzedziałach pierwszej grupy, których suma długości jest, jak wiadomo, mniejsza niż σ . Stosując teraz do funkcji złożonej kryterium 3), otrzymujemy jej całkowalność.

5) Jeśli o funkcji φ założymy, że jest tylko całkowalna, to funkcja złożona może okazać się niecałkowalna. Oto przykład:

Jako funkcję $f(x)$ weźmiemy funkcję badaną już wyżej w 1); jest ona całkowalna w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, a ponadto przyjmuje wartości także z tego przedziału. Niech będzie dalej

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{dla } 0 < y < 1$$

$\varphi(0) = 0$. Funkcja $\varphi(y)$ jest również całkowalna w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Funkcja złożona $\varphi(f(x))$ jest jednakże, jak łatwo zauważyc, funkcją Dirichleta [patrz 2]), która jest niecałkowalna w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

301. Całki górna i dolna jako granice. Na zakończenie powrócimy do całek dolnej i górnej, które były zdefiniowane w ustępie 296 jako kresy sum Darboux s i S . Pokażemy teraz, że są one zarazem granicami wymienionych sum.

TWIERDZENIE DARBOUX. *Dla każdej ograniczonej funkcji $f(x)$ zachodzą następujące równości:*

$$I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S.$$

Dowód przeprowadzimy na przykład dla sum górnych.

Przede wszystkim do z góry danej liczby $\epsilon > 0$ dobierzemy taki podział przedziału $\langle a, b \rangle$, że dla odpowiadającej mu sumy S' zachodzi nierówność

$$(9) \quad S' < I^* + \frac{1}{2}\epsilon.$$

Jest to możliwe, ponieważ I^* jest kresem dolnym zbioru sum górnych. Niech podział ten ma m' (wewnętrznych) punktów dzielących.

Przyjmijmy teraz

$$\delta = \frac{\epsilon}{2m'\Omega},$$

gdzie Ω oznacza oscylację funkcji $f(x)$ w całym przedziale $\langle a, b \rangle$, i rozpatrzmy dowolny taki podział tego przedziału, w którym wszystkie $\Delta x_i < \delta$; oznaczamy przez S górną sumę całkową, odpowiadającą temu podziałowi.

W celu oszacowania różnicy między S i I^* , wprowadzimy jeszcze trzeci podział, który powstaje przez nałożenie obydwoch poprzednich podziałów. Jeśli górną sumę całkową odpowiadającą temu nowemu podziałowi oznaczymy przez S'' , to z pierwszej własności sum Darboux [296] mamy $S'' < S'$, a więc [patrz (9)]

$$S'' < I^* + \frac{1}{2}\epsilon.$$

Z drugiej strony, z uwagi w ustępie 296 wiemy, że różnica $S - S''$ jest mniejsza niż iloczyn liczby Ω i sumy długości Δx_i tych przedziałów drugiego podziału, wewnątrz których leżą punkty dzielące pierwszego podziału. Takich podprzedziałów jest nie więcej niż m' a długość każdego z nich jest mniejsza niż δ . A więc

$$S - S'' < m'\Omega\delta = \frac{1}{2}\epsilon,$$

a stąd dzięki nierówności (10) mamy

$$S < I^* + \epsilon.$$

Ponieważ, z drugiej strony, jest $S > I^*$, więc jeśli tylko $\Delta x_i < \delta$, to

$$0 < S - I^* < \epsilon,$$

zatem rzeczywiście $S \rightarrow I^*$.

Z udowodnionego twierdzenia wynika następująca równość:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = I^* - I_*.$$

Z zależności tej możemy wyprowadzić kryterium istnienia całki oznaczonej w następującej postaci [porównaj 297]):

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia całki oznaczonej jest równość całek Darboux dolnej i górnej, tzn.

$$I_* = I^*.$$

Jeśli warunek ten jest spełniony, to oczywiście całka jest równa obu całkom Darboux.

Nowa postać warunku istnienia całki oznaczonej jest wygodniejsza w zastosowaniach niż poprzednia. Do sprawdzenia, że obie całki Darboux są równe, wystarczy pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ przynajmniej jedna para sum s i S spełnia nierówność

$$S - s < \epsilon.$$

Rzeczywiście, z nierówności (5) wynika, że

$$0 < I^* - I_* < \epsilon,$$

a stąd wynika już dowodzona równość.

Łatwo się domyślić, jak można w związku z tym uprościć również warunek całkowalności, udowodniony w poprzednim ustępie [patrz 3)].

§ 2. Własności całek oznaczonych

302. Całka w przedziale zorientowanym. Mówiliśmy dotychczas o „całce oznaczonej w przedziale od a do b ”, przy czym zawsze przyjmowaliśmy, że $a < b$. Teraz pozbędziemy się tego ograniczającego założenia.

W tym celu zdefiniujemy przede wszystkim pojęcie przedziału skierowanego, czyli zorientowanego. Przez przedział zorientowany $\langle a, b \rangle$ (gdzie może być $a < b$, albo $a > b$) będziemy rozumieli zbiór liczb x spełniających jedną z nierówności

$$a \leq x \leq b \quad \text{lub} \quad a \geq x \geq b$$

i uporządkowanych od a do b , tzn. w kierunku wzrastania, jeśli $a < b$, albo w kierunku maleń, jeśli $a > b$. W ten sposób rozróżniamy przedziały $\langle a, b \rangle$ i $\langle b, a \rangle$ które składają się z tych samych punktów, ale różnią się kierunkami.

Definicja całki oznaczonej podana w ustępie 295 stosuje się do przedziału zorientowanego $\langle a, b \rangle$, ale tylko w tym przypadku, kiedy $a < b$.

Przechodzimy do zdefiniowania całki oznaczonej w przedziale zorientowanym $\langle a, b \rangle$ przy założeniu, że $a > b$. W tym przypadku możemy powtórzyć proces rozdrabniania odcinka za pomocą dorzucania punktów dzielących, uporządkowanych w kierunku od a do b :

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_i > x_{i+1} > \dots > x_n = b .$$

W każdym podprzedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ wybieramy punkt ξ_i , tak żeby było $x_i \geq \xi_i \geq x_{i+1}$ i tworzymy sumę całkową

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i ,$$

gdzie tym razem wszystkie $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ są ujemne. Wreszcie granica tej sumy, gdy $\lambda = \max |\Delta x_i| \rightarrow 0$, daje nam szukaną całkę

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma .$$

Jeśli dla przedziałów $\langle a, b \rangle$ i $\langle b, a \rangle$ (gdzie $a > b$ lub $b > a$) będziemy brały te same punkty podziału i te same punkty ξ , to odpowiadające im sumy całkowe będą różniły się tylko znakiem. Przechodząc do granicy otrzymamy następujące twierdzenie:

1° Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle b, a \rangle$, to jest ona również całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, i ponadto

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx .$$

Zresztą równość tę można przyjąć wprost za definicję całki \int_a^b dla $a > b$ przy założeniu, że całka \int_b^a istnieje.

Zauważmy jeszcze, że z definicji przyjmujemy, iż

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

303. Własności całek wyrażające się równościami. Podamy dalsze własności całek, dające się wyrazić za pomocą równości (1).

2° *Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w największym z przedziałów $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$* (2). *Wtedy jest ona całkowalna w dwóch pozostałych przedziałach i ponadto przy dowolnym wzajemnym położeniu a, b i c zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $a < c < b$ i że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Całkowalność tej funkcji w przedziałach $\langle a, b \rangle$ i $\langle c, b \rangle$ wynika z własności III [299].

Rozpatrzmy jakikolwiek podział przedziału $\langle a, b \rangle$ na podprzedziały, przy tym punkt c niech będzie jednym z punktów dzielących. Tworząc sumy całkowe, otrzymujemy (sens oznaczeń jest jasny)

$$\sum_a^b f(\xi) \Delta x = \sum_a^c f(\xi) \Delta x + \sum_c^b f(\xi) \Delta x.$$

Szukaną równość otrzymamy przez przejście do granicy, gdy $\lambda \rightarrow 0$.

Inne przypadki wzajemnego położenia punktów a, b, c sprowadzają się do powyższego. Niech będzie na przykład $b < a < c$, a funkcja $f(x)$ niech będzie całkowalna w przedziale $\langle c, b \rangle$ lub — co wychodzi na to samo — w przedziale $\langle b, c \rangle$. W tym przypadku, jak udowodniliśmy, jest

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx,$$

a stąd, po przeniesieniu całek pierwszej i drugiej z jednej strony równości na drugą i po przestawieniu granic (na podstawie własności 1°), otrzymamy znowu poprzednią zależność.

3° *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to również funkcja $kf(x)$ (gdzie $k = \text{const}$) jest całkowalna w tym przedziale i*

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

4° *Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$, to również funkcje $f(x) \pm g(x)$ są całkowalne w tym przedziale i*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

W obu przypadkach dowód przeprowadza się analogicznie, rozpatrując sumy całkowe i przechodząc do granicy. Przeprowadzimy go na przykład dla ostatniego twierdzenia.

(1) Jeśli chodzi o całkę \int_a^b , to w dalszym ciągu będziemy przyjmowali (już bez specjalnego zaznaczenia) za możliwe oba przypadki: $a < b$ i $a > b$.

(2) Zamiast tego można założyć, że funkcja jest całkowalna w każdym z dwóch mniejszych przedziałów, a stąd wynika już jej całkowalność w większym przedziale.

Dzielimy dowolnie przedział $\langle a, b \rangle$ na mniejsze przedziały i znadujemy sumy całkowe dla wszystkich trzech całek. Przy tym punkty ξ_i w każdym z podprzedziałów wybieramy zupełnie dowolnie, ale te same dla każdej z sum; wtedy mamy

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Niech teraz $\lambda \rightarrow 0$; ponieważ istnieją granice obu sum po prawej stronie równości, więc istnieje również granica sumy po lewej stronie, co dowodzi całkowalności funkcji $f(x) \pm g(x)$. Przechodząc w ostatniej równości do granicy otrzymujemy szukaną zależność.

Uwaga. Zwracamy uwagę na to, że przy dowodzie dwóch ostatnich twierdzeń nie trzeba się było opierać na własnościach I i II z ustępu 299. Całkowalność funkcji $kf(x)$ i $f(x) \pm g(x)$ dowodzi się bezpośrednio przez przejście do granicy.

304. Własności wyrażające się nierównościami. Dotychczas rozpatrywaliśmy takie własności całek, które wyrażają się równościami; przejdziemy teraz do omówienia własności, wyrażających się nierównościami.

5° *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ i nieujemna w tym przedziale i $a < b$, to*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Dowód jest oczywisty.

Trudniej jest udowodnić ostrzejsze twierdzenie:

Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, jest wszędzie dodatnia i $a < b$, to

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Wtedy przy $\lambda \rightarrow 0$ również górną sumą Darboux S zmierza do 0 [297, (7)]. Dla dowolnego $\varepsilon_1 > 0$ można znaleźć taką sumę S , która jest mniejsza od $\varepsilon_1(b-a)$. Przy tym przynajmniej jeden z kresów górnych M_i okaże się mniejszy od ε_1 , innymi słowy — w przedziale $\langle a, b \rangle$ można znaleźć taki podprzedział, w którym wszystkie wartości funkcji $f(x)$ są mniejsze od ε_1 .

Ponieważ mamy również

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = 0 \text{ (1)},$$

(1) Rzeczywiście, w myśl 2° jest

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^b, \quad \text{a ponieważ } \int_a^{a_1} > 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} > 0, \quad \text{więc } 0 < \int_a^{b_1} < \int_a^b = 0.$$

więc analogicznie w przedziale $\langle a_1, b_1 \rangle$ możemy znaleźć podprzedział $\langle a_2, b_2 \rangle$, w którym $f(x) < \varepsilon_2$, gdzie ε_2 jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od ε_1 , itd.

Wybierając w ten sposób ciąg liczb dodatnich $\varepsilon_k \rightarrow 0$, można otrzymać taki ciąg przedziałów $\langle a_k, b_k \rangle$, z których każdy następny leży w poprzednim (i nawet — jeśli chcemy — o długościach dążących do 0), że

$$0 < f(x) < \varepsilon_k, \quad \text{jeśli} \quad a_k \leq x \leq b_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Wtedy w myśl lematu z ustępu 38 istnieje punkt c należący do wszystkich przedziałów tego ciągu; w punkcie tym powinno być

$$0 < f(c) < \varepsilon_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

co jest niemożliwe, ponieważ $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Twierdzenie zostało udowodnione.

Prostym wnioskiem z tego (i z 4°) jest twierdzenie:

6° *Jeśli dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$ i zawsze $f(x) \leq g(x)$ (lub $f(x) < g(x)$), to również*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{lub } \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx),$$

przy założeniu, że $a < b$.

Wystarczy zastosować tylko poprzednią własność do różnicy $g(x) - f(x)$. Równie łatwo otrzymujemy

7° *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ i niech $a < b$, wtedy zachodzi nierówność*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Istnienie ostatniej całki wynika z ustępu 299, I. Zastosujemy więc własność 6° do funkcji

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Równie łatwo można zresztą otrzymać szukaną nierówność wychodząc od sum

$$\left| \sum f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

i przechodząc do granicy po obu stronach tej nierówności.

8° *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdzie $a < b$, i jeśli w całym tym przedziale zachodzi nierówność*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

to

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Można teraz zastosować własność 6° do funkcji $m, f(x)$ i M , ale prościej jest bezpośrednio posłużyć się oczywistymi nierównościami

$$m \sum \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum \Delta x_i \quad (1)$$

i przejść do granicy.

(1) Ponieważ $a < b$, więc wszystkie Δx_i są również > 0 .

Udowodnionym stwierdzeniom można nadać wygodniejszą postać równości, uwalniając się ponadto do ograniczenia $a < b$.

9° TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ ($a < b$ lub $a > b$) i niech w całym przedziale zachodzi nierówność $m \leq f(x) \leq M$; wtedy*

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a),$$

gdzie $m \leq \mu \leq M$.

Dowód. Jeśli $a < b$, to w myśl własności 8° mamy

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

a stąd

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Przyjmując

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu,$$

otrzymujemy żądaną równość.

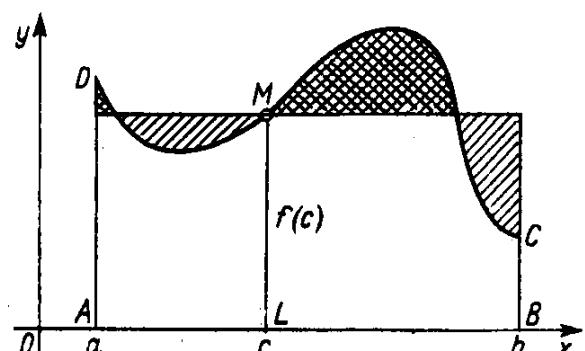
W przypadku kiedy $a > b$, przeprowadzamy takie samo rozumowanie dla całki \int_b^a , a następnie przez przestawienie granic całkowania dostajemy znów poprzedni wzór.

Udowodniona wyżej równość przyjmuje szczególnie prostą postać w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła. Rzeczywiście, jeśli przyjmiemy, że m i M oznaczają najmniejszą i największą wartość funkcji, które istnieją w myśl twierdzenia Weierstrassa [85], to funkcja ta przyjmuje w myśl twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego [82] również wartość pośrednią μ w pewnym punkcie c przedziału $\langle a, b \rangle$. Wobec tego

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c),$$

gdzie c leży w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Znaczenie geometryczne ostatniego wzoru jest proste. Niech będzie $f(x) \geq 0$. Rozpatrzmy figurę krzywoliniową $ABCD$ (rys. 5) leżącą poniżej wykresu funkcji $f(x)$. Pole tej figury krzywoliniowej (wyrażające się całką oznaczoną) jest równe polu prostokąta o tej samej podstawie i o wysokości LM , równej rzędnej w pewnym punkcie c .



Rys. 5

10° UOGÓLNONIE TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. *Zakładamy, że 1) funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$; 2) $m \leq f(x) \leq M$; 3) $g(x)$ ma ten sam znak w całym tym przedziale, tzn. $g(x) \geq 0$ lub $g(x) \leq 0$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx,$$

gdzie $m \leq \mu \leq M$ (¹).

Dowód. Niech będzie najpierw $g(x) \geq 0$ i $a < b$; wtedy mamy

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Z tej nierówności na podstawie własności 6° i 3° otrzymujemy

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Z założenia o funkcji $f(x)$ mamy w myśl 5°

$$\int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

Jeśli całka ta jest równa 0, to oczywiście z poprzednich nierówności wynika, że jest jednocześnie

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0,$$

i w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe. Jeśli natomiast całka funkcji $g(x)$ jest większa od zera, to dzieląc przez nią wszystkie członów otrzymanej poprzednio podwójnej nierówności i wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \mu,$$

otrzymujemy żądaną wynik.

Od przypadku $a < b$ łatwo jest przejść do przypadku $a > b$, podobnie jak od założenia $g(x) \geq 0$ do założenia $g(x) \leq 0$; ani przestawienie granic, ani zmiana znaku funkcji $g(x)$ nie naruszają równości.

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła, to wzór ten można napisać w postaci

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx,$$

gdzie c jest punktem z przedziału $\langle a, b \rangle$.

(¹) Istnienie całki z funkcji $f(x)g(x)$ wynika z ustępu 299, II. Można by zresztą zamiast całkowalności funkcji $f(x)$ zakładać prostą całkowalność iloczynu $f(x)g(x)$.

305. Całka oznaczona jako funkcja górnej granicy. Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ ($a > b$ lub $a < b$), to [299, III] jest całkowalna również w przedziale $\langle a, x \rangle$, gdzie x jest dowolną liczbą z przedziału $\langle a, b \rangle$. Zastępując w całce oznaczonej granicę b przez zmienną x , otrzymujemy wyrażenie

$$(1) \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ (1)},$$

które oczywiście jest funkcją zmiennej x . Funkcja ta ma następujące własności:

11° Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w $\langle a, b \rangle$, to $\Phi(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x w tym przedziale.

Dowód. Dodając do x dowolny przyrost $\Delta x = h$ (z tym jedynie zastrzeżeniem, żeby $x+h$ nie wyszło poza końce rozpatrywanego przedziału), otrzymujemy nową wartość funkcji (1)

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

[patrz 2°], a więc

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Zastosujemy do tej całki twierdzenie o wartości średniej 9°

$$(2) \quad \Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h;$$

μ jest tu liczbą zawartą między kresami dolnym i górnym m' i M' funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x, x+h \rangle$, a wobec tego również między (stałymi) jej kresami m i M w całym przedziale $\langle a, b \rangle$ (2).

Jeśli teraz założymy, że h zmierza do 0, to oczywiście mamy

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \rightarrow 0 \quad \text{lub} \quad \Phi(x+h) \rightarrow \Phi(x),$$

co dowodzi ciągłości funkcji $\Phi(x)$.

12° Jeśli funkcja $f(t)$ jest ciągła w punkcie $t = x$, to w punkcie tym funkcja $\Phi(x)$ ma pochodną równą $f(x)$, czyli

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Dowód. Rzeczywiście, z (2) wiemy, że

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu; \quad \text{gdzie} \quad m' \leq \mu \leq M'.$$

(1) Zmienną całkowania oznaczamy tu literą t w tym celu, żeby nie mylić jej z górną granicą x ; jest zrozumiałe, że zmiana oznaczenia zmiennej całkowania nie wpływa na wielkość całki.

(2) Przypominamy, że funkcja całkowalna jest ograniczona [295].

Ciągłość funkcji $f(t)$ w punkcie $t = x$ oznacza, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $\delta > 0$, że jeśli tylko $|h| < \delta$, to

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

dla wszystkich wartości zmiennej t z przedziału $\langle x, x+h \rangle$. W takim razie zachodzą nierówności

$$f(x) - \varepsilon \leq m' \leq \mu \leq M' \leq f(x) + \varepsilon,$$

a więc

$$|\mu - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Teraz jest już jasne, że

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \mu = f(x),$$

co właśnie należało udowodnić.

Doszliśmy do wniosku mającego ogromne znaczenie zasadnicze, a także ważnego dla zastosowań. Jeśli założymy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale $\langle a, b \rangle$, to jest ona całkowalna w tym przedziale [298, I] i nasze twierdzenie da się zastosować w każdym punkcie tego przedziału: *pochodna całki (1) względem górnej granicy całkowania x jest wszędzie równa wartości funkcji podcalkowej dla tej górnej granicy.*

Innymi słowy, *dla funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ zawsze istnieje funkcja pierwotna; przykładem takiej funkcji pierwotnej jest całka oznaczona (1) ze zmienną górną granicą całkowania.*

W ten sposób otrzymaliśmy wreszcie to twierdzenie, o którym wspominaliśmy jeszcze w ustępie 264.

W szczególności możemy teraz napisać w postaci całek oznaczonych funkcje F i E Legendre'a [293]

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

W myśl tego co udowodniliśmy wyżej, będą one funkcjami pierwotnymi odpowiednio funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi},$$

równymi przy tym 0 dla $\varphi = 0$.

Uwaga. Twierdzenie udowodnione w tym ustępie łatwo można przenieść na przypadek całki ze zmienną granicą dolną, ponieważ [1°]

$$\int_x^b f(t) dt = - \int_b^x f(t) dt.$$

Pochodna tej całki względem zmiennej x jest oczywiście równa $f(x)$ (jeśli tylko x jest punktem ciągłości funkcji $f(x)$).

306. Drugie twierdzenie o wartości średniej. Udowodnimy tu jeszcze jedno twierdzenie o całce z iloczynu dwóch funkcji

$$I = \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

Jest ono podawane w rozmaitych postaciach. Zaczniemy od dowodu następującego twierdzenia:

13° *Jeśli w przedziale $\langle a, b \rangle$ ($a < b$) funkcja $f(x)$ jest monotonicznie malejąca (choćby w szerszym sensie) i nieujemna, a funkcja $g(x)$ jest całkowalna, to*

$$(3) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx ,$$

gdzie ξ oznacza pewną liczbę z rozpatrywanego przedziału.

Rozbijając przedział $\langle a, b \rangle$ w dowolny sposób na podprzedziały za pomocą punktów podziału x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), przedstawiamy całkę I w postaci

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) g(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] g(x) dx = \sigma + \rho .$$

Jeśli przez L oznaczymy kres górnego funkcji $|g(x)|$, a przez ω_i (jak zwykle) oscylacje funkcji $f(x)$ w i -tym podprzedziale (x_i, x_{i+1}) o długości Δx_i , to oczywiście mamy

$$|\rho| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| |g(x)| dx \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i .$$

Wobec tego z całkowalności funkcji $f(x)$ [298, III] wynika, że $\rho \rightarrow 0$, jeśli $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$, zatem

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma .$$

Wprowadzamy teraz funkcję

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

i za pomocą tej funkcji przedstawimy sumę σ w postaci

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) [G(x_{i+1}) - G(x_i)]$$

i wreszcie, po otwarciu nawiasów i zgrupowaniu odpowiednio składników, w postaci

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i) [f(x_{i-1}) - f(x_i)] + G(b) f(x_{n-1}) .$$

Jeśli zmienna x przebiega przedział $\langle a, b \rangle$, to funkcja ciągła $G(x)$ [305, 11°] przyjmuje zarówno swoją wartość najmniejszą m , jak i wartość największą M [85]. Ponieważ wszystkie czynniki

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad (\text{dla } i = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{i} \quad f(x_{n-1})$$

— jak to widać z założeń o funkcji $f(x)$ są nieujemne, więc zastępując wartości funkcji G przez m i M otrzymujemy dwie liczby

$$mf(a) \quad \text{i} \quad Mf(a),$$

między którymi jest zawarta suma σ . Również całka I — jako granica sumy σ — leży między tymi liczbami; znaczy to, że

$$I = \mu f(a),$$

gdzie $m \leq \mu \leq M$. Z ciągłości funkcji $G(x)$ wynika dalej, że w przedziale $\langle a, b \rangle$ można znaleźć takie ξ , że $\mu = G(\xi)$ [82]. Wtedy jest

$$I = f(a) G(\xi),$$

co jest równoważne z wzorem (3).

Analogicznie, jeśli funkcja $f(x)$ jest monotonicznie rosnąca i nieujemna, to zachodzi wzór

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx,$$

gdzie $a \leq \xi \leq b$. Oba te wzory nazywają się *wzorami Bonneta*. Wreszcie

14° Jeśli zachować jedynie założenie monotoniczności funkcji $f(x)$ nie żądając, żeby była ona nieujemna, to prawdziwy jest wzór

$$(4) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx,$$

gdzie $a \leq \xi \leq b$.

Rzeczywiście, jeśli na przykład funkcja $f(x)$ jest monotonicznie malejąca, to oczywiście różnica $f(x) - f(b)$ jest dodatnia i wystarczy teraz zastosować do tej nowej funkcji wzór (3), żeby po prostych przekształceniach dojść do wzoru (4).

Udowodnione przed chwilą twierdzenie nosi nazwę *drugiego twierdzenia o wartości średniej* [porównaj 304, 10°].

Następująca prosta uwaga pozwala nadać temu twierdzeniu nieco ogólniejszą postać. Jeśli zmienić wartości funkcji $f(x)$ w punktach a i b , biorąc zamiast $f(a)$ i $f(b)$ dowolne liczby A i B spełniające jedynie warunek

$$A \geq f(a+0) \quad \text{i} \quad B \leq f(b-0), \quad \text{jeśli } f \text{ jest malejąca},$$

$$A \leq f(a+0) \quad \text{i} \quad B \geq f(b-0), \quad \text{jeśli } f \text{ jest rosnąca},$$

to oczywiście wartość całki I się nie zmieni, a ponadto zostanie zachowana monotoniczność funkcji $f(x)$. Zatem podobnie do wzoru (4) możemy napisać

$$(5) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = A \int_a^\xi g(x) dx + B \int_\xi^b g(x) dx.$$

W szczególności

$$(5^*) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a+0) \int_a^\xi g(x) dx + f(b-0) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Przez ξ oznaczamy tu, podobnie jak poprzednio, pewną liczbę z przedziału $\langle a, b \rangle$, jednakże zależy ona na ogół od wyboru liczb A i B .

§ 3. Obliczanie i przekształcanie całek oznaczonych

307. Obliczanie za pomocą sum całkowych. Podamy kilka przykładów obliczania całki oznaczonej bezpośrednio jako granicy sum całkowych — zgodnie z definicją. Wiedząc z góry, że całka funkcji ciągłej zawsze istnieje, do obliczania jej możemy tak wybierać podziały przedziału i punkty ξ_i , jak nam jest najwygodniej.

$$1) \int_a^b x^k dx \quad (a, b - \text{dowolne liczby rzeczywiste}, k - \text{liczba naturalna}).$$

Najpierw znajdziemy całkę $\int_0^a x^k dx$ ($a \neq 0$). Przedział $\langle 0, a \rangle$ podzielimy na n równych części, a w każdym podprzedziale obliczymy wartość funkcji x^k w prawym jego końcu, jeśli $a > 0$, a w lewym, jeśli $a < 0$. Wtedy suma całkowa jest równa

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} a \right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1} \cdot \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}},$$

czyli, uwzględniając przykład 14) z ustępu 33,

$$\int_0^a x^k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Stąd łatwo już otrzymuje się wzór ogólny

$$\int_a^b x^k dx = \int_0^b - \int_0^a = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

$$2) \int_a^b x^\mu dx \quad (b > a > 0, \mu - \text{dowolna liczba rzeczywista}).$$

Tym razem przedział $\langle a, b \rangle$ rozbijemy na nierówne części, a mianowicie między a i b wstawiamy $n-1$ średnich geometrycznych. Innymi słowy biorąc

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

rozpatrzmy ciąg liczb

$$a, aq, \dots, aq^i, \dots, aq^n = b.$$

Zauważmy, że gdy $n \rightarrow \infty$ iloraz $q = q_n \rightarrow 1$, natomiast różnica $aq^{i+1} - aq^i$ jest zawsze mniejsza od wielkości $b(q_n - 1) \rightarrow 0$.

Podstawiając wartości funkcji w lewych końcach przedziałów, otrzymujemy

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1}(q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i.$$

Załóżmy teraz, że $\mu \neq -1$; wtedy

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1) \frac{(b/a)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1}$$

korzystając ze znanej już granicy [77 przykład 5), (c)], otrzymujemy

$$\int_a^b x^\mu dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1}.$$

W przypadku $\mu = -1$ mamy

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)$$

i na podstawie innego znanego wyniku [77, 5) (b)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a.$$

3) $\int_a^b \sin x dx$. Dzielimy przedział (a, b) na n równych części, biorąc $h = \frac{b-a}{n}$; obliczamy wartości funkcji $\sin x$ w prawych końcach przedziałów, jeśli $a < b$ i w lewych, jeśli $a > b$. Wtedy

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^n \sin(a + ih).$$

Znajdziemy krótszy wzór na sumę, po prawej stronie tej równości. W tym celu mnożymy ją i dzielimy przez $2 \sin \frac{1}{2}h$, a następnie każdy składnik wyrażamy jako różnicę kosinusów. W ten sposób mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin(a + ih) &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}h} \sum_{i=1}^n 2 \sin(a + ih) \sin \frac{1}{2}h = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}h} \sum_{i=1}^n [\cos(a + (i - \frac{1}{2})h) - \cos(a + (i + \frac{1}{2})h)] = \\ &= \frac{\cos(a + \frac{1}{2}h) - \cos(a + (n + \frac{1}{2})h)}{2 \sin \frac{1}{2}h}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\sigma_n = \frac{\frac{1}{2}h}{\sin \frac{1}{2}h} [\cos(a + \frac{1}{2}h) - \cos(b + \frac{1}{2}h)].$$

Ponieważ $h \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, więc

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}h}{\sin \frac{1}{2}h} [\cos(a + \frac{1}{2}h) - \cos(b + \frac{1}{2}h)] = \cos a - \cos b.$$

Analogicznie, wychodząc z elementarnego wzoru

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \cos(a+ih) = \frac{\sin[a + (n+\frac{1}{2})h] - \sin(a + \frac{1}{2}h)}{2 \sin \frac{1}{2}h} \quad (1),$$

łatwo można stwierdzić, że

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a.$$

4) Jako mniej trywialny przykład rozpatrzymy całkę

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \, dx,$$

nazywaną zazwyczaj całką Poissona. Ponieważ

$$(1 - |r|)^2 < 1 - 2r \cos x + r^2,$$

przetoż przy założeniu $|r| \neq 1$ widzimy, że funkcja podcałkowa jest ciągła, a zatem całka istnieje.

Dzieląc przedział $\langle 0, \pi \rangle$ na równe części otrzymujemy sumę całkową

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2 \right) = \frac{\pi}{n} \ln \left[(1+r^2) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2 \right) \right],$$

gdzie \prod jest symbolem iloczynu. Z drugiej strony, z algebra wiadomo, że ⁽²⁾

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2 \right).$$

Korzystając z tej tożsamości dla $z = r$, przedstawimy σ_n w postaci

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \ln \left\{ \frac{r+1}{r-1} (r^{2n} - 1) \right\}.$$

Niech teraz będzie $|r| < 1$, wówczas $r^{2n} \rightarrow 0$ i

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0.$$

Jeśli jednak $|r| > 1$, to przekształcając σ_n do postaci

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \ln \frac{r+1}{r-1} \cdot \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}} + 2\pi \ln |r|,$$

znajdujemy

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \, dx = 2\pi \ln |r|.$$

Czytelnik zauważył już z pewnością, że bezpośredni sposób obliczania całki oznaczonej jako granicy sum, wymaga znacznego wysiłku w prostych przypadkach; dla tego też sposobem tym posługujemy się rzadko. Najpraktyczniejszą okazuje się metoda wyłożona w następnym ustępie.

⁽¹⁾ Wzór (2) otrzymuje się z (1) przez zastąpienie a wyrażeniem $a + \frac{1}{2}\pi$.

⁽²⁾ Uwzględniając pierwiastki stopnia $2n$ z jedności, mamy taki rozkład wyrażenia $z^{2n} - 1$ na czynniki liniowe:

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1} \left(z - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right),$$

gdzie i jest jednostką urojoną.

308. Podstawowy wzór rachunku całkowego. Widzieliśmy już w ustępie 305, że dla funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale $\langle a, b \rangle$ całka

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

okazuje się funkcją pierwotną. Jeśli $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ (na przykład znalezioną metodami podanymi w ustępach 1-4 poprzedniego rozdziału), to [263]:

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Stałą C znajdujemy łatwo podstawiając w tej równości $x = a$. Ponieważ $\Phi(a) = 0$, więc:

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \quad \text{skąd} \quad C = -F(a).$$

A zatem

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Jeśli oddzielimy czynniki $z+1$ i $z-1$ (odpowiadające wartościom $k = -n$ i $k = 0$) i zbierzemy razem czynniki sprzężone, to otrzymamy, że $z^{2n}-1$ jest równe

$$\begin{aligned} (z^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left(z - \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) &= \\ &= (z^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2 \right). \end{aligned}$$

W szczególności dla $x = b$ otrzymujemy

$$(A) \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jest to właśnie *podstawowy wzór rachunku całkowego* ⁽¹⁾.

Zatem wartość całki oznaczonej jest równa różnicy dwóch wartości — w punktach $x = b$ i $x = a$ — dowolnej funkcji pierwotnej.

Jeśli do naszej całki zastosujemy twierdzenie o wartości średniej [304, 9°], to pamiętając, że $f(x) = F'(x)$, otrzymamy

$$F(b) - F(a) = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a) \quad (a \leq c \leq b);$$

czytelnik poznaje w tym wzór Lagrange'a [112] dla funkcji $F(x)$. W ten sposób — za pomocą wzoru podstawowego (A) — wyraziliśmy związek między twierdzeniami o wartości średniej w rachunku różniczkowym i całkowym.

Wzór (A) jest efektywnym i prostym środkiem do obliczania całki oznaczonej funkcji ciągłej $f(x)$, bo przecież dla wielu prostych klas takich funkcji umiemy wyrazić funkcję pierwotną przez funkcje elementarne w postaci skończonej. W tych przypadkach całkę oznaczoną oblicza się bezpośrednio ze wzoru podstawowego. Zauważymy tylko, że róż-

⁽¹⁾ Wzór ten nazywa się również *wzorem Newtona-Leibniza*. Czytelnik widzi, że rozważania te są całkowicie analogiczne do tych, którymi posłużyliśmy się w ustępie 264 do obliczenia funkcji $|P(x)|$ i pola $|P|$. Sam wzór (A) łatwo można otrzymać zestawiając wyniki ustępów 264 i 294.

nicę po lewej stronie wzoru (A) oznaczamy zazwyczaj $F(x)|_a^b$ („podwójne podstawienie od a do b ”) i wzór ten piszemy w postaci

$$(A^*) \quad \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Tak na przykład znajdujemy od razu:

$$1) \int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$$

$$2) \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a > 0, b > 0),$$

$$3) \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

Wyniki te nie bez trudu otrzymaliśmy już w poprzednim ustępie [porównaj przykłady 1), 2), 3)] (¹).

309. Przykłady. Podamy dalsze przykłady zastosowania wzoru (A):

$$4) (a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad (m \neq n).$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \quad [\text{patrz 267, 17, 18)].$$

Analogicznie

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$(d) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \text{ lub } \pi, \text{ zależnie od tego, czy } n \neq m, \text{ czy } n = m.$$

5) Znaleźć wartość całek (m, n – liczby naturalne):

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx, \quad (b) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx.$$

Wskazówka. (a) Ze wzoru (2), podstawiając $a = 0, h = 2x$ i $n = m-1$, można otrzymać, że

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2 \sin x}.$$

(¹) Całki z przykładu 4) z poprzedniego ustępu nie można jednak tak prosto obliczyć, gdyż odpowiednia całka nieoznaczona nie wyraża się przez funkcje elementarne w postaci skończonej.

Ponieważ poszczególne składniki łatwo jest scałkować według wzoru (A), mamy stąd od razu

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Ze wzoru (1) znajdujemy, podstawiając $a = -x$, $h = 2m$

$$\sum_{m=1}^n \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Stąd na podstawie poprzedniego przykładu, otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}.$$

6) Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2} \sqrt{1-2\beta x+\beta^2}},$$

gdzie $0 < \alpha, \beta < 1$.

Jeśli we wzorze [283, (6*)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| ax + \frac{1}{2} b + \sqrt{a} \sqrt{ax^2+bx+c} \right| + C$$

dokonamy podstawienia

$$ax^2+bx+c = (1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2),$$

to różniczkując stronami otrzymujemy

$$ax + \frac{b}{2} = -\alpha(1-2\beta x+\beta^2) - \beta(1-2\alpha x+\alpha^2).$$

Stąd łatwo już można wywnioskować, że dla $x = 1$ wyrażenie stojące pod znakiem logarytmu przyjmuje wartość

$$\begin{aligned} -\alpha(1-\beta)^2 - \beta(1-\alpha)^2 + 2\sqrt{\alpha\beta}(1-\alpha)(1-\beta) &= -[\sqrt{\alpha}(1-\beta) - \sqrt{\beta}(1-\alpha)]^2 = \\ &= -(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2(1 + \sqrt{\alpha\beta})^2, \end{aligned}$$

a dla $x = -1$ — wartość

$$-(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2(1 - \sqrt{\alpha\beta})^2.$$

W ten sposób dla szukanej całki otrzymujemy ostatecznie proste wyrażenie

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

zależne tylko od iloczynu $\alpha\beta$ (1).

Zauważmy, że przy wyprowadzeniu wzoru podstawowego w rzeczywistości nie jest potrzebne założenie, że funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$. Jak wy-

(1) Rozumowanie nasze jest poprawne jedynie dla $\alpha \neq \beta$, jednakże widać, że wynik jest słuszny również dla $\alpha = \beta$.

nika z wniosku w ustępie 131, wystarczy założyć to tylko dla przedziału otwartego (a, b) , jeśli tylko funkcja $F(x)$ jest ciągła w końcach tego przedziału.

Dlatego też mamy na przykład prawo napisać [268]

$$7) \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_{-a}^a = \frac{\pi a^2}{2},$$

choć dla $x = \pm a$ sprawa istnienia pochodnej znalezionej funkcji pierwotnej wymagałaby jeszcze zbadania.

Pewne trudności napotykamy przy obliczaniu całki:

$$8) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx \quad (0 < r < 1),$$

ponieważ obliczona w ustępie 288, 13) funkcja pierwotna

$$F(x) = 2 \operatorname{arc tg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

nie ma sensu dla $x = \pm \pi$. Jednakże istnieją oczywiście granice

$$\lim_{x \rightarrow -\pi+0} F(x) = -\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} F(x) = \pi,$$

i jeśli przyjmiemy, jak zwykle, że wartości funkcji $F(-\pi)$ i $F(\pi)$ są odpowiednio równe tym granicom, to funkcja $F(x)$ jest nie tylko określona, ale nawet ciągła w końcach przedziału. Dlatego też mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx = F(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

9) W analogiczny sposób obliczamy całkę

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \cos x \sin x + C \sin^2 x} \quad (AC - B^2 > 0).$$

Znamy już [288, 10)] funkcję pierwotną

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arc tg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}}$$

funkcji podcałkowej w przedziale otwartym $(-\pi/2, \pi/2)$. A więc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \cos x \sin x + C \sin^2 x} = F(x) \Big|_{-\pi/2+0}^{\pi/2-0} = \frac{\pi}{\sqrt{AD - B^2}},$$

przy tym znaki $-\frac{1}{2}\pi + 0, \frac{1}{2}\pi - 0$ wskazują na konieczność wzięcia odpowiednich wartości granicznych funkcji $F(x)$.

10) Jeśli przy obliczaniu całki

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$$

wyjdziemy z formalnie obliczonej funkcji pierwotnej

$$-\frac{1}{3} \operatorname{arc tg} \frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

i podstawimy tu $x = 0$ i $x = 1$, to otrzymujemy dla całki paradoksalną wartość 0 (przecież całka funkcji dodatniej nie może być równa zeru!).

Błąd tkwi w tym, że podana funkcja pierwotna ma skok dla $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} = x_0$. Jeśli obliczymy osobno całki od 0 do x_0 i od x_0 do 1, to otrzymamy prawidłowy wynik

$$\int_0^1 = \left|_{x_0=0}^{x_0=0} + \left|_{x_0+0}^1 = \frac{\pi}{3}\right. \right.$$

11) Za pomocą funkcji pierwotnych łatwo można obliczyć całki

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc tg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Z uwagi na to, że całki te są granicami odpowiednich sum całkowych, możemy otrzymać na przykład takie wzory graniczne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2} \right) n = \frac{\pi}{4}.$$

310. Inne wyprowadzenie wzoru podstawowego. Udowodnimy teraz wzór podstawowy (A) przy ogólniejszych założeniach. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ i niech funkcja $F(x)$, ciągła w tym przedziale, ma pochodną równą $f(x)$:

$$(3) \quad F'(x) = f(x)$$

w całym przedziale otwartym (a, b) , albo nawet tylko wszędzie z wyjątkiem skończonej liczby punktów.

Rozbijmy przedział $\langle a, b \rangle$ na części za pomocą punktów

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

troszcząc się tylko o to, by wśród tych punktów znalazły się wszystkie te punkty, w których nie jest spełniony warunek (3), jeśli takie punkty istnieją. Mamy oczywiście

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

Do każdej różnicy stojącej pod znakiem sumy zastosujemy wzór na przyrost skończony — warunki stosowalności tego wzoru są tu spełnione. Wtedy otrzymujemy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

gdzie ξ_i jest pewną określona (choć nieznaną nam) wartością zmiennej x , zawartą między x_i i x_{i+1} . Ponieważ w takich punktach ξ_i mamy $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$, więc możemy napisać

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Po prawej stronie otrzymaliśmy sumę całkową σ dla funkcji $f(x)$. Założyliśmy jednak, że suma σ ma określoną granicę przy $\lambda \rightarrow 0$, niezależną od wyboru punktów ξ_i . Zatem w szczególności nasza suma, zachowująca (przy wskazanym wyborze tych liczb) stałą wartość, także jest zbieżna do całki, stąd zaś wynika, że

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

W poprzednim ustępie obliczaliśmy za pomocą wzoru podstawowego całki oznaczone. Jednakże wzór ten można stosować i w przeciwnym kierunku. Zastępując we wzorze podstawowym b przez x , a $f(x)$ przez $F'(x)$ możemy napisać go w postaci

$$F(x) = F(a) + \int_a^b F'(t) dt.$$

W ten sposób za pomocą procesu granicznego (gdyż całka oznaczona jest przecież granicą) można „zrekonstruować” funkcję pierwotną $F(x)$, jeśli tylko dana jest jej pochodna $F'(x)$. Wynika stąd zresztą, że pochodna jest nie tylko ograniczona, lecz także całkowalna według definicji Riemanna, co nie zawsze zachodzi.

311. Wzory redukcyjne. Widzieliśmy, że w sprzyjających warunkach wzór podstawowy rachunku całkowego od razu daje wartość całki oznaczonej. Z drugiej strony za pomocą tego wzoru różne wzory z teorii całek nieoznaczonych można przekształcić w analogiczne wzory dla całek oznaczonych, sprowadzając obliczanie jednych całek do innych (na ogół prostszych).

Mamy na myśli przede wszystkim wzór na całkowanie przez części

$$\int u dv = uv - \int v du$$

i jego uogólnienie [270, (3) i (5)], a także inne tego rodzaju wzory [271, (6); 280; 287], częściowo na nim oparte. Ogólna postać wzorów, jakie będziemy rozpatrywać, jest następująca:

$$(4) \quad \int f(x) dx = \varphi(x) - \int g(x) dx.$$

Jeśli obszarem, w którym można stosować ostatni wzór, jest przedział (a, b) , to można

napisać analogiczny wzór dla całek oznaczonych

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \varphi(x)|_a^b - \int_a^b g(x) dx.$$

Zakładamy przy tym zawsze, że funkcje f i g są ciągłe.

Aby udowodnić wzór (5), oznaczamy ostatnią całkę we wzorze (4) przez $\Phi(x)$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = [\varphi(x) - \Phi(x)]|_a^b = \varphi(x)|_a^b - \Phi(x)|_a^b.$$

Ponieważ jednocześnie jest

$$\int_a^b g(x) dx = \Phi(x)|_a^b,$$

więc otrzymujemy w ten sposób szukany wzór.

W szczególności wzór na całkowanie przez części przyjmie teraz postać

$$(6) \quad \int u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

a uogólniony wzór na całkowanie przez części ma postać

$$(7) \quad \int_a^b u v^{(n+1)} dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \dots + (-1)^n u^{(n)} v]|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)} v dx;$$

zakładamy przy tym, jak poprzednio, że funkcje u i v oraz wszystkie występujące tu ich pochodne są ciągłe.

Wzór (5), ustalający związek między liczbami, jest w swej zasadzie prostszy od wzoru (4), który jest warunkiem dla funkcji, jest on szczególnie wygodny w przypadku, kiedy podwójne podstawienie daje zero.

312. Przykłady

1) Obliczyć całki

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx, \quad J'_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx$$

(gdzie m jest liczbą naturalną).

Całkując przez części znajdujemy

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

Wykonując podstawienie w pierwszym składniku ostatniej sumy otrzymujemy zero. Zastępując następnie $\cos^2 x$ przez $1 - \sin^2 x$ otrzymujemy

$$J_m = (m-1) J_{m-2} - (m-1) J_m,$$

a stąd wynika już następujący wzór redukcyjny:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

z którego pomocą całkę J_m sprowadzamy kolejno do J_0 lub do J_1 . Jeśli mianowicie $m = 2n$, to mamy

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

jeśli zaś $m = 2n+1$, to

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1}.$$

Dokładnie ten sam wynik otrzymuje się również dla całki J_m .

W celu krótszego napisania znalezionych wyrażeń posłużymy się symbolem $m!!$ ⁽¹⁾. Wtedy możemy napisać

$$(8) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{dla } m \text{ parzystego,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{dla } m \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

2) Udowodnić wzory

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x \, dx = 0,$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2)x \, dx = \frac{1}{m+1},$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x \, dx = -\frac{\sin \frac{1}{2}m\pi}{m+1},$$

$$(d) \int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2)x \, dx = \frac{\cos \frac{1}{2}m\pi}{m+1},$$

gdzie m jest dowolną liczbą naturalną.

Rozpatrzmy całkę

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x \, dx,$$

która dwukrotnie całkujemy przez części.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x \, dx &= \frac{1}{m+2} [\cos^{m+2} x \sin(m+2)x - \cos^{m+1} x \sin x \cos(m+2)x] \Big|_0^{\pi/2} + \\ &\quad + \frac{1}{m+2} \int_0^{\pi/2} [-(m+1) \cos^m x \sin^2 x + \cos^{m+2} x] \cos(m+2)x \, dx. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik ostatniej sumy równa się 0. Zamieniając pod znakiem całki $\sin^2 x$ na $1 - \cos^2 x$, otrzymujemy równość

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x \, dx = -\frac{m+1}{m+2} \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x \, dx,$$

skąd wynika już równość (a).

⁽¹⁾ Przypominamy, że $m!!$ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych niewiększych od m i parzystych, jeśli m jest parzyste, a nieparzystych, jeśli m jest nieparzyste.

W analogiczny sposób sprawdza się pozostałe wzory.

3) Znaleźć całki

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx, \quad L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx.$$

Całkując przez części mamy

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx.$$

Jeśli do obu stron ostatniej równości dodamy K_n , a następnie przekształcimy odpowiednio wyrażenie trygonometryczne pod całką z prawej strony, to łatwo otrzymujemy

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1}$$

lub

$$K_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + K_{n-1} \right).$$

Z tego wzoru redukcyjnego łatwo już znajdujemy

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} \right).$$

Analogicznie

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4) Znaleźć całkę

$$H_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x dx,$$

gdzie $k > 0$, a m – liczba naturalna.

Całkowanie przez części [porównaj 271, 5)]

$$\int_0^1 x^k \ln^m x dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x \Big|_{x=0}^1 - \frac{m}{k+1} \int_0^1 x^k \ln^{m-1} x dx$$

prowadzi do wzoru redukcyjnego

$$H_{k,m} = - \frac{m}{k+1} H_{k,m-1},$$

skąd otrzymuje się

$$H_{k,m} = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

Osobliwością tego przykładu jest to, że w punkcie $x = 0$ zarówno wartość funkcji podcałkowej, jak i wartość otrzymanej przez całkowanie funkcji, w której dokonujemy podstawienia, określona jest jako granica dla $x \rightarrow +0$.

5) W myśl wzoru (III) z ustępu 280 (przyjmując, że p i q są liczbami naturalnymi) mamy

$$\int (1-x)^p x^q dx = \frac{(1-x)^p x^{q+1}}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \int (1-x)^{p-1} x^q dx,$$

co przy przejściu do całek oznaczonych w przedziale od 0 do 1 daje

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p}{p+q+1} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q dx.$$

Stosując kilkakrotnie ten wzór otrzymujemy

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p(p-1) \dots 1}{(p+q+1)(p+q) \dots (q+2)} \int_0^1 x^q dx$$

i ostatecznie

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

6) Jeżeli we wzorach (IV) z ustępu 287 przejść przy naturalnych μ i ν do całek oznaczonych, to wykorzystując wynik przykładu 1) można otrzymać wzór ogólniejszy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\nu x \cos^\mu x dx = \begin{cases} \frac{(\nu-1)!! (\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{dla } \mu \text{ i } \nu \text{ parzystych,} \\ \frac{(\nu-1)!! (\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} & \text{we wszystkich pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

313. Wzór na zamianę zmiennej w całce oznaczonej. Ten sam wzór podstawowy (A) posłuży nam do wprowadzenia reguły zamiany zmiennej pod znakiem całki oznaczonej.

Przypuśćmy, że należy obliczyć całkę $\int_a^b f(x) dx$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$. Przyjmijmy $x = \varphi(t)$, przy czym funkcja $\varphi(t)$ spełnia następujące warunki:

1) $\varphi(t)$ jest określona w pewnym przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ a jej wartości nie wykraczają poza przedział $\langle a, b \rangle$ (¹), gdy t zmienia się od α do β ;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ funkcja $\varphi(t)$ ma ciągłą pochodną $\varphi'(t)$.

Przy tych założeniach prawdziwy jest wzór

$$(9) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Dzięki założeniu, że funkcje podcałkowe są ciągłe, istnieją nie tylko te całki oznaczone, ale również odpowiednie całki nieoznaczone, a więc w obu przypadkach możemy posłużyć się podstawowym wzorem całkowym. Jeśli dalej $F(x)$ oznacza jedną z funkcji pierwotnych pierwszej różniczki $f(x) dx$, to funkcja $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ jest, jak wiemy, funkcją pierwotną drugiej różniczki $f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ [porównaj 268]. Dlatego też mamy jednocześnie

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

oraz

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) + F(\varphi(\alpha)) = F(b) + F(a),$$

a stąd wynika już dowodzona równość.

(¹) Może się zdarzyć, że funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $\langle A, B \rangle$ większym niż $\langle a, b \rangle$; wtedy wystarczy zażądać, żeby wartości funkcji $\varphi(t)$ nie wykraczały poza przedział $\langle A, B \rangle$.

Uwaga. Zwróćmy uwagę na ważną właściwość wzoru (9). Przy obliczaniu całki nieoznaczonej za pomocą zamiany zmiennej, szukaną funkcję otrzymaliśmy jako funkcję zmiennej t i musieliśmy następnie powracać do pierwotnej zmiennej x . Natomiast przy obliczaniu całki oznaczonej za pomocą zamiany zmiennej nie potrzeba powracać do starej zmiennej. Jeśli bowiem obliczymy drugą z całek (9), która jest oczywiście liczbą, to tym samym znajdziemy i pierwszą.

314. Przykłady

1) Całkę $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ obliczymy za pomocą podstawienia $x = a \sin t$; rolę liczb α i β odgrywają tu 0 i $\frac{1}{2}\pi$. Mamy

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

[porównaj 268].

2) Niech n będzie liczbą naturalną. Za pomocą tego samego podstawienia otrzymujemy

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = a^{2n+1} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

[patrz (8)], i analogicznie

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{(2n-1)/2} dx = a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

3) Wyznaczyć całkę

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx.$$

Podstawienie: $x = a \sec t = \frac{a}{\cos t}$; granicom a i $2a$ zmiennej x odpowiadają granice 0 i $\frac{1}{3}\pi$ zmiennej t . Znajdujemy

$$\frac{1}{a^2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

4) Rozpatrzmy całkę

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Podstawienie $x = \pi - t$ (gdzie t zmienia się od π do 0) prowadzi do równości

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt,$$

czyli

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt.$$

Przenosząc ostatnią całkę (w której zastępujemy literę t z powrotem przez x) na lewą stronę tej równości i dzieląc ją stronami przez 2, otrzymujemy

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arc tg}(\cos t) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

Porównaj dalej 11), gdzie przykład ten zostanie uogólniony.

5) obliczyć całkę $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Podstawienie $x = \operatorname{tg} \varphi$ (gdzie φ zmienia się od 0 do $\frac{1}{4}\pi$) prowadzi do całki

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} \varphi) d\varphi.$$

Ale

$$1+\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi)}{\cos \varphi},$$

a więc

$$J = \frac{1}{8}\pi \ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln \sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln \cos \varphi d\varphi.$$

Ponieważ obie ostatnie całki są równe (drugą całkę można sprowadzić do poprzedzającej ją przez podstawienie $\varphi = \frac{1}{4}\pi - \psi$, przy czym ψ zmienia się od $\frac{1}{4}\pi$ do 0), więc ostatecznie

$$J = \frac{1}{8}\pi \ln 2.$$

Zauważmy, że taką samą wartość ma całka

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{1+x} dx,$$

o czym łatwo można się przekonać, całkując ją przez części.

6) Udowodnić, że

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt.$$

Wskazówka. Wykonać podstawienie $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$.

7) Udowodnić równość

$$\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi)^n d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1} \cos \theta)^{n+1}},$$

przy założeniu, że n jest liczbą naturalną i że $x > 1$.

Można to osiągnąć drogą zamiany zmiennych według wzoru

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta) = 1.$$

Mamy stąd bowiem

$$\cos \varphi = \frac{-\sqrt{x^2 - 1} + \cos \theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta};$$

wartość bezwzględna wyrażenia po prawej stronie tej równości nie przewyższa jedynki i każdej wartości zmiennej θ z przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ odpowiada jednoznacznie pewna wartość zmiennej φ z tego samego przedziału. Dla $\theta = 0$ lub π również i $\varphi = 0$ lub π . Mamy dalej

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{\sin \theta d\theta}{(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^2},$$

a ponieważ

$$\sin \varphi = \frac{\sin \theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta},$$

więc

$$d\varphi = \frac{d\theta}{x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta}$$

i ostatecznie

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi = \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^{n+1}},$$

a stąd wynika żądana równość.

Zauważmy, że obie całki (z dokładnością do czynnika π) wyrażają n -ty wielomian Legendre'a $P_n(x)$ [(118, 6)].

8) Dla dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale $\langle 0, a \rangle$ ($a > 0$) jest zawsze

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-t) dt$$

(podstawienie $x = a-t$, $a > t > 0$). W szczególności, ponieważ $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$, więc dla dowolnej funkcji ciągłej $F(u)$ jest

$$\int_0^{\pi/2} F(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} F(\cos x) dx.$$

9) Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła w symetrycznym względem zera przedziale $\langle -a, a \rangle$ ($a > 0$). W przypadku funkcji parzystej [99, 25] mamy wtedy

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

a w przypadku nieparzystej

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

W obu przypadkach całkę \int_{-a}^a piszemy w postaci sumy dwóch całek $\int_{-a}^0 + \int_0^a$ i do pierwszej z nich stosujemy podstawienie $x = -t$.

10) Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją ciągłą i okresową o okresie równym ω ; tzn. że $f(x+\omega) = f(x)$ dla dowolnego x . Wtedy w każdym przedziale o długości równej okresowi ω całka z tej funkcji ma zawsze tę samą wartość, czyli

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(x) dx = \int_0^\omega f(x) dx.$$

Dla dowodu rozbijamy pierwszą całkę na sumę trzech całek: $\int_{-\omega}^{\omega} = \int_{-\omega}^0 + \int_0^\omega + \int_\omega^{\omega}$ i w ostatniej z nich dokonujemy podstawienia $x = t + \omega$; w ten sposób upewniamy się, że całki \int_0^ω i \int_ω^{ω} różnią się tylko znakiem.

11) Udowodnić, że

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

gdzie $f(u)$ jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Wskazówka. Wykonać podstawienie $x = \pi - t$.

12) Udowodnić, że

$$\int_0^{2\pi} \varphi(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^\pi \varphi(\sqrt{a^2+b^2} \cos \lambda) d\lambda,$$

gdzie $\varphi(u)$ jest dowolną funkcją ciągłą dla $|u| < \sqrt{a^2+b^2}$.

Określając kąt α za pomocą wzorów

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

mamy

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2+b^2} \cos(\theta - \alpha).$$

W myśl (10) możemy napisać

$$\int_0^{2\pi} \varphi(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi[\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(\theta - \alpha)] d\theta$$

lub (jeśli przyjąć oznaczenie $\theta - \alpha = \lambda$ i posłużyć się całką 9))

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sqrt{a^2+b^2} \cos \lambda) d\lambda = 2 \int_0^\pi \varphi(\sqrt{a^2+b^2} \cos \lambda) d\lambda.$$

13) Udowodnić, że

$$\int_0^{\pi/2} g(\sin 2u) \cos u du = \int_0^{\pi/2} g(\cos^2 v) \cos v dv,$$

gdzie $g(z)$ jest dowolną funkcją zmiennej z ciągłą w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Przedstawiamy pierwszą całkę w postaci sumy dwóch całek $\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}$, a następnie podstawiением $u = \frac{1}{2}\pi - u'$ sprowadzamy drugą z tych całek do przedziału $\langle 0, \frac{1}{4}\pi \rangle$. Otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/4} g(\sin 2u) (\cos u + \sin u) du.$$

W ostatniej całce dokonujemy zamiany zmiennych, wychodząc z zależności

$$\sin 2u = \cos^2 v;$$

jeśli u rośnie od 0 do $\frac{1}{4}\pi$, to v maleje od $\frac{1}{2}\pi$ do 0. Różniczkując tę równość stronami, otrzymujemy

$$\cos 2u du = -\sin v \cos v dv;$$

a biorąc pod uwagę, że

$$\cos 2u = \sqrt{1-\sin^2 2u} = \sqrt{1-\cos^4 v} = \sin v \sqrt{1+\cos^2 v}$$

oraz

$$1+\cos^2 v = 1+2 \sin u \cos u = (\sin u + \cos u)^2,$$

znajdujemy wreszcie

$$(\sin u + \cos u) du = -\cos v dv.$$

Teraz już łatwo jest otrzymać żądaną wynik.

14) Na zakończenie powróćmy jeszcze do całki Poissona

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1-2r \cos x + r^2) dx$$

[porównaj 307, 4)]. Wiemy już, że dla $|r| \neq 1$ funkcja podcałkowa jest ciągła i całka istnieje. Obliczymy tę całkę jeszcze raz za pomocą pewnego sztucznego chwytu, w którym istotną rolę gra zamiana zmiennej.

Zauważmy przede wszystkim, że z oczywistych nierówności

$$(1-|r|)^2 < 1-2r \cos x + r^2 < (1+|r|)^2,$$

poprzez logarytmowanie i całkowanie w przedziale od 0 do π , otrzymujemy (przy $|r| < 1$)

$$2\pi \ln(1-|r|) < I(r) < 2\pi \ln(1+|r|).$$

Na podstawie tego jest już jasne, że gdy $r \rightarrow 0$, wówczas również $I(r) \rightarrow 0$.

Rozpatrzmy tę całkę

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1+2r \cos x + r^2) dx.$$

Jeśli w całce tej podstawimy $x = \pi - t$, przy tym t zmienia się od π do 0, to okaże się, że

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1+2r \cos(\pi-t) + r^2) d(\pi-t) = \int_0^\pi \ln(1-2r \cos t + r^2) dt = I(r).$$

Wobec tego

$$2I(r) = I(r) + I(-r) = \int_0^\pi \ln[(1-2r \cos x + r^2)(1+2r \cos x + r^2)] dx,$$

czyli

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln(1-2r^2 \cos 2x + r^4) dx.$$

Podstawiając $x = \frac{1}{2}t$ (gdzie t zmienia się od 0 do 2π), otrzymujemy

$$2I(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1-2r^2 \cos t + r^4) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi + \frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi} .$$

Ostatnią z otrzymanych całek sprowadzamy przez podstawienie $t = 2\pi - u$ (gdzie u zmienia się od π do 0) do pierwszej z nich; w ten sposób otrzymujemy

$$2I(r) = I(r^2),$$

a stąd

$$I(r) = \frac{1}{2} I(r^2).$$

Zamieniając w tej równości r na r^2 , a następnie powtarzając tę operację odpowiednią ilość razy, łatwo otrzymuje się wzór ogólny

$$I(r) = \frac{1}{2^n} I(r^{2^n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Niech teraz będzie $|r| < 1$, wobec tego $r^{2^n} \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$; ponieważ wówczas (zgodnie z uwagą na początku) $I(r^{2^n}) \rightarrow 0$, musi przeto być tożsamościowo

$$I(r) = 0 \quad \text{dla } |r| < 1.$$

Łatwo jest już teraz obliczyć tę całkę również dla $|r| < 1$. Rzeczywiście z równości

$$1 - 2r \cos x + r^2 = r^2 \left(1 - 2 \frac{1}{r} \cos x + \frac{1}{r^2} \right),$$

mamy

$$\ln(1 - 2r \cos x + r^2) = 2 \ln|r| + \ln \left(1 - 2 \frac{1}{r} \cos x + \frac{1}{r^2} \right),$$

a stąd przez całkowanie stronami w przedziale od 0 do π otrzymujemy

$$I(r) = 2\pi \ln|r| + I(1/r).$$

Z poprzedniego wiemy jednak, że $I(1/r) = 0$, więc dla $|r| > 1$ mamy

$$I(r) = 2\pi \ln|r|.$$

Ten sam wynik otrzymaliśmy w ustępie 307.

315. Wzór Gaussa. Przekształcenie Landena. Jako jeszcze jeden przykład zamiany zmiennych rozpatrzymy godny uwagi wzór na przekształcenie całki

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (a > b > 0),$$

odkryty przez Gaussa.

Podstawmy tu

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \theta}{(a+b)+(a-b) \sin^2 \theta};$$

łatwo spostrzec, że jeśli θ zmienia się od 0 do $\pi/2$, to φ zmienia się w tych samych granicach. Różniczkujemy ostatnią równość

$$\cos \varphi d\varphi = 2a \frac{(a+b)-(a-b) \sin^2 \theta}{[(a+b)+(a-b) \sin^2 \theta]^2} \cos \theta d\theta.$$

Mamy jednak

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}}{(a+b)+(a-b) \sin^2 \theta} \cos \theta,$$

a zatem

$$d\varphi = 2a \frac{(a+b)-(a-b) \sin^2 \theta}{(a+b)+(a-b) \sin^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}}.$$

Z drugiej strony,

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \frac{(a+b)-(a-b) \sin^2 \theta}{(a+b)+(a-b) \sin^2 \theta}$$

i ostatecznie

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}.$$

Jeśli oznamy $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$, to otrzymamy

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

To jest właśnie wzór Gaussa.

Stosując to przekształcenie odpowiednią liczbę razy, otrzymujemy

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie ciągi (a_n) i (b_n) są określone wzorami redukcyjnymi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

Wiemy już [35, 4], że ciągi te są zbieżne do pewnej wspólnej granicy $\mu = \mu(a, b)$, którą nazwaliśmy „średnią arytmetyczno-geometryczną” liczb a i b . Z łatwych do wyprowadzenia nierówności

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n},$$

znajdujemy teraz przez przejście do granicy, że

$$G = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}, \quad \text{skąd} \quad \mu(a, b) = \frac{\pi}{2G}.$$

W ten sposób każda z liczb G i μ wyraża się prosto przez drugą. Przypuśćmy na przykład, że mamy obliczyć całkę

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}.$$

Mamy tu $a = \sqrt{2}$ i $b = 1$; ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są szybko zbieżne do μ : już a_4 i b_4 są jednocześnie równe w przybliżeniu 1,198140 i wobec tego można przyjąć, że μ jest też równe tej liczbie. Otrzymujemy więc w przybliżeniu

$$G = \frac{\pi}{2\mu} = 1,3110288.$$

Na odwrot, całka G sprowadza się do całki eliptycznej zupełnej⁽¹⁾ pierwszego rodzaju

$$G = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} K\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right),$$

której łatwo można znaleźć z tablic; a stąd znajduje się μ .

Rozpatrzmy teraz całkę eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

dla dowolnej wartości k otrzymujemy tę całkę z G , gdy

$$a = 1 \quad \text{i} \quad b = \sqrt{1 - k^2} = k'.$$

Aby zastosować do tej całki wzór Gaussa, obliczamy przede wszystkim a_1 , b_1 i k_1 :

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{2} = \frac{1 + k'}{2}, \quad b_1 = \sqrt{k'},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad \frac{1}{a_1} = 1 + k_1,$$

zatem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = (1 + k_1) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta}},$$

czyli

$$K(k) = (1 + k_1) K(k_1).$$

Wzór ten jest równoznaczny ze wzorem Gaussa, był jednak w rzeczywistości znaleziony wcześniej i jest szczególnym przypadkiem tzw. przekształcenia Landena.

Iterując ten wzór, otrzymujemy

$$K(k) = (1 + k_1)(1 + k_2) \dots (1 + k_n) K(k_n),$$

przy tym ciąg $\{k_n\}$ jest określony indukcyjnie wzorem

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}},$$

tak więc

$$0 < k_n < 1 \quad \text{i} \quad k_n < k_{n-1}^2.$$

Nierówności te zapewniają szybką zbieżność ciągu $\{k_n\}$ do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Jednocześnie jest

$$0 < K(k_n) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{\sqrt{1 - k_n^2}},$$

(1) Całkami zupełnymi nazywają się całki $K(k, \varphi)$ i $E(k, \varphi)$ Legendre'a [293, 305] dla $\varphi = \frac{1}{2}\pi$: w tym przypadku w ich oznaczeniach opuszcza się zazwyczaj drugi argument, pisząc $K(k)$, $E(k)$. Dla tych całek są ułożone specjalne tablice.

a stąd

$$K(k_n) \rightarrow \frac{1}{2}\pi, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty,$$

wreszcie

$$K(k) = \frac{1}{2}\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n).$$

Na ostatniej równości opiera się metoda przybliżonego obliczania całki $K(k)$, w której przyjmuje się po prostu dla dostatecznie dużego n , że

$$K(k) \approx \frac{1}{2}\pi (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n).$$

316. Inne wyprowadzenie wzoru na zamianę zmiennej. Podamy teraz inny dowód wzoru (9) przy zmienionych założeniach.

Przede wszystkim (i to jest najważniejsze) nie będziemy zakładali, że funkcja $f(x)$ jest ciągła, ale tylko, że jest całkowalna. Natomiast o funkcji $\varphi(t)$ założymy, że jeśli t zmienia się od α do β , to funkcja ta zmienia się monotonicznie od wartości $a = \varphi(\alpha)$ do wartości $b = \varphi(\beta)$.

Dowód przeprowadzimy w przypadku $a < b$ i $\alpha < \beta$, a więc gdy funkcja $\varphi(t)$ jest monotonicznie rosnąca (w pozostałych przypadkach dowód jest analogiczny).

Rozbijamy przedział $\langle\alpha, \beta\rangle$ w dowolny sposób na podprzedziały za pomocą punktów

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = \beta;$$

jeśli wprowadzimy oznaczenie $x_i = \varphi(t_{i+1})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), to jednocześnie będzie

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

Jeśli największa z długości $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ podprzedziałów (oznaczamy ją przez λ) dąży do zera, to z (jednostajnej) ciągłości funkcji $x = \varphi(t)$ wynika, że także dąży do zera największa z długości $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$ [patrz 87].

Z każdego przedziału (t_i, t_{i+1}) wybieramy teraz dowolną liczbę τ_i i znajdujemy sumę całkową dla drugiej z całek (9)

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i.$$

Niech $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, a więc $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$. Z wzoru na przyrost skończony dla funkcji $\varphi(t)$ w przedziale (t_i, t_{i+1}) mamy

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i,$$

przy czym $t_i < \tau_i^* < t_{i+1}$. Liczba τ_i^* (nieznana) jest na ogół różna od przypadkowo wybranej wartości τ_i . Sumie całkowej $\sigma^* = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$, odpowiadającej pierwszej z całek (9), możemy teraz nadać postać

$$\sigma^* = \sum_i f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i.$$

Granicą tej sumy przy $\lambda \rightarrow 0$ jest oczywiście całka $\int_a^b f(x) dx$. Aby udowodnić, że całka ta jest również granicą sumy σ , wystarczy wykazać, że różnica $\sigma - \sigma^*$ dąży do zera.

W tym celu zauważmy, że z (jednostajnej) ciągłości funkcji $\varphi'(t)$ wynika, iż do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $\delta > 0$, aby dla $\lambda < \delta$ spełniona była nierówność

$$|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\tau_i^*)| < \varepsilon$$

[patrz wniosek w ustępie 87]. Wtedy mamy

$$|\sigma - \sigma^*| \leq \sum_i |f(\varphi(\tau_i))| |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\tau_i^*)| \Delta t_i < L(\beta - \alpha),$$

gdzie sumę $\sum \Delta t_i$ zastąpiono przez $\beta - \alpha$, a L ogranicza od góry funkcję $|f(x)|$.

Teraz jest już jasne, że jeśli $\lambda \rightarrow 0$, to σ dąży do granicy $\int_a^b f(x) dx$, a to znaczy, że całka $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ istnieje i że prawdziwy jest wzór (9). Dowód został więc zakończony.

Uwaga. Podkreślamy szczególnie, że na podstawie udowodnionego twierdzenia proste i przydające się często wzory, wyprowadzone w ćwiczeniach 8), 9) i 10) ustępu 314, pozostają w mocy w przypadku dowolnej funkcji całkowalnej $f(x)$.

§ 4. Niektóre zastosowania całek oznaczonych

317. Wzór Wallisa. Z wzoru (8) ustępu 312 łatwo wyprowadza się znany wzór Wallisa.

Przy założeniu, że $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, mamy nierówności

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Scalkujemy te nierówności stronami w przedziale od 0 do $\frac{1}{2}\pi$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx.$$

Stąd i ze wzoru (8) znajdujemy

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

lub

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Ponieważ różnica skrajnych wyrazów tych nierówności

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

dąży, jak widać, do 0, gdy $n \rightarrow \infty$, więc $\frac{1}{2}\pi$ jest wspólną granicą obu tych wyrażeń. Zatem

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1},$$

czyli

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

To jest właśnie wzór Wallisa. Ma on znaczenie historyczne, jest to bowiem pierwsze przedstawienie liczby π w postaci granicy ciągu liczb wymiernych, które można łatwo obliczyć. Wzór Wallisa stosuje się i dziś w badaniach teoretycznych [patrz np. 406]. Dla przybliżonego obliczenia liczby π istnieją teraz metody wiodące do celu bez porównania szybciej [410].

318. Wzór Taylora z resztą w postaci całki. W uogólnionym wzorze (7) z ustępu 311 na całkowanie przez części podstawmy $v = (b-x)^n$. Wtedy

$$\begin{aligned} v' &= -n(b-x)^{n-1}, & v'' &= n(n-1)(b-x)^{n-2}, & \dots, \\ v^{(n)} &= (-1)^n n(n-1)\dots 1, & v^{(n+1)} &= 0. \end{aligned}$$

Wszystkie funkcje $v, v', \dots, v^{(n-1)}$ przyjmują dla $x = b$ wartość 0. Jeśli zamiast u, u', u'', \dots będziemy pisali odpowiednio $f(x), f'(x), f''(x), \dots$ to wzór (7) przyjmie postać

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^n [n! f(b) - n! f(a) - n! f'(a)(b-a) - \frac{n!}{2} f''(a)(b-a)^2 - \dots - f^{(n)}(a)(b-a)^n] + \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy wzór Taylora z resztą w postaci całki oznaczonej:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Przechodząc do oznaczeń używanych w ustępach 124-126, zastąpmy tu b przez x , a a przez x_0 . Otrzymujemy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Nowy wzór na resztę, w odróżnieniu od otrzymanych w ustępach 124 i 126, nie zawiera już liczb nieznanych.

Z tej postaci reszty szeregu Taylora możemy wyprowadzić poprzednio poznane jej postacie. Na przykład korzystając z tego, że czynnik $(x-t)^n$ funkcji podcałkowej nie zmienia znaku, możemy do ostatniej całki zastosować uogólnione twierdzenie o wartości średniej [304, 10°]. Otrzymujemy

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

gdzie c jest pewną liczbą z odcinka $\langle x_0, x \rangle$. W ten sposób otrzymaliśmy ponownie postać Lagrange'a reszty we wzorze Taylora.

319. Przestępcość liczby e . Ten sam wzór (7) z ustępu 311 może posłużyć za punkt wyjścia do dowodu pewnego ważnego twierdzenia Hermite'a o liczbie e .

Wszystkie liczby rzeczywiste (a także ogólnie — zespolone) dzielą się na dwie klasy — na liczby algebraiczne i przestępcońskie. Liczba nazywa się algebraiczną, jeśli jest ona pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych (można oczywiście przyjąć, nie zmniejszając ogólności, że współczynniki te są całkowite): w przeciwnym razie liczba nazywa się przestępcońską.

Przykładami liczb algebraicznych są wszystkie liczby wymierne lub liczby wyrażające się przez liczby wymierne za pomocą pierwiastków: i tak liczba $-\frac{11}{17}$ jest pierwiastkiem równania $17x+11=0$, a liczba $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}$ — pierwiastkiem równania $x^6-3x^4+3x^2-3=0$ itd.

Hermite udowodnił, że liczba e jest przestępna⁽¹⁾. Podamy teraz dowód tego twierdzenia. Przypuśćmy, że e jest pierwiastkiem równania

$$(1) \quad c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \dots + c_m e^m = 0,$$

którego współczynniki są liczbami całkowitymi.

Niech we wzorze (7) z ustępu 311 $u = f(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia n , a $v = (-1)^{n+1} e^{-x}$. Wtedy dla $a = 0$ wzór ten przyjmuje postać

$$\int_0^b f(x) e^{-x} dx = -e^{-x} [f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)] \Big|_0^b,$$

gdzie oczywiście $f^{n+1}(x) = 0$. Oznaczając krótko

$$f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x) = F(x),$$

mamy wobec tego

$$e^b F(0) = F(b) + e^b \int_0^b f(x) dx e^{-x}.$$

Podstawiajmy w tym wzorze kolejno $b = 0, 1, 2, \dots, m$; mnożąc otrzymane równości odpowiednio przez $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$, a następnie dodając je stronami, dojdziemy ostatecznie, po uwzględnieniu (1), do następującej równości:

$$(2) \quad 0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx.$$

Przypominamy, że równość ta powinna być spełniona dla dowolnego wielomianu $f(x)$. Pokażemy teraz, że można dobrać taki wielomian $f(x)$, dla którego równość (2) jest niemożliwa; tym samym twierdzenie będzie udowodnione.

Rozpatrzmy w tym celu wielomian

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-m)^p,$$

gdzie p jest liczbą pierwszą większą niż m , jak i od $|c_0|$. Pochodne tego wielomianu rzędu wyższego od $p-1$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych, podzielnych przez p . Wynika to bezpośrednio z tego, że iloczyn p kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $p!$. Dlatego dla dowolnej całkowitej wartości x wszystkie te pochodne przyjmują wartości całkowite będące wielokrotnościami p . Ponieważ dla $x = 1, 2, \dots, m$ wielomian $f(x)$ i jego pierwsze $p-1$ pochodnych przyjmują wartość 0, więc liczby $F(1), F(2), \dots, F(m)$ są całkowite i podzielne przez p .

Inaczej jest z $F(0)$. W punkcie $x = 0$ są równe zeru tylko wielomian $f(x)$ i $p-2$ kolejnych jego pochodnych, a więc

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots$$

Wiemy już, że wszystkie składniki tej sumy poczynając od drugiego są całkowitymi wielokrotnościami liczby p . Jednakże $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p m!$, a wraz z tym $F(0)$ nie jest podzielne przez p . Ponieważ przy przyjętych założeniach o liczbie p również c_0 nie jest podzielne przez p , wnioskujemy stąd, że pierwsza suma stojąca po prawej stronie równości (2) jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p , a więc na pewno różną od zera.

(1) W ślad za tym F. Lindemann udowodnił przestępność liczby π i w ten sposób pokazał, że stare znane zadanie o kwadraturze koła jest nieroziwiązalne.

Przejdzmy do rozpatrzenia drugiej sumy z równości (2). W przedziale $\langle 0, m \rangle$, mamy oczywiście

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} m^p m^p = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

a stąd wynika nierówność

$$\left| \int_0^t f(x) e^{-x} dx \right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \int_0^t e^{-x} dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

Jeśli teraz sumę $|c_0| + |c_1| + \dots + |c_m|$ oznaczymy przez C , to

$$\left| \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^t f(x) e^{-x} dx \right| < C e^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = C e^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Wiemy jednak [35, 1]), że ostatni czynnik dąży do 0, gdy p dąży do nieskończoności, a więc wartość bezwzględna drugiej sumy z wzoru (2) jest przy dostatecznie dużym p mniejsza od pierwszej sumy. W takim razie suma ich nie może być równa 0 i w ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność.

320. Wielomiany Legendre'a. Postawmy sobie za zadanie znaleźć taki wielomian $X_n(x)$ stopnia n , żeby dla dowolnego wielomianu $Q(x)$ stopnia niższego od n zachodziła równość

$$(3) \quad \int_a^b X_n(x) Q(x) dx = 0,$$

gdzie a i b są liczbami dowolnymi, ale ustalonymi.

Każdy wielomian $X_n(x)$ stopnia n można rozpatrywać jako pochodną rzędu n pewnego wielomianu $R(x)$ stopnia $2n$, który powstaje z wielomianu $X_n(x)$ przez n -krotne kolejne całkowanie. Jeśli przy każdym całkowaniu stałą dowolną dobierzemy tak, żeby całka dla $x = a$ była zerem, to wielomian $R(x)$ spełnia dodatkowo warunki

$$(4) \quad R(a) = 0, \quad R'(a) = 0, \quad \dots, \quad R^{(n-1)}(a) = 0.$$

Zadanie nasze sprowadza się więc do znalezienia takiego wielomianu $R(x)$ stopnia $2n$, żeby było

$$(5) \quad \int_a^b R^{(n)}(x) Q(x) dx = 0$$

dla dowolnego wielomianu $Q(x)$ stopnia niższego od n i oprócz tego, żeby spełnione były równości (4). Jeśli we wzorze (7) z ustępu 311 zastąpimy n przez $n-1$, to otrzymamy

$$\int_a^b R^{(n)}(x) Q(x) dx = [Q(x) R^{(n-1)}(x) - Q'(x) R^{(n-2)}(x) + \dots \pm Q^{(n-1)}(x) R(x)]_a^b \pm \int_a^b Q^{(n)}(x) R(x) dx.$$

Jeśli uwzględnimy (4), a także to, że $Q^{(n)}(x) \equiv 0$, to warunek (5) przyjmie postać

$$(6) \quad Q(b) R^{(n-1)}(b) - Q'(b) R^{(n-2)}(b) + \dots \pm Q^{(n-1)}(b) R(b) = 0.$$

Dzięki całkowitej dowolności wielomianu $Q(x)$ stopnia $n-1$ wartości $Q(b), Q'(b), \dots, Q^{(n-1)}(b)$ tego wielomianu i kolejnych jego pochodnych w punkcie $x = b$ można uważać za liczby dowolne, a wtedy warunek (6) jest równoważny z

$$(7) \quad R(b) = 0, \quad R'(b) = 0, \quad \dots, \quad R^{(n-1)}(b) = 0.$$

Z (4) i (7) widzimy, że liczby a i b powinny być n -krotnymi pierwiastkami wielomianu $R(x)$, który wobec tego może różnić się od iloczynu $(x-a)^n(x-b)^n$ co najwyżej czynnikiem stałym. Mamy zatem ostatecznie

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n].$$

Jeśli weźmiemy w szczególności $a = -1$ i $b = +1$, to otrzymamy znane nam już *wielomiany Legendre'a*

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Umówiliśmy się w ustępie 118, 6) oznaczać wielomiany Legendre'a przez $P_n(z)$, jeżeli stałe mają postać

$$c_n = \frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{(2n)!!}.$$

Dla tych wielomianów mamy $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. Zazwyczaj przyjmuje się jeszcze, że $P_0(x) = 1$. Wszystkie składniki wielomianu P_n mają wykładniki parzyste, jeśli n jest parzyste i nieparzyste, jeśli n jest nieparzyste.

Współczynnik przy wyrazie o najwyższej potędze jest oczywiście równy

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

Z samej definicji wielomianów Legendre'a wynika, że zawsze

$$(8) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(x) Q(x) dx = 0$$

dla dowolnego wielomianu $Q(x)$ stopnia niższego od n . W szczególności, jeśli n i m oznaczają dwie nierówne liczby nieujemne, to

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

Znajdziemy teraz wartość całki $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$; różni się ona od całki

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} dx$$

jedynie czynnikiem $c_n^2 = 1/[(2n)!!]^2$. Jeśli do ostatniej całki znowu zastosujemy wzór (7) z ustępu 311, zamieniając w nim n na $n-1$ i przyjmując

$$u = \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad v = (x^2 - 1)^n,$$

to sprowadzimy ją do obliczenia całki

$$(-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}(x^2 - 1)^n}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx = 2 \cdot 2n! \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

(wszystkie składniki nie występujące pod znakiem całki są zerami, ponieważ funkcja v i jej pochodne aż do $(n-1)$ -szej włącznie są równe zeru w punktach $x = 1$ i $x = -1$). Podstawiając tu $x = \sin t$ [porównaj 314, 2)], otrzymujemy

$$2 \cdot (2n)! \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} [(2n)!!]^2,$$

czyli ostatecznie

$$(10) \quad \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Na zakończenie, korzystając z własności wielomianów Legendre'a, wyprowadzimy wzory redukcyjne wiążące trzy kolejne takie wielomiany.

Zauważamy na wstępie, że wielomian x^n można wyrazić w postaci funkcji liniowej jednorodnej zmiennych P_0, P_1, \dots, P_n o stałych współczynnikach; jest to również prawdą dla dowolnego wielomianu stopnia n . Dlatego też

$$xP_n = a_0 P_{n+1} + a_1 P_n + a_2 P_{n-1} + a_3 P_{n-2} + \dots,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ są współczynnikami stałymi. Łatwo jest sprawdzić, że $a_3 = a_4 = \dots = 0$. Na przykład, aby obliczyć a_3 mnożymy obie strony tej równości przez P_{n-2} i całkujemy od -1 do 1 :

$$\int_{-1}^1 P_n x P_{n-2} dx = a_0 \int_{-1}^1 P_{n+1} P_{n-2} dx + a_1 \int_{-1}^1 P_n P_{n-2} dx + a_2 \int_{-1}^1 P_{n-2} P_{n-2} dx + a_3 \int_{-1}^1 P_{n-2}^2 dx + \dots$$

W myśl (8) i (9) wszystkie całki z wyjątkiem jednej są zerami i wobec tego otrzymujemy

$$a_3 \int_{-1}^1 P_{n-2}^2 dx = 0, \quad \text{skąd} \quad a_3 = 0.$$

Współczynnik a_1 jest także równy zeru, gdyż po lewej stronie równości w ogóle nie występuje wyraz z x^n . Aby wyznaczyć współczynnik a_0 porównujemy współczynniki przy x^{n+1} po obu stronach równości

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0 \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}, \quad \text{skąd} \quad a_0 = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Wreszcie, aby wyznaczyć współczynnik a_2 , porównujemy wartości obu stron równości dla $x = 1$:

$$1 = a_0 + a_2, \quad \text{a więc} \quad a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}.$$

Podstawiając znalezione wartości współczynników, otrzymujemy ostatecznie

$$(11) \quad (n+1) P_{n+1} - (2n+1) xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Jest to właśnie szukany wzór redukcyjny, który umożliwia znalezienie kolejnych wielomianów Legendre'a wychodząc z $P_0 = 1$ i $P_1 = x$:

$$P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad P_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8},$$

321. Nierówności całkowe. W ustępach 133 i 144 wyprowadziliśmy kilka nierówności dla sum. Pokażemy teraz, w jaki sposób podobne nierówności można otrzymać dla całek. Wszystkie występujące tu funkcje $p(x)$, $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są z założenia całkowalne ⁽¹⁾.

I) W ustępie 133 mieliśmy nierówność (4), którą można napisać w postaci

$$(12) \quad \exp \frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i} < \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}.$$

Rozpatrzmy teraz dwie funkcje $p(x)$ i $\varphi(x)$ dodatnie, określone w przedziale $\langle a, b \rangle$. Rozbijmy punktami

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

⁽¹⁾ Z tego założenia wynika już całkowalność i innych napotykanych tu funkcji: dla uzasadnienia tego wystarczy się powołać na usteły 299, II i 300, 4).

przedział ten na podprzedziały o długościach $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Podstawmy teraz w nierówności (12) $p_i = p(x_i)$ Δx_i , $a_i = \varphi(x_i)$. Otrzymujemy nierówność

$$\exp \frac{\sum p(x_i) \ln \varphi(x_i) \Delta x_i}{\sum p(x_i) \Delta x_i} < \frac{\sum p(x_i) \varphi(x_i) \Delta x_i}{\sum p(x_i) \Delta x_i}.$$

Wszystkie występujące tu sumy mają postać sum całkowych i przy $\Delta x_i \rightarrow 0$ dążą do odpowiednich całek. W ten sposób w granicy otrzymujemy nierówność całkową

$$\exp \frac{\int_a^b p(x) \ln \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} < \frac{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

analogiczną z (12).

W szczególności dla $p(x) \equiv 1$ mamy

$$\exp \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \varphi(x) dx \right] < \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Wyrażenie stojące po prawej stronie nazywa się średnią arytmetyczną wartości funkcji $\varphi(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, a wyrażenie po lewej stronie – średnią geometryczną tej funkcji.

2) Wyprowadzimy teraz nierówności całkowe analogiczne do nierówności Cauchy'ego-Höldera oraz nierówności Minkowskiego [133, (5) i (7)]:

$$(13) \quad \sum a_i b_i < \left\{ \sum a_i^k \right\}^{1/k} \cdot \left\{ \sum b_i^{k'} \right\}^{1/k'},$$

$$(14) \quad \left\{ \sum (a_i + b_i)^k \right\}^{1/k} < \left\{ \sum a_i^k \right\}^{1/k} + \left\{ \sum b_i^k \right\}^{1/k},$$

gdzie $k, k' > 1$ i $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$.

Niech dane będą w przedziale $\langle a, b \rangle$ dwie funkcje dodatnie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$; rozbijmy, jak wyżej, ten odcinek za pomocą punktów x_i i podstawmy w (13)

$$a_i = \varphi(x_i) \Delta x_i^{1/k}, \quad b_i = \psi(x_i) \Delta x_i^{1/k'},$$

a w (14)

$$a_i = \varphi(x_i) \Delta x_i^{1/k}, \quad b_i = \psi(x_i) \Delta x_i^{1/k}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum \varphi(x_i) \psi(x_i) \Delta x_i &< \left\{ \sum [\varphi(x_i)]^k \Delta x_i \right\}^{1/k} \left\{ \sum [\psi(x_i)]^{k'} \Delta x_i \right\}^{1/k'} \\ \left\{ \sum [\varphi(x_i) + \psi(x_i)]^k \Delta x_i \right\}^{1/k} &\leq \left\{ \sum [\varphi(x_i)]^k \Delta x_i \right\}^{1/k} + \left\{ \sum [\psi(x_i)]^k \Delta x_i \right\}^{1/k}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta x_i \rightarrow 0$, otrzymujemy ostatecznie

$$(13^*) \quad \int_a^b \varphi \psi dx < \left\{ \int_a^b \varphi^k dx \right\}^{1/k} \left\{ \int_a^b \psi^{k'} dx \right\}^{1/k'}$$

oraz

$$(14^*) \quad \left\{ \int_a^b [\varphi + \psi]^k dx \right\}^{1/k} < \left\{ \int_a^b \varphi^k dx \right\}^{1/k} + \left\{ \int_a^b \psi^k dx \right\}^{1/k}.$$

Zwracamy uwagę na szczególne przypadki tych wzorów, kiedy $k = k' = 2$:

$$(13') \quad \int_a^b \varphi\psi dx < \sqrt{\int_a^b \varphi^2 dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^2 dx}$$

i

$$(14') \quad \sqrt{\int_a^b [\varphi + \psi]^2 dx} < \sqrt{\int_a^b \varphi^2 dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^2 dx}.$$

Pierwsza z nich jest nierównością Buniakowskiego. Drugą łatwo otrzymuje się z niej przez podniesienie stronami do kwadratu.

2) Rozpatrzymy jeszcze nierówność Jensaena [144 (12*)]:

$$(15) \quad f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) < \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i};$$

o funkcji $f(x)$ zakładamy tu, że jest ona wypukła w pewnym przedziale \mathcal{X} , w którym leżą punkty x_i , a p_i są liczbami dodatnimi. Przypuśćmy, że funkcja $\varphi(x)$ jest określona w pewnym przedziale (a, b) i jej wartości leżą w przedziale \mathcal{X} , a funkcja $p(x)$ jest dodatnia i również określona w przedziale (a, b) . Niech teraz x_i oznaczają punkty podziału tego odcinka. Dawne x_i we wzorze (15) zastąpimy przez $\varphi(x_i)$, a p_i przez $p(x_i) \Delta x_i$. Przechodząc następnie, tak jak wyżej, od sum całkowych do całek, otrzymamy całkową nierówność Jensaena:

$$f\left\{ \frac{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \right\} < \frac{\int_a^b p(x) f(\varphi(x)) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

§ 5. Przybliżone obliczanie całek oznaczonych

322. Postawienie zadania. Metoda prostokątów i metoda trapezów. Przypuśćmy, że mamy znaleźć całkę $\int_a^b f(x) dx$, gdzie $f(x)$ jest pewną funkcją ciągłą określoną w przedziale (a, b) . W § 3 podaliśmy wiele przykładów obliczania takich całek albo za pomocą funkcji pierwotnej, jeśli można ją było przedstawić w postaci skończonej, albo też — omijając funkcje pierwotne — za pomocą różnych chwytów, najczęściej dość sztucznych. Zauważmy jednak, że wszystkie te metody dadzą się zastosować jedynie do dość wąskiej klasy całek; poza tą klasą musimy się uciekać do metod rachunku przybliżonego.

Obecnie poznamy najprostsze z metod, w których wzory przybliżone na całkę wykorzystują pewną liczbę wartości funkcji podcałkowej, obliczanych dla pewnych wartości (zazwyczaj równoodległych) zmiennej niezależnej.

Pierwsze spośród takich wzorów otrzymuje się najprościej z rozważań geometrycznych. Traktując całkę oznaczoną $\int_a^b f(x) dx$ jako pole pewnej figury geometrycznej ograniczonej krzywą $f(x)$ [294], postawimy sobie za zadanie znalezienie tego pola.

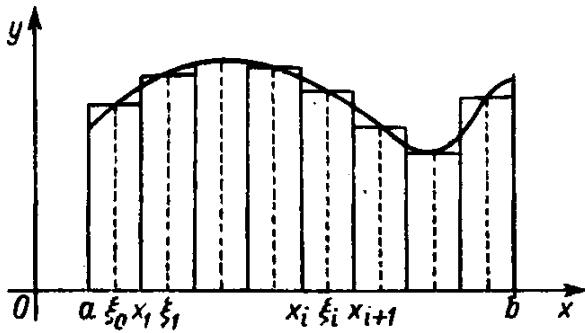
Przede wszystkim zastosujemy powtórnie tę samą myśl, która doprowadziła nas do pojęcia całki oznaczonej. Rozbijemy mianowicie całą figurę (rys. 6) na paski równej szerokości $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ (¹), a na-

(¹) Zachowujemy tu oznaczenia z ustępu 294.

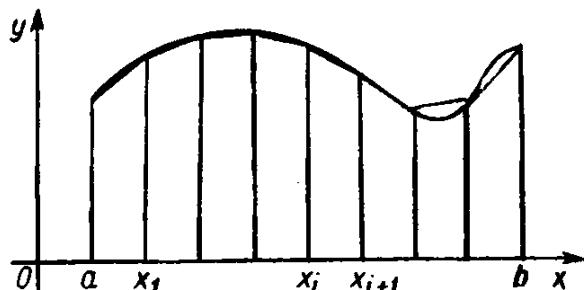
stępnie każdy pasek zastępujemy w przybliżeniu przez prostokąt o wysokości równej jednej z rzędnych. Prowadzi to do wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(\xi_0) + f(\xi_1) + \dots + f(\xi_{n-1})],$$

gdzie $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Pole krzywoliniowej figury zastępujemy tu polem pewnej figury schodkowej złożonej z prostokątów (innymi słowy, całkę oznaczoną zastępujemy sumą całkową). Taki przybliżony sposób obliczania całki nazywa się *metodą prostokątów*.



Rys. 6



Rys. 7

W praktyce bierze się zazwyczaj $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$. Jeśli odpowiednią rzędną $f(\xi_i) = f(x_{i+1/2})$ oznaczymy przez $y_{i+1/2}$, to ostatni wzór przyjmie postać

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}).$$

W dalszym ciągu mówiąc o metodzie prostokątów będziemy mieli zawsze na myśli ten właśnie wzór.

Interpretacja geometryczna prowadzi również do innego wzoru przybliżonego, który jest często stosowany. Zastępujemy mianowicie daną krzywą wpisaną w nią lamaną o wierzchołkach w punktach (x_i, y_i) , gdzie $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). W ten sposób zastępujemy naszą figurę krzywoliniową przez inną, składającą się z pewnej liczby trapezów (rys. 7). Jeśli — jak poprzednio — podzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na jednakowe części, to pola tych trapezów będą odpowiednio równe

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \dots, \quad \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Dodając te pola otrzymamy nowy wzór przybliżony

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Jest to tak zwany *wzór trapezów*.

Można udowodnić, że przy przejściu z n do nieskończoności błąd w obu wyprowadzonych wzorach dąży do zera. Wobec tego oba te wzory przy dostatecznie dużym n dają przybliżoną wartość szukanej całki z dowolnie dużą dokładnością.

Jako przykład weźmy znaną nam już całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398 \dots$$

i obliczmy jej wartość przybliżoną za pomocą obu tych wzorów, biorąc $n = 10$ i uwzględniając 4 miejsca dziesiętne.

Według metody prostokątów mamy:

$x_{1/2} = 0,05$	$y_{1/2} = 0,9975$
$x_{3/2} = 0,15$	$y_{3/2} = 0,9780$
$x_{5/2} = 0,25$	$y_{5/2} = 0,9412$
$x_{7/2} = 0,35$	$y_{7/2} = 0,8909$
$x_{9/2} = 0,45$	$y_{9/2} = 0,8316$
$x_{11/2} = 0,55$	$y_{11/2} = 0,7678$
$x_{13/2} = 0,65$	$y_{13/2} = 0,7030$
$x_{15/2} = 0,75$	$y_{15/2} = 0,6400$
$x_{17/2} = 0,85$	$y_{17/2} = 0,5806$
$x_{19/2} = 0,95$	$y_{19/2} = 0,5256$
Suma	<u>7,8562</u>

$$\frac{7,8562}{10} = 0,78562$$

Ze wzorów trapezów otrzymujemy:

$x_0 = 0,0$	$y_0 = 1,0000$	$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,9901$
$x_{10} = 1,0$	$y_{10} = 0,5000$	$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,9615$
Suma	<u>1,5000</u>	$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,9174$
		$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,8621$
		$x_5 = 0,5$	$y_5 = 0,8000$
		$x_6 = 0,6$	$y_6 = 0,7353$
		$x_7 = 0,7$	$y_7 = 0,6711$
		$x_8 = 0,8$	$y_8 = 0,6098$
		$x_9 = 0,9$	$y_9 = 0,5525$
		Suma	<u>7,0998</u>

Oba otrzymane wyniki przybliżone mają mniej więcej ten sam rząd dokładności — różnią się one od wartości dokładnej o mniej niż 0,0005 (w jedną i drugą stronę).

Czytelnik zdaje sobie oczywiście sprawę z tego, że w tym przypadku mogliśmy oszacować błąd tylko dlatego, że od początku znamy dokładną wartość tej całki. Na to, żeby oba wzory były rzeczywiście przydatne do obliczeń przybliżonych, potrzebne są wygodne wzory do obliczania błędu, które pozwalałyby nie tylko oszacować błąd, ale również dobierać n w ten sposób, by zagwarantować żądaną dokładność. Do tego zagadnienia wróćmy jeszcze w ustępie 325.

323. Interpolacja paraboliczna. Aby obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x) dx$ można spróbować zastąpić funkcję $f(x)$ aproksymującą ją wielomianem

$$(3) \quad y = P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + a_k$$

i przyjąć

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_k(x) dx .$$

Inaczej mówiąc, zastępujemy tu, przy obliczaniu pola, daną „krzywą” $y = f(x)$ przez parabolę (3) stopnia k . W związku z tym metoda ta otrzymała nazwę *interpolacji parabolicznej*.

Wielomian interpolacyjny $P_k(x)$ wybiera się najczęściej w sposób następujący. W przedziale (a, b) bierzemy $k+1$ wartości zmiennej niezależnej $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ i dobieramy wielomian $P_k(x)$ tak, aby dla wybranych wartości zmiennej niezależnej przyjmował on te same wartości, co funkcja $f(x)$. Wielomian

spełniający taki warunek jest, jak wiemy [128], jednoznacznie określony i można go wyrazić wzorem interpolacyjnym Lagrange'a:

$$\begin{aligned} P_k(x) = & \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_k)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)\dots(\xi_0-\xi_k)} f(\xi_0) + \\ & + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_k)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\dots(\xi_1-\xi_k)} f(\xi_1) + \dots + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_1)\dots(x-\xi_{k-1})}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})} f(\xi_k). \end{aligned}$$

Do sfałkowania otrzymuje się w ten sposób wyrażenie liniowe względem $f(\xi_0), \dots, f(\xi_k)$, którego współczynniki nie zależą już od tych wartości. Współczynniki te można wyznaczyć raz na zawsze i posługiwać się nimi przy obliczaniu przybliżonym całki dowolnej funkcji $f(x)$ w danym przedziale $\langle a, b \rangle$.

W najprostszym przypadku dla $k = 0$ funkcję $f(x)$ zastępujemy po prostu stałą $f(\xi_0)$, gdzie ξ_0 jest dowolnym punktem z przedziału $\langle a, b \rangle$, na przykład jego środkiem $\xi_0 = (a+b)/2$. Wtedy w przybliżeniu mamy

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Interpretując geometrycznie ten wzór widzimy, że pole figury krzywoliniowej jest tu zastąpione przez pole prostokąta o wysokości równej rzędnej funkcji $f(x)$ w środku przedziału.

Przy $k = 1$ funkcja $f(x)$ zostaje zastąpiona przez funkcję liniową $P_1(x)$, która dla $x = \xi_0$ i $x = \xi_1$ ma takie same wartości jak $f(x)$. Jeśli przyjąć $\xi_0 = a$ i $\xi_1 = b$, to będzie

$$(5) \quad P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

i jak łatwo sprawdzić

$$\int_a^b P_1(x) dx = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy w przybliżeniu

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Tym razem pole figury krzywoliniowej zostało zastąpione przez pole trapezu: zamiast krzywej bierze się cięciwę łączącą jej końce.

Mniej trywialny wynik otrzymujemy biorąc $k = 2$. Jeśli przyjąć $\xi_0 = a$, $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$, $\xi_2 = b$, to wielomian interpolacyjny $P_2(x)$ będzie miał postać

$$(7) \quad P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b).$$

Za pomocą łatwego rachunku otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} dx &= \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b \left[(x-b) + \frac{b-a}{2} \right] (x-b) dx = \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{(x-b)^3}{3} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{(x-b)^2}{2} \right] \Big|_a^b = \frac{b-a}{6} \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} dx = 4 \frac{b-a}{6}, \quad \int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} dx = \frac{b-a}{6}.$$

W ten sposób dochodzimy wreszcie do wzoru przybliżonego

$$(8) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

W ostatnim wzorze pole figury pod krzywą jest zastąpione przez pole figury ograniczonej od góry zwykłą parabolą (o osi pionowej), przechodzącą przez trzy punkty krzywej: dwa skrajne i środkowy.

Gdy zwiększa się stopień k wielomianu interpolacyjnego, tzn. prowadzi się parabolę (3) przez coraz większą liczbę punktów krzywej, można liczyć na uzyskanie większej dokładności. Jednakże w praktyce dogodniejsza jest inna droga, oparta na połączeniu interpolacji parabolicznej z rozdrobnianiem przedziału.

324. Rozdrobnienie przedziału całkowania. Przy obliczeniu całki $\int_a^b f(x) dx$ można postąpić następująco. Rozbijamy najpierw przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych części

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \quad \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \dots, \quad \langle x_{n-1}, x_n \rangle \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

i przedstawiamy szukaną całkę w postaci sumy

$$(9) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx.$$

Teraz do każdego z przedziałów zastosujemy interpolację paraboliczną, tzn. będziemy obliczali całkę (9) za pomocą jednego z wzorów przybliżonych (4), (6), (8).

Łatwo się przekonać, że stosując wzory (4) lub (6) otrzymamy w ten sposób znane nam już wzory prostokątów i trapezów (1) i (2).

Zastosujmy teraz do obliczania całek (9) wzór (8), przy czym oznaczamy jak wyżej

$$f(x_i) = y_i, \quad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}, \quad f(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2}.$$

Otrzymujemy

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_{1/2} + y_1),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_1 + 4y_{3/2} + y_2),$$

.....

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n).$$

Na koniec dodając stronami te równości otrzymujemy wzór

$$(10) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2})].$$

który nazywa się wzorem Simpsona. Wzór ten jest częściej używany do obliczania przybliżonego całek niż wzory prostokątów i trapezów, gdyż przy tym samym nakładzie pracy daje on zazwyczaj dokładniejszy wynik.

Dla porównania obliczymy jeszcze raz całkę $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ [porównaj 322] stosując wzór Simpsona.

Przyjmiemy $n = 2$, tak że w tym przypadku ilość rzędnych będzie nawet mniejsza niż poprzednio. Obliczamy z dokładnością 5 miejsc po przecinku

$$x_0 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{1}{4}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{3/2} = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 1;$$

$$y_0 = 1, \quad 4y_{1/2} = 3,76471, \quad 2y_1 = 1,6, \quad 4y_{3/2} = 2,56, \quad y_2 = 0,5;$$

$$\frac{1}{12} (1 + 3,76471 + 1,6 + 2,56 + 0,5) = 0,78539 \dots$$

W otrzymanym wyniku wszystkie 5 cyfr po przecinku są dokładne!

Również w przypadku wzoru (10) można powtórzyć uwagę podaną na końcu ustępu 322. Przejedźmy teraz do oszacowania błędu, jaki popełniamy przy stosowaniu wzorów przybliżonych.

325. Błąd dla wzoru prostokątów. Na początek rozpatrzmy wzór (4). Zakładamy, że w przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcja $f(x)$ ma ciągle pierwsze dwie pochodne. Rozwijając funkcję $f(x)$ względem potęg dwumianu $x - \frac{a+b}{2}$, według wzoru Taylora [126, (13)], z zachowaniem drugiej potęgi tego dwumianu, otrzymamy dla wszystkich x z przedziału $\langle a, b \rangle$ równość

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

gdzie ξ jest liczbą leżącą między x i $\frac{a+b}{2}$ na ogólną zależną od x .

Jeśli scałkujemy tę równość stronami w przedziale $\langle a, b \rangle$, to drugi składnik po prawej stronie odpadnie, bo

$$(11) \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0.$$

W ten sposób otrzymujemy równość

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

a więc błąd, czyli różnica między dokładną wartością a prawą stroną wzoru (4), ma postać

$$\varrho = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Oznaczmy przez m i M odpowiednio najmniejszą i największą wartość w przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcji ciągłej $f''(x)$ [85]; opierając się na tym, że drugi czynnik wyrażenia podcałkowego nie zmienia znaku, możemy napisać, w myśl uogólnionego twierdzenia o wartości średniej [304, 10°].

$$\varrho = \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} \mu;$$

gdzie μ oznacza pewną liczbę zawartą między m i M . W myśl znanej własności funkcji ciągłej [82] w przedziale $\langle a, b \rangle$ znajdziemy taki punkt ξ^* , że $\mu = f''(\xi^*)$, a więc

$$(12) \quad \varrho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi^*) .$$

Uwaga. Byłyby rzeczą naturalną, gdybyśmy rozwinięcie funkcji $f(x)$ względem potęg dwumianu $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ przerwali już na pierwszej potędze, tzn., użyli wzoru

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(\xi) .$$

Po scałkowaniu prowadziłoby to do równości

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b f'(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx ,$$

a więc w tym przypadku błąd wyraziłby się całką

$$\varrho = \int_a^b f'(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx ,$$

w której występuje tylko pierwsza pochodna $f'(x)$. Jednakże tu drugi czynnik wyrażenia podcałkowego nie ma stałego znaku w przedziale $\langle a, b \rangle$, a więc zastosowanie w celu uproszczenia wyrażenia na ϱ uogólnionego twierdzenia o wartości średniej okazuje się w tym przypadku niemożliwe. Sukces zapewniło nam przedłużenie rozwinięcia Taylora o jeszcze jeden wyraz w połączeniu z równością (11).

Jeśli teraz przedział $\langle a, b \rangle$ podzielimy na n równych części, to dla każdego podprzedziału $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ będziemy mieli wzór dokładny

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f(x_{i+1/2}) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i^*) \quad (x_i < \xi_i^* < x_{i+1}) .$$

Dodając te równości ($i = 0, 1, \dots, n-1$) stronami otrzymujemy przy zwykłych skróconych oznaczeniach

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}) + R_n ,$$

gdzie wyrażenie

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

jest błędem wzoru prostokątów (1). Ponieważ liczba

$$\frac{f''(\xi_0^*) + \dots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

leży między m i M , więc funkcja $f''(x)$ przyjmuje tę wartość w pewnym punkcie przedziału $\langle a, b \rangle$.

Mamy zatem w końcu

$$(13) \quad R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad (a < \xi < b) .$$

Reszta ta maleje ze wzrostem n mniej więcej jak $1/n^2$ (1).

(1) Mówimy „mniej więcej”, gdyż przy zmianie n może się zmienić również ξ . Należy o tym pamiętać w dalszym ciągu.

Dla przykładu powrócimy do obliczenia całki $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, przeprowadzonego w ustępie 322. Dla funkcji podcałkowej $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, mamy $f''(x) = 2 \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$. W przedziale $(0, 1)$ pochodna ta zmienia znak, ale jej wartość bezwzględna jest mniejsza niż 2. W myśl wzoru (13) mamy wobec tego $|R_{10}| < 0,85 \cdot 10^{-3}$. Obliczaliśmy rzędne z dokładnością do czterech miejsc po przecinku, czyli z dokładnością do 0.00005; łatwo, zauważycie, że błąd pochodzący z zaokrąglenia może być włączony do podanego przed chwilą oszacowania. Prawdziwy błąd jest oczywiście mniejszy niż to oszacowanie.

326. Błąd dla wzoru trapezów. Zajmiemy się teraz wzorem (6) przy poprzednich założeniach o funkcji $f(x)$. W myśl wzoru interpolacyjnego Lagrange'a z resztą [(129, (7))] możemy napisać [patrz (5)]:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{1}{2} f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) \quad (a < \tilde{\eta} < b).$$

Całkując ostatnią równość stronami od a do b otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) dx,$$

a więc błąd we wzorze (6) ma postać

$$\varrho = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) dx.$$

Rozumując podobnie jak wyżej i opierając się na tym, że drugi czynnik funkcji podcałkowej nie zmienia znaku, znajdujemy

$$\varrho = \frac{1}{2} f''(\eta^*) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta^*) \quad (a < \eta^* < b).$$

Ostatecznie w przypadku dzielenia przedziału na n równych części mamy

$$(14) \quad R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) \quad (a < \eta < b).$$

Jest to właśnie błąd dla wzoru trapezów (2). Gdy n rośnie wyrażenie to maleje mniej więcej jak $1/n^2$. Widzimy więc, że użycie wzoru prowadzi do błędu tego samego rzędu, co i wzór prostokątów.

327. Błąd dla wzoru Simpsona. Rozpatrzmy wreszcie wzór (8). Podobnie jak wyżej można by i teraz posłużyć się wzorem interpolacyjnym Lagrange'a z resztą [129(7)] i napisać [patrz (7)]:

$$(15) \quad f(x) P_2(x) + \frac{f'''(\xi')}{31} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) \quad (a < \xi' < b).$$

Jednakże natrafiamy tu na tę samą trudność, co i w ustępie 325 [patrz uwaga]. Mianowicie, całkując równość (15), nie moglibyśmy uprościć błędu za pomocą twierdzenia o wartości średniej, ponieważ wyrażenie $(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b)$ z funkcji podcałkowej zmienia w tym przypadku znak w przedziale (a, b) . Dlatego postąpimy inaczej. Dla dowolnej liczby K wyrażenie

$$P_2(z) + K(z-a) \left(z - \frac{a+b}{2} \right) (z-b),$$

przyjmuje w punktach $z = a, (a+b)/2, b$ te same wartości co i funkcja $f(z)$. Łatwo można teraz dobrąć liczbę K , tak żeby również i pochodna tego wyrażenia przyjmowała w punkcie $z = \frac{a+b}{2}$ taką samą wartość jak pochodna $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ tej funkcji. Przy takim wyborze liczby K wyrażenie nasze nie jest niczym innym, jak tylko wielomianem interpolacyjnym Hermite'a [130], odpowiadającym węzłom pojedynczym a i b i węźlowi podwójnemu $\frac{a+b}{2}$. W myśl wzoru Hermite'a z resztą [130, (11)] otrzymujemy

$$f(x) = P_2(x) + K(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) + \frac{f^{(4)}(\xi')}{4!} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) \quad (a < \xi' < b),$$

przy założeniu, że funkcja $f(x)$ ma pochodne do czwartego rzędu włącznie.

Całkując teraz tę równość od a do b , otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi') (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx,$$

ponieważ

$$\int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} \right] dx = 0.$$

Jeśli założymy, że pochodna $f^{(4)}(x)$ jest ciągła, to tak samo, jak w poprzednich przypadkach, błęd wzoru (8)

$$\varrho = \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx,$$

można — z uwagi na to, że drugi czynnik w wyrażeniu podcałkowym nie zmienia znaku — przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi^*) \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) dx = \\ &= \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi^*) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} \right] dx = - \frac{(b-a)^5}{180 \cdot 2^4} f^{(4)}(\xi^*) \text{ (1).} \end{aligned}$$

Jeśli przedział $\langle a, b \rangle$ podzielimy na n równych części, to dla wzoru Simpsona (10) otrzymamy błąd w postaci

$$(16) \quad R_n = - \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

Wyrażenie to przy wzroście n maleje mniej więcej jak $1/n^4$; wzór Simpsona jest więc rzeczywiście korzystniejszy od obu poprzednich.

Dla przykładu powróćmy jeszcze raz do całki $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Aby uniknąć obliczenia czwartej pochodnej

(1) Jeśli funkcja $f(x)$ jest wielomianem stopnia nie wyższego niż 3, to ξ jest oczywiście równe 0. Znaczy to, że dla takiego wielomianu wzór (8) jest dokładny (o czym łatwo można się przekonać również i bezpośrednio).

występującej we wzorze (16), zauważmy, że funkcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest pochodną funkcji $y = \arctg x$ a więc możemy użyć tu gotowego wzoru [116, 8)]. Według niego mamy

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5(y + \frac{1}{2}\pi) = 24 \cos^5 y \cos 5y ;$$

wartość bezwzględna ostatniego wyrażenia nie przewyższa 24, zatem ze wzoru (16) otrzymujemy $|R_2| < \frac{1}{1920} < 0,0006$. Jak widzieliśmy, w rzeczywistości błąd jest znacznie mniejszy.

Uwaga. Z tego przykładu jest widoczne, że oszacowanie błędu za pomocą naszego wzoru jest dość grube. Niestety, podobne sytuacje zdarzają się nieraz i to jest praktyczna wada wyprowadzonych wzorów.

Tym niemniej właśnie dzięki tym wzorom, pozwalającym z góry oszacować błąd, można wykonywać przybliżone obliczenia całek oznaczonych.

Przechodzimy teraz do przykładów.

328. Przykłady. 1) Obliczymy całąkę $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ z dokładnością do 0,001, posługując się wzorem prostokątów.

Ponieważ druga pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ spełnia nierówności $0 < f''(x) = \frac{2}{x^3} < 2$ (jeśli $1 < x < 2$), więc ze wzoru (13) mamy

$$0 < R_n < \frac{1}{12n^2} .$$

Jeśli przyjąć $n = 10$, to błąd naszego wzoru spełnia nierówność $R_{10} < \frac{1}{1200} < 0,84 \cdot 10^{-3}$. Musimy jeszcze uwzględnić błąd powstający przez zaokrąglenie wartości funkcji; postaramy się o to, żeby błąd ten był mniejszy niż $0,16 \cdot 10^{-3}$. W tym celu wartości funkcji $\frac{1}{x}$ będziemy obliczali z dokładnością do czterech miejsc po przecinku, tj. z dokładnością do 0,00005. Mamy

$x_{1/2} = 1,05$	$y_{1/2} = 0,9524$
$x_{3/2} = 1,15$	$y_{3/2} = 0,8696$
$x_{5/2} = 1,25$	$y_{5/2} = 0,8$
$x_{7/2} = 1,35$	$y_{7/2} = 0,7407$
$x_{9/2} = 1,45$	$y_{9/2} = 0,6897$
$x_{11/2} = 1,55$	$y_{11/2} = 0,6452$
$y_{13/2} = 1,65$	$y_{13/2} = 0,6061$
$x_{15/2} = 1,75$	$y_{15/2} = 0,5714$
$x_{17/2} = 1,85$	$y_{17/2} = 0,5405$
$x_{19/2} = 1,95$	$y_{19/2} = 0,5128$

$$\frac{6,9284}{10} = 0,69284$$

Suma 6,9284

Biorąc pod uwagę, że poprawka dla każdej rzędnej (a więc również i dla średniej arytmetycznej tych rzędnych) jest zawarta między $-0,00005$ a $+0,00005$ i uwzględniając oszacowanie błędu R_{10} , znajdziemy, że liczba $\ln 2$ leży między $0,69279 = 0,69284 - 0,00005$ i $0,69373 = 0,69284 + 0,00005 + 0,00084$, a więc między $0,692$ i $0,693$. W ten sposób $\ln 2 = 0,693 \pm 0,001$.

2) Obliczymy to samo za pomocą wzoru trapezów. W tym przypadku w myśl wzoru (14) mamy $R_n < 0$, $|R_n| < \frac{1}{6n^2}$.

Przyjmiemy teraz też $n = 10$, chociaż możemy wtedy gwarantować jedynie, że $|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1,7 \cdot 10^{-3}$. Rzędne obliczamy z tą samą dokładnością co poprzednio:

$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,9091$		
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,8333$		
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,7692$		
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,7143$	$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,0000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,6667$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,5000$
$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,6250$		Suma 1,5000
$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,5883$		
$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,5556$	$\frac{1}{10} \left(\frac{1,5000}{2} + 6,1877 \right) = 0,69377$	
$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,5263$		
		Suma 6,1877	

Uwzględniając wszystkie poprawki znajdujemy, że liczba $\ln 2$ leży w granicach $0,69202 = 0,69377 - 0,00005 - 0,00170$ i $0,69382 = 0,69377 + 0,00005$, tj. znów między 0,692 i 0,694.

3) Za pomocą wzoru Simpsona przy tej samej liczbie rzędnych otrzymuje się wynik dokładniejszy.

Ponieważ czwarta pochodna funkcji podcałkowej jest równa $\frac{24}{x^5}$, więc ze wzoru (16) mamy

$$R_n \leq 0, \quad |R_n| < \frac{24}{180 \cdot (2n)^4} = \frac{2}{15 \cdot (2n)^4}.$$

Dla $n = 5$ (wtedy liczba rzędnych będzie taka jak w poprzednich przypadkach) mamy $R_5 < 1,4 \cdot 10^{-5}$. Obliczamy rzędne z dokładnością do 5 znaków po przecinku, tzn. z dokładnością do 0,000005:

$x_1 = 1,2$	$y_1 = 0,83333$	$x_{1/2} = 1,1$	$y_{1/2} = 0,90909$
$x_2 = 1,4$	$y_2 = 0,71429$	$x_{3/2} = 1,3$	$y_{3/2} = 0,76923$
$x_3 = 1,6$	$y_3 = 0,62500$	$x_{5/2} = 1,5$	$y_{5/2} = 0,66667$
$x_4 = 1,8$	$y_4 = 0,55556$	$x_{7/2} = 1,7$	$y_{7/2} = 0,58824$
		$x_{9/2} = 1,9$	$y_{9/2} = 0,52632$
Suma 2,72818 · 2	<hr/> 5,45636	Suma 3,45955 · 4	<hr/> 13,83820

$$\begin{aligned} x_0 &= 1,0 & y_0 &= 1,00000 \\ x_5 &= 2,0 & y_5 &= 0,50000 \\ \hline \text{Suma} & & 1,50000 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{30} (1,50000 + 5,45636 + 13,83820) = 0,693152.$$

Stąd wynika, że $\ln 2$ jest zawarty między

$$0,693133 = 0,693152 - 0,000005 - 0,000014$$

$$0,693157 = 0,693152 + 0,000005,$$

tak więc możemy napisać $\ln 2 = 0,69315 \pm 0,00002$.

4) Postawimy sobie teraz za zadanie obliczenie całki eliptycznej zupełnej 2-go rodzaju ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Patrz odsyłacz na str. 123.

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

za pomocą wzoru Simpsona z dokładnością do 0,001.

Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}$ w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ mamy $|f^{(4)}(x)| < 12$ (1), a więc [patrz (16)]

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 2 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n)^4},$$

bo $\left(\frac{1}{2}\pi\right)^5 < 10$. Weźmy $n = 3$, będzie wtedy $|R_3| < 0,00052$. Obliczamy

$x_0 = 0$	(0°)	$y_0 = 1,0000$
$x_{1/2} = \frac{1}{12}\pi$	(15°)	$4y_{1/2} = \sqrt{12 + \sqrt{12}} = 3,9324$
$x_1 = \frac{1}{6}\pi$	(30°)	$2y_1 = \sqrt{14}/2 = 1,8708$
$x_{3/2} = \frac{1}{4}\pi$	(45°)	$4y_{3/2} = \sqrt{12} = 3,4641$
$x_2 = \frac{1}{3}\pi$	(60°)	$2y_2 = \sqrt{10}/2 = 1,5811$
$x_{5/2} = \frac{5}{12}\pi$	(75°)	$4y_{5/2} = \sqrt{12 - \sqrt{12}} = 2,9216$
$x_3 = \frac{1}{2}\pi$	(90°)	$y_3 = \sqrt{2}/2 = 0,7071$
Suma	15,4771	

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{15,4771}{18} = 1,35063 \dots$$

Do otrzymanego wyniku oprócz poprawki R_3 należy dodać jeszcze (nieujemną) poprawkę na zaokrąglenie rzędnych, która nie przekracza $\frac{0,0003 \cdot \pi}{36} < 0,00003$.

W ten sposób mamy

$$1,35011 < E(1/\sqrt{2}) < 1,35118$$

i możemy twierdzić, że $E(1/\sqrt{2}) = 1,351 \pm 0,001$.

(W rzeczywistości w otrzymanym wyniku 1,35063 wszystkie cyfry po przecinku są dokładne).

5) Obliczyć za pomocą wzoru Simpsona całkę

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

z dokładnością do 0,0001.

Obliczamy bezpośrednio czwartą pochodną funkcji podcałkowej i przekonujemy się, że jej wartość bezwzględna w rozpatrywanym przedziale jest mniejsza niż 12; a więc

$$|R_n| < \frac{12}{180 \cdot (2n)^4}.$$

(1) Jest oczywiście $y = f(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$; różniczkując stronami tożsamość $y^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x$, łatwo jest po kolei oszacować z góry wartości bezwzględne pochodnych y' , y'' , y''' i $y^{(4)}$.

Wystarczy przyjąć $n = 5$, bo $|R_5| < 0,7 \cdot 10^{-5}$. Mamy zatem

$$\begin{array}{ll}
 x_0 = 0,0 & y_0 = 1,00000 \\
 x_5 = 1,0 & y_5 = 0,36788 \\
 \hline
 \text{Suma} & 1,36788 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 x_{1/2} = 0,1 & y_{1/2} = 0,99005 \\
 x_{3/2} = 0,3 & y_{3/2} = 0,91393 \\
 x_{5/2} = 0,5 & y_{5/2} = 0,77680 \\
 x_{7/2} = 0,7 & y_{7/2} = 0,61263 \\
 x_{9/2} = 0,9 & y_{9/2} = 0,44486 \\
 \hline
 \text{Suma} & 3,74027 \cdot 4 \\
 \hline
 & 14,96108
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0,2 & y_1 = 0,96079 \\
 x_2 = 0,4 & y_2 = 0,85214 \\
 x_3 = 0,6 & y_3 = 0,69768 \\
 x_4 = 0,8 & y_4 = 0,52729 \\
 \hline
 \text{Suma} & 3,03790 \cdot 2 \\
 \hline
 & 6,07580
 \end{array}$$

$$\frac{1,36788 + 6,07580 + 14,96108}{30} = 0,746825$$

$$0,746813 < W < 0,746837$$

$$W = 0,7468_{+0.00005}.$$

(I tu w otrzymanym wyniku wszystkie cyfry po przecinku są dokładne).

6) Znajdziemy całkę

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx$$

[porównaj 314. 6)] za pomocą wzoru Simpsona dla $n = 5$, uwzględniając w obliczeniach 5 znaków po przecinku:

$$\begin{array}{ll}
 y_0 = 1 & y_{1/2} = 0,99668 \\
 y_5 = 0,78540 & y_{3/2} = 0,97152 \\
 \hline
 \text{Suma} & 1,78540 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 y_{5/2} = 0,92730 & \\
 y_{7/2} = 0,87246 & \\
 y_{9/2} = 0,81424 & \\
 \hline
 \text{Suma} & 4,58220 \cdot 4 \\
 \hline
 & 18,32880
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = 0,98698 & \\
 y_2 = 0,95127 & \\
 y_3 = 0,90070 & \\
 y_4 = 0,84343 & \\
 \hline
 \text{Suma} & 3,68238 \cdot 2 \\
 \hline
 & 7,36476
 \end{array}$$

$$\frac{1,78540 + 7,36476 + 18,32880}{30} = 0,915965.$$

W otrzymanym wyniku wszystkie cyfry po przecinku są dokładne. Czytelnikowi pozostawiamy oszacowanie błędu za pomocą wzoru (16).

Wartość całki G nazywa się czasem stałą Catalana [patrz także 440, 6), (a)].

Uwaga. Ostatnie trzy przykłady są interesujące także z tego powodu, że nie można odpowiednich funkcji pierwotnych przedstawić w postaci skończonej, a więc nie można użyć funkcji pierwotnych do obliczania tych całek oznaczonych.

Z drugiej strony, jeśli przedstawić te funkcje pierwotne w postaci całek o zmiennej granicy górnej, to można w ten sposób obliczać wartości tych całek, odpowiadające różnym wartościom granicy górnej. W ten sposób wyjaśnia się możliwość układania tablic funkcji, które można podać jedynie w postaci całki — takich samych tablic, jak te, które czytelnik zna dla funkcji elementarnych.

Tą drogą można otrzymać także przybliżone wyrażenia dla wspomnianych funkcji.

ROZDZIAŁ X

ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO DO GEOMETRII, MECHANIKI I FIZYKI

§ 1. Długość krzywej

329. Obliczanie długości krzywej. Niech będzie dana na płaszczyźnie krzywa ciągła zwyczajna $\sim AB$ za pomocą równań parametrycznych

$$(1) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T).$$

W pierwszym tomie [247] zdefiniowaliśmy pojęcie długości krzywej jako kres gorny S długości p łamanych wpisanych w tę krzywą:

$$(2) \quad S = \sup \{p\}.$$

Przy założeniu, że funkcje (1) mają ciągłe pierwsze pochodne, udowodniliśmy [248], że krzywa jest prostowalna, tzn. że jej długość jest skończona. Ponadto stwierdziliśmy, że jeśli rozpatrywać łuk zmienny $\sim AM$, gdzie M jest dowolnym punktem krzywej, odpowiadającym wartości t parametru, to długość tego łuku

$$\sim AM = s = s(t)$$

jest funkcją różniczkowąną zmiennej t , a pochodna tej funkcji wyraża się wzorem

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

lub krócej

$$(3) \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

[248 (10)] i oczywiście jest również ciągła.

Mając do dyspozycji pojęcie całki, możemy teraz przejść do obliczenia długości s krzywej $\sim AB$. W myśl podstawowego wzoru rachunku całkowego otrzymujemy od razu

$$s(T) - s(t_0) = \int_{t_0}^T s' dt$$

lub

$$(4) \quad AB = S = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Długość zmiennego łuku $\curvearrowleft AM$, o którym mówiliśmy wyżej, wyraża się oczywiście wzorem

$$(5) \quad \curvearrowleft AM = s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Zdarza się, że jako punkt początkowy, od którego liczymy długość łuku, bierze się jakikolwiek punkt wewnętrzny M_0 . Jeśli t_0 określa — jak poprzednio — właśnie ten punkt (w tym przypadku t_0 nie jest już końcem przedziału, w którym zmienia się t), to wzór (5) daje oczywiście długość łuku ze znakiem, mianowicie ze znakiem +, jeśli $t > t_0$, tzn. jeśli punkt M leży po dodatniej stronie od punktu M_0 , i ze znakiem -, jeśli $t < t_0$, tzn. punkt M leży po ujemnej stronie od punktu M_0 .

Jeśli krzywa dana jest równaniem

$$y = f(x) \quad (x_0 \leq x \leq X)$$

w prostokątnym układzie współrzędnych, to przyjmując x za parametr otrzymamy jako szczególny przypadek wzoru (4) wzór

$$(4a) \quad S = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'_x^2} dx = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Wreszcie przypadek, kiedy krzywa dana jest równaniem

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \Theta)$$

we współrzędnych biegunowych, sprowadza się, jak wiadomo, do przedstawienia parametrycznego za pomocą zwykłych wzorów

$$x = r \cos \theta = g(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = g(\theta) \sin \theta;$$

rolę parametru odgrywa tu θ . W tym przypadku mamy

$$(4b) \quad S = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r'_\theta^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2} d\theta.$$

Łatwo też podać w obu tych szczególnych przypadkach wyrażenia na długość łuku zmiennego $\curvearrowleft AM$, gdzie M odpowiada odciętej x lub współrzędnej kątowej θ :

$$(5a) \quad \curvearrowleft AM = s = s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'_x^2} dx$$

i odpowiednio

$$(5b) \quad \curvearrowleft AM = s = s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r'_\theta^2} d\theta.$$

330. Inne podejście do definicji długości krzywej i jej obliczania. Przy definicji pojęcia długości krzywej (1) regularnej, ciąglej wychodziliśmy z równości (2). Udowodnimy teraz, że w przypadku krzywej niezamkniętej jej długość S jest nie tylko kresem górnym zbioru $\{p\}$ długości łamanych wpisanych w krzywą, ale po prostu jest granicą liczb p , pod warunkiem, że długości wszystkich odcinków łamanej (p) dążą do 0 (lub dokładniej, jeśli dąży do 0 długość λ^* najdłuższego z tych odcinków):

$$(6) \quad S = \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} p .$$

Wygodnie jest zresztą posługiwać się wartościami parametru t

$$(7) \quad t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = T ,$$

określającymi położenie wierzchołków łamanej (p) danych na krzywej. Zakładamy, że wszystkie różnice $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ dążą do 0 (lub dokładniej, że dąży do 0 największa z nich $\lambda = \max \Delta t_i$). Dwa lematy z ustępu 245 gwarantują równoważność obu charakteryzacji przejścia do granicy. Należy więc udowodnić, że

$$(6^*) \quad S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p ,$$

Zwracamy najpierw uwagę na następującą ważną własność długości p łamanej. Jeśli odpowiada ona pewnemu podziałowi (7) odcinka $\langle t_0, T \rangle$ i jeśli dodamy jeszcze jeden punkt podziału t^* :

$$t_k < t^* < t_{k+1} ,$$

to długość p może się tylko powiększyć, przy czym przyrost ten nie przewyższa podwojonej sumy oscylacji funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ w przedziale $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Rzeczywiście, dodanie nowego punktu podziału t^* powoduje w sumie p zamianę jednego składnika (długość odpowiedniego odcinka łamanej):

$$(8) \quad \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

na dwa składniki (długości odpowiednich odcinków)

$$(9) \quad \sqrt{[\varphi(t^*) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t^*) - \psi(t_k)]^2} + \sqrt{[(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t^*))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t^*))^2]} .$$

Suma (9) jest w każdym razie nie mniejsza niż składnik (8). Z drugiej strony suma (9) jest nie większa od sumy

$$|\varphi(t^*) - \varphi(t_k)| + |\psi(t^*) - \psi(t_k)| + |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t^*)| + |\psi(t_{k+1}) - \psi(t^*)| ,$$

a zatem przyrost sumy p jest tym bardziej nie większy od tej liczby, która jest oczywiście mniejsza od wspomnianej podwojonej sumy oscylacji.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, kiedy S jest skończone. Z definicji kresu górnego wynika, że dla dowolnie małej liczby $\epsilon > 0$ można znaleźć taki podział na części przedziału $\langle t_0, T \rangle$ punktami

$$(10) \quad t_0 = t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots < t_m^* = T ,$$

że długość p^* łamanej odpowiadającej temu podziałowi spełniać będzie nierówność

$$(11) \quad p^* > S - \varepsilon/2.$$

Ponieważ funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są jednostajnie ciągłe, istnieje tak mała liczba $\delta > 0$, że

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}, \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m},$$

jeśli tylko $0|t'' - t'| < \delta$. Rozbijmy teraz przedział $\langle t_0, T \rangle$ na części w dowolny sposób punktami (7), byleby był spełniony warunek $\lambda < \delta$ (tzn. żeby wszystkie Δt_i były mniejsze od δ), a następnie utwórzmy odpowiednią sumę p .

Rozpatrzymy jeszcze trzeci sposób podziału przedziału $\langle t_0, T \rangle$ na części, w którym punktami dzielącymi są zarówno wszystkie punkty t_i podziału (7), jak i wszystkie punkty t_k^* podziału (10); temu podziałowi niech odpowiada suma p_0 . Ponieważ podział ten otrzymujemy z podziału (10) przez dodanie nowych punktów dzielących, więc z tego, co powiedzieliśmy na początku, wynika, że

$$(12) \quad p_0 \geq p^*.$$

Z drugiej strony, trzeci podział otrzymujemy z podziału (7) przez dodanie punktów t_k^* . Dodanie każdego punktu t_k^* powoduje zwiększenie sumy p , jednakże o mniej niż podwojona suma odpowiednich oscylacji funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$, tj. o mniej niż $\varepsilon/2m$. Ponieważ postępowanie to powtarza się mniej niż m razy, więc p_0 jest większe od p o mniej niż $\frac{1}{2}\varepsilon$

$$(13) \quad p_0 < p + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Z nierówności (13), (12) i (11) wynika, że

$$p > S - \varepsilon,$$

a więc $0 < S - p < \varepsilon$. Stąd wynika już twierdzenie (6*), a zatem również i (6).

Ponieważ na odwrót z (6) wynika (2), więc równość (6) można rozpatrywać jako nową definicję długości krzywej, równoważną z poprzednią.

Uwaga. Jak nietrudno zauważyc, w przypadku krzywej zamkniętej nie można stosować tej definicji bez zastrzeżeń: wszak nawet jeśli spełniony jest podany warunek, to łamana może ściągać się do punktu, a jej długość dążyć do 0 (rys. 8). Rzecz w tym, że w przypadku

krzywej niezamkniętej już samo dążenie do zera długości wszystkich odcinków łamanej (p) zapewnia coraz ciasniejsze przyleganie tych odcinków do odpowiednich łuków częściowych; dlatego też przyjęcie granicy sumy p za długość krzywej jest poprawne. Dla krzywych zamkniętych jest już inaczej.



Rys. 8

Zauważmy jeszcze, że jeśli zastąpić w tej definicji warunek zmierzania do 0 długości wszystkich odcinków łamanej przez zmierzanie do 0 średnic odpowiednich łuków, to taka definicja byłaby w równej mierze poprawna dla krzywych nie zamkniętych, jak i dla zamkniętych.

Pokażemy teraz, jak z definicji (6) lub — co wychodzi na to samo — z (6*) wyprowadzić bezpośrednio wyrażenie (4) dla długości S krzywej. Wyjdziemy ze znanego nam już wyrażenia dla długości p łamanej wpisanej w krzywą [patrz 248 (7)]:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} \cdot \Delta t,$$

gdzie τ_i, τ_i^* są to pewne wartości zmiennej t z przedziału $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$.

Jeśli w drugim składniku pod znakiem pierwiastka zastąpimy τ_i^* przez τ_i , to otrzymamy wyrażenie

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \cdot \Delta t,$$

które oczywiście jest sumą całkową dla całki (4). Wspomniana całka ⁽¹⁾ jest więc granicą sumy σ przy λ zmierzającym do 0. Aby udowodnić, że długości p łamanej dążą do tej samej granicy, wystarczy pokazać, że różnica $p - \sigma$ dąży do 0.

W tym celu oszacujemy tę różnicę

$$|p - \sigma| \leq \sum_i |\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}| \Delta t_i.$$

Jeśli do każdego składnika tej sumy zastosujemy elementarną nierówność

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| \leq |b - b_1| \quad (2),$$

to otrzymamy

$$|p - \sigma| \leq \sum_i |\psi'(\tau_i) - \psi'(\tau_i^*)| \Delta t_i.$$

Ponieważ funkcja $\psi'(t)$ jest ciągła, więc do dowolnie danej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $\delta > 0$, że $|\psi'(t) - \psi'(t^*)| < \varepsilon$, jeśli tylko $|t - t^*| < \delta$. Jeśli weźmiemy $\lambda < \delta$ (tzn. jeśli wszystkie $\Delta t_i < \delta$), to również $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$, tak że $|\psi'(\tau_i) - \psi'(\tau_i^*)| < \varepsilon$ i

$$|p - \sigma| \leq \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon (T - t_0).$$

Stąd wynika już wzór (4).

331. Przykłady

1) **Linia łańcuchowa** $y = a \cosh \frac{x}{a}$ (rys. 9).

Już w ustępie 252, 1) mieliśmy wzór

$$\sqrt{1+y'^2} = \cosh \frac{x}{a}.$$

⁽¹⁾ Istnienie tej całki wynika od razu z tego, że funkcja podcałkowa jest ciągła [298, 1)].

⁽²⁾ Dla $a = 0$ nierówność ta jest oczywista; jeśli natomiast $a \neq 0$, to wynika ona bezpośrednio z тожdności

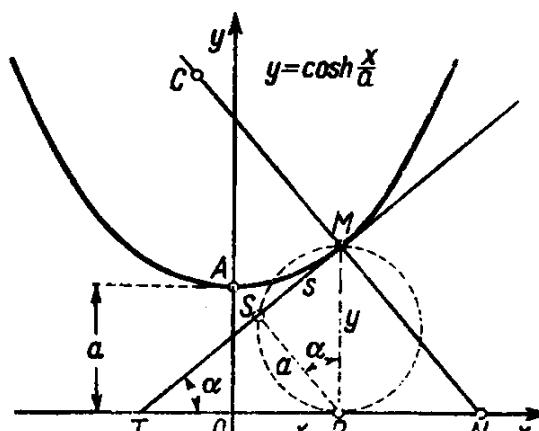
$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1).$$

ponieważ wartość bezwzględna współczynnika przy różnicy $b - b_1$ jest mniejsza od 1.

Dlatego jeśli będziemy liczyli łuk od wierzchołka A krzywej, to w myśl wzoru (5a) otrzymujemy

$$s = -AM = \int_0^x \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a}.$$

Przypominamy, że $\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \sinh \frac{x}{a}$, a także $s = a \operatorname{tg} \alpha$. Wobec tego w trójkącie MPS (rys. 9) długość odcinka stycznej $MS = a \operatorname{tg} \alpha$ jest taka sama jak długość łuku s . Otrzymaliśmy więc graficzny prosty sposób znajdowania długości krzywej łańcuchowej.



Rys. 9

2) **Parabola:** $y = \frac{x^2}{2p}$.

Przyjmując jako początek liczenia długości łuku wierzchołek O ($x = 0$), mamy dla dowolnego punktu M o odciętej x

$$\begin{aligned} s = -OM &= \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + p^2}) \right]_0^x = \\ &= \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}. \end{aligned}$$

3) **Asteroida:** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Wykorzystując obliczone już wcześniej [224, 4)] pochodne x' , y' , otrzymujemy

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 3a \sin t \cos t \quad (\text{jeśli } 0 < t < \frac{1}{2}\pi).$$

W myśl wzoru (4) długość ćwiartki asteroidy od punktu $A(a, 0)$ do punktu $B(0, a)$ jest równa

$$-AB = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{3}{2} a \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} a,$$

a więc długość całej krzywej wynosi $6a$.

4) **Cykloida:** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Dla $0 < t < 2\pi$ mamy

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin \frac{1}{2} t;$$

ze wzoru (4) obliczamy długość jednej gałęzi cykloidy

$$2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2} t dt = -4a \cos \frac{1}{2} t \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5) **Ewolwenta koła:** $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

Mamy tu (dla $t > 0$)

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = a \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = at,$$

a więc długość zmiennego łuku $\text{--} AM$ od punktu A ($t = 0$) do dowolnego punktu M ($t > 0$) wyraża się wzorem

$$\text{--} AM = s = \frac{at^2}{2}.$$

Dla $t < 0$ należy w ostatnim wzorze postawić po prawej stronie znak minus.

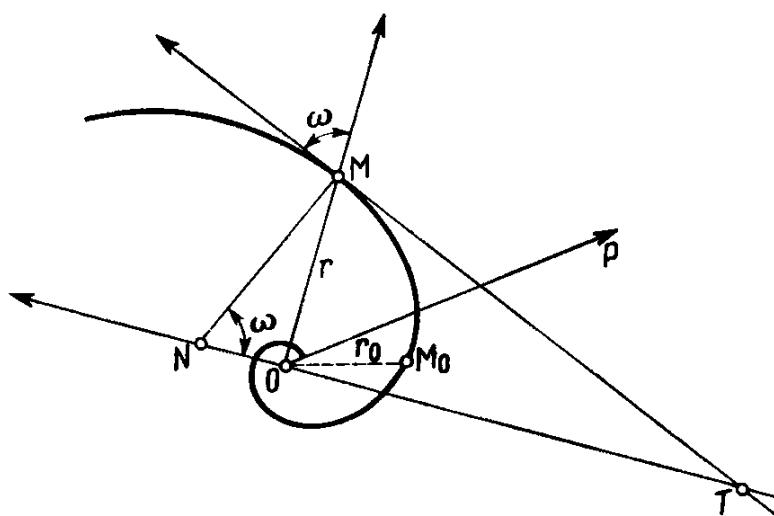
6) *Spirala Archimedesa*: $r = a\theta$.

W myśl wzoru (5b), licząc długość łuku od bieguna O do dowolnego punktu M (odpowiadającego kątowi θ), otrzymujemy

$$\text{--} OM = a \int_0^\theta \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} a [\theta \sqrt{1+\theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2})].$$

Ciekawe, że podstawiając do ostatniego wzoru $\theta = \frac{r}{a}$ dostajemy wyrażenie, formalnie takie samo, jak wyrażenie dla długości łuku paraboli [patrz 2)].

7) *Spirala logarytmiczna*: $r = ae^{m\theta}$ (rys. 10).



Rys. 10

Ponieważ $r'_\theta = mr$, więc $r = \frac{1}{m} r'_\theta$, i dla łuku $\text{--} M_0 M$ krzywej łączącej punkt $M_0(r_0, \theta_0)$ z punktem $M(r, \theta)$ otrzymujemy z tego samego wzoru (5b)

$$s = \text{--} M_0 M = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} r'_\theta d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} (r - r_0).$$

Gdy przypomnimy sobie, że dla spirali logarytmicznej $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m}$, to otrzymany wynik będziemy mogli napisać w postaci

$$r = \text{--} M_0 M = \frac{r - r_0}{\cos \omega}.$$

Zbliżając punkt M_0 do bieguna O , tzn. przechodząc z r_0 do granicy ($r_0 \rightarrow 0$), oraz przyjmując otrzymaną granicę długości łuku $\text{--} M_0 M$ za długość łuku $\text{--} OM$, dochodzimy do jeszcze prostszego wyniku

$$s = \text{--} OM = \frac{r}{\cos \omega}.$$

Z pomocą tego wzoru można już wywnioskować z trójkąta MOT [patrz rys. 10], że łuk s jest równy biegunowemu odcinkowi stycznej t :

$$\sim OM = TM \text{ (1).}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób bardzo prostą metodę obliczania długości naszej krzywej.

8) Elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Wygodniej jest zresztą wziąć równanie elipsy w postaci parametrycznej: $x = a \sin t$, $y = b \cos t$. Mamy wtedy

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t},$$

gdzie $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ jest mimośrodkiem elipsy.

Obliczając długość łuku elipsy od górnego końca małej osi do dowolnego punktu elipsy w pierwszej ćwiartce, otrzymujemy

$$s = a \int_0^t \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt = aE(\epsilon, t).$$

W ten sposób długość łuku elipsy wyraża się za pomocą całki eliptycznej drugiego rodzaju [293, patrz także 305]. Od tego właśnie, jak wspominaliśmy, wzięła się nazwa „eliptyczna” dla tej całki.

W szczególności długość ćwiartki obwodu elipsy wyraża się całką eliptyczną zupełną (2)

$$a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt = aE(\epsilon).$$

Długość całego obwodu elipsy wynosi

$$S = 4aE(\epsilon).$$

Warto zauważyć, że obliczając długość jednej fali sinusoidy $y = c \sin \frac{x}{b}$, gdzie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, otrzymuje się dokładnie ten sam wynik. Tę zbieżność wyników łatwo jest wyjaśnić geometrycznie. Wyobraźmy sobie walec kołowy prosty; przekrój jego powierzchni płaszczyzną nachyloną do tworzących daje elipsę. Jeśli rozetniemy powierzchnię tego walca wzduż tworzącej, przechodzącej przez wierzchołek małej osi elipsy, a następnie rozwiniemy tę powierzchnię, to elipsa przekształci się przy tym w sinusoidę.

Również obliczenie długości łuku hiperboli sprowadza się analogicznie do całek eliptycznych (obu rodzajów).

9) Ślimak: $r = a \cos \theta + b$.

Mamy tu $r'_\theta = -a \sin \theta$ i

$$r^2 + r'_\theta^2 = a^2 + 2ab \cos \theta + b^2 = (a+b)^2 \left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Wobec tego (przy $a \neq b$) długość łuku krzywej od punktu $\theta = 0$ do punktu określonego przez dowolny kąt $\theta < \pi$ wyraża się za pomocą całki eliptycznej (drugiego rodzaju)

$$\begin{aligned} s &= (a+b) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2(a+b) \int_0^{\theta/2} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 t} dt = \\ &= 2(a+b) E \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

(1) Ta własność spirali logarytmicznej pozwala łatwo udowodnić następujące twierdzenie: jeśli krzywa ta toczy się bez poślizgu po prostej MT , to biegun O (jeśli przyjąć, że jest on sztywno związany z krzywą) przesuwa się po pewnej prostej. Przeprowadzenie dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

(2) Patrz odsyłacz na str. 123.

Długość całej krzywej jest równa całości eliptycznej zupełnej

$$S = 4(a+b) E \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right).$$

Natomiast dla *kardioidy*, która jest szczególnym przypadkiem rozpatrywanej krzywej ($a = b$), wzory znacznie się upraszczają. W tym przypadku mamy bowiem

$$r^2 + r'^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

a więc (dla $0 < \theta < \pi$)

$$S = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

Jeśli z bieguna O (rys. 11) promieniem $2a$ zatoczymy łuk $\text{--} AL$ aż do przecięcia się z przedłużeniem odcinka OM , to cięciwa AL jest oczywiście równa co do długości łukowi $s = \text{--} AM$.

Długość całej kardioidy wynosi $8a$.

10) *Lemniskata: $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$* .

Obliczymy długość łuku lemniskaty łączącego jej wierzchołek, odpowiadający wartości $\theta = 0$, z dowolnym jej punktem, odpowiadającym wartości $\theta < \frac{1}{4}\pi$.

Mamy tu

$$rr' = -2a^2 \sin 2\theta, \quad \text{skąd} \quad r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r}.$$

Wobec tego

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{2a^2}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

a ze wzoru (5b) otrzymujemy

$$s = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}},$$

Rys. 11

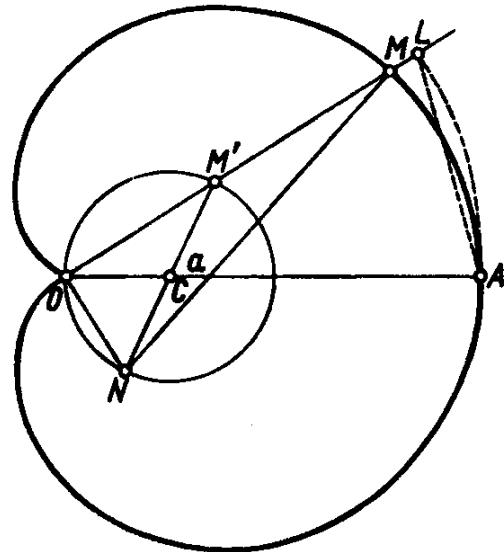
jest to znowu całka eliptyczna (pierwszego rodzaju). Ponieważ tablice takich całek są obliczone w przypadku, kiedy współczynnik k^2 przy $\sin^2\theta$ jest mniejszy od 1, dokonamy jeszcze zamiany zmiennej. Przyjmijmy $2\sin^2\theta = \sin^2\varphi$ (ponieważ $\theta < \frac{1}{4}\pi$, więc $2\sin^2\theta < 1$ i tak kąt φ można rzeczywiście określić); wtedy

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \quad \cos \theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi,$$

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad \sqrt{1-2\sin^2\theta} = \cos \varphi,$$

ostatecznie

$$s = a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = aK \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi \right).$$



Przyjmując w przypadku granicznym ⁽¹⁾ $\theta = \frac{1}{4}\pi$ i $\varphi = \frac{1}{2}K$, znajdujemy długość ćwiartki lemniskaty w postaci całki eliptycznej zupełnej

$$s = a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} = aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Długość całej lemniskaty jest równa $S = 4aK(1/\sqrt{2})$.

Zauważmy, że zadanie obliczenia długości łuku krzywej bardzo często prowadzi do całek eliptycznych.

11) Na zakończenie podamy przykład zastosowania wzoru na długość łuku do skonstruowania ewolwenty krzywej [256].

Rozpatrzmy krzywą łańcuchową. Oznaczmy przez ξ , η współrzędne bieżące [podobnie jak w ustępie 256], a przez σ długość łuku tej krzywej liczoną od wierzchołka. Równanie krzywej łańcuchowej ma więc postać

$$\eta = a \cosh \frac{\xi}{a},$$

a długość łuku wyraża się wzorem [patrz 1])

$$\sigma = a \sinh \frac{\xi}{a}.$$

Można stąd wyrazić ξ i η bezpośrednio jako funkcje zmiennej σ :

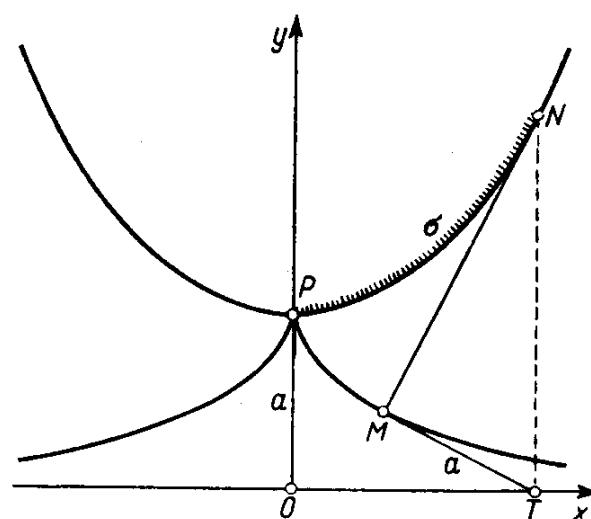
$$\xi = a [\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a], \quad \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}.$$

Uzgłędniając, że

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \quad \sin \beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}},$$

możemy na mocy wzorów (17) z ustępu 256 napisać równanie parametryczne dowolnej ewolwenty w postaci

$$x = a [\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a] + (c - \sigma) \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \quad y = \sqrt{\sigma^2 + a^2} + (c - \sigma) \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}.$$



Rys. 12

Zwróćmy uwagę na tę ewolwentę, która odpowiada wartości $c = 0$. Wychodzi ona z wierzchołka

(1) Ostatni przypadek musimy traktować jako graniczny, przy przejściu w otrzymanym wzorze s do granicy, gdy $\theta \rightarrow \frac{1}{4}\pi$, czyli gdy $\varphi \rightarrow \frac{1}{2}K$, gdyż dla $\theta = \frac{1}{4}\pi$ mamy $r_\theta = \infty$, a więc wzoru (5b) nie możemy zastosować bezpośrednio.

krzywej łańcuchowej i ma w tym punkcie punkt zwrota (rys. 12). Równując z dwu równań zmienną σ , znajdujemy równanie tej krzywej, zwanej *traktryzą*, we współrzędnych kartezjańskich

$$x = \pm \left[a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right].$$

Ze wzoru na styczną [230, (4)]

$$t = \left| \frac{y}{y'_x} \sqrt{1 + y'^2} \right| = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2},$$

łatwo wynika, że dla tej ewolwenty jest $t = a$. Jest to ważna własność traktrysy, którą można wysłowić następująco: *odcinek stycznej do traktrysy ma wartość stałą* ⁽¹⁾.

Wynik ten również łatwo otrzymuje się bezpośrednio z własności linii łańcuchowej [patrz 1) i rys. 9].

332. Równania naturalne krzywej płaskiej. Przedstawienie krzywej za pomocą równania wiążącego współrzędne jej punktów (względem jakiegoś układu współrzędnych), pomimo swej pożyteczności, ma często charakter sztuczny, bo współrzędne nie są przecież istotnymi geometrycznymi elementami krzywej. Na odwrót, elementami istotnymi są długość łuku, liczona od pewnego punktu początkowego w określonym kierunku, i promień krzywizny R (lub też krzywizna $k = 1/R$) [patrz 250, 251].

Dla każdej krzywej można znaleźć zależność postaci

$$F(s, R) = 0$$

między tymi elementami, tzn. długością łuku s i promieniem krzywizny R . Zależność tę nazywamy *równaniem naturalnym* krzywej ⁽²⁾.

Udowodnimy, że krzywe o tym samym równaniu naturalnym mogą się różnić tylko położeniem na płaszczyźnie, tak że kształt krzywej jest przez równanie naturalne określony jednoznacznie.

Niech dwie krzywe (I) i (II) mają to samo równanie naturalne, które napiszemy w postaci

$$(14) \quad \frac{1}{R} = g(s).$$

Aby udowodnić przystawanie tych krzywych, przesuwamy najpierw jedną z nich tak, żeby pokryły się punkty, od których liczymy długości łuku. Następnie jedną z tych krzywych obracamy tak, żeby pokryły się dodatnie kierunki stycznych do obu krzywych w tym punkcie. Wskaźnikami (1 i 2) zaznaczamy, której z obu tych krzywych dotyczą następujące wielkości, odpowiadające tej samej wartości parametru s :

współrzędne punktów bieżących: (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ;

kąty stycznych z osią x : α_1 i α_2 ;

promienie krzywizny R_1 i R_2 .

⁽¹⁾ Z tą własnością związana jest właśnie nazwa tej krzywej, pochodząca od łacińskiego słowa *trahere-ciągnąć*, wlecz: jeśli poruszający się po linii poziomej punkt T , „ciagnie” na nitce TM za sobą punkt M , to punkt M opisuje traktryzę.

⁽²⁾ Jest to przekład nazwy niemieckiej *natürliche Gleichung*; równie wymowna jest nazwa francuska *équation intrinséque* (tzn. równanie wewnętrzne).

Na mocy (14) mamy $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ dla wszystkich s. tzn. [270, (2)]

$$(15) \quad \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds}.$$

Oprócz tego z założenia mamy dla $s = 0$

$$(16) \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

i

$$(17) \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

Z równości (15) w myśl wniosku z ustępu 131 wynika, że kąty α_1 i α_2 mogą się różnić tylko o stałą; ale jak widzieliśmy, dla $s = 0$ są one takie same, a więc równość (17) zachodzi dla każdego s. Wobec tego mamy dla wszystkich wartości parametru s

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \frac{dx_2}{ds}.$$

$$\frac{dy_1}{ds} = \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \frac{dy_2}{ds}.$$

Stąd w analogiczny sposób stwierdzamy, że także równości (16) zachodzą zawsze, a to znaczy, że krzywe pokrywają się.

Pokażemy teraz, jak z równania naturalnego krzywej otrzymać jej równania parametryczne. Przede wszystkim z (14) mamy $\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$, a zatem

$$(18) \quad \alpha = \int_0^s g(s) ds + \alpha_0,$$

gdzie α_0 jest pewną stałą. Całkując następnie stronami równości

$$(19) \quad dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \sin \alpha ds,$$

otrzymujemy

$$(20) \quad x = \int_0^s \cos \alpha ds + x_0, \quad y = \int_0^s \sin \alpha ds + y_0,$$

gdzie x_0 i y_0 oznaczają nowe stałe.

Nietrudno zauważyc, że obrót krzywej powoduje zmianę stałej α_0 , a przesunięcie równoległe krzywej jest związane ze zmianą stałych x_0 i y_0 ⁽¹⁾. Jeśli wszystkie te stałe są zerami, to oczywiście krzywa jest położona tak, że punkt, od którego liczymy długość łuku, pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, a dodatni kierunek stycznej do krzywej w tym punkcie — z dodatnim kierunkiem osi x.

⁽¹⁾ Odwracając te rozumowania otrzymujemy łatwo nowy dowód wypowiedzanego wyżej twierdzenia.

Niech teraz będzie dane dowolne równanie postaci (14). (Zakładamy tylko, że funkcja $g(s)$ jest ciągła). Wtedy określając najpierw kąt α wzorem (18), a następnie x i y wzorami (20), otrzymamy równania parametryczne pewnej krzywej. Różniczkując stronami równości (2) dostajemy wzory (19), z których widzimy przede wszystkim, że

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

a więc ds jest rzeczywiście elementem łuku tej krzywej, a s — długością łuku (jeśli tylko odpowiednio wybierzemy punkt początkowy). Następnie te same równości (19) prowadzą do wniosku, że α jest kątem, jaki tworzy z osią x styczna do tej krzywej. Wreszcie różniczkując stronami wzór (18), znajdujemy, że krzywizna krzywej jest równa

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$$

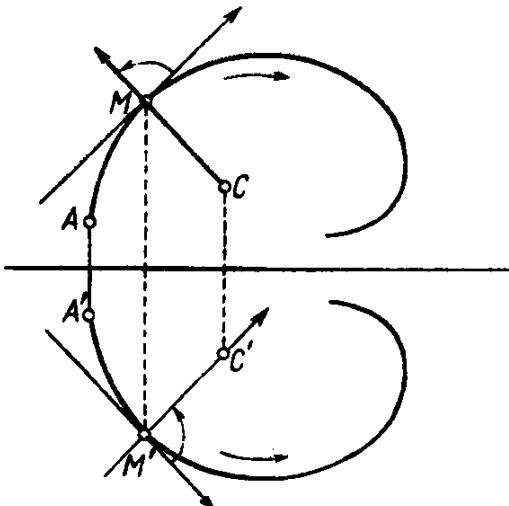
i w ten sposób okazuje się, że równanie (14) jest rzeczywiście równaniem naturalnym krzywej. A więc *każde równanie postaci (14), gdzie $g(s)$ jest funkcją ciągłą, można uważać za równanie naturalne pewnej krzywej*.

Zwracamy uwagę na to, że zmieniając punkt początkowy lub kierunek liczenia łuku na krzywej można wprowadzić pewne zmiany (co prawda nieistotne) w równaniu naturalnym krzywej.

Na zakończenie zauważmy jeszcze, że dwie krzywe położone symetrycznie ⁽¹⁾ (rys. 13) mają równania naturalne postaci (14), różniące się tylko znakiem prawej strony:

$$(21) \quad \frac{1}{R} = g(s) \quad \text{i} \quad \frac{1}{R} = -g(s).$$

Rzeczywiście, przy zgodnym wyborze punktów początkowych i kierunków liczenia łuku na obu krzywych ich promień krzywizny będą miały znaki przeciwe. Na odwrót, dwie krzywe o równaniach naturalnych (21) można za pomocą ruchu w płaszczyźnie doprowadzić do położenia symetrycznego. Można uważać, że także takie dwie krzywe nie różnią się od siebie kształtem w sposób istotny.



Rys. 13

333. Przykłady. 1) Znaleźć krzywą, która ma równanie naturalne $R^2 = 2as$.

Mamy tu

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (2), \quad s = \frac{a}{2} \alpha^2,$$

⁽¹⁾ Samym przesunięciem po płaszczyźnie nie można nałożyć jednej z nich na drugą; do tego potrzebny jest obrót w przestrzeni.

⁽²⁾ Ponieważ chodzi nam o znalezienie chociażby jednej krzywej, będziemy wybierały stałe całkowania tak, jak nam najwygodniej. Należy o tym pamiętać także w przyszłości.

a więc $ds = a\alpha d\alpha$. Przyjmując α jako parametr, otrzymujemy dalej

$$dx = \cos \alpha ds = a\alpha \cos \alpha dx, \quad dy = \sin \alpha ds = a\alpha \sin \alpha dx,$$

skąd

$$x = a(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha), \quad y = a(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

Okazuje się, że rozpatrywana krzywa jest *ewolwentą koła* [225, 8)].

2) To samo dla równania naturalnego $R^2 + s^2 = 16a^2$. Jest tu

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{s}{4a}, \quad s = 4a \sin \alpha, \quad ds = 4a \cos \alpha d\alpha.$$

Wtedy

$$dx = \cos \alpha ds = 4a \cos^2 \alpha d\alpha, \quad dy = \sin \alpha ds = 4a \sin \alpha \cos \alpha d\alpha.$$

a stąd całkując otrzymujemy

$$x = 2a(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) = a(2\alpha + \sin 2\alpha),$$

$$y = -a \cos 2\alpha = a - a(1 + \cos 2\alpha).$$

Jeśli przejdziemy do parametru $t = 2\alpha - \pi$, to równania otrzymanej krzywej przyjmą postać

$$x = \pi a + a(t - \sin t), \quad y = a - a(1 - \cos t)$$

i teraz poznajemy już, że jest to *cykloida* [225, 6)], tylko przesunięta i odwrócona w stosunku do zwykłego jej położenia.

3) Rozwiązać to samo zadanie dla równania naturalnego $R = ms$.

Mamy tu oczywiście

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{ms}, \quad \alpha = \frac{\ln s}{m}, \quad s = e^{m\alpha}, \quad ds = me^{m\alpha} d\alpha,$$

$$dx = \cos \alpha \cdot me^{m\alpha} d\alpha, \quad dy = \sin \alpha \cdot me^{m\alpha} d\alpha$$

i wreszcie

$$x = \frac{m}{1+m^2} (m \cos \alpha + \sin \alpha) e^{m\alpha},$$

$$y = \frac{m}{1+m^2} (m \sin \alpha - \cos \alpha) e^{m\alpha}.$$

Przejdźmy do współrzędnych biegunkowych. Przede wszystkim mamy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\alpha}.$$

Następnie wprowadzamy stały kąt ω za pomocą równości $\operatorname{tg} \omega = 1/m$, wobec tego jest

$$\frac{y}{x} = \frac{m \sin \alpha - \cos \alpha}{m \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m} \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega),$$

a więc można przyjąć, że kąt biegunowy θ jest równy $\alpha - \omega$, stąd zaś $\alpha = \omega + \theta$. Ostatecznie równanie biegunowe naszej krzywej ma postać

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\omega} e^{m\theta},$$

jest to *spirala logarytmiczna* [226, 3)]. Wielkość współczynnika przy $e^{m\theta}$ nie gra żadnej roli, ponieważ przez obrót osi układu biegunowego można ten współczynnik uczynić równym 1.

4) Zajmiemy się teraz zadaniem innego rodzaju: dana jest krzywa, należy znaleźć jej równanie naturalne.

(a) Dla linii łańcuchowej mieliśmy [331, 1); 252, 1)]

$$s = a \sinh \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}, \quad R = \frac{y^2}{a};$$

stąd $R = a + \frac{s^2}{a}$.

(b) Dla asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, jeśli jako punkt początkowy liczenia długości łuku wybierzemy środek jej gałęzi leżącej w pierwszej ćwiartce, jest [porównaj 331, 3)]

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 t - \frac{3}{4} a, \quad R = 3a \sin t \cos t.$$

Dlatego mamy dalej

$$R^2 = 4 \cdot \frac{3}{2} a \sin^2 t \cdot \frac{3}{2} a \cos^2 t = 4 \left(\frac{3}{4} a + s \right) \left(\frac{3}{4} a - s \right) = \frac{9}{4} a^2 - 4s^2$$

i ostatecznie równanie naturalne asteroidy można napisać w postaci $R^2 + 4s^2 = \frac{9}{4} a^2$.

(c) W przypadku kardiody $r = a(1 + \cos \theta)$ mieliśmy [331, 9); 252, 6)]

$$s = 4a \sin \frac{1}{2} \theta, \quad R = \frac{4}{3} a \cos \frac{1}{2} \theta;$$

jej równanie naturalne ma oczywiście postać $9R^2 + s^2 = 16a^2$.

(d) Ostatnie dwa wyniki są szczególnymi przypadkami następującego stwierdzenia: równanie naturalne epicykloidy i hipocykloidy [225, 7)] ma postać

$$(1+2m)^2 R^2 + s^2 = 16m^2(1+m^2) a^2.$$

(e) Nietrudno teraz otrzymać na nowo równania ewolwent koła, cykloid i spirali logarytmicznej znane nam już z przykładów 1)-3).

5) Mając dane równanie naturalne krzywej, można znaleźć równanie naturalne jej *ewoluty*. Mieliśmy bowiem zależność [255, (15)]

$$(22) \quad \rho = R \frac{dR}{ds}.$$

Jeżeli punkt początkowy liczenia długości łuku na ewolucie wybierzemy w ten sposób, żeby było $R = \sigma$ [patrz 255, 2°], to rugując R i s z tych dwóch związków i z równania naturalnego krzywej, otrzymamy zależność między ρ i σ , tzn. równanie naturalne ewoluty.

(a) Dla spirali logarytmicznej $R = ms$ mamy $\rho = mR = m\sigma$. Otrzymaliśmy więc poprzednie równanie tylko w innych oznaczeniach. Wnioskujemy stąd, że ewolutą jest taka sama spirala logarytmiczna, która od wyjściowej może się różnić jedynie położeniem [porównaj 254, 5)].

(b) Dla *ewolwenty koła* jest

$$\sigma = R = \sqrt{2as}, \quad s = \frac{\sigma^2}{2a}, \quad \frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma}, \quad \rho = \sigma \cdot \frac{a}{\sigma} = a$$

(wynik, który należało przewidzieć).

(c) Jeśli równanie naturalne krzywej ma postać $R^2 + k^2 s^2 = c^2$, to ewoluta powstaje z tej krzywej przez k -krotne powiększenie jej wymiarów liniowych.

Rzeczywiście, mamy

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2 s^2}, \quad ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = - \frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2 s^2}} = - \frac{k \sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma}$$

i wreszcie

$$\rho = -\sigma \cdot \frac{k \sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k \sqrt{c^2 - \sigma^2}, \quad \text{czyli} \quad \rho^2 + k^2 \sigma^2 = (kc)^2.$$

Stąd wynika już wypowiedziane twierdzenie.

Otrzymany wynik daje się zastosować do cykloid [porównaj 254, 4)], do epicykloid i hipocykloid, a w szczególności do kardioidy i asteroidy [porównaj 254, 3)].

Uwaga. Podana metoda we wszystkich przypadkach pozwala określić tylko kształt ewoluty, nie rozstrzygając, jakie jest jej położenie.

334. Długość łuku krzywej przestrzennej. Długość łuku krzywej przestrzennej

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

można zdefiniować tak samo, jak i dla krzywej płaskiej [249, uwaga]. Także w tym przypadku na długość łuku otrzymuje się wzór

$$s = \text{---} AB = \int_{t_0}^T \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt,$$

analogiczny do (4). Na ten przypadek przenosi się prawie bez zmian wszystko, co powiedzieliśmy o krzywej płaskiej. Dlatego nie zatrzymujemy się nad tym dłużej i podajemy od razu przykłady.

PRZYKŁADY

1) *Linia śrubowa:* $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ct$.

Ponieważ mamy tu

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

więc długość łuku krzywej, łączącego punkt A ($t = 0$) z punktem M (t — dowolne) wyraża się wzorem

$$s = \text{---} AM = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} t.$$

Wynik ten jest oczywisty, jeśli przypomnijmy sobie, że przy rozwinięciu powierzchni walca linia śrubowa leżąca na niej przechodzi w prostą nachyloną do tworzącej.

2) *Krzywa Vivianiego:* $x = R \sin^2 t$, $y = R \sin t \cos t$, $z = R \cos t$.

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = R \sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

Wobec tego długość całej krzywej wyraża się całką eliptyczną zupełną drugiego rodzaju

$$S = 4R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt = 4R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 4 \sqrt{2R} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt = 4 \sqrt{2} RE\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

§ 2. Pole i objętość

335. Definicja pola. Własność addytywności. Obszarem wielokątnym, lub krócej wielokątem, nazywamy dowolną skońzoną (nie koniecznie spójną) figurę płaską, ograniczoną jedną lub kilkoma łamymi zamkniętymi. Dla takiej figury pojęcie pola było dostatecznie omówione w szkolnym kursie geometrii, toteż przyjmujemy je za podstawę dalszych rozważań.

Rozpatrzmy teraz na płaszczyźnie dowolną figurę P , która jest obszarem ograniczonym i domkniętym. Będziemy zawsze przyjmowali, że jej brzeg, czyli kontur K jest krzywą zamkniętą (lub składa się z kilku takich krzywych) ⁽¹⁾.

Weźmy pod uwagę wszystkie możliwe wielokąty A , całkowicie zawarte w P i wielokąty B , całkowicie zawierające obszar P (rys. 14). Jeśli $|A|$ i $|B|$ oznaczają pola tych wielokątów, to zawsze jest $|A| \leq |B|$. Zbiór liczb $\{|A|\}$, ograniczony z góry przez którykolwiek z liczb $|B|$, ma kres gorny $|P_*|$ [11], przy czym $|P_*| \leq |B|$. Dokładnie tak samo zbiór liczb $\{|B|\}$, ograniczony z dołu przez liczbę $|P^*|$, ma kres dolny $|P^*| \geq |P_*|$. Kres gorny $|P_*|$ nazywamy *wewnętrzny*, a kres dolny $|P^*|$ — *zewnętrzny polem figury P*.

Jeśli kresy

$$|P_*| = \sup \{|A|\} \quad \text{i} \quad |P^*| = \inf \{|B|\}$$

są równe, to ich wspólna wartość $|P|$ nazywa się *polem figury P*. W tym przypadku figura P nazywa się *kwadrowalną lub mierzalną* ⁽²⁾.

Oczywiście na to, żeby figura P miała pole, potrzeba i wystarcza, żeby do każdego $\varepsilon > 0$ można było znaleźć takie dwa wielokąty A i B , że $|B| - |A| < \varepsilon$.

Rzeczywiście, konieczność tego warunku wynika z podstawowych własności kresów górnego i dolnego [11]: jeśli istnieje pole $|P|$, to znajdują się zawsze takie wielokąty A i B , że $|A| > |P| - \frac{1}{2}\varepsilon$ i $|B| < |P| + \frac{1}{2}\varepsilon$. Natomiast dostateczność warunku wynika od razu z nierówności

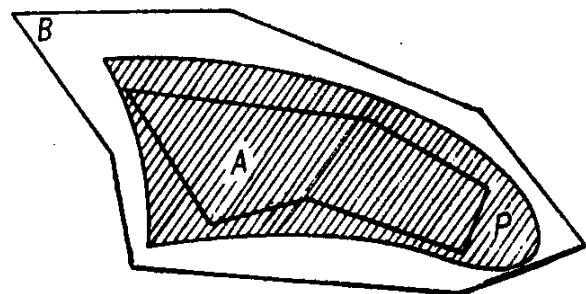
$$|A| \leq |P_*| \leq |P^*| \leq |B|.$$

Przypuśćmy teraz, że figura P jest rozcięta na dwie figury P_1 i P_2 ⁽³⁾; możemy sobie wyobrazić, że osiągnięto to na przykład za pomocą krzywej łączącej dwa punkty konturu

⁽¹⁾ Mówiąc w tym paragrafie o krzywej zawsze będziemy mieli na myśli krzywą ciągłą, która daje się wyrazić w postaci parametrycznej. Jak udowodnił Jordan, krzywa zamknięta o tych własnościach rozcina płaszczyznę na dwa obszary, wewnętrzny i zewnętrzny, dla których jest ona wspólnym brzegiem

⁽²⁾ Często też jest używana nazwa *miara wewnętrzna* i *zewnętrzna* oraz *miara Jordana* zamiast pole wewnętrzne i zewnętrzne oraz pole (przypis redakcji wydania polskiego).

⁽³⁾ Mogą mieć one częściowo wspólny brzeg, ale nie mogą zachodzić jedna na drugą, tzn. nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

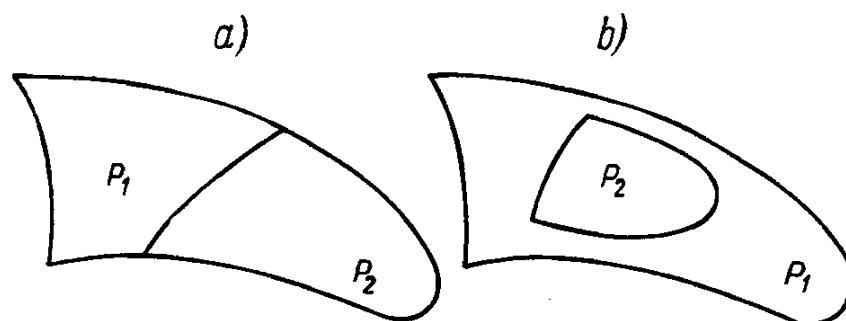


Rys. 14

lub krzywej leżącej całkowicie wewnątrz figury P (rys. 15a i b). Udowodnimy, że mierzalność dwóch spośród trzech figur P , P_1 i P_2 pociąga za sobą mierzalność trzeciej, przy czym

$$(1) \quad P = P_1 + P_2,$$

zn. że pole ma własność *addytywności*.



Rys. 15

Założymy na przykład, że figury P_1 i P_2 mają pola. Rozpatrzmy wielokąty A_1 , B_1 i A_2 , B_2 wewnętrzne i zewnętrzne odpowiadające tym figurom. Wzajemnie niezachodzące na siebie wielokąty A_1 i A_2 tworzą obszar wielokątny A , o polu $|A| = |A_1| + |A_2|$, całkowicie zawarty w obszarze P . Natomiast wielokąty B_1 i B_2 , być może zachodzące na siebie, tworzą obszar B o polu $|B| \leq |B_1| + |B_2|$, zawierający obszar P .

Mamy oczywiście

$$|A_1| + |A_2| = |A| \leq |B| \leq |B_1| + |B_2|;$$

ponieważ przy tym liczby $|B_1|$ i $|B_2|$ mogą się różnić od liczb $|A_1|$ i $|A_2|$ dowolnie mało, więc również dowolnie mało różni się $|B|$ od $|A|$, a stąd wynika mierzalność obszaru P .

Z drugiej strony, mamy jednocześnie

$$|A_1| + |A_2| = |A| \leq |P| \leq |B| \leq |B_1| + |B_2|$$

oraz

$$|A_1| + |A_2| \leq |P_1| + |P_2| \leq |B_1| + |B_2|,$$

zatem liczby $|P|$ i $|P_1| + |P_2|$ zawarte są między tymi samymi liczbami $|A_1| + |A_2|$ i $|B_1| + |B_2|$ różniącymi się dowolnie mało, a więc są one równe, co należało udowodnić.

Zauważmy, że wynika stąd w szczególności nierówność $|P_1| < |P|$, zatem część figury ma pole mniejsze niż cała figura.

336. Pole jako granica. Warunek mierzalności, sformułowany w poprzednim ustępie można wypowiedzieć inaczej:

1) Na to, żeby figura P była mierzalna, potrzeba i wystarcza, żeby istniały takie dwa ciągi wielokątów $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$ odpowiednio zawartych w P i zawierających P , że pola ich mają wspólną granicę

$$(2) \quad \lim |A_n| = \lim |B_n| = |P|.$$

Ta granica jest oczywiście równa polu figury P .

Czasami wygodnie jest zamiast wielokątów użyć innych figur, których mierzalność jest udowodniona:

2) Jeśli dla figury P można zbudować takie dwa ciągi $\{Q_n\}$ i $\{R_n\}$ figur mierzalnych, odpowiednio zawartych w P i zawierających P i takich, że ich pola mają wspólną granicę

$$(3) \quad \lim |Q_n| = \lim |R_n| = |P|,$$

to figura P jest także mierzalna i przy tym pole jej jest równe wspomnianej granicy.

Wynika to od razu z poprzedniego twierdzenia. Wystarczy tylko zastąpić każdą figurę Q_n zawartym w niej wielokątem A_n , a każdą figurę R_n — wielokątem R_n zawierającym ją, o polach różniących się tak mało, żeby spełniony był równocześnie warunek (2).

Chociaż w praktyce nie ma trudności z dobraniem figur A_n , B_n , Q_n i R_n , występujących w podanych wyżej sformułowaniach, to jednak ze względów zasadniczych ciekawe jest usunięcie niejednoznaczności związanej z tym wyborem. W tym celu można postąpić na przykład tak:

Umieścmy rozpatrywaną figurę P wewnątrz prostokąta R o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Prostokąt ten rozbijamy na części za pomocą pewnej liczby prostych równoległych do jego boków. Prostokąty całkowicie zawarte w obszarze P tworzą figurę \tilde{A} (na rys. 16 jest ona zakreskowana), a prostokąty, mające z P wspólne punkty wewnętrzne (prostokąty te mogą częściowo wychodzić poza obszar P) tworzą figurę \tilde{B} . Figury te są oczywiście szczególnymi przypadkami wielokątów A i B , o których była mowa w definicji pola; ich pola $|\tilde{A}|$ i $|\tilde{B}|$ zależą od sposobu podziału prostokąta R na części. Przez d oznaczamy długość najdłuższej z przekątnych prostokątów podziału.

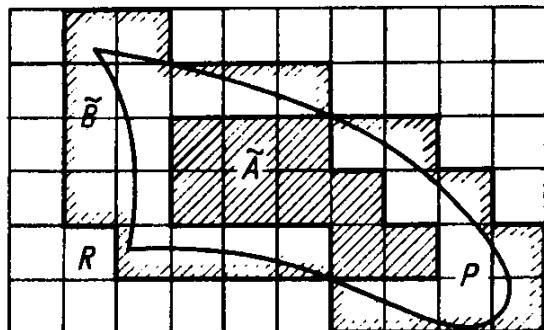
3) Obszar P jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, kiedy przy $d \rightarrow 0$ oba pola $|\tilde{A}|$ i $|\tilde{B}|$ dążą do wspólnej granicy $|P|$; jeśli ten warunek jest spełniony, to wspólna granica $|P|$ jest równa polu obszaru P .

Czytelnik może sam bez trudu wysławić definicję, którą tu podaliśmy, zarówno „w języku $\epsilon - \delta$ ” jak i „w języku ciągów”.

Dowodu wymaga tylko konieczność wskazanego warunku. Przypuszczamy więc, że pole figury P istnieje i udowodnimy, że wtedy

$$(4) \quad \lim_{d \rightarrow 0} |\tilde{A}| = \lim_{d \rightarrow 0} |\tilde{B}| = |P|.$$

Do danego $\epsilon > 0$ dobieramy [335] takie wielokąty A i B , żeby było $|B| - |A| < \epsilon$; można przy tym założyć, że ich kontury nie mają punktów wspólnych z konturem K figury P . Oznaczamy przez δ najmniejszą z odległości między punktami konturów obu



Rys. 16

wielokątów z jednej strony, a punktami konturu K z drugiej strony⁽¹⁾. Jeśli wziąć teraz $d < \delta$, to każdy prostokąt podziału, mający choćby jeden punkt wspólny z krzywą K , leży na zewnątrz wielokąta A i wewnątrz wielokąta B . Stąd wynika, że

$$|A| \leq |\tilde{A}| \leq |P| \leq |\tilde{B}| \leq |B|,$$

tak więc $|P| - |\tilde{A}| < \varepsilon$ i $|\tilde{B}| - |P| < \varepsilon$, co prowadzi już do równości (4).

Jasne jest, że równość (4) można by przyjąć za definicję pojęcia pola, równoważną oczywiście definicji poprzedniej. Taka definicja wydaje się bardzo prosta i naturalna. Wadą jej jednak jest zależność (oczywiście pozorna) od wyboru osi układu współrzędnych.

337. Klasa obszarów mierzalnych. Krzywa K — kontur obszaru P gra ważną rolę w zagadnieniu mierzalności tego obszaru.

Jeśli obszar jest mierzalny, to — jak wiemy z ustępu 335 — do każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć obszar wielokątny $B - A$, zawierający krzywą K , zawarty między konturami obu wielokątów A i B (patrz rys. 14), zatem mający pole $|B| - |A| < \varepsilon$.

Przypuśćmy teraz na odwrót, że kontur K można umieścić w obszarze wielokątnym C o polu $|C| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną z góry daną liczbą dodatnią. Bez zmniejszenia ogólności można przy tym założyć, że obszar C nie pokrywa całej figury P . Wtedy punkty obszaru P , nie leżące wewnątrz C , tworzą obszar wielokątny A zawarty w P ; jeśli złączymy obszary A i C , to otrzymamy obszar wielokątny B , zawierający już cały obszar P . Różnica $|B| - |A| = |C|$ jest mniejsza od ε , więc w myśl kryterium z ustępu 335, wynika stąd mierzalność obszaru P .

Dla ułatwienia będziemy mówili, że (zamknięta lub nie zamknięta) krzywa R ma pole równe 0, jeśli można ją pokryć obszarem wielokątnym o dowolnie małym polu. Wtedy podane wyżej rozumowanie pozwala wysłowić następujący warunek mierzalności:

Na to, żeby figura P była mierzalna, potrzeba i wystarcza, żeby jej kontur K miał pole równe 0.

W związku z tym duże znaczenie ma wyróżnienie obszernych klas krzywych o polu równym 0.

(1) Niech będą dane na płaszczyźnie dwie krzywe skończone ciągle. Założymy na przykład, że są one dane za pomocą równań parametrycznych

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

$$x = \varphi^*(u), \quad y = \psi^*(u),$$

gdzie $t_0 < t < T$, $u_0 < u < U$, funkcje φ , ψ , φ^* , ψ^* — są ciągle odpowiednio względem argumentu t i u . Wtedy odległość między dowolnymi dwoma punktami leżącymi na tych krzywych

$$\sqrt{[\varphi(t) - \varphi^*(u)]^2 + [\psi(t) - \psi^*(u)]^2}$$

jest funkcją ciągłą względem zmiennych t i u w obszarze domkniętym $\langle t_0, T; u_0, U \rangle$ i wobec tego osiąga w tym obszarze swoją wartość najmniejszą [173]. Jeśli krzywe nie przecinają się, to ta najmniejsza odległość jest różna od zera.

Przede wszystkim łatwo jest udowodnić, że własność tę ma każda krzywa ciągła, która ma równanie nieuwikłane postaci

$$(5) \quad y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad \text{lub} \quad x = g(y) \quad (c \leq y \leq d),$$

gdzie f i g są funkcjami ciągłymi.

Przypuśćmy na przykład, że mamy do czynienia z pierwszym z tych równań. Przy danym $\varepsilon > 0$ przedział $\langle a, b \rangle$ można podzielić na takie podprzedziały $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), żeby w każdym z nich oscylacja funkcji f była mniejsza od $\frac{\varepsilon}{b-a}$ [87]. Jeśli oznaczymy, jak zwykle, przez m_i i M_i wartość najmniejszą i największą funkcji f w i -tym przedziale, to figura złożona z prostokątów

$$\langle x_i, x_{i+1}; m_i, M_i \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

pokryje całą naszą krzywą (patrz rys. 17), przy czym pole tej figury będzie równe

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon,$$

co należało właśnie udowodnić. Krzywa (5) ma więc pole równe 0. Wynika stąd, co następuje:

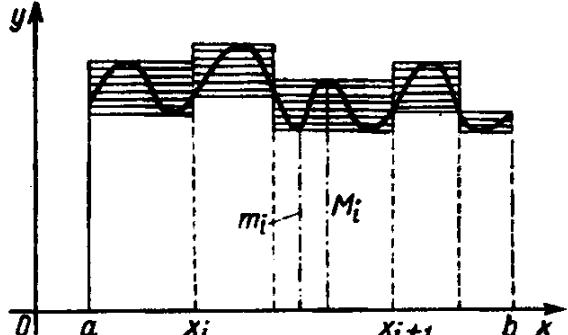
Jeśli figura P jest ograniczona kilkoma krzywymi ciągłymi, z których każda z osobna ma równanie postaci (5) (jednego lub drugiego typu), to figura ta jest mierzalna.

Rzeczywiście, ponieważ każda z wymienionych krzywych ma pole równe 0, więc oczywiście również cały kontur ma pole równe 0.

Z tego kryterium można otrzymać inne, mniej ogólne, które jednakże w praktyce okazuje się wygodniejsze.

Krzywą daną równaniami parametrycznymi

$$(6) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$



Rys. 17

nazywamy *gladką*, jeśli 1) funkcje φ i ψ mają ciągle pochodne w całym przedziale $\langle t_0, T \rangle$ zmienności parametru i 2) krzywa nie ma punktów wielokrotnych, ani w ogóle punktów osobliwych. W przypadku krzywej zamkniętej żądamy jeszcze, żeby spełnione były równości

$$\varphi'(t_0) = \varphi'(T), \quad \psi'(t_0) = \psi'(T).$$

Pokażemy teraz, że każda krzywa gladka ma pole równe 0.

Niech M^* oznacza dowolny punkt na krzywej, określony przez wartość t^* parametru. Ponieważ nie jest to punkt osobliwy, więc — jak widzieliśmy [223] — istnieje taki przedział:

$$\sigma^* = \langle t^* - \delta^*, t^* + \delta^* \rangle,$$

że odpowiadający mu łuk krzywej można przedstawić równaniem postaci (5).

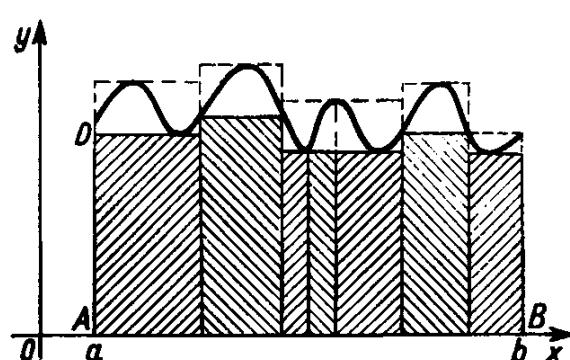
Do przedziału $\langle t_0, T \rangle$ i do pokrywającego go układu otoczeń $\Sigma = \{\sigma\}$ zastosujemy teraz lemat Borela [88]; cały ten przedział można zatem pokryć skońzoną liczbą takich otoczeń, a więc krzywa rozpada się na skońzoną liczbę łuków, z których każdy daje się wyrazić równaniem postaci (5) (jednego lub drugiego typu). Wystarczy teraz powołać się na wynik udowodniony wyżej. Tak więc:

Jeśli figura P jest ograniczona jedną lub kilkoma krzywymi gładkimi, to jest ona mierzalna.

Wynik ten zachowuje moc również w przypadku, kiedy krzywa ma skońzoną liczbę punktów osobliwych, oddzielając bowiem te punkty za pomocą otoczeń o dowolnie małym polu będziemy już mieć do czynienia z krzywymi gładkimi.

338. Wyrażenie pola za pomocą całki. Przechodzimy teraz do obliczania pola za pomocą całki.

Przede wszystkim rozpatrzymy — po raz pierwszy w sposób ścisły — znane nam już zadanie znajdowania pola trapezu krzywoliniowego $ABCD$ (rys. 18). Figura ta jest ograniczona z góry krzywą DC , która ma równanie



Rys. 18

$$y = f(x),$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją dodatnią i ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$. Z boków trapez ten jest ograniczony odcinkami pionowymi AD i BC (każdy z tych odcinków może się redukować do jednego punktu), a z dołu odcinkiem AB osi x . Istnienie pola $|P|$ rozpatrywanej figury $ABCD$ wynika właściwie z twierdzeń udowodnionych w poprzednim ustępie i chodzi tylko o obliczenie tego pola.

W tym celu przedział $\langle a, b \rangle$ rozbijamy, jak zwykle, na podprzedziały wstawiając między a i b punkty

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Oznaczmy przez m_i i M_i odpowiednio wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x)$ w i -tym przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), a następnie utwórzmy sumy Darboux

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Wyrażają one oczywiście pola figur schodkowych utworzonych z prostokątów odpowiednio leżących pod krzywą i wychodzących ponad nią (patrz rysunek 18). Dlatego mamy

$$s < |P| < S.$$

Jeśli największa z różnic Δx_i dąży do zera, to granicami obu tych sum jest całka $\int_a^b f(x) dx$ ⁽¹⁾,

(1) W myśl 336, 1) dowodzi to już mierzalności trapezu krzywoliniowego $ABCD$; abytrzymać wzmiankowane tam ciągi figur, można na przykład dzielić przedział na równe części.

a więc szukane pole jest także równe tej całce

$$(7) \quad |P| = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

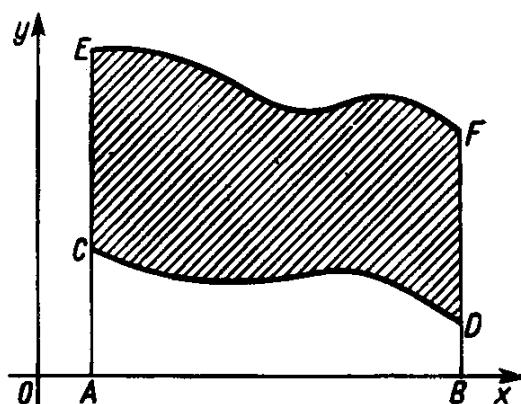
Jeśli trapez krzywoliniowy $CDEF$ jest ograniczony i z góry i z dołu (rys. 19) krzywymi o równaniach

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{i} \quad y_2 = f_2(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

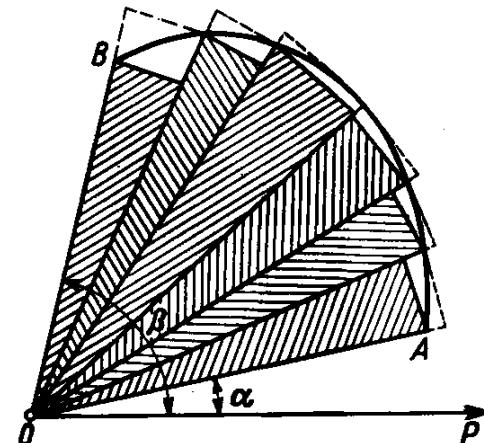
to rozpatrując go jako różnicę dwóch figur $ABFE$ i $ABCD$, otrzymamy pole tego trapezu w postaci

$$(8) \quad |P| = \int_a^b (y_2 - y_1) \, dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx.$$

Niech będzie teraz dany wycinek AOB (rys. 20), ograniczony krzywą AB i dwoma promieniami OA i OB (z których każdy może być punktem). Krzywa AB niech ma równa-



Rys. 19



Rys. 20

nie biegunowe $r = g(\theta)$, gdzie $g(\theta)$ jest funkcją dodatnią w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$. I tu chodzi nam tylko o obliczenie pola $|P|$ tego wycinka, ponieważ istnienie tego pola jest już zagwarantowane własnościami konturu figury.

Między α i β wstawiamy liczby (patrz rysunek 20)

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_i < \theta_{i+1} < \dots < \theta_n = \beta,$$

i prowadzimy promienie odpowiadające tym kątom. Jeśli oznaczymy tu przez μ_i i M_i odpowiednio najmniejszą i największą wartość funkcji $g(\theta)$ w przedziale $\langle \theta_i, \theta_{i+1} \rangle$, to wycinki kołowe zakreślone tymi promieniami będą odpowiednio leżały wewnątrz figury AOB lub wystawały poza nią. Tworzymy z wewnętrznych wycinków i z wystających wycinków dwie figury, których pola są równe odpowiednio

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i^2 \Delta \theta_i \quad \text{i} \quad \Sigma = \frac{1}{2} \sum_i M_i^2 \Delta \theta_i$$

i oczywiście jest $\sigma < |P| < \Sigma$.

Oczywiście sumy σ i Σ są sumami Darboux dla całki $\frac{1}{2} \int_a^b [g(\theta)]^2 d\theta$; jeśli największa z różnic $\Delta\theta_i$ dąży do zera, to granice obu sum są równe tej całce (1), a więc

$$(9) \quad |P| = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b [g(\theta)]^2 d\theta.$$

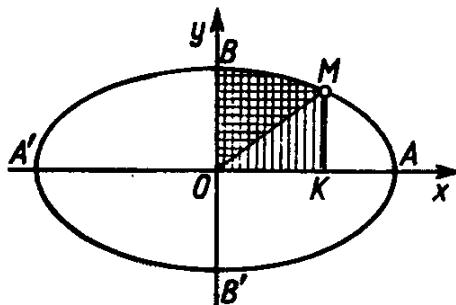
339. Przykłady. 1) Wyznaczyć pole $|P|$ figury ograniczonej linią łańcuchową $y = \cosh \frac{x}{a}$, osią x i dwiema rzędnymi, odpowiadającymi odciętym 0 i x (rys. 9).

Mamy tu

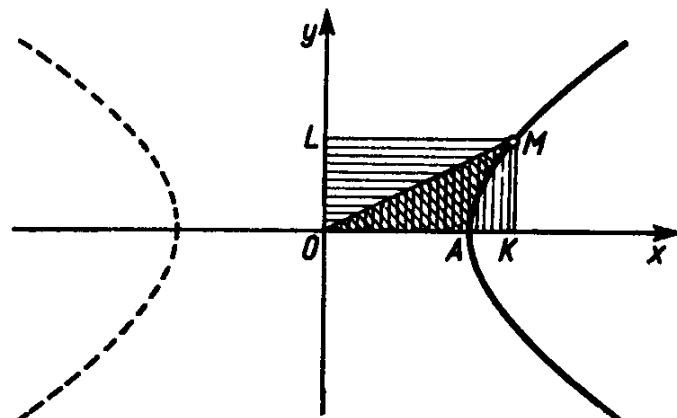
$$|P| = \int_0^x a \cosh \frac{x}{a} dx = a^2 \sinh \frac{x}{a} = as,$$

gdzie s oznacza długość łuku AM linii łańcuchowej [331, 1)]. W ten sposób szukane pole $AOPM$ okazało się równe polu prostokąta o bokach PS i SM (bowiem $SM = AM$).

2) Dana jest elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i punkt $M(x, y)$ na niej (rys. 21). Wyznaczyć pole trapezu krzywoliniowego $BOKM$ i wycinka OMB .



Rys. 21



Rys. 22

Z równania elipsy mamy $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, a więc ze wzoru (7) otrzymujemy dla pola $|P_1|$ figury $BOKM$ wzór

$$|P_1| = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{xy}{2}.$$

Ponieważ ostatni składnik jest równy polu trójkąta OKM , więc odejmując go otrzymamy dla pola $|P_2|$ wycinka OMB wzór

$$|P_2| = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Dla $x = a$ otrzymujemy pole ćwiartki elipsy $\pi ab/4$, a więc pole całej elipsy jest równe $|P| = \pi ab$. Dla koła mamy $a = b = r$ i wtedy dostajemy znany wzór $|P| = \pi r^2$.

3) Dana jest hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i punkt $M(x, y)$ na niej (rys. 22). Wyznaczyć pola figur krzywoliniowych AKM , OAM i $OAML$.

(1) Można tu zrobić uwagę analogiczną do uwagi na str. 166, jednakże z powołaniem się na przykład 2) z ustępu 336.

Z równania hiperboli mamy $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ i oznaczając przez $|P_1|$ pole figury AKM w myśl wzoru (7) jest

$$\begin{aligned}|P_1| &= \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \Big|_a^x = \\ &= \frac{1}{2} xy - \frac{ab}{2} \cdot \frac{\ln x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b}$, więc wyrażeniu temu można nadać bardziej symetryczną postać

$$|P_1| = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

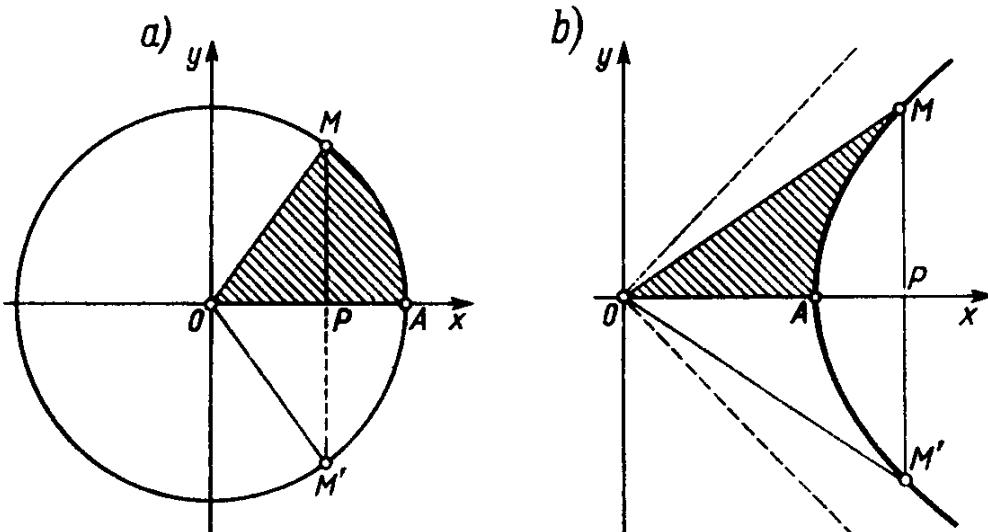
Stąd łatwo już otrzymujemy pole $|P_2|$ figury OAM i pole $|P_3|$ figury $OAML$:

$$|P_2| = \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad |P_3| = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Uwaga. Otrzymany wynik umożliwia nam pewne pogłębienie analogii między funkcjami trygonometrycznymi (kołowymi) i hiperbowymi. Rozważmy koło $x^2 + y^2 = 1$ o promieniu 1 i hiperbolę równoboczną $x^2 - y^2 = 1$ (rys. 23 a i b). Równania parametryczne tych krzywych są następujące:

równanie koła: $OP = x = \cos t, \quad PM = y \sin t,$

równanie hiperboli: $OP = x = \cosh t, \quad PM = v \sinh t.$



Rys. 23

O ile w przypadku koła rola parametru t jest jasna-jest on równy kątowi AOM , to dla hiperboli nie jest możliwa taka interpretacja parametru liczbowego t . Można jednakże dać inną interpretację parametru t w przypadku koła, a mianowicie: t jest równe podwojonemu polu wycinka AOM (lub polu wycinka $M'OM$). Okazuje się, że ta interpretacja przenosi się na hiperbolę.

Rzeczywiście, ponieważ

$$x = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

więc $x + y = e^t$ i $t = \ln(x + y)$. Jeśli we wzorze na $|P_2|$ podstawić $a = b = 1$, to okazuje się, że t jest równe podwojonemu polu wycinka AOM (tak samo, jak dla koła).

Zatem w kole odcinki PM i OP przedstawiają sinus i cosinus kołowy podwojonego pola wycinka kołowego AOM , a dla hiperboli analogiczne odcinki dają sinus i cosinus hiperboliczny podwojonego pola wycinka hiperbowego AOM . Rola funkcji hiperbowych w stosunku do hiperboli jest w pełni analogiczna do roli zwykłych funkcji trygonometrycznych w stosunku do koła. Z podaną interpretacją argumentu funkcji hiperbowych, jako pewnego pola, wiążą się również oznaczenia funkcji odwrotnych do nich [patrz 49, 3) i 4)]

$$\operatorname{Ar} \sinh x, \quad \operatorname{Ar} \cosh x \quad \text{itd.}$$

Litery Ar są początkowymi literami łacińskiego słowa „Area”, oznaczającego pole.

4) Znaleźć pole figury ograniczonej osiami współrzędnych i parabolą

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad (a > 0).$$

Odpowiedź: $|P| = \int_0^a y \, dx = \frac{1}{6} a^3$. Wykonanie rysunku pozostawiamy czytelnikowi.

5) Wyznaczyć pole figury zawartej między dwiema parabolami: $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$ (rys. 24). Należy oczywiście posłużyć się wzorem (8) podstawiając

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}.$$

Aby ustalić przedział całkowania rozwiążemy odpowiedni układ równań i znajdziemy w ten sposób punkt M przecięcia się obu parabol, różny od początku układu. Odcięta tego punktu jest równa $2p$. Mamy więc

$$|P| = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{3/2} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{4}{3} p^3.$$

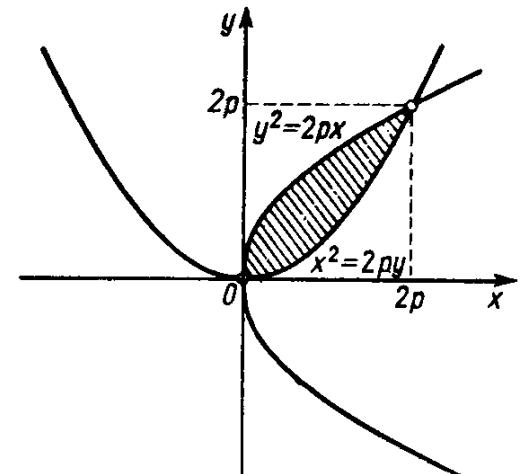
6) Znaleźć pole elipsy o równaniu

$$(10) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, \quad C > 0).$$

Rozwiązanie. Z równania elipsy mamy

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2 x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2 x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$



Rys. 24

przy tym y_1 i y_2 przyjmują wartości rzeczywiste tylko dla takich wartości argumentu x , które spełniają nierówność

$$C - (AC - B^2)x^2 < 0,$$

tzn. dla wartości z przedziału $(-\alpha, \alpha)$, gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$.

Wobec tego szukane pole jest równe

$$\begin{aligned} |P| &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2 - y_1) dx = \frac{2}{C} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{C - (AC - B^2)x^2} dx = \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \frac{1}{2} \pi \alpha^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

7) Niech wreszcie elipsa będzie dana za pomocą równania ogólnego

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0;$$

należy znów znaleźć jej pole $|P|$.

Zadanie to można sprowadzić do poprzedniego.

Jeśli początek układu współrzędnych przeniesiemy do środka elipsy o współrzędnych (ξ, η) , które jak wiadomo – można wyznaczyć z równań

$$(11) \quad \begin{aligned} a\xi + b\eta + d &= 0, \\ b\xi + c\eta + e &= 0, \end{aligned}$$

to równanie tej elipsy przyjmie postać

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f' = 0,$$

gdzie

$$(12) \quad f' = d\xi + e\eta + f.$$

Rugując ξ, η z równości (11) i (12), znajdujemy

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f-f' \end{vmatrix} = 0,$$

a stąd

$$f' = \frac{\Delta}{ac-b^2}, \quad \text{gdzie } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ (1).}$$

Otrzymane równanie łatwo jest sprowadzić do postaci podanej w 6), podstawiając

$$A = -\frac{a}{f'}, \quad B = -\frac{b}{f'}, \quad C = -\frac{c}{f'}.$$

Znaczy to, że pole elipsy jest równe

$$|P| = \frac{\pi |f'|}{\sqrt{ac-b^2}} = -\frac{\pi \Delta}{(ac-b^2)^{3/2}}.$$

8) Można używać wzoru (7) również w tym przypadku, kiedy krzywa ograniczająca trapez krzywoliniowy dana jest za pomocą równań parametrycznych lub też równań postaci (6). Dokonując bowiem w całce (7) zamiany zmiennych, otrzymujemy (przy założeniu, że $x = a$ dla $t = t_0$ i $x = b$ dla $t = T$):

$$(13) \quad |P| = \int_{t_0}^T yx' dt = \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Obliczymy na przykład pole elipsy przy założeniu, że jest ona dana równaniami parametrycznymi

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

i pamiętając, że x wzrasta od $-a$ do a , kiedy t zmienia się od π do 0. Otrzymujemy wtedy

$$|P| = 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Obliczyliśmy tu pole górnej połówki elipsy i podwoiliśmy je.

(1) Oczywiście liczby f' i Δ są ujemne (w przeciwnym razie równanie nie przedstawiłoby krzywej rzeczywistej).

9) W analogiczny sposób oblicza się pole figury organicznej cykloidą $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$. Ze wzoru (13) mamy

$$|P| = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Okazuje się, że szukane pole jest równe potrojemu polu koła, którego punkt zakreśla cykloidę.

10) Znaleźć pole jednego zwoju spirali Archimedesa: $r = a\theta$ (rys. 25).

Ze wzoru (9) mamy

$$|P_1| = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6} a^2 \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2,$$

podczas gdy pole koła o promieniu $2\pi a$ jest równe $4\pi^3 a^2$. Pole jednego zwoju spirali jest więc równe $\frac{1}{3}$ pola koła (wynik ten znał już Archimedes).

Proponujemy, aby czytelnik udowodnił, że po- la figur, ograniczonych kolejnymi zwojami krzywej, tworzą postęp arytmetyczny o różnicy $8\pi^3 a^2$.

11) Znaleźć pole ślimaka

$$r = a \cos \theta + b \quad (b < a).$$

Ze wzoru (9) mamy

$$|P| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} a^2 + b^2 \right) \theta + \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta + 2ab \sin \theta \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi (a^2 + 2b^2).$$

W szczególności pole kardioidy ($b = a$) jest równe $\frac{3}{2} \pi a^2$.

12) Znaleźć pole lemniskaty $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

Wystarczy w tym celu podwoić pole prawego owalu, dla którego kąt θ zmienia się od $-\pi/4$ do $\pi/4$. Wobec tego

$$|P| = 2 \cdot \frac{1}{2} 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 2a^2.$$

13) Znaleźć pole liścia Kartezjusza $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Przejdźmy do współrzędnych biegunowych. Podstawiając w równaniu krzywej $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ i skracając przez r^2 dostajemy następujące równanie biegunowe:

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

Ponieważ jedna pętla krzywej odpowiada kątom θ od 0 do $\pi/2$, to w myśl wzoru (9) będzie

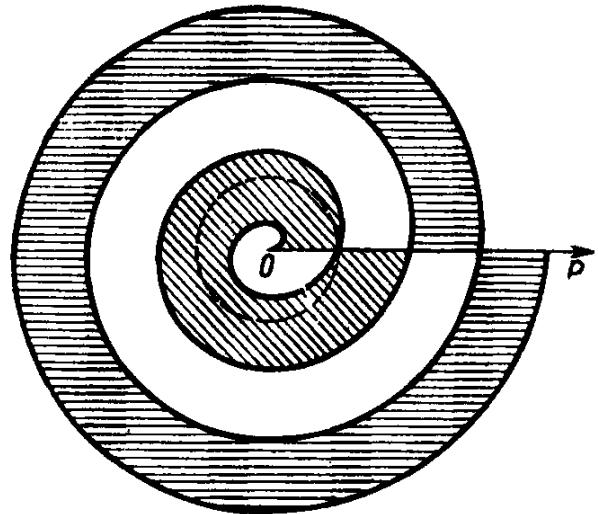
$$|P| = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta.$$

Zastępując $\sin \theta$ przez $\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta$, doprowadzimy wyrażenie podcałkowe do postaci

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \theta d(\operatorname{tg} \theta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2}.$$

a stąd od razu znajdujemy funkcję pierwotną

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$



Rys. 25

W ten sposób mamy

$$|P| = -\frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^2 \theta} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{2}.$$

14) Rozwiązać powtórnie zadanie 6) posługując się współrzędnymi biegunowymi.

Rozwiązanie. Wprowadzając współrzędne biegunowe otrzymujemy równanie elipsy w postaci

$$r^2 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta}.$$

Wobec tego w myśl wzoru (9) dostajemy od razu [309, 9)]

$$|P| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Pole całej elipsy wyznaczyliśmy tu jako podwojone pole tej części elipsy, która leży w ćwiartkach I i IV. Jakie trudności napotkalibyśmy, gdybyśmy chcieli skorzystać z wyniku 10) z ustępu 288 do obliczenia całego pola elipsy?

15) Wzór (9) można przystosować do przypadku, kiedy krzywa dana jest równaniami parametrycznymi postaci (6). Ponieważ jest

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \theta' = \frac{xy'_t - x'_t y}{x^2 + y^2},$$

więc

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} (xy'_t - x'_t y) dt.$$

Jeśli zmianie kąta θ od α do β odpowiada zmiana parametru t od t_0 do T , to

$$(14) \quad |P| = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (xy'_t - x'_t y) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t)] dt.$$

Dzięki większej symetrii wzór ten prowadzi często do prostszych obliczeń. Jeśli na przykład zastosujemy ten wzór do obliczenia pola elipsy, danej równaniami parametrycznymi $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, to otrzymujemy

$$|P| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

16) Posługując się wzorem (14) obliczymy jeszcze pole asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Mamy tu

$$\begin{aligned} |P| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \left. \frac{3}{16} a^2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \right|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

340. Definicja i własności pojęcia objętości. Podobnie jak w ustępie 335, wychodząc z pojęcia wielokąta, wprowadziliśmy pojęcie pola dowolnej figury płaskiej, tak teraz opierając się na pojęciu objętości wielościanu zdefiniujemy objętość bryły.

Niech więc będzie dana bryła V dowolnego kształtu, tzn. obszar ograniczony domknięty w przestrzeni trójwymiarowej. Brzegiem S tej bryły niech będzie powierzchnia zamknięta⁽¹⁾ (lub kilka takich powierzchni).

(1) Mamy na myśli powierzchnię ciągłą, którą można przedstawić równaniami parametrycznymi.

Będziemy rozpatrywali wielościany X o objętości $|X|$, zawarte całkowicie w naszej bryle oraz wielościany Y o objętości $|Y|$ zawierające w sobie całą bryłę. Zawsze istnieje kres górny $|V_*|$ liczb $|X|$ i kres dolny $|V^*|$ liczb $|Y|$, przy czym $|V_*| \leq |V^*|$; można by nazywać te kresy odpowiednio *wewnętrzna i zewnętrzna objętością bryły*. Jeśli oba kresy

$$|V_*| = \sup \{|X|\} \quad \text{i} \quad |V^*| = \inf \{|Y|\}$$

są równe, to wtedy ich wspólną wartość $|V|$ nazywamy *objętością*⁽¹⁾ bryły V .

W tym przypadku — podobnie jak dla figur płaskich — bryła ta nazywa się *mierzalna*. Tutaj także widać, że dla istnienia objętości potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego $\varepsilon > 0$ można było znaleźć takie dwa wielościany X i Y , dla których $|Y| - |X| < \varepsilon$.

Podobnie mamy dalej:

Jeśli bryła V jest rozbita na dwie bryły V_1 i V_2 i jeśli istnieją objętości dwóch spośród tych trzech brył, to wynika stąd istnienie objętości trzeciej bryły, przy czym jest

$$|V| = |V_1| + |V_2|,$$

tz., że objętość ma też własność addytywności.

Łatwo można również sformułować dla objętości twierdzenia analogiczne do twierdzeń 1), 2) i 3), które dla pól udowodniliśmy w ustępie 336.

1) *Na to, żeby bryła V miała objętość, potrzeba i wystarcza, aby istniały dwa ciągi wielościanów $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$, odpowiednio zawartych w tej bryle i zawierających ją, których objętości mają wspólną granicę*

$$\lim |X_n| = \lim |Y_n| = |V|.$$

Ta granica będzie właśnie objętością bryły V .

Warto zauważyć, że twierdzenie to jest również prawdziwe, jeśli zamiast wielościanów bierzemy dowolne bryły, które mają objętości.

2) *Jeśli dla bryły V można podać taki ciąg $\{T_n\}$ brył zawartych w bryle V i ciąg $\{U_n\}$ brył zawierających ją, które mają objętości i przy tym objętości te mają wspólną granicę*

$$\lim |T_n| = \lim |U_n| = |V|,$$

to bryła V ma objętość równą tej wspólnej granicy.

Zwracamy wreszcie uwagę na możliwość wybierania w sposób „standardowy” rozpatrywanych wielościanów aproksymujących objętość bryły. Najpierw znajdujemy taki prostopadłościan W o ścianach równoległych do płaszczyzn współrzędnych, że bryła leży całkowicie wewnątrz niego. Następnie rozcinamy go na części płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn współrzędnych. Te z otrzymanych w ten sposób małych prostopadłościanów, które leżą całkowicie wewnątrz bryły V , tworzą bryłę X^* , dodając zaś do niej jeszcze te prostopadłościany, które częściowo wychodzą poza V , otrzymamy bryłę Y^* . Bryły te są szczególnym przypadkiem wielościanów X i Y , o których mówiliśmy

(1) Przyjęta jest także nazwa *miara Jordana* (przypis redakcji wydania polskiego).

wyżej. Przez d oznaczamy najdłuższą z przekątnych prostopadłościanów, na które został podzielony prostopadłoscian W .

3) *Bryła V ma objętość wtedy i tylko wtedy, gdy dla $d \rightarrow 0$ objętości $|X^*|$ i $|Y^*|$ dążą do wspólnej granicy $|V|$. Jeśli spełniony jest ten warunek, to wspomniana granica daje objętość bryły V .*

Dowody tych wszystkich twierdzeń pozostawiamy czytelnikowi; łatwo je skopiować z rozumowań z ustępu 336.

341. Klasy brył mających objętości. Podobnie jak w przypadku pola, istnienie objętości bryły V zależy całkowicie od własności brzegu S tej bryły. Jedno z kryteriów istnienia objętości [porównaj 338] brzmi następująco: *na to, aby bryła V miała objętość, potrzeba i wystarcza, żeby jej brzeg S miał objętość 0*, tzn., żeby można było ten brzeg umieścić w bryle wielościennej o dowolnie małej objętości.

Do powierzchni, których objętość jest równa 0, należą przede wszystkim powierzchnie mające równania jednej z trzech postaci

$$z = f(x, y) \quad y = g(x, z) \quad \text{lub} \quad x = h(y, z),$$

gdzie funkcje f , g i h są funkcjami ciągłymi dwóch zmiennych, określonymi w pewnych obszarach ograniczonych.

Przypuśćmy na przykład, że dane jest równanie typu pierwszego w obszarze P , zarywym w prostokącie R . Na mocy twierdzenia z ustępu 174 dla każdego $\varepsilon > 0$, można rozbić ten prostokąt na tak małe prostokąty R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), żeby oscylacja funkcji f w tej części P , obszaru P , która jest zawarta w R_i , była mniejsza od ε/R . Jeśli m_i i M_i oznaczają najmniejszą i największą wartość funkcji f w obszarze P_i , to cała nasza powierzchnia leży w wielościanie złożonym z prostopadłościanów, których pola podstaw są równe R_i , a wysokości wynoszą $\omega_i = M_i - m_i$. Objętość tego wielościanu jest równa

$$\sum \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

co należało udowodnić.

A więc, jeśli bryła V jest ograniczona kilkoma powierzchniami ciągłymi, z których każda z osobna ma równanie jednego z trzech podanych wyżej typów, to bryła ma objętość.

Aby sformułować stosowany zazwyczaj w praktyce szczególny przypadek tego kryterium, wprowadzimy pojęcie powierzchni gładkiej.

Niech powierzchnia będzie określona równaniami parametrycznymi

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

gdzie funkcje φ , ψ , χ są ciągłe i mają ciągle pierwsze pochodne cząstkowe w pewnym ograniczonym i domkniętym obszarze na płaszczyźnie uv . Przyjmujemy, że brzeg L tego obszaru składa się z krzywych gładkich. Założymy wreszcie, że na powierzchni tej nie ma ani punktów wielokrotnych, ani w ogóle punktów osobliwych. Jeśli spełnione są wszystkie te warunki, to powierzchnia nazywa się gładka.

Niech M^* oznacza dowolny punkt powierzchni, określony przez wartości parametrów $u = u^*$ i $v = v^*$. Ponieważ z założenia punkt ten nie jest osobliwy, można więc znaleźć [patrz 228] ⁽¹⁾ takie jego otoczenie

$$\sigma^* = (u^* - \delta^*, u^* + \delta^*; v^* - \delta^*, v^* + \delta^*),$$

żeby odpowiednia część powierzchni dała się przedstawić równaniem nieuwikłanym. Wystarczy teraz zastosować lemat Borela [175] do obszaru domkniętego Q i do pokrywającego go układu otoczeń $\Sigma = \{\sigma^*\}$, a okaże się, że możliwy jest rozkład danej powierzchni gładkiej na skończoną liczbę części, z których każdą można już przedstawić równaniem nieuwikłanym jednego z trzech typów. W myśl poprzedniego wynika stąd, że *powierzchnia gładka ma objętość równą 0*.

Teraz jest już oczywiste, że:

Bryła ograniczona jedną lub kilkoma powierzchniami gładkimi ma na pewno objętość.

Wynik ten jest słuszny również dla brył ograniczonych powierzchniami mającymi skończoną liczbę punktów osobliwych, gdyż punkty te można oddzielić otoczeniami o dowolnie małej objętości.

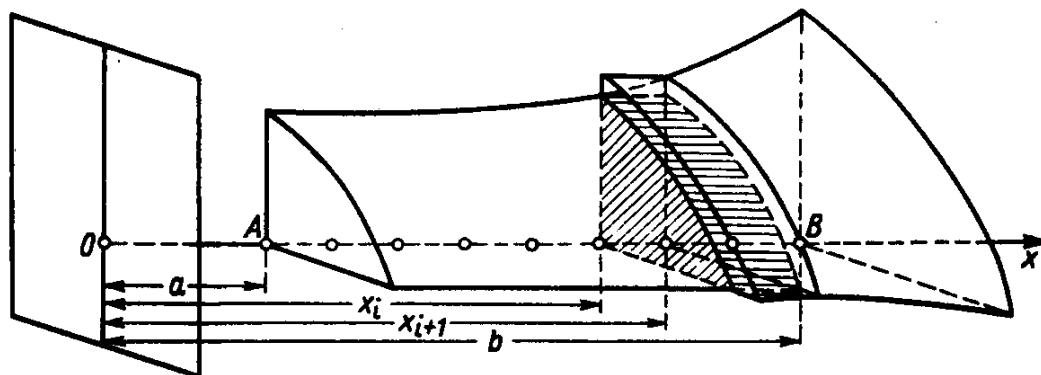
342. Wyrażenie objętości za pomocą całki. Zaczniemy od prawie oczywistej uwagi: *objętość walca prostego o wysokości H , którego podstawą jest płaska figura mierzalna P , istnieje i jest równa iloczynowi pola podstawy przez wysokość: $|V| = |P| H$.*

Rozpatrzymy [336, 1)] wielokąty A_n i B_n , odpowiednio, zawarte w obszarze P i zawierające ten obszar, których pola $|A_n|$ i $|B_n|$ dążą do $|P|$. Jeśli te wielokąty przyjąć za podstawy graniastosłupów prostych o wysokości H , to objętości tych graniastosłupów

$$|X_n| = |A_n| H \quad \text{i} \quad |Y_n| = |B_n| H$$

dążą do wspólnej granicy $|V| = |P| H$, która na mocy twierdzenia 1) z ustępu 340 jest równa objętości naszego walca.

Rozpatrzymy teraz pewną bryłę V , leżącą między płaszczyznami $x = a$ i $x = b$; będziemy ją rozcinali płaszczyznami prostopadłymi do osi x (rys. 26). Założymy, że wszystkie te

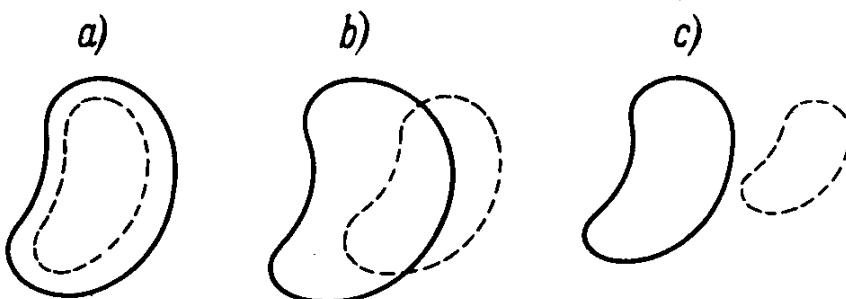


Rys. 26

przekroje są mierzalne i oznaczmy przez $|P(x)|$ pole przekroju odpowiadającego odciętej x . Założymy wreszcie, że funkcja $|P(x)|$ jest ciągła w przedziale (a, b) .

⁽¹⁾ Jeśli punkt (u^*, v^*) leży na brzegu L obszaru Q , to należy uwzględnić to, co powiedzieliśmy w ustępie 262.

Jeśli zrzutujemy (bez deformacji) dwa takie przekroje na jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do osi x , to rzuty te mogą być zawarte jeden w drugim (jak na rys. 27 a)) albo częściowo zachodzić na siebie (rys. 27 b)), albo wreszcie mogą leżeć jeden na zewnątrz drugiego (rys. 27 c)).



Rys. 27

Zatrzymamy się najpierw na przypadku, kiedy rzuty na płaszczyznę prostopadłą do osi x dwu różnych przekrojów są zawsze zawarte jeden w drugim.

Przy tym założeniu twierdzimy, że bryła V ma objętość, wyrażającą się wzorem

$$(15) \quad |V| = \int_a^b |P(x)| dx .$$

Dla dowodu rozbijamy przedział $\langle a, b \rangle$ osi x na podprzedziały punktami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b ,$$

a całą bryłę rozcinamy na warstwy płaszczyznami $x = x_i$ poprowadzonymi przez te punkty podziału. Rozpatrzymy i -tą warstwę zawartą między płaszczyznami $x = x_i$ i $x = x_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Funkcja $|P(x)|$ przyjmuje w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ wartość największą M_i i najmniejszą m_i . Jeśli wszystkie przekroje odpowiadające różnym wartościom zmiennej x z tego przedziału zrzutujemy na jedną płaszczyznę, np. na płaszczyznę $x = x_i$, to — przy przyjętym założeniu — wszystkie te przekroje leżą wewnątrz największego z nich, którego pole wynosi M_i , i zawierają przekrój o najmniejszym polu m_i . Jeśli na najmniejszym i największym przekroju zbudujemy dwa walce proste o wysokości $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, to większy z nich zawiera całkowicie rozpatrywaną warstwę bryły, a mniejszy jest zawarty w tej warstwie. Na podstawie uwagi podanej na początku, objętości tych walców są równe odpowiednio $M_i \Delta x_i$ i $m_i \Delta x_i$.

Walce zawarte w kolejnych warstwach tworzą bryłę T , a walce obejmujące te warstwy — bryłę U ; objętości tych brył są równe odpowiednio

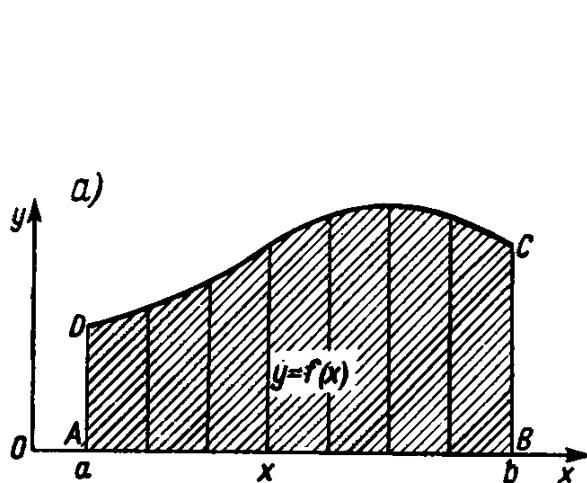
$$\sum_i M_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad \sum_i m_i \Delta x_i$$

i gdy $\lambda = \max \Delta x_i$ dąży do zera, to sumy te mają wspólną granicę równą całce (15). Na mocy twierdzenia 2) z ustępu 340 taka sama jest objętość bryły V ⁽¹⁾.

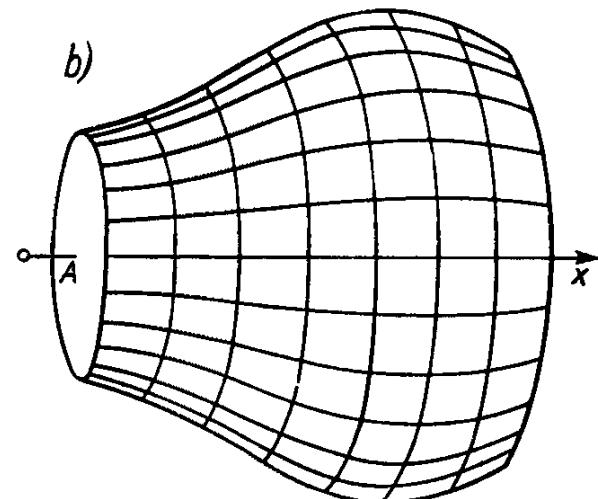
Ważny przypadek szczególny, w którym spełnione są wskazane wyżej założenia o wzajemnym położeniu przekrojów, stanowią bryły obrotowe. Wyobraźmy sobie na

(1) Dzieląc na przykład przedział na równe części łatwo można otrzymać ciągi brył zawarte w bryle V i zawierające ją, o których jest mowa w cytowanym twierdzeniu.

płaszczyźnie xy krzywą o równaniu $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), gdzie funkcja $f(x)$ jest nieujemną funkcją ciągłą. Obracając trapez krzywoliniowy $ABCD$, ograniczony z góry przez tę krzywą, dokoła osi x , otrzymamy bryłę V (rys. 28), która oczywiście podpada pod omawiany przypadek, gdyż rzuty jej przekrojów na płaszczyznę prostopadłą do osi x są kołami współśrodkowymi. Mamy tu



Rys. 28



wiany przypadek, gdyż rzuty jej przekrojów na płaszczyznę prostopadłą do osi x są kołami współśrodkowymi. Mamy tu

$$|P(x)| = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2,$$

a więc

$$(16) \quad |V| = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Jeśli trapez krzywoliniowy jest ograniczony od dołu i z góry krzywymi $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$, to jest oczywiście

$$(17) \quad |V| = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} dx,$$

choć założenie o przekrojach może tu nie być spełnione. Udowodniony wynik łatwo jest rozciągnąć na wszystkie bryły powstające przez dodawanie lub odejmowanie brył, których przekroje spełniają wspomniany warunek.

Ogólnie prawdziwe jest jedynie następujące twierdzenie:

Jeśli bryła V ma objętość ⁽¹⁾, to objętość ta wyraża się wzorem (15).

Rzeczywiście, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy między płaszczyznami $x = a$ i $x = b$ zbudować takie dwie bryły X^* i Y^* , złożone z równoległościianów, żeby pierwsza z nich leżała całkowicie wewnątrz bryły V , a druga zawierała V i żeby przy tym było $Y^* - X^* < \varepsilon$. Ponieważ do tych brył można zastosować wzór (15), więc oznaczając przez $|A(x)|$ i $|B(x)|$ pola przekrojów tych brył otrzymujemy

$$|X^*| = \int_a^b |A(x)| dx, \quad |Y^*| = \int_a^b |B(x)| dx.$$

⁽¹⁾ Tak będzie na przykład, jeśli bryła jest ograniczona jedną lub większą liczbą powierzchni gładkich [341].

Ponieważ z drugiej strony, $|A(x)| \leq |P(x)| \leq |B(x)|$, zatem również

$$|X^*| = \int_a^b |A(x)| dx \leq \int_a^b |P(x)| dx \leq \int_a^b |B(x)| dx = |Y^*|.$$

Tak więc zarówno objętość $|V|$ jak i całka $\int_a^b |P(x)| dx$ są zawarte między liczbami $|X^*|$ i $|Y^*|$, które różnią się o mniej niż ε . Stąd wynika już żądanym wniosek.

343. Przykłady. 1) Obliczyć objętość $|V|$ stożka kołowego o wysokości h i o promieniu podstawy r .

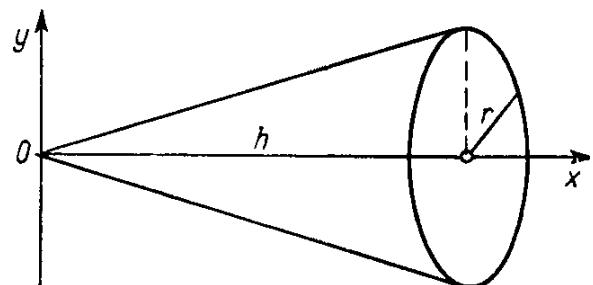
Przez osią stożka prowadzimy płaszczyznę. W płaszczyźnie tej wybieramy układ współrzędnych w sposób następujący: wierzchołek stożka przyjmiemy za początek układu, osią stożka — za osią x , a osią y prowadzimy przez wierzchołek stożka prostopadle do osi x (rys. 29). Równanie tworzącej stożka jest następujące:

$$y = \frac{r}{h} x;$$

w myśl wzoru (16) otrzymujemy

$$|V| = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Wynik ten jest znany czytelnikowi ze szkolnego kursu matematyki.



Rys. 29

2) Znaleźć objętość $|V|$ elipsoidy obrotowej powstałej przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ okoła osi x .

Mamy tu $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, więc

$$|V| = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Analogicznie otrzymujemy, że objętość bryły, powstałej przez obrót tej elipsyokoła osi y , jest równa $\frac{4}{3} \pi a^2 b$. Podstawiając w tych wzorach $a = b = r$ otrzymujemy dla objętości kuli o promieniu r znaną wartość $\frac{4}{3} \pi r^3$.

3) Znaleźć objętość bryły powstałej przez obrót linii łańcuchowej $y = a \cosh \frac{x}{a}$ okoła osi x i ograniczonej przekrojami odpowiadającymi punktom 0 i x .

Mamy

$$\begin{aligned} |V| &= \pi a^2 \int_0^x \cosh^2 \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \int_0^x \left(1 + \cosh \frac{2x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \left(x + \frac{a}{2} \sinh \frac{2x}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \pi a \left(ax + a \cosh \frac{x}{a} \cdot a \sinh \frac{x}{a} \right). \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy, że $a \sinh \frac{x}{a}$ jest długością łuku s naszej krzywej [331, 1)], to otrzymamy ostatecznie $|V| = \frac{1}{2} \pi a (ax + sy)$.

4) Rozwiązać analogiczne zadanie dla jednej gałęzi cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Parametryczne równania krzywej ułatwiają dokonanie podstawienia w całce

$$|V| = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx.$$

Rzeczywiście, $x = a(t - \sin t)$, $dx = a(1 - \cos t) dt$, zatem

$$|V| = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5) Rozwiązać analogiczne zadanie dla asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Mamy tu

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}, \quad |V| = \pi \int_{-a}^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

Proponujemy czytelnikowi powtórzenie rachunków, wychodząc z równań parametrycznych asteroidy i dokonując w całości zamiany zmiennej (podobnie jak w zadaniu poprzednim).

6) Znaleźć objętość części wspólnej paraboloidy $2az = x^2 + y^2$ i kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

Rozwiązanie. Ponieważ obie te powierzchnie powstają przez obrót krzywych dokola osi z , więc bryła ograniczona przez nie jest bryłą obrotową. Powierzchnie te przecinają się po krzywej leżącej na płaszczyźnie $z = a$.

Płaszczyzny równoległe do osi z przecinają rozpatrywaną bryłę wzduż kół; kwadraty promieni tych kół są równe $2az$, jeśli $z < a$ i $3a^2 - z^2$, gdy tylko $z > a$. Posługując się wzorem analogicznym do wzoru (16) otrzymujemy

$$|V| = 2\pi a \int_0^a z dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5).$$

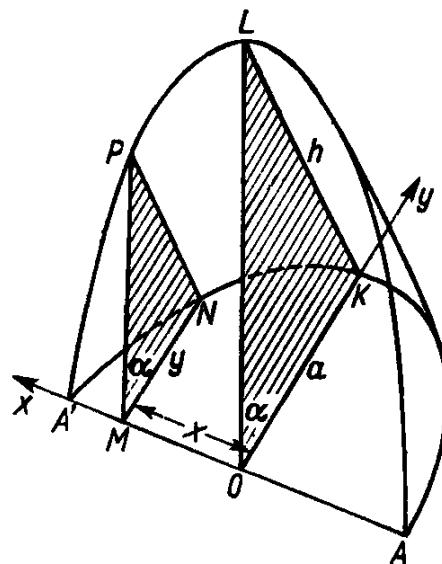
7) Znaleźć objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i stożka $x^2 = y^2 + z^2$ ($x > 0$).

Wskazówka. Krzywa, wzduż której przecinają się te powierzchnie, leży na płaszczyźnie $x = R/\sqrt{2}$. Mamy więc

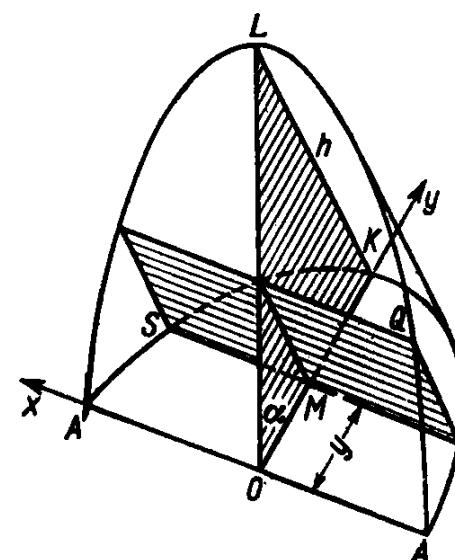
$$|V| = \pi \int_0^{R/\sqrt{2}} x^2 dx + \int_{R/\sqrt{2}}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi R^3}{3} (2 - \sqrt{2}).$$

Do tej pory rozpatrywaliśmy przykłady zastosowania wzoru (16). Przejdziemy teraz do zastosowania ogólnego wzoru (15). Ponieważ we wszystkich przypadkach samo istnienie objętości łatwo wynika z rozważań podanych w ustępie 341, nie będziemy się na tym zatrzymywać i zajmiemy się tylko obliczaniem objętości.

8) Wyznaczyć objętość odcinka walca. Tak nazywamy tu bryłę geometryczną, którą otrzymuje się przez obcięcie walca płaszczyzną przechodzącą przez średnicę podstawy (rys. 30).



Rys. 30



Rys. 31

Przyjmujemy, że podstawą walca jest koło o promieniu a :

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

i że płaszczyzna tnąca przechodzi przez średnicę AA' i tworzy kąt α z płaszczyzną podstawy. Znajdziemy najpierw pole przekroju rozpatrywanej bryły płaszczyzną prostopadłą do osi x i przecinającą ją w punkcie $M(x)$. Przekrój ten jest trójkątem prostokątnym MNP i jego pole wynosi oczywiście

$$|P(x)| = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

a więc ze wzoru (15) otrzymujemy

$$|V| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h,$$

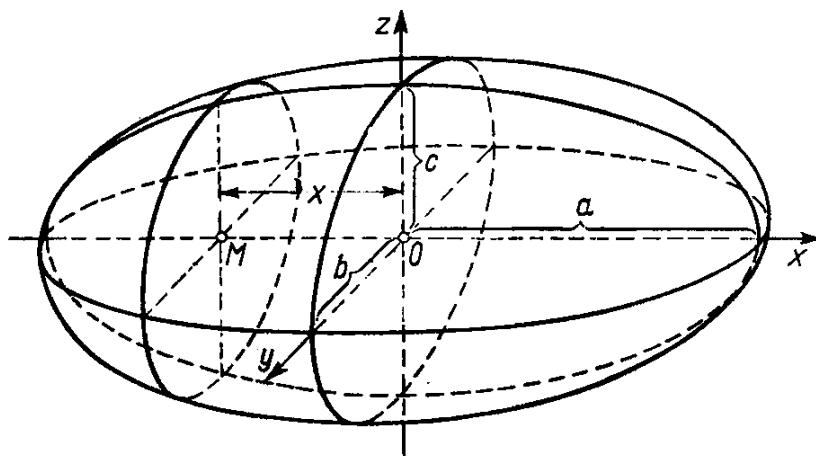
gdzie $h = KL$ oznacza wysokość odcinka walca.

Warto zauważyć, że tę samą objętość można otrzymać zamieniając rolami osie x i y , tzn. rożcinając bryłę płaszczyznami prostopadłymi do osi y (rys. 31). Przekrój taką płaszczyzną przechodzącą przez punkt M o rzędnej y jest prostokątem SQ , którego pole wynosi

$$|P(y)| = 2xy \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Ze wzoru (15) otrzymujemy analogicznie

$$|V| = 2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha (a^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$



Rys. 32

9) Znaleźć objętość elipsoidy trójosiowej (rys. 32) określonej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Płaszczyzna prostopadła do osi x i przechodząca przez punkt $M(x)$, leżący na tej osi, przecina elipsoidę wzdłuż elipsy; równanie rzutu tej elipsy (bez deformacji) na płaszczyznę yz jest następujące:

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \quad (x = \text{const}).$$

Widac stąd, że półosie tej elipsy są równe odpowiednio

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{i} \quad c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

a pole wyraża się wzorem [patrz 339, 2), 8), 15)]

$$P(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi b c}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Ze wzoru (15) otrzymujemy zatem szukaną objętość

$$|V| = \frac{\pi b c}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

10) Znaleźć objętość elipsoidy o równaniu

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 1,$$

której środek leży w początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie. Jeśli ustalimy z , to równanie odpowiedniego przekroju (lub dokładniej — jego rzutu na płaszczyznę xy) ma postać

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

gdzie wprowadzone zostały oznaczenia

$$a = A, \quad b = H, \quad c = B, \quad d = Gz, \quad e = Fz \quad f = Cz^2 - 1.$$

W myśl przykładu 7) z ustępu 339 pole tego przekroju wynosi

$$P(z) = -\frac{\pi \Delta^*}{(AB - H^2)^{3/2}},$$

gdzie Δ^* oznacza wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2 - 1 \end{vmatrix} = \Delta z^2 - (AB - H^2),$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

Po odpowiednim podstawieniu wzór na pole ma postać

$$|P(z)| = -\frac{\pi}{(AB - H^2)^{3/2}} [\Delta z^2 - (AB - H^2)].$$

Oczywiście zmienia się tylko w przedziale od $-\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}}$ do $+\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}}$; całkując w tych granicach otrzymujemy ostatecznie

$$|V| = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

11) Rozpatrzymy teraz dwa walce kołowe, obojęt o promieniach r , których osie przecinają się pod kątem prostym. Obliczymy objętość bryły ograniczonej tymi walcami.

Bryła $OABCD$ przedstawiona na rysunku 33 jest jedną ósmą interesującej nas bryły. Oś x poprowadzimy przez punkt O przecięcia się osi walców prostopadłe do obu tych osi. Wtedy przekrój bryły $OABCD$ płaszczyzną, poprowadzoną prostopadłe do osi x w odległości x od punktu O , jest kwadratem $KLMN$, którego bok wynosi $MN = \sqrt{r^2 - x^2}$, a zatem pole $|P(x)| = r^2 - x^2$. Ze wzoru (15) otrzymujemy więc

$$|V| = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} r^3.$$

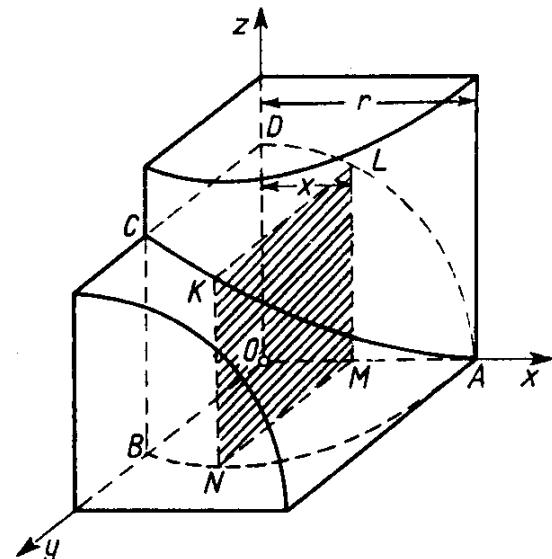
12) Rozwiązać to samo zadanie przy założeniu, że promienie tych walców są różne: $r < R$.

Różnica w porównaniu z poprzednim zadaniem polega jedynie na tym, że odpowiedni przekrój nie jest teraz kwadratem, ale prostokątem o bokach $\sqrt{r^2 - x^2}$ i $\sqrt{R^2 - x^2}$. Zatem w tym przypadku objętość wyraża się całką eliptyczną

$$|V| = 8 \int_0^r \sqrt{(R^2 - x^2)(r^2 - x^2)} dx.$$

Podstawiając w tej całce $x = r \sin \varphi$ i $k = r/R$, otrzymujemy

$$|V| = 8Rr^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 8Rr^2 \cdot I.$$



Rys. 33

Sprowadzmy teraz całkę I do całek eliptycznych zupełnych obu rodzajów. Przede wszystkim jest

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - k^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = I_1 + I_2.$$

Dalej

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{k^2 - 1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) K(k) + \frac{1}{k^2} E(k). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k) - 2I. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$I = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{k^2} + 1 \right) E(k) - \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) K(k) \right].$$

W ten sposób otrzymujemy ostatecznie

$$|V| = \frac{8}{3} R^3 [(1+k^2) E(k) - (1-k^2) K(k)].$$

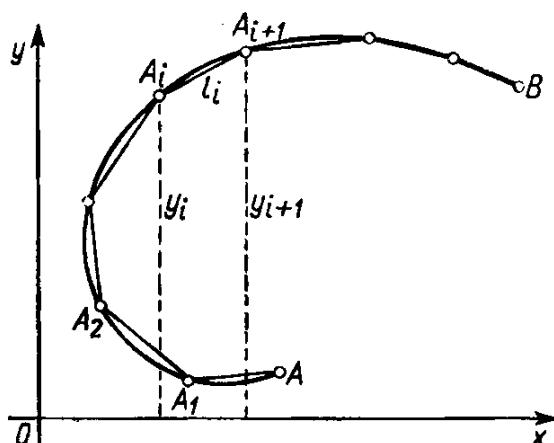
344. Pole powierzchni obrotowej. Przypuśćmy, że w płaszczyźnie xy (a dokładniej w górnej półpłaszczyźnie) dana jest pewna krzywa AB (rys. 34) o równaniach postaci (6), gdzie φ, ψ są funkcjami ciągłymi, których pierwsze pochodne φ', ψ' są również ciągłe. Przy założeniu, że na krzywej nie ma ani punktów osobliwych, ani wielokrotnych, możemy wprowadzić dla niej jako parametr łuk s , liczony od punktu $A (t_0)$. Otrzymamy wtedy równania parametryczne postaci

$$(18) \quad x = \Phi(s), \quad y = \Psi(s).$$

Parametr s zmienia się tu od 0 do S , gdzie S oznacza długość całej krzywej AB .

Przez obrót krzywejokoła osi x powstaje pewna *powierzchnia obrotowa*. Zadaniem naszym będzie obliczenie pola tej powierzchni.

Nie mamy możliwości zdefiniowania tu ogólnego pojęcia pola powierzchni zakrzywionej (tzn. nie płaskiej); zrobimy to w trzecim tomie. Obecnie zdefiniujemy to pojęcie tylko dla powierzchni obrotowych i nauczymy się obliczać pole takich powierzchni. Za punkt wyjścia dla tej definicji przyjmujemy znane ze szkoły reguły obliczania pól powierzchni bocznych walca, stożka i stożka świętego. Później przekonamy się, że wzór, który otrzymamy teraz, jest szczególnym przypadkiem wzoru ogólnego na pole powierzchni zakrzywionej.



Rys. 34

Wybieramy na krzywej AB w kierunku od A do B $n+1$ punktów (patrz rysunek 34)

$$(19) \quad A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_t, A_{t+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B$$

i rozpatrzmy łamianę $A_0 A_1 \dots A_{n-1} B$, wpisaną w krzywą. Wraz z krzywą obracamyokoła osi x również tę łamianę; opisuje ona pewną powierzchnię, której pole umiemy znaleźć na podstawie wzorów z geometrii elementarnej. Przez *pole powierzchni* opisanej przez krzywą, będziemy rozumieli granicę pól $|Q|$ powierzchni opisywanych przez łamianą, przy założeniu, że długość najdłuższego odcinka łamanej dąży do 0. Ta definicja pola powierzchni obrotowej nasuwa nam metodę jego obliczania.

Wiemy już, że ciąg punktów (19) odpowiada rosnącemu ciągowi wartości parametru s , wstawionych między 0 i S :

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_t < s_{t+1} < \dots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Każde ognisko łamanej przy obrocieokoła osi x opisuje powierzchnię stożka świętego⁽¹⁾. Jeśli oznaczmy rzędne punktów A_t i A_{t+1} odpowiednio przez y_t i y_{t+1} , a długość odcinka $A_t A_{t+1}$ przez l_t , to pole powierzchni zakreślonej przez ten odcinek jest równe

$$2\pi \frac{y_t + y_{t+1}}{2} l_t.$$

(1) W szczególności może to być powierzchnia walca lub stożka; jednakże i w tym przypadku jej pole daje się wyznaczyć z ogólnego wzoru na pole powierzchni bocznej stożka świętego.

Pole powierzchni opisanej przez całą linię łamana jest więc równe

$$|Q| = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Otrzymane wyrażenie rozbijamy na dwie sumy w sposób następujący:

$$|Q| = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i.$$

Ponieważ funkcja $y = \Psi(s)$ jest ciągła, więc (dzięki jednostajnej ciągłości funkcji) można przyjąć, że nasza krzywa jest rozbita na tak drobne części, iż wartości bezwzględne wszystkich różnic $y_{i+1} - y_i$ nie przewyższają dowolnie małej liczby dodatniej ε . Wtedy

$$\left| \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i \right| \leq \varepsilon \pi \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leq \varepsilon \pi S.$$

Wynika stąd, że suma ta dąży do 0, jeśli tylko $\max \Delta s_i \rightarrow 0$.

Natomiast sumę

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i$$

można rozbić na dwie sumy w sposób następujący:

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta s_i - l_i).$$

Z ciągłości funkcji $\Psi(s)$ wynika, że jest ona ograniczona, więc dla każdego i zachodzi nierówność $|y_i| \leq M$, w której M jest pewną liczbą stałą. Oznaczając ostatnią sumę przez τ , otrzymujemy

$$|\tau| = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i (\Delta s_i - l_i) \leq 2\pi M \left(S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i \right).$$

Z definicji długości łuku, jako granicy długości łamanych wpisanych w krzywą ⁽¹⁾, widzimy, że przy dzieleniu krzywej na coraz drobniejsze części różnica

$$S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i$$

musi dążyć do 0. Ale wtedy również $\tau \rightarrow 0$.

Pozostała suma

$$\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i$$

jest sumą całkową dla całki

$$2\pi a \int_0^s y \, ds,$$

⁽¹⁾ Wynika to bezpośrednio z definicji jedynie dla krzywej zwykłej nie zamkniętej. Jednakże łatwo otrzymuje się to również dla krzywej zwykłej zamkniętej przez rozbicie jej na dwie krzywe nie zamknięte.

która istnieje dzięki ciągłości funkcji $y = \Psi(s)$, więc suma σ dąży do tej całki, gdy $\max \Delta s_i \rightarrow 0$.

Ostatecznie widzimy, że przy przyjętych założeniach pole powierzchni obrotowej istnieje i wyraża się wzorem

$$(20) \quad |P| = 2\pi \int_0^s y \, ds = 2\pi \int_0^s \Psi(s) \, ds.$$

Jeśli nasza krzywa dana jest ogólnym równaniem parametrycznym (6), to dokonując w poprzedniej całce odpowiedniego podstawienia [patrz 313, (9)], sprowadzamy ją do postaci

$$(21) \quad |P| = 2\pi \int_{t_0}^T y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \, dt = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt.$$

W szczególności, jeśli krzywa przedstawiona jest równaniem $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), to przyjmując za parametr zmienną x otrzymujemy

$$(22) \quad |P| = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y_x'^2} \, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

345. Przykłady. 1) Znaleźć pole powierzchni pasa między dwoma równoleżnikami kuli.

Przypuśćmy, że półkole o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu r obraca się dookoła osi x . Z równania koła mamy $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; a dalej

$$y_x' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y_x'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad y \sqrt{1 + y_x'^2} = r.$$

W tym przypadku pole powierzchni pasa opisanego przez łuk, którego końce mają odcięte x_1 i $x_2 > x_1$, jest w myśl wzoru (22) równe

$$|P| = 2\pi r \int_{x_1}^{x_2} r \, dx = 2\pi r (x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

gdzie h oznacza wysokość pasa. Zatem pole powierzchni pasa kuli jest równe iloczynowi obwodu dużego koła przez wysokość pasa.

W szczególności biorąc $x_1 = -r$ i $x_2 = r$, czyli $h = 2r$, otrzymujemy pole całej powierzchni kuli $P = 4\pi r^2$.

2) Znaleźć pole powierzchni powstającej przez obrót łuku linii łańcuchowej $y = a \cosh \frac{x}{a}$, którego końce mają odcięte 0 i x , dookoła osi x .

Ponieważ $\sqrt{1 + y_x'^2} = \cosh \frac{x}{a}$, więc ze wzoru (22) mamy

$$|P| = 2\pi \int_0^x \cosh^2 \frac{x}{a} \, dx = \frac{2}{a} |V|,$$

gdzie $|V|$ oznacza objętość odpowiedniej bryły obrotowej [patrz 343, 3)].

3) Rozwiązać analogiczne zadanie dla asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Wystarczy w tym celu podwoić pole powierzchni opisywanej przez łuk asteroidy leżący w pierwszej ćwiartce ($0 < t < \pi/2$). Wiemy już, że

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a \sin t \cos t.$$

Wobec tego w myśl wzoru (21) otrzymujemy

$$|P| = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 12\pi a^2 \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

4) Rozwiązać to samo zadanie dla cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Ponieważ $y = 2a \sin^2 \frac{1}{2} t$, $ds = 2a \sin \frac{1}{2} t dt$, więc

$$|P| = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{1}{2} t dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du = 16\pi a^2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 u - \cos u \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

5) Znaleźć pole powierzchni powstającej przez obrót kardioidy $r = a(1 + \cos \theta)$ dokola osi bieguowej.

Należy przejść we wzorze (21) do współrzędnych biegunowych:

$$|P| = 2\pi \int_0^s y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'_\theta} d\theta.$$

W naszym przypadku jest $\alpha = 0$, $\beta = \pi$,

$$y = r \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta = 4a \cos^3 \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta,$$

$$ds = 2a \cos \frac{1}{2} \theta d\theta,$$

a stąd

$$|P| = 2\pi \cdot 8a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2.$$

6) To samo zadanie rozwiązać dla lemniskaty $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

Mamy tu $y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta$, $ds = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$, a zatem ze wzoru (23) otrzymujemy

$$|P| = 2 \cdot 2\pi \cdot 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta = 8\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \approx 7,361a^2.$$

7) Na koniec wyznaczmy pole powierzchni elipsoidy obrotowej wydłużonej oraz spłaszczonej (sfroidy).

Dla powierzchni powstającej przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dokola osi x , w przypadku $a > b$, mamy kolejno

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2, \quad yy' = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

$$y \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2} x^2}.$$

Ale wiemy, że $a^2 - b^2 = c^2$, gdzie c jest to odległość ogniska od środka, a c/a jest równe mimośrodowi ϵ elipsy. Wobec tego jest

$$y \sqrt{1+y'^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2}$$

oraz

$$\begin{aligned} |P| &= 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2} dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2} dx = \\ &= 4\pi \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{2\epsilon} \arcsin \frac{\epsilon x}{a} \right) \Big|_0^a = 2\pi \frac{b}{a} (a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} + a^2 \arcsin \epsilon); \end{aligned}$$

a ponieważ $a^2 - \epsilon^2 a^2 = a^2 - c^2 = b^2$, więc ostatecznie

$$|P| = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right).$$

Jeśli powierzchnia powstaje przez obrót elipsyokoła małej osi, przyjmujemy, aby wykorzystać przeprowadzone już rachunki, że oś x pokrywa się z małą osią elipsy. W ten sposób w otrzymanym już wyrażeniu dla $y\sqrt{1+y'^2}$ wystarczy jedynie zamienić miejscami litery a i b , a więc

$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2-b^2}{b^2} x^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2};$$

wobec tego mamy

$$\begin{aligned} |P| &= 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} dx = \\ &= 2\pi \frac{a}{b} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} + \frac{b^3}{2c} \ln \left(\frac{c}{b} x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} \right) \right] \Big|_{-b}^b = \\ &= 2\pi a \left(\sqrt{b^2+c^2} + \frac{a^2}{2c} \ln \frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\sqrt{b^2+c^2} = a$, $c = \epsilon a$, więc ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenie dla pola $|P|$:

$$|P| = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{a+c}{a-c} \right) = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right).$$

346. Pole powierzchni walcowej. Rozpatrzmy tu jeszcze jeden rodzaj powierzchni zakrzywionej, dla której zdefiniujemy pole (wyprzedzając ogólną definicję, która będzie podana później). Mamy na myśli *powierzchnie walcowe*.

Powróćmy do krzywej AB na płaszczyźnie xy , o której mówiliśmy w ustępie 344. Przyjmujemy ją za kierownicę powierzchni, której tworzące są równoległe do osi z (rys. 35). Na tej powierzchni prowadzimy krzywą CD przecinającą każdą z tworzących w jednym punkcie. Krzywa ta będzie określona, jeśli do równań (6) dołączymy jeszcze trzecie równanie

$$(24) \quad z = \chi(t) \quad (\chi > 0).$$

Chodzi nam o wyznaczenie pola $|P|$ części powierzchni walcowej zawartej „pod tą krzywą”.

Podobnie jak w ustępie 344 wprowadzimy jako parametr długość łuku s . W ten sposób nie tylko równania (6) krzywej AB zastąpimy przez równania (18), ale również i równanie (24) przez równanie

$$z = \Psi(s).$$

W krzywą AB wpiszemy łamana $AA_1 \dots A_{n-1}B$. Odpowiada jej łamana $CC_1 \dots C_{n-1}D$ wpisana w krzywą CD . Trapezy $A_i A_{i+1} C_{i+1} C_i$ tworzą powierzchnię wpisaną w rozpatrywaną powierzchnię walcową. Przez *pole* naszej powierzchni walcowej będziemy tu rozumieli granicę $|P|$ pól $|Q|$ powierzchni utworzonej z trapezów, gdy najdłuższy z łuków $A_i A_{i+1}$ dąży do zera.

Zachowując poprzednie oznaczenia i przyjmując $z_i = A_i C_i$ mamy

$$|Q| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i + z_{i+1}}{2} l_i .$$

Za pomocą takich samych rozważań, jak w ustępie 344 (czytelnik może sam w pełni je przeprowadzić), zadanie sprowadza się do wyznaczenia granicy sumy

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta s_i ,$$

w której łatwo poznajemy sumę całkową. Ostatecznie mamy

$$|P| = \int_0^s z \, ds = \int_0^s \psi(s) \, ds \text{ (1).}$$

Powracając do dowolnego parametru t łatwo otrzymujemy wzór ogólny

$$(25) \quad |P| = \int_{t_0}^T z \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \, dt = \int_{t_0}^T \chi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt .$$

Wreszcie w przypadku, kiedy krzywa AB ma równanie $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) wzór ten przyjmuje postać

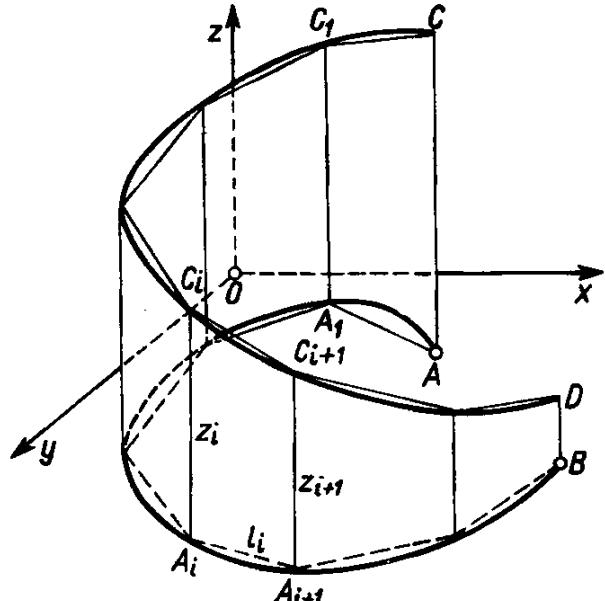
$$(26) \quad |P| = \int_a^b z \sqrt{1 + y_x'^2} \, dx = \int_a^b \chi(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx .$$

347. Przykłady. 1) Niech krzywa AB na rysunku 36 będzie łukiem paraboli o wierzchołku w punkcie B . Jej równanie (oznaczenia jak na rysunku) jest następujące:

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2} .$$

Powierzchnię walcową zbudowaną na tej krzywej przecięto płaszczyzną o równaniu

$$z = \frac{c}{a} x .$$



Rys. 35

(1) Wynik ten staje się zupełnie poglądowy, jeśli wyobrażymy sobie, że powierzchnia walcowa została rozwinięta na płaszczyźnie. Rozpatrywana figura jest wtedy „trapezem krzywoliniowym”.

Znaleźć pole $|P|$ części ABC tej powierzchni walcowej.

Rozwiązanie. Ze wzoru (26) mamy

$$|P| = \int_0^a z \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{c}{a^3} \int_0^a x \sqrt{a^4 + 4b^2x^2} dx = \frac{c}{12b^2} [(a^2 + 4b^2)^{3/2} - a^3].$$

2) Jeśli krzywa AB jest ćwiartką koła $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 < x < a$), to nie możemy bez zastrzeżeń stosować wzoru (26), gdyż dla $x = a$ pochodna y'_x dąży do ∞ . Posłużymy się parametrycznymi równaniami koła

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/2),$$

i wtedy z ogólnego wzoru (25) otrzymujemy

$$|P| = \int_0^{\pi/2} z \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = ac \int_0^{\pi/2} \cos t dt = ac.$$

Jeśli zastosujemy ten sposób do odcinka walcowego, o którym była mowa w ustępie 343, 8), to pole jego powierzchni bocznej okaże się równe $2ah$. Dostajemy to z otrzymanego przed chwilą wyniku dla $c = h$.

3) Na koniec rozwiążemy to samo zadanie przy założeniu, że krzywa AB jest ćwiartką elipsy

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/2).$$

Zwykłym równaniem elipsy nie należy się tu posługiwać z tych samych powodów, co i wyżej.

a) Niech będzie najpierw $a > b$. Pamiętając, że mimośród elipsy jest równy $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, ze wzoru (25) otrzymujemy

$$|P| = c \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \frac{c}{b} \int_0^a \sqrt{b^2 + \epsilon^2 u^2} du$$

(podstawienie $u = a \sin t$) i ostatecznie

$$|P| = \frac{1}{2} ac \left\{ 1 + \frac{1-\epsilon^2}{2} \ln \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right\}.$$

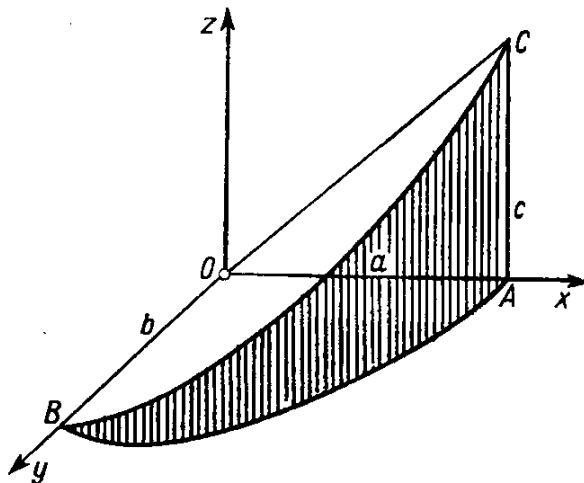
b) w przypadku $a < b$ mimośród jest równy $\epsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, więc

$$|P| = bc \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} \cos t dt = \frac{bc}{2} \left\{ \sqrt{1 - \epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right\}.$$

4) Rozpatrzymy część powierzchni walca $x^2 + y^2 = Rx$, ograniczoną przez kulę $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Przekrój tych dwu powierzchni — znaną nam już krzywą Vivianiego [229, 1]) — możemy przedstawić równaniami parametrycznymi

$$x = R \sin^2 t, \quad y = R \sin t \cos t, \quad z = R \cos t.$$

Jeśli ograniczymy się do tej części powierzchni, która leży w pierwszym oktancie, to wtedy t zmienia się od 0 do $\pi/2$. Pierwsze dwa z naszych równań odgrywają rolę równań (6), a ostatnie — rolę równania (24).



Rys. 36

Pole wspomnianej powierzchni wynosi na mocy wzoru (25)

$$|P| = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 4R^2.$$

5) Wyznaczyć pole powierzchni bryły, która jest częścią wspólną dwu walców o promieniach r , których osie przecinają się pod kątem prostym [porównaj 343, 11)]. Wprowadzimy układ współrzędnych jak na rysunku 33.

Ograniczając się do jednej z powierzchni walcowych zawartych w pierwszym oktancie, mamy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

oraz

$$z = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin t \quad (0 < t < \frac{1}{2}\pi).$$

Zgodnie z wzorem (25) połowa szukanego pola wynosi

$$\frac{1}{2} |P| = 8r^2 \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 8r^2,$$

a więc $|P| = 16r^2$.

6) Rozwiązać analogiczne zadanie w przypadku, kiedy walce mają różne promienie r i $R > r$ [porównaj 343, 12)].

Wyznaczmy najpierw pole części powierzchni walca o promieniu r . Mamy teraz

$$x = r \sin t, \quad y = r \cos t, \quad (0 \leq t \leq \pi/2),$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 t} = R \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \quad (k = r/R).$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$|P_1| = 8Rr \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt = 8RrE(k).$$

Przechodząc do powierzchni walca o promieniu R , zamieniamy rolami osie z i y . Teraz jest

$$x = R \sin t, \quad z = R \cos t,$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 t} = r \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} \quad (k = r/R),$$

przy czym t zmienia się (jeśli ograniczyć się do pierwszego oktanta) tylko od 0 do $\arcsin k$. A więc ze wzoru analogicznego do (25) otrzymujemy

$$|P_2| = 8 \int_0^{\arcsin k} y \sqrt{x_t'^2 + z_t'^2} \, dt = 8Rr \int_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} \, dt.$$

Podstawienie

$$\sin t = k \sin \varphi, \quad dt = \frac{k \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

gdzie φ zmienia się od 0 do $\pi/2$, prowadzi do równości

$$\int_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} \, dt = k \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Z ostatnią całką spotkaliśmy się już w ustępie 343, 12); jest ona równa

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) K(k) + \frac{1}{k^2} E(k).$$

W ten sposób mamy

$$|P_2| = 8R^2 \{E(k) - (1-k^2) K(k)\}$$

i ostatecznie

$$|P| = |P_1| + |P_2| = 8R(R+r) \{E(k) - (1-k) K(k)\}.$$

W ten sposób wyczerpaliśmy najprostsze zastosowania geometryczne całki oznaczonej. Z obliczaniem wielkości geometrycznych w bardziej złożonych i ogólniejszych przypadkach zapoznamy się w trzecim tomie.

§ 3. Obliczanie wielkości mechanicznych i fizycznych

348. Schemat stosowania całki oznaczonej. Zanim przejdziemy do zastosowań całki oznaczonej w mechanice, fizyce i technice, pozytycznie będzie wyjaśnić najpierw tę drogę, która w zagadnieniach stosowanych prowadzi zazwyczaj do całki oznaczonej. W tym celu omówimy ogólny schemat zastosowania całki, ilustrując go przykładami rozpatrywanych już zadań geometrycznych.

Wyobraźmy sobie, że mamy wyznaczyć pewną stałą wielkość Q (geometryczną lub inną), związaną z przedziałem $\langle a, b \rangle$. Niech przy tym każdemu podprzedziałowi $\langle \alpha, \beta \rangle$ zawartemu w $\langle a, b \rangle$ odpowiada pewna część wielkości Q tak, że każdemu rozbiciu przedziału $\langle a, b \rangle$ na podprzedziały odpowiada rozkład wielkości Q na odpowiednie części.

Mówiąc dokładniej, chodzi tu o pewną funkcję przedziału $Q(\langle \alpha, \beta \rangle)$, która jest addytywna, tzn., że jeśli przedział $\langle \alpha, \beta \rangle$ składa się z dwóch podprzedziałów $\langle \alpha, \gamma \rangle$ i $\langle \gamma, \beta \rangle$, to wtedy

$$Q(\langle \alpha, \beta \rangle) = Q(\langle \alpha, \gamma \rangle) + Q(\langle \gamma, \beta \rangle).$$

Zadanie polega na tym, żeby obliczyć wartość tej funkcji odpowiadającą całemu przedziałowi $\langle a, b \rangle$.

Dla przykładu rozpatrzymy na płaszczyźnie krzywą $y = f(x)$ ($a < x < b$) (rys. 37)⁽¹⁾. Wtedy 1) długość S krzywej AB , 2) pole $|P|$ trapezu krzywoliniowego $AA'B'B$ ograniczonego od góry tą krzywą, 3) objętość $|V|$ bryły, powstałej przez obrót tego trapezuokoła osi x — są wielkościami wspomnianego typu. Nietrudno zdać sobie sprawę z tego, jakie funkcje przedziału generują te wielkości.

Rozpatrzmy „element” ΔQ wielkości Q , odpowiadający „przedziałowi elementarnemu” $\langle x, x + \Delta x \rangle$. Wychodząc z warunków zadania postaramy się znaleźć dla ΔQ wyrażenie przybliżone postaci $q(x) \Delta x$, liniowe względem Δx , tak żeby różniło się ono

⁽¹⁾ O funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest ciągła i że ma ciągłą pierwszą pochodną. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że jest ona rosnąca i wypukła w dół (wklesła).

od ΔQ o nieskończonym małym rzędzie wyższego niż Δx . Innymi słowy wydzielimy część główną nieskończonemu małego (przy $\Delta x \rightarrow 0$) elementu ΔQ . Oczywiście błąd względny równości przybliżonej

$$(1) \quad \Delta Q \approx q(x) \Delta x$$

dąży do zera wraz z Δx .

Tak na przykład element łuku MM_1 w przykładzie 1) można zastąpić odcinkiem stycznej, a więc częścią liniową wydzieloną z ΔS jest

$$\sqrt{1+y'^2} \Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \Delta x.$$

W przykładzie 2) jest rzeczą naturalną zastąpienie elementarnego paska ΔP wpisanym weń prostokątem o polu

$$y \Delta x = f(x) \Delta x.$$

Wreszcie w przykładzie 3) z elementarnej warstwy ΔV wydziela się jej część liniową w postaci objętości wpisanego walca kołowego

$$\pi y^2 \Delta x = \pi [f(x)]^2 \Delta x.$$

Nietrudno jest uzasadnić, że we wszystkich trzech przypadkach błąd powstający przez taką zamianę jest nieskończonem małym rzędem wyższym niż Δx , a mianowicie (1): w przypadku 1) jest on mniejszy od $KM_1 = \Delta y - dy$, w przypadku 2) — mniejszy od $\Delta x \Delta y$, a w przypadku 3) — mniejszy od $\pi(2y + \Delta y) \Delta x \Delta y$.

Jeśli tylko udało nam się to zrobić, to możemy już twierdzić, że szukana wielkość Q jest dokładnie równa całce

$$(2) \quad Q = \int_a^b q(x) dx.$$

Aby to udowodnić, rozbijamy przedział (a, b) punktami x_1, x_2, \dots, x_{n-1} na elementarne podprzedziały

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{n-1}, b).$$

Ponieważ każdemu przedziałowi (x_i, x_{i+1}) lub $(x_i, x_i + \Delta x_i)$ odpowiada część elementarna naszej wielkości równa w przybliżeniu $q(x_i) \Delta x_i$, więc cała szukana wielkość Q jest w przybliżeniu równa sumie

$$Q \approx \sum_i q(x_i) \Delta x_i.$$

W otrzymanej równości przybliżonej dokładność będzie tym większa im mniejsze będą podprzedziały podziału, Q jest więc granicą tej sumy, zatem Q wyraża się rzeczywiście całką oznaczoną

$$Q = \int_a^b q(x) dx.$$

(1) Przy założeniach podanych w odsyłaczu na poprzedniej stronicy.

Rozważania te odnoszą się w pełni do wszystkich trzech rozpatrywanych przykładów. Wzory na wielkości $|S|$, $|P|$ i $|V|$ otrzymaliśmy poprzednio w trochę inny sposób dlatego, że zadanie polegało nie tylko na obliczeniu tych wielkości, ale również na udowodnieniu ich istnienia — zgodnie z wcześniej podaną definicją.

W ten sposób nasze zadanie sprowadza się do ustalenia przybliżonej równości (1), z której bezpośrednio otrzymuje się ostateczny wynik (2).

Zazwyczaj zamiast Δx i ΔQ pisze się dx i dQ , a równość (1) dla „elementu” dQ wielkości Q pisze się w postaci

$$(3) \quad dQ = q(x) dx.$$

Następnie sumuje się te elementy (w rzeczywistości bierze się całkę!), co prowadzi do wzoru (2) dla całej wielkości Q .

Podkreślamy, że bardzo istotne jest posługiwanie się tu całką zamiast zwykłej sumy. Suma dawałaby tylko wyrażenie przybliżone dla Q , ponieważ miałyby na nią wpływ błędy poszczególnych równości (3); przejście graniczne, które prowadzi od sumy do całki, usuwa błąd i daje wynik zupełnie dokładny. Najpierw więc, dla uproszczenia, w wyrażeniu na element dQ odrzuca się nieskończonie małe wyższych rzędów i uwzględnia się tylko jego główną część, a następnie, dla uzyskania wyniku dokładnego sumowanie następuje się całkowaniem. Okazuje się, że wynik otrzymany w ten prosty sposób jest dokładny.

Zadanie nasze można również rozpatrywać z innego punktu widzenia. Oznaczmy przez $Q(x)$ część zmienną wielkości Q , odpowiadającą przedziałowi $\langle a, x \rangle$, przy czym przyjmujemy, że $Q(a)$ jest równe 0. Oczywiście rozpatrywana wyżej „funkcja przedziału” $Q(\langle \alpha, \beta \rangle)$ wyraża się przez „funkcję punktu” $Q(x)$, a mianowicie

$$Q(\langle \alpha, \beta \rangle) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

W naszych przykładach funkcje punktu są następujące: 1) zmienna długość łuku $\sim AM$, 2) pole zmiennego trapezu $AA'M'M$ i wreszcie 3) objętość bryły otrzymanej przez obrót tego właśnie trapezu.

Wielkość ΔQ jest po prostu przyrostem funkcji $Q(x)$, a iloczyn przedstawiający jego część główną jest różniczką tej funkcji [103, 104]. W ten sposób równość (3), napisana w postaci różniczek, w rzeczywistości jest nie równością przybliżoną, ale dokładną, jeśli tylko przez dQ rozumiemy właśnie różniczkę $dQ(x)$. Stąd też wynika od razu żądzany wynik

$$\int_a^b q(x) dx = Q(b) - Q(a) = Q(\langle a, b \rangle) = Q.$$

Zauważmy jednak, że w zastosowaniach wygodniejsza i płodniejsza jest idea sumowania elementów nieskończonie małych.

349. Znajdowanie momentów statycznych i środka ciężkości krzywej. Jak wiadomo, *moment statyczny* M punktu materialnego o masie m względem osi jest równy iloczynowi masy m przez odległość d punktu od osi. W przypadku n punktów materialnych, leżących w jednej płaszczyźnie z osią, w odległościach d_1, d_2, \dots, d_n od tej osi, moment statyczny wyraża się sumą

$$M = \sum_i m_i d_i,$$

gdzie m_1, m_2, \dots, m_n oznaczają masy tych punktów. Przy tym odległości od osi punktów leżących po jednej stronie tej osi przyjmujemy za dodatnie, a odległości punktów leżących po drugiej stronie — za ujemne.

Jeśli masa nie jest skoncentrowana w oddzielnich punktach, ale jest rozłożona w sposób ciągły, wypełniając krzywą lub figurę płaską, to do wyrażenia momentu statycznego potrzebujemy nie sumy, lecz całki.

Zatrzymamy się na określeniu momentu statycznego M względem osi x masy rozłożonej wzdłuż pewnej krzywej płaskiej AB (rys. 38). Założymy przy tym, że krzywa jest jednorodna, tzn., że jej gęstość liniowa ρ (czyli masa przypadająca na jednostkę długości) jest stała; dla uproszczenia przyjmiemy, że jest nawet $\rho = 1$ (w przeciwnym przypadku wystarczy pomnożyć wynik przez ρ). Przy tych założeniach masa dowolnego łuku naszej krzywej jest równa po prostu jego długości i pojęcie momentu statycznego nabiera charakteru czysto geometrycznego. Zauważmy ogólnie, że jeśli będziemy mówili o momencie statycznym (lub o środku ciężkości) krzywej bez omówienia rozkładu masy wzdłuż tej krzywej, to zawsze będziemy mieli na myśli moment statyczny (lub środek ciężkości) określony właśnie przy podanych założeniach.

Rozpatrzmy teraz jakikolwiek element łuku ds krzywej (którego masa również wyraża się liczbą ds). Jeśli przyjmiemy ten element w przybliżeniu za punkt materialny, leżący w odległości y od osi, to moment statyczny tego elementu jest równy

$$dM_x = y \, ds .$$

Sumując takie częściowe momenty statyczne i biorąc przy tym za zmienną niezależną długość łuku s , otrzymamy następujące wyrażenie na moment statyczny:

$$(4) \quad M_x = \int_0^s y \, ds .$$

Analogicznym wzorem wyraża się moment statyczny względem osi y

$$(5) \quad M_y = \int_0^s x \, ds .$$

Oczywiście zakłada się tu, że y (lub x) wyraża się przez s . W praktyce we wzorach tych wyraża się s przez tę zmienną (t , x lub θ), która gra rolę zmiennej niezależnej w analitycznym przedstawieniu krzywej.

Znając momenty statyczne M_x i M_y , krzywej łatwo można znaleźć położenie jej środka ciężkości $C(\xi, \eta)$. Punkt C ma tę własność, że jeśli skoncentrować w nim całą „masę” krzywej (równą jej długości), to moment tego punktu względem dowolnej osi jest taki sam, jak moment krzywej względem tej osi. Jeśli weźmiemy w szczególności momenty krzywej względem osi układu współrzędnych, to znajdziemy

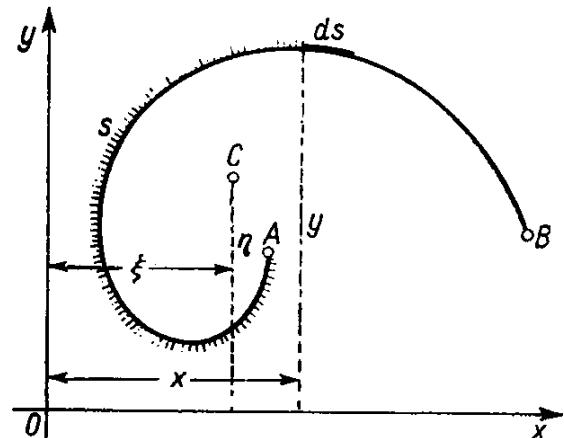
$$S\xi = M_y = \int_0^s x \, ds, \quad S\eta = M_x = \int_0^s y \, ds ,$$

skąd

$$(6) \quad \xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S} \int_0^s x \, ds, \quad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S} \int_0^s y \, ds .$$

Ze wzoru na rzeczną η środka ciężkości otrzymujemy interesujący wniosek geometryczny. Mamy bowiem

$$\eta S = \int_0^s y \, ds, \quad \text{skąd} \quad 2\pi\eta s = 2\pi \int_0^s y \, ds ;$$



Rys. 38

prawa strona tego wzoru daje pole P powierzchni otrzymanej przez obrót krzywej AB [patrz 344, (20)], natomiast czynnik $2\pi\eta$ po lewej stronie oznacza długość koła opisanego przez środek ciężkości krzywej przy jej obracaniu dokoła osi x , wreszcie S oznacza długość krzywej. Wobec tego możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie Guldina:

Pole powierzchni otrzymanej przez obrót krzywej dokoła nieprzecinającej jej osi jest równe długości tej krzywej pomnożonej przez długość koła, opisanego przy tym przez środek ciężkości C krzywej (rys. 38)

$$|P| = |S| 2\pi\eta.$$

Twierdzenie to pozwala znaleźć współrzędną η środka ciężkości krzywej, jeśli znane są jej długości S i pole P powierzchni powstałej przez obrót tej krzywej dokoła danej osi.

350. Przykłady. 1) Znaleźć moment statyczny elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ względem osi x (przy założeniu, że $a > b$).

Moment statyczny górnej (lub dolnej) półelipsy różni się od pola odpowiedniej powierzchni obrotowej jedynie czynnikiem 2π . Dlatego [patrz 345, 7)] jest

$$M_x = 2b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \operatorname{arc sin} \varepsilon \right),$$

2) Jeśli rozpatrywana krzywa jest symetryczna względem pewnej prostej, to środek ciężkości tej krzywej leży zawsze na tej prostej.

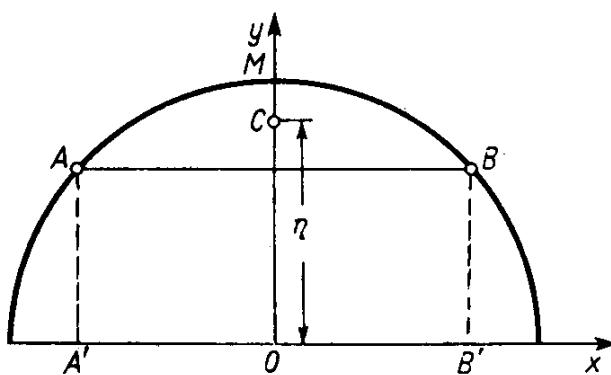
Dla dowodu przyjmujemy, że osią symetrii jest osią y oraz że punkt przecięcia tej osi z krzywą jest początkiem liczenia długości łuku. Wtedy funkcja $x = \Phi(s)$ okazuje się funkcją nieparzystą zmiennej s i jeśli długość całej krzywej oznaczmy w tym przypadku przez $2S$, to otrzymamy [patrz 314, 9)]

$$M_y = \int_{-S}^S x \, ds = 0,$$

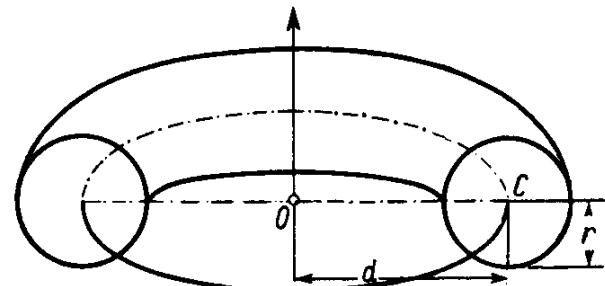
skąd wynika, że również $\xi = 0$.

3) Znaleźć na podstawie twierdzenia Guldina położenie środka ciężkości łuku AB (rys. 39) koła o promieniu r .

Ponieważ łuk ten jest symetryczny względem promienia OM przechodzącego przez środek łuku M , więc jego środek ciężkości C leży na tym promieniu, a zatem dla znalezienia położenia środka ciężkości



Rys. 39



Rys. 40

wystarczy znaleźć tylko jego odległość η od środka O . Wybieramy osie tak, jak wskazano na rysunku i oznaczamy długość łuku AB przez s , a jego cięciwę $AB (= A'B')$ — przez d . Przez obrót rozpatrywanego łuku dokoła osi x otrzymujemy część powierzchni kuli, której pole, jak wiemy, jest równe $2\pi r d$ [345, 1)]. Z twierdzenia Guldina wiemy natomiast, że to samo pole jest równe $2\pi\eta s$, a więc

$$s\eta = rd, \quad \eta = \frac{rd}{s}.$$

W szczególności dla półkola $d = 2r$, $s = \pi r$ i

$$\eta = \frac{2}{\pi} r \approx 0,637 r.$$

4) Znaleźć środek ciężkości łuku cykloidy

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 < t < 2\pi).$$

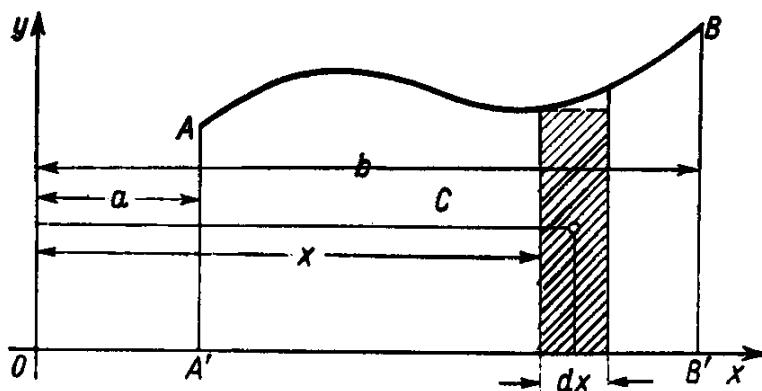
Biorąc pod uwagę symetrię od razu widać, że $\xi = \pi a$. Po uwzględnieniu wyniku przykładu 4) z ustępu 345, łatwo otrzymujemy $\eta = \frac{4}{3} a$.

5) W tych przypadkach, kiedy z góry znane jest położenie środka ciężkości, można użyć twierdzenia Guldina do wyznaczania pola powierzchni obrotowej.

Przypuśćmy na przykład, że należy wyznaczyć pole powierzchni torusa (pierścienia), tzn. bryły powstającej przez obrót koła dokoła nieprzecinającej go osi (rys. 40). Ponieważ oczywiste jest, że środek ciężkości koła pokrywa się z jego środkiem geometrycznym, więc, przy oznaczeniach podanych na rysunku, mamy

$$|P| = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

351. Wyznaczanie momentów statycznych i środka ciężkości figury płaskiej. Rozpatrzmy figurę płaską $AA'B'B$ (rys. 41), ograniczoną od góry krzywą AB , która dana jest równaniem $y = f(x)$. Założymy, że masa jest rozłożona na tej figurze równomiernie, tak że gęstość powierzchniowa ϱ (tj. masa przypadająca na



Rys. 41

jednostkę pola) jest stała. Bez istotnego zmniejszenia ogólności można wtedy przyjąć, że $\varrho = 1$, czyli że masa dowolnej części naszej figury jest równa polu tej części. To mamy też zawsze na myśli, jeśli mówimy po prostu o momentach statycznych lub o średku ciężkości figury płaskiej bez zaznaczania, jak jest rozłożona masa.

Chcąc obliczyć momenty statyczne M_x i M_y tej figury względem osi współrzędnych wydzielimy, jak zwykle, dowolny element naszej figury w postaci nieskończoność wąskiego paska (patrz rysunek). Przyjmując w przybliżeniu, że pasek ten jest prostokątem, widzimy, że jego masa (wyrażająca się tą samą liczbą, co i pole) jest równa $y dx$. Aby wyznaczyć odpowiednie momenty elementarne dM_x i dM_y , zakładamy, że cała masa paska jest skoncentrowana w jego środku ciężkości (tzn. w środku prostokąta), co, jak wiadomo, nie zmienia wielkości momentów statycznych. Otrzymany punkt materialny leży w odległości $(x + \frac{1}{2} dx)$ od osi y ; ostatnie wyrażenie można zastąpić po prostu przez x , ponieważ odrzucony składnik $\frac{1}{2} dx$ pomnożony przez masę $y dx$ daje nieskończoność małą wyższego rzędu. Mamy zatem

$$dM_x = \frac{1}{2} y^2 dx, \quad dM_y = xy dx.$$

Sumując te momenty elementarne otrzymujemy wynik

$$(1) \quad M_x = \int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx,$$

przy czym przez y rozumiemy funkcję $f(x)$ z równania krzywej AB .

Podobnie jak w przypadku krzywej, znając momenty statyczne rozpatrywanej figury względem osi współrzędnych łatwo możemy wyznaczyć współrzędne ξ i η środka ciężkości figury. Jeśli przez P oznaczymy pole (a więc i masę) figury, to z podstawowej własności środka ciężkości mamy

$$|P| \xi = M_y = \int_a^b xy \, dx, \quad |P| \eta = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx,$$

skąd

$$(8) \quad \xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P} \int_a^b xy \, dx, \quad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P} \int_a^b y^2 \, dx.$$

Ze wzoru na rzędną η środka ciężkości otrzymujemy w tym przypadku ważny wniosek geometryczny. Rzeczywiście, ze wzoru tego mamy

$$2\pi\eta |P| = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Prawa strona ostatniej równości wyraża objętość V bryły, powstającej przez obrót figury płaskiej $AA'B'B$ okoła osi x [342, (16)] natomiast lewa strona jest iloczynem pola $|P|$ tej figury przez $2\pi\eta$, tzn. przez długość okręgu zakreślonego przy tym przez środek ciężkości figury. Możemy teraz wysłowić tzw. drugie twierdzenie Guldina:

Objętość bryły powstającej przez obrót figury płaskiej dokoła nieprzecinającej jej osi jest równa polu tej figury pomnożonemu przez długość okręgu, jaki zakreśla przy tym środek ciężkości figury:

$$|V| = |P| 2\pi\eta.$$

Zauważmy, że wzory (7), (8) można uogólnić na przypadek figury ograniczonej krzywymi z góry i z dołu (rys. 19). W tym przypadku mamy na przykład:

$$(7a) \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) \, dx, \quad M_y = \int_a^b x (y_2 - y_1) \, dx;$$

stąd widać również, jak należy przekształcić wzory (8). Pamiętając o wzorze (8) z ustępu 338, łatwo stwierdzić, że twierdzenie Guldina jest słuszne także w tym przypadku.

352. Przykłady. 1) Znaleźć momenty statyczne M_x , M_y i współrzędne środka ciężkości figury ograniczonej parabolą $y^2 = 2px$, osią x i odcinkiem pionowym o odciętej x .

Ponieważ $y = \sqrt{2px}$, więc w myśl wzorów (7) jest

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x x \, dx = \frac{1}{2} px^2, \quad M_y = \sqrt{2p} \int_0^x x^{3/2} \, dx = \frac{2}{5} \sqrt{2p} x^{5/2}.$$

Z drugiej strony, pole rozpatrywanej figury [338, (7)] wynosi

$$|P| = \sqrt{2p} \int_0^x x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{3/2}.$$

W takim razie w myśl wzorów (8) mamy

$$\xi = \frac{3}{5} x, \quad \eta = \frac{3}{8} \sqrt{2px} = \frac{3}{8} y.$$

Znając już liczby ξ i η , łatwo znajdziemy na podstawie twierdzenia Guldina objętości brył powstających przez obrót rozpatrywanej figury dokoła osi współrzędnych lub dokoła dowolnej prostej pionowej. Jeśli na przykład zatrzymamy się na ostatnim przypadku, to ponieważ odległość środka ciężkości od osi obrotu wynosi $\frac{2}{5} x$, więc szukana objętość jest równa

$$|V| = \frac{8}{15} \pi x^2 y.$$

2) Znaleźć środek ciężkości ćwiartki elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, posługując się wynikami z ustępów 339, 2) i 343, 2).

W myśl twierdzenia Guldina mamy $\xi = \frac{4a}{3\pi}$, $\eta = \frac{4b}{3\pi}$.

3) Jeśli figura ma oś symetrii, to jej środek ciężkości musi leżeć na tej osi.

Udowodnimy to w przypadku figury ograniczonej z dołu i z góry krzywymi o równaniach $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$. Jeśli przyjąć za oś y oś symetrii, to obie funkcje y_1 i y_2 okażą się parzyste; przedział zmienności zmiennej x ma w tym przypadku postać $(-a, a)$. Wtedy w myśl drugiego z wzorów (7a) [patrz 314, 9)] będzie

$$M_y = \int_{-a}^a x(y_2 - y_1) dx = 0, \text{ równocześnie } \xi = 0.$$

4) Znaleźć środek ciężkości figury ograniczonej jedną gałęzią cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ i osią x.

Z przykładów 9) z ustępu 339 i 4) z ustępu 343 oraz z twierdzenia Guldina łatwo otrzymuje się $\eta = \frac{5}{6}a$. Dzięki symetrii $\xi = \pi a$.

5) To samo dla figury ograniczonej dwiema parabolami $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$ [patrz rysunek 24]. Posługując się przykładem 5) z ustępu 339 znajdujemy w myśl wzoru (7a)

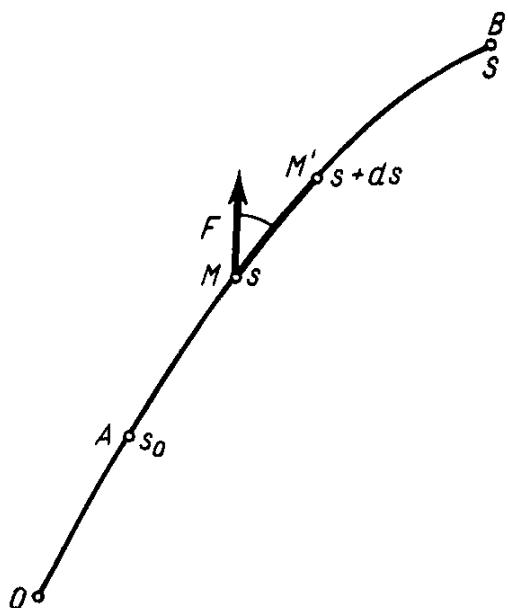
$$\eta = \xi = \frac{1}{P} \int_0^{2p} x \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{\frac{6}{5}p^3}{\frac{4}{3}p^2} = \frac{9}{10}p.$$

6) Podobnie jak pierwsze twierdzenie Guldina [porównaj 350, 5)] również i drugie może służyć do wyznaczenia objętości bryły obrotowej w tym przypadku, kiedy łatwo jest podać położenie środka ciężkości. Na przykład dla torusa (rys. 40) otrzymuje się w ten sposób objętość $|V| = 2\pi^2r^2d$.

353. Praca. Z mechaniki elementarnej wiadomo czytelnikowi, że jeśli siła przyłożona do poruszającego się punktu M zachowuje stałą wielkość F i stały kąt z kierunkiem przesuwania się punktu, to praca A tej siły przy przesunięciu punktu o s jest równa iloczynowi $F \cos(F, s) \cdot s$, gdzie (F, s) oznacza kąt między kierunkiem siły i kierunkiem ruchu punktu. Iloczyn $F_s = F \cos(F, s)$ jest oczywiście rzutem siły F na drogę s; wprowadzając takie oznaczenie możemy wzór na pracę A napisać w postaci $A = F_s s$. Jeśli kierunek siły pokrywa się z kierunkiem ruchu punktu, to $A = F \cdot s$; w przypadku kiedy kierunki te są przeciwnie jest $A = -F \cdot s$.

Ogólnie mówiąc ani siła F, ani kąt jej z kierunkiem ruchu (F, s) nie muszą być stałe. Jeśli chociażby jedną z tych wielkości zmienia się w sposób ciągły, to do wyrażenia pracy musimy się znowu posłużyć całką oznaczoną.

Niech droga s, jaką przebywa punkt, będzie zmienną niezależną; zakładamy przy tym, że położeniu początkowemu A naszego punktu odpowiada wartość $s = s_0$, a końcowemu B — wartość $s = S$ (rys. 42). Każdej wartości zmiennej s w przedziale (s_0, S) odpowiada określone położenie punktu ruchomego, a także określone wartości zmiennych F i $\cos(F, s)$, które można wobec tego uważać za funkcje zmiennej s. Biorąc jakiekolwiek położenie punktu M, określone przez wartość s drogi, znajdziemy teraz wyrażenie przybliżone elementu pracy, odpowiadającego przyrostowi ds drogi od wartości s do $s+ds$, przy którym punkt M przesunie się w bliskie położenie M' (patrz rysunek). W położeniu M na punkt nasz działa określona siła F pod okre-



Rys. 42

ślonym kątem (F, s); ponieważ zmiany tych wielkości przy przesunięciu punktu z M do M' są — przy małym ds — również małe, zaniedbujemy te zmiany przyjmując, że siła F i kąt (F, s) są w przybliżeniu stałe i znajdujemy w ten sposób dla elementu pracy odpowiadającego przyrostowi ds wyrażenie

$$dA = F \cos(F, s) ds.$$

Cała praca A wyraża się całką

$$(9) \quad A = \int_{s_0}^s F \cos(F, s) ds.$$

Z tego wyrażenia ogólnego na pracę siły F wynika, że dla $(F, s) = \pi/2$ praca jest równa 0. Rzeczywiście, wtedy $\cos(F, s) = 0$, a więc funkcja podcałkowa jest tożsamościowo równa 0. Widzimy więc, że siła prostopadła do kierunku przesunięcia nie wykonuje pracy mechanicznej.

Jeśli siłę F działającą na punkt rozłożymy (w myśl reguły równoległoboku) na dwie składowe — styczną do toru punktu, tzn. do kierunku ruchu i normalną do niego, to zgodnie z tym, co powiedzieliśmy, pracę wykonuje tylko składowa styczna $F_s = F \cos(F, s)$:

$$(9a) \quad A = \int_{s_0}^s F_s ds.$$

Przyjmijmy teraz, że siła F jest wypadkową wszystkich sił działających na punkt. Wtedy w myśl prawa Newtona składowa styczna F_s jest równa iloczynowi masy m punktu przez jego przyśpieszenie a . Wyrażenie na pracę A można więc napisać w postaci

$$A = \int_{s_0}^s ma ds.$$

Przypominamy teraz, że

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{i} \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{a więc} \quad a = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v;$$

w tym przypadku mamy

$$A = \int_{s_0}^s mv \frac{dv}{ds} ds = \int_{s_0}^s d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{s_0}^s = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

gdzie v_0 i V oznaczają prędkości punktu odpowiednio w początkowym i końcowym punkcie drogi.

Jak wiadomo wielkość $\frac{1}{2}mv^2$ jest energią kinetyczną punktu. W ten sposób otrzymaliśmy więc ważne twierdzenie:

Praca A wykonana przez siłę, przy której działaniu odbył się ruch punktu materialnego, jest równa przyrostowi energii kinetycznej punktu.

Rozumie się, że zarówno praca, jak i przyrost energii kinetycznej mogą być ujemne. Zasada ta, którą można rozszerzyć i na układy punktów materialnych i na ciała stałe, gra w mechanice i fizyce bardzo ważną rolę. Nazywa się ona *prawem zachowania energii kinetycznej*.

354. Przykłady. 1) Dla przykładu zastosujemy wzór (9) do obliczenia pracy przy rozciąganiu (lub przy ściskaniu) sprężyny, której jeden koniec jest zamocowany (rys. 43); z zadaniem tym można się spotkać na przykład przy konstrukcji zderzaków do wagonów kolejowych.

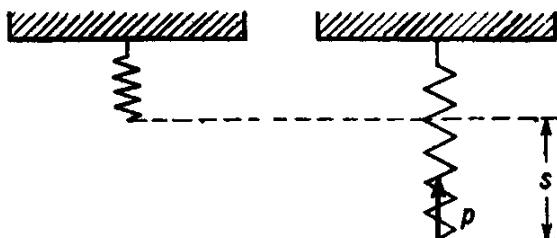
Wiadomo, że wydłużenie s sprężyny (jeśli tylko nie jest ona przeciążona) wywołuje naprężenie p , proporcjonalne do wydłużenia, czyli $p = cs$, gdzie c oznacza pewną stałą, zależną od sprężystych właściwości sprężyny. Siła rozciągająca sprężynę powinna równoważyć to naprężenie. Jeśli brać pod uwagę tylko tę część siły działającej, która powoduje to wydłużenie, to jej praca przy wydłużeniu od 0 do S wyraża się wzorem

$$A = \int_0^S p ds = c \int_0^S s ds = c \frac{s^2}{2} \Big|_0^S = \frac{cS^2}{2}.$$

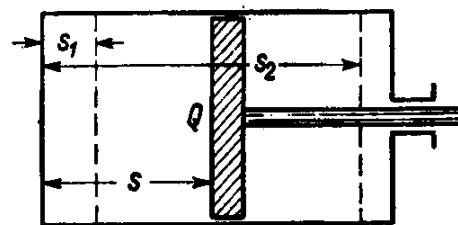
Oznaczając przez P największe naprężenie (lub wywołującą je siłę) odpowiadające wydłużeniu S sprężyny (i równe cS), możemy wzór na pracę napisać w postaci

$$A = \frac{1}{2} PS.$$

Jeśli do swobodnego końca sprężyny od razu przyłożyć siłę P — na przykład wiesząc odpowiedni ciężar — to przy jego przesunięciu o S zostałyby wykonana dwukrotnie większa praca PS . Jak widzimy



Rys. 43



Rys. 44

tylko połowa tej pracy przypada na rozciągnięcie sprężyny; druga połowa zużywa się na nadanie sprężynie i zawieszonemu ciężarowi energii kinetycznej.

2) Niech pewna ilość gazu (pary) znajduje się w cylindrze z jednej strony tłoka (rys. 44). Założymy, że gaz ten rozszerzył się i przesunął tłok w prawą stronę. Stawiamy sobie za zadanie wyznaczenie pracy, jaką gaz przy tym wykonał. Jeśli odległość początkową i końcową tłoka od lewego dna walca oznaczymy przez s_1 i s_2 , ciśnienie (na jednostkę pola) — przez p i pole tłoka — przez Q , to cała siła działająca na tłok jest równa pQ , a praca wyraża się całką

$$A = Q \int_{s_1}^{s_2} p \, ds.$$

Oznaczając przez V objętość rozpatrywanej ilości gazu, mamy oczywiście $V = Qs$. Łatwo teraz można przejść od zmiennej s do nowej zmiennej V ; otrzymujemy

$$(10) \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV,$$

gdzie V_1 i V_2 oznaczają objętości gazu początkową i końcową.

Gdybyśmy znali ciśnienie p jako funkcję objętości, to tym samym umielibyśmy wyznaczyć pracę A . Założymy na początku, że przy rozszerzeniu się gazu jego temperatura pozostaje stała, tak że energia potrzebna do tego rozszerzenia jest dostarczona z zewnątrz w postaci ciepła. W tym przypadku proces nazywa się *izotermiczny*. Przyjmując, że gaz jest „idealny”, z prawa Boyle-Mariotta mamy $pV = c = \text{const}$, a więc $p = \frac{c}{V}$ i na pracę otrzymujemy wzór

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V} \, dV = c \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = c \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Jeśli oznaczymy przez p_1 i p_2 ciśnienia na początku i na końcu procesu, to $p_1 V_1 = p_2 V_2$, czyli $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$. A zatem pracę przy rozszerzaniu gazu, związanym z przejściem od ciśnienia p_1 do ciśnienia $p_2 < p_1$ można wyrazić w postaci

$$A = c \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Zauważmy wreszcie, że we wzorach tych można zamiast c podstawić $p_1 V_1$.

Często zdarza się jednak, iż bardziej celowe jest założenie, że przy rozszerzaniu się gazu nie ma wymiany ciepła między gazem i otaczającym go środowiskiem. Wtedy na wykonanie pracy zużywa się energia samego gazu, którego temperatura przy tym się obniża. Taki proces nazywa się *adiabatyczny*. W tym przypadku zależność między ciśnieniem p i objętością V rozpatrywanej ilości gazu ma postać

$$pV^k = c = \text{const}$$

[zależność tę wyprowadzimy niżej, 361, 3)], gdzie k jest stałą charakterystyczną dla każdego gazu, zawsze większą od 1. Stąd mamy $p = cV^{-k}$ i

$$A = \int_{V_1}^{V_2} cV^{-k} dV = \frac{c}{1-k} V^{1-k} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{1-k} (V_2^{1-k} - V_1^{1-k}) = \frac{c}{1-k} \left(\frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{1}{V_1^{k-1}} \right).$$

Wynik ten można napisać w bardziej dogodnej postaci, jeśli uwzględnić, że $cV_1^{-k} = p_1$, $cV_2^{-k} = p_2$; wykonując odpowiednie podstawienie otrzymujemy następujące wyrażenie na pracę:

$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{k-1}.$$

Tylko dla uproszczenia rozważań przyjęliśmy, że gaz jest zamknięty w cylindrze z tłokiem. Podstawowy wzór (10), jak również i wzory otrzymane z niego w szczególnych przypadkach, zachowują moc niezależnie od kształtu, jaki w każdej rozpatrywanej chwili ma dana ilość gazu. Rozumie się, że te same wzory wyrażają również pracę potrzebną do ściśnięcia gazu od objętości V_2 do objętości $V_1 < V_2$ (któremu towarzyszy zwiększenie ciśnienia od p_2 do $p_1 > p_2$), tzn. pracę siły zewnętrznej ściskającej gaz; praca samego gazu jest w tym przypadku ujemna!

355. Praca siły tarcia czopa płaskiego. Czopem nazywa się — ogólnie — część podporowa, obracającego się wału pionowego. Nieruchoma podpórka, w której obraca się czop, nazywa się *łożyskiem*. Obecnie rozpatrzymy zagadnienie, jaka siła potrzebna jest na przewycięжение tarcia czopów; ograniczymy się

przy tym do najprostszego przypadku — do czopów płaskich.

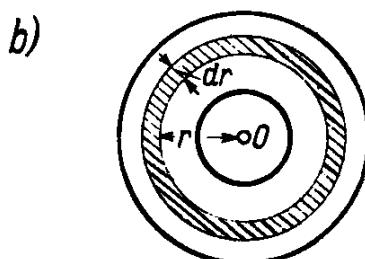
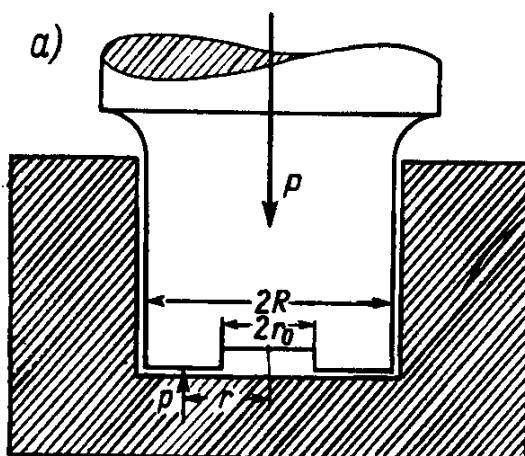
Czop płaski ma kształt walcowy i opiera się swoją płaską podstawą na łożysku (rys. 45). Ta podstawa jest najczęściej pierścieniem kołowym; oznaczamy zewnętrzny promień tego pierścienia przez R , a wewnętrzny przez r_0 . W przypadku $r_0 = 0$ otrzymujemy podstawę płaską kołową.

Oznaczmy dalej przez P całkowite ciśnienie, które wywiera czop, przez ω (1/sek) — prędkość kątową obracającego się wału, przez p — ciśnienie na jednostkę pola czopu w rozpatrywanym punkcie.

Nie poruszając na razie sprawy rozkładu ciśnień, zauważmy teraz tylko jedno: punkty czopa równo oddalone od jego środka znajdują się w jednakowych warunkach i wobec tego ciśnienie w takich punktach powinno być jednakowe. W ten sposób ciśnienie p można uważać za funkcję promienia r , tzn. odległości punktu od środka czopa. Później podamy założenia, które robi się zazwyczaj o tej funkcji; jednakże w każdym razie musi ona spełniać jeden warunek, a mianowicie całkowite ciśnienie na czop powinno się równoważyć z ciśnieniem P wału.

Aby obliczyć to całkowite ciśnienie zastosujemy znowu metodę sumowania elementów nieskończoność małych

według schematu z ustępu 348, przy czym jako zmienną niezależną przyjmiemy promień r zmieniający się od r_0 do R . Rozbijamy ten przedział na części i w ten sposób rozbijamy cały pierścień na elementarne



Rys. 45

pierścienie koncentryczne, tak że ciśnienie P rozkłada się na ciśnienia elementarne odpowiadające poszczególnym pierścieniom. Rozpatrujemy teraz pierścień ograniczony kołami o promieniach r i $r+dr$ (na rys. 45b) pierścień ten jest zakreskowany). Pole tego pierścienia wynosi

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2;$$

odrzucając nieskończonie małą $\pi(dr)^2$ rzędu drugiego, możemy przyjąć, że pole to jest w przybliżeniu równe $2\pi r dr$. Jeśli p oznacza ciśnienie (na jednostkę pola) w punkcie odległym od środka o r , to rozpatrywanemu pierścieniowi odpowiada ciśnienie elementarne

$$dP = p \cdot 2\pi r dr,$$

skąd przez sumowanie i przejście do granicy otrzymujemy równość

$$(11) \quad P = 2\pi \int_{r_0}^R pr dr.$$

Powtarzamy, że równość ta wyraża fakt, iż całkowite ciśnienie rozłożone na czopie jest równe ciśnieniu wału.

Wyznaczamy teraz moment M względem osi obrotu siły tarcia dla obracającego się czopa. Rozpatrzymy ponownie pierścień elementarny, o którym była mowa wyżej; siła tarcia pochodząca od tego pierścienia przeciwdziała obrotowi i jest równa

$$\mu dP = 2\pi \mu pr dr,$$

tak że odpowiadający jej moment elementarny dM wyraża się iloczynem tej siły przez ramię r (współne dla wszystkich punktów pierścienia)

$$dM = 2\pi \mu pr^2 dr$$

wobec tego moment siły tarcia wynosi

$$(12) \quad M = 2\pi \mu \int_{r_0}^R pr^2 dr.$$

Jak wiadomo z mechaniki praca A wykonana przez taki stały moment obrotowy M w czasie 1 sek jest równa iloczynowi momentu M przez prędkość kątową obrotu ω (1/sek)

$$A = M\omega.$$

Aby doprowadzić do końca obliczenie pracy A , należy teraz uczynić jakieś założenia o funkcji rozkładu ciśnienia p na powierzchni czopa.

Najprostsze jest założenie, że rozkład ciśnienia jest równomierny, tzn. że $p = \text{const}$. Wielkość tej stałej wyznacza się z warunku (11). Wobec tego jest bezpośrednio widoczne, że jeśli ciśnienie rozkłada się równomiernie po polu $\pi(R^2 - r_0^2)$ pierścienia, to na jednostkę pola przypada ciśnienie

$$p = c = \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}.$$

Podstawiając tę wartość zamiast p we wzorze (12), znajdujemy następnie

$$M = 2\pi \mu \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R r^2 dr = \frac{2}{3} \mu P \frac{R^3 - r_0^3}{R^2 - r_0^2}.$$

W szczególności dla pełnego czopa jest $M = \frac{2}{3} \mu PR$.

Wyniki te można jednak stosować tylko do czopów nowych, jeszcze nie dotartych. Rzecz w tym, że przy obrocie wału punkty czopa bardziej oddalone od środka O poruszają się z większą prędkością liniową, w punktach tych praca tarcia jest większa i wobec tego większe jest zużycie zarówno czopa, jak i łożyska. Dzięki temu część ciśnienia przenosi się na części czopa bliższe środka. Dla czopów starych wyslu-

żonych przyjmuje się zazwyczaj, że ciśnienie rozkłada się na nich w ten sposób, iż praca siły tarcia (na jednostkę, pola) a wraz z nią i zużycie zachowuje wszędzie wielkość stałą. Dzieląc pracę elementarną $dA = \omega dM$ przez pole $2\pi r dr$ pierścienia elementarnego, możemy napisać nasze założenie w postaci

$$\omega \mu pr = \text{const}, \quad \text{skąd także} \quad pr = c = \text{const};$$

a więc zakładamy, że ciśnienie p zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do odległości r od środka. Podstawiając c zamiast pr w warunku (11), znajdujemy wielkość tej stałej

$$P = 2\pi c \int_{r_0}^R dr = 2\pi c (R - r_0), \quad \text{skąd} \quad c = \frac{P}{2\pi (R - r_0)}.$$

Wreszcie podstawiając we wzorze (12) w miejsce pr otrzymane wyrażenie, otrzymujemy wynik

$$M = 2\pi \mu \frac{P}{2\pi (R - r_0)} \int_{r_0}^R r dr = \frac{1}{2} \mu P (R + r_0).$$

Dla czopa pełnego $M = \frac{1}{2} \mu PR$.

Oczywiście strata mocy z powodu tarcia w przypadku czopów dotartych jest mniejsza niż w przypadku czopów nowych.

356. Zadania na sumowanie elementów nieskończoność małe. Przytoczymy jeszcze kilka zadań, które rozwiązuje się metodą sumowania elementów nieskończoność małe.

1) Znaleźć wzór na moment statyczny M bryły V względem danej płaszczyzny, jeśli znane jest pole przekroju bryły płaszczyzną równoległą do danej jako funkcja odległości x od niej. Zakłada się, że gęstość jest równa 1.

Przy oznaczeniach z ustępu 342 masa (objętość) elementarnej warstwy leżącej w odległości x od danej płaszczyzny jest równa $P(x) dx$, a jej moment statyczny $dM = x P(x) dx$; sumując otrzymujemy więc

$$M = \int_a^b x P(x) dx.$$

Odległość ξ środka ciężkości bryły od danej płaszczyzny wyraża się wzorem

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{\int_a^b x P(x) dx}{\int_a^b P(x) dx}.$$

W szczególności dla bryły obrotowej

$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}.$$

Jeśli zastosować ten wynik (a) do stożka kołowego i (b) do półkuli, to znajdziemy, że odległości środków ciężkości od podstaw są równe odpowiednio: (a) $\frac{1}{4}$ wysokości, (b) $\frac{3}{8}$ promienia.

2) Znaleźć wzór na moment statyczny M powierzchni obrotowej względem płaszczyzny prostopadłej do osi obrotu. Zakładamy, że „gęstość powierzchniowa” jest równa 1.

Przymijmy osią obrotu za osią x ; za początek układu przyjmijmy punkt przecięcia osi x z daną płaszczyzną. Przy oznaczeniach z ustępu 344 masa (pole) elementarnej warstwy w odległości y od początku układu wynosi $2\pi y ds$; jej moment statyczny równa się $dM = 2\pi xy ds$ i ostatecznie

$$M = 2\pi \int_0^s xy ds = 2\pi \int_0^s \Phi(s) \Psi(s) ds.$$

W szczególności jeśli obracająca się krzywa jest dana równaniem $y = f(x)$ ($a < x < b$), to

$$M = 2\pi \int_a^b xy \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_a^b xf(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx.$$

Odległość ξ środka ciężkości powierzchni od danej płaszczyzny wynosi więc

$$\xi = \frac{M}{P} = \frac{\int_0^s xy ds}{\int_0^s y ds} = \frac{\int_a^b xy \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}.$$

Zastosować ostatni wzór do powierzchni (a) stożka kołowego, (b) do półkuli.

Odpowiedź. Odległość środka ciężkości od podstawy jest równa (a) $\frac{1}{3}$ wysokości, (b) $\frac{1}{2}$ promienia.

3) Wyznaczyć momenty statyczne M_{yz} , M_{zx} , M_{xy} , względem płaszczyzn układu współrzędnych i położenie środka ciężkości powierzchni walcowej [346, rys. 35]. Zastosować otrzymane wzory do powierzchni odcinka walca [343, 8)].

Odpowiedź. Ogólne wzory mają postać

$$M_{yz} = \int_0^s xz ds, \quad M_{zx} = \int_0^s yz ds, \quad M_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^s z^2 ds,$$

$$\xi = \frac{M_{yz}}{|P|}, \quad \eta = \frac{M_{zx}}{|P|}, \quad \zeta = \frac{M_{xy}}{|P|},$$

gdzie $|P|$ oznacza pole powierzchni. W zaproponowanym przykładzie jest: $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{4}\pi a$, $\zeta = \frac{1}{8}\pi h$.

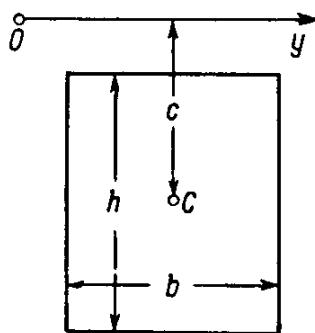
4) *Momentem bezwładności* (lub *momentem kwadratowym*) punktu materialnego o masie m względem pewnej osi (lub płaszczyzny) nazywamy iloczyn masy m przez kwadrat odległości d punktu od osi (lub od płaszczyzny). Wychodząc z tej definicji znajdziemy wzór na moment bezwładności I_y figury płaskiej $A_1B_1B_2A_2$ (rys. 46) względem osi y przy założeniu, że masa jest rozłożona z „gęstością powierzchniową” równą 1.

Mamy tu

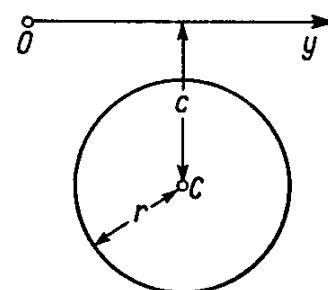
$$dI_y = x^2(y_2 - y_1) dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2(y_2 - y_1) dx.$$

a)



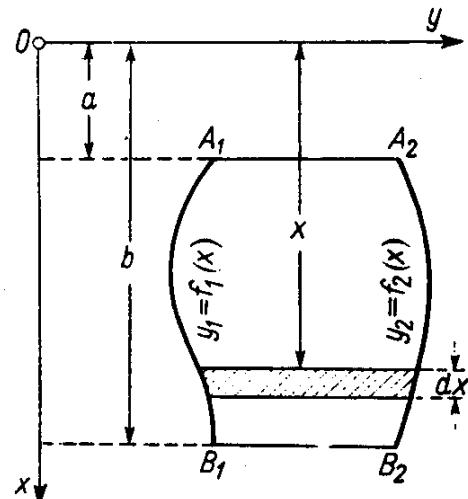
b)



Rys. 47

Na przykład dla przypadków, przedstawionych na rysunku 47, otrzymujemy

$$(a) \quad y_2 - y_1 = b, \quad I_y = b \int_{c-h/2}^{c+h/2} x^2 dx = bc^2h + \frac{1}{12}bh^3;$$



Rys. 46

w szczególności dla $c = 0$ jest $I_y = \frac{1}{12} bh^3$;

$$I_y = 2 \int_{c-r}^{c+r} x^2 \sqrt{r^2 - (x-c)^2} dx = \pi r^2 c^2 + \frac{1}{4} \pi r^4,$$

w szczególności dla $c = 0$ mamy $I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$.

5) Wyznaczyć moment bezwładności bryły V rozpatrzanej w zadaniu 1) względem wymienionej tam płaszczyzny. Zastosować otrzymany wzór do wyznaczenia momentu bezwładności: (a) stożka kołowego, (b) półkuli względem płaszczyzny podstawy.

Odpowiedź: $I = \int_a^b x^2 P(x) dx$; w szczególności (a) $I = \frac{1}{30} \pi R^2 h^3$, (b) $I = \frac{2}{15} \pi R^5$.

6) Ciśnienie cieczy na dowolny płaski element pola zanurzony na głębokość h pod jej powierzchnią jest równe ciężarowi słupa cieczy o wysokości h , którego podstawą jest ten przekrój. W ten sposób ciśnienie (w kG/m^2) na głębokości h (w metrach) przypadające na jednostkę pola jest równe γh , gdzie γ oznacza ciężar właściwy cieczy (w kG/m^3).

Zakładamy, że w cieczy zanurzona jest pionowo figura płaska $A_1B_1B_2A_2$ (rys. 46) ⁽¹⁾.

Znaleźć całkowite ciśnienie hydrostatyczne W na tę figurę i jego moment M względem swobodnej powierzchni cieczy.

Element powierzchni $dP = (y_2 - y_1) dx$ doznaje ciśnienia

$$dW = \gamma x (y_2 - y_1) dx,$$

którego moment względem osi y jest równy

$$dM = \gamma x^2 (y_2 - y_1) dx.$$

Stąd otrzymujemy

$$W = \gamma \int_a^b x (y_2 - y_1) dx, \quad M = \gamma \int_a^b x^2 (y_2 - y_1) dx.$$

Pierwsza całka przedstawia oczywiście moment statyczny M , figury względem osi y ; druga zaś — moment bezwładności I_y , figury względem tej samej osi.

Jeśli ξ oznacza odległość środka ciężkości C figury od swobodnej powierzchni cieczy, a $|P|$ — pole tej figury, to możemy napisać, że $W = \gamma |P| \xi$. Środek ciśnienia, tzn. punkt przyłożenia siły równoważącej całkowite ciśnienie, jest odległy od swobodnej powierzchni o

$$\xi^* = \frac{M}{W} = \frac{|P| \xi}{I_y}.$$

Zastosujemy ten wzór do przypadku przedstawionego na rysunku 47.

W przypadku a): $\xi = c$, $|P| = bh$ i $W = \gamma bhc$. Dalej, ponieważ w 4) obliczyliśmy już, że

$$I_y = bc^2 h + \frac{bh^3}{12},$$

możemy od razu napisać

$$\xi^* = c + \frac{h^2}{12c}.$$

W szczególności jeśli $c = \frac{1}{2} h$ (tj. jeśli górny bok prostokąta leży na poziomie swobodnej powierzchni cieczy), to mamy

$$W = \frac{1}{2} \gamma b h^2, \quad \xi^* = \frac{2}{3} c.$$

⁽¹⁾ Przyjmujemy, że os y leży na swobodnej powierzchni cieczy.

W przypadku b): $\xi = c$, $|P| = \pi r^2$ i $W = \gamma c \pi r^2$. Dalej jest $I_y = \pi r^2 c^2 + \frac{1}{4} \pi r^2$ [patrz 4)]. Dlatego ostatecznie jest

$$\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}.$$

7) Jeśli w ściance naczynia napełnionego wodą znajduje się pozioma szczelina na głębokości h (metrów) pod powierzchnią wody, to woda będzie wypływać przez nią z prędkością (w m/sek)

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (1).}$$

Założymy teraz, że w ściance zbiornika jest otwór prostokątny (rys. 48). Należy wyznaczyć prędkość ucieczki wody, tzn. objętość wody Q (m^3), wypływającej w czasie 1 sek.

Paskowi elementarnemu o szerokości dx na głębokości x odpowiada prędkość $v = \sqrt{2gx}$; ponieważ jego pole jest równe $b dx$, więc wypływ wody przez ten pasek wyraża się wzorem $dQ = \sqrt{2gx} b dx$. Sumując znajdujemy

$$Q = \sqrt{2g} b \int_{h_0}^h x^{1/2} dx = \frac{3}{2} \sqrt{2g} b (h^{2/3} - h_0^{2/3}).$$

W rzeczywistości odpływ wody jest trochę mniejszy od znalezionej liczby z powodu tarcia wewnętrznego cieczy i ściśnięcia strumienia. Wpływ tych czynników uwzględnia się zazwyczaj pod postacią empirycznego współczynnika $\mu < 1$ i wzór pisze się w postaci.

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b (h^{3/2} - h_0^{3/2}).$$

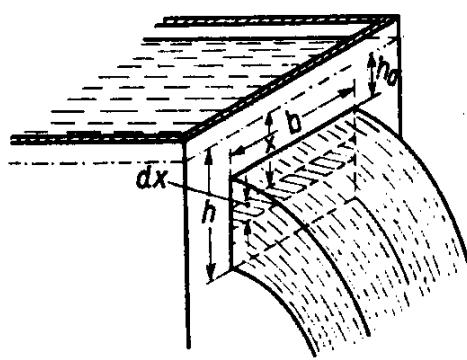
Dla $h_0 = 0$ otrzymujemy wzór na odpływ wody przez prostokątne ujście wodospadu:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b h^{3/2}.$$

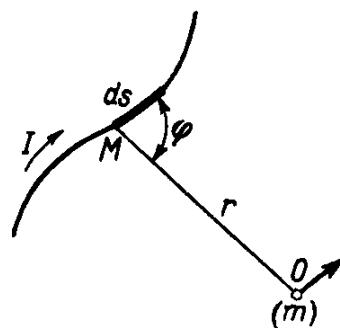
8) Badając pole magnetyczne dokoła przewodnika, w którym płynie prąd elektryczny, Biot i Savart doszli do wniosku, że siła, z jaką prąd oddziałuje na „ładunek magnetyczny”, może być rozpatrywana jako wypadkowa sił, pochodzących jakby od poszczególnych nieskończoność małych „elementów prądu”. W myśl odkrytego przez nich prawa, element prądu ds (rys. 49) oddziałuje na ładunek magnetyczny m , umieszczony w punkcie O z siłą

$$dF = \frac{Im \sin \varphi ds}{r^2} \text{ (2),}$$

gdzie I oznacza natężenie prądu, r — odległość OM , a φ — kąt (ds, r) .



Rys. 48



Rys. 49

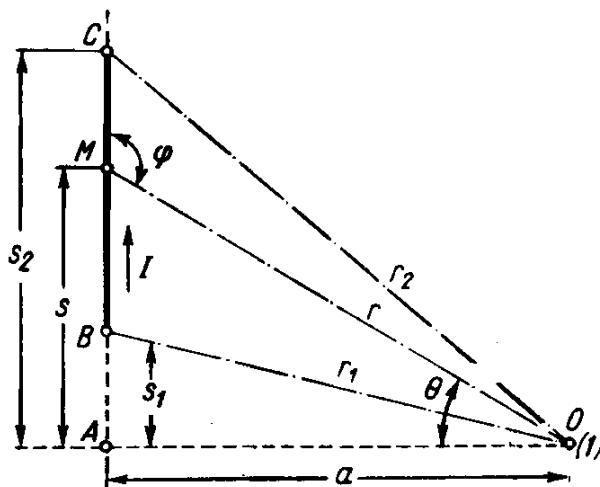
(1) Wzór ten, dowodzony w hydrodynamice, znany jest pod nazwą *wzoru Torricellego*. Zauważmy, że ma on taką samą postać, jak wzór na prędkość, jaką nabiera ciężki punkt materialny spadając z wysokości h .

(2) Wzór jest słuszny w takiej postaci jedynie przy odpowiednim wyborze jednostek (na przykład jeśli siłę wyrazić w dynach, odległość w cm, a ładunek magnetyczny i natężenie prądu — w jednostkach elektromagnetycznych).

Siła ta jest skierowana wzdłuż prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez punkt O i odcinek ds , i to — w przypadku podanym na rysunku — w stronę od czytelnika.

Jeśli mamy wyznaczyć działanie skończonego odcinka przewodnika, w którym płynie prąd, to musimy sumować te właśnie siły elementarne.

Dla przykładu wyznaczmy siłę, z jaką działa na jednostkowy „ładunek magnetyczny” prostoliniowy odcinek BC przewodnika, w którym płynie prąd (rys. 50), przy oznaczeniach podanych na rysunku.



Rys. 50

Ponieważ $\sin \varphi = \sin \angle OMA = \frac{a}{r}$ można więc dF przedstawić w postaci

$$dF = \frac{aI ds}{r^3} = \frac{aI ds}{(a^2 + s^2)^{3/2}}.$$

Siły elementarne można tu bezpośrednio dodawać, ponieważ wszystkie mają ten sam kierunek. Wobec tego

$$F = aI \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{(s^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{I}{a} \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{I}{a} \left(\frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1} \right).$$

§ 4. Najprostsze równania różniczkowe

357. Pojęcia podstawowe. Równania pierwszego rzędu. W rozdziale VIII rozpatrywaliśmy zadanie jak znaleźć funkcję $y = y(x)$, jeśli dana jest jej pochodna

$$(1) \quad y' = f(x)$$

lub — co wychodzi na to samo — jeśli dana jest jej różniczka $dy = f(x) dx$ i uczyliśmy się wykonywać operację całkowania, czyli kwadraturę, która rozwiązuje to zadanie

$$(2) \quad y = \int f(x) dx + C \text{ (1).}$$

To rozwiązanie ogólne zawiera stałą C . Jak widzieliśmy w przykładach [263, 264], jeśli dane są warunki początkowe

$$(3) \quad y = y_0 \quad \text{dla} \quad x = x_0,$$

(1) W tym paragrafie symbol $\int f(x) dx$ będzie oznaczał dowolną wprawdzie, ale określoną funkcję pierwotną i wobec tego stałej całkowania nie włączamy do tego symbolu pisząc ją oddzielnie.

to wartość stałej $C = C_0$ jest przez to wyznaczona. Podstawiając tę wartość we wzorze (2) otrzymujemy *rozwiązanie szczególnne* naszego zadania, tzn. konkretną funkcję $y = f(x)$, która nie tylko ma z góry daną pochodną, ale także spełnia warunki początkowe (3).

Często jednakże zdarza się, że trzeba wyznaczyć funkcję $y = y(x)$ z bardziej złożonej zależności postaci

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

wiązającej wartości zmiennej niezależnej z wartościami samej funkcji y i z wartościami jej pochodnych y', y'', \dots . Związki tej postaci nazywają się ogólnie *równaniami różniczkowymi*.

Rozważmy *równanie pierwszego rzędu*

$$(4) \quad F(x, y, y') = 0,$$

które zawiera tylko pierwszą pochodną y' .

Rozwiązaniem tego równania nazywa się dowolna funkcja $y = y(x)$, która spełnia je tożsamościowo względem zmiennej x . Można udowodnić przy pewnych założeniach o funkcji F , że *rozwiązanie ogólne* tego równania, podobnie jak w prostszym przypadku wspomnianym na początku [patrz (2)], także zawiera dowolną C , tzn. ma postać

$$(5) \quad y = \varphi(x, C).$$

Czasami jednakże rozwiązanie to otrzymujemy w postaci uwikłanej

$$(6) \quad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{lub} \quad \psi(x, y) = C.$$

Znajdowanie ogólnego rozwiązania równania różniczkowego w tej lub innej postaci nazywa się *całkowaniem równania*.

Dla przykładu rozpatrzymy takie zadanie: znaleźć krzywe, których podnormalna jest stała. Jeśli równanie takiej krzywej ma postać nieuwiklaną $y = y(x)$, to zadanie sprowadza się do znalezienia takich funkcji, które spełniają równanie $yy' = p$, gdzie $p = \text{const}$ [230, (3)]. Równanie to napiszemy w postaci $(y^2)' = 2p$; jasne jest teraz, że ogólnym rozwiązaniem jego jest funkcja

$$(7) \quad y^2 = 2px + C \quad \text{lub} \quad y = \pm \sqrt{2px + C}.$$

W ten sposób żądanemu warunkowi czyni zadość cała rodzina parabol, które otrzymuje się jedną z drugiej przez przesunięcie wzdłuż osi x .

Odpowiedzią na zadanie jest to właśnie rozwiązanie ogólne, ponieważ należało znaleźć wszystkie krzywe spełniające wspomniany warunek. Gdybyśmy w zadaniu zażądali dodatkowo, żeby krzywa przechodziła przez dany punkt (x_0, y_0) , to podstawiając te wartości do znalezionej równości (7), wyznaczylibyśmy wartość stałej C :

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0.$$

Podstawiając w (7) $C = C_0$ dochodzimy do *rozwiązania szczególnego* $y^2 = 2px + C_0$, które daje już konkretną krzywą.

Trzeba zaznaczyć, że najczęściej zdarza się tak, iż zadanie, które doprowadziło do równania różniczkowego, wymaga konkretnego rozwiązania szczególnego. Zazwyczaj takie rozwiązanie określone jest przez warunki początkowe typu (3), wysunięte przez samo zadanie. Te warunki umożliwiają przede wszystkim ustalenie wartości stałej $C = C_0$, którą otrzymujemy, podstawiając w rozwiązaniu ogólnym (5) lub (6) $x = x_0$ i $y = y_0$. Jeśli teraz w tym rozwiązaniu ogólnym podstawimy znalezioną wartość C_0 w miejsce C , to otrzymamy rozwiązanie szczególnne, które spełnia warunki zadania.

358. Równanie stopnia pierwszego względem pochodnej. Rozdzieranie zmiennych. Założymy teraz, że w równaniu (4) występuje tylko pierwsza potęga pochodnej y' , tzn. że równanie ma postać

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

gdzie P, Q są funkcjami dwóch zmiennych x i y . Podstawiając tu $y' = \frac{dy}{dx}$ sprowadzimy nasze równanie

do postaci

$$(8) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

która jest czasem wygodniejsza.

Rozpatrzymy tu dokładniej tylko te prostsze przypadki szczególnego równania (8), w których rozwiązywanie jego sprowadza się bezpośrednio do kwadratur. Rozważenie tych przypadków jest w ten sposób naturalnym uzupełnieniem rozdziału VIII.

Jeśli w równaniu (8) współczynnik P zależy w istocie tylko od x , a współczynnik Q — tylko od y , tzn. jeśli równanie ma postać

$$(9) \quad P(x) dx + Q(y) dy = 0,$$

to mówimy, że zmienne są rozdzielone. W tym przypadku całkowanie jest bardzo proste.

Niech funkcje $P(x)$ i $Q(y)$ będą ciągłe (w odpowiednich przedziałach). Wtedy $P(x) dx$ jest różniczką funkcji $P(x) = \int P(x) dx$, a $Q(y) dy$ — różniczką funkcji $Q(y) dy = \int Q(y) dy$, nawet jeżeli przez y rozumiemy funkcję $y = y(x)$ spełniającą równanie (9)⁽¹⁾. W takim razie lewa strona równania (9) jest różniczką sumy $P(x) + Q(y)$. Ponieważ różniczka ta — w myśl równania (9) — jest równa 0, więc sama funkcja sprowadza się do stałej

$$(10) \quad P(x) + Q(y) = C.$$

Oczywiście także na odwrót, jeśli funkcja $y = y(x)$ spełnia dla dowolnego x to równanie, to spełnia również równanie (9). Równość (10) daje więc ogólne rozwiązanie równania (9).

Przy rozwiązywaniu równania (9) niektórzy wolą umieszczać składniki z dx i dy po różnych stronach równości

$$(11) \quad Q(y) dy = -P(x) dx.$$

Całkując oddziennie lewą i prawą stronę równania i pamiętając o stałej dowolnej, którą wystarczy dodać do jednej z całek, otrzymamy wynik

$$\int Q(y) dy = - \int P(x) dx + C$$

identyczny z poprzednim.

Założymy, że mają być spełnione warunki początkowe (3). Zamiast znajdować najpierw rozwiązanie ogólne, a następnie dobierać stałą C do warunków początkowych, możemy postąpić trochę prościej. „Sumując” wielkości elementarne (11) po prawej stronie w przedziale od x_0 do x i po lewej stronie — od y_0 do y , otrzymujemy równość

$$\int_{y_0}^y Q(y) dy = - \int_{x_0}^x P(x) dx,$$

która jest szukanym rozwiązaniem szczególnym; sam kształt tej równości podkreśla, że jest ona oczywiście spełniona dla $x = x_0$ i $y = y_0$. Łatwo można sprawdzić, że ostatnie rozwiązanie różni się od poprzedniego jedynie sposobem napisania.

PRZYKŁADY. 1) Niech będzie dane równanie

$$\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

Całkujemy stronami

$$\int \sin x dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \quad \text{lub} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C,$$

(1) Wobec niezmienniczości kształtu różniczki [106].

skąd wynika, że

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}.$$

Jest to rozwiązańe ogólne podanego na początku równania. Jeśli dane są dodatkowo warunki początkowe, np. $y = 1$ dla $x = 0$, to podstawiając te wartości otrzymujemy od razu $C = 1$, co prowadzi do rozwiązania szczególnego

$$y = \frac{(1 + \cos x)^2}{4}.$$

Jak wspomnialiśmy, można w tym przypadku uniknąć znajdowania uprzednio rozwiązania ogólnego pisząc od razu

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = - \int_0^x \sin x \, dx, \quad \text{czyli} \quad 2(\sqrt{y} - 1) = \cos x - 1,$$

skąd

$$\sqrt{y} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad y = \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^2.$$

Często się zdarza, że chociaż równanie (8) nie jest postaci (9), to jednak można je doprowadzić do tej postaci, po czym rozwiązuje się je podanym wyżej sposobem. Takie przekształcenie nosi nazwę *rozdzielenia zmiennych*. Zmienne można rozdzielić łatwo jedynie wtedy, kiedy współczynniki P i Q są iloczynami czynników, z których każdy zależy tylko od jednej zmiennej, tzn. kiedy

$$P(x, y) = P_1(x) P_2(y) \quad \text{i} \quad Q(x, y) = Q_1(x) Q_2(y).$$

Rzeczywiście, aby rozdzielić zmienne w tym przypadku wystarczy podzielić stronami równanie

$$(12) \quad P_1(x) P_2(y) \, dx + Q_1(x) Q_2(y) \, dy = 0$$

przez $P_2(y)$ $Q_1(x)$. Otrzymujemy w ten sposób

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \, dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} \, dy = 0.$$

$$2) \quad y \sin \frac{1}{2} x \, dx - \cos \frac{1}{2} x \, dy = 0.$$

Równanie ma postać (12) i po rozdzieleniu zmiennych przyjmuje postać

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} \, dx.$$

Całkując stronami otrzymujemy

$$\ln y = -2 \ln \cos \frac{1}{2} x + c.$$

Podnosząc liczbę c do odpowiednich potęg znajdujemy stąd

$$y = \frac{e^c}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2e^c}{1 + \cos x},$$

podstawiając jeszcze $C = 2e^c$ doprowadzimy rozwiązanie ogólne do postaci

$$y = \frac{C}{1 + \cos x}.$$

359. Zadania. Rozpatrzymy kilka zadań z różnych dziedzin wiedzy, prowadzących bezpośrednio do równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych.

1) Znaleźć krzywe, dla których odcinek normalnej n (do punktu przecięcia z osią x) ma długość stałą r .

Opierając się na wzorze na odcinek normalnej n [230, (4)], piszemy warunek, który powinna spełniać szukana funkcja y zmiennej x , w postaci równania różniczkowego

$$\left| y \sqrt{1+y'^2} \right| = r, \quad \text{czyli} \quad y^2(1+y'^2) = r^2.$$

Stąd mamy

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \quad \text{lub} \quad \frac{y dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = \pm dx.$$

Całkując otrzymujemy

$$-\sqrt{r^2-y^2} = \pm(x+C) \quad \text{lub} \quad (x+C)^2+y^2 = r^2.$$

Jak należało oczekiwać, otrzymaliśmy rodzinę kół o promieniach r i o środkach leżących na osi x .

2) Znaleźć krzywe, dla których odcinek stycznej do przecięcia się z osią x , ma stałą długość równą a .

Na mocy 230, (4) odpowiednie równanie różniczkowe ma postać

$$\left| \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} \right| = a.$$

Podstawiając $y' = \frac{dy}{dx}$ łatwo przekształcamy to równanie do postaci

$$\left| y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right| = a, \quad \text{czyli} \quad dx = \pm \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} dy$$

Całkując otrzymujemy

$$x+C = \pm \left[a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2} \right];$$

jest to rodzina *traktrys* [porównaj 331, 11)].

3) *Prawo stygnięcia.* Przypuśćmy, że stygnące ciało o temperaturze $\theta^\circ\text{C}$ jest otoczone ośrodkiem o temperaturze 0°C . Newton odkrył prawo, w myśl którego prędkość stygnięcia jest wprost proporcjonalna do temperatury θ , tzn.

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta,$$

gdzie k jest stałą dodatnią. Znaleźć prawo obniżania się temperatury ciała począwszy od chwili $t=0$.

Mamy tu

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k dt,$$

skąd znajdujemy całkując

$$\ln \theta = -kt + \ln C \text{ (1).}$$

Oczywiście

$$\theta = Ce^{-kt}.$$

(1) Przewidując przejście do funkcji wykładniczej od razu piszemy stałą w wygodnej postaci $\ln C$.

Podstawiając tu $t = 0$ widzimy, że C nie jest niczym innym tylko początkową temperaturą θ_0 , a więc ostatecznie dostajemy wzór

$$\theta = \theta_0 e^{-kt},$$

który podaje temperaturę ciała w każdej chwili, jeśli tylko znana jest temperatura (θ_0) w chwili początkowej.

Współczynnik k zależy od własności ciała i ośrodka; wyznacza się go metodami doświadczalnymi.

4) *Prądy dodatkowe przy zamykaniu i przerywaniu obwodu elektrycznego.* Jeśli w obwodzie elektrycznym napięcie jest stałe i równe V , to oznaczając przez R opór obwodu i przez I natężenie prądu mamy w myśl prawa Ohma $V = RI$. Jeśli jednakże napięcie V zmienia się (a także w chwili włączenia lub przerywania prądu o napięciu stałym), to w wielu przypadkach zachodzi zjawisko *samoindukcji*, które polega na pojawieniu się dodatkowej siły elektromotorycznej wprost proporcjonalnej do prędkości zmiany natężenia prądu $\frac{dI}{dt}$, ale mającej przeciwny znak. W ten sposób wielkość siły elektromotorycznej samoindukcji można napisać w postaci

$$-L \frac{dI}{dt},$$

gdzie L jest to *współczynnik samoindukcji* ($L > 0$).

Jeśli pojawia się samoindukcja, to przy przerywaniu dopływu prądu jego natężenie nie od razu spada do 0, a przy włączeniu nie od razu osiąga swoją wartość normalną. Zbadamy te zjawiska analitycznie.

Prawo Ohma ma w tym przypadku postać następującą:

$$(13) \quad V = -L \frac{dI}{dt} = RI \quad \text{lub} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V}{L}.$$

(a) Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ przerywamy prąd stały o natężeniu I_0 . Ponieważ wtedy $V = 0$, więc

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

i analogicznie jak w przykładzie 3)

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Ten prąd, przepływający w obwodzie z powodu działania samej tylko siły elektromotorycznej samoindukcji, nazywa się *prądem indukcyjnym*. Ze wzrostem t natężenie tego prądu szybko zmierza do 0 i po krótkim czasie staje się on niewyczekiwany.

(b) Jeśli w chwili $t = 0$ zamykamy obwód i pojawia się w nim stałe napięcie V , to z równania (13), znów rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$\frac{-R dI}{V - RI} = -\frac{R}{L} dt, \quad \ln(V - RI) = -\frac{R}{L} t + \ln C,$$

$$V - RI = Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Stałą C wyznaczamy z warunków początkowych $I = 0$ dla $t = 0$; oczywiście $C = V$, a więc ostatecznie

$$I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Widzimy, że oprócz prądu o natężeniu V/R , odpowiadającym prawu Ohma, jednocześnie płynie w przeciwnym kierunku prąd o natężeniu

$$\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Prąd ten nosi nazwę prądu indukcyjnego; ze wzrostem t natężenie jego szybko maleje.

5) *Równanie reakcji chemicznej.* Rozpatrzmy proces chemiczny polegający na zamianie oddziałujących wzajemnie na siebie substancji A, B, \dots na substancje M, N, \dots . Dla oszacowania ilości substancji uczestniczącej w reakcji wyrażamy ją w gramocząsteczkach, czyli molach. Molem jakiejś substancji nazywamy taką jej ilość wagową, która wyraża się w gramach liczbą równą ciężarowi cząsteczkowemu tej substancji. W 1 molu dowolnej substancji zawarta jest zawsze taka sama liczba cząsteczek niezależnie od rodzaju substancji.

Jeśli założymy, że w reakcji na każdą cząsteczkę jednej substancji przypada jedna cząsteczka drugiej, to również na każdy mol pierwszej substancji przypada mol drugiej. Po czasie t od rozpoczęcia reakcji biorą w niej udział jednakowe ilości cząsteczek obu substancji: powiedzmy x moli. Prędkość wzrostu zmiennej x względem czasu, czyli pochodna $\frac{dx}{dt}$, nazywa się *prędkością reakcji chemicznej*.

Niech na przykład w reakcji uczestniczą dwie substancje A i B , których ilości początkowe (w molach) oznaczamy przez a i b (niech będzie przy tym $b > a$). Po czasie t pozostaje ilość $a - x$ substancji A i ilość $b - x$ substancji B . Naturalne jest założenie, że prędkość reakcji w chwili t jest wprost proporcjonalna do iloczynu obu wchodzących w reakcję substancji, tzn. ilości reagujących cząsteczek, które jeszcze nie uległy przemianie. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \quad \text{lub} \quad \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt .$$

Całkując otrzymujemy

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{a-x}{b-x} = -kt + C .$$

Ponieważ dla $t = 0$ jest także $x = 0$, więc $C = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a}{b}$. Podstawiając otrzymaną wartość stałej C dostajemy

$$\ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t ,$$

skąd łatwo znajdujemy

$$x = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - ae^{-k(b-a)t}} .$$

Przy wzroście t funkcja wykładnicza $e^{-k(b-a)t}$ dąży do 0 i po upływie skończonego czasu staje się tak mała, że praktycznie x nie różni się już od a i reakcja kończy się.

6) *Wahadło matematyczne.* Niech punkt materialny o masie m będzie zawieszony na nieroziągliwej nici lub na pręcie (którego masę zaniedbujemy) o długości l , tak że punkt ten może poruszać się po kole (rys. 51). Układ taki nazywa się *wahadłem matematycznym*. Wychylamy wahadło z położenia równowagi OA w położenie OB ($\alpha < \pi/2$) i puszczamy je swobodnie bez prędkości początkowej.

Wahadło przejdzie w położenie symetryczne OB' , potem powróci do położenia OB itd. Zadanie polega na zbadaniu charakteru tych wahań, tzn. na zbadaniu zależności między kątem $\alpha = \angle AOM$ i czasem t . Będziemy rozpatrywali ruch punktu M po łuku AB , mierząc przebytą drogę $s = \angle WAM = -\theta$ od punktu A , a czas t — od chwili przejścia wahadła przez położenie równowagi.

Rozkładając siłę ciężkości $F = mg$ działającą na punkt M tak, jak podano na rysunku, widzimy, że składowa styczna tej siły jest równa $F_s = -mg \sin \theta$ ⁽¹⁾, a składowa normalna równoważy się z napięciem nici czy też pręta. Jeśli przez v oznaczymy prędkość punktu M , to jego energia kinetyczna w roz-

(1) Siła jest skierowana przeciwnie do ruchu.

patrywanym położeniu jest równa $\frac{1}{2}mv^2$ i zmniejsza się do 0 przy przejściu punktu M do położenia B . Z drugiej strony, praca A pochodząca od siły F_s na drodze MB wyraża się całką [352, (9a)]:

$$A = - \int_0^s mg \sin \theta ds$$

(gdzie $S = \text{arc } AB$) lub jeśli przejść do zmiennej θ ,

$$A = -mgl \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = -mgl (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Na podstawie prawa zachowania energii [352] mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos \theta - \cos \alpha), \quad v = \sqrt{gl} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}.$$

Ponieważ $v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$, więc do wyznaczenia zależności między θ i t otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}$$

lub równanie

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}},$$

w którym zmienne są już rozdzielone.

Całkując lewą stronę ostatniego równania w przedziale od 0 do t , prawą — w przedziale od 0 do θ , dochodzimy do szukanej zależności

$$(14) \quad t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}.$$

Jednakże otrzymanej całki nie można tym razem wyrazić w postaci skończonej: jak zobaczymy, całkę tę można sprowadzić bezpośrednio do całki eliptycznej pierwszego rodzaju.

Po prostym przekształceniu wzór (14) przybiera postać

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\theta}}.$$

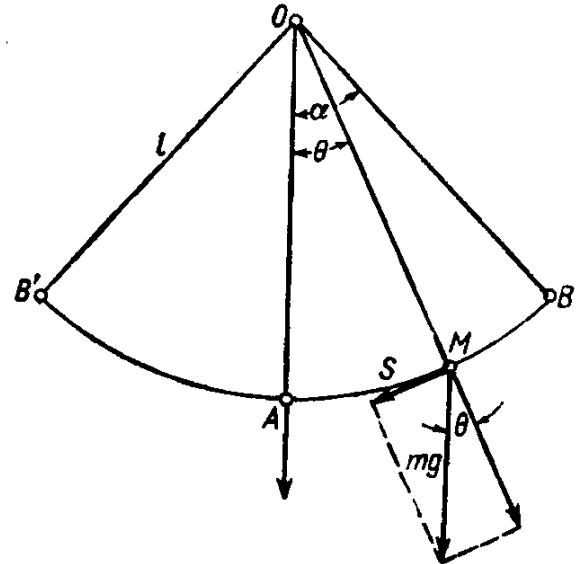
Oznaczmy $\sin \frac{1}{2}\alpha = k$ ($0 < k < 1$) i wprowadźmy nową zmienną całkowania φ za pomocą wzorów

$$(15) \quad \sin \frac{1}{2}\theta = k \sin \varphi, \quad \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\theta d\theta = k \cos \varphi d\varphi;$$

przy tym jeśli θ zmienia się od 0 do α , to φ zmienia się od 0 do $\pi/2$. Wtedy

$$(16) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\varphi, k).$$

Ponieważ z pierwszego ze wzorów (15) łatwo jest wyrazić φ przez θ , więc zależność t od θ można uważać za znalezioną.



Rys. 51

Na odwrót, chcąc wyrazić θ jako funkcję zmiennej t należy odwrócić funkcję

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

określoną całką eliptyczną. Z równości tej wynika, że μ jest funkcją zmiennej φ monotonicznie rosnącą ciągłą (a także i różniczkowalną) w przedziale $(-\infty, +\infty)$, która przyjmuje wartości również od $-\infty$ do $+\infty$. Wobec tego [83] zmienna φ jest jednoznaczna funkcją zmiennej μ w przedziale $(-\infty, +\infty)$; Jacobi oznaczył ją symbolem am u ⁽¹⁾. Z wzoru (16) mamy więc teraz

$$\varphi = \text{am} \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \text{a zatem} \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \text{am} \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Funkcję $\sin \text{am } u$ (*sinus amplitudy* lub *sinus eliptyczny*) oznaczamy zazwyczaj krótko przez $\text{sn } u$ ⁽²⁾. A więc ostatecznie zależność zmiennej θ od t wyraża się równością

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \text{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Na zakończenie wyznaczmy czas T jednego przejścia wahadła z położenia OB' do położenia OB ; czas ten jest dwa razy większy od czasu potrzebnego na przejście wahadła od położenia OA do położenia OB . Podstawiając w (14) $\theta = \alpha$ lub w (15) $\varphi = \pi/2$ ⁽³⁾, otrzymujemy po podwojeniu T wyrażone przez całkę eliptyczną pierwszego rodzaju

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K(k).$$

Zauważmy, że w rzeczywistości okres T wahań zależy od kąta α tzn. od wychylenia początkowego, ponieważ k zależy od α . Podstawiając — dla małych kątów — zamiast k zero otrzymujemy prosty wzór przybliżony

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

który też się zazwyczaj podaje w elementarnym kursie fizyki.

360. Uwagi o układaniu równań różniczkowych. Ograniczymy się do równań pierwszego rzędu postaci (8); rozpatrzymy zagadnienie układania takich równań. Proponujemy, aby czytelnik porównał nasze uwagi z tym, co mówiliśmy w ustępie 348 o prostszym równaniu

$$dQ = q(x) dx.$$

Z reguły przy układaniu równań trzeba rozpatrywać elementy nieskończoność małe omawianych figur i brył oraz nieskończoność małe przyrosty wielkości, o których mowa w zadaniu. Udało nam się co prawda uniknąć tego w poprzednim ustępie, ale tylko za cenę posługiwania się gotowym wyrażeniem na współczynnik kątowy stycznej, gotowymi wyrażeniami na prędkość zmiany tej, czy innej wielkości, które same wynikły z rozpatrywania elementów nieskończoność małych.

Przy układaniu zależności między nieskończoność małymi elementami należy posługiwać się wszystki-

⁽¹⁾ am — są to początkowe litery słowa *amplitudo* (amplituda).

⁽²⁾ Funkcja $\text{sn } u$, rozpatrywana jako funkcja zmiennej zespolonej, jest jedną z najprostszych tzw. *funkcji eliptycznych*, wprowadzonych przez Abela i Jacobiego.

⁽³⁾ Jeśli przyjąć, że górna granica całki (14) jest równa α , to całka ta jest „niewłaściwa” [patrz dalej 479], gdyż wtedy w przedziale całkowania funkcja podcałkowa jest nieograniczona. Trudności tej nie ma, jeśli posługujemy się całką (16).

mi możliwymi uproszczeniami i wzorami przybliżonymi, które sprowadzają się w istocie do odrzucania nieskończoności małych wyższych rzędów. W szczególności wszystkie przyrosty nieskończoności małe rozpatrywanych wielkości należy zastępować różniczkami; jak wiadomo, to również sprowadza się do odrzucania nieskończoności małych wyższych rzędów. Istotny sens wszystkich tych wskazówek najlepiej wyjaśnić na przykładach (patrz ustęp następny).

Tutaj zaś zatrzymamy się jeszcze na wyjaśnieniu tego ważnego faktu, że otrzymane w wyniku wszystkich tych uproszczeń równanie różniczkowe postaci (8)

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

bynajmniej nie jest przybliżone, ale zupełnie dokładne (1).

Przypuśćmy bowiem, że zastępując przyrosty Δx i Δy przez różniczki dx i dy oraz odrzucając — w razie potrzeby — składniki nieskończoności małe rzędu wyższego niż Δx , otrzymaliśmy równanie (8). Jeślibyśmy nie zrobili tej zamiany, to zamiast dx i dy w równaniu (8) mielibyśmy Δx i Δy . Przywrótmy ponadto wszystkie odrzucone nieskończoności małe wyższych rzędów i ich sumę — po przeniesieniu na prawą stronę — oznaczmy przez α ; oczywiście jest ona również nieskończoność mała rzędu wyższego. W ten sposób rozumując ściśle otrzymaliśmy nie równanie (8), ale równanie

$$P(x, y) \Delta x + Q(x, y) \Delta y = \alpha,$$

które jest już całkowicie dokładne. Dzielimy teraz to równanie stronami przez Δx

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x}$$

przechodzimy do granicy przy Δx zmierzającym do 0. Ponieważ wtedy iloraz $\alpha/\Delta x$ również zmierza do zera, więc ostatecznie w granicy otrzymamy równość

$$P(x, y) + Q(x, y) y' = 0 \quad \text{lub} \quad P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

identyczną z równaniem (8). Równanie (8) jest więc dokładne.

Chociaż przy zwykłej metodzie układania równania nie uciekamy się w sposób jawnego do przejścia granicznego, to jednak w rzeczywistości wykonujemy to przejście wtedy, kiedy odrzucamy nieskończoności małe rzędów wyższych i zastępujemy przyrosty różniczkami.

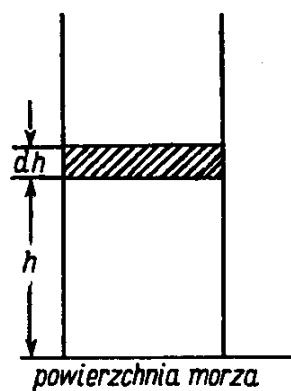
Zwracamy uwagę czytelnika na to, że wcale nie twierdzimy, że każde odrzucanie nieskończoności małych wyższych rzędów prowadzi do wyniku dokładnego. Jedynie w tym przypadku, kiedy odrzucanie do prowadzone jest „do końca”, w wyniku czego otrzymujemy równanie (8), liniowe i jednorodne względem różniczek, można już ręczyć za jego dokładność (i znów analogia z tym, co powiedzieliśmy w ustępie 348).

361. Zadania. 1) *Wzór barometryczny.* Postawimy sobie za zadanie ustalenie zależności między wysokością h (w metrach) nad poziomem morza i ciśnieniem p (w kg/m^2).

Wyobraźmy sobie na poziomie morza przekrój poziomy o polu 1 m^2 i rozpatrzmy słup powietrza nad tym przekrojem. Ciśnienie p powietrza na przekrój tego słupa na wysokości h zależy wprost od wagi tej części słupa, która znajduje się nad wspomnianym przekrojem. Zwiększenie wysokości h o nieskończoność małą wielkość dh powoduje zmniejszenie o dp — ciśnienia. Zmniejszenie to mierzy się wagą warstwy powietrza między płaszczyznami na wysokości h i $h+dh$ (rys. 52)

$$-dp = s dh,$$

gdzie s oznacza wagę (w kg) 1 m^3 powietrza przy ciśnieniu p . Zaniedbujemy przy tym to, że w rzeczywistości s zmienia się przy przejściu w rozpatrywanej warstwie od dolnego przekroju do górnego. Z prawa Boyle-Mariotta łatwo



Rys. 52

(1) Jest to analogiczne do tego, co powiedzieliśmy w końcu ustępu 348 o równaniu $dQ = q(x) dx$.

jest wnioskować, że wielkość s jest wprost proporcjonalna do ciśnienia p , tzn. $s = kp$, tak że ostatecznie mamy

$$dp = -kp dh \quad \text{lub} \quad \frac{dp}{p} = -k dh.$$

Jest to równanie znanego nam już typu [porównaj 359, zadania 3), 4) (a)].

Stąd otrzymujemy

$$p = p_0 e^{-kh}$$

Rozwiązujeć to równanie względem h , dostajemy wzór

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

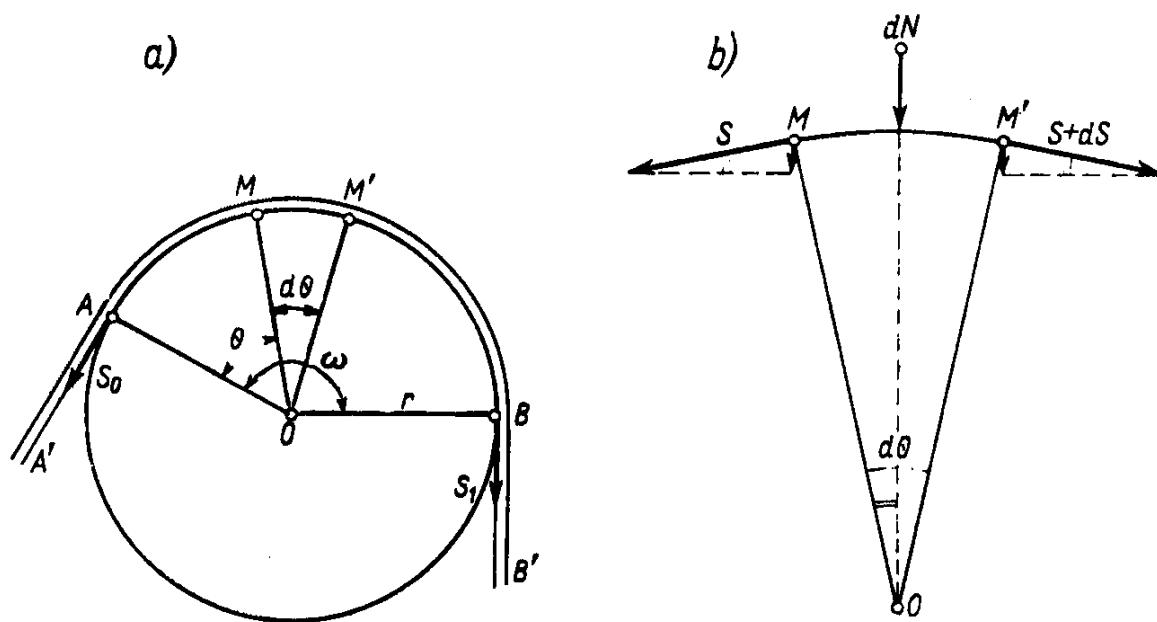
który pozwala znajdować wysokości h nad poziomem morza, jeśli znamy ciśnienie p powietrza.

Stała $1/k$, którą wyznacza się w fizyce, jest równa (po zaokrągleniu) $8000 (1+0,004t)$, gdzie t jest temperaturą średnią powietrza. Przechodząc do logarytmów przy podstawie 10 (mnożymy i dzielimy przez moduł zamiany $M = 0,43$) i zamieniając iloraz ciśnień p_0/p na iloraz odczytań barometru b_0/b , otrzymujemy ostatecznie wzór

$$h = 18\,400 (1+0,004t) \log \frac{b_0}{b}.$$

Wzór ten nadaje się również do wyznaczania różnicy h dowolnych dwóch poziomów, na których wskazania barometru są równe odpowiednio b_0 i b

2) *Tarcie lin i pasów.* Wyobraźmy sobie, że przez umocowany bęben walcowy przerzucono linię (pas itp.), która przylega do walca wzduż pewnego łuku AB (rys. 53 a), odpowiadającego kątowi środkowemu ω („kąt obejmowania”). Do końca A liny niech będzie przyłożona siła S_0 a do końca B — siła S_1 .



Rys. 53

Jeśli między linią i walcem istnieje tarcie, to siła S_0 może równoważyć także siłę większą od siebie zaczepioną na drugim końcu. Jaka jest największa siła S_1 , która może być zrównoważona przez daną siłę S_0 , jeśli istnieje tarcie?

Aby rozwiązać to zadanie, rozpatrzmy najpierw napięcie S wzduż części AB liny w tej chwili, w której rozpoczyna się poślizg. Z tego, że w punktach A i B napięcie liny jest równe odpowiednio S_0 i S_1 , wynika już, iż napięcie to nie będzie stałe.

Niech M będzie jakimkolwiek punktem na łuku AB i położenie tego punktu niech będzie określone przez kąt $\theta = \angle AOM$. Zbadamy, jakie siły działają na element MM' liny, odpowiadający kątowi środkowemu $d\theta$. Przede wszystkim w punkcie M działa napięcie $S = S(\theta)$, a w punkcie M' — napięcie $S + dS$ (rys. 53b). Obie te siły są skierowane wzduż stycznych do łuku. Aby wyznaczyć siły tarcia na rozpatrywanym elemencie, należy znaleźć siłę normalną dN , przyciskającą ten element do powierzchni bębna. Jest ona sumą składowych normalnych obu podanych napięć, a więc

$$dN = S \sin \frac{d\theta}{2} + (S + dS) \sin \frac{d\theta}{2}.$$

Można tu odrzucić iloczyn $dS \sin \frac{1}{2} d\theta$ jako nieskończenie małą rzędu wyższego i zastąpić wielkość $\sin \frac{1}{2} \theta$ przez równoważną jej nieskończonie małą $\frac{1}{2} d\theta$ (co znów jest równoważne z odrzuceniem małej rzędu wyższego). Ostatecznie

$$dN = S d\theta.$$

Ponieważ siła tarcia jest wprost proporcjonalna do tej siły normalnej, więc oznaczając współczynnik proporcjonalności (współczynnik tarcia) przez μ , otrzymujemy

$$dR = \mu dN = \mu S d\theta.$$

Tarcie przeciwdziała rozpoczynającemu się ruchowi, a więc siła dR łącznie z napięciem S w punkcie M powinny równoważyć napięcie $S + dS$ w punkcie M' , skąd mamy

$$dS = \mu S d\theta.$$

Znow otrzymaliśmy równanie różniczkowe znanego nam już typu. Można od razu napisać jego rozwiązanie

$$S = S_0 e^{\mu\theta}$$

uwzględniając warunek początkowy $S = S_0$ dla $\theta = 0$. Podstawiając wreszcie $\theta = \omega$, znajdujemy

$$S_1 = S_0 e^{\mu\omega}.$$

Ten ważny wzór odkrył Euler.

3) *Wzór Poissona.* Znajdziemy zależność między objętością V i ciśnieniem p jednego mola gazu idealnego w procesie adiabatycznym (tzn. w przypadku, kiedy nie ma w ogóle wymiany ciepła między gazem i otaczającym go ośrodkiem).

Stan gazu charakteryzuje — oprócz wielkości p i V — jeszcze temperatura absolutna T . Wielkości te nie są jednakże niezależne; są one związane znanym wzorem Clapeyrona

$$(17) \quad pV = RT \quad (R \text{ — stała gazowa}).$$

Zbadamy, jaka ilość energii dU w jednostkach ciepła jest potrzebna, aby przeprowadzić gaz ze stanu (p, V, T) do nieskończonie bliskiego stanu $(p+dp, V+dV, T+dT)$.

Możemy sobie wyobrazić, że proces przejścia składa się z dwóch stadiów. Po pierwsze — zwiększenie się objętości V o dV i po drugie — zmiana temperatury T o dT przy stałej objętości.

Aby wyznaczyć pracę elementarną przy rozszerzaniu gazu, założymy dla uproszczenia, że rozpatrywana ilość gazu znajduje się w cylindrze po jednej stronie tłoka [porównaj 354, 2)]. Siła działająca na tłok ze strony gazu wynosi pQ , gdzie Q oznacza pole przekroju tłoka. Jeśli przy rozszerzaniu gazu tłok przesunie się o odległość ds , to praca wykonana przez gaz jest równa $pQ ds$ lub $p dV$ (ponieważ $Q ds = dV$). Jeśli na przykład p dane jest w kg/m^3 , a V w m^3 , to praca wyraża się w zwykłych jednostkach — w kgm . Jeśli chcemy znaleźć ilość ciepła zużytego na tę pracę, to otrzymane wyrażenie należy pomnożyć przez tzw. „cieplny równoważnik pracy” $A = \frac{1}{427} \text{ cal}/\text{kgm}$, co daje $Ap dV$.

Zmiana temperatury o dT wymaga ilości ciepła równej $c_v dT \text{ cal}$, gdzie c_v oznacza pojemność cieplną gazu przy stałej objętości. Dodając, otrzymujemy pracę całkową

$$(18) \quad dU = c_v dT + Ap dV.$$

Łatwo jest wyrugować różniczkę dT . Wystarczy w tym celu zróżniczkować stronami wzór (17)

$$(19) \quad p \, dV + V \, dp = R \, dT$$

i wyznaczyć stąd dT

$$dT = \frac{1}{R} (p \, dV + V \, dp),$$

a następnie podstawić otrzymane wyrażenie we wzorze (18)

$$dU = \frac{c_v}{R} V \, dp + \frac{c_v + AR}{R} p \, dV.$$

Można udowodnić, że wyrażenie $c_v + AR$ jest równe dokładnie pojemności cieplnej c_p gazu przy stałym ciśnieniu ⁽¹⁾, a zatem ostatecznie

$$dU = \frac{c_v}{R} V \, dp + \frac{c_p}{R} p \, dV.$$

Wróćmy teraz do założenia zrobionego na początku, że proces przebiega adiabatycznie: wobec tego $dU = 0$. W ten sposób otrzymujemy równanie różniczkowe, wiążące p i V .

$$c_v V \, dp + c_p p \, dV = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dp}{p} + k \frac{dV}{V} = 0 \quad \left(\text{gdzie } k = \frac{c_p}{c_v} > 1 \right).$$

Całkując to równanie znajdujemy

$$\ln p + k \ln V = 0 \quad \text{lub} \quad p V^k = C.$$

Ten wzór nazywa się wzorem Poissona.

⁽¹⁾ Jeśli przekształcimy wzór (19) następująco:

$$p \, dV = R \, dT - V \, dp$$

i podstawimy otrzymane wyrażenie do (18), to otrzymamy

$$dU = (c_v + AR) \, dT - AV \, dp.$$

Przyjmując teraz, że $p = \text{const}$, tj. że $dp = 0$, dochodzimy do równości

$$dU = (c_v + AR) \, dT,$$

która dowodzi, że $c_v + AR$ jest równe c_p .

ROZDZIAŁ XI

SZEREGI NIESKOŃCZONE O WYRAZACH STAŁYCH

§ 1. Wstęp

362. Pojęcia podstawowe. Niech będzie dany pewien nieskończony ciąg liczb

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Utworzony z tych liczb symbol

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

nazywa się *szeregiem nieskończonym*, a same liczby (1) — *wyrazami szeregu*. Zamiast symbolu (2) można się posługiwać znakiem sumy pisząc

$$(2a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n ;$$

wskaźnik n przebiega wszystkie wartości od 1 do ∞ ⁽¹⁾.

Dodając kolejno wyrazy szeregu tworzymy nieskończenie wiele sum

$$(3) \quad A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Sumy te nazywają się *sumami częściowymi* lub *odcinkami szeregu*. Z szeregiem (2) będziemy zawsze wiązali taki ciąg sum częściowych $\{A_n\}$.

Rola symbolu (2) polega właśnie na tym, że wskazuje na wspomniany ciąg.

Skończoną lub nieskończoną granicę A ciągu sum częściowych A_n szeregu (2), gdy $n \rightarrow \infty$,

$$A = \lim A_n$$

nazywamy *sumą szeregu* i piszemy

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

nadając tym samym symbolowi (2) sens liczbowy.

⁽¹⁾ Zresztą wygodniej jest czasem zaczynać numerację wyrazów szeregu nie od jedności, lecz od zera lub jakiejś innej liczby naturalnej.

Jeżeli szereg ma sumę skończoną, to nazywamy go *zbieżnym*, w przeciwnym razie (tzn. gdy jego suma jest równa $\pm\infty$ lub sumy nie ma wcale) nazywamy go *rozbieżnym* (¹).

Tak więc z definicji zbieżność szeregu (2) jest równoważna z istnieniem skończonej granicy ciągu sum częściowych (3). Na odwrót, jeżeli dany jest jakikolwiek ciąg $\{x_n\}$, to sprawę istnienia skończonej granicy tego ciągu można sprowadzić do zbieżności szeregu

$$(4) \quad x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots,$$

którego sumami częściowymi są właśnie kolejne wyrazy ciągu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Suma szeregu pokrywa się przy tym z granicą tego ciągu.

Innymi słowy rozpatrywanie szeregu nieskończonego i jego sumy jest tylko nową formą badania ciągu i jego granicy. Ale forma ta, jak czytelnik zobaczy dalej, ma nieocenione zalety, zarówno gdy chodzi o samo stwierdzenie istnienia granicy, jak też i o jej obliczenie. Okoliczność ta czyni szeregi nieskończoności bardzo ważnym narzędziem badawczym w analizie matematycznej i jej zastosowaniach.

363. Przykłady. 1) Najprostszym przykładem szeregu nieskończonego jest znany już czytelnikowi *szereg geometryczny*

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Jego sumy częściowe (gdy $q \neq 1$) mają postać

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Jeśli iloraz postępu q jest co do wartości bezwzględnej mniejszy od 1, to s_n ma granicę skońzoną

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

tzn. szereg jest zbieżny i s jest jego sumą.

Dla $|q| > 1$ ten sam szereg służy za przykład szeregu rozbieżnego. Jeżeli $q > 1$ suma szeregu będzie nieskończona, w pozostałych przypadkach sumy wcale nie ma.

Zwrócić w szczególności uwagę na ciekawy szereg, który otrzymujemy w przypadku $a = 1, q = -1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots \text{ (2).}$$

Sumy częściowe tego szeregu są równe na przemian 1 i 0.

2) Liczba rzeczywista α rozwinięta w nieskończony ułamek dziesiętny:

$$c_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots$$

[9] jest rzeczywiście sumą szeregu

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \dots$$

(¹) Mówiliśmy już o tym w pierwszym tomie [25, 9]).

(²) Jeżeli jakiś wyraz a szeregu jest liczbą ujemną: $a = -b$, gdzie $b > 0$, to zamiast pisać $\dots + (-b) + \dots$ piszemy $\dots - b + \dots$ Podkreślamy, że wyrazem szeregu jest tu $-b$, nie zaś b .

3) Na wzór szeregu (4) jest utworzony szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

w widoczny sposób rozbieżny, bo $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$.

4) Kierując się tą samą ideą, tworzymy szeregi (α oznacza dowolną liczbę różną od $-1, -2, -3, \dots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1} \right] = \frac{1}{\alpha+1},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{aligned}$$

i ogólnie, dla dowolnego całkowitego $p > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1) \dots (\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+p)}.$$

5) Analogicznie postępujemy z szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2n-1}} - \frac{1}{1-x^{2n}} \right),$$

gdzie x jest dowolną ustaloną liczbą różną od ± 1 . Ponieważ n -ta suma częściowa jest równa

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2n}},$$

przeto dla $|x| < 1$ szereg jest zbieżny do sumy $\frac{x}{1-x}$, a dla $|x| > 1$ do sumy $\frac{1}{1-x}$.

6) Łatwo jest stwierdzić rozbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Rzeczywiście, ponieważ jego wyrazy maleją, sumy częściowe spełniają nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

i rosną do nieskończoności wraz z n .

7) Wreszcie, mniej trywialny przykład dostarczy nam znane już [37] rozwinięcie liczby e

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Przypomniawszy sobie przybliżone obliczenie liczby e w ustępie 37 czytelnik może na tym przykładzie ocenić korzyść, jaką daje kolejne wprowadzanie coraz to dokładniejszych przybliżonych wartości e otrzymywanych jako sumy częściowe tego szeregu.

364. Podstawowe twierdzenia. Jeśli w szeregu (2) odrzucimy pierwszych m wyrazów, to otrzymamy szereg

$$(5) \quad a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n,$$

zwany *resztą szeregu (2) po odrzuceniu m wyrazów*, lub krócej: *m-tą resztą*.

1° Jeżeli szereg (2) jest zbieżny, to jest też zbieżna każda z jego reszt (5). Na odwrót, ze zbieżności jednej z reszt (5) wynika zbieżność szeregu wyjściowego (2).

Ustalmy m i oznaczmy k -tą sumę częściową szeregu (5) przez A'_k

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Wówczas jest oczywiście

$$(6) \quad A'_k = A_{m+k} - A_m.$$

Jeśli szereg (2) jest zbieżny, a więc $A_n \rightarrow A$, to przy nieograniczonym wzrastaniu k istnieje skończona granica

$$(7) \quad A' = A - A_m$$

ciągu $\{A'_k\}$, a to oznacza zbieżność szeregu (5).

Na odwrót, jeżeli jest zbieżny szereg (5) czyli $A'_k \rightarrow A'$, to przyjmując $k = n-m$ (dla $n > m$) napiszmy równość (6) w postaci

$$A_n = A_m + A'_{n-m}.$$

Stąd widać łatwo, że gdy n rośnie nieograniczenie, sumy częściowe A_n dążą do granicy

$$(8) \quad A = A_m + A',$$

tzn. szereg (2) jest zbieżny.

Innymi słowy, *odrzucenie skończonej liczby początkowych wyrazów szeregu lub doliczenie na początku skończonej liczby nowych wyrazów nie odbija się na zbieżności szeregu*.

Sumę szeregu (5), jeśli szereg jest zbieżny, oznaczamy symbolem α_m , gdzie wskaźnik podaje, którą resztę bierzemy. Wówczas wzory (8) i (7) przybiorą postać

$$(9) \quad A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m.$$

Jeśli m rośnie do nieskończoności, to $A_m \rightarrow A$ i $\alpha_m \rightarrow 0$, tak więc:

2° Jeżeli szereg (2) jest zbieżny, to suma α_m jego reszty po odrzuceniu m wyrazów dąży do zera ze wzrostem m .

Wspomnimy jeszcze o następujących prostych własnościach szeregów zbieżnych:

3° Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu zbieżnego (2) pomnożymy przez ten sam czynnik c , to zbieżność szeregu zostanie zachowana, a suma ulegnie pomnożeniu przez c .

Rzeczywiście, suma częściowa A_n^* szeregu

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

jest oczywiście równa

$$A_n^* = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

i ma granicę cA .

4º Dwa szeregi zbieżne

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{i} \quad B = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

można dodawać (lub odejmować) wyraz za wyrazem, tak że szereg

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

jest także zbieżny i jego suma jest równa $A \pm B$.

Jeśli A_n , B_n i C_n oznaczają sumy częściowe wspomnianych szeregów, to jest oczywiście

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy otrzymamy $\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n$, co dowodzi naszego twierdzenia.

Na zakończenie dodamy jeszcze jedną uwagę,

5º Wyraz ogólny a_n szeregu zbieżnego dąży do zera.

Można to udowodnić zupełnie elementarnie: skoro A_n , a wraz z tym A_{n-1} , mają skończoną granicę A , to

$$a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow 0.$$

Poprzednie twierdzenie zawiera warunek konieczny zbieżności szeregu, z warunku tego będziemy często korzystali. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to szereg na pewno jest rozbieżny. Należy jednak podkreślić, że sam ten warunek nie jest dostateczny dla zbieżności szeregu. Innymi słowy: nawet, gdy warunek ten jest spełniony, szereg może być rozbieżny. Jako przykład mogą służyć szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

rozpatrywane wyżej [363, 3) i 6)], wiele innych przykładów tego rodzaju znajdzie czytelnik dalej.

§ 2. Zbieżność szeregów o wyrazach dodatnich

365. Warunek zbieżności szeregu o wyrazach dodatnich. Zajmiemy się teraz ustaleniem warunków zbieżności lub rozbieżności szeregu. Zagadnienie to rostrzyga się najłatwiej dla szeregów, których wyrazy są nieujemne, będącymi takie szeregi nazywali krótko *dodatnimi*.

Niech szereg

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

będzie dodatni, tzn. $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Wówczas jest oczywiście

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

tzn. ciąg $\{A_n\}$ jest rosnący. Przypominając sobie twierdzenie o granicy ciągu monotonycznego [34] dochodzimy natychmiast do następującego twierdzenia podstawowego w teorii szeregów o wyrazach nieujemnych.

Szereg dodatni (A) ma zawsze sumę; suma ta jest skończona (a zatem szereg jest zbieżny), jeżeli sumy częściowe szeregu są ograniczone z góry, i nieskończona (a zatem szereg jest rozbieżny) w przeciwnym przypadku.

Wszystkie cechy zbieżności i rozbieżności szeregów dodatnich opierają się ostatecznie na tym prostym twierdzeniu. Jednak bezpośrednie zastosowanie tego twierdzenia w rzadkich tylko przypadkach pozwala wydać sąd o zbieżności szeregu. Podamy przykład tego rodzaju.

1) Rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

znany pod nazwą *szeregu harmonicznego*⁽¹⁾.

Zachodzi oczywista nierówność

$$(1) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Jeżeli po odrzuceniu dwóch pierwszych wyrazów, pozostałe wyrazy szeregu harmonicznego rozbijemy na grupy po 2, 4, 8, ..., 2^{k-1} , ... wyrazów w każdej:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}, \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3}, \quad \dots, \quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}, \quad \dots,$$

to każda z tych sum z osobna będzie większa od $\frac{1}{2}$. Łatwo się o tym przekonać podstawiając do (1) kolejno $n = 2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$ Oznaczmy n -tą sumę częściową szeregu harmonicznego przez H_n ; wówczas jest oczywiście

$$H_{2k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Widzimy, że sumy częściowe nie mogą być ograniczone z góry - szereg ma sumę nieskończoną.

Wspomnimy już tutaj, że H_n rośnie ze wzrostem n bardzo wolno. Euler obliczył na przykład, że

$$H_{1000} = 7,48, \quad \dots, \quad H_{1000000} = 14,39, \quad \dots$$

W przyszłości będziemy mieli okazję dokładniej scharakteryzować wzrost sum częściowych H_n [367, 10].

⁽¹⁾ Każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich. Liczba c nazywa się średnią harmoniczną liczb a i b , jeśli $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

2) Rozpatrzmy teraz ogólniejszy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots,$$

gdzie s jest dowolną liczbą rzeczywistą. Obejmuje on poprzedni szereg jako przypadek szczególny (dla $s = 1$). Przez analogię z szeregiem 1) szereg ten nazywa się także *harmoniczny*.

Ponieważ dla $s < 1$ wyrazy tego szeregu są większe od odpowiednich wyrazów szeregu 1), więc w tym przypadku sumy częściowe tym bardziej nie są ograniczone z góry, a więc szereg jest rozbieżny.

Zajmiemy się przypadkiem, gdy $s > 1$. Oznaczmy dla wygody $s = 1 + \sigma$, gdzie $\sigma > 0$.

Analogicznie do (1) otrzymamy tym razem

$$(2) \quad \frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Wydzielając, tak jak wyżej, kolejne grupy wyrazów

$$\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_2, \quad \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{2^2}, \quad \underbrace{\frac{1}{9^s} + \dots + \frac{1}{16^s}}_{2^3}, \quad \dots, \quad \underbrace{\frac{1}{(2^{k+1}+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}}, \quad \dots$$

Łatwo można wykazać za pomocą (2), że sumy te są odpowiednio mniejsze od wyrazów ciągu geometrycznego

$$\frac{1}{2^\sigma}, \quad \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^2}, \quad \frac{1}{8^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, \quad \dots$$

Jasne jest stąd, że którykolwiek z sum częściowych rozpatrywanego szeregu weźmiemy, będzie ona mniejsza od liczby

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

a zatem szereg jest zbieżny.

Jego suma zależna od s jest słynną funkcją $\zeta(s)$ Riemanna, która odgrywa ważną rolę w teorii liczb.

366. Twierdzenia o porównywaniu szeregów. Zbieżność lub rozbieżność szeregu dodatniego ustala się często przez porównanie go z innym szeregiem, o którym wiadomo, że jest zbieżny lub że jest rozbieżny. Podstawą takiego porównywania jest następujące proste twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Niech będą dane dwa szeregi dodatnie*

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

i

$$(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

Jeśli poczynając od pewnego miejsca (powiedzmy dla $n > N$) zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to ze zbieżności szeregu (B) wynika zbieżność szeregu (A) albo, co na to samo wychodzi, z rozbieżności szeregu (A) wynika rozbieżność szeregu (B).

Dowód. Wobec tego, że odrzucenie skończonej liczby wyrazów początkowych szeregu nie wpływa na jego zbieżność [364, 1°] możemy uważać bez zmniejszenia ogólności, że $a_n \leq b_n$ dla wszystkich wartości $n = 1, 2, 3, \dots$

Oznaczając sumy częściowe szeregów (A) i (B) odpowiednio przez A_n i B_n mamy

$$A_n \leq B_n.$$

Niech szereg (B) będzie zbieżny, wówczas na mocy twierdzenia podstawowego [365] sumy B_n są ograniczone

$$B_n \leq L \quad (L = \text{const}, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wobec powyższej nierówności będzie tym bardziej

$$A_n \leq L,$$

a to na mocy tego samego twierdzenia pociąga za sobą zbieżność szeregu (A).

W praktyce jest czasem wygodniejsze następujące twierdzenie, wynikające z poprzedniego:

TWIERDZENIE 2. Jeśli istnieje granica

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \quad (1) \quad (0 \leq K \leq +\infty),$$

to, gdy $K < +\infty$, ze zbieżności szeregu (B) wynika zbieżność szeregu (A), a gdy $K > 0$, z rozbieżności szeregu (A) wynika rozbieżność (B).

Jeżeli więc $0 < K < +\infty$, to oba szeregi są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Dowód. Niech szereg (B) będzie zbieżny i niech $K < +\infty$. Biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, z samej definicji granicy będziemy mieli dla dostatecznie dużych n

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad \text{skąd} \quad a_n < (K + \varepsilon) b_n.$$

Na mocy [364, 3°] równocześnie z szeregiem (B) jest też zbieżny szereg $\sum (K + \varepsilon) b_n$ otrzymany przez pomnożenie jego wyrazów przez liczbę $K + \varepsilon$. Na mocy poprzedniego twierdzenia wynika stąd zbieżność szeregu (A).

Jeśli natomiast szereg (B) jest rozbieżny i $K > 0$, to w tym przypadku stosunek odwrotny b_n/a_n ma granicę skończoną. Szereg (A) musi być rozbieżny, gdyby bowiem był zbieżny, to zgodnie z udowodnionym musiałby też być zbieżny szereg (B).

Przytoczymy wreszcie jeszcze jedno twierdzenie porównawcze będące także wnioskiem z pierwszego.

TWIERDZENIE 3. Jeśli poczynając od pewnego miejsca (powiedzmy dla $n > N$) jest spełniona nierówność

$$(3) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (2),$$

(1) Zakładamy przy tym, że $b_n \neq 0$.

(2) Zakładamy przy tym oczywiście, że a_n i b_n są różne od zera.

to ze zbieżnością szeregu (B) wynika zbieżność szeregu (A) albo, co na to samo wychodzi, z rozbieżnością szeregu (A) wynika rozbieżność szeregu (B).

Dowód. Podobnie jak wyżej w dowodzie twierdzenia 1, można uważać, nie zmniejszając ogólności, że nierówność (3) zachodzi dla wszystkich wartości $n = 1, 2, 3, \dots$. W takim razie jest

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Mnożąc te nierówności stronami otrzymujemy

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}, \quad \text{czyli} \quad a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Niech szereg (B) będzie zbieżny, wówczas szereg $\sum \frac{a_1}{b_1} b_n$ otrzymany przez pomnożenie jego wyrazów przez stały czynnik $\frac{a_1}{b_1}$ też będzie zbieżny, a wówczas na mocy twierdzenia 1 będzie zbieżny szereg (A), c.b.d.o.

Przejdzmy teraz do przykładów ustalania zbieżności i rozbieżności szeregów przez bezpośrednie zastosowanie twierdzeń porównawczych.

367. Przykłady

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

Jeśli $a < 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności [364, 5°] i szereg jest rozbieżny. Dla $a > 1$, wyrazy szeregu są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego $\sum_n \left(\frac{1}{a}\right)^n$ i szereg jest zbieżny (twierdzenie 1).

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \quad \text{Szereg jest zbieżny, bo}$$

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

(twierdzenie 1).

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} \quad (0 < x < 3\pi).$$

Ponieważ

$$2^n \sin \frac{x}{3^n} < x \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

a szereg $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest zbieżny, dany szereg jest też zbieżny (twierdzenie 1).

4) Rozpatrzmy znowu szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i porównajmy go z na pewno rozbieżnym szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad [363,3].$$

Ponieważ jest [77, 5) (a)]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

wynika stąd rozbieżność szeregu harmonicznego.

Inaczej, stosując do funkcji $\ln x$ w przedziale $\langle n, n+1 \rangle$ wzór Lagrange'a, otrzymujemy

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} \quad (0 < \theta < 1).$$

W takim razie szereg harmoniczny, którego wyrazy są odpowiednio większe, jest tym bardziej rozbieżny (twierdzenie 1).

5) Analogicznie można stwierdzić ponownie zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ (dla $\sigma > 0$) porównując go ze zbieżnym szeregiem

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right].$$

Stosując wzór Lagrange'a do funkcji $1/x^{\sigma}$ w przedziale $\langle n-1, n \rangle$ znajdujemy

$$\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{\sigma}{(n-\theta)^{1+\sigma}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Tak więc dla $n > 2$ jest

$$\frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right],$$

skąd na mocy twierdzenia 1 wynika zbieżność badanego szeregu.

6) Aby podobną metodą otrzymać nowy wynik, rozpatrzmy szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (którego wyrazy są jeszcze mniejsze od wyrazów szeregu harmonicznego).

Porównamy go z rozbieżnym w widoczy sposób szeregiem

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\ln \ln(n+1) - \ln \ln n].$$

Stosując wzór Lagrange'a do funkcji $\ln \ln x$ w przedziale $\langle n, n+1 \rangle$ otrzymujemy

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \frac{1}{(n+\theta) \ln(n+\theta)} \quad (0 < \theta < 1),$$

skąd na mocy twierdzenia 1 wnosiemy, że dany szereg, którego wyrazy są odpowiednio większe jest tym bardziej rozbieżny.

7) Porównanie z szeregiem harmonicznym 4) i 5) pozwala zbadać zachowanie się wielu szeregów. Na mocy twierdzenia 1 szeregi:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ jest rozbieżny, bo $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ jest zbieżny, bo $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$;

- (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ ($p > 0$) jest rozbieżny, bo $(\ln n)^p < n$ (dla dostatecznie dużych n);
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ jest zbieżny, bo $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ (dla $n > 3$);
- (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ jest zbieżny, bo $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (dla dostatecznie dużych n);
- (f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ jest zbieżny, bo $\frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (tak samo);
- (g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ jest rozbieżny, bo $\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ (tak samo).

8) Na mocy twierdzenia 2 szereg

- (a) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ ($b > 0$) jest zbieżny dla $s > 1$, rozbieżny dla $s < 1$, bo $\frac{1}{(a+bn)^s} : \frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{b^s}$;
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny, bo $\frac{1}{n \sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \rightarrow 1$;
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ ($0 < x < \pi$) jest rozbieżny, bo $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \rightarrow x$, oraz analogicznie są rozbieżne szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x > 0) \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a} - 1 \quad (a \neq 1);$$

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny: $1 - \cos \frac{x}{n} : \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{x^2}{2}$.

9) A oto bardziej skomplikowane przykłady tego rodzaju:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$. Oznaczmy przez x_n stosunek ogólnego wyrazu tego szeregu do $1/n$, wtedy

$$\ln x_n = \ln n + n \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right).$$

Posługując się rozwinięciem $\ln(1+x)$, o którym była mowa w 125, 5) możemy napisać

$$\ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \alpha_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2,$$

gdzie $\alpha_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Dlatego

$$\ln x_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n} + \alpha_n \cdot \frac{\ln^2 n}{n} \rightarrow 0,$$

a zatem $x_n \rightarrow 1$ i badany szereg jest rozbieżny.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$. Tutaj też posłużymy się wspomnianym rozwinięciem $\ln(1+x)$, otrzymamy

$$\ln \frac{2n+1}{2n-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n-1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2n-1} \right)^3 + \beta_n \left(\frac{2}{2n-1} \right)^3,$$

gdzie $\beta_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, tak że

$$n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2n+3}{3(2n-1)} \left(\frac{1}{2n-1} \right)^2 + \beta_n \cdot \frac{8n}{2n-1} \left(\frac{1}{2n-1} \right)^2.$$

Tak więc stosunek wyrazu ogólnego badanego szeregu do $\frac{1}{(2n-1)^2}$ ma granicę $\frac{1}{3}$ – szereg nasz jest zbieżny.

10) Rozpatrzmy wreszcie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$.

Wiemy [133, 4)], że

$$\ln(1+x) < x \quad (x \neq 0, \quad -1 < x < +\infty).$$

Korzystając z tej nierówności możemy napisać

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

i równocześnie

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1}.$$

Dlatego

$$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Tak więc wyrazy danego szeregu są dodatnie i mniejsze od odpowiednich wyrazów zbieżnego szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$ [365, 2)], a zatem dany szereg jest też zbieżny.

Jeśli oznaczymy jego sumę przez C , to sumy częściowe

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = H_n - \ln(n+1) \rightarrow C;$$

przez H_n oznaczyliśmy jak zwykle sumę częściową szeregu harmonicznego. Można tu zastąpić $\ln(n+1)$ przez $\ln n$, gdyż ich różnica równa $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ dąży do zera. Ostatecznie otrzymujemy ciekawy wzór

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n,$$

gdzie $\gamma_n \rightarrow 0$. Wzór ten pokazuje, że przy wzrastaniu n suma częściowa H_n szeregu harmonicznego rośnie tak jak $\ln n$.

Występująca we wzorze (4) stała C nazywa się stałą Eulera. Jej wartość liczbowa, którą udaje się obliczyć z innych rozumowań, wynosi

$$C = 0,57756621490\dots$$

368. Kryteria zbieżności Cauchy'ego i d'Alemberta. Porównanie danego szeregu

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

z różnymi szeregami standardowymi, o których wiadomo, że są zbieżne lub że są rozbieżne, można przeprowadzić w inny, że tak powiemy, bardziej planowy sposób.

Weźmy dla porównania jako szereg (B) z jednej strony zbieżny szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (0 < q < 1),$$

a z drugiej strony rozbieżny szereg

$$\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

Porównując badany szereg (A) z tymi szeregami według schematu danego przez twierdzenie 1, otrzymujemy następujące kryterium:

KRYTERIUM CAUCHY'EGO. Utwórzmy dla szeregu (A) ciąg o wyrazach

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Jeśli dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność

$$\mathcal{C}_n \leq q,$$

gdzie q jest liczbą mniejszą od jedności, to szereg jest zbieżny, jeśli natomiast począwszy od pewnego miejsca jest

$$\mathcal{C}_n \geq 1,$$

to szereg jest rozbieżny.

Rzeczywiście, nierówności $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ lub $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ są równoważne odpowiednio z nierównościami $a_n \leq q^n$ lub $a_n \geq 1$. Pozostaje zastosować twierdzenie 1 (¹).

Częściej jednak stosuje się to kryterium w postaci granicznej.

Załóżmy, że ciąg $\{\mathcal{C}_n\}$ ma granicę (skończoną lub nieskończoną)

$$\lim \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

Wówczas jeśli $\mathcal{C} < 1$, to szereg jest zbieżny, a jeśli $\mathcal{C} > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Jeżeli $\mathcal{C} < 1$, weźmiemy liczbę dodatnią ε mniejszą od $1 - \mathcal{C}$, tak że $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$. Z definicji granicy będzie dla $n > N$

$$\mathcal{C} - \varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon.$$

Liczba $\mathcal{C} + \varepsilon$ odgrywa tu rolę liczby q z poprzedniego sformułowania, szereg jest więc zbieżny.

Jeżeli $\mathcal{C} > 1$ i skończone, to biorąc $\varepsilon = \mathcal{C} - 1$, tak że $\mathcal{C} - \varepsilon = 1$, będziemy mieli teraz dla dostatecznie dużych n nierówność $\mathcal{C}_n > 1$, szereg jest więc rozbieżny. Analogiczny wynik otrzymamy dla $\mathcal{C} = +\infty$.

(¹) Rozbieżność szeregu można oczywiście wykazać powołując się po prostu na to, że nie jest spełniony konieczny warunek zbieżności [364, §°].

W przypadku gdy $\mathcal{C} = 1$ kryterium to nie pozwala rozpoznać zachowania się szeregu. Ciąg $\{\mathcal{C}_n\}$ nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*.

Jeśli porównanie szeregu (A) ze wspomnianymi szeregami standardowymi przeprowadzimy według twierdzenia 3 otrzymamy kryterium następujące:

KRYTERIUM D'ALEMBERTA. *Rozpatrzmy dla szeregu (A) ciąg o wyrazach*

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Jeśli dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność

$$\mathcal{D}_n \leq q,$$

gdzie q jest liczbą stałą mniejszą od jedności, to szereg jest zbieżny, jeśli zaś poczynając od pewnego miejsca jest

$$\mathcal{D}_n > 1,$$

to szereg jest rozbieżny ⁽¹⁾.

W tym przypadku także wygodniej jest posługiwać się inną formą tego kryterium:
Załóżmy, że ciąg $\{\mathcal{D}_n\}$ ma granicę (skończoną lub nieskończoną)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}.$$

Wówczas jeżeli $\mathcal{D} < 1$, to szereg jest zbieżny, jeżeli zaś $\mathcal{D} > 1$, to szereg jest rozbieżny.

Dowód tej formy kryterium d'Alemberta jest taki sam jak w przypadku kryterium Cauchy'ego.

To kryterium także niczego nie daje, jeżeli się okaże, że $\mathcal{D} = 1$.

Ciąg $\{\mathcal{D}_n\}$ nazywamy *ciągiem d'Alemberta*.

W przykładzie [77, 4)] widzieliśmy, że z istnienia granicy ciągu $\{\mathcal{D}_n\}$ wynika już istnienie granicy ciągu $\{\mathcal{C}_n\}$, przy czym obie granice są równe. Tak więc we wszystkich przypadkach, gdy kryterium d'Alemberta daje odpowiedź na pytanie czy szereg jest zbieżny, odpowiedź tę można otrzymać także za pomocą kryterium Cauchy'ego. Niżej zobaczymy na przykładach, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe i kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta. W praktyce jednak jest zwykle prościej posługiwać się kryterium d'Alemberta.

369. Kryterium Raabego. W przypadkach kiedy podane proste kryteria nie dają odpowiedzi, trzeba sięgnąć do kryteriów bardziej skomplikowanych, opartych na porównaniu badanego szeregu z innymi szeregami standardowymi, „wolniej” zbieżnymi lub „wolniej” rozbieżnymi niż szereg geometryczny ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Tutaj rozbieżność wynika też z niespełnienia koniecznego warunku zbieżności — wszak jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, czyli $a_{n+1} \geq a_n$, to a_n nie może dążyć do zera.

⁽²⁾ Porównaj [375, 7]).

Rozpatrzymy tu jeszcze *kryterium Raabego*, oparte na porównaniu danego szeregu (A) z szeregiem harmonicznym — zbieżnym

$$(H_s) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \quad (s > 1)$$

i rozbieżnym

$$(H) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

za pomocą twierdzenia 3. Trzeba przy tym rozpatrywać ciąg Raabego o wyrazach

$$\mathcal{R}_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

KRYTERIUM RAABEGO. Jeżeli dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność

$$\mathcal{R}_n \geq r,$$

gdzie r jest liczbą większą od jedności, to szereg jest zbieżny, jeżeli natomiast poczynając od pewnego miejsca jest

$$\mathcal{R}_n < 1,$$

to szereg jest rozbieżny.

Niech więc będzie dla dostatecznie dużych n

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > r > 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$$

Weźmy teraz dowolną liczbę s z przedziału między 1 i r : $r > s > 1$. Ponieważ na mocy znanego już wyniku [77, 5)] jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s,$$

więc dla dostatecznie dużych n będzie

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r, \quad \text{czyli} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n},$$

a zatem

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s.$$

Nierówność tę można napisać w postaci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1} \right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Po prawej stronie mamy stosunek dwóch kolejnych wyrazów zbieżnego szeregu (H), i stosując twierdzenie 3 stwierdzamy zbieżność szeregu (A).

Jeśli zaś, poczynając od pewnego miejsca, jest

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1,$$

to otrzymamy stąd od razu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

i stosując twierdzenie 3 do szeregów (A) i (H) wnosimy, że szereg (A) jest rozbieżny.

Porównując kryteria d'Alemberta i Raabego, widzimy że drugie jest znacznie silniejsze od pierwszego. Jeśli istnieje granica $\mathcal{D} = \lim \mathcal{D}_n$ i jest różna od jedności, to ciąg $\mathcal{R}_n = n \left(\frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1 \right)$ ma granicę \mathcal{R} równą $+\infty$, gdy $\mathcal{D} < 1$, i równą $-\infty$, gdy $\mathcal{D} > 1$.

Jeżeli więc kryterium d'Alemberta daje odpowiedź na pytanie o zbieżności danego szeregu, to kryterium Raabego daje taką odpowiedź tym bardziej, co więcej: wszystkie takie przypadki są objęte przez dwie spośród możliwych wartości \mathcal{R} , a mianowicie wartości $+\infty$ i $-\infty$. Wszystkie pozostałe wartości \mathcal{R} , oprócz $\mathcal{R} = 1$, rozstrzygające także kwestię zbieżności, odpowiadają więc przypadkom, gdy kryterium d'Alemberta na pewno kwestii tej nie rozstrzyga, bo $\mathcal{D} = 1$.

Mimo to także tutaj w przypadku $\mathcal{R} = 1$ nie mamy odpowiedzi na pytanie, czy szereg jest zbieżny. W podobnych przypadkach (bardzo rzadkich) trzeba się uciec do jeszcze subtelniejszych i bardziej skomplikowanych kryteriów [patrz np. dalej ustęp 371].

370. Przykłady

1) Zastosujemy kryterium Cauchy'ego do następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad \mathcal{C}_n = \frac{1}{\ln n}, \quad \mathcal{C} = 0$; szereg jest zbieżny.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n (x > 0), \quad \mathcal{C}_n = \frac{x}{n}, \quad \mathcal{C} = 0$; szereg jest zbieżny.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n (x < 0, \{a_n\} - ciąg o wyrazach dodatnich mający granicę a); $\mathcal{C}_n = \frac{x}{a_n}$. Jeżeli $a = 0$,$

to $\mathcal{C} = +\infty$ i szereg jest rozbieżny; jeżeli $a = +\infty$, to $\mathcal{C} = 0$ i szereg jest zbieżny, jeśli wreszcie

$0 < a < +\infty$, to $\mathcal{C} = \frac{x}{a}$ i zachowanie się szeregu zależy od x , dla $x < a$ szereg jest zbieżny, dla $x > a$ jest rozbieżny. W przypadku $x = a$ nie można nic powiedzieć ogólnie o zbieżności szeregu, zależy ona od sposobu zmierzania a_n do a .

2) Zastosujemy kryterium d'Alemberta do następujących szeregów:

$$(a) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (x > 0), \mathcal{D}_n = \frac{x}{n+1}, \mathcal{D} = 0; \text{ szereg jest zbieżny.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} (x > 0), \mathcal{D}_n = x \cdot \frac{n+1}{n}, \mathcal{D} = x; \text{ szereg jest zbieżny dla } x < 1 \text{ i rozbieżny dla } x > 1$$

(dla $x = 1$ stwierdzamy to bezpośrednio).

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} (x > 0, s > 0); \mathcal{D}_n = x \left(\frac{n}{n+1} \right)^s, \mathcal{D} = x.$ Szereg jest zbieżny dla $x < 1$ i rozbieżny dla $x > 1$. Gdy $x = 1$, otrzymujemy szereg harmoniczny, którego zachowanie zależy, jak wiemy, od s .

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n (x > 0), \mathcal{D}_n = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}, \mathcal{D} = \frac{x}{e}; \text{ dla } x < e \text{ szereg jest zbieżny, dla } x > e \text{ jest}$$

rozbieżny dla $x = e$ graniczna postać kryterium d'Alemberta nic nie daje, ale ponieważ $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ dąży do e rosnąc, jest stałe $\mathcal{D}_n > 1$ i pierwotna postać kryterium d'Alemberta pozwala jednak wnosić o rozbieżności szeregu.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!} (x > 0), \mathcal{D}_n = x \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \mathcal{D} = xe;$ dla $x < 1/e$ szereg jest zbieżny, dla $x > 1/e$ jest rozbieżny, dla $x = 1/e$ nie możemy w tym przypadku za pomocą kryterium d'Alemberta nic stwierdzić, gdyż \mathcal{D}_n przybliżają się do $\mathcal{D} = 1$ od dołu. Powróćmy do tego przypadku niżej w przykładzie § 5) (c).

3) Weźmy szereg

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \dots,$$

gdzie a i b są dwiema różnymi liczbami dodatnimi. Tutaj $\mathcal{D}_{2n-1} = a$, $\mathcal{D}_{2n} = b$ i kryterium d'Alemberta (w formie pierwotnej) pozwala tu stwierdzić zbieżność lub rozbieżność szeregu tylko wtedy, gdy obie liczby a i b są mniejsze od jedności albo obie większe.

Tymczasem jest

$$(5) \quad \mathcal{C}_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}} \quad \text{i} \quad \mathcal{C}_{2n} = \sqrt[2n]{a^n b^{n-1}},$$

a więc $\mathcal{C} = \sqrt{ab}$ i na mocy kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny, gdy $ab < 1$, a gdy $ab > 1$ (i oczywiście także gdy $ab = 1$), szereg jest rozbieżny.

4) Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$, gdzie $x > 0$ i $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby naturalnej n .

Wobec kapryśnego prawa zmienności funkcji $\tau(n)$ nie można tu zastosować kryterium d'Alemberta. Tymczasem kryterium Cauchy'ego daje się w pełni zastosować:

$$x < \mathcal{C}_n = \sqrt[n]{\tau(n)} \cdot x < \sqrt[n]{n} \cdot x,$$

a więc $\mathcal{C} = x$ i dla $x < 1$ szereg jest zbieżny, a dla $x > 1$ (i oczywiście także dla $x = 1$) jest rozbieżny.

5) Przytoczymy przykłady zastosowania kryterium Raabego.

$$(a) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Kryterium d'Alemberta nie da się do tego szeregu zastosować, bo

$$\mathcal{D}_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \rightarrow 1$$

(i przy tym $\mathcal{D}_n < 1$). Utwórzmy ciąg Raabego

$$\mathcal{R}_n = n \left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1 \right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}.$$

Ponieważ $\mathcal{R} = \lim \mathcal{R}_n = \frac{3}{2} > 1$, szereg jest zbieżny.

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (x > 0).$$

Ponieważ $\mathcal{D}_n = \frac{n+1}{x+n+1}$, $\mathcal{D} = 1$, to tutaj też nie można stosować kryterium d'Alemberta. Dalej

jest $\mathcal{R}_n = \frac{n}{n+1}x$, a więc $\mathcal{R} = x$. Tak więc dla $x < 1$ szereg jest rozbieżny, a dla $x > 1$ – zbieżny. Dla $x = 1$ otrzymujemy rozbieżny szereg harmoniczny (bez pierwszego wyrazu).

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)\dots(nx+a_n)}, \text{ gdzie } x > 0 \text{ i ciąg } \{a_n\} \text{ o wyrazach dodatnich ma granicę skończoną } a.$$

Mamy $\mathcal{D}_n = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+a_{n+1}}$, $\mathcal{D} = 1$. Dalej $\mathcal{R}_n = \frac{na_{n+1}}{(n+1)x}$, $\mathcal{R} = a/x$. Tak więc dla $x < a$ szereg jest zbieżny, a dla $x > a$ – rozbieżny. O przypadku $x = a$ nie można powiedzieć nic ogólnego. Zachowanie się szeregu zależy wówczas od sposobu przybliżania się a_n do a .

(d) Rozpatrzymy wreszcie szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Dla tego szeregu

$$\mathcal{R}_n = n \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right].$$

Aby obliczyć granicę, zastąpimy to wyrażenie ogólniejszym:

$$\frac{1}{x} \left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}} - 1 \right] \quad (x \rightarrow 0),$$

do którego można zastosować metody rachunku różniczkowego. Według reguły de L'Hospitala przejdziemy do stosunku pochodnych.

$$-\frac{e}{[(1+x)^{1/x}]^2} \cdot \left\{ (1+x)^{1/x} + \ln(1+x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} (1+x)^{1/x-1} \right\} = \frac{e}{(1+x)^{1/x}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}.$$

Podstawiając $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$, otrzymujemy od razu szukaną granicę równą $\frac{1}{2}$. Szereg jest rozbieżny.

371. Kryterium Kummera. Podamy teraz pewne bardzo ogólne kryterium należące do E.E. Kummera; należy je raczej uważać za ogólny schemat otrzymywania różnych konkretnych kryteriów.

KRYTERIUM KUMMERA. Niech

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

będzie takim dowolnym ciągiem liczb dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

jest rozbieżny ⁽¹⁾. Utwórzmy dla szeregu (A) ciąg o wyrazach

$$\gamma_n = c_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1},$$

Jeżeli dla $n > N$ jest spełniona nierówność

$$\gamma_n > \delta,$$

gdzie δ jest stałą liczbą dodatnią, to szereg jest zbieżny, jeżeli zaś (dla $n > N$) jest

$$\gamma_n < 0,$$

to szereg jest rozbieżny.

Dowód. Niech będzie

$$\gamma_n = c_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0;$$

możemy oczywiście przyjąć, że nierówność ta jest spełniona dla wszystkich n .

Mnożąc obie strony tej nierówności przez a_{n+1} otrzymujemy

$$(6) \quad c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \leq \delta \cdot a_{n+1},$$

a więc

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0, \quad \text{czyli} \quad c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}.$$

Wynika stąd, że zmienna $c_n a_n$ maleje monotonicznie, a zatem dąży do skończonej granicy (gdyż jest ograniczona z dołu przez zero). Tak więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

jest zbieżny, bo suma n jego pierwszych wyrazów równa

$$c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$$

ma granicę skończoną. Ale wówczas z nierówności (6) wynika na mocy twierdzenia 1, że zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$, a wraz z nim dany szereg (A).

Jeśli zaś dla $n > N$ jest

$$\gamma_n = c_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0,$$

⁽¹⁾ Zwracamy uwagę czytelnikowi, że z tego ostatniego założenia będziemy korzystali tylko przy wprowadzeniu kryterium rozbieżności, dla kryterium zbieżności nie jest ono potrzebne.

to mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}.$$

Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{c_n}$ był z założenia rozbieżny, więc na podstawie twierdzenia 3 szereg (A) jest też rozbieżny, c.b.d.o.

W postaci granicznej kryterium Kummera brzmi jak następuje:

Załóżmy, że ciąg χ_n ma granicę (skończoną lub nieskończoną)

$$\lim \chi_n = \chi.$$

Wówczas gdy $\chi > 0$, szereg jest zbieżny, a gdy $\chi < 0$, szereg jest rozbieżny.

Pokażemy teraz jak można za pomocą kryterium Kummera otrzymać jako jego przypadki szczególnie niektóre ważne kryteria zbieżności.

(a) Weźmy na przykład $c_n = 1$: warunek, by szereg $\sum \frac{1}{c_n}$ był rozbieżny, jest oczywiście spełniony. Mamy

$$\chi_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{D_n} - 1.$$

Jeśli D_n dąży do granicy D , to χ_n dąży do granicy $\chi = \frac{1}{D} - 1$ ($\chi = +\infty$, jeśli $D = 0$; $\chi = -1$, jeśli $D = +\infty$). Jeżeli $D > 1$, to jest oczywiste $\chi < 0$ i na mocy kryterium Kummera szereg jest rozbieżny. Jeśli $D < 1$, to $\chi > 0$ i szereg jest zbieżny. Doszliśmy więc znowu do kryterium d'Alemberta.

(b) Przyjmijmy dalej $c_n = n$ i zauważmy, że szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Wyrażenie χ_n będzie miało postać

$$\chi_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = \mathcal{R}_n - 1.$$

Jeżeli \mathcal{R}_n dąży do granicy \mathcal{R} , to χ_n dąży do $\mathcal{R} - 1$ ($\chi = \pm \infty$, gdy $\mathcal{R} = \pm \infty$). Dla $\mathcal{R} > 1$, będzie $\chi > 0$ i szereg zgodnie z kryterium Kummera jest zbieżny, jeśli zaś $\mathcal{R} < 1$, to $\chi < 0$, a więc szereg jest rozbieżny. Otrzymaliśmy na nowo kryterium Raabego.

(c) Weźmy wreszcie $c_n = n \ln n$ ($n > 2$).

Taki wybór jest dopuszczalny, bo szereg $\sum \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny [367, 6]. Mamy w tym przypadku

$$\chi_n = n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1),$$

co można też przedstawić w postaci

$$\chi_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \mathcal{B}_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1},$$

gdzie przez \mathcal{B}_n oznaczyliśmy wyraz ogólny nowego ciągu

$$\mathcal{B}_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \ln n \cdot (\mathcal{R}_n - 1).$$

Otrzymujemy stąd nowe kryterium

KRYTERIUM BERTRANDA. Założmy, że ciąg $\{\mathfrak{B}_n\}$ ma skończoną lub nieskończoną granicę

$$\mathfrak{B} = \lim \mathfrak{B}_n.$$

Wówczas jeśli $\mathfrak{B} > 1$, to szereg jest zbieżny, jeżeli zaś $\mathfrak{B} < 1$, to jest rozbieżny.

Rzeczywiście, ponieważ $\lim \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1$, ciąg Kummera $\{\mathfrak{K}_n\}$ jest zbieżny do granicy $\mathfrak{X} = \mathfrak{B} - 1$ ($\mathfrak{X} = \pm \infty$, jeżeli $\mathfrak{B} = \pm \infty$).

Pozostaje powołać się na kryterium Kummera.

Porównując ze sobą kryterium Raabego i Bertranda, można by powtórzyć te same uwagi, które zrobiliśmy wyżej w związku z kryteriami d'Alemberta i Raabego [369]. Łącuch takich coraz czulszych (lecz jednocześnie coraz bardziej skomplikowanych) kryteriów można przedłużyć nieograniczenie.

372. Kryterium Gaussa. Z kryteriów d'Alemberta, Raabego i Bertranda łatwo można otrzymać następujące kryterium C. F. Gaussa:

KRYTERIUM GAUSSA. Założmy, że dla danego szeregu (A) stosunek a_n/a_{n+1} można przedstawić w postaci

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

gdzie λ i μ są stałe, a θ_n jest wielkością ograniczoną: $|\theta_n| < L$. Wówczas szereg jest zbieżny, jeżeli $\lambda > 1$ lub jeżeli $\lambda = 1$ i $\mu > 1$, i jest rozbieżny, jeżeli $\lambda < 1$ lub jeżeli $\lambda = 1$ i $\mu < 1$.

Przypadki $\lambda > 1$ i $\lambda < 1$ sprowadzają się do kryterium d'Alemberta, bo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$. Niech teraz $\lambda = 1$. Wówczas

$$\mathcal{R}_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}, \quad \mathcal{R} = \mu.$$

W przypadku $\mu > 1$ lub $\mu < 1$ sprawę rozstrzyga kryterium Raabego. Jeśli wreszcie $\mu = 1$, to jest

$$\mathcal{R}_n = \ln n (\mathcal{R} - 1) = \frac{\ln n}{n} \theta_n.$$

Ponieważ $\frac{\ln n}{n}$ dąży jak wiadomo, do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, a θ_n jest ograniczone, więc $\mathfrak{B} = \lim \mathfrak{B}_n = 0$ i na mocy kryterium Bertranda szereg jest rozbieżny.

PRZYKŁADY. 1) Rozpatrzmy tzw. szereg hipergeometryczny (Gauss).

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot \dots \cdot (\beta+n-1)}{n! \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \dots \cdot (\gamma+n-1)} x^n = \\ &= 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot 2} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2)} x^3 + \dots, \end{aligned}$$

zakładając na razie, że $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$. Tutaj

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} x \rightarrow x,$$

a więc na podstawie kryterium d'Alemberta od razu stwierdzamy zbieżność szeregu dla $x < 1$ i rozbież-

ność dla $x > 1$. Jeśli zaś $x = 1$, to weźmiemy stosunek

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(x+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}$$

i korzystając ze związków

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1 + \frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{1}{n^2}; \quad \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1 + \frac{\beta}{n}} \cdot \frac{1}{n^2},$$

przedstawimy go w postaci

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

gdzie θ_n jest ograniczone. Stosując kryterium Gaussa widzimy, że szereg $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ jest zbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta > 0$, i rozbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$. Dalej powrócimy jeszcze do szeregu hipergeometrycznego przy ogólniejszych założeniach co do α, β, γ i x .

2) Jako drugi przykład zastosowania kryterium Gaussa może służyć szereg

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^p + \dots \quad (p > 0),$$

który jest zbieżny dla $p > 2$ i rozbieżny dla $p < 2$. Według wzoru Taylora mamy tu

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

skąd

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}p}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (\theta_n - \text{ograniczone})$$

itd.

373. Kryterium całkowe Maclaurina-Cauchy'ego. Kryterium to różni się w swej formie od wszystkich poprzednich. Jest ono oparte na idei porównywania szeregu z całką i jest uogólnieniem tego chwytu, którym posługiwaliśmy się już dla stwierdzenia zbieżności lub rozbieżności szeregu w przykładach 4), 5), 6) ustępu 367.

Niech dany szereg ma postać

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

gdzie $f(n)$ jest wartością w punkcie $x = n$ pewnej funkcji $f(x)$ określonej dla $x \geq 1$ ⁽¹⁾; założymy, że funkcja ta jest ciągła dodatnia i monotonicznie malejąca.

⁽¹⁾ Początkową wartością n może być zamiast 1 dowolna inną liczbą naturalną n_0 , wówczas funkcję $f(x)$ także trzeba rozpatrywać dla $x > n_0$.

Rozpatrzmy jakkolwiek funkcję pierwotną $F(x)$ funkcji $f(x)$. Ponieważ jej pochodna $F'(x) = f(x) > 0$, funkcja $F(x)$ rośnie wraz z x i dla $x \rightarrow +\infty$ ma na pewno granicę skończoną lub nieskończoną.

W pierwszym przypadku szereg

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)]$$

jest zbieżny, a w drugim rozbieżny. Z tym szeregiem porównamy szereg badany.

Według wzoru Lagrange'a ogólny wyraz szeregu (8) można przedstawić w postaci

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta) \quad (0 < \theta < 1),$$

a więc wobec monotoniczności funkcji $f(x)$ będzie

$$(9) \quad a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n.$$

W przypadku zbieżności szeregu (8) na mocy twierdzenia 1 jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, którego wyrazy są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu (8), a zatem jest zbieżny także dany szereg (7). W przypadku rozbieżności szeregu (8) jest rozbieżny także szereg (7), bo jego wyrazy są większe od odpowiednich wyrazów szeregu (8).

Dochodzimy w ten sposób do następującego ciekawego kryterium, które odkrył najpierw Maclaurin w postaci geometrycznej; następnie kryterium to zostało zapomniane i potem na nowo odkryte przez Cauchy'ego.

KRYTERIUM CAŁKOWE. *Przy wyżej zrobionych założeniach, szereg (7) jest zbieżny lub rozbieżny w zależności od tego czy funkcja*

$$F(x) = \int f(x) dx$$

ma dla $n \rightarrow \infty$ granicę skońzoną, czy nie.

Podamy przykłady zastosowania tego kryterium (oprócz przykładów rozpatrywanych w ustępie 367).

$$1) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\sigma} n} \quad (\sigma > 0),$$

Tutaj $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{1+\sigma} x}$; $F(x) = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x} \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow +\infty$; szereg jest zbieżny.

$$2) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}.$$

Mamy $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$; $F(x) = \ln \ln \ln x \rightarrow +\infty$; szereg jest rozbieżny.

$$3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{1+\sigma}} \quad (\sigma > 0).$$

Tym razem

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^{1+\sigma}}; \quad F(x) = -\frac{1}{\sigma (\ln \ln x)^\sigma} \rightarrow 0;$$

szereg jest zbieżny.

Funkcję pierwotną $F(x)$ można wziąć także w postaci całki oznaczonej

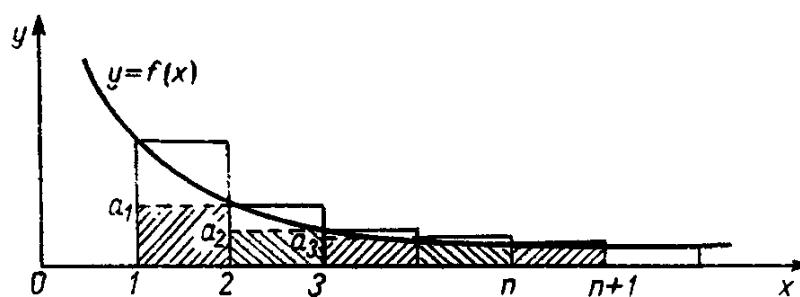
$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Granica tej całki, gdy $x \rightarrow +\infty$, nazywa się „całką od 1 do $+\infty$ ”⁽¹⁾; oznacza się ją zwykle tak:

$$F(+\infty) = \int_1^\infty f(t) dt.$$

Tak więc podany szereg (7) jest zbieżny lub rozbieżny w zależności od tego, czy całka ta ma wartość skończoną czy nieskończoną⁽²⁾.

W tej postaci kryterium całkowemu można nadać łatwo interpretację geometryczną bliską ideom Maclaurina. Jeśli przedstawimy funkcję $f(x)$ za pomocą krzywej (rys. 54),



Rys. 54

to całka $F(x)$ będzie wyrażała pole figury ograniczonej przez tę krzywą, oś x i dwa odcinki pionowe. Całkę $F(+\infty)$ można w pewnym sensie uważać za pole całej rozciągającej się w prawo w nieskończoność figury zawartej pod krzywą. Z drugiej strony wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ szeregu (7) podają wielkość rzędnych w punktach $x = 1, 2, \dots, n, \dots$ lub co na to samo wychodzi pola prostokątów o podstawie 1 i wysokościach równych wspomnianym rzędnom.

Tak więc suma szeregu (7) nie jest niczym innym jak sumą pól prostokątów występujących poza wspomnianą figurą i tylko o pierwszy wyraz różni się od sumy pól prostokątów leżących wewnątrz figury. Staje się przez to zupełnie oczywisty otrzymany wyżej wynik; jeżeli pole figury krzywoliniowej jest skończone, to tym bardziej jest skończone pole zawartej w niej figury schodkowej i dany szereg jest zbieżny. Jeżeli zaś pole figury krzywoliniowej jest nieskończoność, to jest także nieskończoność pole zawierające ją figury schodkowej, a więc w tym przypadku szereg jest rozbieżny.

(1) Jest to tak zwana całka niewłaściwa; takimi całkami zajmiemy się w rozdziale XIII.

(2) Przy takim sformułowaniu kryterium dowód można łatwo przeprowadzić bez założenia ciągłości funkcji $f(x)$ korzystając z całki oznaczonej, która dla funkcji monotonicznej istnieje [298, III].

Zrobimy teraz parę uwag w związku z dalszym wykorzystaniem nierówności (9).

a) W przypadku istnienia skończonej granicy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(+\infty)$$

można wskazać wygodne oszacowanie reszty danego szeregu. Sumując mianowicie nierówności

$$a_k < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$$

dla $k = n+1, \dots, n+m$ otrzymujemy

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m) - F(n) < \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k.$$

Przejdzmy do granicy zwiększając nieskończoność m , otrzymamy

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq F(+\infty) - F(n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

lub

$$(10) \quad F(+\infty) - F(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq F(+\infty) - F(n).$$

Daje to szukane oszacowanie zarówno od góry, jak i od dołu (¹).

Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ ($\sigma > 0$) będzie

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\sigma}}, \quad F(x) = \frac{-1}{\sigma x^{\sigma}}, \quad F(+\infty) = 0,$$

i

$$(11) \quad \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} \leq \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

b) Jeżeli natomiast funkcja $F(x)$ rośnie do nieskończoności wraz z x , to funkcja ta pozwala ocenić szybkość wzrostu sum częściowych danego szeregu. Rozpatrzmy nierówności

$$0 < f(k) - [F(k+1) - F(k)] < f(k) - f(k+1).$$

(¹) Ponieważ $F(n+m) - F(n) = \int_n^{n+m} f(t) dt$, więc przechodząc do granicy przy $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy całkę niewłaściwą

$$F(+\infty) - F(n) = \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

Wobec tego nierówności (10) można napisać w postaci

$$(10a) \quad \int_{n+1}^{\infty} f(t) dt < \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) < \int_n^{\infty} f(t) dt.$$

Sumując je od $k = 1$ do $k = n$ otrzymamy ogólny wyraz pewnego ciągu rosnącego lecz ograniczonego

$$\sum_{k=1}^n f(k) - [F(n+1) - F(1)] < f(1) - f(n+1) < f(1),$$

który dąży do granicy skończonej. To samo jest prawdą także i dla ciągu

$$\sum_{k=1}^n f(k) - F(n+1).$$

Jeżeli przez C oznaczymy granicę tego ciągu, a przez α_n różnicę między n -tym wyrazem ciągu a tą granicą, to otrzymamy wzór

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) + C + \alpha_n,$$

gdzie $\alpha_n \rightarrow 0$. Na przykład dla $f(x) = 1/x$, $F(x) = \ln x$ otrzymujemy stąd znowu wzór (4) z ustępu 367.

374. Kryterium Jermakowa. Mniej więcej taki sam zasięg zastosowań co kryterium całkowe ma bardzo swoiste kryterium podane przez W.P. Jermakowa. Do jego sformułowania nie potrzeba pojęć rachunku całkowego.

KRYTERIUM JERMAKOWA. *Załóżmy, jak poprzednio, że funkcja $f(x)$ jest ciągła⁽¹⁾, dodatnia i monotonicznie maleje dla $x > 1$ ⁽²⁾. Wówczas jeżeli dla dostatecznie dużych x — powiedzmy dla $x > x_0$ — jest spełniona nierówność*

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} < q < 1,$$

to szereg (7) jest zbieżny, jeśli zaś dla $x > x_0$ jest

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} > 1,$$

to szereg (7) jest rozbieżny.

Dowód. Niech będzie spełniona pierwsza nierówność. Dla dowolnego $x > x_0$ będziemy mieli (podstawienie $t = e^u$)

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(e^u) e^u du < q \int_{x_0}^x f(t) dt;$$

stąd

$$(1-q) \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt < q \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \right] < q \left[\int_{x_0}^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] < q \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt,$$

ponieważ

$$(12) \quad e^x > x,$$

i odjemnik w ostatnim nawiasie jest dodatni.

(1) W gruncie rzeczy założenie ciągłości można by odrzucić. Patrz odsyłacz (2) na str. 244.

(2) Patrz odsyłacz na str. 242.

W takim razie

$$\int_{e^{x_0}}^x f(t) dt < \frac{q}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt ;$$

dodając do obu stron całkę $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt$, otrzymujemy

$$\int_{x_0}^x f(t) dt < \frac{1}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = L ,$$

i tym bardziej, wobec (12),

$$\int_{x_0}^x f(t) dt < L \quad (x > x_0) .$$

Ponieważ całka też rośnie, gdy rośnie x , przeto ma ona skończoną granicę dla $x \rightarrow \infty$ równą

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t) dt ,$$

a więc na mocy kryterium całkowego szereg (7) jest zbieżny.

Niech teraz będzie spełniona druga nierówność.

Wówczas

$$\int_{e^{x_0}}^x f(t) dt \geq \int_{x_0}^x f(t) dt ,$$

jeśli do obu stron nierówności dodamy całkę $\int_x^{e^{x_0}} f(t) dt$, otrzymamy

$$\int_x^{e^{x_0}} f(t) dt \geq \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = \gamma > 0$$

(bo na mocy (12) jest $x_0 < e^{x_0}$). Określmy teraz ciąg

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots$$

przyjmując $x_n = e^{x_{n-1}}$. Na mocy udowodnionego wyżej jest

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \geq \gamma ,$$

a więc

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \geq n\gamma .$$

Jasne jest stąd, że

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t) dt = +\infty$$

i na mocy kryterium całkowego szereg (7) jest rozbieżny.

W przykładach z poprzedniego ustępu można łatwo ustalić zbieżność lub rozbieżność na podstawie udowodnionego przed chwilą kryterium.

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n} \quad (\sigma > 0).$$

W tym przypadku $f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}$ i wyrażenie

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} = \frac{\ln^{1+\sigma} x}{x^\sigma} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty,$$

a więc dla dostatecznie dużych x będzie ono mniejsze od dowolnego ułamka właściwego q — szereg jest zbieżny.

$$2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

Tutaj $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}$, a wyrażenie

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} = \ln \ln x \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty,$$

dla dostatecznych dużych x przewyższa 1 — szereg jest rozbieżny.

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{1+\sigma}} \quad (\sigma > 0).$$

Tym razem jest $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^{1+\sigma}}$,

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^{1+\sigma}}{\ln^\sigma x} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty;$$

szereg jest zbieżny.

Zauważmy na zakończenie, że funkcję e^x występującą w kryterium Jermakowa można zastąpić dowolną inną funkcją $\varphi(x)$ o ciągłej pochodnej, monotonicznie rosnącą, dodatnią i spełniającą nierówność (12*)

$$\varphi(x) > x,$$

która to nierówność zastępuje (12). Dowód można skopiować z dowodu podanego wyżej. Tak więc w postaci ogólnej kryterium Jermakowa jest źródłem różnych konkretnych kryteriów odpowiadających różnemu wyborowi funkcji $\varphi(x)$.

375. Uzupełnienia. 1) Skorzystamy z oszacowań (11), aby scharakteryzować zachowanie się funkcji Riemanna [365, 2)]

$$\zeta(1+\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

(określonej tylko dla $\sigma > 0$), gdy σ zbliża się do zera.

Przede wszystkim, podstawiając $n = 0$ do pierwszej z nierówności (11), a $n = 1$ do drugiej, otrzymujemy

$$1 < \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) < 1 + \sigma,$$

skąd

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) = 1.$$

Możemy otrzymać dokładniejszy wynik, jeżeli wychodząc z oczywistej równości

$$\zeta(1+\sigma) = 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}},$$

zastosujemy nierówność (11) przy dowolnym n :

$$1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} - 1 \right] < \zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma} < 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{n^{\sigma}} - 1 \right).$$

Przechodząc tu do granicy, gdy $\sigma \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] < \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (1).$$

Wreszcie przejdziemy z n do nieskończoności. Ponieważ pierwszy i ostatni człon nierówności dążą przy tym na mocy wzoru (4) z ustępu 367 do stałej Eulera C , zatem granica góra i granica dolna pokrywają się i istnieje zwykła granica równa

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] = C.$$

Wyniki te należą do Dirichleta.

2) *Niech wyrazy szeregu (A) monotonicznie maleją. Wówczas szereg (A) jest zbieżny lub rozbieżny równocześnie z szeregiem $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (Cauchy).*

Rzeczywiście, z jednej strony jest

$$A_{2^k} < a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) < a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k},$$

z drugiej zaś strony,

$$\begin{aligned} A_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) > \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}). \end{aligned}$$

Stąd wynika żądanego wniosek.

Na przykład szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zachowuje się tak samo jak szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

w widoczny sposób rozbieżny.

(1) Na razie nie wiemy, czy istnieje granica wyrażenia $\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}$, gdy $\sigma \rightarrow 0$ i dlatego posługujemy się granicą górną i dolną [42]. Granice wyrażeń $\frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{n^{\sigma}} - 1 \right]$ i $\frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} - 1 \right]$ znajdujemy według wzoru 77, 5), (b).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ ($\sigma > 0$) jest zbieżny wraz z szeregiem

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k(1+\sigma)}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\sigma}}.$$

Szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny, gdyż jest rozbieżny szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln 2} \quad \text{itd.}$$

W twierdzeniu tym można zastąpić szereg $\sum 2^k a_{2^k}$ służący do porównania przez ogólniejszy szereg $\sum_{k=0}^{\infty} m^k a_{m^k}$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną.

3) Niech (A) będzie dowolnym szeregiem zbieżnym. Co można wnosić o rzędzie małości a_n w stosunku do $1/n$?

Przede wszystkim jest oczywiste, że jeśli wielkości te są ze sobą w ogóle porównywalne [60], tzn. jeśli istnieje granica

$$\lim \frac{a_n}{1/n} = \lim n a_n = c,$$

to musi być koniecznie $c = 0$, czyli

$$(13) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Rzeczywiście, w przeciwnym razie — wobec rozbieżności szeregu harmonicznego — dany szereg byłby także rozbieżny [366, twierdzenie 2].

Na ogół jednak granica taka nie musi istnieć, jak widać na przykładzie szeregu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

Zbieżność tego szeregu jest widoczna z porównania z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tymczasem, jeżeli n nie jest pełnym kwadratem, to dla niego jest $n a_n = 1/n$; w przeciwnym razie $n a_n = 1$.

Zresztą jeżeli wyrazy szeregu maleją monotonicznie, to warunek (13) jest jednak konieczny dla zbieżności szeregu. Rzeczywiście dla dowolnych m i $n > m$ jest

$$(n-m) a_n < a_{m+1} + \dots + a_n < \alpha_m,$$

gdzie α_m jest resztą szeregu. Stąd

$$n a_n < \frac{n}{n-m} \cdot \alpha_m.$$

Weźmy najpierw m tak duże, by α_m było mniejsze od dowolnie przyjętej liczby $\varepsilon > 0$. Jeżeli założymy teraz, że n jest takie duże, że

$$\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m},$$

to jest jednocześnie $n a_n < \varepsilon$, c.b.d.o.

Zauważmy na zakończenie, że nawet dla szeregów o wyrazach monotonicznie malejących warunek

(13) nie jest bynajmniej warunkiem dostatecznym zbieżności. Widać to z przykładu szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

4) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jest rozbieżny, a D_n oznacza jego n -tą sumę częściową, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ jest także rozbieżny, podczas gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ ($\sigma > 0$) jest zbieżny (N. Abel i U. Dini).

Jest

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \dots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1} + \dots + d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1 - \frac{D_n}{D_{n+m}}.$$

Jakkolwiek duże weźmiemy n , można zawsze dobrać takie m , żeby było

$$\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2}, \quad \text{a zatem} \quad \frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \dots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{1}{2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ nie spełnia podstawowego warunku zbieżności [364, 5°] i jest rozbieżny.

Dla dowodu zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ posłużymy się chwytem podobnym do chwytu zastosowanego przez Cauchy'ego [373]. Do funkcji $\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x^\sigma}$ w przedziale od $x = D_{n-1}$ do $x = D_n$ zastosujemy wzór Lagrange'a

$$\frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} \right) = \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}, \quad \text{gdzie} \quad D_{n-1} < D_n^* < D_n.$$

Tak więc wyrazy rozpatrywanego szeregu są odpowiednio mniejsze od wyrazów zbieżnego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} \right)$$

co dowodzi wypowiedzianej tezy.

5) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, a γ_n oznacza n -tą resztę, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}$ jest rozbieżny, podczas gdy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1)$$

jest zbieżny (Dini).

Dowód analogiczny jak poprzednio.

6) Następujące kryterium zostało niedawno podane przez N.A. Sapogowa:

Jeżeli ciąg (u_n) o wyrazach dodatnich jest monotonicznie rosnący, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) \quad \left(\text{tak samo jak szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right) \right)$$

jest zbieżny, jeżeli ciąg ten jest ograniczony, i rozbieżny w przeciwnym przypadku.

Przyjmijmy dla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$d_n = u_{n+1} - u_n, \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k = u_{n+1} - u_1,$$

wówczas dany szereg można napisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n + u_1}$$

i zachowuje się on tak samo jak szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n},$$

to znaczy tak samo jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ (w przypadku rozbieżności można się powołać na wynik Abela-Diniego).

Ostatni szereg jest zbieżny względnie rozbieżny zależnie od tego, czy ciąg u_n jest ograniczony czy nie.

7) Niech będą dane dwa szeregi zbieżne

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n.$$

Mówimy, że drugi szereg jest *wolniej zbieżny* niż pierwszy, jeżeli reszta γ'_n drugiego szeregu ma niższy rząd małości niż reszta γ_n pierwszego szeregu, tzn.

$$\lim \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0.$$

Dla każdego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ można utworzyć szereg zbieżny wolniej niż dany.

Wystarczy na przykład rozpatrzyć szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}) \quad (1);$$

w tym przypadku $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$.

Rozpatrzmy teraz dwa szeregi rozbieżne

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n.$$

O drugim szeregu mówimy, że jest *wolniej rozbieżny* od pierwszego, jeżeli jego suma częściowa D'_n jest wielkością nieskończonie dużą rzędu niższego niż suma częściowa D_n pierwszego, tzn. jeżeli

$$\lim \frac{D'_n}{D_n} = 0.$$

Dla każdego szeregu rozbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ można utworzyć szereg rozbieżny wolniej niż dany.

Można w tym celu wziąć na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n \equiv \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}).$$

Tutaj $D'_n = \sqrt{D_n}$.

Analogiczne wnioski można też otrzymać za pomocą szeregów Abela i Diniego rozpatrywanych w 4) i 5).

(1) Za γ_0 przyjmujemy całą sumę $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Skonstruowane przykłady prowadzą do następującej tezy o znaczeniu zasadniczym. *Żaden szereg zbieżny (rozbieżny) nie może być uniwersalnym środkiem do stwierdzenia przez porównanie z nim⁽¹⁾ zbieżności (rozbieżności) innych szeregów.*

Wynika to stąd, że

$$\frac{c_n}{c'_n} = \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \rightarrow 0$$

oraz

$$\frac{d_n}{d'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \rightarrow +\infty.$$

8) Niech będą dane dwa ciągi liczb dodatnich

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad i \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

Jakiekolwiek weźmiemy n , dla pierwszych n liczb tych ciągów będzie zachodziła nierówność Cauchy'ego-Höldera

$$\sum_{l=1}^n a_l b_l < \left\{ \sum_{l=1}^n a_l^k \right\}^{1/k} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^n b_l^{k'} \right\}^{1/k'}$$

i nierówność Minkowskiego

$$\left\{ \sum_{l=1}^n (a_l + b_l)^k \right\}^{1/k} < \left\{ \sum_{l=1}^n a_l^k \right\}^{1/k} + \left\{ \sum_{l=1}^n b_l^k \right\}^{1/k}$$

[133, (5) i (7)]. Tutaj k jest dowolną liczbą większą od 1, a k' inną liczbą większą od jedności i związaną z k zależnością

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

Przechodząc w tych nierównościach do granicy przy $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy podobne nierówności dla szeregów nieskończonych

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l b_l < \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l^k \right\}^{1/k} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} b_l^{k'} \right\}^{1/k'}$$

oraz

$$\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_l + b_l)^k \right\}^{1/k} < \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l^k \right\}^{1/k} + \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} b_l^k \right\}^{1/k},$$

przy czym ze zbieżności szeregów występujących po prawych stronach wynika zbieżność szeregów po lewych stronach.

§ 3. Zbieżność szeregów dowolnych

376. Ogólny warunek zbieżności szeregu. Przejdzmy do zagadnienia zbieżności szeregów, których wyrazy mogą mieć dowolne znaki. Ponieważ z definicji zbieżność szeregu

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

(¹) Na podstawie któregokolwiek z twierdzeń z ustępu 366.

sprawdza się do zbieżności ciągu

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_{n+m}, \dots$$

jego sum częściowych, naturalne jest zastosowanie do tego ciągu zasady zbieżności [39]. Nie zmniejszając ogólności można przyjąć, że z dwóch wspomnianych w niej wskaźników n i n' wskaźnik n' jest większy, $n' > n$, i przyjąć $n' = n+m$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną. Jeśli uwzględnimy to, że

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m},$$

to zasadę zbieżności w zastosowaniu do szeregu możemy wy�述ić jak następuje:

Na to, by szereg (A) był zbieżny potrzeba i wystarcza, by każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiadał taki numer N , że dla $n > N$ nierówność

$$(2) \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $m = 1, 2, 3, \dots$ (1).

Innymi słowy, suma dowolnej liczby wyrazów szeregu następujących po dostatecznie dalekim wyrazie powinna być dowolnie mała.

Jeżeli przy założeniu, że szereg jest zbieżny weźmiemy w tej nierówności $m = 1$, to otrzymamy

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{dla } n > N),$$

a więc $a_{n+1} \rightarrow 0$ lub, co na to samo wychodzi, $a_n \rightarrow 0$, i otrzymujemy na nowo znany już warunek konieczny zbieżności szeregu [365, 5°]. Warunek ten żąda znacznie mniej niż warunek konieczny i dostateczny wymagający, by nie tylko każdy z osobna dostatecznie daleki wyraz szeregu, ale także i suma dowolnej liczby takich wyrazów była dowolnie mała! W związku z tym będzie bardzo pouczające powrócić do szeregu harmonicznego [365, 1] i nierówności (1) wyprowadzonej dla jego wyrazów. Ogólny wyraz tego szeregu dąży wprawdzie do zera, ale nierówność (2) z tego ustępu nie jest spełniona dla żadnego n , jeżeli wziąć $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i $m = n$, i wobec tego szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Należy jednak powiedzieć, że sprawdzenie czy spełniony jest podany tutaj warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregu, jest zazwyczaj w konkretnych przypadkach bardzo uciążliwe. Dlatego jest ciekawe zbadanie klasy przypadków, w których zagadnienie zbieżności rozwiązuje się prostszymi środkami.

377. Zbieżność bezwzględna. Widzieliśmy w poprzednim paragrafie, że w przypadku szeregów o wyrazach dodatnich zbieżność stwierdza się najczęściej dość prosto, dzięki istnieniu wygodnych kryteriów zbieżności. Dlatego zaczniemy od tych przypadków, kiedy kwestia zbieżności danego szeregu sprawdza się do kwestii zbieżności szeregu dodatniego.

Jeżeli nie wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie, ale począwszy od pewnego miejsca już takie są, to odrzucając dostateczną ilość wyrazów początkowych [364, 1°] sprawdzimy

(1) Obaj autorzy zasady zbieżności — Bolzano i Cauchy wysłowili ją właśnie dla szeregów.

rzeczą do badania zbieżności szeregu dodatniego. Jeżeli wyrazy szeregu są ujemne, lub są takie przynajmniej począwszy od pewnego miejsca, to powrócimy do rozpatrywanych już przypadków przez zmianę znaków wszystkich wyrazów [364, 3°]. Tak więc istotnie nowy będzie przypadek, gdy wśród wyrazów szeregu jest zarówno nieskończanie wiele dodatnich jak i nieskończanie wiele ujemnych. Tutaj przydaje się często następujące ogólne twierdzenie.

TWIERDZENIE. *Niech będzie dany szereg (A) o wyrazach dowolnych znaków. Jeżeli jest zbieżny szereg*

$$(A^*) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów, to dany szereg jest także zbieżny.

Dowód otrzymuje się natychmiast z zasady zbieżności. Nierówność

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$$

pokazuje, że jeśli warunek konieczny i dostateczny zbieżności jest spełniony dla szeregu (A*), to jest tym bardziej spełniony dla szeregu (A).

Można rozumować inaczej. Z wyrazów dodatnich szeregu (A) po kolejnym ich ponumerowaniu utwórzmy szereg

$$(P) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots$$

Tak samo postąpmy z wyrazami ujemnymi i utwórzmy szereg ich wartości bezwzględnych

$$(Q) \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \dots + q_m + \dots$$

Ilakolwiek weźmiemy wyrazów pierwszego lub drugiego szeregu, będą one wszystkie zawarte wśród wyrazów zbieżnego szeregu (A*), wskutek tego dla wszystkich sum częściowych P_k i Q_m będą spełnione nierówności

$$P_k \leq A^*, \quad Q_m \leq A^*,$$

gdzie A^* jest sumą szeregu (A*). Obydwa szeregi (P) i (Q) są zatem zbieżne [365]; ich sumy oznaczamy odpowiednio przez P i Q .

Jeżeli weźmiemy n wyrazów szeregu (A), to wśród nich znajdzie się k dodatnich i m ujemnych, a zatem

$$A_n = P_k - Q_m.$$

Wskaźniki k i m zależą tu oczywiście od n . Jeżeli szereg (A) ma nieskończanie wiele zarówno wyrazów dodatnich jak i wyrazów ujemnych, to gdy $n \rightarrow \infty$, będzie też $k \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$.

Przechodząc do granicy w tej równości dochodzimy na nowo do wniosku, że szereg (A) jest zbieżny i okazuje się, że jego suma wynosi

$$(3) \quad A = P - Q.$$

Można powiedzieć, że przy naszych założeniach *suma danego szeregu jest równa różnicy sumy szeregu utworzonego z samych tylko wyrazów dodatnich i sumy szeregu utworzonego z wartości bezwzględnych wyrazów ujemnych*. Będziemy z tego w przyszłości korzystać.

Jeżeli szereg (A) jest zbieżny wraz z szeregiem (A*) utworzonym z wartości bezwzględnych jego wyrazów, to mówimy, że szereg (A) jest *bezwzględnie* (albo *absolutnie*) zbieżny. Na mocy udowodnionego twierdzenia dla bezwzględnej zbieżności szeregu (A) wystarcza sama tylko zbieżność szeregu (A*).

Jak zobaczymy niżej, są możliwe przypadki, kiedy szereg (A) jest zbieżny, a szereg (A*) nie jest zbieżny. Wtedy szereg (A) nazywa się *warunkowo zbieżny*.

Dla stwierdzenia bezwzględnej zbieżności szeregu (A) można zastosować do dodatniego szeregu (A*) wszystkie kryteria zbieżności zbadane w poprzednim paragrafie. Trzeba jednak być ostrożnym z kryteriami rozbieżności. Jeśli się nawet okaże, że szereg (A*) jest rozbieżny, to szereg (A) może być mimo to zbieżny (warunkowo). Wyjątek stanowią tylko kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta, a to dlatego, że gdy stwierdzają one rozbieżność szeregu (A*), to oznacza to, że wyraz ogólny $|a_n|$ szeregu (A*) nie dąży do zera (¹), a wówczas także a_n nie dąży do zera, a więc szereg (A) jest także rozbieżny. Dlatego wspomniane kryteria można wysłowić dla dowolnych szeregów. Postąpimy tak na przykład z kryterium d'Alemberta, najczęściej stosowanym w praktyce.

KRYTERIUM D'ALEMBERTA. *Niech ciąg o wyrazie $\mathcal{D}_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ma granicę $\mathcal{D}^* = \lim \mathcal{D}_n^*$.*

Wówczas jeżeli $\mathcal{D}^* < 1$, to szereg (A) jest zbieżny bezwzględnie, jeśli zaś $\mathcal{D}^* > 1$, to szereg (A) jest rozbieżny.

378. Przykłady. 1) Zastosujemy kryterium d'Alemberta do wszystkich szeregów (a)–(e), o których mówiliśmy w 2) w ustępie 370, odrzucając jednak żądanie $x > 0$. Dojdziemy do wniosku, że:

- (a) szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości x ;
- (b) szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $-1 < x < 1$ i rozbieżny dla $x \geq 1$ oraz $x \leq -1$ (dla $x = \pm 1$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności);
- (c) szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $-1 < x < 1$ i rozbieżny dla $x > 1$ lub $x < -1$. Jeśli $s > 1$, o dla $x = \pm s$ szereg jest także bezwzględnie zbieżny, jeśli zaś $0 < s < 1$, to dla $x = \pm s$ szereg jest na pewno rozbieżny, a dla $s = -1$ zagadnienie pozostawiamy na razie otwarte;

(d) szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $-e < x < e$ i rozbieżny dla $x > e$ lub $x < -e$ (dla $x = \pm e$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności);

(e) szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ i rozbieżny dla $x > \frac{1}{e}$ lub $x < -\frac{1}{e}$ (dla $x = -\frac{1}{e}$ zagadnienie pozostaje na razie otwarte).

(¹) Patrz odnośnik na str. 274.

$$2) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)} \quad (x \neq -1).$$

Jest tu

$$\mathcal{D}_n^* = \frac{|x|}{|1+x^n|}, \quad \mathcal{D}^* = \begin{cases} |x| & \text{dla } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 1, \\ 0 & \text{dla } x < -1 \text{ lub } x > 1, \end{cases}$$

a więc szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości $x \neq -1$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \neq \pm 1).$$

Tutaj

$$\mathcal{D}_n^* = \left| \frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}} \right|, \quad \mathcal{D}^* = \begin{cases} |x| & \text{dla } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1 \text{ lub } x < -1. \end{cases}$$

Dla $|x| < 1$ szereg jest bezwzględnie zbieżny, w przypadku $|x| > 1$ kryterium d'Alemberta nic nie daje, ale mimo to możemy wywnioskować, że szereg jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.

4) Wróćmy do szeregu hipergeometrycznego [372]

$$F(x, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot \dots \cdot (\beta+n-1)}{n! \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \dots \cdot (\gamma+n-1)} \cdot x^n$$

dla dowolnych α, β, γ i x (o parametrach α, β, γ zakładamy tylko, że są różne od zera i od liczb całkowitych ujemnych).

Stosując kryterium d'Alemberta w nowym brzmieniu przekonamy się, że dla $|x| < 1$ szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, a dla $|x| > 1$ jest rozbieżny.

Niech teraz będzie $x = 1$. Ponieważ stosunek

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| < L)$$

jest dla dostatecznie dużych n dodatni, przeto wyrazy szeregu będą miały począwszy do pewnego miejsca stały znak, a wówczas do tego szeregu (lub do szeregu bezwzględnych wartości) można po dawnemu zastosować kryterium Gaussa, które wykazuje, że szereg jest zbieżny — oczywiście bezwzględnie — gdy $\gamma - \alpha - \beta > 0$, a jest rozbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta < 0$.

Niech wreszcie będzie $x = -1$. Z tego co było powiedziane jest jasne, że dla $\gamma - \alpha - \beta > 0$ będzie zbieżny szereg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$, a zatem dany szereg jest w tym przypadku zbieżny bezwzględnie. Dla $\gamma - \alpha - \beta < -1$ będzie począwszy od pewnego miejsca

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1, \quad \text{tzn.} \quad |a_n| < |a_{n+1}|;$$

a_n nie dąży do zera i szereg jest rozbieżny.

W przypadku $x = -1$ i $-1 < \gamma - \alpha - \beta < 0$ zagadnienie zbieżności pozostaje na razie otwarte.

379. Szereg potęgowy i jego przedział zbieżności. Rozpatrzmy szereg potęgowy

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

będący jak gdyby „nieskończonym wielomianem” ustawionym według potęg zmiennej x (a_0, a_1, a_2, \dots oznaczają tutaj stałe współczynniki). Już nieraz mieliśmy poprzednio do czynienia z takimi szeregami potęgowymi [patrz na przykład w poprzednim ustępie 1) (a) — (e)].

Postaramy się teraz zdać sobie sprawę z tego, jaki kształt ma obszar zbieżności szeregu potęgowego, tzn. zbiór $X = \{x\}$ tych wartości zmiennej, dla których szereg (4) jest zbieżny. Będzie to znowu ważny przykład zastosowania tego, co zostało wyżej wyłożone.

LEMAT. Jeżeli szereg (4) jest zbieżny dla wartości $x = x^*$ różnej od zera, to jest on zbieżny bezwzględnie dla każdej wartości x spełniającej nierówność $|x| < |x^*|$.

Ze zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{*n} = a_0 + a_1 x^* + a_2 x^{*2} + \dots + a_n x^{*n} + \dots$$

wynika, że jego wyraz ogólny dąży do zera [364, 5°], a zatem jest ograniczony

$$(5) \quad |a_n x^{*n}| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Weźmy teraz dowolne x , takie że $|x| < |x^*|$ i utwórzmy szereg

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

Ponieważ [patrz (5)] jest

$$|a_n x^n| = |a_n x^{*n}| \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right|^n,$$

wyrazy szeregu (6) są mniejsze od wyrazów zbieżnego szeregu geometrycznego o ilorazie $|x/x^*| < 1$.

$$M + M \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right| + M \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right|^2 + \dots + M \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right|^n + \dots,$$

a więc na mocy twierdzenia 1 z ustępu 366 szereg (6) jest zbieżny. W takim razie, jak wiemy, szereg (4) jest zbieżny bezwzględnie, c.b.d.o.

Dla $x = 0$ jest oczywiście zbieżny każdy szereg (4). Istnieją jednak szeregi potęgowe, które, oprócz tej jednej, nie są zbieżne dla żadnej innej wartości x . Przykładem takiego wszędzie rozbieżnego szeregu potęgowego jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$, jak łatwo się przekonać za pomocą kryterium d'Alemberta. Podobne szeregi nie są dla nas ciekawe.

Załóżmy więc, że dla szeregu (4) w ogóle istnieją takie różne od zera wartości $x = x^*$, dla których szereg jest zbieżny, i rozpatrzmy zbiór ich bezwzględnych wartości $\{|x^*|\}$. Zbiór ten albo może się okazać ograniczony od góry, albo nie.

W tym ostatnim przypadku dla każdej wartości x znajdzie się na pewno takie x^* , że $|x| < |x^*|$, a zatem na mocy lematu szereg (4) jest dla tej wartości x zbieżny bezwzględnie. Szereg jest wszędzie zbieżny.

Niech teraz zbiór $\{|x^*|\}$ będzie ograniczony i niech R będzie jego kresem górnym. Jeżeli $|x| > R$, to rzecz jasna szereg jest dla tego x rozbieżny. Weźmy teraz dowolne x spełniające nierówność $|x| < R$. Z definicji kresu górnego istnieje na pewno takie x^* , że $|x| < |x^*| \leq R$, a to na mocy lematu pociąga za sobą bezwzględną zbieżność szeregu (4).

Tak więc w przedziale otwartym $(-R, R)$ szereg (4) jest bezwzględnie zbieżny, dla $x > R$ i $x < -R$ szereg jest na pewno rozbieżny, i tylko o końcach przedziału $x = \pm R$ nie można twierdzić nic ogólnego — tam w zależności od konkretnego przypadku może wystąpić zarówno zbieżność jak rozbieżność.

Postawione przez nas na początku tego ustępu zadanie zostało rozwiązane.

Obszar zbieżności każdego szeregu potęgowego (4) jeśli szereg ten nie jest tylko wszędzie rozbieżny, jest pełnym przedziałem $(-R, R)$ z wyłączeniem lub wyłączeniem końców; przedział ten może także być nieskończony. Wewnątrz przedziału szereg jest ponadto zbieżny bezwzględnie.

Wspomniany przedział nazywamy *przedziałem zbieżności*, a liczbę R ($0 < R \leq +\infty$) — *promieniem zbieżności szeregu*. Wracając do przykładów 1) (a) — (e) z poprzedniego ustępu widzimy, że w przypadku

$$(a) R = +\infty, \quad (b) R = 1, \quad (c) R = 1, \quad (d) R = e, \quad (e) R = 1/e.$$

Dla szeregu wszędzie rozbieżnego przyjmuje się $R = 0$. Obszar zbieżności takiego szeregu redukuje się do jedynego punktu $x = 0$.

380. Wyrażenie promienia zbieżności przez współczynniki. Teraz udowodnimy dokładniejsze twierdzenie, w którym nie tylko na nowo stwierdzimy istnienie promienia zbieżności, ale też wyznaczmy jego wartość w zależności od współczynników samego szeregu (4).

Rozpatrzmy ciąg

$$\rho_1 = |a_1|, \quad \rho_2 = \sqrt{|a_2|}, \quad \dots, \quad \rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \dots$$

Oznaczmy górną granicę tego ciągu (ta górna granica zawsze istnieje [42]) przez ρ , czyli

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO-HADAMARDA. *Promień zbieżności szeregu (4) jest odwrotnością górnej granicy ρ ciągu $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$*

$$R = \frac{1}{\rho},$$

(przy czym $R = +\infty$, jeśli $\rho = 0$ i $R = 0$, jeśli $\rho = +\infty$).

Twierdzenie to odkryte przez Cauchy'ego zostało zapomniane. J. Hadamard znalazł je ponownie i podał jego ważne zastosowania.

Dowód. Przypadek I: $\rho = 0$. Udowodnimy, że w tym przypadku $R = +\infty$, tzn. że dla dowolnego x szereg (4) jest bezwzględnie zbieżny.

Ponieważ wyrazy ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$ są dodatnie, przeto z tego, że $\rho = 0$ wynika, że ciąg ten ma granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Stąd ciąg Cauchy'ego

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow \infty$, dla każdego x . Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego [368] szereg bezwzględnych wartości wyrazów szeregu (4) jest zbieżny, czyli szereg (4) jest zbieżny bezwzględnie.

Przypadek II: $\rho = +\infty$. Udowodnimy, że w tym przypadku $R = 0$, tzn. dla każdego $x \neq 0$ szereg jest rozbieżny.

Ponieważ

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$

można oczywiście znaleźć taki ciąg częściowy $\{n_i\}$, żeby było

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = +\infty.$$

Dla każdego $x \neq 0$ znajdzie się zatem takie i_0 , że dla wszystkich $i > i_0$ będzie spełniona nierówność

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} > \frac{1}{|x|} \quad \text{lub} \quad |a_{n_i} x^{n_i}| > 1.$$

Widzimy, że w tym przypadku nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności — wyraz ogólny nie dąży do zera. A zatem szereg (4) jest rozbieżny.

Przypadek III: ρ jest skończoną liczbą dodatnią: $0 < \rho < +\infty$. Udowodnimy, że w tym wypadku $R = 1/\rho$, tzn. że dla $|x| < 1/\rho$ szereg jest bezwzględnie zbieżny, a dla $|x| > 1/\rho$ szereg jest rozbieżny. Weźmy dowolne x , dla którego $|x| < 1/\rho$. Wybieramy $\epsilon > 0$ tak małe, aby była spełniona nierówność

$$|x| < \frac{1}{\rho + \epsilon}.$$

Na podstawie pierwszej własności granicy górnej ciągu [42] dla tej liczby ϵ istnieje zawsze taka liczba N_ϵ , że dla wszystkich $n > N_\epsilon$ jest

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \epsilon.$$

Stąd wynika, że ciąg Cauchy'ego C_n spełnia nierówność

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < x(\rho + \epsilon) < 1$$

dla wszystkich $n > N_\epsilon$. Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu (4) jest zbieżny, a więc sam szereg (4) jest zbieżny bezwzględnie.

Weźmy teraz dowolne x spełniające nierówność $|x| > 1/\rho$. Wybierzemy ϵ tak małe, aby było

$$|x| > \frac{1}{\rho - \epsilon}.$$

Na mocy drugiej własności granicy górnej [42] istnieją dowolnie duże n , dla których zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \rho - \epsilon,$$

tak że

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > |x| (\rho - \epsilon) > 1.$$

Istnieją więc dowolnie duże n , dla których jest

$$|a_n x^n| > 1;$$

szereg (4) jest zatem rozbieżny.

381. Szeregi naprzemienne. Zajmiemy się teraz szeregami, których kolejne wyrazy mają na przemian znaki dodatni i ujemny. Szeregi takie wygodnie jest zapisywać w ten sposób, żeby znaki były wyraźnie wskazane, na przykład

$$(7) \quad c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \quad (c_n > 0).$$

Jeżeli ponadto bezwzględne wartości wyrazów takiego szeregu maleją monotonicznie

$$(8) \quad c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

i dążą do zera

$$\lim c_n = 0,$$

to szereg nazywa się *naprzemienny*.

Dla szeregów naprzemiennych zachodzi następujące proste twierdzenie:

TWIERDZENIE LEIBNIZA. *Szereg naprzemienny jest zbieżny.*

Dowód. Sumę częściową parzystego rzędu C_{2m} można napisać w postaci

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Każdy z tych nawiasów jest na mocy (8) liczbą dodatnią, wobec tego widać stąd jasno, że wraz ze wzrostem m rośnie także suma C_{2m} . Jeżeli z drugiej strony przepiszemy C_{2m} w postaci

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

to łatwo widać, że sumy C_{2m} są ograniczone od góry

$$C_{2m} < c_1.$$

W takim razie na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym [34] suma częściowa C_{2m} ma przy nieograniczonym wzroście m granicę skończoną

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m} = C.$$

Przejdźmy do sumy częściowej rzędu nieparzystego C_{2m-1} . Będzie oczywiście $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$. Ponieważ wyraz ogólny dąży do zera, jest także

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m-1} = C.$$

Stąd wynika, że C jest sumą danego szeregu.

Uwaga. Widzieliśmy, że sumy częściowe rzędu parzystego C_{2m} dążą do sumy C rosnąc. Pisząc C_{2m-2} w postaci

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

stwierdzamy łatwo, że sumy częściowe rzędu nieparzystego dążą do C malejąc. Jest więc zawsze

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

W szczególności można stwierdzić, że

$$0 < C < c_1.$$

Daje to bardzo proste i wygodne oszacowanie reszty rozpatrywanego szeregu, która sama też jest szeregiem naprzemiennym. Mianowicie, dla

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \dots$$

jest oczywiście

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1},$$

zaś dla

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} + \dots$$

jest

$$\gamma_{2m-1} < 0 \quad \text{i} \quad |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}.$$

Tak więc we wszystkich wypadkach reszta szeregu naprzemiennego ma taki sam znak jak pierwszy wyraz tej reszty i jest mniejsza od niego co do wartości bezwzględnej.

Uwagę tę stosuje się często w rachunkach przybliżonych z użyciem szeregów [patrz 409]

382. Przykłady

1) Najprostszymi przykładami szeregów naprzemiennych są szeregi:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Zbieżność obydwu szeregów wynika z udowodnionego twierdzenia.

Jednocześnie szeregi utworzone z wartości bezwzględnych ich wyrazów są rozbieżne. Dla szeregu (a) będzie to rozbieżny szereg harmoniczny, a dla (b) — szereg

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots,$$

którego rozbieżność wynika łatwo stąd, że jego suma częściowa spełnia nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_n.$$

Tak więc w szeregach (a) i (b) mamy pierwsze przykłady szeregów zbieżnych warunkowo. Zobaczmy niżej, że suma pierwszego szeregu jest równa $\ln 2$, a suma drugiego jest równa $\frac{1}{4} \pi$ [388, 2); 405; 404].

2) Na mocy twierdzenia Leibniza są zbieżne szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^n n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^s} \quad (s > 0).$$

Jeśli zastąpimy tu wszystkie wyrazy ich wartościami bezwzględnymi, to jak wiemy, dla $s > 1$ otrzymujemy szeregi zbieżne, a dla $s < 1$ szeregi rozbieżne. Tak więc dane szeregi są dla $s > 1$ zbieżne bezwzględnie, a dla $s < 1$ — zbieżne warunkowo.

W szczególności o szeregu potęgowym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$, który rozpatrywaliśmy w ustępach 370 i 378 możemy teraz powiedzieć, że w końcu $x = -1$ swego przedziału zbieżności jest on dla $s < 1$ jeszcze zbieżny lecz nie bezwzględnie.

3) Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ dla dowolnego $x \neq 0$. Twierdzenie Leibniza można tu zastosować jeżeli nie do samego szeregu, to przynajmniej do dostatecznie dalekiej reszty. Rzeczywiście, dla dostatecznie dużego n wartość $\sin \frac{x}{n}$ ma taki sam znak jak x i co do bezwzględnej wartości maleje, gdy n rośnie. Szereg jest więc zbieżny, oczywiście warunkowo [patrz 367, 8) (c)].

4) Ażeby pokazać, że żądanie, by liczby c_n maleły monotonicznie nie jest w twierdzeniu Leibniza przynajmniej zbędne, rozpatrzmy szereg

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots,$$

którego wyrazy zmieniają kolejno znak, a ogólny wyraz dąży do zera. Suma jego $2n$ wyrazów jest równa

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2H_n$$

i wzrasta nieograniczenie wraz z n — szereg jest rozbieżny. Łatwo sprawdzić, że nie ma tu monotoniczności przy przejściu od wyrazu $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ do wyrazu $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$.

Do tego samego celu może służyć rozbieżny szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Przekonanie się o tym pozostawiamy czytelnikowi.

5) Ten ostatni szereg pozwala zrobić następującą uwagę. Jeśli porównamy go ze zbieżnym szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, to okaże się, że stosunek wyrazów ogólnych obu tych szeregów dąży do 1. Tak więc twierdzenie 2 z ustępu 366 nie ma swojego odpowiednika w teorii szeregów o wyrazach dowolnego znaku.

6) Korzystanie w rachunkach z szeregów rozbieżnych i wykonywanie działań na ich nieskończonych sumach może prowadzić do paradoksów. Oto na przykład jeden z nich

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) = 0! \end{aligned}$$

Jeżeli to samo przekształcenie zastosujemy do szeregu zbieżnego

$$p = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \quad (s > 0),$$

to otrzymamy

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) q,$$

gdzie

$$q = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Dla $s < 1$ (w tym przypadku ostatni szereg jest rozbieżny) otrzymujemy znowu paradoks; $p < 0$ [porównaj 381, uwaga]. Dla $s > 1$ mamy do czynienia z szeregami zbieżnymi i otrzymujemy wynik poprawny.

383. Przekształcenie Abela. Często trzeba rozpatrywać sumy iloczynów postaci

$$(9) \quad S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

W wielu przypadkach okazuje się przy tym pożyteczne następujące przekształcenie podane przez Abela.

Wprowadzimy sumy

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \dots, \quad B_m = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m.$$

Wyrażając czynniki β_i przez te sumy

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \quad \dots, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

możemy sumę S napisać w postaci

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \dots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Jeżeli otworzymy nawiasy i zgrupujemy inaczej wyrazy, to otrzymamy ostateczny wzór

$$(10) \quad S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m^{(1)}.$$

Jeżeli napiszemy ją w postaci

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i,$$

to widać, że wzór ten dla sum skończonych jest analogiem wzoru na całkowanie przez części dla całek — różniczka jest tu zastąpiona różnicą, a całka sumą.

Opierając się na wzorze (10) wyprowadzimy następujące oszacowanie dla sum tego typu.

LEMAT. Jeżeli czynniki α_i nie rosną (albo nie maleją), a sumy B_i są wszystkie ograniczone co do wartości bezwzględnej liczbą L ,

$$|B_i| \leq L, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

to

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L(|\alpha_1| + 2 |\alpha_m|).$$

Rzeczywiście, ponieważ wszystkie różnice w (10) mają ten sam znak, więc jest

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| L + |\alpha_m| L = L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leq L(|\alpha_1| + 2 |\alpha_m|).$$

(1) W istocie posługiwałyśmy się takim przekształceniem w dowodzie drugiego twierdzenia o wartości średniej [306].

Łatwo zauważyc, że jeśli czynniki α_i nie rosną i są dodatnie, to oszacowanie to można uprościć

$$(11) \quad |S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \alpha_1 .$$

Z tych oszacowań będziemy dalej nie raz korzystali przy różnych okazjach. Teraz zastosujemy je do wyprowadzenia kryteriów zbieżności, ogólniejszych niż przytoczone wyżej kryterium Leibniza.

384. Kryteria Abela i Dirichleta. Rozpatrzmy szereg

$$(W) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots,$$

gdzie $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dwoma ciągami liczb rzeczywistych. Następujące założenia o każdym z tych ciągów z osobna gwarantują zbieżność tego szeregu.

KRYTERIUM ABELA. Jeżeli szereg

$$(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

jest zbieżny, a liczby a_n tworzą ciąg monotoniczny i ograniczony,

$$|a_n| \leq K \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

to szereg (W) jest zbieżny.

KRYTERIUM DIRICHLETA. Jeżeli sumy częściowe szeregu (B) są wspólnie ograniczone ⁽¹⁾,

$$|B_n| \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

a liczby a_n tworzą ciąg monotoniczny dążący do zera,

$$\lim a_n = 0 ,$$

to szereg (W) jest zbieżny.

W obu wypadkach dla dowodu zbieżności szeregu (W) posłużymy się zasadą zbieżności [376]. Rozpatrzmy w tym celu sumę

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^m a_{n+i} b_{n+i} .$$

Ma ona postać (9) przy czym $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$. Spróbujmy oszacować tę sumę na podstawie lematu.

Przy założeniach Abela, do danego $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie N , że dla $n > N$ nierówność

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

(1) Jest to żądanie słabsze od zbieżności szeregu (B).

jest spełniona dla każdego p (zasada zbieżności). Za liczbę L występującą w lematie można zatem przyjąć ε . Mamy wówczas dla $n > N$, $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}| + 2 |a_{n+m}|) \leq 3K\varepsilon,$$

co dowodzi zbieżności szeregu (W).

Przy założeniach Dirichleta można dla danego $\varepsilon > 0$ znaleźć taki numer N , że dla $n > N$ będzie

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Ponadto jest oczywiście

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq 2M$$

i można w lematie przyjąć $L = 2M$. Wówczas dla $n > N$ i $m = 1, 2, 3, \dots$ jest

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2M (|a_{n+1}| + 2 |a_{n+m}|) \leq 6M\varepsilon$$

i zbieżność szeregu (W) jest udowodniona.

Uwaga. Kryterium Abela wynika z kryterium Dirichleta. Z założeń Abela wynika przecież, że ciąg $\{a_n\}$ ma skończoną granicę a . Jeśli przepiszemy szereg (W) w postaci sumy dwóch szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

to drugi z tych szeregów będzie zbieżny z założenia, a do pierwszego można zastosować kryterium Dirichleta.

385. Przykłady. 1) Jeśli a_n monotonicznie maleje i dąży do zera, a $b_n = (-1)^{n-1}$, to założenia twierdzenia Dirichleta są oczywiście spełnione, a zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

jest zbieżny. Tak więc twierdzenie Leibniza otrzymuje się jako szczególny wniosek z twierdzenia Dirichleta.

2) Przy tych samych założeniach o a_n rozpatrzmy szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

(x — dowolne).

Podstawiając $a = 0$ i $b = x$ do tożsamości (1) i (2) z ustępu 307, które tam zostały wyprowadzone w innym celu, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

przy założeniu, że tylko $x \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Tak więc, jeśli tylko $x \neq 2k\pi$, obie sumy są dla każdego n ograniczone co do wartości bezwzględnej liczbą $1/|\sin \frac{1}{2}x|$. Na podstawie kryterium Dirichleta obydwa szeregi są zbieżne dla każdej wartości x różnej od $2k\pi$. Pierwszy szereg jest zresztą zbieżny także i dla $x = 2k\pi$, bo wszystkie jego wyrazy są wtedy równe zeru.

W szczególności zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n} \quad \text{itd.}$$

3) Bardzo ciekawe są szeregi postaci

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x},$$

gdzie $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczb. Nosią one nazwę **szeregów Dirichleta**.

Można dla nich udowodnić lemat podobny do lematu z ustępu 379, dotyczącego szeregów potęgowych.

Jeżeli szereg (12) jest zbieżny dla pewnej wartości $x = x^$, to jest on zbieżny dla każdego $x > x^*$.*

Wynika to od razu z twierdzenia Abela, bo dla $x > x^*$ szereg (12) powstaje z zbieżnego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x^*}}$$

przez pomnożenie jego wyrazów przez monotonicznie malejące czynniki $1/n^{x-x^*}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Istnieją szeregi (12) wszędzie zbieżne, jak na przykład $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^x}$ i wszędzie rozbieżne, jak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^x}$.

Jeżeli wyłączymy te przypadki, to za pomocą powyższego lematu można łatwo stwierdzić istnienie granicznej odciętej zbieżności λ , takiej że szereg (12) jest zbieżny dla $x > \lambda$ i rozbieżny dla $x < \lambda$. Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest oczywiście $\lambda = 1$, a dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ jest $\lambda = 0$. Jeśli chcemy, możemy przyjąć dla szeregu wszędzie zbieżnego $\lambda = -\infty$, a dla szeregu wszędzie rozbieżnego $\lambda = +\infty$.

Czytelnik zauważa łatwo podobieństwo do szeregów potęgowych. W obu przypadkach obszarem zbieżności jest pełny przedział. Ale jest tutaj też istotna różnica: obszar zbieżności bezwzględnej może się tutaj nie pokrywać z obszarem zbieżności w ogóle. Tak na przykład wspomniany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ jest zbieżny dla $x > 0$, ale jest bezwzględnie zbieżny tylko dla $x > 1$.

4) Porównajmy z szeregiem Dirichleta (12) szereg

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

o takich samych współczynnikach a_n . Będziemy przy tym, rzecz jasna, zakładali, że x jest różne od $0, -1, -2, \dots$ itd.

Przy tym założeniu jest słuszne następujące **twierdzenie Landaua**: Szeregi (12) i (13) są zbieżne dla tych samych wartości x .

Szereg (13) powstaje z szeregu Dirichleta (12) przez pomnożenie odpowiednio jego wyrazów przez czynniki

$$(14) \quad \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dla dostatecznie dużych n czynniki te zachowują określony znak, prócz tego począwszy od pewnego n zmieniają się już monotonicznie.

Rzeczywiście stosunek czynnika $(n+1)$ -szego do czynnika n -tego wynosi

$$\frac{(n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

Ale [125, 4)]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} = 1 + \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

analogicznie

$$\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}} = 1 - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

skąd

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}} = 1 + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Z ostatniego wzoru widać, że dla $(x+1)x > 0$ wspomniane wyrażenie staje się w końcu większe od 1, a dla $(x+1)x < 0$ — jest mniejsze od jedności.

Aby stwierdzić ograniczonosć czynników (14) powołamy się na to, że wyrażenie (14) ma skończoną granicę, gdy $n \rightarrow \infty$, jak to będzie udowodnione dalej w ustępie 402, 10). Wobec tego, zgodnie z kryterium Abela zbieżność szeregu (12) pociąga za sobą zbieżność szeregu (13). Jak zobaczymy, wspomniana granica jest zawsze różna od zera, dlatego podobny wniosek jest słuszny także dla odwrotności czynników (14). W takim razie na mocy tego samego twierdzenia zbieżność szeregu (13) pociąga za sobą zbieżność szeregu (12). Przez to jest wszystko udowodnione.

5) Podobny dualizm można ustalić dla zachowania się tak zwanego *szeregu Lambert*

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n},$$

i szeregu potęgowego [379]

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

o tych samych współczynnikach a_n (wartości $x = \pm 1$ oczywiście odrzucamy). Dokładniej:

Jeżeli szereg

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to szereg Lamberta (15) jest zbieżny dla wszystkich wartości x , w przeciwnym razie jest on zbieżny dokładnie dla tych samych wartości x , dla których jest zbieżny szereg potęgowy (16) (K. Knopp).

(a) Najpierw niech szereg (A) będzie rozbieżny, tak że promień zbieżności R szeregu (16) będzie mniejszy od jedności. Wykażemy, że dla $|x| < 1$ oba szeregi (15) i (16) zachowują się tak samo.

Jeżeli zbieżny jest szereg (15), to jest także zbieżny szereg otrzymany przez pomnożenie jego wyrazów przez x^n ⁽¹⁾, a zatem także szereg (16), który jest różnicą obydwu szeregów [364, 4°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} \cdot x^n \right].$$

Niech teraz będzie zbieżny szereg (16), wówczas zgodnie z kryterium Abela jest zbieżny szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}}$$

otrzymany z niego przez pomnożenie jego wyrazów odpowiednio przez monotonicznie malejące czynniki $1/(1-x^{2n})$, a także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

Jest zatem zbieżny także i szereg (15), który jest sumą tych szeregów [364, 4°]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}} \right].$$

Dla $|x| > 1$ szereg (16) jest na pewno rozbieżny. Twierdzimy, że dla takich wartości x jest rozbieżny także szereg (15). Rzeczywiście, w przeciwnym razie ze zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

wynikałaby zbieżność szeregów [364, 4°]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \right],$$

wbrew założeniu.

(b) Jeżeli szereg (A) jest zbieżny (czyli $R > 1$), to dla $|x| < 1$ szereg (16) jest zbieżny i zbieżność szeregu (15) stwierdzamy tak jak wyżej. Pozostaje wykazać, że szereg (15) jest zbieżny także, gdy $|x| > 1$.

Rzeczywiście, wówczas $|1/x| < 1$ i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

(1) Jeżeli jakiś szereg, powiedzmy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to znaczy to, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ jest zbieżny dla $x = 1$, a wówczas na mocy lematu z ustępu 379 szereg ten jest na pewno zbieżny dla każdego x , dla którego $|x| < 1$. Z tej uwagi skorzystamy dwukrotnie w rozumowaniu przytoczonym w tekście.

jak wspomnialiśmy jest zbieżny, a zatem jest także zbieżny [374, 4^o] szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \right].$$

6) Na zakończenie, jako przykład bezpośredniego zastosowania przekształcenia Abela (10), podamy tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n,$$

gdzie

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Zakładamy przy tym nie tylko, że $|x|$ jest mniejsze od promienia zbieżności, ale także że jest mniejsze od 1.

Rzeczywiście, jest

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (x^i - x^{i+1}) + A_n x^n.$$

Stąd, gdy $n \rightarrow \infty$, otrzymamy żądaną równość, jeśli tylko jeszcze wykażemy, że $A_n x^n \rightarrow 0$. W tym celu weźmy liczbę r spełniającą warunki

$$|x| < r < R, \quad r \neq 1.$$

Wówczas $|a_i| r^i < L$ (dla $i = 0, 1, 2, \dots$) i

$$|A_n x^n| < L \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} \right) |x|^n = \frac{L}{1-r} \left(\frac{|x|}{r} \right)^n - \frac{Lr}{1-r} |x|^n.$$

To ostatnie wyrażenie dąży oczywiście do zera przy naszych założeniach.

§ 4. Własności szeregów zbieżnych

386. Prawo łączności. Pojęcie sumy szeregu nieskończonego tym różni się istotnie od pojęcia sumy skończonej liczby składników (rozpatrywanej w arytmetyce i algebrze), że zawiera w sobie przejście do granicy. Chociaż niektóre własności sum zwykłych przynoszą się także na sumy szeregów nieskończonych, najczęściej jednak dopiero wtedy, gdy spełnione są pewne warunki, które teraz będziemy badali. W innych wypadkach zwykłe własności sum, do których jesteśmy przyzwyczajeni, są w sposób rażący nie spełnione, tak że na ogół należy tu zachowywać ostrożność.

Rozpatrzmy szereg zbieżny

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Będziemy łączyli wyrazy tego szeregu w grupy w dowolny sposób nie zmieniając jednak przy tym ich kolejności:

$$a_1 + \dots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \quad \dots, \quad a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}, \quad \dots$$

gdzie $\{n_k\}$ jest pewnym podciągiem ciągu liczb naturalnych.

TWIERDZENIE. Szereg utworzony z tych sum

$$(A^*) \quad (a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots$$

jest zawsze zbieżny i ma tę samą sumę co szereg wyjściowy. Innymi słowy, szereg zbieżny ma własność łączności.

Rzeczywiście, ciąg sum częściowych nowego szeregu

$$A_1^*, A_2^*, \dots, A_k^*, \dots$$

nie jest niczym innym jak podciągiem

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$$

sum częściowych ciągu wyjściowego. Przez to [40] jest nasze twierdzenie udowodnione.

Widzimy na razie pełną analogię z sumami zwykłymi, analogia ta jednak zostanie zakłócona, jeżeli spróbujemy zastosować własność łączności, że tak powiemy, w przeciwną stronę. Jeżeli dany jest szereg zbieżny (A^*) , którego wyrazy — każdy z osobna — są sumą skończonej liczby składników, to opuszczając nawiasy otrzymamy nowy szereg, który może się okazać rozbieżny.

Oto proste przykłady: szeregi

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \equiv 0+0+0+\dots = 0$$

$$1-(1-1)-(1-1)-\dots \equiv 1-0-0-\dots = 1$$

są oczywiście zbieżne, tymczasem szereg otrzymany z nich po otwarciu nawiasów

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

jest rozbieżny.

Oczywiście jeśli po opuszczeniu nawiasów otrzymamy szereg (A) zbieżny, to jego suma będzie taka sama jak suma szeregu (A^*) . Wynika to z tego, co udowodniliśmy wyżej.

Przy pewnych założeniach możemy z góry zagwarantować, że szereg (A) będzie zbieżny. Najprostszym takim przypadkiem jest ten, kiedy wszystkie składniki w obrębie każdego nawiasu w (A^*) mają taki sam znak ⁽¹⁾.

Rzeczywiście, wówczas przy zmianie n od n_{k-1} do n_k suma częściowa A_n będzie się zmieniała monotonicznie, będzie zatem zawarta między $A_{n_{k-1}} = A_{k-1}^*$ i $A_{n_k} = A_k^*$. Dla dostatecznie dużego k te ostatnie sumy różnią się dowolnie mało od sumy A^* szeregu (A^*) , jest tak więc także dla sum A_n , gdy n jest dostatecznie duże, a więc $A_n \rightarrow A^*$. Z tej uwagi będziemy dalej często korzystali.

Rozpatrzmy teraz następujący:

PRZYKŁAD. Wykazać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}$

Tu mamy najpierw trzy wyrazy ujemne, za nimi następuje 5 wyrazów dodatnich itd. Jeśli połączymy każdą taką grupę wyrazów w jeden wyraz, otrzymamy szereg

⁽¹⁾ Znak ten w różnych nawiasach może być różny.

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right],$$

którego wyrazy zmieniają po kolejno znak.

Łatwo ustalić nierówność

$$\frac{1}{k+1} < \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{k^2+k}}_k + \underbrace{\dots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}_{k+1} < \frac{2}{k};$$

na przykład suma k pierwszych składników jest mniejsza niż $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$, a suma ostatnich $k+1$ składników jest mniejsza niż $(k+1) \cdot \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$, a zatem cała suma jest rzeczywiście mniejsza od $2/k$. Stąd wniosimy, że bezwzględne wartości wyrazów szeregu (1) maleją monotonicznie i dążą do zera. Na mocy twierdzenia Leibniza szereg (1) jest więc zbieżny, a zatem zgodnie z powyższą uwagą jest zbieżny badany szereg.

387. Prawo przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych. Niech będzie dany szereg zbieżny (A) o sumie A . Przedstawiając w nim wyrazy w dowolny sposób otrzymujemy nowy szereg

$$(A') \quad \sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k + \dots$$

Każdy wyraz a'_k tego szeregu jest identyczny z pewnym wyrazem a_{n_k} szeregu wyjściowego, ciąg $\{n_k\}$ wyczerpuje przy tym bez powtórzeń w innym porządku cały ciąg liczb naturalnych.

Powstaje pytanie, czy szereg (A') jest zbieżny, a w przypadku zbieżności, czy jego suma jest równa sumie A szeregu wyjściowego. Przy rozpatrywaniu tego pytania będziemy musieli przeprowadzić ostre rozróżnienie między szeregami zbieżnymi bezwzględnie i zbieżnymi warunkowo.

TWIERDZENIE. Jeżeli szereg (A) jest zbieżny bezwzględnie, to szereg (A') otrzymany z niego przez przedstawienie wyrazów jest również zbieżny i ma tę samą sumę A, co i szereg wyjściowy. Innymi słowy: szereg bezwzględnie zbieżny ma własność przemienności.

Dowód. (a) Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach. Założymy najpierw, że szereg (A) ma wszystkie wyrazy nieujemne.

Rozpatrzmy dowolną sumę częściową A'_k szeregu (A'). Ponieważ

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad \dots, \quad a'_k = a_{n_k},$$

biorąc n' większe od wszystkich wskaźników n_1, n_2, \dots, n_k będziemy oczywiście mieli $A'_k \leq A_n$, a więc tym bardziej

$$A'_k \leq A.$$

W takim razie szereg (A') jest zbieżny [365] i jego suma A' nie przewyższa A:

$$A' \leq A.$$

Także szereg (A) powstaje jednak z szeregu (A') przez przedstawienie wyrazów, a zatem analogicznie jest

$$A \leq A'.$$

Zestawiając ze sobą te dwie nierówności otrzymujemy potrzebną nam równość $A' = A$.

(b) Niech teraz (A) będzie dowolnym szeregiem bezwzględnie zbieżnym.

Ponieważ zbieżny szereg o wyrazach nieujemnych

$$(A^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

zachowuje, zgodnie z udowodnionym wyżej, zbieżność przy przedstawieniach wyrazów, zatem na mocy twierdzenia z ustępu 377 zachowa przy tym bezwzględną zbieżność także i szereg (A).

Widzieliśmy dalej w 377, że w przypadku bezwzględnej zbieżności szeregu (A) suma jego ma kształt

$$A = P - Q,$$

gdzie P i Q są odpowiednio sumami szeregów dodatnich

$$(P) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

i

$$(Q) \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m,$$

utworzonych odpowiednio z dodatnich wyrazów i z wartości bezwzględnych ujemnych wyrazów szeregu (A).

Przedstawienie wyrazów w szeregu (A) wywoła przedstawienie wyrazów w każdym z tych szeregów, nie odbije się to jednak (według tego, co już udowodniliśmy) na sumach P i Q , a zatem suma szeregu (A) pozostanie bez zmiany, c.b.d.o.

388. Przypadek szeregów zbieżnych warunkowo. Przejdziemy teraz do rozpatrzenia szeregów zbieżnych warunkowo i wykażemy, że nie są one przemienne — w każdym takim szeregu odpowiednia permutacja wyrazów zmienia sumę szeregu, a nawet może zepsuć zbieżność.

Załóżmy, że szereg (A) jest zbieżny, ale nie bezwzględnie. Ze zbieżności szeregu wynika, że $\lim a_n = 0$ [364, 4°]. Natomiast szeregi (P) i (Q), o których wspominaliśmy w poprzednim ustępie, są oba rozbieżne chociaż jest oczywiste

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0.$$

Rzeczywiście, zachodzą równości

$$(3) \quad A_n = P_k - Q_m, \quad A_n^* = P_k + Q_m.$$

gdzie k oznacza liczbę dodatnich, a m ujemnych wyrazów wchodzących w skład pierwszych n wyrazów szeregu (A). Podkreślamy, że spośród trzech liczb n, k, m tylko pierwszą możemy wybrać dowolnie; dwie pozostałe są do niej dobrane. Ze zbieżności jednego z szeregów (P) lub (Q) wynikaliby — z uwagi na pierwszą z równości (3) — zbieżność drugiego,

a zbieżność obydwu szeregów pociągałaby — z uwagi na drugą z tych równości — zbieżność szeregu (A*) wbrew założeniu, że zbieżność jest tylko warunkowa.

Udowodnimy teraz następujące godne uwagi twierdzenie należące do Riemanna.

TWIERDZENIE RIEMANNA. *Jeżeli szereg (A) jest zbieżny warunkowo, to dla każdej z góry danej liczby B (skończonej lub równej $\pm\infty$) można wyrazy tego szeregu tak przekształcić, by przekształcony szereg miał sumę równą B.*

Dowód. Zatrzymamy się na przypadku B skończonego. Zauważmy przede wszystkim, że z rozbieżności szeregów (P) i (Q) wynika na mocy 364, 1° to, że ich wszystkie reszty są też rozbieżne, a więc w każdym z tych szeregów, poczynając od dowolnego miejsca, można zawsze wziąć tyle wyrazów, by ich suma przekroczyła dowolną liczbę.

Korzystając z tej uwagi dokonamy przedstawienia wyrazów szeregu (A) w sposób następujący.

Najpierw weźmiemy tyle wyrazów dodatnich naszego szeregu (w takiej kolejności, w jakiej występują), aby ich suma przekroczyła B:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > B.$$

W ślad za nimi wypiszemy wyrazy ujemne (także w takiej kolejności w jakiej występują), biorąc ich tyle, by ogólna suma była mniejsza od B:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1} < B.$$

Dalej umieścimy znowu wyrazy dodatnie (spośród pozostałych) tak, aby zachodziła nierówność

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > B.$$

Następnie weźmiemy tyle wyrazów ujemnych (spośród pozostałych), by było

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} - q_{m_1-1} - \dots - q_{m_2} < B$$

itd. Proces ten kontynuujemy nieskończonie; jest oczywiste, że każdy wyraz szeregu (A), i to ze swym znakiem, wystąpi na pewnym określonym miejscu.

Jeżeli za każdym razem, gdy wypisujemy wyrazy p i q weźmiemy ich nie więcej niż jest to konieczne dla osiągnięcia żądanej nierówności, to odchylenie od liczby B w tę lub inną stronę nie przekroczy co do wartości bezwzględnej ostatniego wypisanego wyrazu. Wówczas z (2) wynika jasno, że szereg

$(p_1 + \dots + p_{k_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) + \dots + (p_{k_{l-1}+1} + \dots + p_{k_l}) - (q_{m_{l-1}+1} + \dots + q_{m_l}) + \dots$
ma sumę równą B. Na mocy uwagi z ustępu 386 pozostaje to słuszne także po otwarciu nawiasów.

Jeżeli $B = +\infty$, to bierzemy ciąg rosnących do nieskończoności liczb B_l i możemy od wyboru dodatnich wyrazów szeregu zażądać, by sumy były kolejno większe od B_1 , B_2 , B_3 itd., a wyrazy ujemne umieszczać po jednym po każdej grupie wyrazów dodatnich. W ten sposób utworzy się oczywiście szereg mający sumę równą $+\infty$. Analogicznie można też utworzyć szereg o sumie $-\infty$ (¹).

(¹) Czytelnik sam łatwo się domyśli jak porozmieszczać wyrazy danego szeregu, aby sumy częściowe przekształconego szeregu miały jako granicę dolną i granicę górną dwie z góry przyjęte liczby B i $C > B$.

Otrzymany wynik podkreśla ten fakt, że warunkowa zbieżność realizuje się tylko dzięki wzajemnemu wygaszaniu się wyrazów dodatnich i wyrazów ujemnych i dlatego zależy istotnie od porządku, w jakim wyrazy te następują po sobie, natomiast zbieżność bezwzględna opiera się na szybkości maleń tych wyrazów i od porządku nie zależy.

PRZYKŁADY. 1) Rozpatrzmy szereg

$$(4) \quad \underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \dots$$

zbieżny na pewno tylko warunkowo, którego suma, jak łatwo wykazać [patrz 2)], wynosi $\ln 2$.

Poprostawiamy wyrazy w ten sposób, by po jednym wyrazie dodatnim następowały dwa ujemne; otrzymamy

$$(5) \quad \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \dots$$

Twierdzimy, że przez takie przedstawienie suma szeregu zmniejszyła się dwukrotnie.

Rzeczywiście, jeżeli oznaczymy sumy częściowe tych dwóch szeregów odpowiednio przez A_n i A'_{3m} , to będzie

$$\begin{aligned} A'_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2m}, \end{aligned}$$

a więc $A'_{3m} \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$. Ponieważ

$$A'_{3m-1} = A'_{3m} + \frac{1}{4m} \quad \text{i} \quad A'_{3m-2} = A'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2},$$

dąży do tej samej granicy $\frac{1}{2} \ln 2$, szereg (5) jest zbieżny i ta liczba jest jego sumą.

2) Ogólniejszy wynik można otrzymać wychodząc z wzoru na sumę częściową H_n szeregu harmonicznego [367, (4)]

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n,$$

gdzie C jest stałą Eulera, a $\gamma_n \rightarrow 0$. Stąd mamy przede wszystkim

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \gamma_m,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} = H_{2k} - \frac{1}{2} H_k = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{1}{2} C + \gamma_{2k} - \frac{1}{2} \gamma_k.$$

Uporządkujmy teraz wyrazy szeregu (4) w sposób następujący: umieścimy najpierw p wyrazów dodatnich, potem q ujemnych, potem znowu p dodatnich i znowu q ujemnych itd. Aby obliczyć sumę szeregu

$$(6) \quad 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots,$$

będzie nam wygodniej połączyć kolejne grupy p lub q wyrazów. Suma częściowa A_{2n} otrzymanego w ten sposób szeregu jest równa

$$A_{2n} = \ln \left(2 \sqrt{\frac{p}{q}} \right) + \alpha_n \quad (\alpha_n \rightarrow 0),$$

i dąży do granicy $\ln(2\sqrt{p/q})$. Do tej samej granicy dążą też sumy A_{2n-1} . Wreszcie na mocy uwagi z ustępu 389 sumą szeregu (6) jest ta sama liczba $\ln(2\sqrt{p/q})$.

W szczególności dla szeregu (4) otrzymujemy sumę $\ln 2$ ($p = q = 1$) dla szeregu (5), tak samo jak w 1), $\frac{1}{2} \ln 2$ ($p = 1, q = 2$). Analogicznie

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \quad (p = 2, q = 1)$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0 \quad (p = 1, q = 4)$$

itp.

Zauważmy, że jeżeli liczebność kolejnych grup wyrazów dodatnich i ujemnych zmieniać jeszcze od grupy do grupy, to takie prawo zmiany można wybrać w ten sposób, aby dla przekształconego szeregu rzeczywiście otrzymać dowolną z góry daną sumę. Przekonanie się o tym pozostawiamy czytelnikowi.

389. Mnożenie szeregów. O dodawaniu (lub odejmowaniu) wyraz za wyrazem dwóch szeregów zbieżnych, jak też o mnożeniu wyraz za wyrazem szeregu zbieżnego przez stały czynnik mówiliśmy już w ustępie 364, 3° i 4°. Teraz zajmiemy się mnożeniem szeregów.

Niech będą dane dwa szeregi zbieżne

$$(A) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

oraz

$$(B) \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

Naśladowując regułę mnożenia sum skończonych, rozpatrzymy także i tutaj iloczyny parami $a_i b_k$ wyrazów tych szeregów. Utworzą one nieskończoną macierz prostokątną

(7)	\rightarrow					
	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	\dots	$a_i b_1$	\dots
	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	\dots	$a_i b_2$	\dots
	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	\dots	$a_i b_3$	\dots
					
	$a_1 b_k$	$a_2 b_k$	$a_3 b_k$	\dots	$a_i b_k$	\dots
					

Iloczyny te można na różne sposoby ustawać w zwykły ciąg. Można na przykład po- rządkować te iloczyny po przekątnych lub po bokach kwadratów

$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	\dots	\dots	\rightarrow
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	\dots	\dots	
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	\dots	\dots	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	\dots	\dots	\rightarrow
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	\dots	\dots	
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	\dots	\dots	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	

co prowadzi odpowiednio do ciągów:

$$(8) \quad a_1 b_1; \quad a_1 b_2, a_2 b_1; \quad a_1 b_3, a_2 b_2, a_3 b_1; \quad \dots$$

lub

$$(9) \quad a_1 b_1; \quad a_1 b_2, a_2 b_2, a_2 b_1; \quad a_1 b_3, a_2 b_3, a_3 b_3, a_3 b_2, a_3 b_1; \quad \dots$$

Utworzony z takich ciągów szereg nazywa się *iloczynem szeregów (A) i (B)*.

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO. Jeżeli obydwa szeregi (A) i (B) są zbieżne bezwzględnie, to ich iloczyn utworzony z iloczynów (7) wziętych w dowolnym porządku jest także zbieżny i ma sumę równą iloczynowi sum AB.

Dowód. Z założenia szeregi

$$(A^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

i

$$(B^*) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_m| + \dots$$

są zbieżne, tzn. mają skończone sumy A^* i B^* .

Ustawiwszy iloczyny (7) w ciąg, w jakikolwiek sposób, utworzymy z nich szereg

$$(10) \quad \sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \dots + a_{i_s} b_{k_s} + \dots$$

Aby udowodnić zbieżność odpowiedniego szeregu wartości bezwzględnych

$$(11) \quad \sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}| + \dots,$$

rozpatrzymy jego s-tą sumę częściową. Jeśli oznaczymy przez v największy ze wskaźników $i_1, k_1, i_2, k_2, \dots, i_s, k_s$, to będzie oczywiście

$$|a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}| \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_v|) (|b_1| + |b_2| + \dots + |b_v|) \leq A^* B^*.$$

Stąd wynika [365] zbieżność szeregu (11), a zatem bezwzględna zbieżność szeregu (10).

Pozostaje wyznaczyć jego sumę. Mamy prawo nadać wyrazom szeregu (10) wygodniejszy porządek, bo szereg ten — jako zbieżny bezwzględnie — ma własność przemienności [387]. Uporządkujemy wyrazy według kwadratów, jak w (9), i połączymy kolejne grupy, którymi następny kwadrat różni się od poprzedniego; otrzymamy

$$(12) \quad a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Jeśli przez A_m i B_m oznaczymy, jak zwykle, sumy częściowe szeregów (A) i (B), to sumy częściowe szeregu (12) będą równe

$$A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \quad A_3 B_3, \quad \dots, \quad A_k B_k, \quad \dots$$

i dążą zatem do iloczynu AB , który jest wobec tego sumą zarówno szeregu (12) jak i szeregu (10).

Przy praktycznym mnożeniu szeregów najczęściej jest wygodnie ustawać iloczyny (7) po przekątnych, jak w (8); łączy się przy tym wyrazy leżące na jednej przekątnej

$$(13) \quad AB = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

W tej właśnie postaci przedstawił Cauchy po raz pierwszy iloczyn dwóch szeregów. Tak napisany szereg będziemy dalej nazywali *iloczynem szeregów* (A) i (B) w postaci *Cauchy'ego*, lub krócej, *iloczynem Cauchy'ego*.

Pomóżmy, na przykład, dwa szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m + \dots,$$

przy czym x leży wewnątrz odpowiednich przedziałów zbieżności [379]. Wówczas łatwo zauważać, że podany sposób mnożenia odpowiada redukcji wyrazów podobnych w iloczynie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

Tak więc iloczyn w postaci Cauchy'ego dwóch szeregów potęgowych daje bezpośrednio szereg potęgowy.

390. Przykłady. We wszystkich przykładach oprócz ostatniego bierzemy iloczyn szeregów w postaci Cauchy'ego.

1) Mnożąc szereg

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1)$$

przez siebie, otrzymujemy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

2) Mnożenie szeregów

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

oraz

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

($|x| < 1$) daje następujący wynik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} H_k x^k = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \dots + (-1)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) x^k + \dots$$

Zobaczmy niżej [405], że sumą szeregu (14) jest $\ln(1+x)$, ostatni szereg przedstawia zatem funkcję $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

3) Obliczyć kwadrat:

$$\left\{ 1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu}(\mu!)^2} \right\}^2$$

(z – dowolne).

Wskazówka. Skorzystać z wzoru $\sum_{\mu=0}^v \binom{v}{\mu}^2 = \binom{2v}{v} = \frac{(2v)!}{(v!)^2}$, którego dowodzi się elementarnie

Odpowiedź: $1 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{2v} \frac{(2v)! zv}{2^{2v} \cdot (v!)^4}$.

4) Tożsamość [patrz 385, 6)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

gdzie $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, dowodzi się łatwo przez pomnożenie szeregów. Jeśli przy tym w przedziale $(-R, R)$ ($0 < R < 1$) jest zbieżny jeden z tych szeregów, wynika stąd już zbieżność w tym przedziale drugiego szeregu.

5) Udowodnić tożsamość ($a > 0$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a+2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{a+4} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \right) = \\ = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{a+1}{a+2} x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)} x^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

6) Jak już wiemy [378, 1) (a)], szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich wartości x . Oznaczymy jego sumę przez $E(x)$.

Zastępując tutaj x przez y otrzymujemy analogiczny szereg o sumie równej $E(y)$. Iloczyn Cauchy'ego obydwu szeregów ma wyraz ogólny

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Tak więc otrzymujemy dla nie znanej nam na razie funkcji $E(x)$ związek

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$$

słuszny dla dowolnych x i y . Później pozwoli nam to ustalić, że $E(x)$ jest funkcją wykładniczą [439, 3]; porównaj też 75, 1°].

7) Za pomocą kryterium d'Alemberta łatwo jest stwierdzić, że szeregi

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \dots$$

są bezwzględnie zbieżne dla każdego x . Przez mnożenie szeregów można udowodnić związki

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y),$$

$$S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y).$$

Ponieważ funkcje $S(x)$ i $C(x)$ nie są niczym innym, jak funkcjami $\sin x$ i $\cos x$ [404] poznajemy w tych wzorach znane twierdzenie o cosinusie i sinusie sumy.

8) Rozpatrzmy wreszcie szereg

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

o wyrazach nieujemnych, który jest zbieżny dla $x > 1$ [365, 2]) i przedstawia funkcję ζ Riemanna. Obliczymy jej kwadrat mnożąc szereg przez siebie.

Wszelkie możliwe iloczyny

$$\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{m^x} = \frac{1}{(n \cdot m)^x}$$

uporządkujemy teraz w ten sposób, aby wyrazy z tą samą liczbą $k = n \cdot m$ w mianowniku stały obok siebie, a następnie pododajemy je. Każdej liczbie k będzie odpowiadało tyle różnych wyrazów, ile dzielników ma liczba k , tzn. $\tau(k)$. A więc ostatecznie

$$[\zeta(x)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^x}.$$

391. Ogólne twierdzenie z teorii granic. Dla uproszczenia wykładu, w najbliższym ustępie i w następnych, udowodnimy tu pewne twierdzenie z teorii granic dające daleko idące uogólnienie znanych twierdzeń Cauchy'ego i Stolza [33]. Twierdzenie to należy do Toeplitza. Udowodnimy je w dwóch krokach.

I. *Załóżmy, że współczynniki t_{nm} ($1 \leq m \leq n$) nieskończoności macierzy trójkątnej*

$$(15) \quad \begin{matrix} t_{11} \\ t_{21} \ t_{22} \\ t_{31} \ t_{32} \ t_{33} \\ \dots \dots \dots \\ t_{n1} \ t_{n2} \ t_{n3} \dots t_{nn} \\ \dots \dots \dots \end{matrix}$$

czynią zadość dwóm warunkom:

(a) elementy stojące w dowolnej kolumnie dążą do zera:

$$t_{nm} \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{m ustalone});$$

(b) sumy bezwzględnych wartości elementów dowolnego wiersza są wszystkie wspólnie ograniczone jedną i tą samą stałą:

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \dots + |t_{nn}| \leq K \quad (K = \text{const}).$$

Wówczas, jeśli $\{x_n\}$ jest ciągiem dążącym do zera, to dąży także do zera ciąg o wyrazie ogólnym

$$x'_n = t_{n1} x_1 + t_{n2} x_2 + \dots + t_{nn} x_n,$$

utworzony z wyrazów ciągu wyjściowego za pomocą współczynników macierzy (15).

Dowód. Do danego $\varepsilon > 0$ znajdzie się takie m , że dla $n > m$ będzie $|x_n| < \varepsilon/2K$. Korzystając z (b) otrzymamy dla tych n nierówność

$$|x'_n| < |t_{n1} x_1 + \dots + t_{nm} x_m| + \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Ponieważ m jest tu już ustalone, istnieje — z uwagi na (a) — takie $N > m$, że dla $n > N$ pierwszy składnik po prawej stronie jest też mniejszy od $\varepsilon/2$, a zatem $|x'_n| < \varepsilon$, c.b.d.o.

II. Niech współczynniki t_{nm} spełniają oprócz warunków (a) i (b) dodatkowy warunek

$$(c) \quad T_n = t_{n1} + t_{n2} + \dots + t_{nn} \rightarrow 1, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty \text{ (1).}$$

Wówczas, jeżeli $x_n \rightarrow a$ (a — skończone), to także

$$x'_n = t_{n1} x_1 + t_{n2} x_2 + \dots + t_{nn} x_n \rightarrow a.$$

Dowód. Wyrażenie dla x'_n można oczywiście napisać w postaci

$$x'_n = t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \dots + t_{nn}(x_n - a) + T_n a.$$

Stosując twierdzenie I do ciągu $x_n - a$ dążącego do zera i opierając się na założeniu (c), otrzymujemy bezpośrednio żądany wniosek.

1º Twierdzenie Cauchy'ego [33] otrzymujemy stąd przyjmując

$$t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{nn} = \frac{1}{n}.$$

Spełnianie warunków (a), (b), (c) jest oczywiste.

2º Przejedźmy do twierdzenia Stolza [33] zachowując dane oznaczenia. Mamy więc dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$, z których drugi dąży monotonicznie do $+\infty$.

Założymy, że

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow a \quad (n = 1, 2, \dots, x_0 = y_0 = 0)$$

i zastosujemy do tego ciągu twierdzenie II przyjmując $t_{nm} = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$. Spełnianie warunków (a), (b),

(c) łatwo jest sprawdzić. Otrzymujemy wniosek, że

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{m=1}^n t_{nm} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} \rightarrow a,$$

c.b.d.o.

Przytoczymy kilka pozytycznych wniosków z twierdzenia Toeplitza.

3º Niech będą dane dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ zbieżne do zera, przy czym drugi z ciągów spełnia warunek

$$|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| \leq K \quad (n = 1, 2, 3, \dots; \quad K = \text{const}).$$

Wówczas także

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1 \rightarrow 0.$$

Dowód otrzymuje się przez zwykłe zastosowanie twierdzenia I dla $t_{nm} = y_{n-m+1}$.

4º Jeżeli $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, to

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow ab.$$

Niech będzie najpierw $a = 0$. Należy udowodnić, że $z_n \rightarrow 0$. Wynika to wprost z wniosku 3º, jeżeli zastąpi się w nim y_n przez y_n/n . Warunek nakładany tam na y_n łatwo jest sprawdzić, jeśli uwzględnimy, że y_n jest tu ograniczone, $|y_n| < K$.

(1) W zastosowaniach jest zazwyczaj $T_n \equiv 1$.

Przechodząc do przypadku ogólnego, napiszemy z_n w postaci

$$z_n = \frac{(x_1 - a) y_n + (x_2 - a) y_{n-1} + \dots + (x_n - a) y_1}{n} + a \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Pierwszy składnik dąży tu do zera na mocy tego, co udowodniliśmy przed chwilą. Drugi składnik dąży do ab , bo na mocy twierdzenia Cauchy'ego (1°) $\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \rightarrow b$.

5° Jeżeli $x_n \rightarrow a$, to także

$$x'_n = \frac{1 \cdot x_0 + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \dots + \binom{n}{n} x_n}{2^n} \rightarrow a \text{ (1)}$$

Stosujemy twierdzenie II, przyjmując

$$t_{nm} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

Warunek (a) jest spełniony, bo $\binom{n}{m} < n^m$, a $\frac{n^m}{2^n} \rightarrow 0$ [32, 9)]. Spełnienie warunków (b) i (c) wynika bezpośrednio z tego, że

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = 2^n.$$

6° Jeżeli $x_n \rightarrow a$ i $z = \text{const}$ ($z > 0$), to także

$$x' = \frac{1 \cdot x_0 + \binom{n}{1} zx_1 + \binom{n}{2} z^2 x_2 + \dots + \binom{n}{n} z^n x_n}{(1+z)^n} \rightarrow a.$$

Jest to bezpośrednie uogólnienie poprzedniego twierdzenia i dowodzi się analogicznie. Można też ustawić współczynniki w dowolnej kolejności, a zatem jest też

$$x''_n = \frac{z^n \cdot x_0 + \binom{n}{1} z^{n-1} x_1 + \binom{n}{2} z^{n-2} x_2 + \dots + 1 \cdot x_n}{(1+z)^n} \rightarrow a.$$

392. Dalsze twierdzenia o mnożeniu szeregów. Jak wykazał F. Mertens wynik Cauchy'ego można rozszerzyć na ogólniejszy przypadek.

TWIERDZENIE MERTENSA. Jeżeli szeregi (A) i (B) są zbieżne, przy czym przynajmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie, to zachodzi równość (13).

Dowód. Niech będzie zbieżny bezwzględnie na przykład szereg (A), tzn. zbieżny jest szereg (A*). Łącząc wyrazy n -tej przekątnej, przyjmiemy

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1,$$

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n;$$

należy więc wykazać, że $C_n \rightarrow AB$.

Przede wszystkim łatwo widać, że

$$(16) \quad C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_{n-1} B_2 + a_n B_1.$$

(1) Oczywiście nie jest istotne to, że numerację wyrazów ciągu zaczynamy od 0, a nie od 1.

Jeżeli przyjmiemy $B_m = B - \beta_m$, gdzie reszta $\beta_m \rightarrow 0$, gdy $m \rightarrow \infty$, to sumę C_n możemy napisać w postaci

$$C_n = A_n B - \gamma_n, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_{n-1} \beta_2 + a_n \beta_1.$$

Ponieważ $A_n \rightarrow A$, całe zagadnienie redukuje się do dowodu, że $\lim \gamma_n = 0$. To z kolei wynika od razu z 3 ustępu 391 (dla $x_n = \beta_n$ i $y_n = a_n$), jeśli weźmie się pod uwagę, że

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| < A^*,$$

gdzie A^* jest sumą zbieżnego z założenia szeregu (A^*) .

Jako przykład zastosowania twierdzenia rozpatrzmy jeszcze raz zadanie 4) z ustępu 390. Wspomniana tam równość zachodzi także na końcu $x = \pm R$ przedziału zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, jeżeli $R < 1$ i szereg jest w tym końcu w ogóle zbieżny (chociażby warunkowo).

Zauważmy, że gdyby oba szeregi (A) i (B) były tylko warunkowo zbieżne, to nie można by już ręczyć za zbieżność szeregu (13). Dla przykładu pomóżmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

zbieżny — jak wiemy — warunkowo [382, 2)] przez siebie samego. W tym przypadku

$$c_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{n-i+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right).$$

Każdy ze składników w nawiasie jest większy od $1/n$, wobec czego $|c_n| > 1$ (dla $n > 1$) i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest rozbieżny [364, 5°].

Jeśli jednak postąpimy analogicznie z również warunkowo zbieżnym [(382, 1)] szeregiem

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots,$$

to okaże się, że

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^{n-1} \left[\frac{2}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{i(n-i+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Tutaj c_n dąży do 0 malejąc monotonicznie, gdy n rośnie, a więc na mocy twierdzenia Leibniza [381] szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ będzie jednak zbieżny. Jaka jest suma tego szeregu? Czy jest równa $(\ln 2)^2$? Na te pytania daje odpowiedź

TWIERDZENIE ABELA. Jeżeli tylko dla dwóch zbieżnych szeregów (A) i (B) ich iloczyn w postaci Cauchy'ego jest zbieżny, to suma C tego iloczynu jest równa $A \cdot B$.

Dowód. Zachowujemy poprzednie oznaczenia. Z (16) otrzymujemy łatwo

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1.$$

Podzielmy tę równość stronami przez n i przejdźmy do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$. Ponieważ $C_n \rightarrow C$, więc na mocy twierdzenia Cauchy'ego [33, patrz też 391, 1°] także i średnia arytmetyczna

$$\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C.$$

Z drugiej strony, na mocy 391, 4° (gdy przyjmiemy $x_n = A_n, y_n = B_n$) jest

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB.$$

Stąd $C = AB$, c.b.d.o.

§ 5. Szeregi iterowane i podwójne

393. Szeregi iterowane. Niech będzie dany nieskończony zbiór liczb

$$a_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots)$$

zależnych od dwóch wskaźników naturalnych. Ustawmy je w postaci nieskończonej tablicy prostokątnej

(1)

	→
	$a_1^{(1)} \ a_2^{(1)} \ a_3^{(1)} \ \dots \ a_i^{(1)} \ \dots$
	$a_1^{(2)} \ a_2^{(2)} \ a_3^{(2)} \ \dots \ a_i^{(2)} \ \dots$
	$a_1^{(3)} \ a_2^{(3)} \ a_3^{(3)} \ \dots \ a_i^{(3)} \ \dots$

	$a_1^{(k)} \ a_2^{(k)} \ a_3^{(k)} \ \dots \ a_i^{(k)} \ \dots$

Tego rodzaju tablica nazywa się *nieskończoną macierzą prostokątną o dwóch wejściach*.

Zatrzymamy się teraz na pewnym pojęciu związanym z macierzami postaci (1), mianowicie na pojęciu *szeregu iterowanego*.

Jeśli w nieskończonej macierzy prostokątnej zsumujemy każdy wiersz z osobna, to otrzymamy nieskończony ciąg szeregów postaci

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Sumując ten ciąg powtórnie, otrzymamy wyrażenie

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Otrzymany symbol nosi nazwę *szeregu iterowanego*. Jeśli zastąpimy wiersze kolumnami, tzn. będziemy sumowali wyrazy naszej macierzy nieskończonej według kolumn, to otrzymamy drugi szereg iterowany

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Szereg iterowany (3) nazywa się *zbieżny*, jeżeli po pierwsze, zbieżne są wszystkie szeregi (2) utworzone z wierszy (ich sumy oznaczymy odpowiednio przez $A^{(k)}$) i po drugie, zbieżny jest szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}.$$

Suma tego szeregu będzie sumą szeregu iterowanego (3). Łatwo jest przystosować tę definicję także do szeregu (4).

Elementy macierzy (1) można na wiele sposobów uporządkować w zwykły ciąg

$$(5) \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_r, \dots$$

i utworzyć dla niego zwykły szereg

$$(6) \quad \sum_{r=1}^{\infty} u_r.$$

Mówiliśmy już o tym w związku z macierzami specjalnej postaci (7) w ustępie 389. Na odwrót, jeżeli mamy zwykły ciąg (5), to rozbijając jego wyrazy (bez uwzględnienia porządku) na nieskończonie wiele nieskończonych grup, można go przedstawić na wiele sposobów w postaci macierzy o dwóch wejściach (1) i z tej macierzy utworzyć szereg iterowany (3). Powstaje naturalne pytanie, jaki jest związek między szeregiem (6) i (3) składającymi się z tych samych wyrazów.

TWIERDZENIE 1. Jeżeli szereg (6) jest zbieżny bezwzględnie i ma sumę U , to jakkolwiek ustawiemy jego wyrazy w postaci macierzy (1), szereg iterowany (3) jest zbieżny i ma tę samą sumę U .

Dowód. Szereg

$$(6^*) \quad \sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$$

jest z założenia zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez U^* . Jest więc przede wszystkim dla dowolnych n i k

$$\sum_{i=1}^n |a_i^{(k)}| \leq U^*,$$

skąd wynika zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ [365], a zatem także i zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ dla każdego k [377].

Następnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdzie się takie r_0 , że

$$(7) \quad \sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| < \varepsilon,$$

a więc tym bardziej

$$(8) \quad \left| \sum_{r=r_0+1}^{\infty} u_r \right| = \left| U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| < \varepsilon.$$

Wyrazy u_1, u_2, \dots, u_{r_0} (6) są zawarte w pierwszych n wierszach i pierwszych m kolumnach macierzy (1), jeżeli tylko n i m są dostatecznie duże, powiedzmy jeśli $n > n_0$, $m > m_0$. Wówczas dla takich n i m wyrażenie

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r$$

jest sumą grupy wyrazów u_r o wskaźnikach większych od r_0 , a zatem na mocy (7) jest

co do wartości bezwzględnej mniejsze od ε . Przechodząc do granicy przy $m \rightarrow \infty$, otrzymujemy dla $n > n_0$ nierówność

$$\left| \sum_{k=1}^n A^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| \leq \varepsilon$$

co wraz z (8) daje

$$\left| \sum_{k=1}^n A^{(k)} - U \right| < 2\varepsilon,$$

skąd wynika zbieżność szeregu iterowanego (3) właśnie do sumy U .

Uwaga. Niektóre wiersze macierzy (1) mogą zawierać tylko skończoną liczbę wyrazów. Wynik nasz rozciąga się łatwo na ten przypadek.

Jeśli przypomnimy sobie, że w 386 rozbijaliśmy wyrazy zwykłego szeregu tylko na skończone grupy, nie zmieniając przy tym porządku wyrazów, to zobaczymy, że twierdzenie 1 wypowiada daleko idące uogólnienie własności łączności i przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Twierdzenie odwrotne zachodzi tylko przy wzmocnionych założeniach o szeregu iterowanym.

TWIERDZENIE 2. *Niech będzie dany szereg iterowany (3). Jeżeli po zastąpieniu jego wyrazów ich wartościami bezwzględnymi otrzymuje się szereg zbieżny, to zbieżny jest nie tylko szereg (3), ale także zwykły szereg (6) składający się z tych samych co (3) wyrazów, ustawionych w dowolnym porządku, i jego suma jest równa sumie szeregu (3).*

Dowód. Z założenia szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} |a_t^{(k)}|$$

jest zbieżny, oznaczmy jego sumę przez A^* . Dla dowolnych n i m jest

$$\sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^n |a_t^{(k)}| \leq A^*.$$

Weźmy teraz dowolną sumę częściową szeregu (6*)

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_r|.$$

Dla dostatecznie dużych n i m wyrazy u_1, u_2, \dots, u_r będą zawarte w n pierwszych wierszach i m pierwszych kolumnach macierzy (1). Z (9) wynika więc, że

$$U_r^* < A^*,$$

a zatem szereg (6*) jest zbieżny, tzn. szereg (6) jest zbieżny bezwzględnie.

Do zakończenia dowodu pozostaje już tylko zastosować twierdzenie 1.

Ponieważ wszystko, co zostało powiedziane o szeregu iterowanym (3) jest oczywiście słuszne także i dla szeregu (4), otrzymujemy jako wniosek z udowodnionych twierdzeń, ważne, często używane twierdzenie (1).

(1) W literaturze niemieckiej nosi on nazwę grosser Umordnungssatz.

TWIERDZENIE 3. *Dana jest macierz (1). Jeżeli po zastąpieniu wyrazów szeregu (3) ich wartościami bezwzględnymi otrzymuje się zbieżny szereg, to obydwa szeregi iterowane (3) i (4) są zbieżne i mają tę samą sumę:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

394. Szeregi podwójne. Z nieskończoną macierzą prostokątną (1) jest związane także pojęcie *szeregu podwójnego*. Tak nazywa się symbol

$$\begin{aligned}
 & a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \dots + a_i^{(1)} + \dots \\
 & + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \dots + a_i^{(2)} + \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & + a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + \dots + a_i^{(k)} + \dots \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}
 \end{aligned}$$

(10)

Ograniczając się do m pierwszych kolumn i n pierwszych wierszy, rozpatrzymy skończoną sumę

$$A_m^{(n)} = \sum_{\substack{i=m, k=n \\ i, k=1}} a_i^{(k)},$$

która się nazywa *sumą częściową* danego szeregu podwójnego. Będziemy zwiększać liczby m i n do nieskończoności, ale niezależnie od siebie. Skończona lub nieskończona granica

$$A = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m^{(n)}$$

nazywa się sumą szeregu podwójnego; piszemy

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Jeżeli szereg (10) ma sumę skończoną, to nazywa się *zbieżny*, w przeciwnym razie — gdy nie ma sumy lub ma sumę nieskończoną — *rozbieżny*.

Wróćmy na przykład do macierzy (7) z poprzedniego paragrafu, o wyrazie ogólnym

$$c_i^{(k)} = a_i \cdot b_k.$$

W tym przypadku suma częściowa jest oczywiście równa (jeżeli zachowamy dawne oznaczenia)

$$C_m^{(n)} = A_m B_n,$$

a więc szereg podwójny odpowiadający tej macierzy jest zawsze zbieżny i ma sumę

$$C = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m B_n = AB \quad (1)$$

⁽¹⁾ Jeżeli zatem przedstawimy iloczyn dwóch szeregów zbieżnych w postaci szeregu podwójnego, to sumą tego szeregu będzie zawsze AB . Trudność polegała na dowodzie tego samego dla iloczynu przedstawionego zwykłym szeregiem.

Na szeregi podwójne przenoszą się łatwo twierdzenia [364, 3° i 4°] o mnożeniu wyrazów szeregu zbieżnego przez stałą i o dodawaniu i odejmowaniu szeregów wyraz za wyrazem, pozostawiamy czytelnikowi przeprowadzenie odpowiedniego rozumowania.

Tak samo, na to by szereg podwójny był zbieżny, potrzeba, by wyraz ogólny dążył do zera:

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} a_i^{(k)} = 0$$

[porównaj 364, 5°]. Widać to od razu z wzoru

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)}.$$

Naturalne jest zestawienie szeregu podwójnego (10) z szeregami iterowanymi (3) i (4) rozpatrzonymi wyżej. Ponieważ

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} \right\},$$

więc przechodząc do granicy przy ustalonym n i $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy (przy założeniu, że szeregi utworzone z wierszy są zbieżne)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^n A^{(k)}.$$

Teraz jest jasne, że suma szeregu iterowanego (3) nie jest niczym innym jak granicą iterowaną

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} A_m^{(n)}.$$

Zagadnienie równości sum szeregów iterowanych (3) i (4) jest przypadkiem szczególnym zagadnienia równości dwóch granic iterowanych.

Stosując w rozpatrywanym przypadku ogólne twierdzenie z ustępu 168 o granicy podwójnej i granicach iterowanych ⁽¹⁾ otrzymujemy następujący wynik:

TWIERDZENIE 4. Jeżeli: 1) jest zbieżny szereg podwójny (10) i 2) są zbieżne wszystkie szeregi utworzone z wierszy, to jest także zbieżny szereg iterowany (3) i ma tę samą sumę, co szereg podwójny:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i, k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla szeregu iterowanego (4).

Zagadnienie zbieżności szeregu (10) rozwiązuje się prosto w przypadku szeregu dodatniego, tzn. szeregu o wyrazach nieujemnych: $a_i^{(k)} \geq 0$.

(1) Tutaj m i n odgrywają rolę zmiennych niezależnych, a suma częściowa $A_m^{(n)}$ rolę funkcji tych zmiennych.

TWIERDZENIE 5. Jeżeli $a_i^{(k)} \geq 0$, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by szereg (10) był zbieżny, jest, by jego sumy częściowe były ograniczone.

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista. Udowodnimy, że jest on dostateczny. Niech $A_m^{(n)} \leq L$. Weźmy kres gorny zbioru sum $A_m^{(n)}$:

$$A = \sup \{A_m^{(n)}\}$$

i wykażmy, że jest on sumą naszego szeregu.

Niech dane będzie dowolne $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego istnieje taka suma częściowa $A_{m_0}^{(n_0)}$, że

$$A_{m_0}^{(n_0)} > A - \varepsilon.$$

Jeśli weźmiemy $m > m_0$ i $n > n_0$, to będzie tym bardziej

$$A_m^{(n)} > A - \varepsilon,$$

bo $A_m^{(n)}$ oczywiście rośnie, gdy rosną oba wskaźniki m i n .

Skoro dowolna suma częściowa nie przewyższa A , możemy napisać, że

$$|A_m^{(n)} - A| < \varepsilon \quad \text{dla } m > m_0 \quad \text{i} \quad n > n_0,$$

a to właśnie znaczy, że

$$A = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_m^{(n)},$$

czyli, że szereg (10) jest zbieżny.

Na podstawie tego twierdzenia można otrzymać twierdzenie o porównywaniu szeregów podwójnych analogiczne do twierdzenia 1 z ustępu 366; pozostawiamy to do wykonania czytelnikowi.

Rozpatrzmy teraz szereg podwójny utworzony z macierzy, w której nie wszystkie wyrazy są nieujemne. Oczywiście, podobnie jak dla szeregów zwykłych możemy nie rozpatrywać tych przypadków, gdy wszystkie elementy macierzy są ujemne lub gdy macierz zawiera tylko skończoną liczbę elementów dodatnich, lub skończoną liczbę elementów ujemnych, gdyż wszystkie te przypadki redukują się bezpośrednio do rozpatrywanego przed chwilą przypadku szeregów dodatnich. Założymy wobec tego, że w rozpatrywanej macierzy (1), a więc i w szeregu (10), jest nieskończoność wiele zarówno wyrazów dodatnich jak i ujemnych.

Obok macierzy (1) utworzymy jeszcze macierz wartości bezwzględnych jej elementów

$$\overrightarrow{\begin{array}{c} |a_1^{(1)}| |a_2^{(1)}| \dots |a_i^{(1)}| \dots \\ |a_1^{(2)}| |a_2^{(2)}| \dots |a_i^{(2)}| \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ |a_1^{(k)}| |a_2^{(k)}| \dots |a_i^{(k)}| \dots \\ \dots \dots \dots \dots \end{array}}$$

i dla niej utworzymy szereg podwójny

$$(10^*) \quad \sum_{t, k=1}^{\infty} |a_t^{(k)}|.$$

Podobnie jak twierdzenie z ustępu 377 o szeregach zwykłych zachodzi także tutaj następujące:

TWIERDZENIE 6. *Jeśli jest zbieżny szereg (10^*) utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu (10) , to dany szereg jest także zbieżny.*

Dowód. Przedstawmy $a_i^{(k)}$ w postaci

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)},$$

gdzie

$$p_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| + a_i^{(k)}}{2}, \quad q_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| - a_i^{(k)}}{2}.$$

Ponieważ $p_i^{(k)} \leq |a_i^{(k)}|$, $q_i^{(k)} \leq |a_i^{(k)}|$, przeto ze zbieżności szeregu podwójnego (10^*) wynika zbieżność szeregów podwójnych

$$\sum_{t, k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P \quad i \quad \sum_{t, k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q.$$

Ale wówczas jest zbieżny także szereg

$$\sum_{t, k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{t, k=1}^{\infty} (p_i^{(k)} - q_i^{(k)})$$

i ma sumę

$$A = P - Q.$$

Jeżeli wraz z szeregiem (10) jest także zbieżny szereg (10^*) , to szereg (10) nazywa się *bezwzględnie zbieżny*. Jeżeli zaś szereg (10) jest zbieżny, a szereg (10^*) rozbieżny, to szereg (10) nazywa się *zbieżny warunkowo*.

Udowodnimy teraz twierdzenie o związku między szeregiem podwójnym (10) i zwykłym szeregiem (6) składającym się z tych samych wyrazów. Jest ono analogiczne do twierdzeń 1 i 2.

TWIERDZENIE 7. *Niech będą dane: szereg podwójny (10) i szereg zwykły (6) złożone z tych samych wyrazów. Wówczas zbieżność bezwzględna jednego z nich pociąga za sobą również bezwzględną zbieżność drugiego i równość ich sum.*

Dowód. Założymy najpierw, że jest zbieżny bezwzględnie szereg (10) , tzn. szereg (10^*) jest zbieżny. Sumę szeregu (10^*) oznaczamy przez A^* . Biorąc dowolną liczbę naturalną r utworzymy sumę częściową

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_r|$$

szeregu (6^*) . Tak samo jak w dowodzie twierdzenia 2, łatwo stwierdzić nierówność $U_r^* < A^*$, a wraz z tym zbieżność bezwzględną szeregu (6) .

Niech teraz będzie zbieżny bezwzględnie szereg zwykły (6), tzn. szereg (6*) jest zbieżny. Sumę jego oznaczamy przez U^* . Dla każdej sumy częściowej

$$A_m^{*(n)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |a_i^{(k)}|$$

szeregu (10*) znajdzie się tak duże r , że wszystkie składniki tej sumy częściowej będą zawarte wśród pierwszych r wyrazów szeregu (6*), a więc będzie

$$A_m^{*(n)} < U^*.$$

W takim razie — na mocy twierdzenia 5 — szereg podwójny (10*) jest zbieżny, a więc szereg (10) jest bezwzględnie zbieżny.

Aby wreszcie obliczyć sumę U szeregu (6), można — z uwagi na jego zbieżność bezwzględną — ustawić jego wyrazy w dowolnym porządku [387] wygodnym do tego celu. Ustawimy je kwadratami według schematu (1). Jeżeli wówczas połączymy wyrazy, którymi jeden kwadrat różni się od drugiego, to otrzymamy

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(n)} = A,$$

co kończy dowód.

Zestawiając ze sobą twierdzenia 1, 2 i 7 wysłowimy na zakończenie następujący wniosek:

Wniosek. *Niech macierz (1) i ciąg (5) składają się z tych samych wyrazów. Wówczas następujące szeregi: szereg podwójny (10), szereg iterowany (3) i (4) i wreszcie szereg zwykły (6) są wszystkie zbieżne bezwzględnie i mają tę samą sumę, jeżeli przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny.*

W przypadku szeregów dodatnich (tzn. gdy $a_i^{(k)} \geq 0$) wystarczy oczywiście zbieżność jednego ze wskazanych szeregów na to, by wszystkie cztery były zbieżne i miały tę samą sumę.

395. Przykłady

1) Ciekawy przykład daje macierz ($0 < x < 1$)

x	$-x^2$	x^2	$-x^3$	x^3	...
$x(1-x)$	$-x^2(1-x^2)$	$x^2(1-x^2)$	$-x^3(1-x^3)$	$x^3(1-x^3)$...
$x(1-x)^2$	$-x^2(1-x^2)^2$	$x^2(1-x^2)^2$	$-x^3(1-x^3)^2$	$x^3(1-x^3)^2$...
.....

Tutaj szeregi utworzone z wierszy są bezwzględnie zbieżne i mają odpowiednio sumy równe $x, x(1-x), x(1-x)^2, \dots$ Szereg utworzony z tych sum jest też bezwzględnie zbieżny; jego suma jest równa 1. Tymczasem drugi szereg iterowany nie jest zbieżny, bo szeregi utworzone z kolumn mają sumy równe na przemian +1 i -1.

Fakt ten wcale nie jest sprzeczny z twierdzeniem 2, bo dla macierzy wartości bezwzględnych żaden z szeregów iterowanych nie jest zbieżny. Widzimy tylko, że założenie bezwzględnej zbieżności szeregów utworzonych z wierszy (kolumn) i bezwzględnej zbieżności szeregu utworzonego z ich sum nie może zastąpić założenia, by był zbieżny szereg iterowany dla macierzy wartości bezwzględnych.

2) Przytoczymy tu słynny paradoks J. Bernoulliego. Rozpatrzmy macierz dodatnią (brakujące wyrazy można zastąpić zerami)

$\frac{1}{1 \cdot 2}$	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	$\frac{1}{3 \cdot 4}$	$\frac{1}{4 \cdot 5}$	\dots
$\frac{1}{2 \cdot 3}$	$\frac{1}{3 \cdot 4}$	$\frac{1}{4 \cdot 5}$	\dots	
$\frac{1}{3 \cdot 4}$	$\frac{1}{4 \cdot 5}$	\dots		
$\frac{1}{4 \cdot 5}$	\dots			
\dots				

i przyrównamy do siebie sumy dwóch odpowiadających jej szeregów iterowanych. Jeśli będziemy najpierw sumowali według wierszy, otrzymamy sumy: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ [25, 9], z których utworzy się szereg harmoniczny; sumę jego oznaczamy przez s . Sumując najpierw według kolumn, z których każda zawiera tylko skończoną liczbę wyrazów, otrzymamy sumy $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$; z nich utworzy się szereg harmoniczny bez pierwszego wyrazu, co da w sumie $s - 1$. Tak więc $s = s - 1$.

W rzeczywistości ten rzekomy paradoks jest tylko dowodem nie wprost tego faktu, że suma szeregu harmonicznego nie może być skończona, tzn. że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

3) Niech q przebiega wszelkie potęgi o podstawach naturalnych i wykładnikach naturalnych większych od 1 i przy tym każdą tylko jeden raz. Udowodnić, że

$$G = \sum_q \frac{1}{q-1} = 1$$

(Ch. Goldbach).

Jeżeli m przybiera wartości naturalne większe od 1 nie będące potęgami, to

$$\begin{aligned} G &= \sum_m \frac{1}{m^2-1} + \sum_m \frac{1}{m^3-1} + \dots = \sum_m \left\{ \frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^3-1} + \dots \right\} = \\ &= \sum_m \left\{ \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \dots \right) + \dots \right\} = \\ &= \sum_m \left\{ \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \dots \right) + \dots \right\} = \\ &= \sum_m \left\{ \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m^2-1)} + \frac{1}{m^3(m^3-1)} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Stąd

$$G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

gdzie n przebiega już tym razem wszystkie wartości naturalne poczynając od 2, a więc rzeczywiście $G = 1$ [25, 9].

Uzasadnienie tego, z powołaniem się na udowodnione twierdzenia, pozostawiamy czytelnikowi

Ciekawe jest zestawienie tego wyniku z wynikiem J. Steinera

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\alpha} \frac{1}{m^k} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

Tutaj potęgi mogą się powtarzać.

4) Rozpatrzmy macierz o wyrazie ogólnym

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)\dots(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\dots(k+i)}.$$

Korzystając (dla $\alpha = 0$ i $p = k$) ze związku

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\dots(\alpha+p)},$$

znalezionego w 4) ustępu 363 łatwo zsumujemy wyrazy k -go wiersza:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2}.$$

Stąd suma szeregu iterowanego wynosi

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wobec symetrii wyrażenia $a_i^{(k)}$ względem i i k , drugi szereg iterowany jest identyczny z pierwszym i przyrównanie sum nie da nam nic nowego.

Przekształcimy teraz macierz w taki sposób: w n -tym wierszu zachowamy $m-1$ wyrazów dawnych, zamiast m -tego wyrazu postawimy sumę r_m wszystkich wyrazów m -tego wiersza od m -tego począwszy, pozostałe zaś wyrazy odrzucimy.

Dla nowej macierzy

r_1						
$a_1^{(2)}$	r_2					
$a_1^{(3)}$	$a_2^{(3)}$	r_3				
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$a_1^{(m)}$	$a_2^{(m)}$	$a_3^{(m)}$	\dots	$a_{m-1}^{(m)}$	r_m	
$a_1^{(m+1)}$	$a_2^{(m+1)}$	$a_3^{(m+1)}$	\dots	$a_{m-1}^{(m+1)}$	$a_m^{(m+1)}$	r_{m+1}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

sumy wierszy, a wraz z nimi i suma pierwszego szeregu iterowanego, pozostają bez zmiany [p. (12)]. Aby zsumować kolumny, obliczymy najpierw

$$r_m = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\dots(i+m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)\dots(2m-1+n)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\dots(2m-1)}.$$

Tutaj skorzystaliśmy znów z wzoru (11) dla $\alpha = m-1, p = m$. Suma pozostałych wyrazów m -tej kolumny wynosi

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\dots(i+m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\dots(2m+1)} = \frac{(m-1)!}{m(m+1)\dots2m}$$

(w (11) bierzemy $\alpha = p = m$). Ostatecznie okazuje się, że suma wyrazów m -tej kolumny jest równa

$$3 \cdot \frac{(m-1)!}{m(m+1)\dots(2m-1)2m} = 3 \cdot \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}.$$

Przyrównując na mocy twierdzenia 3 sumy obydwu szeregów iterowanych otrzymujemy ciekawą równość

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}.$$

Ponieważ szereg po prawej stronie jest bardzo szybko zbieżny, ułatwia on przybliżone obliczenie sumy szeregu po lewej stronie. Co więcej, zobaczymy dalej [440, 7], że wyprowadzony związek pozwala wyrazić sumę pierwszego szeregu w postaci skończonej; jest ona równa $\frac{1}{6}\pi^2$. Wynik ten należy do Eulera.

5) Zatrzymamy się na szeregu Lambert'a

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k},$$

ograniczając się do x spełniających nierówność $|x| < 1$. Widzieliśmy [385, 5)], że przy tym założeniu szereg Lambert'a jest zbieżny dla tych samych wartości x co szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Załóżmy też, że promień zbieżności tego szeregu $R > 0$ [379] i będziemy uważali, że $|x| < R$.

Oczywiście

$$\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + \dots + x^{tk} + \dots$$

Utwórzmy teraz macierz z tych wyrazów pomnożonych przez a_k umieszczając jednakowe potęgi x w jednej kolumnie (puste miejsca można zapisać zerami)

a_1x	a_1x^2	a_1x^3	a_1x^4	a_1x^5	a_1x^6	a_1x^7	a_1x^8	a_1x^9	a_1x^{10}	\dots
a_2x^2		a_2x^4		a_2x^6		a_2x^8		a_2x^{10}		\dots
	a_3x^3			a_3x^6			a_3x^9			\dots
		a_4x^4				a_4x^8				\dots
			a_5x^5					a_5x^{10}		\dots
				a_6x^6						\dots
					a_7x^7					\dots
						a_8x^8				\dots
							a_9x^9			\dots
								$a_{10}x^{10}$		\dots
										\dots

Szereg iterowany sumowany według wierszy ma właśnie sumę $\varphi(x)$. Ponieważ szereg potęgowy, a wraz z nim szereg Lambert'a, jest zbieżny po zastąpieniu x przez $|x|$ i a_k przez $|a_k|$, można zastosować

twierdzenie 3 i sumować według kolumn. Otrzymamy rozwinięcie $\varphi(x)$ na szereg potęgowy

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \text{gdzie } \alpha_n = \sum_{k|n}^{\infty} a^k.$$

Symbol $k|n$ oznacza, że suma jest rozcięgnięta tylko na dzielniiki k liczby n .

Biorąc na przykład $a_k = 1$ lub $a_k = k$ ⁽¹⁾ mamy odpowiednio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot x^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n,$$

gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników n , a $\sigma(n)$ ich sumę.

6) Ustawimy te same wyrazy inaczej, bez luk:

$a_1 x$	$a_1 x^2$	$a_1 x^3$	$a_1 x^4$	\dots
$a_2 x^2$	$a_2 x^4$	$a_2 x^6$	$a_2 x^8$	\dots
$a_3 x^3$	$a_3 x^6$	$a_3 x^9$	$a_3 x^{12}$	\dots
$a_4 x^4$	$a_4 x^8$	$a_4 x^{12}$	$a_4 x^{16}$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Zachowują się przy tym oczywiście sumy wierszy. Sumy kolumn są równe po kolej $f(x)$, $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(x^4)$, ...

Tak więc otrzymujemy tożsamość

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n),$$

wiączącą φ i f .

Biorąc na przykład $a_k = a^k$, gdzie $|a| < 1$ otrzymujemy

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax},$$

więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n} \quad (|a| < 1, |x| < 1).$$

7) Otrzymany wynik można uogólnić. Niech będą dane dwa szeregi potęgowe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{i} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

Ograniczymy się do wartości x , dla których $|x| < 1$ i obydwa szeregi są bezwzględnie zbieżne.

Utwórzmy macierz elementów $a_n b_m x^{m+n}$. Ponieważ dla $m > 1$ i $n > 1$ zachodzi nierówność $mn > m+n$, więc

$$|a_n b_m x^{m+n}| < |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|.$$

Łatwo stąd wywnioskować, że szereg podwójny odpowiadający tej macierzy, jest bezwzględnie zbieżny. Przyczynając do siebie, na mocy wniosku, sumy szeregów iterowanych, otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

(1) W obu przypadkach $R = 1$, jak łatwo sprawdzić, wystarczy więc po prostu założyć, że $|x| < 1$.

Tożsamość z poprzedniego ćwiczenia otrzymuje się stąd dla $b_m = 1$, tzn. gdy $(x)g = \frac{x}{1-x}$.

8) Szereg

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} x^l y^k,$$

powstaje z pomnożenia szeregów $\sum_{l=0}^{\infty} x^l$ i $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$, które są bezwzględnie zbieżne dla $|x| < 1$ i $|y| < 1$. Dla tych wartości jest też bezwzględnie zbieżny szereg podwójny. Jeżeli $|x| > 1$ lub $|y| > 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności — wyraz ogólny nie dąży do zera. Szereg jest więc rozbieżny. Łatwo sprawdzić bezpośrednio, że szereg jest również rozbieżny, jeżeli $|x| = 1$ lub $|y| = 1$.

9) Rozpatrzmy szereg

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Ten szereg także powstaje z pomnożenia szeregów $\sum_{l=1}^{\infty} 1/i^{\alpha}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\beta}$, które są zbieżne dla $\alpha > 1$ i $\beta > 1$, jest więc przy tych założeniach zbieżny.

Jeżeli natomiast $\alpha < 1$ (lub $\beta < 1$), to szereg podwójny jest na pewno rozbieżny, bo wtedy są rozbieżne szeregi z wierszy (kolumn) (porównaj wniosek w poprzednim ustępie).

10) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^{\sigma}} \quad (\sigma > 0).$$

W tym celu przedstawimy go w postaci zwykłego szeregu, porządkując wyrazy po przekątnych. Wyrazy leżące na jednej przekątnej są równe, łącząc je więc dla wygody, otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Wobec oczywistych nierówności

$$\frac{1}{2} n < n-1 < n,$$

otrzymujemy, dzieląc przez n^{σ} ,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\sigma-1}} < (n-1) \cdot \frac{1}{n^{\sigma}} < \frac{1}{n^{\sigma-1}}.$$

Jasne jest stąd, że otrzymany szereg zwyczajny jest zbieżny dla $\sigma > 2$ i rozbieżny dla $\sigma < 2$. W myśl twierdzenia 7 tak samo jest z szeregiem podwójnym.

11) Rozpatrzmy teraz ogólniejszy szereg

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} a_l^{(k)} \equiv \sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{1}{(Ai^2 + 2Bik + Ck^2)^{\rho}} \quad (\rho > 0),$$

gdzie forma $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ jest z założenia określona dodatnio, a więc $\Delta = AC - B^2 > 0$ oraz $A > 0$ i $C > 0$.

Jeżeli oznaczymy przez L największą z liczb A, B, C , to będzie oczywiście

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 < L(i+k)^2, \quad a_l^{(k)} > \frac{1}{L^{\rho}} \cdot \frac{1}{(i+k)^{2\rho}}.$$

Jasne jest w takim razie na podstawie 10), że dla $\rho < 1$ szereg nasz jest rozbieżny.

Z drugiej strony, jest

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 = \frac{1}{C} [(AC - B^2)i^2 + (Bi + Ck)^2] > \frac{4}{C}i^2,$$

a więc

$$a_i^{(k)} < \frac{C^\rho}{A^\rho} \cdot \frac{1}{i^{2\rho}} \quad \text{i analogicznie} \quad a_i^{(k)} < \frac{A^\rho}{B^\rho} \cdot \frac{1}{k^{2\rho}}.$$

Łatwo stąd wnosić, że

$$a_i^{(k)} < \left(\frac{\sqrt{AC}}{A}\right)^\rho \frac{1}{i^\rho k^\rho}.$$

Zestawiając to z 9) widzimy, że dla $\rho > 1$ rozpatrywany szereg jest zbieżny.

12) W twierdzeniu 4 obok założenia zbieżności szeregu podwójnego zrobiliśmy osobno założenie, że zbieżne są wszystkie szeregi utworzone z wierszy. Następujący prosty przykład pokazuje, że tego drugiego założenia nie można pominąć – nie wynika ono z pierwszego. Szereg podwójny macierzy

1	-1	1	-1	...
-1	1	-1	1	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$...
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$...
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$...
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$...
.....

jest zbieżny i jego suma równa się 0. Tymczasem wszystkie wiersze dają szeregi rozbieżne.

13) Znaleźć sumy następujących szeregów:

$$(a) \sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1} \quad (p > -1); \quad (b) \sum_{m=2, n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2;$$

$$(c) \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln 2; \quad (d) \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{1}{4} \ln 2;$$

$$(e) \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}.$$

Wskazówka. Przejść do szeregu iterowanego sumując najpierw po m . Wykorzystać znane rozwinięcia

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{4} \pi.$$

14) Rozpatrzmy funkcję dwóch zmiennych

$$\varphi(x, z) = e^{-x(z-z^{-1})/2} \quad (z \neq 0).$$

Mnożąc szeregi bezwzględnie zbieżne

$$e^{xz/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i \cdot \frac{z^i}{i!} \quad \text{i} \quad e^{-(xz^{-1})/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^k \frac{(-1)^k}{k!} \cdot z^{-k},$$

otrzymujemy dla tej funkcji szereg podwójny

$$\varphi(x, z) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{i+k} \frac{(-1)^k}{i! k!} z^{i-k},$$

także bezwzględnie zbieżny. Łącząc wyrazy z jednakowymi potęgami z , możemy go przekształcić w szereg iterowany

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot z^n, \quad (1)$$

gdzie dla $n > 0$ jest

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

a dla $n < 0$

$$J_n(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Łatwo zresztą widać, że

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Funkcja $J_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) nazywa się *funkcją Bessela o wskaźniku n* . Funkcje te odgrywają ważną rolę w fizyce matematycznej, mechanice nieba itd. Funkcja $\varphi(x, z)$, z której rozwinięcia funkcje te się biorą, nazywa się *funkcją generującą funkcje Bessela*.

396. Szereg potęgowy dwóch zmiennych; obszar zbieżności. Szeregiem potęgowym dwóch zmiennych x, y nazywa się szereg podwójny postaci

$$(14) \quad \sum_{i, k=0}^{\infty} a_{i, k} x^i y^k,$$

uporządkowany według całkowitych dodatnich potęg zmiennych x i y .

Tak jak to zrobiliśmy w 379 dla zwykłych szeregów potęgowych, postawimy sobie także i tutaj za zadanie zbadać kształt *obszaru zbieżności szeregu* (14), tzn. zbioru $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ tych punktów płaszczyzny, w których szereg ten jest zbieżny.

LEMAT. Jeżeli szereg (14) jest zbieżny w pewnym punkcie $M^*(x^*, y^*)$, którego obie współrzędne są różne od zera, to jest on bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach $M(x, y)$ spełniających nierówności: $|x| < |x^*|, |y| < |y^*|$, tzn. w całym otwartym prostokącie o środku w początku współrzędnych i wierzchołku M^* .

Dowód jest zupełnie analogiczny do dowodu lematu z ustępu 379. Z ograniczoności wyrazów szeregu (14) dla $x = x^*, y = y^*$:

$$|a_{i, k} x^{*i} y^{*k}| \leq L \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

otrzymujemy

$$|a_{i, k} x^i y^k| \leq L \left| \frac{x}{x^*} \right|^i \left| \frac{y}{y^*} \right|^k,$$

jeśli więc tylko $|x| < |x^*|, |y| < |y^*|$, to po prawej stronie mamy wyraz ogólny szeregu zbieżnego [396, 8)]. Stąd wynika bezwzględna zbieżność szeregu (16).

(1) Suma $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ jest z definicji sumą dwóch szeregów

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Będziemy badali tylko takie szeregi, dla których tego rodzaju punkty M^* istnieją. Inne szeregi nie są dla nas ciekawe. Sam charakter lematu pozwala nam ograniczyć się do rozpatrywania tylko pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Otrzymane wyniki można przez symetrię rozszerzyć łatwo na pozostałe ćwiartki.

Weźmy w pierwszej ćwiartce półprostą OL wychodzącą z początku współrzędnych pod kątem θ do osi x (rys. 55). Tak samo, jak w 379, korzystając z lematu można udowodnić, że istnieje taka liczba dodatnia $R(\theta)$ (może to być także nieskończoność), że we wszystkich punktach M tego promienia, dla których

$$OM < R(\theta),$$

szereg (14) jest bezwzględnie zbieżny, podczas gdy dla punktów M , dla których

$$OM > R(\theta),$$

szereg jest rozbieżny.

Jeżeli dla chociażby jednego promienia jest $R(\theta) = +\infty$, to na mocy lematu szereg jest zbieżny i do tego bezwzględnie na całej płaszczyźnie, która jest wtedy obszarem zbieżności \mathcal{M} .

Wyłączymy teraz przypadek szeregów wszędzie zbieżnych. Wówczas $R(\theta)$ będzie funkcją skońzoną zmiennej θ i na każdym promieniu L znajdzie się punkt rozgraniczający M_θ , dla którego

$$OM_\theta = R(\theta).$$

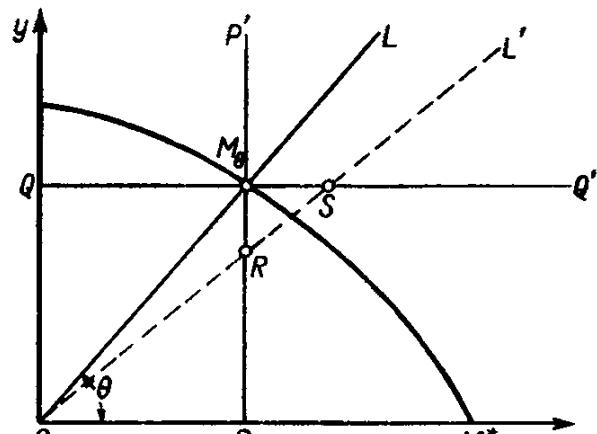
Oddziela on te punkty M promienia, w których szereg jest bezwzględnie zbieżny, od tych w których szereg jest rozbieżny. W samym punkcie M_θ zależnie od szeregu, może on być albo zbieżny, albo rozbieżny.

Jeżeli poprowadzimy przez M_θ prostą pionową PP' i poziomą QQ' (patrz rysunek 55), to wewnątrz prostokąta $OPM_\theta Q$ szereg jest na pewno zbieżny, a wewnątrz kąta $Q' M_\theta P'$ jest na pewno rozbieżny (na mocy lematu). Na nowym promieniu OL' , odpowiadającym jakiemuś innemu kątowi θ' , szereg jest zbieżny na OR i rozbieżny na SL' , a zatem punkt, rozgraniczający M_θ , na tym promieniu musi leżeć między R i S . Łatwo stąd zauważyć, że gdy θ zmienia się od 0 do $\pi/2$, funkcja $R(\theta)$ zmienia się w sposób ciągły, a więc punkt M_θ zakreśla w pierwszej ćwiartce pewną ciągłą krzywą rozgraniczającą.

Ponieważ gdy zmniejsza się θ , odcięta x_θ punktu M_θ nie maleje, a rzędna y_θ nie rośnie, więc mają one wartości graniczne, gdy $\theta \rightarrow 0$. Ma więc oczywiście granicę także $R(\theta)$. Jeśli ta granica

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} R(\theta) = R_0$$

jest skończona, to punkt M_θ dąży do pewnego punktu granicznego $M_0^*(R_0, 0)$ na osi x , w przeciwnym razie rozgraniczająca krzywa ma asymptotę równoległą do osi x , która może się ewentualnie pokrywać z tą osią. Łatwo odpowiednio zmienić wypowiedź dla przypadku, gdy $\theta \rightarrow \pi/2$, zmieniając role zmiennych x i y .



Rys. 55

Uwaga. Nie należy jednak myśleć, że graniczny punkt M_0^* , o którym mówiliśmy przed chwilą, koniecznie pokrywa się z punktem rozgraniczającym M_0 samej osi x . Punkt M_0 może leżeć na prawo od M_0^* , a nawet w nieskończoności. Możliwość ta nie powinna czytelnika dziwić, bo lemat i oparte na nim rozumowania dotyczą tylko punktów spoza osi współrzędnych.

Uzupełnimy teraz krzywą skonstruowaną w pierwszej ćwiartce krzywymi symetrycznymi do niej względem jednej i drugiej osi współrzędnych i leżącymi w pozostałych ćwierćkach. W ten sposób otrzymamy całą krzywą rozgraniczającą, która określa interesujący nas obszar zbieżności \mathcal{M} . W części płaszczyzny leżącej wewnątrz tej krzywej szereg (14) jest zbieżny i to bezwzględnie, w zewnętrznej części płaszczyzny szereg jest rozbieżny⁽¹⁾, a w punktach samej krzywej szereg może być albo zbieżny, albo rozbieżny.

397. Przykłady. 1) Obszar zbieżności \mathcal{M} szeregu

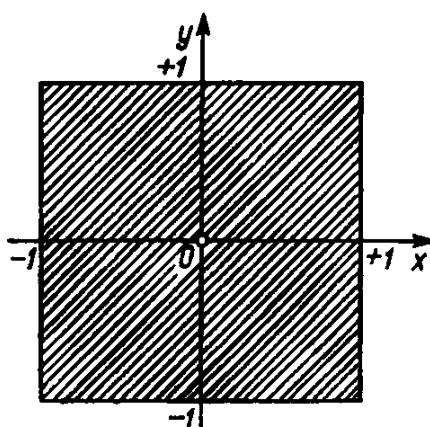
$$\sum_{l,k=0}^{\infty} x^l y^k$$

sprawdza się, jak widzieliśmy w 395, 8), do otwartego prostokąta $(-1, 1; -1, 1)$ (rys. 56); w tym obszarze suma szeregu jest równa $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$.

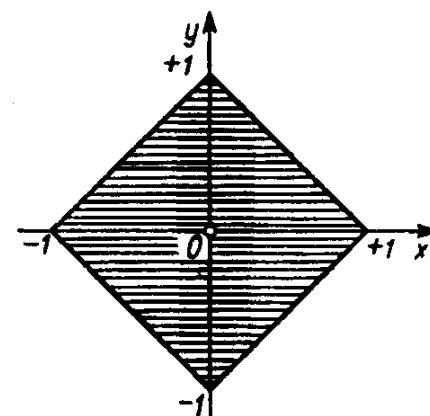
2) Obszar zbieżności analogicznego szeregu

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} x^l y^k,$$

gdzie wskaźniki przebiegają wartości zaczynające się od 1, będzie się składał z tego samego prostokąta, ale z doaniem obydwu osi współrzędnych. W tym przypadku, chociaż rozgraniczający punkt M_0 , o którym była mowa wyżej, dąży przy $\theta \rightarrow 0$ do granicznego punktu $M_0^*(1, 0)$ na osi x , szereg jest mimo o zbieżny na całej osi (patrz uwaga).



Rys. 56



Rys. 57

3) Szereg

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^l y^k}{l! k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

jest oczywiście bezwzględnie zbieżny w całej płaszczyźnie.

(1) Jeżeli nie brać pod uwagę osi współrzędnych, wzdłuż których, jak wspomnieliśmy, szereg może być zbieżny także i na zewnątrz tej krzywej.

4) Na to, by szereg

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i! k!} x^i y^k$$

był bezwzględnie zbieżny, tzn. by był zbieżny szereg

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i! k!} |x|^i |y|^k,$$

potrzeba i wystarcza, żeby był zbieżny szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x| + |y|)^n = \frac{1}{1 - (|x| + |y|)},$$

który powstaje z poprzedniego przez zsumowanie po przekątnych. To prowadzi do warunku $|x| + |y| < 1$. Zatem tutaj obszarem zbieżności jest kwadrat o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ ustawiony ukośnie do osi współrzędnych (rys. 57).

5) Rozpatrzmy na zakończenie następujący szereg podwójny:

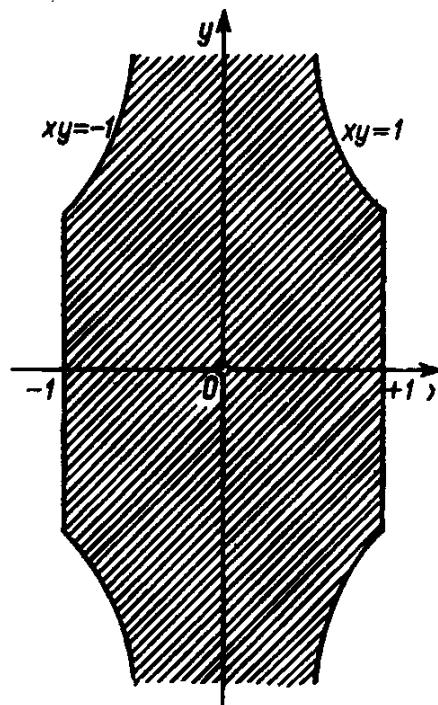
$$\sum_{i \geq k}^{\infty} x^i y^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$+ xy + x^2y + \dots + x^ny + \dots$$

$$+ x^2y^2 + \dots + x^ny^2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x^ny^n + \dots$$



RYS. 58

Gdybyśmy przy założeniu, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, wzięli jego sumę iterowaną zaczynając sumowanie według wierszy, to otrzymalibyśmy

$$(1+x+x^2+\dots)(1+xy+(xy)^2+\dots) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-xy}.$$

Rys. 58

398. Szeregi wielokrotne. Dalsze rozszerzenie pojęcia szeregu nieskończonego przebiega w zupełnie naturalny sposób. Niech będzie dany nieskończony układ liczb

$$u_{j,k,\dots,l}$$

ponumerowanych za pomocą s ($s \geq 2$) wskaźników i, k, \dots, l , z których każdy niezależnie od pozostałych przebiega wszelkie wartości naturalne. Wówczas symbol

$$\sum_{\{k_1, \dots, k_l\} = 1}^{\infty} u_{l,k_1, \dots, k_l}$$

nazywa się szeregiem wielokrotnym (dokładniej s -krotnym).

Granica sumy częściowej

$$U_{n,m,\dots,p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \dots \sum_{l=1}^p u_{i,k,\dots,l},$$

gdy $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty$, (skończona lub nieskończona) nazywa się *sumą szeregu*. Szereg nazywa się *zbieżny*, jeżeli ma skończoną sumę.

Najważniejszą klasą szeregów wielokrotnych są szeregi potęgowe wielu zmiennych

$$\sum_{i,k,\dots,l=0}^{\infty} a_{i,k,\dots,l} x^i y^k \dots z^l.$$

Na szeregi wielokrotne przenoszą się także pojęcia i twierdzenia wyłożonej wyżej teorii.

§ 6. Iloczyny nieskończoności

399. Pojęcia podstawowe. Jeżeli

$$(1) \quad p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$$

jest pewnym danym ciągiem liczb, to utworzony z nich symbol

$$(2) \quad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n^{(1)}$$

nazywa się *iloczynem nieskończonym*

Będziemy kolejno mnożyli liczby (1) tworząc *iloczyny częściowe* (3)

$$(3) \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 p_2, \quad P_3 = p_1 p_2 p_3, \quad \dots, \quad P_n = p_1 p_2 p_3 \dots p_n, \dots$$

Ten ciąg iloczynów częściowych $\{P_n\}$ będziemy zawsze przyporządkowywali symbolowi (2).

Granica P iloczynu częściowego P_n , gdy $n \rightarrow \infty$, skończona lub nieskończona:

$$P = \lim P_n$$

nazywa się *wartością iloczynu* (2). Piszemy

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Jeżeli iloczyn nieskończony ma wartość skończoną P i do tego różną od zera, to iloczyn nieskończony nazywa się *zbieżny*, w przeciwnym razie nazywa się *rozbieżny* (²).

(¹) Spotkaliśmy już takie oznaczenie iloczynu, ale tylko dla skończonej liczby czynników.

(²) Tak więc (podkreślamy to specjalnie) jeżeli $P = 0$, to iloczyn nieskończony jest dla nas rozbieżny. Chociaż terminologia ta różni się od terminologii przyjętej dla szeregów nieskończonych, jest ona ogólnie przyjęta, gdyż ułatwia wypowiedzenie wielu twierdzeń.

Wystarczy, by jeden z czynników iloczynu był zerem, aby wartość całego iloczynu była też równa zeru. W dalszych rozważaniach będziemy ten wypadek wyłączali, zakładamy więc raz na zawsze, że $p_n \neq 0$.

Czytelnik łatwo znajdzie analogię z szeregiem nieskończonymi [362] i zda sobie sprawę z tego, że podobnie jak szeregi nieskończone, iloczyny nieskończone są także tylko swoistą formą badania ciągów i ich granic. Z tą formą warto się zaznajomić, gdyż w wielu przypadkach jest ona wygodniejsza od innych.

400. Przykłady

$$1) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Iloczyn częściowy

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2},$$

Iloczyn nieskończony jest więc zbieżny i ma wartość $\frac{1}{2}$.

2) Wzór Wallisa [317]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Jest oczywiście równoważny z rozwinięciem liczby $\pi/2$ na iloczyn nieskończony

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots$$

Ten sam wzór Wallisa prowadzi też do wzorów

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4} \quad \text{i} \quad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

3) Udowodnimy, że dla $|x| < 1$ jest

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n-1})\dots = \frac{1}{1-x}.$$

Rzeczywiście, jak łatwo się przekonać, wykonując kolejne mnożenia, jest

$$(1-x) \cdot P_n = (1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n-1}) = 1-x^{2^n},$$

$$P_n = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}.$$

Stąd otrzymujemy w granicy żądaną równość.

4) Znalezliśmy już w ustępie 54, 7a) granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

Teraz możemy napisać to tak:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

W szczególności dla $\varphi = \pi/2$ otrzymujemy rozwinięcie

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \dots$$

Jeżeli przypomnimy sobie, że

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \text{a} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha},$$

to rozwinięcie to możemy napisać w postaci

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$$

(F. Vieta). Wzór ten wraz ze wzorem Wallisa były pierwszymi przykładami iloczynów nieskończonych w historii analizy matematycznej.

5) W ustępie 315 (10) ustaliliśmy dla zupełnej całki eliptycznej I rodzaju wzór

$$K(k) = \frac{1}{2} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+k_1)(1+k_2) \dots (1+k_n)],$$

gdzie ciąg (k_n) jest określony wzorem redukcyjnym

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} \quad (k_0 = k).$$

Wzór ten daje rozwinięcie $K(k)$ w iloczyn nieskończony

$$K(k) = \frac{1}{2} \pi \prod_{n=1}^{\infty} (1+k_n).$$

6) Rozpatrzmy jeszcze iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

W tym wypadku iloczyn częściowy ma postać

$$P_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{e^{1+n+C+\gamma_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1} e^C \cdot e^{\gamma_n},$$

gdzie C jest stałą Eulera, a $\gamma_n \rightarrow 0$ [367 (4)]. A więc iloczyn nieskończony jest zbieżny i jego wartość wynosi

$$P = e^C$$

401. Twierdzenia podstawowe. Związek z szeregami. Odrzucając w iloczynie nieskończonym (2) m pierwszych wyrazów, otrzymujemy iloczyn

$$(4) \quad \pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \dots \cdot p_{m+k} \cdot \dots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n,$$

który jest zupełnie analogiczny do reszty szeregu nieskończonego.

1° Jeżeli jest zbieżny iloczyn nieskończony (2), to jest także zbieżny dla każdego k iloczyn (4). Na odwrót, ze zbieżnością iloczynu (4) wynika zbieżność wyjściowego iloczynu (2) (¹).

Przeprowadzenie dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

Tak więc w przypadku iloczynu nieskończonego odrzucenie skończonej liczby czynników początkowych lub doliczenie na początek kilku nowych czynników nie wpływa na zbieżność iloczynu.

2° Jeżeli iloczyn nieskończony (2) jest zbieżny, to

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m = 1$$

[patrz (4)].

Wynika to z równości $\pi_m = P/P_m$ i z tego, że P_m dąży do $P \neq 0$.

3° Jeżeli iloczyn nieskończony (2) jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

Rzeczywiście, wraz z P_n dąży do P także P_{n-1} , a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[porównaj 564, 5°].

Nie wymieniając innych własności iloczynów nieskończonych analogicznych do odpowiednich własności szeregów nieskończonych, przejdziemy do ustalenia związku między zbieżnością iloczynów nieskończonych i szeregów, co pozwoli nam zastosować bezpośrednio do iloczynów teorię rozwiniętą szczegółowo dla szeregów.

W przypadku iloczynu zbieżnego wszystkie czynniki p_n , poczynając od pewnego miejsca, są dodatnie (3°). Zresztą — wobec 1° — nie zmniejszymy ogólności, jeżeli założymy odtąd, że wszystkie $p_n > 0$.

4° Na to, by iloczyn nieskończony (2) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby był zbieżny szereg

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n.$$

Jeżeli ten warunek jest spełniony i L jest sumą szeregu, to $P = e^L$.

Oznaczmy przez L_n sumę częściową szeregu (5). Będziemy mieli

$$L_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{L_n}.$$

Z ciągłości funkcji logarytmicznej i funkcji wykładniczej wynika teraz, że jeśli P_n dąży do skończonej granicy dodatniej P , to L_n dąży do $\ln P$ i na odwrót — jeżeli L_n dąży do skończonej granicy L , to P_n ma granicę e^L .

Przy badaniu zbieżności iloczynu nieskończonego (2) bywa często wygodnie zapisywać czynniki w postaci

$$p_n = 1 + a_n,$$

(¹) Przypominamy, że założyliśmy raz na zawsze, iż $p_n \neq 0$.

sam iloczyn w postaci

$$(2^*) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

a szereg (5) w postaci

$$(5^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + a_n).$$

Przy takich oznaczeniach zachodzi następujące proste twierdzenie:

5° Jeżeli, chociażby dla dostatecznie dużych n , jest stałe

$$a_n > 0 \quad (\text{albo } a_n < 0),$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności iloczynu (2*) jest zbieżność szeregu

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ponieważ zarówno na to, by był zbieżny iloczyn (2), jak i na to, by był zbieżny szereg (6), potrzeba, żeby

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

[patrz 3°], więc możemy założyć, że warunek ten jest spełniony. Wówczas jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + a_n)}{a_n} = 1$$

[77, 5)(a)]. W takim razie, z uwagi na to, że wyrazy obydwu szeregów (5*) i (6) zachowują począwszy od pewnego miejsca stały znak, szeregi te są na mocy twierdzenia 2 z ustępu 366 równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Stąd wynika na mocy 4° nasze twierdzenie.

Wracając do ogólnego przypadku udowodnimy jeszcze następujące twierdzenie:

6° Jeżeli wraz z szeregiem (6) jest zbieżny szereg

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

to iloczyn nieskończony (2*) jest zbieżny.

Rzeczywiście ze zbieżności szeregu (8) wynika przede wszystkim (7). Korzystając z rozwinięcia według wzoru Taylora funkcji $\ln (1 + x)$ [125, 5)], otrzymujemy

$$\ln (1 + a_n) = a_n - \frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2),$$

a więc

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \ln (1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Na mocy twierdzenia 2 z ustępu 366 zbieżność szeregu (8) pociąga za sobą zbieżność szeregu

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)].$$

Ponieważ szereg (6) jest z założenia zbieżny, wynika stąd zbieżność szeregu (5*) jako różnicy dwóch szeregów zbieżnych. Pozostaje zastosować twierdzenie 4°.

Zatrzymamy się krótko na przypadku, gdy iloczyn nieskończony jest rozbieżny do zera.

7° *Na to, by iloczyn nieskończony (2) lub (2*) miał wartość zero, potrzeba i wystarcza, żeby szereg (5) lub (5*) miał sumę $-\infty$.*

W szczególności jest tak, jeżeli $a_n < 0$ i szereg (6) jest rozbieżny, albo jeżeli szereg (6), jest zbieżny, ale szereg (8) jest rozbieżny.

Dowód pozostawiamy czytelnikowi. Zrobimy tylko uwagę w związku z ostatnim założeniem, że ze zbieżności szeregu (8) wynika, wobec (9), rozbieżność szeregu (10), który będzie miał sumę równą $+\infty$. A wówczas z uwagi na zbieżność szeregu (6) jest jasne, że sumą szeregu (5*) będzie $-\infty$.

Na zakończenie skorzystamy ze związku między iloczynem (2) (lub (2*)) i szeregiem (5) (lub (5*)), aby wprowadzić pojęcie zbieżności bezwzględnej iloczynu nieskończonego. Iloczyn nieskończony nazywa się mianowicie *bezwzględnie zbieżny* w tym przypadku, gdy jest zbieżny bezwzględnie odpowiedni szereg logarytmów jego czynników.

Badania zawarte w ustępach 387 i 388 pozwalają od razu wywnioskować, że bezwzględnie zbieżne iloczyny nieskończone są łączne i przemienne, podczas gdy nie bezwzględnie zbieżne iloczyny na pewno tych własności nie mają.

Łatwo udowodnić, w podobny sposób jak twierdzenie 5°, że

8° *Warunkiem koniecznym i dostatecznym bezwzględnej zbieżności iloczynu (2*) jest bezwzględna zbieżność szeregu (6).*

402. Przykłady

1) Zastosujemy udowodnione twierdzenia do następujących iloczynów nieskończonych:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$, $x > 0$. Iloczyn jest zbieżny dla $x > 1$ i rozbieżny dla $x < 1$ zgodnie z podobnym zachowaniem się szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ [5°]. Analogicznie iloczyn $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right)$ jest zbieżny dla $x > 1$ [5°], a dla $0 < x < 1$ rozbieżny do zera [7°].

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$. Iloczyn jest zbieżny dla $x > \frac{1}{2}$. Dla $x > 1$ jest bezwzględnie zbieżny, bo szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest zbieżny, a dla $\frac{1}{2} < x < 1$ iloczyn jest zbieżny nie bezwzględnie, bo są zbieżne szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$ [6°]. Wreszcie dla $0 < x < \frac{1}{2}$ wartość iloczynu jest równa zeru, bo pierwszy z tych szeregów jest zbieżny, a drugi rozbieżny [7°].

2) Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem, którego wyrazy są zawarte w przedziale $(0, \pi/2)$. Wówczas iloczyny

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \quad \text{i} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

są zbieżne lub rozbieżne w zależności od tego, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ jest zbieżny czy rozbieżny.

Założymy najpierw, że $x_n \rightarrow 0$. Wówczas wnioski te wynikają z 5° i 7°, jeśli oprzemy się na rozwinięciach [125, 2) i 3)]

$$\cos x_n = 1 - \frac{1}{2} x_n^2 + o(x_n^2) \quad \text{i} \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{1}{6} x_n^2 + o(x_n^2).$$

Jeśli zaś x_n nie dąży do zera, to równocześnie jest rozbieżny i szereg i obydwa iloczyny mają wartości zerowe (1).

3) Z teorii iloczynów nieskończonych łatwo uzyskać twierdzenie Abela:

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest danym szeregiem o wyrazach nieujemnych, a A_n oznacza jego sumę częściową, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ jest zbieżny lub rozbieżny równocześnie z danym szeregiem [porównaj 375, 4)]. Dowodu wy-

maga tylko przypadek rozbieżności. Jeżeli $A_n \rightarrow \infty$, to iloczyn nieskończony $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$

jest rozbieżny do zera, a wówczas na mocy 5° szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/A_n$ jest rozbieżny.

4) Rozpatrzmy ważny iloczyn

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Niżej, w ustępie 408, zobaczymy, że przedstawia on funkcję $\sin x$. Niech będzie $x \neq k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Jego zbieżność (oczywiście bezwzględna) wynika od razu ze zbieżnością szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 \pi^2}$. Jeśli rozbijemy każdy czynnik na dwa i napiszemy iloczyn w postaci

$$x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \dots,$$

to ponieważ $1 - \frac{x}{n\pi} \rightarrow 1$, zbieżność zachowa się przy tym uporządkowaniu; zachowa się też wartość iloczynu. Ale tym razem zbieżność nie będzie bezwzględna, gdyż szereg

$$-\frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi} - \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} - \dots - \frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi} - \dots$$

nie jest bezwzględnie zbieżny, wobec tego czynników tych nie można dowolnie przestawiać.

(1) To, że obydwa iloczyny mają wartości skończone, wynika z tego, że ich czynniki są ułamkami właściwymi. Wartości tych iloczynów nie mogą być jednak różne od zera, bo nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności [3°].

Zastąpmy teraz każdy z czynników $1 \mp \frac{x}{n\pi}$ czynnikiem $\left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm x/n\pi}$. Łatwo widać, że nie wpływie to ani na zbieżność iloczynu, ani na jego wartość. Tymczasem nowy iloczyn nieskończony jest już bezwzględnie zbieżny, bo [125, 1])

$$e^{\pm x/n\pi} = 1 \pm \frac{x}{n\pi} + \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm x/n\pi} = 1 - \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

i czynniki poczynając od pewnego miejsca są dodatnie i mniejsze od jedności.

5) Udowodnić tożsamość (dla $0 < q < 1$)

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}$$

(Euler).

Wskazówka. Zbieżność obydwu iloczynów stwierdzamy za pomocą 5°. Przedstawić pierwszy z iloczynów w postaci

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}$$

6) Udowodnić, że dla $\alpha > \beta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = 0.$$

W tym celu wystarczy wykazać rozbieżność iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

lub szeregu [patrz 7°]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n},$$

a to łatwo wynika z porównania z szeregiem harmonicznym.

Uwaga. Przykład ten, podobnie jak następne, jest pouczający dlatego, że pokazuje, jak czasami naprawdę wygodnie jest sprawdzić poszukiwanie granicy ciągu do badania iloczynu nieskończonego z wykorzystaniem całej rozwiniętej teorii iloczynów nieskończonych.

7) Wróćmy do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$, który rozpatrywaliśmy już w ustępach 370, 2) (e) i 378, 1) (e).

Pozostawiliśmy tam otwarte zagadnienie, jak zachowuje się szereg na końcu $x = -1/e$ przedziału zbieżności.

W tym przypadku otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n},$$

którego wyrazy zmieniają kolejno znak i maleją monotonicznie co do bezwzględnej wartości. Gdy przypomnimy sobie twierdzenie Leibniza [381], widzimy, że zbieżność tego szeregu zależy od tego, czy zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{e^n} = 0.$$

Ponieważ stosunek $(n+1)$ -go wyrazu tego ciągu do poprzedniego wynosi

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

zadanie to można przedstawić w formie równoważnej: znaleźć wartość iloczynu nieskończonego

$$\frac{1}{e} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}.$$

Logarytmując otrzymujemy [125, 5)]

$$\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

a więc szereg logarytmów typu (5) jest rozbieżny i ma sumę $-\infty$. W takim razie (7°) wartość iloczynu nieskończonego, a wraz z nim także szukana granica, jest równa 0. Szereg jest zbieżny.

8) Dokończymy badanie zachowania się szeregu hipergeometrycznego

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{n! \gamma \cdot (\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n$$

[patrz 372 i 378, 4)] dla $x = -1$ przy założeniu, że $-\gamma < \alpha + \beta < 0$ (ten właśnie przypadek pozostał nie zbadany).

Sposób $(n+1)$ -szego współczynnika do n -tego wynosi tu

$$(11) \quad \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| < L).$$

Dla dostatecznie dużych n stosunek ten jest dodatni. Niech będzie $\gamma - \beta - \alpha > -1$. Wówczas stosunek ten staje się wreszcie mniejszy od 1. Wobec tego wyrazy szeregu

$$(12) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

z wyjątkiem skończonej liczby początkowych, zmieniają po kolejnym znak i maleją monotonicznie co do bezwzględnej wartości. Także i tutaj znajdowanie granicy bezwzględnej wartości wyrazu ogólnego szeregu wygodnie jest sprowadzić do obliczenia iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} \text{ (1).}$$

Jeżeli $\gamma - \alpha - \beta > -1$, jak to założyliśmy, to z (11) na mocy 7° wynika, że iloczyn ten ma wartość 0 i szereg jest zbieżny.

W przypadku gdy $\gamma - \alpha - \beta = -1$, wzór (11) przybiera postać

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| < L).$$

Na mocy twierdzenia 5° wartość iloczynu nieskończonego jest różna od zera, szereg (12) nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, jest zatem rozbieżny.

(1) Wartość początkową $n = n_0$ bierzemy tak dużą, żeby wszystkie czynniki były dodatnie.

Zakończyliśmy wreszcie badanie zbieżności szeregu hipergeometrycznego. Wyniki możemy zestawić w tabeli:

$ x < 1$		bezwzględnie zbieżny
$ x > 1$		rozbieżny
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	bezwzględnie zbieżny
	$\gamma - \alpha - \beta < 0$	rozbieżny
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	bezwzględnie zbieżny
	$0 > \gamma - \alpha - \beta > -1$	warunkowo zbieżny
	$\gamma - \alpha - \beta < -1$	rozbieżny

9) Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2 - 1)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2)$$

jest zbieżny dla wszystkich wartości x , jeżeli tylko jest zbieżny dla danej niecałkowitej wartości $x = x_0$ (T. Stirling).

Wyrazy tego szeregu różnią się od wyrazów zbieżnego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2) \dots (x_0^2 - n^2)$$

czynnikami

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2)}{(x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2) \dots (x_0^2 - n^2)}.$$

które dla dostatecznie dużych n zmieniają się monotonicznie wraz z n .

Pozostaje jeszcze wykazać, że są ograniczone, bo wtedy można będzie zastosować kryterium Abela. W tym celu najprościej będzie przekonać się, że jest zbieżny iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 - n^2}{x_0^2 - n^2}.$$

Pozostawiamy to czytelnikowi.

10) Rozpatrzmy (za Eulerem) iloczyn nieskończony

$$(13) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}},$$

zakładając, że x jest różne od zera i od liczb całkowitych ujemnych.

Łatwo przedstawić ogólny czynnik tego iloczynu w postaci

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

skąd na mocy 8° wynika, że nasz iloczyn jest bezwzględnie zbieżny. Zdefiniowana przez ten iloczyn funkcja $\Gamma(x)$ jest po funkcjach elementarnych jedną z najważniejszych funkcji rozpatrywanych w analizie matematycznej. Dalej, w rozdziale XIV, § 5, podam inną definicję tej funkcji i zbadamy głębiej jej własności.

Ponieważ n -ty iloczyn częściowy ma postać

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)},$$

można także przyjąć

$$(14) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Pisząc analogiczny wzór dla $\Gamma(x+1)$ łatwo zauważyc, że

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+1+n} = x.$$

Otrzymujemy prosty i ważny związek

$$(15) \quad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Jeśli podstawimy za x liczbę naturalną m , otrzymamy wzór redukcyjny

$$\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m),$$

a że $\Gamma(1) = 1$, jak łatwo sprawdzić, to otrzymujemy stąd

$$\Gamma(m+1) = m!$$

Jeszcze jeden ważny wzór dla funkcji $\Gamma(x)$ otrzymamy, jeśli pomnożymy stronami równości

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} \quad \text{i} \quad e^{cx} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x},$$

z których pierwsza wynika z (13) i (15), a druga wynika z 400, 6). Otrzymujemy

$$e^{cx} \Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1 + \frac{x}{n}},$$

czyli

$$(16) \quad \frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{-cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}.$$

Jest to wzór Weierstrassa.

11) Przytoczymy słynny przykład przekształcenia iloczynu nieskończonego w szereg, który także należy do Eulera. Jeżeli ponumerujemy liczby pierwsze w kolejności ich wzrostu

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad \dots, \quad p_k, \quad \dots,$$

to dla $x > 1$ zachodzi tożsamość

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{5^x}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)\dots} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots,$$

czyli

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

więc ten iloczyn przedstawia funkcję $\zeta(x)$ Riemanna [365, 2)].

Według wzoru na sumę szeregu geometrycznego jest

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^n}} = \frac{1}{p_k^n} + \frac{1}{(p_k^2)^n} + \dots + \frac{1}{(p_k^m)^n} + \dots$$

Jeżeli pomnożymy skończoną liczbę takich szeregów, odpowiadających wszystkim liczbom pierwszym nie większym od liczny naturalnej N , to otrzymamy iloczyn częściowy będzie równy

$$(17) \quad P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

gdzie akcent przy znaku sumy oznacza, że sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby naturalne, lecz (poza jednością) tylko na takie, które w swoim rozkładzie na czynniki pierwsze zawierają tylko wprowadzone już liczby pierwsze. Pierwsze N liczb naturalnych mają oczywiście tę własność. Stąd tym bardziej zachodzi nierówność

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Wobec zbieżności tego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ wyrażenie po prawej stronie, które jest resztą tego szeregu po odrzuceniu N wyrazów, dąży do 0, gdy $N \rightarrow \infty$. Przechodząc do granicy, otrzymamy żądaną wynik.

12) Dla $x = 1$ równość (17) zachowuje swą moc, wobec tego

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = H_n,$$

a więc tym razem $P_1^{(N)} \rightarrow \infty$, gdy $N \rightarrow \infty$, tzn. iloczyn nieskończony

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

jest rozbieżny i jego wartość wynosi $+\infty$.

Na tym polega podany przez Eulera nowy dowód tego, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony (z czego w gruncie rzeczy w przytoczonym rozumowaniu nie korzystaliśmy), bo przecież, gdyby zbiór ten był skończony, to rozpatrywany iloczyn miałby wartość skończoną. Jeżeli otrzymany wynik napiszemy w postaci

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0,$$

to w związku z 5° możemy stąd wnosić, że szereg

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p_k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

jest rozbieżny. Ważne to twierdzenie charakteryzuje ponadto w pewnym stopniu wzrastanie liczb pierwszych. Podkreślamy, że jest ono znacznie mocniejsze od twierdzenia o rozbieżności szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, bo chodzi tu tylko o część jego wyrazów.

13) Analogicznie można udowodnić tożsamość (dla $x > 1$)

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{5^x}\right)\left(1 + \frac{1}{7^x}\right)\left(1 - \frac{1}{11^x}\right)\dots\left(1 \pm \frac{1}{p_{k+1}^x}\right)\dots} = 1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \dots,$$

gdzie znak plus lub minus po lewej stronie wybiera się w zależności od tego, czy (nieparzysta) liczba pierwsza ma kształt $4n-1$, czy $4n+1$.

§ 7. Rozwinięcia funkcji elementarnych

403. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Szereg Taylora. Rozpatrywaliśmy już w ustępie 379 szeregi potęgowe w postaci

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

uporządkowane według potęg zmiennej x . Jeżeli wyłączymy szeregi wszędzie rozbieżne, to każdy taki szereg ma swój przedział zbieżności $(-R, R)$ o środku w punkcie $x = 0$, gdzie promień zbieżności $R > 0$, może jednak być też nieskończony. Końce tego przedziału dołączają się lub nie dołączają do obszaru zbieżności zależnie od konkretnego szeregu.

Rozpatruje się także szeregi potęgowe ogólniejszej postaci

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

uporządkowane według potęg $(x - x_0)$ zamiast x . Taki szereg nie różni się istotnie od szeregu postaci (1), sprowadza się bowiem do niego przez prostą zamianę zmiennych $x - x_0 = y$. Szereg (2) o ile nie jest wszędzie rozbieżny także ma swój przedział zbieżności od $x_0 - R$ do $x_0 + R$; tym razem środek przedziału zbieżności jest w punkcie x_0 . Końce jego, tak samo jak w przypadku szeregu (1), mogą do tego przedziału należeć lub nie.

W następnych paragrafach zbadamy szczegółowo własności szeregów potęgowych, które są pod wieloma względami podobne do wielomianów. Sumami częściowymi szeregow potęgowych są wielomiany, co czyni z szeregów potęgowych wygodne narzędzie do rachunków przybliżonych. W związku z tym wszystkim staje się bardzo ważne zagad-

nienie możliwości rozwinięcia danej z góry funkcji na szereg według potęg $(x - x_0)$ lub w szczególności potęg x , tzn. przedstawienia jej w postaci sumy szeregu (2) lub (1).

Zajmiemy się tutaj podobnym rozwinięciem funkcji elementarnych. Drogą do rozwiązania postawionego zagadnienia toruje nam wzór Taylora zbadany dokładnie w ustępuach 124–126 poprzedniego tomu. Rzeczywiście, założymy, że rozpatrywana funkcja $f(x)$ ma w przedziale $\langle x_0, x_0 + H \rangle$ lub $\langle x_0 - H, x_0 \rangle$ ($H > 0$) pochodne wszystkich rzędów (tym samym ciągle). Wówczas, jak widzieliśmy w 126, dla wszystkich wartości x z tego przedziału zachodzi wzór

$$(3) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x),$$

gdzie resztę $r_n(x)$ można przedstawić w jednej z postaci podanych w ustępie 126. Wskaźnik n można przy tym brać dowolnie duży, tzn. doprowadzić rozwinięcie do dowolnie wysokich potęg $(x - x_0)$.

Nasuwa to w sposób naturalny myśl o rozwinięciu nieskończonym

$$(4) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Szereg taki — niezależnie od tego, czy jest zbieżny czy nie — nazywa się *szeregiem Taylora funkcji $f(x)$* . Ma on postać (2), a jego współczynniki

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \dots$$

noszą nazwę *współczynników Taylora*.

Ponieważ różnica między funkcją $f(x)$ i sumą $n+1$ wyrazów szeregu Taylora, wobec (3), wynosi $r_n(x)$, więc oczywiście *na to, by dla pewnej wartości x rzeczywiście zachodziła równość (4), potrzeba i wystarcza, aby reszta $r_n(x)$ we wzorze Taylora dążyła dla tej wartości x do zera, gdy n rośnie do nieskończoności*:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

W badaniu zagadnienia, czy równość ta zachodzi i dla jakich wartości x , będą pozytywne różne postacie reszty $r_n(x)$ ujawniające jej zależność od n .

Najczęściej mamy do czynienia z przypadkiem, gdy $x = 0$ i funkcja rozwija się na szereg, bezpośrednio według potęg x

$$(6) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \text{ (1).}$$

⁽¹⁾ Szereg ten nazywa się zwykle *szeregiem MacLaurina*. Patrz odnośniki na str. 203 i 206 pierwszego tomu.

Szereg ten ma postać (1), a współczynniki —

$$(7) \quad a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

Napiszemy teraz szczegółowo resztę $r_n(x)$ dla szczególnego przypadku $x_0 = 0$ [126] w postaci Lagrange'a

$$(8) \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

i w postaci Cauchy'ego

$$(9) \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}.$$

O czynniku θ wiadomo tylko tyle, że jest on zawarty między 0 a 1, może się jednak zmieniać przy zmianie x lub n , a także przy przejściu od jednego wzoru do drugiego.

Przejdzmy do konkretnych rozwinięć.

404. Rozwinięcie w szereg funkcji wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i innych.

Udowodnimy najpierw następujące proste twierdzenie, które obejmuje od razu kilka ważnych przypadków.

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w przedziale $\langle 0, H \rangle$ lub $\langle -H, 0 \rangle$ ($H > 0$) pochodne wszystkich rzędów i wszystkie te pochodne są dla x z tego przedziału wspólnie ograniczone co do wartości bezwzględnej jedną i tą samą liczbą:

$$(10) \quad |f^{(n)}(x)| \leq L,$$

gdzie L nie zależy od n , w całym tym przedziale jest słuszne rozwinięcie (6).

Rzeczywiście, jeżeli weźmiemy resztę $r_n(x)$ w postaci Lagrange'a [patrz (8)], to będziemy mieli na mocy (10)

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq L \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Gdy n rośnie nieograniczenie, wyrażenie $H^{n+1}/(n+1)!$ dąży do 0, jak to widzieliśmy w 35.1); zresztą to samo wynika [wobec 364.5°] ze zbieżności szeregu

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

[370, 2) (a)]. Ale w takim razie także $r_n(x)$ ma granicę równą zeru, co dowodzi naszej tezy.

(a) Twierdzenie to da się zastosować do funkcji

$$f(x) = e^x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

w dowolnym przedziale $\langle -H, H \rangle$, gdyż ich pochodne, równe odpowiednio

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \sin(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi), \quad \cos(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi)$$

są w tym przedziale ograniczone co do wartości bezwzględnej — funkcja e^x liczbą e^H , a pochodne funkcji $\sin x$ i $\cos x$ przez 1.

Ponieważ współczynniki Taylora tych funkcji obliczyliśmy już w ustępie 125, 1)-3), możemy od razu napisać rozwinięcia:

$$(11) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$(12) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots,$$

$$(13) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

Są one słuszne dla dowolnej wartości x .

(b) Łatwo jest w podobny sposób otrzymać rozwinięcia funkcji hiperbolicznych, ale prościej będzie korzystając z ich definicji

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

wyprowadzić te rozwinięcia przez odejmowanie i dodawanie wyraz za wyrazem szeregu (11) i szeregu

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

który powstaje z niego, gdy zastąpimy x przez $-x$. W ten sposób otrzymujemy

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

(c) Do funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ udowodnione na wstępnie twierdzenie nie da się zastosować. Rzeczywiście, ogólny wzór na pochodną rzędu n tej funkcji

$$(14) \quad y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n(y + \frac{1}{2}\pi),$$

znaleziony w 116, 8), nie gwarantuje wspólnej ograniczoności wszystkich $y^{(n)}$.

Ponieważ odpowiedni szereg Taylora [patrz 125, 6)]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)} + \dots$$

jest zbieżny tylko w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ ⁽¹⁾, poza tym przedziałem nie można mówić, że

(1) Z kryterium d'Alemberta [377] wynika łatwo, że szereg jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli $|x| < 1$, a rozbieżny dla $|x| > 1$. Zbieżność (warunkowa) dla $x = \pm 1$ wynika z twierdzenia Leibniza [380].

szereg ten przedstawia funkcję $\operatorname{arctg} x$. Jeżeli natomiast $|x| \leq 1$, to ze wzoru Lagrange'a (8) mamy po uwzględnieniu (14)

$$|r_n(x)| = \frac{|\cos^{n+1} y_\theta \sin(n+1)(y_\theta + \frac{1}{2}\pi)|}{n+1} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

gdzie $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$. Widać stąd, że $r_n(x) \rightarrow 0$, a więc dla wszystkich x z przedziału $(-1, 1)$ zachodzi równość

$$(15) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

Podkreślamy jeszcze raz, że chociaż funkcja $\operatorname{arctg} x$ ma sens także poza tym przedziałem, rozwinięcie (15) nie jest tam jednak słuszne, gdyż szereg ten nie ma wtedy sumy.

Z szeregu (15) otrzymujemy w szczególności dla $x = 1$ słynny szereg Leibniza

$$(16) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} + \dots,$$

pierwszy szereg, który dawał rozwinięcie liczby π .

405. Szereg logarytmiczny. Jeżeli jako funkcję $f(x)$ weźmiemy $\ln(1+x)$ ($x > -1$), to odpowiedni szereg Taylora będzie miał postać [125, 5]

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Jest on zbieżny tylko dla wartości x z przedziału $(-1, 1)$ ⁽¹⁾, a zatem tylko w tym przedziale ma sens badać zachowanie się reszty $r_n(x)$.

Weźmy najpierw resztę w postaci Lagrange'a (8). Ponieważ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[126, (13)], przeto

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Jeżeli $0 \leq x \leq 1$, to ostatni czynnik nie przekracza jedności i wobec tego $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, a więc $r_n(x) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Dla $x < 0$ zachowanie się tego czynnika nie jest jednak jasne i trzeba sięgnąć do reszty postaci Cauchy'ego [patrz (9)].

(1) Porównaj poprzedni odnośnik. Dla $x = -1$ otrzymujemy (z dokładnością do znaku) rozbieżny szereg harmoniczny.

Jest

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

zatem

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n.$$

Ponieważ dla $x > -1$ jest $1+\theta x > 1-\theta$, więc ostatni czynnik jest mniejszy od jedności; jeśli więc tylko $|x| < 1$, to na pewno $r_n(x) \rightarrow 0$.

Ciekawe, że chociaż postać Cauchy'ego reszty całkowicie rozstrzyga sprawę dla wszystkich wartości x leżących między -1 a 1 , nie daje ona nic dla $x = 1$. W tym przypadku dostajemy

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

ale wobec tego, że θ może się zmieniać wraz z n , nie można stąd wywnioskować, że $(1-\theta)^n \rightarrow 0$.

Tak więc — łącznie — dla wszystkich x z przedziału $(-1,1)$ jest rzeczywiście słuszna równość

$$(17) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

W szczególności dla $x = 1$ otrzymujemy znany nam już szereg

$$(18) \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Z szeregu (17) można wyprowadzić także inne pożyteczne rozwinięcia. Na przykład, zastępując w nim x przez $-x$ i odejmując otrzymany szereg wyraz za wyrazem od szeregu (17) (zakładamy przy tym, że $|x| < 1$), otrzymujemy następujący szereg:

$$(19) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \dots \right).$$

406. Wzór Stirlinga. Jako zastosowanie pokażemy, jak za pomocą wzoru można wyprowadzić pewien wzór zwany *wzorem Stirlinga*.

Weźmy w (19) $x = \frac{1}{2n+1}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Wówczas

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

otrzymujemy zatem rozwinięcie

$$(20) \quad \ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right],$$

które można napisać w postaci

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots$$

Wyrażenie to jest oczywiście większe od jedności, ale mniejsze od

$$1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Mamy więc

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

skąd otrzymujemy

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Wprowadźmy teraz ciąg o wyrazach $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$. Wówczas

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}}{e}$$

i z poprzednich nierówności wynika, że

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{1/12n}}{e^{1/12(n+1)}},$$

zatem z jednej strony $a_n > a_{n+1}$, a z drugiej strony,

$$a_n \cdot e^{-1/12n} < a_{n+1} \cdot e^{-1/12(n+1)}.$$

Tak więc ciąg $\{a_n\}$ maleje, gdy n rośnie, pozostając przy tym ograniczony z dołu (na przykład przez zero) i dąży do skończonej granicy a , ciąg zaś o wyrazach $a_n \cdot e^{-1/12n}$ rośnie i dąży oczywiście do tej samej granicy a , bo przecież $e^{-1/12n} \rightarrow 1$. Ponieważ dla dowolnego n spełnione są nierówności

$$a_n \cdot e^{-1/12n} < a < a_{n+1},$$

znajdzie się zatem taka liczba θ zawarta między zerem a jednością, że będzie

$$a = a_n \cdot e^{-\theta/12n}, \quad \text{czyli} \quad a_n = a \cdot e^{\theta/12n}.$$

(Zauważmy, że liczba θ zależy na ogół od n). Uwzględniając definicję a_n , otrzymujemy

$$(21) \quad n! = a \sqrt[n]{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\theta/12n} \quad (0 < \theta < 1).$$

Pozostaje teraz jeszcze wyznaczyć stałą a . W tym celu przypomnijmy sobie wzór Wallisa [317], który można napisać w postaci

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

Wyrażenie w nawiasach przekształcimy w sposób następujący:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Podstawiając tutaj za $n!$ wyrażenie z wzoru (21), a za $(2n)!!$ podobne wyrażenie:

$$(2n)! = a \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot e^{\theta'/24n} \quad (0 < \theta' < 1),$$

otrzymamy po elementarnych uproszczeniach

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot e^{(4\theta-\theta')/24n},$$

a więc

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot e^{(4\theta-\theta')/12n} = \frac{a^2}{4}.$$

Stąd

$$a^2 = 2\pi \quad \text{i} \quad a = \sqrt{2\pi}.$$

Podstawiając tę wartość a do wzoru (21), otrzymujemy ostatecznie wzór Stirlinga

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\theta/12n} \quad (0 < \theta < 1),$$

który pozwala oszacować wielkość silni $n!$ dla dużych wartości n .

Jako ćwiczenie proponujemy czytelnikowi obliczyć faktycznie sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right),$$

którego zbieżność udowodniliśmy w ustępie 367, 9) (b).

Wskazówka. Obliczyć n -tą sumę częściową, przekształcić ją za pomocą wzoru Stirlinga i przejść do granicy.

Odpowiedź: $\frac{1}{2} (1 - \ln 2)$.

407. Szereg dwumienny. Weźmy wreszcie funkcję $f(x) = (1+x)^m$, gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 0 i od wszystkich liczb naturalnych (dla naturalnego m dostajemy znane skończone rozwinięcie według wzoru Newtona). W tym przypadku szereg Taylora ma postać [125,4)]

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

Szereg ten nazywa się *szeregiem dwumiennym*, a jego współczynniki — *współczynnikami dwumiennymi*. Przy założeniach przyjętych dla m żaden z tych współczynników nie będzie zerem (przeciwnie, gdyby m było liczbą naturalną, to współczynnik przy x^{m+1} i wszystkie następne byłyby równe zeru). Za pomocą kryterium d'Alemberta [377] łatwo stwierdzić, że dla $|x| < 1$ szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, a dla $|x| > 1$ jest rozbieżny. Badanie reszty $r_n(x)$ we wzorze Taylora przeprowadzimy przy założeniu, że $|x| < 1$, przy czym weźmiemy resztę od razu w postaci Cauchy'ego (9) (postać Lagrange'a nie daje tu odpowiedzi dla żadnej wartości x).

Ponieważ

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

mamy

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} (1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Przegrupujemy czynniki i przedstawimy tę resztę w postaci

$$r_n(x) = \left[\frac{(m-1)(m-2)\dots[(m-1)-n+1]}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} x^n \right] \cdot [mx(1+\theta x)^{m-1}] \left(\frac{1-\theta}{1-\theta x} \right)^n.$$

Pierwszy z tych trzech nawiasów przedstawia wyraz ogólny szeregu dwumennego odpowiadającego wykładnikowi potęgi $m-1$. Ponieważ szereg dwumienny jest dla $|x| < 1$ zbieżny przy każdym wykładniku, wyrażenie to dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Co do dwóch pozostałych, to bezwzględna wartość drugiego jest zawarta między liczbami

$$|mx|(1-|x|)^{m-1} \quad \text{i} \quad |mx|(1+|x|)^{m-1}$$

niezależnymi od n , a trzeci — tak samo, jak w ustępie 405 — jest mniejszy od jedności. Tak więc $r_n(x) \rightarrow 0$, tzn. dla $|x| < 1$ jest prawdziwe rozwinięcie

$$(22) \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

łączone również z nazwiskiem Newtona.

Nie rozpatrywaliśmy zagadnienia stosowności tego rozwinięcia dla wartości $x = \pm 1$. Łatwo dostrzec, że szereg dwumienny jest szczególnym przypadkiem szeregu hipergeometrycznego i powstaje z niego, gdy przyjmie się $\alpha = -m$, $\beta = \gamma$ i gdy zastąpi się x przez $-x$. Wobec tego na podstawie tablicy z ustępu 402, 8) można łatwo zestawić podobną tabliczkę opisującą zachowanie się szeregu dwumennego na końcach $x = \pm 1$ jego przedziału zbieżności

$x = 1$	$m > 0$ $0 > m > -1$ $m < -1$	bezwzględnie zbieżny warunkowo zbieżny rozbieżny
$x = -1$	$m > 0$ $m < 0$	bezwzględnie zbieżny rozbieżny

Mogą udowodnić, że za każdym razem, kiedy szereg dwumienny jest zbieżny, suma jego jest równa $(1+x)^m$. Nie zatrzymujemy się tutaj na tym, aby uniknąć mozołnego badania reszty, gdyż wynik ten jest prostym wnioskiem z pewnego ogólnego twierdzenia, które zostanie niżej udowodnione [patrz 437, 6°].

Wypiszmy niektóre szczególne przypadki szeregu dwumennego odpowiadające, na przykład, wykładnikom $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

(zwykły szereg geometryczny), dalej

$$(23) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \dots$$

$$(-1 < x < 1)$$

oraz

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \dots$$

$(-1 < x < 1).$

Należy zauważyć, że w przypadku wymiernego m suma szeregu dwumiejskiego daje zawsze arytmetyczną wartość pierwiastka.

Uwaga I. Na tym opiera się na przykład następujące ciekawe rozwinięcie należące do O. Schlömilcha. Przede wszystkim podstawiamy w wzorze (23) $x = -y^2$, gdzie $-1 < y < 1$, i otrzymujemy bez trudu równość

$$1 - \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} y^{2n-1}.$$

Następnie za y podstawiamy wyrażenie $2z/(1+z^2)$, gdzie z przebiega już wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Okazuje się, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2z}{1+z^2} \right)^{2n-1} = \begin{cases} z, & \text{jeżeli } |z| < 1, \\ \frac{1}{z}, & \text{jeżeli } |z| > 1. \end{cases}$$

Przykład ten jest przez to interesujący, że funkcje, wyrażone różnymi wzorami z i $1/z$ w różnych przedziałach, przedstawia jednym wzorem analitycznym — jako sumę szeregu [porównaj 46, i 363, 5)].

Uwaga II. We wszystkich rozpatrywanych wyżej przykładach było tak, że dla wszystkich wartości x , dla których szereg był zbieżny, suma jego była równa tej funkcji, której szeregiem Taylora był dany szereg. Dlatego może powstać u czytelnika podejrzenie, że w ogóle wystarczy stwierdzić zbieżność szeregu, nie sprawdzając nawet, czy spełniona jest równość (5), aby było słuszne rozwinięcie (4) lub (6).

W rzeczywistości jednak tak nie jest. Jeżeli powrócimy na przykład do funkcji

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{dla } x \neq 0; \quad f(0) = 0,$$

rozpatrywanej w uwadze w ustępie 138, to jak widzieliśmy, funkcja ta ma w punkcie $x = 0$ pochodne wszystkich rzędów równe零. Jej szereg Taylora postaci (6) z samymi zerowymi współczynnikami jest oczywiście wszędzie zbieżny, ale dla żadnej wartości x z wyjątkiem $x = 0$ suma jego nie jest równa wartości funkcji wyjściowej.

408. Rozwinięcie kosinusa i sinusa w iloczyn nieskończony. Zapoznaliśmy się wyżej z rozwinięciami najważniejszych funkcji elementarnych w szeregi nieskończono według potęg zmiennej x , tj. przedstawieniem tych funkcji w postaci „nieskończonych wielomianów”. Na zakończenie tego paragrafu przedstawimy funkcje $\sin x$ i $\cos x$ w postaci iloczynów nieskończonych, które są jak gdyby rozkładem na czynniki odpowiednich „nieskończonych wielomianów”.

Zaczniemy od wyprowadzenia pewnego wzoru pomocniczego. Znamy z algebry tzw. wzór Moivre'a ⁽¹⁾

$$(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz,$$

gdzie m jest liczbą naturalną. Otwierając nawiasy po lewej stronie według zwykłych reguł i przyrównując do siebie współczynniki przy jednostce urojonej $i = \sqrt{-1}$ po prawej i lewej stronie, otrzymujemy

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots$$

Jeżeli $m = 2n+1$ jest nieparzyste, to po zastąpieniu parzystych potęg kosinusa według wzoru $\cos^{2k} z = (1 - \sin^2 z)^k$ przedstawimy nasz wynik w postaci

$$(25) \quad \sin(2n+1)z = \sin z \cdot P(\sin^2 z),$$

gdzie P jest wielomianem całkowitym stopnia n .

⁽¹⁾ Patrz, np. dalej ustęp 453.

Jeżeli oznaczymy przez u_1, u_2, \dots, u_n pierwiastki tego wielomianu, to możemy go w następujący sposób rozłożyć na czynniki:

$$P(u) = a(u-u_1)\dots(u-u_n) = A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\dots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

Pierwiastki u_1, u_2, \dots, u_n łatwo będzie wyznaczyć z (25), jeśli zauważymy, że gdy dla danego z $\sin(2n+1)z$ jest zerem, a $\sin z$ jest różny od zera, to $\sin^2 z$ musi być pierwiastkiem wielomianu $P(u)$. Oczywiście wartościom $z = \frac{\pi}{2n+1}, 2\frac{\pi}{2n+1}, \dots, n\frac{\pi}{2n+1}$ zawartym między 0 a $\frac{1}{2}\pi$ w kolejności wzrastania odpowiadają również wzrastające (a więc różne) pierwiastki

$$u_1 = \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \quad u_2 = \sin^2 2\frac{\pi}{2n+1}, \quad \dots, \quad u_n = \sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}.$$

Wreszcie współczynnik $A = P(0)$ wyznaczamy jako granicę stosunku $\sin(2n+1)z/\sin z$, gdy $z \rightarrow 0$, a więc $A = 2n+1$.

Otrzymujemy więc wzór

$$\sin(2n+1)z = (2n+1)\sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

Podstawiając $z = x/(2n+1)$ napiszemy go w postaci

$$(26) \quad \sin x = (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

Będziemy teraz uważali, że x jest różne od $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, tak że $\sin x \neq 0$. Weźmy liczbę naturalną k spełniającą warunek $(k+1)\pi > |x|$ i niech będzie $n > k$. Przedstawimy teraz $\sin x$ jako iloczyn

$$(27) \quad \sin x = U_k^{(n)} \cdot V_k^{(n)},$$

gdzie

$$U_k^{(n)} = (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

zawiera tylko k czynników w nawiasach, a

$$V_k^{(n)} = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1)\frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

obejmuje wszystkie pozostałe.

Niech na razie k będzie ustalone; łatwo znaleźć granicę wyrażenia $U_k^{(n)}$ przy $n \rightarrow \infty$, gdyż składa się ono ze skończonej liczby czynników. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} = x$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 h \frac{\pi}{2n+1}} = \frac{x^2}{h^2 \pi^2} \quad (h = 1, 2, \dots, k),$$

przeto

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_k^{(n)} = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Wobec (27) istnieje także granica

$$V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} V_k^{(n)}, \quad \text{przy czym} \quad \sin x = U_k \cdot V_k.$$

Zajmiemy się oszacowaniem granicy V_k .

Wiadomo, że dla $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ zachodzą nierówności

$$\frac{2}{\pi} \varphi < \sin \varphi < \varphi$$

[54, (9); 133, 1)]. Dlatego

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{x}{2n+1} &< \frac{x^2}{(2n+1)^2}, \\ \sin^2 h \frac{\pi}{2n+1} &> \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{h^2 \pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h = k+1, \dots, n), \end{aligned}$$

tak że

$$(28) \quad 1 > V_k^{(n)} > \left(1 - \frac{x^2}{4(k+1)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right).$$

Iloczyn nieskończony

$$\prod_{h=h_0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(gdzie h_0 jest dobrane tak, by było $4h^2 > x^2$) jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg $\sum_{h=h_0}^{\infty} x^2 / 4h^2$ [twierdzenie 5°, 401]. Wobec tego iloczyn

$$V_k^* = \prod_{h=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

musi dążyć do 1, gdy $k \rightarrow \infty$ [401, 2°]. Jest oczywiste, że wzmacnimy tylko drugą z nierównością (28), jeżeli napiszemy

$$1 > V_k^{(n)} > V_k^*.$$

Przechodząc do granicy przez $n \rightarrow \infty$ i ustalonym k , otrzymujemy nierówność

$$1 > V_k > V_k^*.$$

Stąd wynika, że $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 1$, a zatem $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = \sin x$, toteż otrzymujemy wreszcie ciekawe rozwinięcie

$$(29) \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \dots$$

uzyskane po raz pierwszy przez Eulera.

Jest ono prawdziwe, rzecz jasna, także dla wyłączonych poprzednio wartości $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, gdyż wówczas obydwie strony równości są równe zeru. Łatwo zauważać, że poszczególne czynniki odpowiadają właśnie różnym pierwiastkom $\sin x$ ⁽¹⁾.

Jeżeli w otrzymanym rozwinięciu podstawimy $x = \frac{1}{2}\pi$, to otrzymamy

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

skąd wynika znowu wzór Wallisa [317; porównaj też 400, 2)].

Podamy jeszcze jedno interesujące zastosowanie tego rozwinięcia, które przedstawimy — po zastąpieniu x przez πx — w postaci

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Przypomnijmy sobie definicję funkcji $\Gamma(x)$ [402, (13)]

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

i związek $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ [402, (15)]. Jest wobec tego

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

Mnożąc dwie równości przez siebie, otrzymujemy od razu wzór redukcyjny

$$(30) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

również znaleziony przez Eulera. Jest on słuszny dla wszelkich niecałkowitych wartości x ⁽²⁾.

Podobnie jak rozwinięcie $\sin x$ wyprowadza się rozwinięcie:

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right),$$

w którym występują pierwiastki $\pm \frac{1}{2}(2n-1)\pi$ funkcji $\cos x$. Zresztą można by je otrzymać z rozwinięcia $\sin x$ według wzoru

$$\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \quad \text{albo} \quad \cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}.$$

Wspomnimy jeszcze na zakończenie o rozwinięciach

$$(31) \quad \sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cosh x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

które także można otrzymać za pomocą podobnych rozważań.

⁽¹⁾ Co do możliwości przedstawiania czynników patrz 402, 4).

⁽²⁾ Podstawiając tutaj $x = \frac{1}{2}$ otrzymamy w szczególności, że $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi$. Ponieważ dla $x > 0$ jest także $\Gamma(x) > 0$, więc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

§ 8. Rachunki przybliżone za pomocą szeregów. Przekształcanie szeregów

409. Uwagi ogólne. Na przykładzie otrzymanych przez nas konkretnych rozwinięć wyjaśnimy, jak można wykorzystać szeregi nieskończoności do rachunków przybliżonych. Poprzedzimy to kilkoma uwagami ogólnymi.

Jeżeli nie znana nam liczba A jest rozwinięta w szereg

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

gdzie a_1, a_2, a_3, \dots są łatwymi do obliczania (zazwyczaj wymiernymi) liczbami, i przyjmiemy w przybliżeniu

$$A \approx a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n,$$

to błąd popełniony przez odrzucenie pozostałych wyrazów jest równy reszcie

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Dla dostatecznie dużego n błąd ten będzie dowolnie mały, tak że A_n odtwarza wartość A z dowolną z góry daną dokładnością.

W naszym interesie leży możliwość oszacowania w prosty sposób reszty α_n . Pozwoliłoby nam to w porę zatrzymać się w obliczaniu sum częściowych, kiedy została już osiągnięta wymagana dokładność przybliżenia.

Jeżeli rozpatrywany szereg jest naprzemienny, to jak widzieliśmy [381, uwaga], reszta ma taki sam znak, jak jej pierwszy wyraz i nie przekracza tego wyrazu co do wartości bezwzględnej. Jeżeli chodzi o prostotę oszacowania, to nie można sobie życzyć nic lepszego.

Trochę trudniej jest w przypadku szeregu o wyrazach nieujemnych. Wówczas staramy się zazwyczaj znaleźć łatwy do zsumowania szereg, którego (nieujemne) wyrazy byłyby większe od wyrazów badanej reszty, i szacujemy sumę tego szeregu.

Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/m^2$ można otrzymać oszacowanie

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n}$$

[oszacowanie to pokrywa się z oszacowaniem z góry, otrzymanym w ustępie 373, (11) za pomocą całkowania], a dla szeregu $1 + \sum_{m=1}^{\infty} 1/m!$ – oszacowanie

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \dots \cdot m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n! \cdot n}$$

(z tego oszacowania korzystaliśmy już faktycznie przy obliczeniach liczby e w ustępie 37).

Zazwyczaj szukamy dziesiętnego przybliżenia liczby A , podczas gdy wyrazy szeregu mogą nie być wyrażone jako ułamki dziesiętne. Przy zamianie ich na ułamek dziesiętny zaokrąglamy je, co stanowi źródło nowych błędów, które także musimy uwzględnić.

Zauważmy wreszcie, że nie każdy szereg, którego sumą jest szukana liczba A , nadaje się praktycznie do obliczenia tej liczby, nawet jeżeli wyrazy szeregu mają prostą postać, a reszta łatwo się szacuje. Chodzi tu o szybkość zbieżności, tzn. o szybkość przybliżania się sum częściowych do A .

Weźmy na przykład szeregi [patrz 404 (16) i 405 (18)]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{i} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

których sumy są odpowiednio równe $\frac{1}{4}\pi$ i $\ln 2$. Aby obliczyć te liczby za pomocą tych szeregów, powiedzmy z dokładnością do $1/10^3$, trzeba by wziąć pięćdziesiąt tysięcy wyrazów pierwszego szeregu i sto tysięcy wyrazów drugiego; można by to zrealizować tylko za pomocą szybko liczących maszyn.

Niżej obliczymy bez specjalnych trudności obie wspomniane liczby i to nawet z większą dokładnością, skorzystamy jednak z szeregów odpowiedniejszych do obliczeń.

410. Obliczenie liczby π . Skorzystamy ze znanego rozwinięcia funkcji $\arctg x$ [400 (15)]

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

Jeśli weźmiemy $x = 1/\sqrt{3}$, to będzie $\arctg x = \frac{1}{6}\pi$ i otrzymamy szereg

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right),$$

który już nadaje się do rachunków.

Weźmy wzór na dodawanie

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

(prawdziwy w tej postaci tylko przy założeniu, że suma kątów nie przekracza co do bezwzględnej wartości $\frac{1}{2}\pi$ [50]) i wybierzmy jako x i y dowolne liczby dodatnie mniejsze od jedności i spełniające zależność

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1, \quad \text{czyli} \quad (x+1)(y+1) = 2.$$

Będziemy wówczas mieli

$$\frac{\pi}{4} = \arctg x + \arctg y = \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right) + \left(y - \frac{y^3}{3} + \dots \right).$$

Podstawiając na przykład $x = 1/2$, $y = 1/3$, otrzymujemy

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \dots \right).$$

Istnieją jednak szeregi jeszcze wygodniejsze do obliczenia liczby π . Weźmy na przykład $\alpha = \arctg \frac{1}{5}$ wówczas

$$\tg \alpha = \frac{1}{5}, \quad \tg 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tg 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Wobec tego, że liczba ta jest bliska jedności, jasne jest, że kąt 4α jest bliski $\frac{1}{4}\pi$. Wprowadzając kąt $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$ mamy

$$\tg \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \quad \text{czyli} \quad \beta = \arctg \frac{1}{239}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \pi = 16\alpha - 4\beta &= 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \dots \right) - \\ &\quad - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Jest to wzór Machina.

Obliczmy na podstawie tego wzoru liczbę π z dokładnością do siedmiu cyfr po przecinku. Do tego celu wystarczą te wyrazy wzoru, które są wyżej wypisane. Ponieważ oba szeregi są naprzemienne, więc błędy odjemnika i odjemnej spowodowane odrzuceniem nie wypisanych wyrazów spełniają odpowiednio nierówności

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad \text{i} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

Zachowane wyrazy zamienimy na ułamki dziesiętne, zaokrąglając je do ośmiu znaków dziesiętnych. Obliczenia są zestawione niżej (znaki + lub - w nawiasie wskazują na znak poprawki)

$$\begin{array}{rcl} \frac{16}{5} = 3,20000000 & \frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0,04266667 (-) \\ + \frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0,00102400 & + \frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0,00002926 (-) \\ \hline \frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0,00000091 (+) & \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0,00000003 (-) \\ \hline 3,20102491 & 0,02469596 \\ & - \frac{4}{239} = 0,01673640 (+) \\ \hline - 3,20102491 & \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0,00000010 (-) \\ 0,04269596 & \hline \\ \hline 3,15832895 & 0,01673630 \end{array}$$

Uwzględniając wszystkie poprawki, mamy

$$\begin{aligned} 3,15832895 &< 16\alpha < 3,15832898, \\ -0,01673632 &< -4\beta < -0,01673630, \end{aligned}$$

skąd

$$3,14159263 < \pi < 3,14159268.$$

Tak więc ostatecznie $\pi = 3,1415926 \dots$, przy czym wszystkie cyfry wypisane są poprawne.

411. Obliczanie logarytmów. U podstaw obliczeń leży szereg

$$(1) \quad \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right),$$

którym posługiwałyśmy się już w ustępie 406 [patrz (20)] przy wyprowadzeniu wzoru Stirlinga.

Dla $n = 1$ otrzymujemy rozwinięcie liczby $\ln 2$

$$\begin{aligned} \ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{9^5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{9^6} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{9^7} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{9^8} + \dots \right). \end{aligned}$$

Szereg ten nadaje się w pełni do obliczeń. Wykażemy na przykład, że ograniczając się tylko do wypisanych już wyrazów można obliczyć $\ln 2$ z 9 cyframi po przecinku.

Rzeczywiście, błąd powstający wskutek odrzucenia wyrazów tego szeregu poczynając od dziesiątego wynosi

$$\Delta = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{9^9} + \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{9^{10}} + \dots \right) < \frac{2}{3 \cdot 19 \cdot 9^9} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots \right) = \frac{1}{12 \cdot 19 \cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Rachunki, z dokładnością do 10 cyfr po przecinku, podajemy niżej.

$$\frac{2}{3} = 0,66666 \ 66667 \ (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 9} = 0,02469 \ 13580 \ (+)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 9^2} = 0,00164 \ 60905 \ (+)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 9^3} = 0,00013 \ 06421 \ (+)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 9 \cdot 9^4} = 0,00001 \ 12901 \ (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 11 \cdot 9^5} = 0,00000 \ 10264 \ (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 13 \cdot 9^6} = 0,00000 \ 00965 \ (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 15 \cdot 9^7} = 0,00000 \ 00093 \ (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 17 \cdot 9^8} = 0,00000 \ 00009 \ (+)$$

$$0,69314 \ 71805$$

Uwzględniając wszystkie poprawki mamy

$$0,6931471802 < \ln 2 < 0,6931471809$$

a zatem

$$\ln 2 = 0,693147180 \dots,$$

gdzie wszystkie napisane cyfry są poprawne.

Podstawiając teraz w (1) $n = 4$ otrzymujemy

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{81^2} + \dots \right).$$

Korzystając z obliczonej już wartości $\ln 2$, możemy z tego wzoru obliczyć $\ln 5$, a następnie także $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. Potem można już z dowolną dokładnością obliczyć moduł

$$M = \frac{1}{\ln 10}$$

przejścia od logarytmów naturalnych do dziesiętnych; wynosi on $M = 0,434294481\dots$ Mnożąc przez ten współczynnik, znajdziemy logarytmy dziesiętne $\log_{10} 2$ i $\log_{10} 5$

Przejdźmy teraz do logarytmów dziesiętnych w wzorze podstawowym (1):

$$(2) \quad \log_{10}(n+1) - \log_{10} n = \frac{2M}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right).$$

Podstawiając tutaj $n = 80 = 2^3 \cdot 10$ i biorąc pod uwagę, że $n+1 = 81 = 3^4$, otrzymamy

$$4 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2 - 1 = \frac{2M}{161} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25921} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25921^2} + \dots \right),$$

skąd łatwo można obliczyć $\log_{10} 3$. Podstawiając dalej we wzorze (2) $n = 2400 = 3 \cdot 2^3 \cdot 10^2$ mamy $n+1 = 2401 = 7^4$, zatem

$$4 \log_{10} 7 - 3 \log_{10} 2 - \log_{10} 3 - 2 = \frac{2M}{4801} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{23049601} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{23049601^2} + \dots \right),$$

skąd znajdziemy $\log_{10} 7$. Dobierając odpowiednie kombinacje liczb można znaleźć z dowolną dokładnością logarytmy liczb pierwszych, a z nich, za pomocą mnożenia przez liczby naturalne i dodawania, obliczyć logarytmy liczb złożonych.

Można by też postąpić inaczej: obliczać bezpośrednio logarytmy kolejnych liczb naturalnych przehodząc od $\log_{10} n$ do $\log_{10} (n+1)$ na podstawie wzoru (2). Na przykład od obliczenia logarytmów liczb od 1000 do 10000 weźmiemy we wzorze (2) tylko jeden wyraz, tzn. przyjmiemy w przybliżeniu

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = \frac{2M}{2n+1} \quad (10^3 < n < 10^4).$$

Błąd wyniesie przy tym

$$\begin{aligned} A &= \frac{2M}{2n+1} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right) < \\ &< \frac{2M}{3(2n+1)^3} \left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right) = \frac{2M}{3 \cdot (2n+1) \cdot 2n \cdot (2n+2)} < \frac{2M}{24n^3}. \end{aligned}$$

Ponieważ w naszym wypadku jest $n \geq 10^3$, a $2M < 1$, więc

$$A < \frac{1}{24 \cdot 10^9} < \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}.$$

Gdyby się nawet wszystkie błędy dodawały, to w sumie błąd byłby mniejszy niż $10^4 / 2 \cdot 10^{10} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$. Łatwo jednak uniknąć takiego spiętrzenia błędów, obliczając pierwszą metodą pewną liczbę logarytmów kontrolnych. W ten sposób można osiągnąć znacznie większą dokładność zachowując równocześnie charakterystyczny dla drugiej metody automatyzm obliczeń, co jest szczególnie cenne przy obliczaniu obszernych tablic.

412. Obliczanie pierwiastków. Najprościej jest obliczyć pierwiastki za pomocą tablicy logarytmów. Jeżeli jednak potrzebne są poszczególne pierwiastki z bardzo dużą dokładnością, to warto sięgnąć do szeregu dwumiejsnego [407, (22)]

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Przypuśćmy, że trzeba obliczyć $\sqrt[k]{A}$, przy czym znana jest już przybliżona wartość a tego pierwiastka, ale trzeba zwiększyć dokładność. Jeśli przyjmiemy

$$\frac{A}{a^k} = 1 + x,$$

gdzie $|x|$ jest niewielką liczbą mniejszą od jedności, to można pierwiastek przekształcić w sposób następujący:

$$\sqrt[k]{A} = a \cdot \sqrt[k]{A/a^k} = a \cdot (1+x)^{1/k}$$

i skorzystać z wzoru dwumiejsnego dla $m = 1/k$. Czasem wygodniej jest wychodzić od równości

$$\frac{a^k}{A} = 1 + x',$$

jeżeli $|x'|$ jest znowu małą liczbą zawartą między 0 a 1, zastosować przekształcenie

$$\sqrt[k]{A} = \frac{a}{\sqrt[k]{a^k/A}} = a \cdot (1+x')^{-1/k},$$

a następnie zastosować szereg dwumienny dla $m = -1/k$.

Jako przykład obliczymy z dużą dokładnością $\sqrt{2}$ biorąc za punkt wyjścia wartość przybliżoną 1,4. W tym celu przekształcimy pierwiastek według jednego z podanych schematów

$$\sqrt{2} = 1,4 \cdot \sqrt{\frac{2}{1,96}} = 1,4 \cdot \sqrt{1 + \frac{0,04}{1,96}} = 1,4 \cdot \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

albo

$$\sqrt{2} = \frac{1,4}{\sqrt{\frac{1,96}{2}}} = \frac{1,4}{\sqrt{1 - \frac{0,04}{2}}} = 1,4 \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2}.$$

Dla uproszczenia rachunków naturalniej jest wybrać drugą drogę. Mamy więc

$$\sqrt{2} = 1,4 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} + \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} + \dots\right).$$

Ograniczymy się do wyrazów już napisanych, wszystkie one są skończonymi ułamkami dziesiętnymi

$$1 + \dots + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} = 1,0101525$$

$$\frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} = 0,00000004375$$

$$\frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} = 0,0000000007875$$

$$\overline{1,0101525445375 \cdot 1,4} = 1,41421356235250.$$

Ponieważ współczynniki przy potęgach 1/50 maleją, błąd można oszacować jak zwykle:

$$A < 1,4 \cdot \frac{231}{1024 \cdot 50^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \dots\right) = \frac{1,4 \cdot 231}{1024 \cdot 50^5 \cdot 49} < \frac{1,1}{10^{11}}.$$

Dlatego

$$1,414213562352 < \sqrt{2} < 1,414213562373,$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623 \dots,$$

wszystkie dziesięć cyfr po przecinku są pewne.

Korzystając z przekształcenia

$$\sqrt{2} = 1,41 \left(1 - \frac{119}{20000}\right)^{-1/2}$$

można łatwo otrzymać znacznie więcej cyfr. Przytoczymy jeszcze kilka przykładów takich przekształceń, pozostawiając obliczenia za pomocą szeregu dwumennego czytelnikowi:

$$\sqrt{3} = 1,73 \cdot \left(1 - \frac{71}{30000}\right)^{-1/2}, \quad \sqrt{11} = \frac{10}{3} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{1/2},$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3}, \quad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7} \left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{1/3}.$$

413. Przekształcenie szeregów potęgowych według Eulera. Przy wykorzystaniu szeregu do rachunków przybliżonych bywa niekiedy wygodnie poddać go najpierw przekształceniu. Tak nazywamy zastąpienie, według takiego lub innego prawa, danego szeregu zbieżnego przez inny szereg o tej samej sumie. Oczywiście zastosowanie takiego przekształcenia jest tylko wtedy celowe, gdy nowy szereg jest szybciej zbieżny lub wygodniejszy w rachunkach.

Wyprowadzimy wzór na klasyczne przekształcenie zwane *przekształceniem Eulera*. Niech będzie dany szereg zbieżny

$$(3) \quad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + (-1)^k a_k x^k + \dots,$$

gdzie $x > 0$. Tylko dla wygody przedstawiamy współczynniki szeregu w postaci $(-1)^k a_k$; nie zakładamy przy tym wcale, że $a_k > 0$. Dla ciągu $\{a_k\}$ rozpatrzymy kolejne różnice wyrazów

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k, \quad \Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k$$

i ogólnie

$$(4) \quad \Delta^p a_k = \Delta^{p-1} a_{k+1} - \Delta^{p-1} a_k = a_{k+p} - \binom{p}{1} a_{k+p-1} + \binom{p}{2} a_{k+p-2} - \dots + (-1)^p a_k,$$

(podobnie jak to zrobiliśmy w ustępie 122 dla funkcji $f(x)$ ciągłego argumentu x).

Napiszemy teraz nasz szereg w postaci

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{a_1 x - a_0 x}{1+x} + \frac{a_2 x^2 - a_1 x^2}{1+x} - \frac{a_3 x^3 - a_2 x^3}{1+x} + \dots$$

Jest to dopuszczalne, bo k -ta suma częściowa nowego szeregu różni się od analogicznej sumy częściowej szeregu (3) tylko o składnik $\frac{1}{1+x} (-1)^{k+1} a_{k+1} x^{k+1}$, który dąży do zera, gdy $k \rightarrow \infty$, wobec zbieżności szeregu wyjściowego [364, 5°]. Uprościmy teraz wzór, wprowadzając różnice i otrzymamy

$$S(x) = \frac{1}{1+x} (a_0 - \Delta a_0 \cdot x + \Delta a_1 \cdot x^2 - \Delta a_2 \cdot x^3 + \dots).$$

Zachowując pierwszy wyraz $a_0/(1+x)$ przepiszemy pozostały szereg

$$\frac{x}{1+x} (\Delta a_0 - \Delta a_1 \cdot x + \Delta a_2 \cdot x^2 - \dots),$$

podobnie jak $S(x)$, w postaci

$$-\frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} (\Delta a_0 - \Delta^2 a_0 x + \Delta^2 a_1 x^2 - \dots),$$

skąd, po wynalezieniu znowu pierwszego wyrazu, będziemy mieli

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{x^2}{(1+x)^2} (\Delta^2 a_0 - \Delta^2 a_1 \cdot x + \dots).$$

Kontynuując takie postępowanie otrzymamy po p krokach

$$(5) \quad S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{\Delta^2 a_0}{(1+x)^3} \cdot x^2 - \dots + (-1)^{p-1} \frac{\Delta^{p-1} a_0}{(1+x)^p} \cdot x^{p-1} + R_p(x).$$

gdzie

$$R_p(x) = (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p} (\Delta^p a_0 - \Delta^p a_1 \cdot x + \Delta^p a_2 \cdot x^2 - \dots) = (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^p a_k \cdot x^k.$$

Przejdziemy teraz do dowodu, że $R_p(x)$ dąży do 0, gdy $p \rightarrow \infty$.

Zastępując różnicę $\Delta^p a_k$ według wzoru (4) i zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$R_p(x) = \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p} x^{k+p} \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} a_{k+p-l} = \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} x^l \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p-l} a_{k+p-l} x^{k+p-l}.$$

Jeżeli resztę szeregu wyjściowego (3) oznaczymy przez

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} a_{k+n} x^{k+n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

to $R_p(x)$ możemy ostatecznie napisać w postaci

$$R_p(x) = \frac{\sum_{l=0}^p \binom{p}{l} x^l r_{p-l}(x)}{(1+x)^p} = \frac{\sum_{l=0}^p \binom{p}{l} x^{p-l} r_l(x)}{(1+x)^p}.$$

Ponieważ $r_n(x) \rightarrow 0$, wynika stąd na mocy twierdzenia 5° z ustępu 391, że także $R_p(x) \rightarrow 0$, gdy $p \rightarrow \infty$.

Przechodząc do granicy w równości (5) otrzymujemy

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \left[a_0 - \Delta a_0 \frac{x}{1+x} + \Delta^2 a_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 - \dots + (-1)^p \Delta^p a_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^p + \dots \right].$$

Podstawiając tu zamiast $S(x)$ wyrażenie (3) otrzymujemy wzór na przekształcenie Eulera:

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \Delta^p a_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^p.$$

Najczęściej stosuje się to przekształcenie dla $x = 1$; wówczas przekształca ono szereg liczbowy w szereg liczbowy:

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}.$$

414. Przykłady

1) Przyjmijmy $a_k = 1/(z+k)$, gdzie z jest dowolną liczbą stałą różną od 0, -1, -2, -3, ... Szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k}$$

jest po odrzuceniu dostatecznej liczby wyrazów początkowych szeregiem naprzemiennym, jest więc zbieżny.

Łatwo obliczyć kolejne różnice $\Delta a_k, \Delta^2 a_k, \dots$ i metodą indukcji matematycznej stwierdzić, że

$$\Delta^p a_k = (-1)^p \frac{p!}{(z+k)(z+k+1)\dots(z+k+p)};$$

w szczególności

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{z(z+1)\dots(z+p)}.$$

Tak więc według wzoru (7) jest

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{z(z+1)\dots(z+p)}.$$

Jeśli przyjmiemy tu $z = 1$, to otrzymamy przekształcenie znanego szeregu dla $\ln 2$

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Jest jasne dla czytelnika, że drugi szereg jest znacznie wygodniejszy do obliczenia przybliżonego $\ln 2$. Aby uzyskać dokładność do 0,01, trzeba by wziąć w pierwszym szeregu 99 wyrazów, podczas gdy w drugim szeregu wystarczy wziąć tylko 5 wyrazów!

2) Niech $a_k = 1/(z+2k)$ ($z \neq 0, -2, -4, \dots$). Przedstawimy a_k w postaci $a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}z+k}$ i do wyznaczenia $\Delta^p a_0$ będziemy się mogli posługiwać poprzednim wzorem:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{1}{2} \cdot \frac{p!}{\frac{z}{2} \cdot \left(\frac{z}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{z}{2} + p\right)} = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{p+1} \cdot p!}{z(z+2) \dots (z+2p)}.$$

W tym przypadku przekształcenie Eulera daje

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z+2k} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{z(z+2) \dots (z+2p)}.$$

W szczególności, gdy $z = 1$, otrzymujemy przekształcenie szeregu Leibniza, którego suma jest równa $\frac{1}{4}\pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(2p+1)!!}.$$

3) Dla $0 < x < 1$ wyrowadziliśmy w ustępie 404 (c) rozwinięcie

$$\arctg x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Chcąc zastosować do tego szeregu ogólnego przekształcenie Eulera, przyjmiemy w (6), że $a_k = 1/(2k+1)$. Wówczas — po wykorzystaniu wzoru na $\Delta^p a_0$ z poprzedniego przykładu (dla $z = 1$) — będziemy mieli

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

Oprócz tego zastąpimy w wzorze (6) x przez x^2 i obie strony równości pomnożymy przez x . W wyniku otrzymujemy

$$(8) \quad \arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p.$$

4) Nie należy przypuszczać, że przekształcenie Eulera szeregu zbieżnego prowadzi zawsze do poprawienia zbieżności. (Porównując zbieżność dwóch szeregów $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ i $\sum_{k=0}^{\infty} c'_k$, bierzemy za punkt wyjścia stosunek odpowiednich reszt γ_n i γ'_n — jeżeli $|\gamma_n|/|\gamma'_n| \rightarrow 0$, to pierwszy szereg jest zbieżny szybciej, a drugi wolniej, tak samo jak w ustępie 375, 7)).

A oto przykłady:

Szereg $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}$ przechodzi w szybciej zbieżny szereg $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^p}$, natomiast szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ przechodzi w wolniej zbieżny szereg $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^p$.

5) Przy korzystaniu z przekształcenia Eulera w rachunkach bywa często korzystnie obliczyć kilka początkowych wyrazów szeregu bezpośrednio, a poddać przekształceniu dopiero resztę szeregu. Zilustrujemy to na przykładzie obliczenia liczby π za pomocą szeregu

$$\pi = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p+1)} + \dots \right)$$

(wyprowadzonego w 2).

Ponieważ stosunek następnego wyrazu do poprzedniego $\frac{p}{2p+1} < \frac{1}{2}$, więc reszta szeregu będzie zawsze mniejsza od ostatniego zachowanego wyrazu. Tak na przykład otrzymamy 6 poprawnych cyfr po przecinku, biorąc 21 wyrazów szeregu, bo 21-szy wyraz spełnia nierówność:

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 41} = 0,000\,000\,37\dots < 0,000\,000\,5.$$

Jeżeli zaś obliczymy, powiedzmy, siedem początkowych wyrazów wyjściowego szeregu bezpośrednio, a resztę po odrzuceniu tych siedmiu wyrazów poddamy przekształceniu, to otrzymamy

$$\begin{aligned} \pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) - \\ - 2 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15 \cdot 17} + \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 17 \cdot 19} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p}{15 \cdot 17 \cdot \dots \cdot (15+2p)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Tutaj już ósmy wyraz szeregu zawartego w nawiasach nie przekracza dopuszczalnego błędu

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{15 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 29} = 0,000\,000\,2\dots$$

i aby uzyskać tę samą dokładność wystarczy obliczyć oprócz siedmiu zachowanych wyrazów jeszcze osiem wyrazów przekształconej reszty, czyli razem 15 wyrazów zamiast 21.

415. Przekształcenie Kummera. Widzieliśmy, że przekształcenie Eulera, polegające na sformułowanej przed chwilą regule, prowadzi do jednoznacznego wyniku, co prawda nie zawsze korzystnego z punktu widzenia rachunków [414, 4)]. Natomiast metoda przekształcania szeregów, podana przez Kummera, dopuszcza większą dowolność, pozostawiając wiele sztuce rachmistrza, ale za to jest bardziej celowa, jeśli chodzi o ułatwienie rachunków przybliżonych. Ograniczymy się do przedstawienia idei leżącej u podstaw wspomnianej metody i zilustrujemy ją kilkoma przykładami.

Niech będzie dany szereg zbieżny

$$(9) \quad A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(k)} + \dots,$$

trzeba obliczyć jego sumę ze z góry daną dokładnością. Oczywiście $A^{(k)} \rightarrow 0$, gdy $k \rightarrow \infty$. Wybierzmy inną wielkość nieskończoność małą $a_1^{(k)}$ równoważną z $A^{(k)}$ [62] w ten sposób, żeby szereg

$$a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \dots + a_1^{(k)} + \dots$$

nie tylko był zbieżny do skończonej sumy A_1 , ale żeby tę sumę było łatwo obliczyć. Jeśli przyjmiemy

$$A^{(k)} - a_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)},$$

to będzie

$$\alpha_1^{(k)} = o(A^{(k)}) \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^{(k)},$$

obliczenie sumy wyjściowego szeregu sprowadza się więc do obliczenia sumy szeregu przekształconego, którego wyrazy na pewno dążą do zera szybciej.

Chcąc na przykład obliczyć sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ przypomnijmy sobie szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ o sumie równej 1 [25, 9)] i zauważmy, że przy $k \rightarrow \infty$ jest

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2(k+1)}$$

więc jest

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$$

i szereg przekształcony okazuje się wygodniejszy do obliczeń.

Podane postępowanie można powtórzyć i biorąc nową wielkość nieskończoność małą $a_2^{(k)}$ równoważną z $\alpha_1^{(k)}$ tak, aby szereg

$$a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \dots + a_2^{(k)} + \dots$$

był zbieżny do skończonej, łatwej do obliczenia sumy A_2 , można zadanie sprowadzić wzorem

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + A_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^{(k)}$$

do obliczenia sumy ostatniego szeregu, którego wyrazy

$$\alpha_2^{(k)} = \alpha_1^{(k)} - a_2^{(k)} = o(\alpha_1^{(k)})$$

dążą do zera szybciej niż $\alpha_1^{(k)}$.

Powtarzając ten proces p razy otrzymujemy wzór

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + A_2 + \dots + A_p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)},$$

gdzie

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

są to znane sumy wydzielanych kolejno szeregów: zadanie obliczenia sumy sprowadzi się zatem do obliczenia sumy szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)}$.

W przytoczonym wyżej przykładzie obliczenia sumy szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ można pójść dalej:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)},$$

wobec czego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Następnie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 3! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

itd. Po p krokach otrzymujemy

$$(10a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)\dots(k+p)}.$$

Korzystamy przy tym stale ze znanego już nam wzoru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!},$$

który jest szczególnym przypadkiem — dla $\alpha = 0$ — związku wyprowadzonego w 363, 4).

W ten sposób obliczenie sumy wolno zbieżnego szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ sprowadza się do obliczenia sumy p jego wyrazów i sumy szeregu, który jest szybko zbieżny nawet przy niedużych wartościach p .

Podamy jeszcze jeden bardziej skomplikowany przykład.

Oznaczmy przez S_p (p — liczba naturalna) sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2\dots(k+p-1)^2}.$$

Przy nie określonym na razie y zachodzi równość

$$\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\dots(k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\dots(k+p)^2} = \frac{(2p-1)k^2 + p(p+2y)k + yp^2}{k^2(k+1)^2\dots(k+p-1)^2(k+p)^2}.$$

Widać stąd, że oczywiście (przy $k \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{2p-1} \left[\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\dots(k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\dots(k+p)^2} \right] \sim \frac{1}{k^2(k+1)^2\dots(k+p-1)^2}.$$

Jeśli zastąpimy wyrazy szeregu S_p tymi równoważnymi z nimi różnicami, to otrzymamy szereg, którego sumę równą

$$\frac{1}{2p-1} \cdot \frac{1+y}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p)^2},$$

łatwo jest obliczyć. Dopełniający (przekształcony) szereg będzie miał wyraz ogólny

$$\frac{\left[2p - \frac{p}{2p-1}(p+2y) \right] k + \left[p^2 - \frac{yp^2}{2p-1} \right]}{k^2(k+1)^2\dots(k+p)^2}.$$

Teraz skorzystamy z dowolności y i dobierzemy je tak, żeby w liczniku znikł wyraz zawierający k , tzn. weźmiemy

$$y = \frac{3}{2}p - 1.$$

Uwzględniając wszystko, co powiedzieliśmy, otrzymamy dla szeregu S_p następujący wzór na przekształcenie:

$$(11) \quad S_p = \frac{3p}{2(2p-1)(p!)^2} + \frac{p^3}{2(2p-1)} \cdot S_{p+1}.$$

Podstawiając za p kolejno wartości $1, 2, \dots, p$ otrzymujemy stąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} S_2,$$

$$\frac{1}{2} S_2 = \frac{3}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{(2!)^3}{2^2 \cdot 3!!} \cdot S_3,$$

$$\frac{[(p-1)!]^3}{2^{p-1}(2p-3)!!} S_p = \frac{3}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \frac{(p!)^3}{2^p \cdot (2p-1)!!} \cdot S_{p+1}.$$

Dodając wreszcie stronami te równości otrzymujemy wynik

$$(10b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{2!}{5!!} + \dots + \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} \right] + \\ + \frac{(p!)^3}{2^p \cdot (2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2 \dots (k+p)^2}.$$

Jeżeli weźmiemy na przykład $p = 5$ i zatrzymamy w przekształconym szeregu także 5 wyrazów, to możemy obliczyć sumę szeregu wyjściowego z dokładnością do 10^{-7} .

416. Przekształcenie Markowa. Metoda przekształcenia danego szeregu zbieżnego (9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A$$

podana przez A. A. Markowa pozostawia także wiele dowolności rachującemu. Rozwijamy w pewien sposób każdy wyraz $A^{(k)}$ w szereg zbieżny

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Wyrazy tych szeregów tworzą nieskończona macierz prostokątną o dwóch wejściach

szukana liczba A jest więc po prostu sumą szeregu iterowanego

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(k)}$$

odpowiedajacego tej macierzy. Zakladajac dalej ponadto zbieżność szeregów utworzonych z kolumn

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A_i$$

Markow ustala warunki konieczne i dostateczne na to, by szereg $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ był zbieżny do tej samej sumy A .

Przekształcenie Markowa polega właśnie na tym zastąpieniu jednego szeregu iterowanego drugim:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Warunki dostateczne stosowności przekształcenia Markowa podaje na przykład twierdzenie 3° z ustępu 393. Samo twierdzenie Markowa ma zresztą znacznie szerszy zasięg, nie zakłada bowiem nawet bezwzględnej zbieżności występujących szeregów.

Jako przykład zastosowania przekształcenia Markowa może służyć równość (13) z ustępu 395. Chodzi o szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, którego k -ty wyraz jest przedstawiony w postaci sumy, tym razem skończonej liczby składników

$$\frac{1}{k^2} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \dots + a_{k-1}^{(k)} + r_k = \\ = (k-1)! \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+2)} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k \cdot \dots \cdot (2k-1)} \right] + \frac{(k-1)!}{k^2(k+1) \dots (2k-1)}.$$

Następnie wykonuje się sumowanie według kolumn, co prowadzi do wspomnianej równości [patrz 395,4)].

Ciekawe będzie zauważyć, że gdybyśmy się posłużyli rozwinięciem

$$\frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{i(i+1)\dots(i+k)},$$

przekształcenie Markowa, jak to już podkreślaliśmy w ustępie 395, 4), nie dałoby nam nic nowego — po prostu wrócielibyśmy do wyjściowego szeregu.

Tworzenie macierzy (12) można by powiązać z iterowanym stosowaniem przekształcenia Kummera. Mówiliśmy już o tym w poprzednim ustępie [patrz (10)], ale tam powtarzaliśmy proces Kummera tylko skończoną liczbę razy, a tu powtarzamy go do nieskończoności. Należy przy tym tylko za każdym razem sprawdzać, czy „reszta” we wzorze (10) dąży do zera, tzn. czy jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)} = 0.$$

Aby się o tym przekonać na przykład w stosunku do (10b), zauważmy, że występująca w reszcie suma nie przekracza

$$\frac{1}{(p!)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

a więc cała reszta nie przekracza

$$\frac{p!}{2^p(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

oczywiście dąży do zera, gdy $p \rightarrow \infty$. Przechodząc w wzorze (10b) do granicy, otrzymujemy równość

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{2!}{5!!} + \dots + \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \dots \right] = \\ = 3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 2^p} \cdot \frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}$$

identyczną, jak łatwo zauważać, z równością (13) z ustępu 395.

Nie zawsze jednak takie przejście do granicy prowadzi do pozytywnego wyniku. Jeśli dokonamy go na przykład w równości (10a), to otrzymamy po prostu tożsamość

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}.$$

Tak więc metoda zaproponowana przez Markowa daje ogólny schemat postępowania, pozostawiający rachmistrzowi szerokie możliwości, ale też wymagający od niego dużych umiejętności.

§ 9. Sumowanie szeregów rozbieżnych

417. Wstęp. Dotychczas w całym tym rozdziale przypisywaliśmy danemu szeregowi liczbowemu

$$(A) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

jako sumę granicę jego sum częściowych

$$A = \lim A_n,$$

zakładając, że granica ta istnieje i jest skończona (albo jest nieskończonością określonego znaku). Oscylujący szereg rozbieżny był dla nas zawsze pozbawiony sumy i takie szeregi wyłączaliśmy systematycznie z rozważań.

Różne fakty z zakresu analizy matematycznej, jak na przykład rozbieżność iloczynu dwóch szeregów zbieżnych [392], wysunęły w drugiej połowie ubiegłego stulecia naturalne zagadnienie, czy nie można szeregów rozbieżnych sumować, oczywiście w sensie różnym od zwykłego. Pewne metody takiego sumowania okazały się szczególnie płodne; zajmiemy się nimi szczegółowo.

Należy powiedzieć, że przed stworzeniem przez Cauchy'ego ścisłej teorii granic i związanej z nią teorii szeregów nierzadko występowały szeregi rozbieżne w praktyce matematycznej. Użycie ich w dowodach budziło wprawdzie wątpliwości, niemniej jednak niekiedy próbowało nadawać im nawet sens liczbowy. Na przykład oscylującemu szeregowi

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

przypisywano już od czasów Leibniza sumę $1/2$. Euler na przykład motywował to tym, że z rozwinięcia

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

(które jest słuszne tylko dla $|x| < 1$) otrzymuje się po podstawieniu $x = 1$ właściwie równość

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Tkwiło już w tym ziarnko prawdy, ale postawienie zagadnienia było nie dość ścisłe:

dowolność wyboru wyjściowego rozwinięcia pozostawiała otwartą drogę do tego, by z innego rozwinięcia, powiedzmy

$$\frac{1+x+\dots+x^{m-1}}{1+x+\dots+x^{n-1}} - \frac{1-x^m}{1-x^n} = 1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\dots$$

(gdzie m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność $m < n$), otrzymać równocześnie

$$\frac{m}{n} = 1-1+1-1+1-\dots$$

Współczesna analiza stawia zagadnienie inaczej. Za podstawę bierze się pewną ścisłe sformułowaną definicję sumy uogólnionej szeregu, nie wymyśloną tylko dla danego konkretnego szeregu, lecz mającą zastosowanie dla całej klasy takich szeregów. Dopuszczalność tego nie wywołuje wątpliwości: czytelnik musi wszak pamiętać, że nawet zwykłe pojęcie sumy szeregu, choćby się wydawało nie wiadomo jak proste i naturalne, zostało także wprowadzone za pomocą przyjętej umownie definicji, uzasadnionej tylko swą celowością. Definicji sumy uogólnionej stawia się zwykle dwa żądania.

Po pierwsze, jeżeli szeregowi $\sum a_n$ jest przypisana suma uogólniona A , a szeregowi $\sum b_n$ — uogólniona suma B , to szereg $\sum pa_n + qb_n$, gdzie p i q są to dowolne stałe, powinien mieć sumę uogólnioną równą $pA + qB$. Metoda sumowania spełniająca ten warunek nazywa się *liniowa*.

Po drugie, nowa definicja powinna obejmować starą jako przypadek szczególną. Mówiąc dokładniej, szereg zbieżny w zwykłym sensie mający sumę A , powinien mieć sumę uogólnioną i do tego także równą A . Metoda sumowania mająca tę własność nazywa się *regularna*.

Oczywiście ciekawe są tylko takie regularne metody sumowania, które pozwalały znaleźć sumę w szerszej klasie szeregów, niż metoda zwykła. Tylko w tym przypadku mamy pełne prawo mówić o sumowaniu uogólnionym.

Przedziemy teraz bezpośrednio do omówienia dwóch szczególnie ważnych z punktu widzenia zastosowań metod „sumowania uogólnionego”.

418. Metoda szeregów potęgowych. Metoda ta w istocie swej pochodzi od Poissona, który pierwszy spróbował ją zastosować do szeregów trygonometrycznych.

Dla danego szeregu liczbowego (A) tworzymy szereg potęgowy

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Jeżeli szereg ten jest zbieżny dla $0 < x < 1$, a jego suma $f(x)$ ma dla $x \rightarrow 1^-$ granicę A , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A,$$

to liczbę A nazywamy uogólnioną sumą (w sensie Poissona) danego szeregu (A).

PRZYKŁAD. 1) Szereg rozpatrywany przez Eulera

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

już z samej definicji prowadzi tu do szeregu potęgowego, którego suma $\frac{1}{(1+x)}$ dąży do $\frac{1}{2}$, gdy $x \rightarrow -1-0$. Wobec tego liczba $\frac{1}{2}$ jest rzeczywiście sumą uogólnioną wspomnianego szeregu w sensie przed chwilą sprecyzowanym.

2) Weźmy przykład ogólniejszy. Szereg trygonometryczny

$$(2) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$$

jest rozbieżny dla wszystkich wartości θ z przedziału $(-\pi, \pi)$.

Rzeczywiście, jeżeli θ ma postać $\frac{p}{q}\pi$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi, to dla wartości n równej wielokrotnościom q będzie

$$\cos n\theta = \pm 1,$$

nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności. Jeśli zaś stosunek θ/π jest niewymierny, to po rozwinięciu go w nieskończony ułamekłańcuchowy i wzięciu reduktów m/n tego ułamka będziemy, jak wiadomo, mieli

$$\left| \frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}, \quad \text{skąd} \quad |n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

Dla nieskończoniewielu wartości n będzie więc zachodziła nierówność

$$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n}, \quad \text{skąd} \quad |\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n}.$$

co również świadczy o tym, że nie jest spełniony konieczny warunek zbieżności.

Jeśli utworzymy szereg potęgowy

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \quad (0 < r < 1)$$

(litera r odgrywa tu rolę poprzedniego x), to suma tego szeregu dla wartości θ różnych od zera będzie równa

$$(3) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$$

[440, (5)] i dąży do 0, gdy $r \rightarrow 1-0$. Tak więc dla $\theta \neq 0$ uogólnioną sumą szeregu będzie 0. Jeżeli $\theta = 0$, to szereg (2) ma oczywiście sumę równą $+\infty$; zresztą wyrażenie (3), które w tym przypadku ma postać $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1-r}$, dąży także do $+\infty$, gdy $r \rightarrow 1-0$.

3) Analogicznie szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

zbieżny tylko dla $\theta = 0$ lub $\pm\pi$ prowadzi do szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2}$$

[461,(6(a))], więc suma uogólniona szeregu jest tym razem równa $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta$ dla $\theta \neq 0$ i zeru dla $\theta = 0$.

Jest od razu jasne, że rozpatrywana metoda sumacyjna jest liniowa. Regularność tej metody, wynika z następującego twierdzenia *Abela*:

Jeżeli szereg (A) jest zbieżny i ma sumę równą A (w zwykłym sensie), to szereg potęgowy (1) jest dla $0 < x < 1$ zbieżny i jego suma dąży do A, gdy $x \rightarrow 1 - 0$ (¹).

Przede wszystkim jest jasne [379], że promień zbieżności szeregu (1) jest nie mniejszy od 1, tak że dla $0 < x < 1$ szereg (1) jest rzeczywiście zbieżny. Wiemy już, że zachodzi tożsamość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

gdzie $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ [patrz 385, 6) lub 390, 4)]. Odejmijmy tę tożsamość stronami od oczywistej tożsamości

$$A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} Ax^n.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia $A - A_n = \alpha_n$ otrzymamy tożsamość

$$(4) \quad A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Ponieważ $\alpha_n \rightarrow 0$, przeto do dowolnie danej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie N , że $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$, jeśli tylko $n > N$.

Rozbijemy sumę szeregu po prawej stronie wzoru (4) na dwie sumy

$$(1-x) \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n \quad \text{i} \quad (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Druga suma daje się od razu oszacować niezależnie od x :

$$\left| (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| x^n < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2},$$

pierwsza zaś dąży do 0, gdy $x \rightarrow 1$, i dla x dostatecznie bliskich 1 będzie

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

więc ostatecznie

$$\left| A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| < \varepsilon,$$

co należało udowodnić.

(¹) Twierdzenie to udowodnił Abel w swych badaniach dotyczących teorii szeregu dwumienennego (powrócimy jeszcze do niej w ustępie 437, 6°). Nie ulega wątpliwości, że właśnie to twierdzenie naprowadziło na ogólne sformułowanie metody sumowania uogólnionego, którą Poisson zastosował tylko w szczególnym przypadku. W związku z tym metodę tę nazywają często *metodą Abela*, chociaż idea sumowania szeregów rozbieżnych była samemu Abelowi w najwyższym stopniu obca. W dalszym ciągu mówiąc o tej metodzie będziemy ją nazywali *metodą Poissona-Abela*.

419. Twierdzenie Taubera. Jeżeli szereg (A) jest sumowalny do A metodą Poissona-Abela, to jak widzieliśmy, może on nie mieć sumy w zwykłym sensie. Innymi słowy, z istnienia granicy

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

nie wynika na ogół zbieżność szeregu (A). Powstaje naturalne pytanie, jakie dodatkowe warunki trzeba nałożyć na wyrazy tego szeregu, aby z (5) można było wnioskować, że szereg (A) jest zbieżny, tzn. że istnieje jego suma A w zwykłym sensie.

Pierwsze twierdzenie w tym kierunku udowodnił A. Tauber; głosi ono:

Niech szereg (1) będzie zbieżny dla $0 < x < 1$ i niech zachodzi równość (5). Jeżeli wyrazy szeregu (A) są takie, że

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0,$$

to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Dowód rozbijemy na dwie części. Najpierw założymy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0, \quad \text{czyli} \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (1).}$$

Jeżeli oznaczymy

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|,$$

to przy $n \rightarrow \infty$ δ_n będzie dążyło do zera monotonicznie malejąc.

Dla dowolnego naturalnego N mamy

$$\sum_{n=0}^N a_n - A = \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right],$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N a_n - A \right| &< \sum_{n=0}^N |na_n| (1-x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n| x^n}{n} + \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| \\ &< (1-x) N \delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| \text{ (2).} \end{aligned}$$

Weźmy dowolnie małą liczbę $\varepsilon > 0$ i przyjmijmy

$$(1-x) N = \varepsilon, \quad \text{czyli} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

(1) Stąd wynika już na mocy znanego twierdzenia Cauchy'ego [33, 13)], że spełniony jest warunek (6), ale nie na odwrót, wobec tego wychodzimy teraz od szczególniejszego założenia niż (6).

(2) Korzystamy przy tym z oczywistych dla $0 < x < 1$ nierówności

$$1 - x^m = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{m-1}) < n(1-x)$$

oraz

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}.$$

a zatem $x \rightarrow 1$, gdy $N \rightarrow \infty$. Niech teraz N będzie na tyle duże, żeby: 1) spełniona była nierówność $\delta_{N+1} < \epsilon^2$ i 2) odpowiednie x było tak bliskie 1, że zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| < \epsilon.$$

Wówczas

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - A \right| < (2 + \delta_0) \epsilon,$$

co stanowi dowód tezy naszego twierdzenia.

Do rozpatrzzonego przypadku szczególnego sprowadza się przypadek ogólny. Wyprowadźmy oznaczenie

$$v_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \quad (n \geq 1), \quad v_0 = 0,$$

więc

$$a_n = \frac{1}{n} (v_n - v_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

i następnie

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n = a_0 + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Z założeń twierdzenia, tzn. z tego, że $v_n/n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, łatwo otrzymać wniosek, że

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0.$$

Dla dowodu rozbijemy tę sumę na dwie

$$(1-x) \sum_{1}^N + (1-x) \sum_{N+1}^{\infty}$$

i wybierzemy N w ten sposób, aby w drugiej sumie wszystkie współczynniki v_n/n były mniejsze od ϵ dla danej liczby $\epsilon > 0$. Wówczas cała druga suma będzie mniejsza od ϵ dla każdego x . Jeśli chodzi o pierwszą sumę, która ma tylko skończoną liczbę składników, to możemy to samo osiągnąć kosztem przybliżenia x do 1.

Mamy więc wobec (7), (5) i (8)

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

Tu możemy już jednak zastosować udowodniony szczególny przypadek naszego twierdzenia, więc także

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$

Z drugiej strony,

$$\sum_{m=1}^n \frac{v_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^n \frac{v_m}{m} - \sum_{m=1}^n \frac{v_m}{m+1} = \sum_{m=1}^n \frac{v_m}{m} - \sum_{m=1}^{n+1} \frac{v_{m+1}}{m} = -\frac{v_{n+1}}{n+1} + \sum_{m=1}^n a_m.$$

Ponieważ pierwszy składnik dąży do zera, wynika stąd, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n a_m = A - a_0,$$

co kończy dowód twierdzenia.

Później różni autorzy udowodnili wiele subtelnych twierdzeń tego typu (przyjęto się nazywać je *twierdzeniami tauberowskimi*) modyfikujących i rozszerzających warunki Taubera. Nie będziemy się na tym zatrzymywali.

420. Metoda średnich arytmetycznych. Idea tej metody w swojej najprostszej realizacji pochodzi od G. Frobeniusa, ale wiążą ją zwykle z nazwiskiem E. Cesaro, który metodę tę dalej rozwinał. A oto na czym metoda ta polega:

Dla ciągu sum częściowych danego szeregu liczbowego (A) tworzymy kolejne średnie arytmetyczne

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n}, \quad \dots;$$

jeżeli ciąg $\{\alpha_n\}$ ma granicę A , gdy $n \rightarrow \infty$, to liczbę tę nazywamy *uogólnioną sumą (w sensie Cesary)* danego szeregu.

PRZYKŁADY. 1) Wracając do szeregu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

mamy tutaj

$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \quad \alpha_{2k-1} = \frac{1}{2},$$

a zatem $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Otrzymaliśmy tę samą sumę co metodą Poissona-Abela [418, 1)].

2) Sumy częściowe szeregu

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

są równe (jeśli tylko $\theta \neq 0$)

$$A_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}.$$

Teraz nie jest już trudno obliczyć średnie arytmetyczne:

$$\begin{aligned} (n+1)\alpha_n &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^n \sin(m + \frac{1}{2})\theta = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^n [\cos m\theta - \cos(m+1)\theta] = \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)\theta}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc

$$\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^2.$$

Oczywiście $\alpha_n \rightarrow 0$ i granica uogólniona dla $\theta \neq 0$ także tutaj równa się 0 [porównaj 418, 2)].

3) Wreszcie niech znowu będzie dany szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

Dla $\theta \neq 0$ mamy

$$A_n = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta - \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$$

dalej

$$(n+1)\alpha_n = \frac{n+1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \sum_{m=1}^{n+1} [\sin(m+1)\theta - \sin m\theta] = \\ = \frac{n+1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+2)\theta - \sin\theta}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

Widać stąd, że $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$.

We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy metodą Cesary tą samą sumę uogólnioną co i wyżej metodą Poissona-Abela. Dalej — w ustępie 421 — wyjaśnimy, że to nie jest przypadkowe.

Tutaj także liniowość metody jest bezpośrednio widoczna. Znane twierdzenie Cauchy'ego [33, 13)] gwarantuje w przypadku istnienia granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

że ciąg średnich arytmetycznych $\{\alpha_n\}$ ma tę samą granicę. Wobec tego metoda Cesary jest regularna.

421. Wzajemny stosunek metod Poissona-Abela i Cesary. Zaczniemy od prostej uwagi.

Jeżeli szereg (A) jest sumowalny metodą średnich arytmetycznych do skończonej sumy A, to jest

$$a_n = o(n).$$

Rzeczywiście, z tego że $\alpha_{n-1} \rightarrow A$ i $\frac{n+1}{n} \alpha_n \rightarrow A$ wynika, że

$$\frac{(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} \rightarrow 0,$$

a więc także

$$\frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{A_{n-1}}{n-1} \rightarrow 0,$$

co też należało udowodnić.

Zagadnienie postawione w tytule ustępu rozstrzyga następujące twierdzenie udowodnione przez Frobeniusa.

Jeżeli szereg (A) jest sumowalny metodą średnich arytmetycznych do skończonej sumy A, to jest on jednocześnie sumowalny metodą Poissona-Abela i przy tym do tej samej sumy.

Niech więc $\alpha_n \rightarrow A$. Wobec uwagi zrobionej na początku tego ustępu oczywista jest zbieżność szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

dla $0 < x < 1$. Wykonując dwukrotnie przekształcenie Abela [patrz 383, a szczególnie 385, 6)] będziemy kolejno otrzymywali

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_n x^n \text{ (1).}$$

Należy przy tym pamiętać, że $A_0 + A_1 + \dots + A_n = (n+1) \alpha_n$. Wiadomo, że dla $0 < x < 1$ jest $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, czyli

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Pomnóżmy obie strony tej tożsamości przez A i odejmijmy stronami tożsamość otrzymaną wyżej; dostaniemy

$$A - f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (A - \alpha_n) x^n.$$

Sumę po prawej stronie rozbijmy na dwie części

$$(1-x)^2 \sum_0^{N-1} + (1-x)^2 \sum_N^{\infty}$$

wybierając w ten sposób N , żeby dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|A - \alpha_n| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest dowolną z góry daną liczbą dodatnią. Wówczas bezwzględna wartość drugiej sumy jest sama mniejsza od ε (niezależnie od x), a dla pierwszej sumy można to osiągnąć kosztem przybliżenia x do 1. Tym samym zakończony jest dowód twierdzenia [porównaj z dowodem twierdzenia Abela w ustępie 418].

Stwierdziliśmy zatem, że we wszystkich przypadkach, kiedy da się zastosować metoda Cesary, da się także zastosować metoda Poissona-Abela i to z tym samym wynikiem. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: istnieją szeregi, które są sumowalne metodą Poissona-Abela, a nie mają sumy uogólnionej w sensie Cesary. Rozpatrzmy na przykład szereg

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

Ponieważ w widoczy sposób nie jest tu spełniony konieczny warunek sumowalności

(1) O prawdziwości tej tożsamości można się też łatwo przekonać bezpośrednio, wychodząc od zbieżnego, wobec ograniczoności α_n , szeregu występującego po prawej stronie:

$$\begin{aligned} (1-2x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) \alpha_n - 2n\alpha_{n-1} + (n-1) \alpha_{n-2}] x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+1) \alpha_n - n\alpha_{n-1}] - [n\alpha_{n-1} - (n-1) \alpha_{n-2}]\} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Przyjmujemy przy tym $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = A_{-1} = 0$. Zbieżność ostatniego szeregu wynika tu jako wniosek.

metodą średnich arytmetycznych podany na początku ustępu, nie można tu stosować tej metody. Tymczasem szereg

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

ma dla $0 < x < 1$ sumę $1/(1+x)^2$, która dąży do granicy $1/4$, gdy $x \rightarrow 1-0$. Ta liczba będzie więc uogólnioną sumą naszego szeregu w sensie Poissona-Abela.

Metoda Poissona-Abela jest więc silniejsza, tzn. da się zastosować w szerszej klasie przypadków niż metoda Cesary, jest z nią jednak zgodna w tych przypadkach, gdy obie dają się zastosować.

422. Twierdzenie Hardy'ego-Landaua. Tak samo jak w przypadku metody Poissona-Abela, dla metody Cesary można także udowodnić twierdzenia typu tauberowskiego, ustalające te dodatkowe warunki dla wyrazów szeregu, przy spełnianiu których z sumowalnością szeregu metodą średnich arytmetycznych wynika już zbieżność szeregu w zwykłym sensie.

Na mocy twierdzenia Frobeniusa jest jasne, że każde twierdzenie tauberowskie dla metody Poissons-Abela daje w szczególności takie samo twierdzenie dla metody Cesary. Na przykład samo twierdzenie Taubera w przypadku metody Cesary brzmi tak: *jeżeli $\alpha_n \rightarrow A$ i spełniony jest warunek*

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0,$$

to także $A_n \rightarrow A$. Zresztą wynika ono tutaj bezpośrednio z łatwej do sprawdzenia tożsamości

$$A_n - \alpha_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} \quad (1),$$

która w danym przypadku pokazuje nawet, że warunek (9) jest konieczny.

Hardy ustalił, że wnioskować z $\alpha_n \rightarrow A$, że $A_n \rightarrow A$, można nie tylko wtedy, gdy $a_n = o(1/n)$, co jest zawarte w poprzednim, ale także przy słabszym założeniu, że

$$|ma_m| < C \quad (C = \text{const}; \quad m = 1, 2, 3, \dots).$$

Landau, wykazał, że można się zadowolić nawet jednostronnym spełnieniem tej nierówności.

Jeżeli szereg (A) jest sumowalny do sumy A metodą średnich arytmetycznych i jest przy tym spełniony warunek

$$ma_m > -C \quad (C = \text{const}; \quad m = 1, 2, 3, \dots),$$

to także

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

(Zmieniając znaki wszystkich wyrazów szeregu widzimy, że dostateczne jest także założenie nierówności przeciwniej

$$ma_m < C.$$

W szczególności twierdzenie jest oczywiście słuszne dla szeregów o wyrazach stałego znaku).

Dla dowodu rozpatrzmy najpierw sumę

$$S = \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m,$$

gdzie n i k są dowolnymi liczbami naturalnymi. Przez przekształcenie tożsamościowe możemy tę sumę sprowadzić łatwo do postaci

$$(10) \quad S = \sum_{m=0}^{n+k} A_m - \sum_{m=0}^n A_m = (n+k+1) \alpha_{n+k} - (n+1) \alpha_n = k\alpha_{n+k} + (n+1)(\alpha_{n+k} - \alpha_n).$$

(1) Mamy

$(n+1) A_n - (n+1) \alpha_n = (n+1) A_n - (A_0 + A_1 + \dots + A_n) = (A_n - A_0) + (A_n - A_1) + \dots + (A_n - A_{n-1}) = = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_2 + \dots + a_n) + \dots + a_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n.$

Dla dowolnego A_m (gdy $n < m < n+k$) możemy otrzymać, korzystając z przyjętej w założeniu nierówności $a_n > -C/m$, następujące oszacowanie z dołu:

$$A_m = A_n + (a_{n+1} + \dots + a_m) > A_n - \frac{k}{n} C,$$

skąd po zsumowaniu względem m otrzymujemy

$$S > kA_n - \frac{k^2}{n} C.$$

W zestawieniu z (10) daje nam to nierówność

$$(11) \quad A_n < \alpha_{n+k} + \frac{n+1}{k} (\alpha_{n+k} - \alpha_n) + \frac{k}{n} C.$$

Będziemy teraz w dowolny sposób zwiększać n do nieskończoności, a zmianę k poddamy takiemu ograniczeniu, by stosunek k/n dążył do z góry danej liczby $\varepsilon > 0$. Wówczas prawa strona nierówności (11) będzie dążyła do granicy równej $A + \varepsilon C$, dla dostatecznie dużych wartości n będzie więc

$$(12) \quad A_n < A + 2\varepsilon C.$$

Zupełnie analogicznie, rozpatrując sumę

$$S' = \sum_{m=n-k+1}^n A_m = k\alpha_{n-k} + (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n-k})$$

i znajdując dla A_m ($n-k < m < n$) oszacowanie z góry

$$A_m = A_n - (a_{m+1} + \dots + a_n) < A_n + \frac{k}{n-k} C,$$

dojdziemy do nierówności

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k} C.$$

Stąd

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n+1}{k} (\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k} C.$$

Jeżeli $n \rightarrow \infty$ i równocześnie $k/n \rightarrow e$ tak samo jak poprzednio (z tym, że teraz zakładamy $\varepsilon < \frac{1}{2}$), to prawa strona tej nierówności dąży do granicy $A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} C > A - 2\varepsilon C$. Dla dostatecznie dużych n okazuje się zatem, że

$$(13) \quad A_n > A - 2\varepsilon C$$

Zestawiając nierówności (12) i (13) widzimy, że rzeczywiście

$$\lim A_n = A.$$

Twierdzenie zostało udowodnione.

Zauważymy, że podobne twierdzenie tauberowskie zostało potem udowodnione także dla sumowania Poissona-Abela. Udoskonalone przed chwilą twierdzenie jest szczególnym wnioskiem z tamtego. Jednak z powodu skomplikowanego dowodu nie przytoczymy go tutaj.

423. Zastosowanie sumowania uogólnionego do mnożenia szeregów. Zatrzymamy się na zastosowaniu uogólnionych metod sumowania do mnożenia szeregów według reguły Cauchy'ego [389]. Niech będzie dany oprócz szeregu (A) jeszcze szereg

$$(B) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots$$

Szereg

$$(C) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$$

nazywa się *iloczynem Cauchy'ego* szeregów (A) i (B). Jeżeli dane szeregi są zbieżne i mają zwykłe sumy A i B, to szereg (C) może być mimo to rozbieżny [przykład taki mieliśmy w ustępie 392].

Jednakże we wszystkich przypadkach szereg (C) jest sumowalny metodą Poissona-Abela i to właśnie do sumy uogólnionej AB.

Rzeczywiście, dla $0 < x < 1$ zarówno szereg (1) jak i szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

są bezwzględnie zbieżne [379]. Oznaczmy ich sumy odpowiednio przez $f(x)$ i $g(x)$. Iloczyn tych szeregów, tzn. szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n,$$

jest zbieżny na mocy klasycznego twierdzenia Cauchy'ego [389] i jego suma równa się $f(x) \cdot g(x)$. Suma ta dąży do AB, gdy $x \rightarrow 1 - 0$, bo jak widzieliśmy jest

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = B.$$

Uogólnioną sumą (w sensie Poissona-Abela) szeregu (C) jest więc rzeczywiście AB, co należało udowodnić.

Stąd wynika jako wniosek twierdzenie Abela o mnożeniu szeregów [392]. Z samego dowodu widać również, że teza twierdzenia pozostaje w mocy, jeżeli szeregi (A) i (B) nie są koniecznie zbieżne, ale tylko sumowalne metodą Poissona-Abela odpowiednio do A i B.

Wobec tego, uwzględniając twierdzenie Frobeniusa [421], można także wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Jeżeli szeregi (A), (B) i (C) są sumowalne metodą Cesary i mają odpowiednio sumy uogólnione równe A, B, C, to musi być C = AB.

Jako przykład rozpatrzymy podnoszenie do kwadratu szeregu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \dots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} + \dots,$$

który to szereg powstaje z szeregu dwumennego

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \dots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^m + \dots,$$

gdy $x = 1$. Mnożąc powyższy szereg liczbowy przez siebie otrzymamy dobrze nam znany szereg

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (1),$$

którego uogólniona suma, zarówno otrzymana metodą Poissona-Abela, jak i otrzymana metodą Cesary, jest równa $\frac{1}{2} = (1/\sqrt{2})^2$.

(1) Korzystamy tu z tożsamości liczbowej

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \equiv \frac{(2n \cdot 2m \cdot 1)!!}{(2n \cdot 2m)!!} \equiv 1,$$

gdzie umawiamy się, że $(-1)!!$ i $0!!$ równają się jedności.

Podniesiemy dalej do kwadratu ten szereg. Otrzymujemy szereg

$$1 - 2 + 2 - 3 + \dots,$$

którego suma uogólniona otrzymana metodą Poissona-Abela wynosi $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Metodą Cesary szereg ten nie jest sumowalny.

424. Inne metody sumowania uogólnionego szeregów. 1) *Metody G. F. Woronoja.* Niech będzie dany ciąg liczbowy $\{p_n\}$ i niech

$$P_0 = p_0, \dots, P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \quad (n > 0).$$

Z sum częściowych A_n szeregu (A) utworzymy wyrażenia

$$w_n = \frac{p_n A_0 + p_{n-1} A_1 + \dots + p_0 A_n}{P_n}.$$

Jeżeli $w_n \rightarrow A$, gdy $n \rightarrow \infty$, to A nazywa się *sumą uogólnioną szeregu (A) w sensie Woronoja przy danym ciągu $\{p_n\}$* .

Liniowość metody, zarówno w tym przypadku, jak i w następnych, jest oczywista i nie będziemy sięgała tym zatrzymywali.

Aby metoda Woronoja była regularna, potrzeba i wystarcza, by

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0.$$

Konieczność warunku. Założymy najpierw, że rozpatrywana metoda jest regularna. Niech z tego, że $A_n \rightarrow A$, wynika zawsze, że $w_n \rightarrow A$. Jeśli w szczególności weźmiemy szereg

$$1 - 1 + 0 + 0 + 0 + \dots,$$

którego pierwsza suma częściowa $A_0 = 1$, a pozostałe $A_n = 0$ (zatem także $A = 0$), to musi być

$$w_n = p_n / P_n \rightarrow 0.$$

Dostateczność. Założymy teraz, że warunek zawarty w twierdzeniu jest spełniony i udowodnimy, że z $A_n \rightarrow A$ wynika $w_n \rightarrow A$.

Sięgniemy do twierdzenia Toeplitza [391] i zastąpimy w nim x_n przez A_n , a t_{nm} przez p_{n-m}/P_n . Warunek (a) tego twierdzenia jest spełniony, gdyż

$$t_{nm} = \frac{p_{n-m}}{P_n} < \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}} \rightarrow 0.$$

Spełnienie warunków (b) i (c) jest oczywiste, bowiem

$$\sum_{m=0}^n |t_{nm}| = \sum_{m=0}^n t_{nm} = 1.$$

A zatem $w_n \rightarrow A$, co należało udowodnić.

2) *Uogólnione metody Cesary.* Poznaliśmy już w ustępie 420 metodę średnich arytmetycznych. Jest ona najprostszą spośród nieskończonego ciągu metod sumowania podanych przez Cesarę. Dla ustalonego k wprowadza Cesaro ciąg o wyrazach

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{\binom{n+k-1}{k-1} A_0 + \binom{n+k-2}{k-1} A_1 + \dots + \binom{k-1}{k-1} A_n}{\binom{n+k}{k}}$$

i granicę tego ciągu dla $n \rightarrow \infty$ traktuje jako sumę uogólnioną (rzędu k) szeregu (A). Dla $k = 1$ wracamy do średnich arytmetycznych.

W dalszym ciągu przyda nam się często następujący związek między współczynnikami dwumianu Newtona:

$$(14) \quad \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.$$

Łatwo go udowodnić metodą indukcji zupełnej wychodząc ze znanej tożsamości

$$\binom{n+k}{k} = \binom{(n-1)+k}{k} + \binom{n+(k-1)}{k-1}.$$

Przede wszystkim wykażemy, że *metody Cesary wszystkich rzędów są szczególnymi przypadkami metod Woronoja*. W tym celu wystarczy przyjąć $p_n = \binom{n+k-1}{k-1}$, bo z (14) wynika wówczas, że $P_n = \binom{n+k}{k}$ i ponadto oczywiście

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{n+k} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Za pomocą tej samej równości (14) stwierdzamy na podstawie samej definicji wielkości $S_n^{(k)}$, że

$$(15) \quad S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)} (1).$$

Pozwala to wykryć wzajemny związek między metodą sumowalności Cesary rzędu k i rzędu $k-1$. Niech szereg (A) będzie sumowalny metodą rzędu $k-1$, tzn. $\gamma_n^{(k-1)} \rightarrow A$. Na mocy wzorów (14) i (15) mamy

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{\binom{k-1}{k-1} \gamma_0^{(k-1)} + \binom{k}{k-1} \gamma_1^{(k-1)} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} \gamma_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Stosując tutaj twierdzenie Toeplitza, w którym przyjmujemy

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \quad \text{i} \quad t_{nm} = \frac{\binom{n+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

dojdziemy do wniosku, że $\gamma_n^{(k)} \rightarrow A$. Zatem jeżeli szereg (A) jest sumowalny metodą Cesary jakiegoś rzędu, to jest sumowalny także każdą metodą wyższego rzędu i daje tę samą sumę uogólnioną.

Podamy teraz uogólnienie znanego nam już twierdzenia Frobeniusa [421].

Jeżeli szereg (A) jest sumowalny którykolwiek z metod Cesary (powiedzmy rzędu k), to jest on sumowalny do tej samej sumy także metodą Poissona-Abela.

Założymy, że

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = A.$$

Łatwo stąd wywnioskować, że szereg

$$(17) \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

jest zbieżny dla $-1 < x < 1$. Rzeczywiście, ponieważ $\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$, więc z (16) otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n^{(k)}|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}.$$

(1) $S_n^{(0)}$ oznacza A_n .

Jeżeli $A \neq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S_n^{(k)}|} = 1,$$

a więc na mocy twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda promień zbieżności szeregu (17) jest równy 1. W każdym razie nie jest on mniejszy od 1, jeżeli $A = 0$.

Rozpatrzmy teraz ciąg tożsamości ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n, \\ \dots &\dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n. \end{aligned}$$

Stwierdziliśmy wyżej zbieżność ostatniego szeregu w przedziale $(-1, 1)$. Wynika stąd [patrz 390, 4)] zbieżność wszystkich poprzednich szeregów. Ponadto jest

$$(18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \binom{n+k}{k} x^n$$

Zestawmy z tą tożsamością inną tożsamość

$$(19) \quad 1 = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n,$$

która zachodzi również w tym samym przedziale $(-1, 1)$. Otrzymuje się ją przez k -krotne różniczkowanie równości

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Mnożąc obie strony tożsamości (19) przez A i odejmując stronami równość (18) otrzymujemy w końcu

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} (A - \gamma_n^{(k)}) \binom{n+k}{k} x^n.$$

Dalsze rozumowania (z uwzględnieniem (16) są zupełnie podobne do tych, za pomocą których udowodniliśmy twierdzenie Abela w ustępie 418 i twierdzenie Frobeniusa w 421. Możemy je pozostawić czytelnikowi. W wyniku otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

co było do udowodnienia.

Zauważmy jeszcze, że istnieją szeregi rozbieżne, sumowalne metodą Poissona-Abela, lecz nie sumowalne żadną z uogólnionych metod Cesary. Tak więc pierwsza ze wspomnianych metod jest silniejsza od wszystkich pozostałych razem ziętych.

3) *Metody Höldera.* Metody te polegają po prostu na iterowanym stosowaniu metody średnich arytmetycznych. Wszystkie zagadnienia dotyczące ich regularności i wzajemnego stosunku rozstrzyga twierdzenie Cauchy'ego.

⁽¹⁾ Uwzględniamy tu związki typu (15).

Można udowodnić, że *k-krotne zastosowanie metody średnich arytmetycznych jest równoważne z zastosowaniem metody Cesary rzędu k*, tzn. w obu wypadkach są sumowalne te same szeregi i do tych samych sum.

4) *Metoda Borela.* Dla szeregu (A) o sumach częściowych A_n tworzymy wyrażenie

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jeżeli ostatni szereg jest zbieżny, chociażby dla dostatecznie dużych wartości x , i jego sumy dążą do granicy A , gdy $x \rightarrow \infty$, to liczbę tę nazywamy *sumą uogólnioną w sensie Borela* szeregu (A).

Udowodnimy regularność metody Borela. Założymy, że szereg (A) jest zbieżny i oznaczmy jego sumę przez A , a reszty $A - A_n$ przez α_n . Mamy dla dostatecznie dużych x

$$A - e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}.$$

Weźmy dowolnie małą liczbę $\epsilon > 0$. Istnieje takie N , że dla $n > N$ jest $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Przedstawimy ostatnie wyrażenie w postaci sumy

$$e^{-x} \sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}.$$

Bezwględna wartość drugiego składnika jest mniejsza od $\frac{1}{2}\epsilon$ dla każdego x , natomiast bezwględna wartość pierwszego, będącego iloczynem e^{-x} przez wielomian, staje się mniejsza od $\frac{1}{2}\epsilon$ dla dostatecznie dużych x . Tym samym jest wszystko udowodnione (¹).

5) *Metoda Eulera.* Dla szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

otrzymaliśmy w ustępie 413, wzór (7)

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Delta^p a_0}{2^{p+1}},$$

dający tzw. *przekształcenie Eulera*. Udowodniliśmy przy tym, że ze zbieżnością szeregu po lewej stronie wynika zbieżność szeregu po prawej stronie i równość sum tych szeregów.

Jednakowoż także w przypadku rozbieżności pierwszego szeregu może się okazać, że drugi szereg jest zbieżny. W takim przypadku Euler przypisywał sumę tego drugiego szeregu jako sumę uogólnioną pierwemu. Na tym polega właściwie metoda sumowania Eulera. Podana przed chwilą uwaga gwarantuje regularność tej metody.

Jeśli napiszemy rozpatrywany szereg w zwykłej postaci (A) nie wydzielając znaków + i -, i uwzględnimy wzór (4) z ustępu 413 na różnicę rzędu p , to możemy powiedzieć, że w metodzie Eulera za sumę uogólnioną szeregu (A) przyjmujemy zwykłą sumę szeregu

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_0 + \binom{p}{1} a_1 + \binom{p}{2} a_2 + \dots + \binom{p}{p} a_p}{2^{p+1}},$$

o ile ten ostatni jest zbieżny.

(¹) Czytelnik zauważ analogię między tym dowodem a dowodem twierdzenia Abela [418] i innych twierdzeń.

Na tym zakończymy przegląd różnych metod sumowania szeregów rozbieżnych, gdyż już te metody wystarczą, by dać czytelnikowi pojęcie o różnorodności sposobów podejścia do tego zagadnienia. Za każdym razem dowodziłyśmy regularności metody, jako jej niezbędnej własności. Niestety jednak nie zawsze mogliśmy się dostatecznie wglebić w zagadnienie wzajemnego stosunku różnych metod. Tymczasem może się zdarzyć, że dwie metody mają przecinające się zakresy stosowalności (ale żaden z nich nie pokrywa całkiem drugiego); może się też zdarzyć, że dwie metody przypisują jednemu i temu samemu szeregowi rozbieżnemu różne sumy uogólnione.

425. Przykłady. 1) Niech $\{a_n\}$ będzie nieujemnym, monotonicznie malejącym ciągiem zbieżnym do zera. Przyjmijmy

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (n > 0).$$

Udowodnić, że szereg

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots$$

o wyrazach zmieniających kolejno znak jest sumowalny metodą Cesary (pierwszego rzędu) i jego suma uogólniona jest równa połowie sumy zbieżnego szeregu naprzemiennego

$$\alpha = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

(G. H. Hardy).

Wskazówka. Obliczyć średnią arytmetyczną $2m$ początkowych sum częściowych danego szeregu. Da się ona przedstawić w postaci

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(a_0 - a_1) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) + \dots + (a_0 - a_1 + \dots + a_{2m-2} - a_{2m-1})}{m}$$

i na mocy twierdzenia Cauchy'ego [33, 13] dąży do $\frac{1}{2} \alpha$. Później łatwo już jest udowodnić, że do tej samej granicy dążą też średnie arytmetyczne pierwszych $2m+1$ sum częściowych.

2) Biorąc $a_n = \frac{1}{n+1}$ lub $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), wykazać na podstawie twierdzenia 1), że rozbieżne szeregi

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \dots \text{ (1)}$$

oraz

$$\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \dots$$

są obydwa sumowalne metodą Cesary i ich sumy uogólnione wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2} \ln 2$ i $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \pi$.

Wskazówka. Dla drugiego szeregu skorzystać z wzoru Wallisa [317].

3) Na podstawie tego samego twierdzenia udowodnić, że dla $-1 < x < 0$ rozbieżny szereg Dirichleta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\xi} \quad (\xi = -x, 0 < \xi < 1)$$

jest sumowalny metodą Cesary.

Wskazówka. Przedstawić n^{ξ} jako sumę

$$n^{\xi} = (1-0) + (2^{\xi}-1) + \dots + (n^{\xi}-(n-1)^{\xi})$$

i wykazać metodami rachunku różniczkowego, że ciąg o wyrazach $n^{\xi} - (n-1)^{\xi}$ maleje, gdy n rośnie, i przy tym, wobec 32, 5), dąży oczywiście do 0.

4) Jeżeli „rozrzedzimy” wyrazy szeregu zbieżnego wstawiając dodatkowo zera, to nie odbije się to ani na zbieżności szeregu, ani na wartości sumy. Jak widać z poniższych przykładów, dla sumowania uogólnionego rzecz się ma inaczej.

(1) H_n oznacza, jak zwykle n -tą sumę częściową szeregu harmonicznego.

Rozpatrzmy szeregi

- (a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ (b) $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots$
 $\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$ $\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$
(c) $0 + 1 - 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 - 1 + \dots$ ⁽¹⁾
 $\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$

O pierwszym szeregu wiemy już, że jego uogólniona suma w sensie Cesary równa się $\frac{1}{2}$. Wykazać, że szereg (b) ma już inną sumę uogólnioną, mianowicie $\frac{1}{3}$, a szereg (c) w ogóle nie jest sumowalny metodą Cesary.

Wskazówka. W przypadku szeregu (c), gdy n zmienia się od 2^{m-1} do $2^m - 1$ średnia arytmetyczna pierwszych $n+1$ wyrazów oscyluje od

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m-1} + 1} \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{do} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m}} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

5) Przyjmując, że k jest dowolną liczbą naturalną, rozpatrzymy szereg

$$\sum_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k}$$

i udowodnimy, że szereg \sum_k nie jest sumowalny metodą Cesary rzędu k , lecz jest sumowalny metodą Cesary rzędu $k+1$ (i ma przy tym sumę uogólnioną $1/2^{k+1}$).

Korzystając z równości (18) i dwukrotnie z (19) (zastępując za pierwszym razem x przez $-x$, a za drugim x przez x^2) otrzymujemy po kolei ⁽²⁾

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x^2)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^{2n}.$$

Porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x w pierwszym i w ostatnim szeregu (korzystamy przy tym z twierdzenia o tożsamości szeregów, które zostanie udowodnione dopiero dalej w ustępie 437, 3°) dochodzimy do wniosku, że

$$(21) \quad S_{2m}^{(k)} = \binom{m+k}{k}, \quad S_{2m+1}^{(k)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Wobec tego

$$\gamma_{2m}^{(k)} = \frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2m+k}{k}} \rightarrow \frac{1}{2^k}, \quad \gamma_{2m+1}^{(k)} = 0,$$

dany szereg nie ma więc uogólnionej sumy Cesary rzędu k .

Z drugiej strony, wobec (21), (15) i (14), zarówno dla $n = 2m$, jak i dla $n = 2m+1$ zachodzi równość

$$S_n^{(k+1)} = \binom{k}{k} + \binom{1+k}{k} + \dots + \binom{m+k}{k} = \binom{m+k+1}{k+1}.$$

Stąd

$$\gamma_{2m}^{(k+1)} = \frac{\binom{m+k+1}{k+1}}{\binom{2m+k+1}{k+1}} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}}$$

i to samo jest słuszne dla $\gamma_{2m+1}^{(k+1)}$, co stanowi dowód naszego twierdzenia.

⁽¹⁾ Wyraz ± 1 stojący w (a) na miejscu m (gdzie $m = 0, 1, 2, 3, \dots$) jest tu przesunięty na miejsce 2^m . Pozostałe miejsca są wypełnione zerami.

⁽²⁾ Zbieżność ostatniego szeregu w przedziale $(-1, 1)$ można łatwo udowodnić za pomocą twierdzenia Cauchy'ego, a stąd wynika już zbieżność pierwszego szeregu.

6) Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k,$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, jest także sumowalny metodą Cesary rzędu $k+1$. Można to stwierdzić na podstawie poprzedniego wyniku.

Rzeczywiście. Rozwińmy $\binom{n+k}{k}$ według potęg $n+1$:

$$\binom{n+k}{k} = \frac{1}{k!} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) = \alpha_1^{(k)}(n+1)^k + \alpha_2^{(k)}(n+1)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}^{(k)}(n+1);$$

$\alpha_i^{(k)}$ są stałymi współczynnikami, przy czym $\alpha_1^{(k)} = 1/k! \neq 0$. Pisząc jeszcze kilka takich równości z zastąpieniem k kolejno przez $k-1, k-2, \dots, 1$ możemy łatwo przedstawić, na odwrót, $(n+1)^k$ w postaci sumy

$$(n+1)^k = \beta_1^{(k)} \binom{n+k}{k} + \beta_2^{(k)} \binom{n+k-1}{k-1} + \dots + \beta_k^{(k)} \binom{n+1}{1}$$

ze stałymi współczynnikami $\beta_i^{(k)}$. Ale wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k = \beta_1^{(k)} \sum_k + \beta_2^{(k)} \sum_{k-1} + \dots + \beta_k^{(k)} \sum_1.$$

Ponieważ wszystkie szeregi $\sum_i (i=1, 2, \dots, k)$ są sumowalne metodą Cesary rzędu $k+1$ (uwzględniamy tutaj własności metod Cesary kolejnych rzędów), dany szereg jest również sumowalny metodą Cesary wobec liniowości tej metody.

Samo obliczenie uogólnionej sumy będącym w stanie wykonać dopiero dalej [449].

Podamy jeszcze kilka przykładów bezpośredniego zastosowania metod Höldera, Borela i Eulera.

7) Zsumować metodą Höldera szeregi

$$(a) 1-2+3-4+\dots \quad (b) 1-3+6-10+\dots$$

Odpowiedź. (a) Dwukrotne wzięcie średniej daje sumę $\frac{1}{4}$. (b) Trzykrotne wzięcie średniej daje $\frac{1}{8}$.

8) Zsumować szereg

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

metodą Borela.

Odpowiedź. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$.

9) Zsumować metodą Eulera szeregi

$$(a) 1-1+1-1+\dots, \quad (b) 1-2+2-4+\dots,$$

$$(c) 1-2+2^2-2^4+\dots, \quad (d) 1^3-2^3+3^3-4^3+\dots$$

Wskazówka. We wszystkich przypadkach wygodnie jest korzystać z przekształcenia Eulera w formie (20).

Odpowiedź. (a) $A = \frac{1}{2}$; (b) $\Delta^0 a_0 = 1, \Delta^p a_0 = 0$ dla $p > 1, A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; (c) $\Delta^p a_0 = 1, A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots = \frac{1}{3}$; (d) $\Delta^0 a_0 = 1, \Delta^1 a_0 = 7, \Delta^2 a_0 = 12, \Delta^3 a_0 = 6, \Delta^p a_0 = 0$ dla $p > 3, A = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{12}{8} - \frac{6}{16} = -\frac{1}{8}$.

426. Ogólna klasa liniowych, regularnych metod sumowania. Podamy na zakończenie pewien bardzo ogólny schemat konstrukcji całej klasy regularnych metod sumowania, która zawiera w szczególności wszystkie metody przytoczone wyżej.

Niech będzie dany w pewnym obszarze X zmienności parametru x ciąg funkcji

$$(\Phi) \quad \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \dots, \quad \varphi_n(x), \quad \dots$$

Załóżmy, że obszar \mathcal{X} ma punkt skupienia ω skończony lub nieskończony. Dla danego szeregu liczbowego (A) tworzymy szereg

$$(22) \quad A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \dots + A_n \varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x),$$

złożony z funkcji, gdzie $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Jeżeli ten szereg jest zbieżny, chociażby tylko dla x dostatecznie bliskich ω , a jego suma dąży do granicy A , gdy $x \rightarrow \omega$, to liczbę A przyjmujemy jako sumę uogólnioną danego szeregu (A).

Otrzymujemy w ten sposób metodę sumowania szeregów związaną z wyborem ciągu (Φ) i punktu granicznego ω . Z samej konstrukcji metody widoczna jest jej liniowość. Założymy teraz, że funkcje $\varphi_n(x)$ spełniają następujące trzy żądania.

(a) dla dowolnego ustalonego n

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \varphi_n(x) = 0;$$

(b) dla wartości x dostatecznie bliskich ω ⁽¹⁾

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x)| < K \quad (K = \text{const});$$

(c) wreszcie

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1.$$

Wówczas metoda sumowania jest regularna.

Dowód. Niech zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

Wówczas dla przyjętej liczby $\varepsilon > 0$ znajdzie się takie n' , że dla $n > n'$ zachodzi nierówność

$$(23) \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Wobec ograniczoności A_n i bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$, będzie także zbieżny – przynajmniej dla $|x - \omega| < \delta'$ ($x > \Delta'$) – szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$. Jest ponadto oczywiście

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) - A = \sum_{n=0}^{n'} (A_n - A) \varphi_n(x) + \sum_{n=n'+1}^{\infty} (A_n - A) \varphi_n(x) + A \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1 \right],$$

a więc po przejściu do wartości bezwzględnych mamy

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) - A \right| < \left| \sum_{n=0}^{n'} (A_n - A) \varphi_n(x) \right| + \sum_{n=n'+1}^{\infty} |A_n - A| |\varphi_n(x)| + |A| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1 \right|.$$

Drugi składnik po prawej stronie jest mniejszy od $\frac{1}{3} \varepsilon$ na mocy nierówności (23) i warunku (b). Co do pierwszego i trzeciego składnika, to każdy z nich można uczynić mniejszym od $\frac{1}{3} \varepsilon$ biorąc x dostatecznie bliskie ω na mocy warunków (a) i (c). Wobec tego

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A,$$

tzn. suma uogólniona istnieje i jest równa sumie zwykłej.

⁽¹⁾ To znaczy dla $|x - \omega| < \delta'$, jeżeli ω jest skończone, lub dla $x > \Delta'$, jeżeli $\omega = +\infty$.

Jeżeli parametr x przebiega wartości naturalne m (a zatem $\omega = +\infty$), to miejsce ciągu funkcji (Φ) zajmuje nieskończona macierz prostokątna

	t_{00}	t_{01}	t_{02}	...	t_{0m}	...
	t_{10}	t_{11}	t_{12}	...	t_{1m}	...
	t_{20}	t_{21}	t_{22}	...	t_{2m}	...

	t_{n0}	t_{n1}	t_{n2}	...	t_{nm}	...

(T)

Za sumę uogólnioną szeregu (A) przyjmuje się granicę dla $m \rightarrow \infty$ ciągu o wyrazach

$$T_m = A_0 t_{0m} + A_1 t_{1m} + \dots + A_n t_{nm} + \dots,$$

przy założeniu, że szereg ten jest zbieżny przynajmniej dla dostatecznie dużych wartości m .

Warunki regularności metody przyjmują w tym przypadku postać:

(a) przy dowolnym ustalonym n

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_{nm} = 0 ;$$

(b) dla dostatecznie dużych m

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| < K \quad (K = \text{const}) ;$$

(c) wreszcie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1 .$$

W istocie wszystkie te idee należą do Toeplitza [porównaj 391], który zakładał — jak czytelnik pamięta — że macierz jest trójkątna. Najczęściej też wystarczał nam ten przypadek szczególny. Zauważymy jeszcze, że pod ten schemat podpada bezpośrednio zarówno metoda sumowania Poissona-Abela jak i metoda Borela. W pierwszym przypadku mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n A_n .$$

więc rolę $\varphi_n(x)$ odgrywa czynnik $(1-x) x^n$ w obszarze $\mathcal{X} = (0, 1)$ ($\omega = 1$). W drugim przypadku $\varphi_n(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$ w obszarze $\mathcal{X} = (0, +\infty)$, $\omega = +\infty$. Spełnienie warunków (a), (b), (c) można łatwo sprawdzić i tym samym udowodnić jeszcze raz regularność tych metod.

Ogólną definicję metody sumowania podaną wyżej można także wyłożyć w ten sposób, żeby występowały w niej nie sumy częściowe A_n , lecz bezpośrednio wyrazy a_n szeregu (A). Nie będziemy się na tym zatrzymywali.

ROZDZIAŁ XII

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

§ 1. Zbieżność jednostajna

427. Uwagi wstępne. W poprzednim rozdziale zapoznaliśmy się z ciągami nieskończonymi i ich granicami oraz szeregami nieskończonymi i ich sumami. Wyrazami tych ciągów i szeregów były liczby stałe. Co prawda w niektórych przypadkach w ich skład wchodziły, jako parametry, pewne wielkości zmienne, lecz w trakcie badań zawsze przypisywaliśmy im określone wartości stałe. Więc na przykład gdy ustaliliśmy, że ciąg

$$1 + \frac{x}{1}, \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2, \quad \dots, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \dots$$

ma granicę e^x lub że szereg

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

ma sumę $\ln(1+x)$, x było dla nas liczbą stałą. Funkcyjnej natury wyrazów ciągu i jego granicy lub wyrazów szeregu i jego sumy nie braliśmy w ogóle pod uwagę. Przypuśćmy, że dany jest ciąg, którego wyrazami są funkcje

$$(1) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \dots, \quad f_n(x), \quad \dots$$

tej samej zmiennej x , określone w pewnym obszarze zmienności $\mathcal{X} = \{x\}$ ⁽¹⁾. Niech dla każdej wartości x z \mathcal{X} ciąg ten ma granicę skońzoną. Ponieważ jest ona całkowicie wyznaczona przez x , więc jest też funkcją x (w \mathcal{X}):

$$(2) \qquad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

będziemy ją nazywali *funkcją graniczną* ciągu (1) (lub funkcji $f_n(x)$).

Teraz będzie nas interesowało nie tylko samo istnienie granicy dla każdej poszczególnej

⁽¹⁾ Najczęściej będzie to przedział, zachowamy jednak na razie największą ogólność i przez \mathcal{X} będziemy rozumieli dowolny zbiór liczbowy nieskończony.

wartości x , lecz także własności funkcyjne funkcji granicznej. Żeby czytelnik mógł z góry wiedzieć jakiego rodzaju zagadnienia przy tym powstaną, przytoczymy dla przykładu jedno z nich.

Przypuśćmy, że wszystkie wyrazy ciągu (1) są funkcjami ciągłymi zmiennej x w pewnym przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$; czy gwarantuje to ciągłość funkcji granicznej? Jak widać z następujących przykładów własność ciągłości czasami przechodzi na funkcję graniczną, a czasem nie.

PRZYKŁADY. We wszystkich przypadkach $\mathcal{X} = \langle 0, 1 \rangle$.

1) $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ dla $x < 1$ i $f(1) = 1$ (nieciągłość dla $x = 1$).

2) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $f(x) = 0$ dla $x > 0$ i $f(0) = 1$ (nieciągłość dla $x = 0$).

3) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$ dla wszystkich x (wszędzie ciągła).

4) $f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}$, $f(x) = 0$ dla wszystkich x (to samo).

Naturalnie powstaje zagadnienie: ustalić warunki, przy których funkcja graniczna zachowuje ciągłość; tym zagadnieniem zajmiemy się w 431 (i 432).

Widzieliśmy już [362], że rozpatrywanie szeregu liczbowego i jego sumy jest tylko inną formą badania ciągu liczbowego i jego granicy. Rozpatrzmy teraz szereg, którego wyrazami są funkcje tej samej zmiennej x w pewnym obszarze \mathcal{X} :

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Przypuśćmy, że szereg ten jest zbieżny dla każdej wartości x z \mathcal{X} ; wtedy jego suma $f(x)$ też jest pewną funkcją zmiennej x . Suma ta będzie określona przez równość graniczną postaci (2), jeżeli przez $f_n(x)$ będziemy rozumieli sumę częściową

$$(4) \quad f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Na odwrót, funkcję graniczną dla dowolnie przyjętego ciągu (1) można badać pod postacią sumy szeregu (3), jeżeli przyjmiemy

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \quad \dots, \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \dots$$

Najczęściej będziemy mieli do czynienia z szeregiem funkcyjnymi, ponieważ ta forma badania funkcji granicznej jest zwykle w praktyce wygodniejsza.

Należy tu również podkreślić, że przedmiotem naszych dalszych badań będą nie tylko zagadnienia zbieżności szeregu (3), lecz i własności funkcyjne jego sumy. Jako przykład może służyć zagadnienie ciągłości sumy szeregu, przy założeniu ciągłości wszystkich jego wyrazów; jest to właśnie zagadnienie, o którym wspominaliśmy uprzednio.

Jak się okazuje, własności funkcyjne funkcji granicznej (lub co na to samo wychodzi, sumy szeregu) $f(x)$ istotnie zależą od samego sposobu zbliżenia się $f_n(x)$ do $f(x)$ dla różnych wartości x . Badaniem typowych możliwości, które tu występują, zajmiemy się w następnym ustępie.

428. Zbieżność jednostajna i niejednostajna. Przypuśćmy, że równość (2) zachodzi dla wszystkich x z \mathcal{X} . Z samej definicji granicy wynika: jeżeli tylko ustalimy wartość x z \mathcal{X} (ażby mieć do czynienia z konkretnym ciągiem liczbowym), to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy taki wskaźnik N , że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$(5) \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

gdzie przez x rozumiemy właśnie tą ustaloną uprzednio wartość.

Biorąc inną wartość x otrzymamy inny ciąg liczbowy. Dla tego samego ε otrzymany wskaźnik N mógłby się okazać nie odpowiedni, musielibyśmy więc zastąpić go większym. Lecz x przebiega nieskończony zbiór wartości, otrzymamy więc również nieskończony zbiór różnych ciągów liczbowych zbieżnych do granicy. Dla każdego z nich z osobna znajdziemy odpowiednie N . Powstaje pytanie: czy istnieje taki wskaźnik N , który (dla danego z góry ε) nadawałby się dla wszystkich ciągów jednocześnie?

Pokażemy na przykładach, że w pewnych przypadkach taki wskaźnik N istnieje, w innych zaś nie.

1) Niech najpierw

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Ponieważ

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n};$$

widzimy od razu, że na to by nierówność $f_n(x) < \varepsilon$ była spełniona dla dowolnego x wystarczy przyjąć $n > 1/2\varepsilon$. Tak więc na przykład liczba $N = E(1/2\varepsilon)$ w tym przypadku nadaje się dla wszystkich x jednocześnie.

2) Niech będzie teraz [427, 3]:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Dla dowolnego ustalonego $x > 0$ wystarczy przyjąć $n > E(1/x\varepsilon)$, żeby zachodziła nierówność $f_n(x) < 1/nx < \varepsilon$. Z drugiej jednak strony, jakiekolwiek weźmiemy n , zawsze znajdziemy w przedziale $(0, 1)$ taki punkt, a mianowicie $x = 1/n$, w którym funkcja $f_n(x)$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ [tzn. $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$].

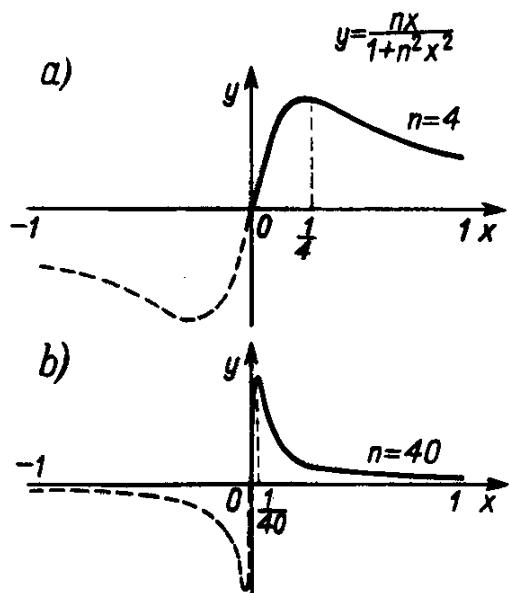
Tak więc za cenę zwiększenia n w żaden sposób nie możemy osiągnąć tego, by $f_n(x) < \frac{1}{2}$ dla wszystkich wartości x od 0 do 1 naraz. Innymi słowy już dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nie istnieje taki wskaźnik N , który nadawałby się dla wszystkich x jednocześnie.

Na rysunku 59 pokazane są wykresy tych funkcji dla $n = 4$ i dla $n = 40$: charakterystyczny jest garb o wysokości $\frac{1}{2}$ przesuwający się ze wzrostem n w lewo. Chociaż na każdej prostej pionowej z osobna, punkty ciągu krzywych wraz ze wzrostem n zbliżają się nieograniczenie do osi x , żadna krzywa w całości nie przywiera do tej osi na całym odcinku od $x = 0$ do $x = 1$.

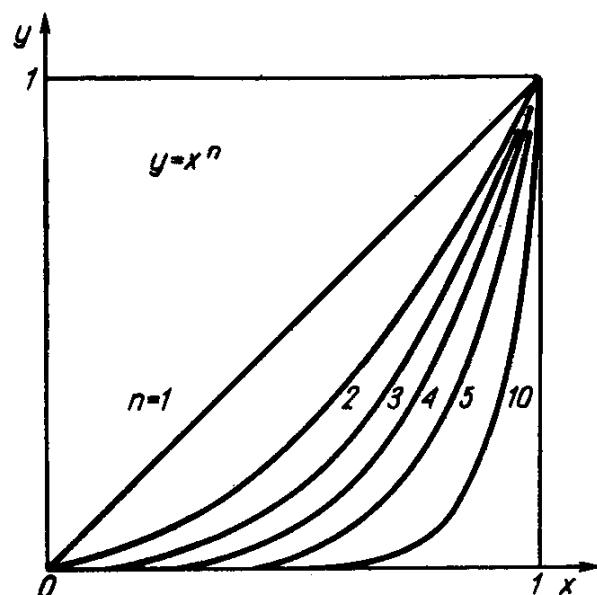
Inaczej wygląda sprawa z funkcjami rozpatrzonymi w 1); nie podajemy ich wykresów, bo na przykład dla $n = 4$ lub $n = 40$ można je otrzymać z wykresów podanych na rysunku 59 zmniejszając wszystkie rzędne odpowiednio 4 lub 40 razy. W tym przypadku krzywe od razu w całej rozciągłości przywierają do osi x .

Podamy teraz podstawową definicję.

Jeżeli 1° ciąg (1) ma w \mathcal{X} funkcję graniczną $f(x)$ i 2° dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki niezależny od x wskaźnik N , że dla $n > N$ nierówność (5) jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathcal{X}$ jednocześnie, to mówimy, że ciąg (1) jest **zbieżny [lub że dąży] do funkcji $f(x)$ jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X}** .



Rys. 59



Rys. 60

Tak więc w pierwszym z podanych przykładów $f_n(x)$ dąży do zera jednostajnie względem x w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, a w drugim nie.

Trzeba powiedzieć, że i dla innych funkcji rozpatrywanych w poprzednim ustępie zbieżność nie jest jednostajna. Wykażemy to.

3) Dla funkcji $f_n(x) = x^n$ [427, 1)] nierówność $x^n < \varepsilon$ (dla $\varepsilon < 1$) nie może być spełniona jednocześnie dla wszystkich $x < 1$, co widać chociażby z tego, że $x^n \rightarrow 1$, gdy (przy ustalonym n) $x \rightarrow 1$. Na rysunku 60 uwidoczniony jest ten swoisty charakter naruszenia jednostajności; funkcja graniczna zmienia się tam skokiem, a garb jest nieruchomy.

Niech

$$4) f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

lub

$$5) f_n(x) = 2n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2}.$$

Niemogliwość w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ jednostajnego przybliżenia do funkcji granicznej, która w obu przypadkach dla $x > 0$ jest równa 0, wynika z tego, że odpowiednio

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}.$$

W drugim przypadku wysokość garbów, które przeszkadzają w jednostajnym dążeniu do 0 wzrasta ponadto do nieskończoności.

Na przykładach funkcji x^n i $\frac{1}{1+nx}$ pokażemy jeszcze jeden sposób badania zagadnienia.

Nierówności

$$x^n < \varepsilon \quad \text{i} \quad \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

są równoważne odpowiednio nierównościom

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \quad \text{i} \quad n > \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \quad (0 < x < 1; \quad 0 < \varepsilon < 1).$$

Ponieważ wyrażenia po prawych stronach rosną nieograniczenie, gdy x zbliża się do 1 w przypadku pierwszym, a do 0 w przypadku drugim, więc oczywiście żaden wskaźnik n nie może spełniać tych nierówności dla wszystkich wartości x jednocześnie.

Wszystkie powyższe rozważania o zbieżności funkcji przeniesiemy teraz na przypadek szeregu funkcyjnego (3).

Zakładamy, że szereg jest zbieżny. Rozpatrzmy jego sumę $f(x)$, sumę częściową $f_n(x)$ [patrz (4)] i wreszcie jego n -tą resztę

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

Dla dowolnego ustalonego x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Jeżeli suma częściowa $f_n(x)$ dąży do sumy $f(x)$ szeregu jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X} [lub, co na to samo wychodzi, jeżeli reszta szeregu $\varphi_n(x)$ dąży jednostajnie do 0], to mówimy, że szereg (3) jest jednostajnie zbieżny w tym obszarze.

Definicja ta jest oczywiście równoważna z definicją następującą:

Szereg (3) zbieżny dla każdego x z obszaru \mathcal{X} nazywamy jednostajnie zbieżnym w tym obszarze, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki niezależny od x wskaźnik N , że dla $n > N$ nierówność

$$(6) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{lub} \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

jest spełniona jednocześnie dla wszystkich x z \mathcal{X} ⁽¹⁾.

Przykłady szeregów jednostajnie i niejednostajnie zbieżnych można oczywiście tworzyć przez przekształcenie podanych uprzednio przykładów ciągów. Doliczymy do nich kilka nowych przykładów.

⁽¹⁾ Pojęcie zbieżności jednostajnej szeregu zostało wprowadzone do nauki jednocześnie (w 1848 r.) przez Ph. von Seidela i G. Stokesa, lecz jeszcze przedtem stosował je w swoich wykładach Weierstrass.

6) Rozpatrzmy szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, jest on zbieżny w przedziale otwartym $X = (-1, 1)$.

Dla dowolnego x z X n -ta reszta ma postać

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Gdy n ustalimy dowolnie, to oczywiście będzie

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

Zarówno jeden jak i drugi wynik dowodzą, że przy tym samym n , dla wszystkich x jednocześnie, nie może być spełniona nierówność

$$|\varphi_n(x)| < \epsilon, \quad \text{gdy } \epsilon < \frac{1}{2}.$$

Zbieżność szeregu geometrycznego w przedziale $(-1, 1)$ jest niejednostajna; to samo dotyczy przedziałów $(-1, 0)$ i $(0, 1)$ z osobna.

7) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ jest zbieżny dla dowolnej wartości x z $X = (-\infty, +\infty)$, ponieważ spełnione są założenia twierdzenia Leibniza [381]. Zgodnie z uwagą zrobioną po udowodnieniu tego twierdzenia, bezwzględna wartość reszty szeregu szacuje się za pomocą jej pierwszego wyrazu

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Wynika stąd, że szereg jest w całym przedziale nieskończonym X zbieżny jednostajnie.

8) Analogicznie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny jednostajnie w $X = (-\infty, +\infty)$, ponieważ dla $x \neq 0$

$$|\varphi_n(x)| < \frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x^n}{1+nx^2+\dots} < \frac{1}{n}.$$

Ciekawe, że wprawdzie szereg bezwzględnych wartości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny, ale nie jednostajnie.

Rzeczywiście jego reszta dla $x \neq 0$

$$\varphi_n(x) = \frac{\frac{x^n}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

dla dowolnego ustalonego n dąży do 1, gdy $x \rightarrow 0$.

Uwaga. Jeżeli w przykładzie 2) zamiast odcinka $(0, 1)$ rozpatrzymy dowolny odcinek $(a, 1)$, gdzie $0 < a < 1$, to na nim zbieżność będzie już jednostajna. Rzeczywiście dla wszystkich $x > a$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{n}{1+n^2a^2} < \frac{1}{na^2}$$

Natomiast na dowolnym odcinku $(0, a)$ zbieżność jest oczywiście niejednostajna. Tak więc własność niejednostajności zazęszcza się jak gdyby wokół punktu $x = 0$; nazwiemy ten punkt *punktem niejednostajności*. To samo dotyczy również przykładów 4), 5), i 8). Analogiczną rolę odgrywa w przykładzie 3) punkt $x = 1$, a w przykładzie 6) oba punkty $x = -1, x = 1$.

W przykładach bardziej złożonych może występować nieskończanie wiele punktów niejednostajności.

429. Warunek jednostajnej zbieżności. Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego (39), ustalające warunek istnienia skończonej granicy danego ciągu liczbowego („zasada zbieżności”) prowadzi w sposób naturalny do następującego warunku zbieżności jednostajnej dla danego w obszarze \mathcal{X} ciągu funkcji (1):

Na to, żeby szereg (1): 1) miał funkcję graniczną i 2) był zbieżny do tej funkcji jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X} , potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniał taki wskaźnik N niezależny od x , żeby dla $n > N$ i dowolnego $m = 1, 2, 3, \dots$ nierówność

$$(7) \quad |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

zachodziła dla wszystkich x z \mathcal{X} jednocześnie.

Żądanie to można sformułować krótko tak: *zasada zbieżności dla ciągu (1) musi być spełniona jednostajnie dla wszystkich x z \mathcal{X} .*

Dowód. Warunek jest konieczny. Jeżeli ciąg (1) ma funkcję graniczną $f(x)$ i jest zbieżny do niej jednostajnie w \mathcal{X} , to dla danego $\varepsilon > 0$ znajdziemy niezależny od x wskaźnik N taki, że dla $n > N$ nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

będzie spełniona dla wszystkich x . Analogicznie

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

a z tych dwóch nierówności wynika (7).

Warunek jest wystarczający. Niech będzie spełniony warunek podany w twierdzeniu. Wtedy dla dowolnego ustalonego x z \mathcal{X} ciąg (1) będzie ciągiem liczbowym, dla którego spełnione jest założenie twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego. A więc ciąg ten ma granicę skończoną i tym samym udowodniliśmy istnienie funkcji granicznej $f(x)$ dla ciągu (1).

Teraz, wybierając dowolnie $n > N$ i x z \mathcal{X} będziemy w nierówności (7) zwiększać nieograniczenie m (przy stałych n i x). Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Stwierdziliśmy więc, że zbieżność $f_n(x)$ do $f(x)$ jest jednostajna. Łatwo teraz wyśliwić udowodniony warunek dla szeregu funkcyjnego.

Na to, żeby szereg (3) był zbieżny jednostajnie w obszarze \mathcal{X} potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniał taki niezależny od x wskaźnik N , żeby $n > r$ i dowolnego $m = 1, 2, 3, \dots$ nierówność

$$(8) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

była spełniona dla wszystkich x z \mathcal{X} jednocześnie.

Stąd w szczególności otrzymamy pozytywny wniosek:

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu (3) jednostajnie zbieżnego w obszarze \mathcal{X} pomnożymy przez tę samą funkcję $v(x)$ ograniczoną w \mathcal{X} :

$$\cdot \quad |v(x)| \leq M,$$

to jednostajna zbieżność będzie zachowana.

Otrzymane warunki w bardzo małym stopniu nadają się do stwierdzenia w praktyce jednostajnej zbieżności konkretnych ciągów lub szeregów. Wykorzystujemy więc w tym celu oparte na nich warunki dostateczne, wygodniejsze w praktyce. Formuluje się je zwykle w zastosowaniu do szeregów.

430. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów. Oto najprostsze i najczęściej stosowane kryterium:

KRYTERIUM WEIERSTRASSA. Jeżeli dla wyrazów szeregu funkcyjnego (3) zachodzą w obszarze \mathcal{X} nierówności

$$(9) \quad |u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie c_n są wyrazami pewnego zbieżnego szeregu liczbowego

$$(C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

to szereg (3) jest zbieżny w \mathcal{X} jednostajnie.

Gdy zachodzi nierówność (9), mówimy, że szereg (3) jest majorzowany przez szereg (C) lub też, że (C) jest majorantą szeregu (3).

Rzeczywiście, z (9) otrzymujemy nierówność

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}$$

spełnioną jednocześnie dla wszystkich x z obszaru \mathcal{X} . Zgodnie z zasadą zbieżności, którą stosujemy do szeregu liczbowego (C), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy takie N , że dla $n > N$ prawa i lewa strona nierówności będzie już mniejsza od ε , przy tym dla wszystkich x jednocześnie. Tym samym, zgodnie z warunkiem z ustępu 429, twierdzenie zostało udowodnione.

Tak więc na przykład szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

są jednostajnie zbieżne w dowolnym przedziale, jeżeli tylko szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest bezwzględnie zbieżny. Przecież jest

$$|a_n \sin nx| \leq |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|,$$

więc rolę majoranty odgrywa tu szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Uwaga. Każdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ jednostajnie zbieżny w \mathcal{X} można przez odpowiednie ustalenie nawiasów przekształcić w szereg, do którego już można zastosować kryterium Weierstrassa.

Rzeczywiście, niech $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ będzie realnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich.

Dla liczby c_1 [429] znajdziemy taki wskaźnik m_1 , że $|u_{m_1+1}(x) + \dots + u_n(x)| < c_1$ w \mathcal{X} dla każdego $n > m_1$. Następnie, dla liczby c_2 znajdziemy taki wskaźnik $m_2 > m_1$, że $|u_{m_2+1}(x) + \dots + u_n(x)| < c_2$ w \mathcal{X} dla $n > m_2$ itd. Grupując teraz wyrazy danego szeregu w sposób następujący:

$$[u_1(x) + \dots + u_{m_1}(x)] + [u_{m_1+1}(x) + \dots + u_{m_2}(x)] + [u_{m_2+1}(x) + \dots + u_{m_3}(x)] + \dots,$$

otrzymujemy szereg, którego wyrazy, poczynając od drugiego, są w \mathcal{X} co do bezwzględnej wartości niewiększe od kolejnych wyrazów danego szeregu liczbowego.

Jeżeli kryterium Weierstrassa dało się zastosować do danego szeregu (3), to szereg ten jest zbieżny bezwzględnie. Co więcej, wraz z szeregiem (3) szereg

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|,$$

utworzony z bezwzględnych wartości jego wyrazów, jest zbieżny również jednostajnie.

Możliwe są jednak przypadki, gdy szereg (3) jest zbieżny jednostajnie nie będąc zbieżnym bezwzględnie. Za przykład może służyć szereg 7) z ustępu 428 (że ten szereg nie jest bezwzględnie zbieżny wynika z porównania go z szeregiem harmonicznym). Możliwy jest taki stan rzeczy, że szereg (3) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie, a szereg (10) mimo to jest zbieżny niejednostajnie, [patrz szereg (8) w 428]. Takich przykładów kryterium Weierstrassa oczywiście nie obejmuje; do ich badania potrzebne są bardziej czule kryteria.

Teraz ustalimy dwa kryteria stosujące się do szeregów postaci

$$(W) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) = a_1(x) \cdot b_1(x) + a_2(x) \cdot b_2(x) + \dots + a_n(x) \cdot b_n(x) + \dots,$$

gdzie $a_n(x)$, $b_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) są funkcjami zmiennej x w \mathcal{X} . Wzorujemy te kryteria na kryteriach Abela i Dirichleta [384] w teorii szeregów liczbowych i będziemy je umownie nazywali nazwiskami tych uczonych.

KRYTERIUM ABELA. Niech szereg

$$(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_n(x) + \dots$$

będzie zbieżny jednostajnie w obszarze \mathcal{X} , a funkcje $a_n(x)$ (dla każdego x) niech tworzą ciąg monotoniczny i są wspólnie ograniczone dla dowolnych x i n :

$$|a_n(x)| \leq K,$$

wtedy szereg (W) jest zbieżny jednostajnie w obszarze \mathcal{X} .

Dowód jest podobny do poprzedniego. Z uwagi na jednostajną zbieżność szeregu (B) wskaźnik N znajdujemy niezależnie od x , powołujemy się przy tym na warunek z ustępu 429 (zamiast kryterium zbieżności). Następnie na podstawie lematu Abela [383] otrzymujemy jak poprzednio (biorąc $n > N$)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) \cdot b_k(x) \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+m}(x)|) \leq 3K\varepsilon$$

od razu dla wszystkich x z \mathcal{X} . Twierdzenie zostało więc udowodnione.

KRYTERIUM DIRICHLETA. *Niech sumy częściowe $B_n(x)$ szeregu (B) będą wspólnie ograniczone dla dowolnych x i n :*

$$|B_n(x)| \leq M,$$

a funkcje $a_n(x)$ (dla każdego x) tworzą ciąg monotoniczny zbieżny do 0 jednostajnie w obszarze X . Wtedy szereg (W) jest także zbieżny jednostajnie w tym obszarze.

Tu też dowód prowadzimy tak samo jak w 384. Zauważmy tylko, że wskaźnik N można wybrać w sposób niezależny od x właśnie z uwagi na jednostajną zbieżność $a_n(x)$ do 0.

W praktyce często zamiast ciągu funkcyjnego $\{a_n(x)\}$ występuje zwykły ciąg liczbowy $\{a_n\}$ lub zamiast szeregu funkcyjnego $\sum_1^\infty b_n(x)$ zwykły szereg liczbowy $\sum_1^\infty b_n$. Należy zauważać, że ten przypadek jest oczywiście szczególnym przypadkiem rozpatrzzonego poprzednio; przecież ciąg zbieżny $\{a_n\}$ i szereg zbieżny $\sum_1^\infty b_n$ można uważać za jednostajnie zbieżne (nie ma zależności od x).

Na przykład, jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnych monotonicznie do 0, to oba szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

są według kryterium Dirichleta szeregami jednostajnie zbieżnymi w dowolnym przedziale domkniętym nie zawierającym punktów postaci $2k\pi$ (gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Wynika to stąd, że na przykład [patrz 385, 2]:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin ix \right| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}.$$

W wymienionym przedziale $\sin \frac{1}{2}x$ nie jest równy 0, a więc sumy są wspólnie ograniczone przez liczbę niezależną od x .

Dalsze przykłady zastosowania kryteriów jednostajnej zbieżności znajdzie czytelnik w ustępie 439 i następnych.

§ 2. Własności funkcyjne sumy szeregu

431. Ciągłość sumy szeregu. Przechodzimy teraz do zbadania, jakie własności funkcyjne ma suma szeregu utworzonego z funkcji, w zależności od własności jego wyrazów. Uprzednio już mówiliśmy o równoważności teorii ciągów i teorii szeregów nieskończonych. W wykładzie zajmiemy się raczej szeregami, ponieważ w zastosowaniach spotykamy prawie wyłącznie właśnie szeregi nieskończone. Przeniesieniu rozważań o szeregach funkcyjnych na przypadek ciągów funkcyjnych poświęcimy ustęp 436.

Wprowadzone poprzednio pojęcie zbieżności jednostajnej będzie odgrywało zasadniczą rolę w całym dalszym wykładzie, a jego znaczenie wyjdzie na jaw szczególnie wyraźnie.

Zaczniemy od kwestii ciągłości sumy szeregu, którą poruszaliśmy już w ustępie 427.

TWIERDZENIE 1. *Niech funkcje $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą określone w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i wszystkie ciągłe w pewnym punkcie $x = x_0$ tego przedziału. Jeżeli szereg (3) jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathcal{X} , to suma szeregu $f(x)$ jest też ciągła w punkcie $x = x_0$.*

Podobne twierdzenie było po raz pierwszy sformułowane przez Cauchy'ego, lecz słynny autor nadał mu zbyt ogólną postać, nie żądając jednostajności, bez czego przestaje ono być prawdziwe.

Dowód. Zachowując poprzednie oznaczenia mamy dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ i dowolnego x z \mathcal{X} :

$$(11) \quad f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x)$$

w szczególności

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

skąd

$$(12) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|.$$

Obierzmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$. Z uwagi na jednostajną zbieżność szeregu można ustalić wskaźnik n tak, by nierówność

$$(13) \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

była spełniona dla wszystkich wartości x przedziału \mathcal{X} , a więc i dla $x = x_0$. Zauważmy, że przy ustalonym n funkcja $f_n(x)$ jest sumą pewnej określonej, skończonej liczby funkcji $u_k(x)$, ciągłych w punkcie $x = x_0$. Dlatego też jest ona ciągła w tym punkcie i dla danego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać takie $\delta > 0$, że jeżeli tylko $|x - x_0| < \delta$, to

$$(14) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Teraz z uwagi na (12), (13) i (14) nierówność $|x - x_0| < \delta$ pociąga

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

i twierdzenie zostało udowodnione.

Oczywiście jeżeli funkcje $u_n(x)$ są ciągłe w całym przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$, to przy zbieżności jednostajnej suma szeregu (3) $f(x)$ też będzie ciągła w całym przedziale.

To, że żądanie zbieżności jednostajnej nie może być opuszczone w wypowiedzi twierdzenia, widać na przykładzie szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

[patrz 428, 8)], którego suma równa się 1 dla $x \neq 0$ i równa się 0 dla $x = 0$. Jednak zbieżność jednostajna jest w tym twierdzeniu tylko warunkiem dostatecznym i nie należy sądzić, że jest ona warunkiem koniecznym ciągłości sumy szeregu⁽¹⁾ — na przykład szeregu

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2x [n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2 x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2 x^2} \right]$$

(1) Patrz następny ustęp

[porównaj 428, 5) i 2)] mają w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ skończoną sumę 0, chociaż obydwa są w nim zbieżne niejednostajnie.

Są jednak klasy przypadków, gdy zbieżność jednostajna jest konieczna. Udowodnimy tu następujące twierdzenie, którego dowód podał U. Dini.

TWIERDZENIE 2. *Niech wyrazy szeregu (3) będą ciągłe i dodatnie w całym przedziale $X = \langle a, b \rangle$. Jeżeli szereg ma sumę $f(x)$ także ciągłą w całym przedziale, to jest on jednostajnie zbieżny w całym przedziale.*

Dowód. Rozpatrzmy resztę szeregu (3):

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

Funkcja $\varphi_n(x)$ zmiennej x jest także ciągła jako różnica funkcji ciągłych. Z uwagi na dodatniość wyrazów szeregu ciąg $\{\varphi_n(x)\}$ jest przy stałym x malejący (nierosnący):

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \dots \geq \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq \dots$$

Wreszcie, ponieważ przy stałym x szereg (3) jest zbieżny w przedziale X , więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Aby wykazać jednostajną zbieżność szeregu wystarczy udowodnić, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje chociażby jedna wartość n , dla której nierówność $\varphi_n(x) < \varepsilon$ zachodzi jednocześnie dla wszystkich x (ponieważ wtedy dla większych n nierówność na pewno będzie spełniona).

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie ma takiego wskaźnika n . Wtedy dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ znajdziemy w przedziale X taką wartość $x = x_n$, że $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$. Do ciągu $\{x_n\}$, którego wszystkie wyrazy są zawarte w przedziale skończonym, zastosujemy lemat Bolzano-Weierstrassa [41] i wybierzemy z niego podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnej granicy x_0 .

Ponieważ $\varphi_m(x)$ jest funkcją ciągłą, więc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0),$$

dla każdego m . Poza tym dla dowolnego m i dostatecznie dużych k mamy:

$$n_k \geq m, \quad \text{więc} \quad \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy dla $k \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon.$$

Ta zaś nierówność zachodząca dla dowolnego m jest sprzeczna z tym, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_0) = 0.$$

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

432. Uwaga o zbieżności quasi-jednostajnej. Jeżeli szereg funkcyjny (3) składa się z funkcji ciągły w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i jest zbieżny w tym przedziale do sumy $f(x)$, to na to, by była ona ciągła, wystarcza zbieżność jednostajna szeregu, lecz w ogólności zbieżność ta wcale nie jest konieczna. Już Dini i inni zauważali, że warunkiem wystarczającym jest pewna „osłabiona” zbieżność jednostajna, która polega na tym, że dla każdej liczby $\epsilon > 0$ i każdego wskaźnika N' istnieje przynajmniej jeden wskaźnik $n > N'$ niezależny od x i taki, że nierówność (6) jest spełniona jednocześnie dla wszystkich x z \mathcal{X} . Rzeczywiście, przy dowodzie twierdzenia 1 wykorzystaliśmy tylko jeden wskaźnik n , dla którego nierówność (13) była spełniona dla wszystkich x z \mathcal{X} .

A nawet ta osłabiona jednostajność nie jest konieczna na to, by suma $f(x)$ szeregu (3) była ciągła. Nie ma jej na przykład w przypadku szeregów (15) zbieżnych do ciągłej sumy $f(x) \equiv 0$.

C. Arzela rozpatrzył w 1883 r. pewien szczególny rodzaj zbieżności (który później otrzymał nazwę *quasi-jednostajnej zbieżności*) rozwiązujący zagadnienie dokładnej charakteryzacji zbieżności szeregu, zapewczającej ciągłość jego sumy.

O szeregu (3) zbieżnym w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ mówimy, że jest on *zbieżny quasi-jednostajnie w \mathcal{X} do sumy $f(x)$* , jeżeli dla każdej liczby $\epsilon > 0$ i każdego wskaźnika N' przedział \mathcal{X} można pokryć skońzoną liczbą przedziałów otwartych

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_l, b_l), \dots, (a_k, b_k),$$

którym można podporządkować k wskaźników

$$n_1, n_2, \dots, n_l, \dots, n_k (> N')$$

tak, że dla wszystkich wartości x z \mathcal{X} , zawartych w (a_i, b_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) jest spełniona jednocześnie nierówność

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| = |\varphi_{n_i}(x)| < \epsilon.$$

Przy wspomnianej uprzednio osłabionej jednostajnej zbieżności wszystkim x -om z \mathcal{X} przyporządkowany był ten sam wskaźnik n , a tu wszystkie x dzielimy na grupy, którym przyporządkowujemy różne wartości n , lecz zawsze na skońzoną liczbę grup.

Korzystając z tego pojęcia Arzela odkrył następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3. *Niech funkcje $u_n(x)$ będą określone w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$, a szereg (3) niech będzie zbieżny w tym przedziale. Na to, by suma szeregu $f(x)$ też była ciągła w \mathcal{X} potrzeba i wystarcza, żeby szereg był quasi-jednostajnie zbieżny do $f(x)$ w \mathcal{X} .*

Konieczność. Założmy najpierw ciągłość funkcji $f(x)$, a więc i ciągłość wszystkich reszt $\varphi_n(x)$. Obierzmy w \mathcal{X} dowolny punkt x' . Do danych liczb ϵ i N można dobrać taki wskaźnik $n' > N$, że

$$|\varphi_{n'}(x')| < \epsilon.$$

Ze względu na ciągłość funkcji $\varphi_n'(x)$ podobna nierówność

$$|\varphi_n'(x)| < \epsilon$$

będzie spełniona także w pewnym otoczeniu $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$ punktu x' . Ze wszystkich tych przedziałów otwartych σ' zbudowanych dla różnych możliwych x' z \mathcal{X} , utwórzmy pewien układ nieskończony Σ pokrywający przedział \mathcal{X} . Na mocy lematu Borela [88] możemy wybrać skońziony podkład przedziałów

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\},$$

który także pokrywa \mathcal{X} . Będą to właśnie te przedziały, o których mowa w definicji zbieżności quasi-jednostajnej.

Dostateczność. Założymy teraz, że szereg (3) jest zbieżny do swojej sumy $f(x)$ quasi-jednostajnie. Przyjmijmy ϵ i N' , zbudujmy przedziały (a_i, b_i) i dobierzmy wskaźniki n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) o własnościach podanych w definicji. W \mathcal{X} obierzmy dowolnie punkt x_0 na przykład z przedziału (a_{l_0}, b_{l_0}) . Można napisać tak samo, jak przy dowodzie twierdzenia 1 [431 (12)],

$$(12a) \quad |f(x) - f(x_0)| < |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| + |\varphi_{n_i}(x)| + |\varphi_{n_i}(x_0)|.$$

Oczywiście

$$|\varphi_{n_i}(x_0)| < \varepsilon.$$

Jeżeli x należy do przedziału (a_{i_0}, b_{i_0}) , to także

$$|\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon.$$

Można teraz dobrać taką liczbę $\delta > 0$, że dla $|x - x_0| < \delta$ nie tylko x zawiera się w danym przedziale, lecz również pierwszy składnik po prawej stronie (12a) będzie $< \varepsilon$, a więc

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Ciągłość $f(x)$ w punkcie x_0 została udowodniona (1).

Z twierdzenia tego otrzymujemy łatwo jako wniosek twierdzenie Diniego z poprzedniego ustępu. Rzeczywiście, jeżeli szereg (3) składa się z dodatnich funkcji ciągłych i jest zbieżny do ciągłej sumy, to jak widzieliśmy, zbieżność musi być quasi-jednostajna.

Korzystając z tego, że w danym przypadku reszty $\varphi_n(x)$ maleją ze wzrostem n , wystarczy wziąć wskaźnik N większy niż wszystkie n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) żeby dla $n > N$ nierówność (6) była spełniona jednocześnie dla wszystkich x z \mathcal{X} . Zbieżność jest więc jednostajna.

433. Przejście do granicy wyraz za wyrazem. Podamy jeszcze jedno twierdzenie będące uogólnieniem twierdzenia 1. $\mathcal{X} = \{x\}$ jest teraz dowolnym zbiorem nieskończonym mającym punkt skupienia a (skończony lub nieskończony) [52], który sam może do zbioru nie należeć.

TWIERDZENIE 4. Niech każda funkcja $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) będzie określona w obszarze \mathcal{X} i ma granicę skończoną, gdy x dąży do a ;

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n.$$

Jeżeli szereg (3) jest zbieżny w obszarze \mathcal{X} jednostajnie, to 1) szereg utworzony z tych granic

$$(C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C,$$

jest zbieżny i 2) suma $f(x)$ szeregu (3) też ma granicę, gdy $x \rightarrow a$, a mianowicie

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C.$$

Dowód. Z warunku zbieżności jednostajnej z ustępu 429 wynika, że dla dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik N , że dla $n > N$ i $m = 1, 2, 3, \dots$ nierówność (8) jest spełniona dla wszystkich x z \mathcal{X} .

Przechodząc tu do granicy, dla $x \rightarrow a$, i uwzględniając (16), otrzymujemy

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| \leq \varepsilon,$$

więc dla szeregu (C) warunek zbieżności [376] jest spełniony.

Jeżeli C , C_n i γ_n oznaczają, jak zwykle, sumę, sumę częściową i resztę szeregu, to

$$C = C_n + \gamma_n.$$

(1) Jak czytelnik zauważył, z założenia, że wszystkie wskaźniki n_i można wybrać dowolnie duże, w rzeczywistości nigdzie nie korzystamy.

Odejmując tę równość wyraz po wyrazie od (11) łatwo otrzymujemy

$$(18) \quad |f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|.$$

Z uwagi na zbieżność jednostajną szeregu (3) i zbieżność szeregu (C) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można ustalić n tak duże, aby dla wszystkich x z \mathcal{X} zachodziły nierówności

$$(19) \quad |\varphi_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{i} \quad |\gamma_n| < \varepsilon.$$

Ponieważ oczywiście

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k = C_n,$$

przetoż jeżeli ograniczymy się do przypadku, gdy a jest skończone, to znajdziemy takie $\delta > 0$, że dla $|x - a| < \delta$ jest spełniona nierówność

$$(20) \quad |f_n(x) - C_n| < \varepsilon.$$

Teraz dla wspomnianych wartości x , z uwagi na (18), (19) i (20), będzie spełniona nierówność

$$|f(x) - C| < 3\varepsilon,$$

co prowadzi do (17) ⁽¹⁾.

Równość (17) można napisać w postaci [patrz (16)]

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

Tak więc, gdy zbieżność jest jednostajna, granica sumy szeregu jest równa sumie szeregu utworzonego z granic jego wyrazów lub, innymi słowy, w szeregu dopuszczalne jest przejście do granicy wyraz za wyrazem.

434. Całkowanie szeregów wyraz za wyrazem. Rozpatrzmy teraz zagadnienie całkowania sumy szeregu funkcyjnego zbieżnego.

TWIERDZENIE 5. Jeżeli funkcje $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) są ciągłe w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i utworzony z nich szereg (3) jest zbieżny jednostajnie w tym przedziale, to całka sumy $f(x)$ szeregu (3) jest równa

$$(21) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

Dowód. Z uwagi na ciągłość funkcji $u_n(x)$ i $f(x)$ [431, twierdzenie 1] jest oczywiste istnienie tych wszystkich całek. Całkując tożsamość

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \varphi_n(x)$$

⁽¹⁾ Czytelnik rozpoznaje w tym to samo rozumowanie, którego użyliśmy już w dowodzie twierdzenia 1.

w przedziale $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

Suma n wyrazów szeregu (21) różni się więc od całki $\int_a^b f(x) dx$ o resztę $\int_a^b \varphi_n(x) dx$.

Do dowodu równości (21) wystarczy tylko wykazać, że

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = 0.$$

Ze zbieżności jednostajnej szeregu (3) wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrąć taki wskaźnik N , że dla $n > N$ nierówność

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

zachodzi dla wszystkich x w tym przedziale. Wtedy dla tych właśnie wartości n będzie

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)| dx < (b-a)\varepsilon,$$

co dowodzi zależności granicznej (22).

Równość (21) można zapisać w postaci

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b u_n(x) dx \right\},$$

a więc w przypadku gdy szereg jest jednostajnie zbieżny, całka z sumy szeregu równa się sumie szeregu utworzonego z całek jego wyrazów lub inaczej, dopuszczalne jest całkowanie szeregu wyraz za wyrazem.

Jak i w twierdzeniu 1 żądanie zbieżności jednostajnej jest żądaniem istotnym, żeby zachodziła równość (21), tj. nie może być po prostu odrzucone. Nie jest ono natomiast warunkiem koniecznym. Szeregi (15) rozpatrywane w 431 są właśnie dobrą tego ilustracją. Obydwa te szeregi są zbieżne do funkcji $f(x) = 0$ niejednostajnie w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Całkując jednak pierwszy szereg wyraz za wyrazem otrzymamy sumę szeregu całek.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2n^2 x e^{-n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^3}) = 1 \quad \text{mimo że} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Postępując analogicznie w przypadku drugiego szeregu otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ciekawy jest przykład szeregu:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (0 \leq x < 1).$$

Tutaj

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

więc szereg można całkować wyraz za wyrazem, mimo że dla $x = 1$ jest on nawet rozbieżny.

Teraz podamy uogólnienie twierdzenia 5 połączone z odrzuceniem żądania ciągłości rozpatrywanych funkcji.

TWIERDZENIE 6. Jeżeli funkcje $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) są całkowalne ⁽¹⁾ w przedziale $X = \langle a, b \rangle$ i utworzony z nich szereg (3) jest jednostajnie zbieżny, to suma $f(x)$ szeregu jest też całkowalna i zachodzi (21).

Dowód. Zatrzymamy się na całkowalności funkcji $f(x)$.

Ze zbieżności jednostajnej szeregu wynika, że dla dowolnego ε można znaleźć tak duże n , że dla wszystkich punktów przedziału $\langle a, b \rangle$ zachodzi nierówność

$$(23) \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{lub} \quad f_n(x) - \frac{1}{2}\varepsilon < f(x) < f_n(x) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Weźmy jakąś część $\langle \alpha, \beta \rangle$ przedziału $\langle a, b \rangle$ i niech m, M będą kresami dolnym i górnym funkcji $f_n(x)$ w $\langle \alpha, \beta \rangle$, a $\omega = M - m$ jej oscylacją; odpowiednią oscylację funkcji $f(x)$ oznaczmy przez Ω . Z uwagi na (23) w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ jest

$$m - \frac{1}{2}\varepsilon < f(x) < M + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{więc} \quad \Omega \leq \omega + \varepsilon.$$

Przedział $\langle a, b \rangle$ rozbijemy teraz, jak zwykle, na przedziały częściowe $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ i wskaźnikiem i oznaczymy oscylację w i -tym przedziale. Wówczas $\Omega_i \leq \omega_i + \varepsilon$, więc

$$\sum_i \Omega_i \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i \Delta x_i + \varepsilon(b-a).$$

Ponieważ drugi składnik po prawej stronie jest dowolnie mały, a pierwszy dąży do zera wraz z $\lambda = \max \Delta x_i$, więc to samo jest słuszne i dla lewej strony nierówności, skąd otrzymujemy całkowalność funkcji $f(x)$ [297, (8)].

Równości (21) dowodzimy zupełnie tak samo, jak poprzednio.

Pokażemy na przykładzie, że bez założenia jednostajnej zbieżności szereg utworzony z funkcji całkowalnych może mieć sumę niecałkowalną. Niech $u_n(x)$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$) będzie równe 1 dla x -ów będących ułamkami nieskracalnymi m/n i równe 0 w pozostałych punktach przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Funkcje te, mające skończoną liczbę punktów nieciągłości, są zatem całkowalne w $\langle 0, 1 \rangle$, a sumą szeregu jest na pewno niecałkowalna funkcja Dirichleta [300, 2]).

Mimo to zbieżność jednostajna nie jest oczywiście warunkiem koniecznym całkowalności sumy szeregu utworzonego z funkcji całkowalnych. I w tym przypadku Arzela podał warunek konieczny i wystarczający [„uogólniona quasi-jednostajna zbieżność” porównaj 432].

435. Różniczkowanie szeregów wyraz za wyrazem. Korzystając z twierdzenia 5 poprzedniego ustępu łatwo udowodnić

(¹) W sensie ustępu 295.

TWIERDZENIE 7. Niech funkcje $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą określone w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i mają w tym przedziale ciągłe pochodne $u'_n(x)$. Jeżeli nie tylko szereg (3) jest zbieżny, lecz także szereg utworzony z pochodnych

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots,$$

jest zbieżny jednostajnie w tym przedziale, to suma $f'(x)$ szeregu (3) ma w \mathcal{X} pochodną i

$$(25) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Dowód. Oznaczmy przez $f^*(x)$ sumę szeregu (24). Z twierdzenia 1 wynika, że jest to funkcja ciągła zmiennej x . Korzystając teraz z twierdzenia 5 scałkujemy szereg (24) wyraz za wyrazem w przedziale od a do dowolnej wartości x z \mathcal{X} . Otrzymujemy

$$\int_a^x f^*(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt,$$

lecz oczywiście $\int_a^x u'_n(t) dt = u_n(x) - u_n(a)$, więc

$$\int_a^x f^*(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

Przekształcenie to jest dopuszczalne, gdyż z góry wiadomo, że szeregi $\sum u_n(x)$ i $\sum u_n(a)$ są zbieżne [patrz 364, 4°]. Ponieważ całka po lewej stronie, wobec ciągłości funkcji podcałkowej, ma pochodną równą $f^*(x)$ [305, 12°] przeto taką samą pochodną ma funkcja $f(x)$, która różni się od tej całki tylko o stałą.

Równość (25) można napisać (korzystając z oznaczenia Cauchy'ego pochodnej) w postaci

$$D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

Tak więc, przy przyjętych założeniach, pochodna sumy szeregu jest równa sumie szeregu utworzonego z pochodnych jego wyrazów lub inaczej: dopuszczalne jest różniczkowanie szeregu wyraz za wyrazem.

Rozpatrzmy szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2 x^2} - e^{-n^2 x^2}]$$

oraz

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \ln(1+n^2 x^2) - \frac{1}{2(n-1)} \ln[1+(n-1)^2 x^2] \right].$$

Pierwszy z nich jest równy 0 dla $x = 0$ i jest równy 1 w pozostałych punktach, a suma drugiego jest wszędzie równa 0. Różniczkując je wyraz za wyrazem otrzymamy znane nam już szeregi (15) [431] zbieżne w całym przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ do 0, lecz obydwa niejednostajnie. W pierwszym przypadku szereg pochodnych jest zbieżny także w punkcie $x = 0$,

w którym suma pierwotnego szeregu nie może mieć pochodnej, gdyż jest nieciągła. W drugim przypadku przeciwnie, różniczkowanie wyraz za wyrazem prowadzi do dobrego wyniku. Przykłady te ilustrują rolę żądania, żeby szereg pochodnych był zbieżny jednostajnie; jest ono istotne, ale nie konieczne.

Twierdzenie 7 można uwolnić od niektórych zbędnych założeń, lecz za cenę pewnego skomplikowanego dowodu.

TWIERDZENIE 8. *Niech funkcje $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą określone w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i mają w nim skończone pochodne $u'_n(x)$. Jeżeli szereg (3) jest zbieżny chociażby w jednym punkcie, na przykład $x = a$, a szereg (24) utworzony z pochodnych jest zbieżny jednostajnie w całym przedziale \mathcal{X} , to wtedy: 1) szereg (3) jest zbieżny jednostajnie w całym przedziale i 2) jego suma $f(x)$ ma w \mathcal{X} pochodną wyznaczoną przez równość (25).*

Dowód. Niech x_0 i x będą różnymi punktami przedziału $\langle a, b \rangle$. Utwórzmy szereg

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Udowodnimy, że dla dowolnie ustalonego x_0 szereg ten jest zbieżny we wszystkich punktach $x \neq x_0$ i to jednostajnie względem x .

Obierzmy w tym celu dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Z uwagi na zbieżność jednostajną szeregu (24) można dobrąć taki wskaźnik N , że dla $n > N$ i $m = 1, 2, 3, \dots$ nierówność

$$(27) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x) \right| < \varepsilon$$

jest spełniona jednocześnie dla wszystkich wartości x . Ustalmy na chwilę n i m i rozpatrzmy funkcję

$$U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x);$$

bezwzględna wartość jej pochodnej

$$U'(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x),$$

jest, z uwagi na (27), zawsze $< \varepsilon$. Lecz oczywiście

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(c),$$

gdzie c jest zawarte między x_0 i x [z twierdzenia Lagrange'a, 112]. Więc ostatecznie dla wszystkich $x \neq x_0$ jest

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ ta nierówność zachodzi dla każdego $m = 1, 2, 3, \dots$, jeżeli tylko $n > N$, więc tym samym udowodniona została zbieżność jednostajna szeregu (26). Stąd otrzymujemy wszystkie potrzebne wyniki.

Przede wszystkim podstawiając $x_0 = a$, ze zbieżności jednostajnej szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}, \quad \text{a więc i szeregu} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$

[patrz wniosek z 429] i ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ wnioskujemy o zbieżności jednostajnej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Jeżeli przez $f(x)$ oznaczymy jego sumę, to sumą szeregu (26), gdzie x_0 jest znów dowolną wartością x z przedziału (a, b) , jest oczywiście $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ponieważ w zbieżnym jednostajnie szeregu można przechodzić do granicy wyraz za wyrazem (z twierdzenia 4), więc gdy x dąży do x_0 , otrzymujemy

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0)$$

c.b.d.o.

Uwaga. Wszystkie twierdzenia o przejściu do granicy, całkowaniu i różniczkowaniu wyraz za wyrazem ustalają analogię między szeregami funkcyjnymi a sumami skończonej liczby funkcji. Analogia ta jest jednak ograniczona znymi warunkami, w których zbieżność jednostajna odgrywa zasadniczą rolę.

436. Przeniesienie wyników na ciągi. Ciekawe będzie przeniesienie otrzymanych wyników na przypadek ciągów funkcji. Pozwoli to nam na wyraźne ustalenie związku rozpatrywanych zagadnień z ogólnym zagadnieniem zmiany kolejności przejść granicznych, które odgrywa tak ważną rolę w całej analizie. Oprócz tego wytyczymy drogę w kierunku uogólnienia tych wyników.

Znow więc przyporządkujemy wzajemnie ciąg funkcji (1) i szereg funkcyjny (3) związane zależnościami

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

lub równoważnymi z nimi zależnościami

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Funkcja graniczna ciągu jest równa sumie odpowiedniego szeregu. Zbieżność jednostajna może zachodzić tylko jednocześnie dla ciągu i dla szeregu.

I. Rozpatrzmy najpierw zagadnienie znajdowania granicy tej funkcji granicznej. Niech zbiór $\mathcal{X} = \{x\}$, w którym wszystkie rozpatrywane funkcje są określone, ma punkt skupienia a . Twierdzenie 4 z ustępu 433 otrzyma teraz postać następującą:

TWIERDZENIE 4*. Jeżeli funkcje $f_n(x)$ mają granice

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$

i

$$(29) \quad \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

a w pierwszym przypadku ciąg dąży do swojej granicy jednostajnie względem x (w \mathcal{X}), to istnieją skończone granice

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n,$$

i są one równe.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę (28) i (29), to równość

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n,$$

można napisać w postaci

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

A więc rozpatrywane twierdzenie ustala dla funkcji $f_n(x)$ dwóch zmiennych x i n warunki istnienia i równości dwóch granic iterowanych i pozostaje w ścisłym związku z badaniami ustępu 168. Wysłowiecie dla ciągów obu twierdzeń z ustępu 431 pozostawiamy czytelnikowi.

II. Niech teraz obszar \mathcal{X} będzie przedziałem $\langle a, b \rangle$. Rozpatrzmy zagadnienie znajdowania całki funkcji granicznej. Oto równoważnik twierdzenia 6 [434]:

TWIERDZENIE 6*. Jeżeli ciąg $\{f_n(x)\}$ funkcji całkowalnych w przedziale $\langle a, b \rangle$ jest zbieżny do swojej funkcji granicznej $f(x)$ jednostajnie względem x w $\langle a, b \rangle$, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna w $\langle a, b \rangle$ i

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Równość tę napiszemy w postaci:

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} dx,$$

skąd widać możliwość sprowadzenia znajdowania granicy całek do znajdowania granicy funkcji podcałkowych. Mówimy w tym przypadku, że dopuszczalne jest przejście do granicy pod znakiem całki.

W równości (30) są przedstawione znaki granicy i całki. Ponieważ całkę oznaczoną można otrzymać jako wynik pewnego przejścia do granicy, więc rozpatrywane tu zagadnienie jest bliskie zagadnieniu rozpatrywanemu w ustępie 168.

III. Przejdzmy wreszcie do pochodnej funkcji granicznej. Dokonajmy odpowiedniej zmiany w sformułowaniu twierdzenia 8 [435].

TWIERDZENIE 8*. Niech wszystkie funkcje $f_n(x)$ będą różniczkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$, a ciąg pochodnych $\{f'_n(x)\}$ zbieżny w całym przedziale jednostajnie względem x . Jeżeli ciąg funkcji $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny chociażby w jednym punkcie przedziału $\langle a, b \rangle$, to: 1) ciąg ten

jest zbieżny w całym przedziale i to nawet jednostajnie, 2) funkcja graniczna $f(x)$ jest różniczkowalna i

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Jeżeli zapiszemy tę równość dobitniej

$$D \{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ Df_n(x) \},$$

to widać wyraźnie, że mówimy tu o przemienności znaków granicy i pochodnej. Ponieważ pochodna też jest granicą, więc i to zagadnienie jest związane z przemiennością dwóch przejść do granicy.

Na zakończenie zauważmy rzecz następującą. Ze stanowiska szeregów nieskończonych, parametru naturalnego n nie można naturalnie zastąpić ogólniejszym. Inaczej wygląda sprawa, gdy mówimy o ciągu funkcji. Funkcję $f_n(x)$ można tu zastąpić przez funkcje dwóch zmiennych $f(x, y)$, gdzie y przebiega dowolny obszar $\mathcal{Y} = \{y\}$ mający punkt skupienia y_0 (liczbę skończoną lub nie). Zbieżność do granicy dla $n \rightarrow \infty$ zastępujemy zbieżnością dla $y \rightarrow y_0$. Sformułowanie i dowód twierdzeń w tym ogólnym przypadku nie przedstawiają trudności. Do niektórych uogólnień tego rodzaju powrócimy jeszcze w rozdziale XIV.

437. Ciągłość sumy szeregu potęgowego. Bardzo ważnym przykładem zastosowania całej wyłożonej teorii jest badanie własności szeregów potęgowych. Ograniczymy się do szeregów potęgowych postaci

$$(31) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

gdzie jak widzieliśmy w 403, szeregi ogólniejszej postaci

$$(31^*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

można sprowadzić do postaci (31) za pomocą zwykłej zamiany zmiennej.

Niech szereg (31) ma promień zbieżności $R > 0$ [379]. Przede wszystkim można twierdzić:

1° *Dla dowolnej dodatniej liczby $r < R$ szereg (31) jest zbieżny jednostajnie względem x w przedziale domkniętym $\langle -r, r \rangle$.*

Rzeczywiście, ponieważ $r < R$, więc dla $x = r$ szereg (31) jest zbieżny bezwzględnie, tzn. zbieżny jest szereg o wyrazach dodatnich:

$$(32) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \dots + |a_n| \cdot r^n + \dots$$

Dla $|x| \leq r$ wyrazy szeregu (31) są co do bezwzględnej wartości mniejsze niż odpowiednie wyrazy tego szeregu, który odgrywa zatem rolę majoranty i według kryterium Weierstrassa szereg (31) dla podanych wartości x jest zbieżny jednostajnie.

Chociaż liczbę r można wziąć dowolnie bliską R , z poprzedniego dowodu jednak nie wynika jeszcze jednostajna zbieżność w przedziale $(-R, R)$. Na przykładzie szeregu geometrycznego [428,6)] widać, że końce przedziału zbieżności mogą być punktami niejednostajności.

Teraz, jako wniosek z twierdzenia 1 otrzymujemy:

2º Dla wszystkich wartości x pomiędzy $-R$ i R suma $f(x)$ szeregu potęgowego (31) jest funkcją ciągłą zmiennej x .

Dla dowolnej wartości $x = x_0$ wewnątrz przedziału zbieżności możemy dobrać liczbę $r < R$ w ten sposób, żeby $|x_0| < r$. Stosując twierdzenie 1 do przedziału $(-r, r)$, otrzymujemy na mocy 1º ciągłość funkcji $f(x)$ w tym przedziale, a więc w szczególności i dla $x = x_0$.

Zwracamy uwagę czytelnika na fakt, że uniknęliśmy zastosowania twierdzenia 1 do przedziału $(-R, R)$, gdzie nie można zagwarantować zbieżności jednostajnej.

Ciągłość sumy szeregu potęgowego może być wykorzystana dla dowodu twierdzenia o równości szeregów potęgowych (przypominającego podobne twierdzenie o wielomianach):

3º Jeżeli dwa szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

mają tę samą sumę w otoczeniu punktu $x = 0$ (¹), to szeregi są tożsamościowo równe, tzn. że odpowiednie ich współczynniki są równe

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Biorąc $x = 0$ w tożsamości

$$a_0 + a_1 x + \dots = b_0 + b_1 x + \dots,$$

przekonujemy się o równości $a_0 = b_0$. Odrzucając te wyrazy po obu stronach tożsamości i dzieląc przez x (w tym przypadku musimy przyjąć, że $x \neq 0$) otrzymujemy nową tożsamość

$$a_1 + a_2 x + \dots = b_1 + b_2 x + \dots,$$

która też zachodzi we wszystkich punktach otoczenia punktu $x = 0$ z wyjątkiem samego tego punktu. Nie mamy więc prawa podstawić tu $x = 0$, lecz możemy przyjąć, że x dąży do 0. Korzystając z ciągłości, otrzymamy jednak w granicy $a_1 = b_1$. Odrzucając te wyrazy i znów dzieląc przez $x \neq 0$, dla $x \rightarrow 0$ otrzymujemy $a_2 = b_2$ itd.

(¹) Mamy tu na myśli nie tylko obustronne otoczenie $(-\delta, \delta)$ punktu $x = 0$, lecz i jednostronne otoczenie postaci $(0, \delta)$ lub $(-\delta, 0)$.

Twierdzenie to, ustalające jednoznaczność rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy jest często stosowane. Korzystając z niego można na przykład udowodnić natychmiast, że rozwinięcie funkcji parzystej (nieparzystej) w szereg potęgowy postaci (31) może zawierać wyłącznie parzyste (nieparzyste) potęgi x .

Rozpatrzmy teraz bardziej subtelne zagadnienie zachowania się szeregu w pobliżu jednego z końców $x = \pm R$ przedziału zbieżności (przyjmując odtąd, że jest to przedział skończony). Możemy ograniczyć się do prawego końca $x = R$, gdyż wszystko co o nim powiemy odnosi się także do przypadku lewego końca $x = -R$.

Przede wszystkim oczywiste jest, że:

4° Jeżeli szereg potęgowy (31) jest rozbieżny na końcu $x = R$ jego przedziału zbieżności, to zbieżność szeregu w przedziale $\langle 0, R \rangle$ nie może być jednostajna.

Rzeczywiście, gdyby miała miejsce zbieżność jednostajna, to można by, korzystając z twierdzenia 3, przejść do granicy wyraz za wyrazem dla $x \rightarrow R - 0$ i stwierdzić tym samym zbieżność szeregu granic

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_n R^n + \dots,$$

wbrew założeniu.

Zachodzi także następujące, w pewnym sensie odwrotne twierdzenie:

5° Jeżeli szereg potęgowy (31) jest zbieżny również dla $x = R$ (niekoniecznie bezwzględnie), to zbieżność szeregu jest jednostajna w całym przedziale $\langle 0, R \rangle$.

Rzeczywiście, jeżeli szereg (31) przedstawimy w postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R} \right)^n \quad (0 \leq x \leq R),$$

to żądaný wniosek wynika bezpośrednio z kryterium Abela, ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest zbieżny, a czynniki $(x/R)^n$ tworzą ciąg monotoniczny i jednostajnie ograniczony.

Udowodnione twierdzenie pozwala na zastosowanie twierdzenia 1 do całego przedziału $\langle 0, R \rangle$. Tak więc jako uzupełnienie twierdzenia 2° o ciągłość sumy szeregu potęgowego w przedziale otwartym $(-R, R)$ otrzymaliśmy nowe twierdzenie (sformułowane przez Abela) ⁽¹⁾:

6° TWIERDZENIE ABELA. Jeżeli szereg potęgowy (31) jest zbieżny dla $x = R$, to jego suma jest ciągła (oczywiście lewostronnie) również dla tej wartości x , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Twierdzenie Abela ma ważne zastosowania.

⁽¹⁾ Inny dowód tego twierdzenia (przy założeniu $R = 1$) podaliśmy w ustępie 418 w związku z zagadnieniem regularności metody Poissona-Abela sumowania szeregów rozbieżnych.

Jeżeli dla funkcji $f(x)$ otrzymamy rozwinięcie w szereg potęgowy tylko w przedziale otwartym $(-R, R)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R < x < R),$$

lecz funkcja zachowuje ciągłość, a szereg jest zbieżny także w dowolnym końcu tego przedziału, na przykład dla $x = R$, to rozwinięcie jest słuszne również i w tym punkcie. Łatwo się o tym przekonać przechodząc w podanej równości do granicy dla $x \rightarrow R-0$.

Jeżeli więc, na przykład, rozwinięcie

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

otrzymaliśmy tylko dla $-1 < x < 1$, to wiedząc, że szereg

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

jest zbieżny, wnioskujemy, że jego suma jest równa $\ln 2$. Tak samo stwierdzamy słuszność tezy z ustępu 407, że szereg dwumienny

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} x^n + \dots$$

ma sumę równą $(1+x)^m$ również dla $x = \pm 1$, jeżeli tylko jest zbieżny.

438. Całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych. Do szeregów potęgowych zastosujemy teraz twierdzenia z ustępów 434 i 435.

Porównując udowodnione już własności 1° i 5° z twierdzeniem 5 z ustępu 434, otrzymujemy:

7° Szereg potęgowy (31) w przedziale $\langle 0, x \rangle$, gdzie $|x| < R$, można zawsze całkować wyraz za wyrazem i

$$(33) \quad \int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots$$

Wartość x może się tu pokrywać także z jednym z końców przedziału zbieżności, jeżeli w tym końcu szereg (34) jest zbieżny.

Przechodzimy do różniczkowania szeregu potęgowego.

8° Szereg potęgowy (31) wewnątrz swego przedziału zbieżności można różniczkować wyraz za wyrazem, czyli

$$(34) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Twierdzenie to stosuje się również do końca przedziału zbieżności, jeżeli tylko szereg jest zbieżny w tym końcu.

Obierzmy dowolną wartość x wewnątrz przedziału zbieżności szeregu wyjściowego, więc $|x| < R$ i umieścmy liczbę r' między $|x|$ i R : $|x| < r' < R$. Ze zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r'^n = a_0 + a_1 r' + a_2 r'^2 + \dots + a_n r'^n + \dots,$$

wynika, że jego wyraz ogólny jest ograniczony

$$|a_n| r'^n \leq L \quad (L = \text{const}, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Otrzymujemy zatem następujące oszacowanie wartości bezwzględnej n -tego wyrazu:

$$n |a_n| \cdot |x|^{n-1} = n |a_n| \cdot r'^n \cdot \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r'} \leq \frac{L}{r'} \cdot n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1}$$

szeregu (34). Szereg

$$\frac{L}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} = \frac{L}{r'} \left\{ 1 + 2 \left| \frac{x}{r'} \right| + \dots + n \left| \frac{x}{r'} \right|^{n-1} + \dots \right\}$$

jest zbieżny. Łatwo to zauważyc stosując kryterium d'Alemberta [368], jeżeli uwzględnimy, że $|x/r'| < 1$. W tym przypadku szereg (34) jest bezwzględnie zbieżny. Stąd wynika, że *promień zbieżności R' tego szeregu jest nie mniejszy niż R* .

Jeżeli teraz obierzemy dowolną liczbę $r < R$, to równocześnie będzie $r < R'$. Z 1° wynika, że szereg (34) jest zbieżny jednostajnie w przedziale $(-r, r)$, więc na mocy twierdzenia 7 z ustępu 435 w przedziale tym dopuszczalne jest różniczkowanie szeregu (31) wyraz za wyrazem. Ponieważ $r < R$ zostało obrane w sposób dowolny, więc zasadnicza teza twierdzenia jest udowodniona.

Gdy szereg (34) jest zbieżny, na przykład dla $x = R$, to zbieżność ta jest jednostajna [5°] w przedziale $(0, R)$ i twierdzenie 7 stosuje się do całego tego przedziału: *różniczkowanie wyraz za wyrazem jest dopuszczalne również dla $x = R$* .

Uwaga. Przekonaliśmy się o tym, że $R' \geq R$. Z drugiej strony, wyrazy wyjściowego szeregu (31) są nie większe co do bezwzględnej wartości od odpowiednich wyrazów szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + 2a_2 x^2 + \dots + n a_n x^n + \dots,$$

mającego ten sam promień zbieżności co i szereg (34). A więc $R \geq R'$. Tak więc ostatecznie $R' = R$: *promień zbieżności szeregu potęgowego (31) i szeregu (34), otrzymanego z niego przez różniczkowanie wyraz za wyrazem, są równe*. Łatwo to zresztą udowodnić za pomocą twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda [380], jeżeli przypomnimy sobie, że $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, gdy $n \rightarrow \infty$ [32, 10)].

Ponieważ szereg (31) otrzymujemy różniczkując szereg (33) wyraz za wyrazem, więc szeregi te mają ten sam promień zbieżności.

Ostatnie twierdzenie 8° pozwala na wielokrotne kolejne różniczkowanie szeregu potęgowego. Tak więc oznaczając jak poprzednio przez $f(x)$ funkcję przedstawioną sze-

regiem potęgowym (31) w przedziale jego zbieżności, będziemy mieli wszędzie wewnątrz tego przedziału

Jeżeli we wszystkich tych równościach przyjmiemy $x = 0$, to otrzymamy dobrze znane wyrażenia na współczynniki szeregu potęgowego

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

[porównaj 403, (7)]. Gdybyśmy rozpatrywali szereg w ogólnej postaci (31*), to zamiast wartości $x = 0$ podstawilibyśmy po prostu $x = x_0$. A więc:

9º Funkcja przedstawiona przez szereg potęgowy w przedziale jego zbieżności ma wewnątrz tego przedziału pochodne wszystkich rzędów. Sam szereg w stosunku do tej funkcji jest niczym innym, jak jej szeregiem Taylora.

To ciekawe twierdzenie wyjaśnia zagadnienie rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy, którym zajmowaliśmy się w poprzednim rozdziale. Widzimy, że jeżeli funkcja w ogóle da się rozwinać w szereg potęgowy, to właśnie w szeregu Taylora. Dlatego też ograniczyliśmy się właśnie do badania, czy funkcja jest równa sumie swojego szeregu Taylora. Zauważmy przy tym, że funkcja, która daje się rozwinać w szereg Taylora według potęg $x - x_0$ nazywa się *analityczną w punkcie x_0* .

Wyłożoną teorię stosuje się także do wielokrotnych szeregów potęgowych. Zatrzymamy się na szeregu o dwóch zmiennych

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k.$$

Wewnątrz obszaru zbieżności [396] szereg ten można różniczkować wyraz za wyrazem dowolną liczbę razy. Stąd, tak jak poprzednio, łatwo można otrzymać wzory na współczynniki:

$$a_{00} = f(x_0, y_0), \quad a_{10} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad a_{01} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$a_{20} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \dots$$

i ogólnie

$$a_{lk} = \frac{1}{i!k!} \cdot \frac{\partial^{l+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^l \partial y^k}.$$

A więc rozwinięcie funkcji $f(x, y)$ (jeżeli jest tylko możliwe) musi mieć postać

$$f(x, y) = \sum_{l, k=0}^{\infty} \frac{1}{l!k!} \cdot \frac{\partial^{l+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^l \partial y^k} (x - x_0)^l (y - y_0)^k.$$

Ten szereg nazywamy również *szeregiem Taylora*. Jest on w sposób naturalny związany ze wzorem Taylora, o którym mówiliśmy w ustępie 195. Gdy takie rozwinięcie funkcji $f(x, y)$ istnieje, to funkcję nazywamy *analityczną* w punkcie (x_0, y_0) .

§ 3. Zastosowania

439. Przykłady na ciągłość sumy szeregu i przejście do granicy wyraz za wyrazem. 1) Zbadać ciągłość sumy szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$$

przy założeniu, że $p, q > 0$ i jeden z tych wskaźników jest > 1 (co gwarantuje zbieżność szeregu dla wszystkich wartości x). Oczywiście wystarczy, jeżeli ograniczymy się do x nieujemnych.

Jeżeli $p > 1$, to dla $x < x_0$ (x_0 jest dowolną liczbą dodatnią) majorantą szeregu będzie szereg zbieżny

$$x_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

a więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg jest zbieżny jednostajnie i jego suma w przedziale $\langle 0, x_0 \rangle$ jest ciągła. Z uwagi na dowolność x_0 suma jest ciągła w całym przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$.

Jeżeli natomiast $p < 1$, lecz $q > 1$, to gdy dla $x > 0$ napiszemy szereg w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n^q + \left(\frac{1}{x}\right)^2 n^p},$$

stwierdzamy jak poprzednio, że jego suma jest ciągła dla wszystkich $x > 0$. Tak więc pozostaje do zbadania tylko punkt $x = 0$.

Stosując metody rachunku różniczkowego można wykazać, że n -ty wyraz szeregu osiąga największą wartość dla $x = n^{(p-q)/2}$ i wartość ta wynosi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{(p+q)/2}}.$$

Jeżeli $p + q > 2$, to majorantą naszego szeregu jest szereg zbieżny

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(p+q)/2}},$$

co gwarantuje ciągłość funkcji $f(x)$ dla wszystkich x z punktem $x = 0$ włącznie.

Pozostaje otwarta kwestia ciągłości $f(x)$ dla $x = 0$ w przypadku, gdy $p < 1, q > 1$, lecz $p + q < 2$. Zobaczmy dalej [491, 13]), że przy tych założeniach funkcja $f(x)$ jest nieciągła w punkcie $x = 0$.

2) Rozpatrzmy szereg Dirichleta [385, 3)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

gdzie $\{a_n\}$ jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że nie jest on „wszędzie rozbieżny”, więc ma on skrajną⁽¹⁾ odciętą zbieżności $\lambda < +\infty$. Dla dowolnej liczby $x_0 > \lambda$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

jest zbieżny. Stąd wynika już, że rozpatrywany szereg jest zbieżny jednostajnie dla wszystkich $x > x_0$ [twierdzenie analogiczne do 1 z ustępu 437]. Twierdzenie to wynika z kryterium Abela, jeżeli napiszemy nasz szereg w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

i zauważymy, że czynniki $1/n^{x-x_0}$: maleją wraz ze wzrostem n i są przy tym wspólnie ograniczone przez 1. Wtedy z twierdzenia 1 wynika, że suma szeregu jest ciągła dla $x > x_0$, a więc (z uwagi na dowolność x_0) dla wszystkich $x > \lambda$ [twierdzenie analogiczne do 2°].

Jeśli λ jest skończone i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$$

jest zbieżny, to w ten sposób stwierdzamy zbieżność jednostajną rozpatrywanego szeregu dla $x \geq \lambda$ [porównaj 5°] i ciągłość prawostronną jego sumy dla $x = \lambda$ [porównaj 6°].

3) W ustępie 390, 6) po określeniu funkcji $E(x)$ za pomocą równości

$$E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

stwierdziliśmy, że spełnia ona taką zależność:

$$(1) \quad E(x+y) = E(x) \cdot E(y).$$

A więc, zgodnie z twierdzeniem 2° z 437 funkcja $E(x)$ jest ciągła w danym przedziale od $-\infty$ do $+\infty$. A na podstawie wyników 75, 1° rozwiązywanie ciągłe równania (1) musi mieć postać $E(x) = a^x$. Wreszcie podstawę a wyznaczamy oczywiście z równości

$$a = E(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

A więc ostatecznie $E(x) = e^x$ [porównaj 404, (11)].

4) Podamy teraz nowe podejście do szeregu dwumennego [407, (22)].

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots,$$

który jest zbieżny bezwzględnie dla dowolnego m , gdy $|x| < 1$. Postawimy sobie za zadanie obliczyć jego sumę. Oznaczmy tę sumę, jako funkcję m (przy ustalonym x , $|x| < 1$), przez $\varphi(m)$.

Z algebra wiadomo, że dla m naturalnego (szereg urywa się wtedy na $(m+1)$ -szym wyrazie) $\varphi(m) = (1+x)^m$. Udowodnimy, że równość ta zachodzi dla każdego m .

Obierając dowolne k , rozpatrzmy podobny szereg

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

⁽¹⁾ Chodzi tu o taką liczbę λ , że dla $x_0 < \lambda$ szereg jest rozbieżny (przypiszek redakcji wydania polskiego).

o sumie $\varphi(k)$ i pomnożmy oba szeregi przez siebie według reguły Cauchy'ego. Łatwo można napisać kilka pierwszych wyrazów tego iloczynu.

$$\begin{aligned}\varphi(m) \cdot \varphi(k) &= 1 + (m+k)x + \left[\frac{m(m-1)}{2} + mk + \frac{k(k-1)}{2} \right] x^2 + \dots = \\ &= 1 + (m+k)x + \frac{(m+k)(m+k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots\end{aligned}$$

Współczynnikiem przy $x^n/n!$ będzie oczywiście pewien wielomian całkowity n -tego stopnia względem m i k . Jaką będzie on miał postać? Jeśli m i k są dowolnymi liczbami naturalnymi większymi od n , to z elementarnych rozważań wynika, że współczynnik ten będzie miał postać

$$(m+k)(m+k-1) \dots (m+k-n+1).$$

A więc (jak to wynika z algebraicznego twierdzenia o równości wielomianów dwóch zmiennych) tę samą postać będzie on miał dla dowolnych m i k . Tak więc szukana funkcja $\varphi(m)$ spełnia równanie funkcyjne

$$\varphi(m) \cdot \varphi(k) = \varphi(m+k).$$

Stwierdzamy teraz ciągłość funkcji $\varphi(m)$. Wynika ona ze zbieżności jednostajnej szeregu dwumiennego dla wszystkich wartości m nie większych co do wartości bezwzględnej od dowolniebranej liczby $m_0 > 0$. Dla tych wartości majorantą jego będzie szereg zbieżny

$$1 + m_0|x| + \frac{m_0(m_0+1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{m_0(m_0+1)(m_0+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \dots$$

Z tego, jak wiemy [75, 1°], wynika

$$\varphi(m) = a^m.$$

Ponieważ $a = \varphi(1) = 1+x$, więc ostatecznie

$$\varphi(m) = (1+x)^m.$$

5) Znany już czytelnikowi szereg logarytmiczny [405, (17)] można otrzymać z szeregu dwumiennego [407, (22)] za pomocą zależności [77, 5 (b)]

$$\ln a = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt[k]{a} - 1 \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Przyjmijmy $a = 1+x$ (gdzie $|x| < 1$) i podstawmy za $(1+x)^{1/k}$ rozwinięcie

$$(1+x)^{1/k} = 1 + \frac{1}{k} x + \frac{\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{k} - n+1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

Wtedy $\ln(1+x)$ otrzymamy jako granicę wyrażenia

$$\begin{aligned}(2) \quad k[(1+x)^{1/k} - 1] &= x - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) + \frac{x^3}{3} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{1}{2k} \right) - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n-1)k} \right) + \dots\end{aligned}$$

dla $k \rightarrow \infty$.

Wyrazy tego szeregu (dla stałego x) zawierają jako zmienną parametr naturalny k . W całym obszarze zmienności szeregu (2) jest zbieżny jednostajnie względem k . Wynika to (przy zastosowaniu kryterium Weierstrassa) z tego, że jego majorantą jest szereg

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \dots + \frac{|x|^n}{n} + \dots \quad (x = \text{const}, |x| < 1)$$

nie zawierający już k . W tym przypadku z twierdzenia 4⁽¹⁾ wynika, że w szeregu (2) możemy dla $k \rightarrow \infty$ przejść do granicy wyraz za wyrazem, co prowadzi do szeregu logarytmicznego.

6) Bardzo ciekawym przykładem tego samego rodzaju jest wyprowadzenie szeregu wykładniczego [404, (11)] z zależności

$$e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Rozwijając potęgę dwumianu według wzoru Newtona, dostajemy

$$(3) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k &= 1 + k \cdot \frac{x}{k} + \frac{k \cdot (k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^n + \dots = \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) + \dots \end{aligned}$$

W rzeczywistości dla każdego k mamy tu tylko skońzoną liczbę ($= k+1$) wyrazów, lecz możemy przyjąć, że mamy szereg nieskończony, jeżeli pozostałe wyrazy przyjmujemy równe 0. Szereg ten jest zbieżny jednostajnie dla wszystkich k , bowiem jak widać szereg zbieżny

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \dots + \frac{|x|^n}{n!} + \dots \quad (x = \text{const})$$

jest jego majorantą. W tym przypadku zgodnie z twierdzeniem 4 w szeregu (3) można przejść do granicy dla $k \rightarrow \infty$ wyraz za wyrazem. Ponieważ $(n+1)$ -szy wyraz tego szeregu jest równy 0, dopóki $k > n$, a dla wszystkich $k \geq n$ ma postać

$$\frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right),$$

więc jego granicą dla $k \rightarrow \infty$ jest $x^n/n!$. A więc tą drogą znów otrzymujemy rozwinięcie funkcji wykładniczej e^x .

7) Korzystając ze wzoru Moivre'a wyprowadziliśmy już w ustępie 408 wzór

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \cdot \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \cdot \sin^3 z + \dots$$

Pokażemy, że można stąd otrzymać rozwinięcie funkcji $\sin x$ w szereg potęgowy.

Przyjmijmy $z = \frac{x}{m}$ i wynieśmy $\cos^m \frac{x}{m}$ za nawias. Wzór przybierze postać

$$\sin x = \cos^m \frac{x}{m} \left\{ m \operatorname{tg} \frac{x}{m} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{\left(m \operatorname{tg} \frac{x}{m}\right)^3}{3!} + \dots \right\}.$$

Przyjmując, że x nie zmienia się, przejdźmy po prawej stronie wzoru do granicy, dla $m \rightarrow \infty$.

Ponieważ $\cos^m \frac{x}{m} \rightarrow 1$ [patrz na przykład 79, 4) przy $\lambda = 0$], a $m \operatorname{tg} \frac{x}{m} \rightarrow x$, więc w granicy rzeczywiście otrzymamy szukane rozwinięcie [404, (12)]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

⁽¹⁾ Przypominamy, że obszar zmienności X zmiennej x , o której mówiliśmy w twierdzeniu 4, może być dowolny, w szczególności może nim być zbiór liczb naturalnych (z tym, że $a = +\infty$).

Musimy teraz tylko uzasadnić możliwość przejścia do granicy wyraz za wyrazem wewnątrz nawiasu, gdzie liczba wyrazów jest skończona dla każdego m , lecz wzrasta nieograniczenie wraz z m [porównaj 6)].

Niech x będzie zawarte między $-\frac{1}{2}m_0\pi$ a $+\frac{1}{2}m_0\pi$. Przyjmijmy $m > m_0$. Łatwo wykażemy, że bezwzględna wartość wyrażenia $m \operatorname{tg} \frac{x}{m}$ maleje ze wzrostem m , a więc jest ograniczona.

$$\left| m \operatorname{tg} \frac{x}{m} \right| < L = m_0 \operatorname{tg} \frac{|x|}{m_0} \quad (m > m_0).$$

W takim razie rozwinięcie w nawiasie jest zmajoryzowane przez szereg zbieżny

$$L + \frac{L^3}{3!} + \dots$$

Kończymy rozumowanie tak samo, jak w poprzednim przykładzie.

Analogicznie możemy otrzymać rozwinięcie $\cos x$ w szereg potęgowy.

Uwaga. Przykłady 5), 6) i 7) odtwarzają w postaci ściślejszej sposób rozwinięcia funkcji elementarnych podany przez Eulera w jego „Wstępie do analizy nieskończoności małych” (1748).

8) Udowodnić, że

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(a) Niech będzie $0 < x < 1$. Ponieważ szereg $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ jest zbieżny, a czynniki $x^n/(1+x^n)$ są ograniczone od góry jedynką i maleją monotonicznie ze wzrostem n , więc możemy tu stosować kryterium Abela, a więc szereg jest zbieżny dla wszystkich x w $(0, 1)$. Przechodząc w nim wyraz za wyrazem do granicy, gdy $x \rightarrow 1-0$ (twierdzenie 4), otrzymamy szukany wynik.

(b) Przyjmijmy tu też, że $0 < x < 1$. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}.$$

Teraz jednak szereg $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}$ nie jest zbieżny, lecz jego sumy częściowe są ograniczone. Za to czynniki

$\frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}$ nie tylko maleją monotonicznie wraz ze wzrostem n , lecz nawet dążą jednostajnie do 0 w $(0, 1)$, gdyż

$$\frac{x^n}{1+x+\dots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n}.$$

W tym przypadku można stosować kryterium Dirichleta, szereg jest zbieżny jednostajnie, możemy przechodzić do granicy wyraz za wyrazem dla $x \rightarrow 1-0$ itd.

9) Mówiąc o szeregu potęgowym przyjmowaliśmy zawsze, że jego wyrazy są uporządkowane według wzrostu wykładników. Podczas gdy wewnątrz przedziału zbieżności nie ma to żadnego znaczenia, z uwagi na bezwzględną zbieżność szeregu, to już na przykład twierdzenie Abela staje się fałszywe przy innym uporządkowaniu.

Sprawdzić to na szeregu

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8}$$

otrzymanym przez przestawienie wyrazów szeregu logarytmicznego [porównaj 388, przykład 1]!

10) Zastosujmy twierdzenie Abela [6^o] do dowodu jego twierdzenia o mnożeniu szeregów [392].
Rozpatrzmy dwa szeregi zbieżne

$$(A) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

oraz

$$(B) \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

i założmy, że ich iloczyn (Cauchy'ego)

$$(C) \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

gdzie $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$, jest także zbieżny.

Mamy udowodnić, że

$$A \cdot B = C.$$

Przede wszystkim ze zbieżnością szeregu (A) wynika na podstawie lematu z ustępu 379, że szereg

$$(A^*) \quad A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny bezwzględnie dla $|x| < 1$, więc promień zbieżności R tego szeregu jest na pewno > 1 . A więc w każdym razie jest spełniona zależność

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} A(x) = A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

a mianowicie dla $R = 1$ wynika to z twierdzenia 6^o Abela, a dla $R > 1$ z twierdzenia 2^o [437]. Gdy analogicznie rozpatrzymy szeregi (dla $|x| < 1$):

$$(B^*) \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

$$(C^*) \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

to dla nich będzie słuszne wszystko to, co powiedzieliśmy o szeregu (A^{*}).

Stosując teraz do zbieżnych bezwzględnie szeregów (A^{*}) i (B^{*}) twierdzenie Cauchy'ego [389], otrzymujemy

$$A(x) \cdot B(x) = C(x).$$

Pozostaje tylko przejście do granicy dla $x \rightarrow 1-0$, żeby otrzymać szukany wynik:

$$A \cdot B = C.$$

440. Przykłady całkowania szeregów. 1) Sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ można otrzymać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} dx = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{1}{3} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right\} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu najpierw z twierdzenia Abela, a potem całkowaliśmy szereg potęgowy wyraz za wyrazem [437, 6°; 438, 7°].

2) Całkując wyraz za wyrazem szeregi

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \dots$$

w przedziale $\langle 0, x \rangle$ (gdzie $|x| < 1$) od razu otrzymujemy rozwinięcie

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

które w 405 [patrz (17) i 404, patrz (15)] były otrzymane w sposób bardziej zawiły. Słuszność pierwszego rozwinięcia dla $x = 1$ i drugiego dla $x = \pm 1$ należy udowodnić dodatkowo za pomocą twierdzenia Abela [437, 6°].

3) Gdy przypomnimy sobie, że pochodna funkcji $\arcsin x$, równa $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, rozwija się w szereg [407 24])

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n} \quad (-1 < x < 1),$$

wówczas całkując ten szereg wyraz za wyrazem otrzymamy łatwo nowe dla nas rozwinięcie samej funkcji arcus sinus:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Ponieważ szereg ten jest zbieżny również dla $x = \pm 1$ [370, 5), (a)]⁽¹⁾, więc z twierdzenia Abela wynika, że rozwinięcie jest słuszne również dla tych wartości. W szczególności otrzymamy dla liczby π szereg

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

⁽¹⁾ Między innymi zbieżność szeregu $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ można teraz udowodnić prościej.

Mamy dla dowolnego m

$$x + \sum_{n=1}^m \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \arcsin x < \frac{1}{2}\pi.$$

Przechodząc do granicy, gdy $x \rightarrow 1$, otrzymamy

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2}\pi,$$

skąd [365] otrzymujemy żądaną wynik.

Analogicznie rozwijając w szereg pochodną

$$[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

i całkując wyraz za wyrazem otrzymujemy rozwinięcie

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Jest to $\text{Arsinh } x$, tzn. funkcja odwrotna do $\sinh x$ [49, 4); 339, uwaga].

4) Przez całkowanie szeregów wyraz za wyrazem otrzymujemy rozwinięcia w szeregi nieskończone potęgowe pewnych całek, nie dających się przedstawić za pomocą funkcji elementarnych w postaci skończonej [patrz 272]. Rozwinięcia te można wykorzystać do obliczeń przybliżonych.

Na przykład wychodząc ze znanego rozwinięcia

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

[porównaj 404 (11)] otrzymujemy

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Rozwiążmy teraz następujące zadanie: obliczyć całkę

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

z dokładnością do 0,0001. Biorąc granicę górną całki równą 1, otrzymamy dla W szereg liczbowy naprzemiany

$$W = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \dots$$

Ponieważ ósmy wyraz rozwinięcia jest już znacznie mniejszy niż zadany stopień dokładności, więc pozostawimy tylko pierwszych osiem wyrazów. Odpowiedni (ujemny) błąd Δ daje się łatwo oszacować

$$|\Delta| < \frac{1}{75600} < \frac{1,5}{10^5}.$$

Obliczamy pozostałe wyrazy biorąc pięć cyfr po przecinku

$$\begin{array}{rcl} 1 + \frac{1}{10} = 1,10000 & \frac{1}{3} = 0,33333 (+) \\ \frac{1}{216} = 0,00463 (-) & \frac{1}{42} = 0,02381 (-) \\ \hline \frac{1}{9360} = 0,00011 (-) & \frac{1}{1320} = 0,00076 (-) & - \frac{1,10474}{0,35790} \\ 1,10474 & 0,35790 & 0,74684 \end{array}$$

Gdy uwzględnimy wszystkie błędy, wówczas otrzymamy

$$0,74681 < W < 0,74685, \quad W = 0,7468\dots$$

z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku [porównaj 328, 5)].

5) Analogicznie, ponieważ [porównaj 404, (12)]

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots,$$

więc

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)! (2n-1)} + \dots$$

Spróbujmy obliczyć za pomocą tego rozwinięcia całkę

$$\mu = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx,$$

z dokładnością do 0,001.

Przyjmując $x = \pi$ mamy

$$\mu = \pi - \frac{1}{18} \pi^3 + \frac{1}{600} \pi^5 - \frac{1}{35280} \pi^7 + \frac{1}{3265920} \pi^9 - \frac{1}{439084800} \pi^{11} + \dots$$

a więc znów szereg naprzemienny z wyrazami malejącymi co do bezwzględnej wartości.

Ponieważ szósty wyraz jest mniejszy od 0,0007 więc ograniczymy się tylko do pięciu wyrazów. Obliczamy z czterema cyframi po przecinku:

$$\pi = 3,1416(-)$$

$$\frac{1}{600} \pi^5 = 0,5100(+) \quad \frac{1}{18} \pi^3 = 1,7226(-)$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3265920} \pi^9 = 0,0091(+) \\ \hline 3,6607 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{35280} \pi^7 = 0,0856(+) \\ \hline 1,8082 \end{array} \quad \begin{array}{r} -3,6607 \\ 1,8082 \\ \hline 1,8525 \end{array}$$

Uwzględniając błąd otrzymujemy ostatecznie

$$1,8517 < \mu < 1,8527, \quad \mu = 1,852 \pm 0,001.$$

6) Przedstawmy w postaci szeregów całki

$$(a) \int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx, \quad (b) \int_0^1 x^{-x} dx.$$

(a) Z rozwinięcia funkcji $\operatorname{arc tg} x$ mamy

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{5} x^4 - \frac{1}{7} x^6 + \dots \right) dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

Ponieważ szereg występujący pod znakiem całki jest zbieżny dla $x = 1$, więc można całkować wyraz za wyrazem [438,7°].

Jak już mówiliśmy [328,6] wartość tej całki

$$G = 0,915965 \dots$$

jest znana jako *stała Catalana*. Teraz widzimy, że

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

(b) Przepiszmy wyrażenie podcałkowe w postaci $e^{-x \ln x}$ i rozwińmy je w szereg potęgowy:

$$x^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!} \quad (1),$$

który jest zbieżny jednostajnie dla $0 < x < 1$, gdyż maximum funkcji $|x \ln x|$ wynosi $1/e$, co łatwo można wykazać korzystając z metod rachunku różniczkowego. Majorantą tego szeregu jest więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/e)^n}{n!}.$$

A więc szereg można całkować wyraz za wyrazem. Ponieważ [312,4]

$$\int_0^1 x^n \ln^n x \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

więc ostatecznie

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

7) Mieliśmy już [414 (8)] rozwinięcie

$$\arctg x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^p \quad (0 < x < 1).$$

Przyjmując $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ i uwzględniając, że $\arctg \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$ [50] otrzymujemy

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} y^{2p+1} \quad (0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Całkujemy tę równość w granicach od 0 do y , przy czym po prawej stronie całkujemy wyraz za wyrazem:

$$\frac{1}{2} (\arcsin y)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \cdot \frac{y^{2p+2}}{2p+2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!!]}{(2m-1)!!} \cdot \frac{y^{2m}}{2m}.$$

Wynik ten można napisać tak:

$$2 (\arcsin y)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} (2y)^{2m}.$$

Dla $y = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Widzieliśmy już [395 (13), patrz 416], że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!},$$

(1) Dla $x = 0$ wyrazy szeregu, poczynając od $n = 1$, zastępujemy wartościami granicznymi, tzn. zerami.

a więc ostatecznie

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Do tego ciekawego wyniku Eulera powróćmy jeszcze raz.

8) Obliczyć całkę

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Jeśli skorzystamy z szeregu logarytmicznego [405 (17)], to otrzymamy dla funkcji podcałkowej rozwinięcie

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^{n-1} + \dots,$$

które jest słuszne w całym przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Całkując wyraz za wyrazem otrzymujemy

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

Przed chwilą wyprowadziliśmy równość (4). Wynika z niej, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Tak więc otrzymaliśmy „skończone” wyrażenie dla tej całki: $I = \frac{1}{12}\pi^2$.

9) Przypuśćmy, że mamy obliczyć całkę ($|a| < 1$)

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx.$$

(Dla $x = \frac{1}{2}\pi$ przyporządkujemy wyrażeniu podcałkowemu wartość graniczną dla $x \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ równą a).

Korzystając z rozwinięcia logarytmu, otrzymujemy

$$\frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} \cos^n x.$$

przy czym szereg jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Zauważmy [312, (8)], że

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m-1} x dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^{2m} x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \pi.$$

Całkując wyraz za wyrazem, otrzymujemy

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \left\{ a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{a^{2m+1}}{2m+1} \right\}.$$

W otrzymanym szeregu rozpoznajemy rozwinięcie funkcji arcus sinus [patrz 3)]. Tak więc ostatecznie otrzymujemy (w postaci skończonej!):

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \cdot \arcsin a.$$

10) Rozpatrzmy rozwinięcie (dla $|r| < 1$):

$$(5) \quad \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \cos nx,$$

które łatwo daje się udowodnić. Wystarczy pomnożyć prawą stronę przez mianownik $1-2r \cos x + r^2$. Otrzymamy:

$$1-2r \cos x + r^2 + 2 \sum_1^{\infty} r^n \cos nx - 2 \sum_1^{\infty} r^{n+1} \cdot 2 \cos nx \cdot \cos x + 2 \sum_1^{\infty} r^{n+2} \cos nx.$$

Jeśli zastąpimy $2\cos nx \cos x$ przez $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x$ i rozbijemy odpowiednio drugą sumę na dwie, po skróceniu pozostaje tylko $1-r^2$, co kończy dowód.

Ze zbieżności szeregu $\sum_1^{\infty} |r|^n$ (dla $|r| < 1$) wynika, że szereg po prawej stronie (5) jest zbieżny jednostajnie względem x w przedziale $(-\pi, \pi)$. Całkujemy teraz lewą i prawą stronę od $-\pi$ do π , przy czym szereg możemy całkować wyraz za wyrazem (twierdzenie 5). Ponieważ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$, więc otrzymujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx = 2\pi$$

[porównaj 309, 8)].

Analogicznie, mnożąc obie strony tożsamości (5) przez $\cos mx$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) i całkując wyraz za wyrazem łatwo otrzymujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2r \cos x + r^2} dx = 2\pi \frac{r^m}{1-r^2}.$$

Korzystając przy tym ze znanego już wyniku [309,4] (d)):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n, \\ \pi & \text{dla } m = n. \end{cases}$$

11) Jeżeli w tożsamości (5) przeniesiemy jedynkę na lewą stronę i podzielimy obie strony przez $2r$, to otrzymamy:

$$\frac{\cos x - r}{1-2r \cos x + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cos nx.$$

Tym razem ustalimy dowolnie x i będziemy rozpatrywali r jako zmienną o obszarze zmienności $(-1, 1)$. Całkujemy obie strony równości względem r od 0 do dowolnego r z tego przedziału, przy czym szereg potęgowy po prawej stronie całkujemy wyraz za wyrazem. Ponieważ po lewej stronie licznik (z dokładnością do czynnika liczbowego) jest pochodną względem r mianownika, więc otrzymujemy

$$\ln(1-2r \cos x + r^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos nx \quad (|r| < 1).$$

Teraz z kolei ustalamy r , a przyjmujemy, że x zmienia się od 0 do π . Łatwo można zauważyć, że szereg po prawej stronie jest zbieżny jednostajnie względem x w tym przedziale, więc można go całkować wyraz za wyrazem (twierdzenie 5). Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r \cos x + r^2) dx = 0 \quad (|r| < 1)$$

[porównaj 307, 4); 314, 14)]. Stąd, jak już widzieliśmy, łatwo otrzymujemy wartość całki także dla $|r| > 1$

12) Następujące zależne od x całki

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta .$$

$$J_n(x) = \frac{2x^n}{(2n-1)!! \pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos^{2n}\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots) ,$$

przedstawiają tak zwane *funkcje Bessela* [porównaj 395, 14)]. Rozwijając wyrażenie podcałkowe według potęg $x \sin \theta$ i całkując wyraz za wyrazem, łatwo otrzymujemy znane nam już rozwinięcia tych funkcji w szeregi według potęg x .

Całkując, na przykład, szereg

$$\cos(x \sin \theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k} \theta}{(2k)!} ,$$

korzystając z wzoru [312, (8)]

$$(6) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta d\theta = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} ,$$

otrzymamy w przypadku funkcji Bessela ze wskaźnikiem zero

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} .$$

13) Spotkaliśmy się przedtem z tak zwanyimi całkami eliptycznymi zupełnymi pierwszego i drugiego rodzaju [315 i inne]:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} , \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi .$$

Postawmy sobie zadanie rozwinać je według potęg parametru k ($0 < k < 1$).

Przyjmując $x = -k^2 \sin \varphi$ we wzorze (24) z 407 otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n} \varphi .$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie względem φ , gdyż dla wszystkich φ jest zmajoryzowany przez szereg zbieżny

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} ,$$

a więc z twierdzenia 5 wynika, że możemy go całkować wyraz za wyrazem, co też uczynimy. Korzystając znów ze wzoru (6) otrzymamy tą drogą:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\} .$$

Analogicznie, korzystając ze wzoru (23) z 407, otrzymujemy

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\} .$$

Szeregi te można też wykorzystać dla rachunków przybliżonych. Rozpatrzmy dla przykładu szereg

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \frac{175}{262144} - \frac{441}{2097152} - \dots\right).$$

Jeśli pozostawimy tu tylko wyrazy już napisane, to odpowiedni błąd będzie ujemny; a oto jego oszacowanie:

$$|\Delta| < \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{11 \cdot 2^6} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) < 0,00024.$$

Można oczekwać trzech dokładnych cyfr po przecinku. Rzeczywiście, przeprowadzając obliczenia na liczbach z pięcioma cyframi po przecinku, mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 1,57080(-) & \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} &= 0,19635(-) \\ && \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{256} &= 0,01841(-) \\ - \frac{1,57080}{0,21997} && \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{2048} &= 0,00383(+) \\ 1,35083 && \frac{\pi}{2} \cdot \frac{175}{262144} &= 0,00105(-) \\ && \frac{\pi}{2} \cdot \frac{441}{2097152} &= 0,00033(+) \\ && \hline & 0,21997 \end{aligned}$$

$$1,35057 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1,35085, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,350\dots$$

[porównaj 328, 4)].

Należy zaznaczyć, że tylko dla małych wartości k podane uprzednio szeregi dla całek eliptycznych $K(k)$ i $E(k)$ są rzeczywiście wygodne do obliczeń. Istnieją jednak przekształcenia pozwalające na sprowadzenie obliczeń tych całek do przypadku dowolnie małego k [porównaj 315].

14) Otrzymane rozwinięcie funkcji $E(k)$ można wykorzystać do obliczenia następującej całki:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{E(h \sin \theta)}{1-h^2 \sin^2 \theta} \sin \theta d\theta \quad (0 < h < 1).$$

Przede wszystkim łatwo sprawdzić, że ma miejsce rozwinięcie

$$\begin{aligned} \frac{E(k)}{1-k^2} &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot 5k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot 7k^6 + \dots \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \cdot (2n+1) k^{2n} \right\} \end{aligned}$$

mnożąc na przykład prawą stronę równości przez $1-k^2$.

Po podstawieniu $k = h \sin \theta$ i pomnożeniu przez $\sin \theta$ możemy ten szereg całkować względem θ od 0 do $\pi/2$ wyraz za wyrazem, ponieważ otrzymany szereg jest zbieżny w tych granicach jednostajnie (jego majorantą jest na przykład poprzedni szereg dla $k = h$). Ponieważ [321 (8)]

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \theta d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

więc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{E(h \sin \theta)}{1 - h^2 \sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} h^6 + \dots \right\} = \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot h^{2n} \right\}.$$

Porównując wyrażenie w nawiasie ze wzorem (24) z ustępu 407, otrzymujemy wartość szukanej całki nawet w skończonej postaci:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{E(h \sin \theta)}{1 - h^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}.$$

15) Rozpatrzmy wreszcie rozwinięcie funkcji $y = \arcsin(1-x)$ dla $x > 0$ według niecałkowitych potęg x ⁽¹⁾.

Korzystając z szeregu dwumiennego otrzymujemy:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \dots \right\} = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} x^{-1/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} x^{1/2} - \frac{3}{32\sqrt{2}} x^{3/2} - \dots$$

i gdy odrzucimy pierwszy wyraz, który dla $x = 0$ staje się równy ∞ , zbieżność szeregu będzie jednostajna w dowolnym przedziale $(0, x)$, gdzie $0 < x < 2$. Funkcją pierwotną pierwszego wyrazu jest $-\sqrt{2}x^{1/2}$. Funkcję pierwotną pozostały części szeregu otrzymamy przez całkowanie wyraz za wyrazem. Ponieważ dla $x = 0$ musi być $y = \pi/2$, więc ostatecznie otrzymamy rozwinięcie względem potęg x o wykładnikach ułamkowych (słuszne dla $0 < x < 2$):

$$y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x^{1/2} - \frac{2}{6\sqrt{2}} x^{3/2} - \frac{3}{80\sqrt{2}} x^{5/2} - \dots$$

Analogicznie otrzymujemy też rozwinięcie:

$$\arcsin \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = \sqrt{2} \left\{ x^{1/2} + \frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{5} x^{5/2} - \frac{1}{7} x^{7/2} + \dots \right\}$$

dla $0 < x < 1$.

441. Przykłady na różniczkowanie szeregów wyraz za wyrazem

1) Powróćmy znów do funkcji [porównaj 390, 6); 439, 3)]

$$y = E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Możemy teraz łatwo obliczyć jej pochodną, wystarczy w tym celu zróżniczkować ten szereg wyraz za wyrazem. Otrzymamy $E'(x) = E(x)$, a więc rozpatrywana funkcja spełnia równanie różniczkowe $y' = y$. Stąd $y = Ce^x$, a ponieważ dla $x = 0$ jest oczywiście $y = 1$, otrzymamy ostatecznie $E(x) = e^x$.

(1) O zwykłym rozwinięciu względem całkowitych dodatnich potęg x nie może tu być nawet mowy, gdyż wtedy nasza funkcja, zgodnie z twierdzeniem 9°, 438, miałaby pochodną skończoną także dla $x = 0$, co nie jest prawdą.

2) Zastosujemy analogiczną metodę do obliczenia sumy szeregu dwumennego

$$y = f(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

(tym razem ustalone jest m , a x zmienia się w przedziale $(-1, 1)$; porównaj 439, 4)). Różniczkując go wyraz za wyrazem otrzymujemy

$$f'(x) = m \left\{ 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots \right\}.$$

Teraz już łatwo zauważyc, że

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \quad (1).$$

A więc nasza funkcja spełnia równanie różniczkowe

$$(1+x)y' = my,$$

skąd

$$y = C(1+x)^m.$$

Ponieważ dla $x = 0$ jest oczywiście $y = 1$, więc stała $C = 1$ i ostatecznie

$$y = f(x) = (1+x)^m.$$

3) Wiemy już, że suma szeregu Dirichleta [385, 3)]

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

jest dla $x > \lambda$ (gdzie λ jest graniczną odciętą zbieżności, $\lambda < +\infty$) funkcją ciągłą [439, 2)].

Różniczkując wyraz za wyrazem możemy otrzymać pochodną tej funkcji

$$\varphi'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \ln n \quad (x > \lambda).$$

Wynik ten otrzymaliśmy na razie tylko w sposób formalny. Żeby go uzasadnić, wystarczy sprawdzić że ostatni szereg jest zbieżny jednostajnie względem x dla wszystkich $x > x_0$, gdzie x_0 jest dowolną, lecz ustaloną liczbą większą niż λ . Tak samo jak w ustępie 439, 2, otrzymujemy to na podstawie kryterium

Abela, korzystając z tego, że czynniki $\frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$ poczynając od $n = 2$ maleją wraz ze wzrostem n i są wspólnie ograniczone liczbą $\ln 2$. Dowolną wartość $x > \lambda$ możemy zawsze między pewnymi liczbami $x' > \lambda$ i $x'' > x'$. W przedziale (x', x'') stosuje się już twierdzenie 7 [435].

W ten sam sposób można przekonać się o istnieniu pochodnych wszystkich rzędów funkcji $\varphi(x)$, które można przedstawić w postaci szeregów.

(1) Przy mnożeniu $f'(x)$ przez $1+x$ trzeba skorzystać z następującej własności współczynników dwumianu:

$$\frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n},$$

której szczególnym przypadkiem jest znana zależność

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n}.$$

Otrzymane wyniki można w szczególności zastosować do funkcji Riemanna

$$\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x}$$

dla $x > 0$.

4) Spotkaliśmy się już z rozwinięciem funkcji Bessela ze wskaźnikiem zero $J_0(x)$ w szereg potęgowy

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

[395, 14); 440, 12)].

Pokażemy teraz, że funkcja ta spełnia równanie różniczkowe Bessela

$$xu'' + u' + xu = 0.$$

Przyjmując $u = J_0(x)$ mamy

$$xu = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)^2}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1},$$

a następnie różniczkując dwukrotnie rozwinięcie u , dostajemy

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1}, \quad xu'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(2k-1)}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-3}.$$

Gdy dodamy te równości, to współczynnik przy x^{2k-1} będzie równy

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} [2k(2k-1) + 2k - (2k)^2] = 0,$$

i otrzymujemy żądaną wynik.

Analogicznie można się przekonać o tym, że funkcja Bessela $J_n(x)$ o dowolnym wskaźniku naturalnym, o której też poprzednio mówiliśmy, spełnia ogólne równanie Bessela

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

5) Bardziej kształcące będzie inne postawienie zagadnienia: znaleźć funkcję dającą się rozwinąć w szereg dla wszystkich x i spełniającą równanie Bessela.

Zrobimy to, na przykład, w najprostszym przypadku $n = 0$. Napiszmy rozwinięcie szukanej funkcji w postaci szeregu o współczynnikach nieoznaczonych

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

i przyjmując, że jest on wszędzie zbieżny, różniczkujmy go dwukrotnie wyraz za wyrazem. Podstawiając wszystkie te rozwinięcia do równania, otrzymujemy

$$a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 a_m + a_{m-2}) x^{m-1} = 0.$$

Z twierdzenia 3° [437] wynika

$$a_1 = 0, \quad m^2 a_m + a_{m-2} = 0 \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Stąd, przede wszystkim, otrzymujemy, że współczynniki o wskaźnikach nieparzystych są zerami $a_{2k-1} = 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Natomiast o współczynnikach ze wskaźnikami parzystymi a_{2k} możemy powiedzieć, że wszystkie one wyrażają się przez a_0 wzorami redukcyjnymi

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}.$$

A więc otrzymujemy znów funkcję $J_0(x)$ z dokładnością do dowolnego czynnika a_0 .

To, że otrzymany szereg jest rzeczywiście wszędzie zbieżny, sprawdzamy bezpośrednio. Z samego sposobu jego wyznaczania wynika, że przedstawiona przezeń funkcja spełnia równanie.

Zwracamy uwagę czytelnikowi na swoiste wykorzystanie metody współczynników nieoznaczonych. Mieliśmy tu już nieskończony zbiór tych współczynników i musieliśmy skorzystać z twierdzenia o równości ci szeregów potęgowych zamiast stosowanego zwykle twierdzenia o równości wielomianów.

6) Gauss wprowadził funkcję

$$u = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n$$

[szereg hipergeometryczny; patrz 372; 378, 4)]. Różniczkując dwukrotnie ten szereg wyraz za wyrazem (przyjmując $|x| < 1$) stwierdzamy, że funkcja ta spełnia tak zwane *hipergeometryczne równanie różniczkowe*

$$x(x-1)u'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]u' + \alpha\beta u = 0.$$

Pozostawiamy czytelnikowi łatwe, lecz nieco przydługie rachunki. Tu też można zmienić sformułowanie zadania podobnie jak w przykładzie 5).

7) Niech funkcja $f(x)$ będzie określona dla $0 < x < 1$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Wykażemy, że dla $0 < x < 1$ funkcja ta spełnia ciekawe równanie funkcyjne

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C = \text{const.}$$

Wystarczy w tym celu wykazać, że pochodna względem x wyrażenia po lewej stronie jest tożsamościowo równa zeru:

$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} \ln x = 0.$$

Różniczkując szereg określający funkcję $f(x)$ wyraz za wyrazem otrzymujemy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x);$$

zastępując x przez $1-x$, otrzymujemy

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x} \ln x.$$

Na tym kończymy dowód.

Samą stałą łatwo można wyznaczyć przyjmując, że w udowodnionej zależności x dąży do 1. Z twierdzenia Abela wynika, że granica lewej strony równości

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

[440, (4)], a więc $C = \pi^2/6$.

8) W 400, 4) rozpatrywaliśmy iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

Przyjmując, że $0 < \varphi < \pi/2$ logarytmujemy najpierw tę równość [401, 4°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{\varphi}{2^n} = \ln \sin \varphi - \ln \varphi,$$

a następnie różniczkujemy otrzymany szereg wyraz za wyrazem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^n} = \frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi.$$

Ponieważ majorantą szeregu pochodnych jest ciąg geometryczny zbieżny, więc różniczkowanie wyraz za wyrazem jest uzasadnione.

9) W 408 wprowadziliśmy rozwinięcie $\sin x$ w iloczyn nieskończony

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Biorąc wartości bezwzględne otrzymujemy stąd

$$|\sin x| = |x| \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right|.$$

Jeśli x jest różne od liczb postaci $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), to logarytmując otrzymamy szereg nieskończony

$$\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left|1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right|.$$

Różniczkując wyraz za wyrazem otrzymamy następujące rozwinięcie:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

Dla uzasadnienia takiego postępowania wystarczy się przekonać, że otrzymany szereg jest zbieżny jednoznacznie w dowolnym przedziale skończonym domkniętym, nie zawierającym punktów postaci $k\pi$. Rzeczywiście, gdy x pozostaje w tym przedziale, jego wartość bezwzględna jest ograniczona $|x| < M$, więc (przynajmniej dla $n > M/\pi$) zachodzi nierówność

$$\left| \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \right| = \frac{2|x|}{n^2 \pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2 \pi^2 - M^2}.$$

Ponieważ szereg

$$\sum_{n=M/\pi}^{\infty} \frac{2M}{n^2 \pi^2 - M^2}$$

jest zbieżny, więc żądany wynik otrzymujemy korzystając z kryterium Weierstrassa.

Rozwinięciu $\operatorname{ctg} x$ można nadać postać

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right);$$

w tej postaci jest ono jak gdyby rozkładem $\operatorname{ctg} x$ na ułamki proste odpowiadające poszczególnym pierwiastkom 0 i $+n\pi$ mianownika $\sin x$.

Ze wzoru $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg}(x - \frac{1}{2}\pi)$ można otrzymać rozkład $\operatorname{tg} x$ na ułamki proste

$$\operatorname{tg} x = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}}.$$

A gdy skorzystamy ze wzoru

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \frac{1}{2} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x),$$

otrzymamy również rozkład $1/\sin x$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Różniczkując wyraz za wyrazem rozwinięcie $\operatorname{ctg} x$ (niech czytelnik sam się przekona, że jest to uzasadnione) otrzymamy jeszcze jedno pożyteczne rozwinięcie:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2} \right].$$

10) Gdy wyjdziemy z rozkładu $\sinh x$ na iloczyn nieskończony [408] możemy w podobny sposób dojść do rozwinięć

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2} \quad \text{itp.}$$

11) W 402 wyprowadziliśmy wzór Weierstrassa dla funkcji $\Gamma(x)$ [porównaj (16)]:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) \cdot e^{-x/n}.$$

Uwzględniając, że $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ i przechodząc do logarytmów, łatwo otrzymujemy (dla x różnego od 0 i ujemnych liczb całkowitych)

$$\ln |\Gamma(x)| = -\ln |x| - Cx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left| 1 + \frac{x}{n} \right| \right).$$

Różniczkując ten szereg wyraz za wyrazem otrzymujemy w sposób formalny równość

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right).$$

Udowodnimy teraz, że szereg po prawej stronie równości jest zbieżny jednostajnie w dowolnym przedziale skończonym (nie zawierającym ujemnych liczb całkowitych). Rzeczywiście, ponieważ przy tym $|x|$ jest ograniczone: $|x| < M$ to co najmniej dla $n > M$ będziemy mieli:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right| = \frac{|x|}{n(n+x)} < \frac{M}{n(n-M)}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n>M} \frac{M}{n(n-M)}$ jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika zbieżność jednostajna. Możemy więc powołać się na twierdzenie 7 z 435, a przez to udowodnić samo istnienie pochodnej $\ln |\Gamma(x)|$ a więc i samej $\Gamma(x)$ itd.

Dodając do prawej strony otrzymanego wzoru szereg

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

możemy go sprowadzić do postaci:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{x+v} \right).$$

Łatwo można się przekonać o tym, że funkcja $\Gamma(x)$ ma pochodne wszystkich rzędów.

442. Metoda kolejnych przybliżeń w teorii funkcji uwikłanych. Ażeby pokazać zastosowanie teorii szeregów (lub ciągów) funkcyjnych w praktyce, rozpatrzmy zagadnienie o istnieniu funkcji uwikłanych [206 i następne]. Dla przejrzystości ograniczymy się do przypadku pojedynczego równania

$$(7) \quad F(x, y) = 0,$$

z którego należy wyznaczyć y jako jednoznaczna funkcję zmiennej x . Tym razem zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń, dzięki której będziemy mogli nie tylko ustalić jej istnienie lecz także podać wskazówki dotyczące jej efektywnego obliczenia.

Niech funkcja $F(x, y)$ będzie ciągła, wraz ze swoją pochodną $F'_y(x, y)$, w pewnym kwadracie

$$\mathcal{D} = \langle x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$$

ze środkiem w pewnym punkcie (x_0, y_0) , przy czym

$$(8) \quad F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{lecz} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Równanie (7) określa wtedy, w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , y jako funkcję jednoznaczna i ciągłą zmiennej x , która dla $x = x_0$ przyjmuje wartość y_0 .

Wygodniej będzie rozpatrywać najpierw przypadek szczególny, gdy równanie (7) ma postać

$$(7^*) \quad y = y_0 + \varphi(x, y),$$

gdzie na funkcję φ i jej pochodną φ'_y nakładamy podobne warunki, jakie spełnia funkcja F z tym, że warunki (8) są zastąpione przez

$$(8^*) \quad \varphi(x_0, y_0) = 0, \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1.$$

Z uwagi na ciągłość pochodnej możemy od razu założyć, że obszar \mathcal{D} jest tak mały, że w nim jest zawsze

$$(9) \quad |\varphi'_y(x, y)| < \lambda,$$

gdzie λ jest pewną stałą mniejszą od jedności. Następnie zachowując przedział zmienności y , musimy jeszcze zmniejszyć przedział zmienności x . Zastąpimy go tak małym przedziałem $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, żeby w nim funkcja ciągła $\varphi(x, y_0)$ zmiennej x , która dla $x = x_0$ jest równa 0, spełniała nierówność

$$(10) \quad |\varphi(x, y_0)| < (1 - \lambda) \Delta.$$

Tak więc wyznaczyliśmy obszar

$$\mathcal{D}^* = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle,$$

do którego będzie się właściwie odnosiło dalsze rozumowanie.

Podstawiając do prawej strony równania (7*) stałą y_0 w miejsce y , otrzymamy pewną funkcję zmiennej x :

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

Analogicznie przyjmujemy kolejno:

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1),$$

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2),$$

.....

i ogólnie

$$(11) \quad y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}).$$

Właśnie te funkcje

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \dots \quad y_n(x), \quad \dots$$

dają kolejne przybliżenia szukanej funkcji $y(x)$.

Co prawda pozostaje jeszcze do sprawdzenia, czy żadna z nich nie wychodzi poza przedział $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$. W przeciwnym bowiem przypadku, gdyby któraś z nich wyszła z tego przedziału, nie można jej podstawić za y po prawej stronie równania (7*).

Wykażemy to za pomocą indukcji. Przypuśćmy, że

$$y_0 - \Delta < y_{n-1} < y_0 + \Delta.$$

Z (11)

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}),$$

lecz

$$|\varphi(x, y_{n-1})| < |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie przekształca się według twierdzenia o wartości średniej i na podstawie (9) jest

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, \eta) \cdot (y_{n-1} - y_0)| < \lambda \cdot \Delta,$$

drugi zaś jest mniejszy od $(1 - \lambda) \Delta$ z uwagi na (10), a więc razem

$$|y_n - y_0| < \lambda \Delta + (1 - \lambda) \Delta = \Delta,$$

co kończy dowód.

Jednocześnie dowodzimy metodą indukcji, że wszystkie skonstruowane w ten sposób funkcje są ciągłe.

Zajmijmy się teraz granicą ciągu funkcyjnego $\{y_n\}$. Wygodniej jednak rozpatrywać szereg

$$(12) \quad y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}).$$

Z samego określenia naszego ciągu widać, że

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2}).$$

Korzystając znów z twierdzenia o wartości średniej i nierówności (9) otrzymujemy

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda |y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

Stąd, zastępując n przez $n-1, n-2$, itd. z uwagi na (10) otrzymujemy ostatecznie:

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} \cdot |y_1 - y_0| < \lambda^{n-1} \cdot (1 - \lambda) \cdot \Delta.$$

Szereg (12) jest więc zmajoryzowany przez postęp geometryczny

$$(13) \quad (1 - \lambda) \Delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1},$$

a zatem szereg ten jest zbieżny, przy czym jednostajnie dla wszystkich wartości x w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Na mocy twierdzenia 1 z ustępu 431 również funkcja graniczna

$$y = y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

jest ciągła w tym przedziale.

O tym, że funkcja ta spełnia wyjściowe równanie można się łatwo przekonać przechodząc w równości (11) do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$. Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że nie ma innych wartości y , oprócz wyznaczonych przez nią, które spełniałyby równość (7*). Rzeczywiście, gdybyśmy dla pewnego x , obok (7*), mieli

$$y^* = x_0 + \varphi(x, y^*),$$

to odejmując i szacując różnicę wartości φ , otrzymalibyśmy

$$|y - y^*| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, y^*)| < \lambda \cdot |y - y^*|,$$

a to jest niemożliwe, gdy $y^* \neq y$.

Stąd wynika, że

$$y(x_0) = y_0;$$

co jest zresztą od razu widoczne, gdyż wszystkie $y_n(x_0) = y_0$.

Twierdzenie zostało więc udowodnione w rozpatrywanym szczególnym przypadku. Przypadek ogólny łatwo daje się sprowadzić do przypadku szczególnego, a mianowicie: równanie (7) piszemy w sposób następujący:

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)} \right],$$

co można utożsamić z (7*), przyjmując

$$\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Funkcja ta spełnia warunki (8*), w szczególności drugi z nich, gdyż $\varphi_x(x_0, y_0)$ jest równe 0.

Jak już mówiliśmy, przedstawione postępowanie ułatwia także efektywne przybliżone obliczenie szukanej funkcji $y(x)$. Błąd powstały przy zastępowaniu $y(x)$ przez $y_n(x)$ można łatwo oszacować, ponieważ reszty szeregu (12) są majoryzowane przez odpowiednie reszty postępu geometrycznego (13). Stąd właśnie otrzymujemy

$$|y(x) - y_n(x)| < \Delta \cdot \lambda^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Bardzo pouczające będzie porównanie przeprowadzonego dowodu z dowodem twierdzenia o funkcji uwikłanej z ustępu 206. Tam mieliśmy czysty dowód istnienia, tu zaś konstrukcję szukanego obiektu.

W podobny sposób można udowodnić efektywnie ogólne twierdzenie z 208. Ograniczyliśmy się do najprostszego przypadku, żeby lepiej poznać istotę metody.

443. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych. Czytelnik widział jak ważną rolę w analizie odgrywają funkcje trygonometryczne. Tymczasem są one wprowadzane za pomocą czysto geometrycznych rozważań, całkowicie obcych analizie. Dlatego zasadnicze znaczenie ma zagadnienie określenia funkcji trygonometrycznych i badania ich ważniejszych własności środkami samej analizy. Szeregi nieskończone są właśnie tym narzędziem, za pomocą którego możemy to zrobić. Poświęcimy więc ten ustęp badaniu funkcji trygonometrycznych, korzystając z ich definicji analitycznej. Będzie to przykład zastosowania wyłożonej poprzednio teorii.

Rozpatrzmy więc dwie funkcje $C(x)$ i $S(x)$ określone formalnie w zbiorze wszystkich wartości rzeczywistych x przez szeregi wszędzie zbieżne

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

nie utożsamiając ich bynajmniej ze znanyju już wcześniej funkcjami $\cos x$ i $\sin x$. Mieliśmy już raz do czynienia z funkcjami w ten sposób określonymi [390, 7)]. Za pomocą mnożenia szeregów można dla nich wyprowadzić, jak tam zauważaliśmy, dwa podstawowe wzory

$$(14) \quad C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y),$$

$$(15) \quad S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y),$$

prawdziwe dla wszystkich wartości x i y .

Kontynuujemy badanie własności funkcji $C(x)$ i $S(x)$. Zastępując x przez $-x$ otrzymamy od razu, że $C(x)$ jest funkcją parzystą, a $S(x)$ – nieparzystą:

$$C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x),$$

Przyjmując $x = 0$ otrzymujemy

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0.$$

Jeśli przy dowolnym x podstawimy teraz w (14) $y = -x$, to uwzględniając wyprowadzone przed chwilą równości otrzymamy zależność algebraiczną wiążącą obie funkcje

$$(16) \quad C^2(x) + S^2(x) = 1.$$

Łatwo też otrzymać wzory dla podwojonego i połówkowego argumentu.

Z twierdzeń 2^a z ustępu 437 i 9^a z ustępu 438 wnosimy, że obie funkcje $C(x)$ i $S(x)$ są nie tylko ciągłe, ale mają też ciągłe pochodne wszystkich rzędów. W szczególności, stosując do tych szeregów określających nasze funkcje różniczkowanie wyraz za wyrazem [8^a, 438], przekonamy się łatwo, że

$$(17) \quad C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x).$$

Jak widzieliśmy, wszystkie te własności można łatwo wyprowadzić. Trochę więcej wysiłku wymagać będzie dowód okresowości rozpatrywanych funkcji, do czego teraz przejdziemy.

Stwierdzimy najpierw, że w przedziale $(0, 2)$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek funkcji $C(x)$. Rzeczywiście, wiemy, że $C(0) = 1$. Natomiast wartość $C(2)$ można zapisać w postaci

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) - \dots$$

(wydzielając trzy pierwsze wyrazy odpowiedniego szeregu a pozostałe łącząc parami). Ponieważ wyrażenia w każdym nawiasie są dodatnie

$$\frac{2^{2n}}{(2n)!} - \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(1 - \frac{2 \cdot 2}{(2n+1)(2n+2)} \right) > 0,$$

a suma pierwszych trzech wyrazów jest równa $-\frac{1}{3}$, więc $C(2) < \frac{1}{3}$, tzn. $C(2)$ jest ujemne. Ponieważ funkcja $C(x)$ jest ciągła, wynika stąd, że funkcja ta rzeczywiście ma pierwiastek w przedziale $(0, 2)$.

Z drugiej strony, w tym właśnie przedziale funkcja

$$S(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots,$$

zachowuje oczywiście znak dodatni, a pochodna $C'(x) = -S(x)$ ujemny, a więc funkcja $C(x)$ maleje od 0 do 2 i raz tylko przyjmuje wartość 0.

Oznaczmy teraz znaleziony pierwiastek funkcji $C(x)$ przez $\frac{1}{2}\pi$; liczbę π wprowadzamy tu, jak widać w sposób całkiem formalny i nie należy utożsamiać jej ze stosunkiem obwodu koła do średnicy.

Mamy więc:

$$C\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \quad S\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1.$$

Ostatnia równość wynika z (16) po uwzględnieniu tego, że funkcja $S(x)$ jest dodatnia dla $0 < x \leq 2$.

Przyjmując we wzorach (14) i (15) najpierw $x = y = \frac{1}{2}\pi$, a następnie $x = y = \pi$, otrzymujemy kolejno:

$$C(\pi) = -1, \quad S(\pi) = 0; \quad C(2\pi) = 1, \quad S(2\pi) = 0.$$

Jeżeli we wzorach tych, przy dowolnym x przyjmiemy $y = \pi$ lub $y = 2\pi$, to otrzymujemy

$$(18) \quad C(x+\pi) = -C(x), \quad S(x+\pi) = -S(x)$$

i wreszcie

$$C(x+2\pi) = C(x), \quad S(x+2\pi) = S(x).$$

Ostatnia zależność mówi, że funkcja $C(x)$ i $S(x)$ mają okres równy 2π .

Łatwo dają się wyprowadzić także inne „wzory redukcyjne”. Pozostawimy to czytelnikowi.

Teraz spróbujemy udowodnić, że rozpatrywane funkcje $C(x)$ i $S(x)$ są identyczne z funkcjami trygonometrycznymi $\cos x$ i $\sin x$, a także, że wprowadzona przez nas formalnie liczba π jest równa tej liczbie π , która odgrywa tak ważną rolę w geometrii.

Rozpatrzmy w tym celu krzywą, daną równaniami parametrycznymi

$$x = C(t), \quad y = S(t),$$

gdzie parametr t zmienia się od 0 do 2π . Z uwagi na (16), wszystkie jej punkty spełniają równanie $x^2 + y^2 = 1$, to znaczy leżą na okręgu o promieniu 1 i środku w początku współrzędnych (rys. 61). Wykażemy, że otrzymujemy w ten sposób każdy jej punkt i to tylko raz; wyjątkiem jest naturalnie punkt początkowy A odpowiadający wartościom $t = 0$ i $t = 2\pi$.

Widzieliśmy, że $S(t) > 0$ jeżeli tylko $0 < t < 2$, a więc na pewno także dla $0 < t \leq \frac{1}{2}\pi$. Zastępując w drugim wzorze (18) x przez $-t$ otrzymujemy

$$S(\pi - t) = S(t);$$

skąd łatwo widać, że $S(t) > 0$ także dla $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$. A więc funkcja $C(t)$, której pochodna jest równa $-S(t)$, maleje monotonicznie, gdy t zmienia się od 0 do π przyjmując wszystkie wartości od 1 do -1 dokładnie jeden raz. Stąd widać, że przedziałowi $\langle 0, \pi \rangle$ zmienności parametru odpowiada wzajemnie jednoznacznie górna część naszego okręgu. Analogiczny wniosek możemy otrzymać dla przedziału $\langle \pi, 2\pi \rangle$ wartości parametru i dolnej połówki okręgu z uwagi na to, że [patrz (18)]

$$C(t+\pi) = -C(t), \quad S(t+\pi) = -S(t).$$

Teraz korzystając ze wzoru (4) z ustępu 329 obliczymy długość łuku AM przyjmując, że punkt M odpowiada wartości t parametru. Biorąc pod uwagę (17) i (16) otrzymujemy

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2 + [S'(t)]^2} dt = t.$$

Stąd otrzymujemy, że t pokrywa się z kątem $\theta = \angle AOM$ wyrażonym w radianach, a więc

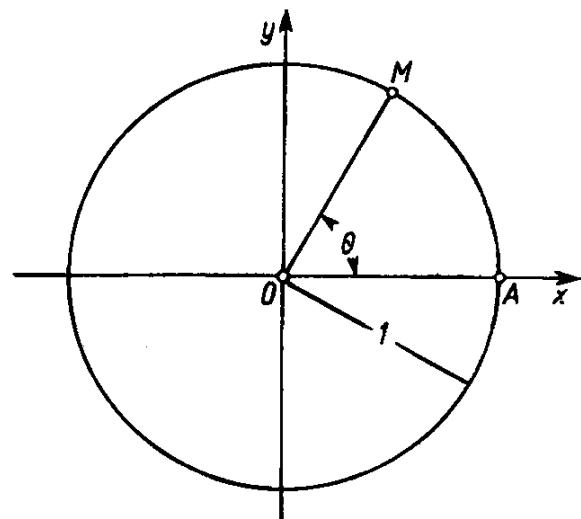
$$C(\theta) = x = \cos \theta, \quad S(\theta) = y = \sin \theta.$$

Jednocześnie długość całego okręgu jest równa według naszego wzoru 2π , a więc wprowadzoną przez nas liczbę można utożsamić z liczbą π rozpatrywaną w geometrii.

444. Przykład funkcji ciągłej bez pochodnej. Pierwszy tego rodzaju przykład był podany przez Weierstrassa. Jego funkcja jest określona przez szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdzie $0 < a < 1$, a b jest liczbą naturalną nieparzystą (przy czym $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$). Majorantą tego szeregu jest postęp zbieżny $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, a więc [430, 431, twierdzenie 1] szereg jest zbieżny jednostajnie i jego suma jest zatem

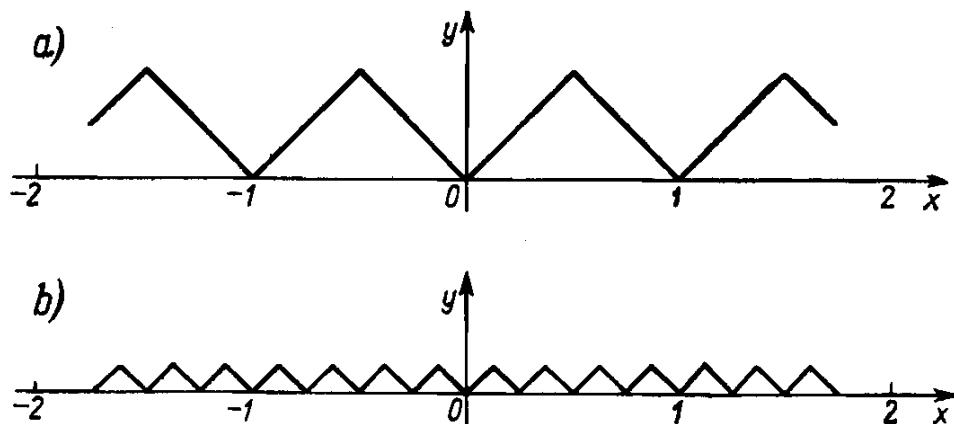


Rys. 61

wszędzie ciągłą funkcją zmiennej x . Za pomocą drobiazgowej analizy udało się Weierstrassowi wykazać, że tym niemniej nie ma ona skończonej pochodnej w żadnym punkcie.

Podamy tu prostszy przykład van der Waerdena, skonstruowany w zasadzie według tej samej idei, ale oscylujące krzywe $y = \cos \omega x$ zostały tu zastąpione oscylującymi łamanyimi.

Oznaczmy przez $u_0(x)$ wartość bezwzględną różnicy między liczbą x , a najbliższą do niej liczbą całkowitą. Funkcja ta jest liniowa w każdym przedziale postaci $\left\langle \frac{1}{2}s, \frac{1}{2}(s+1) \right\rangle$, gdzie s jest liczbą całkowitą. Jest to funkcja ciągła o okresie 1. Jej wykres jest łamaną, pokazaną na rysunku 62 a. Poszczególne ognia łamanej mają współczynnik kątowy ± 1 .



Rys. 62

Przyjmijmy następnie dla $k = 1, 2, 3, \dots$

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Funkcja ta jest liniowa w przedziałach $\left\langle \frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n} \right\rangle$. Jest ona ponadto ciągła i ma okres równy $\frac{1}{4^k}$. Jej wykresem jest też łamana, ale o drobniejszych ząbkach; na rysunku 62 b. podany jest na przykład wykres funkcji $u_1(x)$. We wszystkich przypadkach współczynniki kątowe poszczególnych ogniw łamanej są równe ± 1 .

Określmy teraz dla wszystkich wartości rzeczywistych x funkcję $f(x)$ za pomocą równości

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Ponieważ oczywiście $0 < u_k(x) < \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) i majorantą tego szeregu jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2 \cdot 4^n}$, przeto (tak samo jak w przypadku funkcji Weierstrassa) szereg jest zbieżny jednostajnie i funkcja $f(x)$ jest wszędzie ciągła.

Zatrzymajmy się na dowolnej wartości $x = x_0$. Obliczając ją z dokładnością do $1/2 \cdot 4^n$ (gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$), z niedoborem i z nadwyżką otrzymujemy nierówności

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} < x_0 < \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n},$$

gdzie s_n jest liczbą całkowitą. Oczywiście, że przedziały domknięte

$$\Delta_n = \left\langle \frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n} \right\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

są zawarte jeden w drugim. W każdym z nich znajdziemy taki punkt x_n , że odległość jego od punktu x_0 jest równa połowie długości przedziału:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Jasne jest, że $x_n \rightarrow x_0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Utwórzmy teraz stosunek przyrostów

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Dla $k > n$ liczba $1/4^{k+1}$ jest całkowitą wielokrotnością okresu $1/4^k$ funkcji $u_k(x)$, a więc $u_k(x_n) = u_k(x_0)$; odpowiednie wyrazy szeregu są równe 0 i mogą być odrzucone. Gdy natomiast $k < n$, to funkcja $u_k(x)$, liniowa w przedziale Δ_k , jest liniowa także w zawartym w nim przedziale Δ_n , przy czym

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Tak więc otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{f(n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1).$$

Inaczej mówiąc stosunek ten jest równy parzystej liczbie całkowitej dla nieparzystego n i nieparzystej liczbie całkowitej dla parzystego n . Widać stąd, że dla $n \rightarrow \infty$ stosunek przyrostów nie może dążyć do żadnej granicy skończonej, a więc funkcja nasza nie ma w $x = x_0$ pochodnej skończonej.

§ 4. Dodatkowe wiadomości o szeregach potęgowych

445. Działania na szeregach potęgowych. Ustęp ten poświęcimy przeglądowi znanych już w zasadzie działań na szeregach potęgowych. Posłuży to za punkt wyjścia do dalszych rozważań.

Rozpatrzmy dwa szeregi:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

Zakładając, że promienie zbieżności obydwu szeregów są różne od 0, oznaczmy przez r mniejszy z nich. Wtedy jak wiemy [364, 4°; 389], dla $|x| < r$ szeregi te można dodawać, odejmować i mnożyć wyraz za wyrazem; wyniki grupujemy przy tym według potęg x :

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) x^n.$$

Przypuśćmy, że szereg (2) jest identyczny z (1). Otrzymamy wtedy wniosek, że wewnątrz przedziału zbieżności szereg potęgowy można podnosić do kwadratu w następujący sposób:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0) x^n.$$

Jeżeli ten ostatni szereg znów pomnożymy według podanej poprzednio reguły przez szereg (1) i powtóżmy to dowolną ilość razy, to dojdziemy do wniosku, że szereg potęgowy można wewnątrz przedziału zbieżności podnosić do dowolnej naturalnej potęgi m , a wynik także będzie szeregiem potęgowym:

$$(4) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Współczynnik $a_n^{(m)}$ zależy od współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ szeregu wyjściowego i jak wynika z (3), otrzymujemy go z nich tylko za pomocą operacji dodawania i mnożenia. Uwaga ta wkrótce nam się przyda.

Teraz zatrzymamy się specjalnie na dodawaniu nieskończonego zbioru szeregów potęgowych, z którym dalej będziemy mieli do czynienia. Niech więc dany będzie ciąg nieskończony szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Utwórzmy z nich szereg iterowany

$$(5) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \right\}.$$

Jeżeli dlabranej wartości x jest zbieżny szereg wartości bezwzględnych wszystkich jego wyrazów, to szereg (5) jest także zbieżny, a jego suma $A(x)$ może być rozwinięta w szereg potęgowy przez łączenie wyrazów podobnych, tzn.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \text{gdzie} \quad A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dla dowodu wystarczy powołać się na twierdzenie 3 z ustępu 393.

Zastosowanie tego ważnego twierdzenia zilustrujemy na przykładach.

PRZYKŁADY. 1) Rozwinąć funkcje

$$(a) \quad f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \frac{a^m}{1+a^{2m}x^2}, \quad (b) \quad f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{a^m}{1+a^{2m}x^2} \quad (\text{przyjmując } |x| < 1$$

i $0 < a < 1$) w szeregi względem potęg x .

(a) Mamy

$$\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{m(2n+1)} x^{2n}$$

po podstawieniu i zmianie порядку sumowania

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{(2n+1)m} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{(2n+1)m}}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{a^{2n+1} x^{2n}}.$$

Ponieważ szereg iterowany

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m} x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{1}{1-a^{2m}x^2} < \frac{1}{1-x^2} e^a$$

jest zbieżny, więc uzasadnione jest przedstawienie sumowań.

(b) Analogicznie

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a^{2n+1}} x^{2n}.$$

2) Wychodząc z rozkładu funkcji $x \operatorname{ctg} x$ na ułamki proste [441, 9)] przedstawimy ją teraz w postaci szeregu potęgowego. Dla uproszczenia zastąpimy x przez πx :

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2}.$$

Jeżeli $|x| < 1$, to dla dowolnego $m = 1, 2, 3, \dots$ jest

$$\frac{x^2}{m^2 - x^2} = \frac{x^2/m^2}{1 - x^2/m^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{m^2} \right)^n.$$

Z uwagi na dodatniość wszystkich wyrazów otrzymujemy od razu zgodnie z twierdzeniem:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}, \quad \text{gdzie} \quad s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tak więc dla $|x| < 1$ mamy

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}.$$

3) Zupełnie analogicznie, wychodząc z rozkładu funkcji $x \operatorname{ctgh} x$ na ułamki proste [431, 10)], otrzymujemy rozwinięcie w szereg potęgowy

$$\pi x \operatorname{ctgh} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Później, w ustępie 449 podamy także inny sposób przedstawienia współczynników rozwinięć 1) i 2).

4) Twierdzenie zachowuje swoje znaczenie także i w tym przypadku, gdy dodawane w nieskończone ilości szeregi redukują się do zwykłych wielomianów skończonych. Wyprowadźmy dla przykładu szereg logarytmiczny wychodząc z szeregów dwumiejskiego i wykładniczego za pomocą następującego rozumowania.

Dla $|x| < 1$ i dowolnego α , mamy [407, (22)]

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Ustalając x , będziemy rozpatrywali wyrazy tego szeregu jako wielomiany całkowite względem α . Ponieważ szereg

$$1 + |\alpha| \cdot |x| + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \dots$$

jest zbieżny, o czym łatwo możemy się przekonać stosując kryterium d'Alemberta, więc w poprzednim szeregu możemy zgodnie z twierdzeniem połączyć wyrazy podobne

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \dots$$

Z drugiej strony, oczywiście

$$(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(1+x)} = 1 + \alpha \ln(1+x) + \dots$$

Ponieważ oba rozwinięcia muszą być identyczne, więc porównując współczynniki przy α otrzymujemy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Zauważmy teraz, że udowodnione twierdzenie możemy stosować także do szeregów wielokrotnych na przykład do szeregu

$$\sum_{k=0, m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nkm} x^n \right\}.$$

Rzeczywiście, wystarczy tylko zastąpić szereg podwójny przez zwykły, żeby sprowadzić zadanie do przypadku już rozpatrzzonego.

446. Superpozycja szeregów. Rozpatrzmy funkcję $y = f(x)$, którą można rozwiniąć w szereg potęgowy (1) w przedziale $(-R, R)$. Niech oprócz tego, dana będzie funkcja $\varphi(y)$ także rozwijalna w szereg potęgowy

$$(6) \quad \varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \dots + h_m y^m + \dots$$

dla wartości z przedziału $(-\rho, \rho)$.

Jeżeli $|a_0| = |f(0)| < \rho$, to dla dostatecznie małego x mamy $|f(x)| < \rho$, a więc ma sens funkcja złożona $\varphi(f(x))$.

Jeżeli tylko $|a_0| < \rho$, to funkcję $\varphi(f(x))$ można w otoczeniu punktu $x = 0$ rozwiniąć w szereg względem potęgi x w ten sposób, że podstawiamy do (6) za y szereg (1), dokonujemy wszystkich operacji podnoszenia do potęgi zgodnie z (4), a następnie łączymy wyrazy podobne.

Dowód. Przyjmując, że $|x| < R$ rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \dots + |a_n| \cdot |x|^n + \dots$$

wobec ciągłości jego sumy [437, 2°] i z uwagi na to, że $|a_0| < \rho$, dla dostatecznie małych x spełniona jest nierówność

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \rho,$$

a zatem szereg

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m$$

jest zbieżny.

Przyjmując, analogicznie jak w (4),

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n| \cdot |x^n| \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n,$$

możemy poprzedni szereg przepisać w postaci

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n \right).$$

Ponieważ $\alpha_n^{(m)}$ powstaje z $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|$ za pomocą operacji dodawania i mnożenia [445] tak samo jak $a_n^{(m)}$ z a_0, a_1, \dots, a_n , więc oczywiście $|\alpha_n^{(m)}| \leq a_n^{(m)}$. Dlatego też szereg

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)}| \cdot |x|^n \right)$$

także jest zbieżny dla wspomnianych poprzednio wartości x . A więc do szeregu

$$h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(m)} \cdot x^n) \right)$$

można zastosować ostatnie twierdzenie poprzedniego ustępu, co kończy dowód.

Obszar zmienności x , w którym stwierdziliśmy naszym rozumowaniem możliwość rozwinięcia funkcji $\varphi(f(x))$ w szereg według potęg x , jest więc wyznaczony przez oczywistą nierówność $|x| < R$ i dodatkowo przez nierówność (7). Dla $R = +\infty$ nie ma potrzeby wprowadzania pierwszego ograniczenia, a dla $\rho = +\infty$ drugiego.

Dla większości zastosowań twierdzenia wystarczy wiedzieć, że rozwinięcie zachodzi dla małych wartości $|x|$. Gdy interesuje nas cały obszar stosowności otrzymanego szeregu, to zagadnienie to wymaga dodatkowych badań.

Przeprowadzimy je w najprostszym przypadku. Rozpatrzmy funkcję

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

w przedziale $(-1, 1)$ ($\rho = 1$) i podstawimy za y funkcję $f(x) = 2x - x^2$ ($R = +\infty$). Funkcja złożona

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{1 - (2x - x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ma tylko wtedy sens, gdy

$$-1 < 2x - x^2 < 1, \quad \text{tzn.} \quad 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}, \quad \text{lecz} \quad x \neq 1.$$

Jej rozwinięcie według potęg x jest nam znane ⁽¹⁾:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots;$$

⁽¹⁾ Patrz 390, 1). Można je także otrzymać, różniczkując wyraz za wyrazem [438, 8°] postęp

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

szereg ten jest zbieżny dla $-1 < x < 1$. Równość

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2x - x^2)^m = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

zachodzi, gdy

$$1 - \sqrt{2} < x < 1.$$

Ciekawe jest porównanie tego z wynikiem naszych rozważań. Zgodnie z nimi trzeba by zażądać, żeby zachodziła [patrz (7)] nierówność

$$2|x| + |x|^2 < 1, \quad \text{czyli} \quad 1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1.$$

Jak widzieliśmy, otrzymaną równość można w rzeczywistości stosować nawet w znacznie szerszym obszarze.

Tutaj też należy zaznaczyć, że twierdzenie ma dalsze uogólnienia. Niech na przykład dany będzie szereg podwójny

$$\varphi(y, z) = \sum_{k,m=0}^{\infty} h_{km} y^k z^m,$$

zbieżny dla $|y| < \rho$ i $|z| < \rho$ i dwa szeregi

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad z = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

które są zbieżne dla $|x| < R$. Wtedy przy założeniu, że $|a_0| < \rho$ i $|b_0| < \rho$, funkcję złożoną $\varphi(f(x), g(x))$ można rozwiniąć w otoczeniu $x = 0$ w szereg według potęg x . W tym celu zamiast y i z należy podstawić odpowiednie szeregi i po wykonaniu działań podnoszenia do potęgi i mnożenia dokonać redukcji wyrazów podobnych.

447. Przykłady

1) Znaleźć kilka pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji $\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}$ w szereg według potęg x .

Dla $|x| < 1$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot (1+x)^{1/x} &= \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots} = 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots \right)^2 + \frac{1}{6} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right)^3 + \frac{1}{24} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \right)^4 + \\ &+ \frac{1}{120} \left(-\frac{x}{2} + \dots \right)^5 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \frac{959}{2304}x^5 + \dots \end{aligned}$$

(Zadania tego typu są zbliżone do rozpatrywanych już w ustępie 125).

2) Postawmy sobie za zadanie otrzymanie szeregu dwumennego z szeregiów logarytmicznego i wykładnicznego.

Dla $|x| < 1$ i dowolnego α będzie oczywiście

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= e^{\alpha \ln(1+x)} = e^{\alpha \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)} = 1 + \alpha \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \\ &+ \frac{\alpha^2}{2!} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2 + \dots = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \end{aligned}$$

Postać kilku pierwszych współczynników otrzymujemy od razu. Ogólną postać współczynnika przy x^n można otrzymać za pomocą następujących rozważań. Bezpośrednio widać, że jest to wielomian $Q_n(\alpha)$ stopnia n , względem α , o współczynnikach całkowitych. Ponieważ dla $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$ w rozwinięciu nie wystąpi wyraz z x^n , więc w tych punktach wielomian jest równy 0, a zatem ma postać

$$Q_n(\alpha) = c\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Dla $\alpha = n$ współczynnik przy x^n jest równy 1, $Q_n(n) = 1$, skąd $c = 1/n!$ i ostatecznie

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}.$$

3) Niech $f(x)$ będzie pewną funkcją, której rozwinięcie w szereg według potęg x nie zawiera wyrazu wolnego:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

wtedy, jak wynika z ogólnego twierdzenia, funkcję $g(x) = e^{f(x)}$ także można rozwiniąć w szereg dla tych samych x i wyraz wolny jest oczywiście równy 1. Należy znaleźć to właśnie rozwinięcie.

Pokażemy, jak zastosować w tym celu metodę współczynników nieoznaczonych. Niech

$$g(x) = e^{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_n x^n + \dots$$

Różniczkując tę równość, otrzymujemy

$$e^{f(x)} f'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots + nb_n x^{n-1} + \dots$$

lub, podstawiając zamiast czynników po lewej stronie ich rozwinięcia,

$$(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots$$

Warunek ten prowadzi do takiego układu równań:

$$(8) \quad \begin{aligned} a_1 &= b_1, & 2a_2 + a_1 b_1 &= 2b_2, & 3a_3 + 2a_2 b_1 + a_1 b_2 &= 3b_3, \\ &\dots, & na_n + (n-1)a_{n-1}b_1 + \dots + 2a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1} &= nb_{n-1}, & \dots, \end{aligned}$$

z którego wyznaczamy po kolejni niewiadome współczynniki b .

Dla przykładu zastosujemy tę metodę do rozwiązywania następującego zadania (Weierstrass):

Udowodnić, że rozwinięcie funkcji

$$g(x) = (1-x)e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{m-1}}{m-1}}$$

w szereg zaczyna się od wyrazów $1 - x^m/m + \dots$ i że wszystkie jego współczynniki są co do bezwzględnej wartości mniejsze od jedności.

Przedstawmy $g(x)$ w postaci

$$g(x) = e^{\ln(1-x) + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{m-1}}{m-1}} = e^{-\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \dots};$$

wtedy pierwsza część twierdzenia jest oczywista. Drugą część udowodnimy metodą indukcji. Przypuśćmy, że wszystkie współczynniki b_k ze wskaźnikami mniejszymi niż n są co do bezwzględnej wartości mniejsze od jedności. Ponieważ w danym przypadku

$$a_k = 0 \quad \text{dla } k < m \quad \text{i} \quad a_k = -\frac{1}{k} \quad (ka_k = -1) \quad \text{dla } k > m,$$

więc w n -tej równości (8) otrzymamy, że także $|b_n| < 1$.

Proponujemy zastosować podaną tu metodę do przykładów 1) i 2).

4) Te same równania (8) mogą się przydać także do innego zagadnienia. Niech będzie dane rozwinięcie funkcji

$$g(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

a szukamy rozwinięcia funkcji

$$f(x) = \ln g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Łatwo zrozumieć, że współczynniki a i b są związane tymi samymi zależnościami (8). Tym razem trzeba wyznaczyć współczynniki a .

5) Udowodnić, że iloczyn nieskończony

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1+q^m x) = (1+qx)(1+q^2 x)(1+q^3 x)\dots \quad (|q| < 1)$$

można dla dostatecznie małych x rozwinać w szereg według potęg x . Wyznaczyć współczynniki tego rozwinięcia.

Dla $|x| < 1$ iloczyn jest zbieżny i ma wartość dodatnią: logarytmując go otrzymujemy

$$\ln F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln(1+q^m x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q^m x - \frac{1}{2} q^{2m} x^2 + \dots \right).$$

W szczególności szereg ten będzie zbieżny, gdy wszystkie jego wyrazy w nawiasach zastąpimy ich wartościami bezwzględnymi. Stąd [445] wynika, że w otoczeniu zera $\ln F(x)$, a wraz z nim [tym razem na mocy twierdzenia z 446] także wyrażenie

$$F(x) = e^{\ln F(x)},$$

można rozwinać w szereg według potęg x .

Dla dostatecznie małych x mamy więc

$$F(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

gdzie należy jeszcze wyznaczyć współczynniki $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$. Najprościej można to zrobić biorąc za punkt wyjścia oczywistą równość:

$$F(x) = (1+qx) F(qx),$$

która, korzystając z rozwinięcia, można przedstawić w postaci

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots = (1+qx)(1+b_1 qx + b_2 q^2 x^2 + \dots + b_n q^n x^n + \dots).$$

Stąd na mocy twierdzenia o równości szeregów potęgowych otrzymujemy

$$b_1 q + q = b_1, \quad b_2 q^2 + b_1 q^2 = b_2, \quad \dots, \quad b_n q^n + b_{n-1} q^n = b_n, \quad \dots,$$

czyli

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{b_1 q^2}{1-q^2}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{b_{n-1} q^n}{1-q^n}, \quad \dots$$

i ostatecznie

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}, \quad \dots$$

6) Weźmy rozkład funkcji $\frac{\sin x}{x}$ na iloczyn nieskończony [408] i jej rozwinięcie w szereg potęgowy [404, (12)] i porównajmy ich logarytmy [401, 4*]:

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots \right),$$

czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2 \pi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{n^4 \pi^4} + \dots \right) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \dots \right)^2 + \dots$$

Rozwińmy teraz lewą i prawą stronę według potęg x [445, 446]. Porównując współczynniki otrzymujemy

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2\pi^4} \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{1}{180}, \quad \dots$$

skąd

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (1)}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \dots$$

Te same wzory otrzymamy zresztą później [449] z innych rozważań.

7) Jeżeli funkcję $f(x)$ można w przedziale $(-R, R)$ rozwiniąć w szereg potęgowy (1) i x^* jest dowolnym punktem tego przedziału, to w jego otoczeniu funkcję można rozwiniąć w szereg według potęg $x - x^*$.

Rzeczywiście, podstawmy w (1) $x = x^* + y$. Na mocy ogólnego twierdzenia (zamieniając x i y rolami), gdy tylko będzie $|x^*| + |y| < R$, czyli $|y| < R - |x^*|$, można już przejść do rozwinięcia według potęg y , to znaczy według potęg $x - x^*$:

$$\sum_{k=0}^\infty A_k y^k = \sum_{k=0}^\infty A_k (x - x^*)^k.$$

Wykonując wszystkie potęgowania w szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n (x^* + y)^n$ i redukując wyrazy podobne, łatwo można otrzymać także współczynniki tego rozwinięcia

$$A_0 = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{*n} = f(x^*)$$

i ogólnie

$$A_k = \sum_{n=k}^\infty \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} a_n x^{*n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{*n-k} = \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}.$$

Wynik ten z uwagi na 438, 9° nie jest niczym zaskakującym.

Jedynie dla uproszczenia zakładaliśmy, że szereg wyjściowy jest rozwinięty według potęg x , nic by się nie zmieniło, gdyby funkcja $f(x)$ była rozwinięta według potęg różnicy $x - x_0$.

Przypominamy, że funkcję $f(x)$, którą można w otoczeniu punktu $x = x_0$ rozwiniąć według potęg $x - x_0$ ⁽²⁾ nazywamy *analityczną w tym punkcie*. Udowodniliśmy więc, że *funkcja analityczna w jakimś punkcie jest także analityczna w każdym punkcie pewnego jego otoczenia*.

Twierdzenie to obejmuje także przypadek funkcji wielu zmiennych.

8) Jako ostatni przykład rozpatrzymy rozwinięcie funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = [1 + (\alpha^2 - 2x\alpha)]^{-1/2}$$

widug potęg α , dla dowolnego ustalonego x . Możliwość takiego rozwinięcia jest zapewniona przez nasze twierdzenie, jeżeli tylko $|\alpha|^2 + 2|x| \cdot |\alpha| < 1$. Łatwo można zauważyć, że współczynnikiem przy α^n ($n > 1$) będzie pewien wielomian $P_n = P_n(x)$ stopnia n , więc

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = 1 + P_1 \alpha + P_2 \alpha^2 + \dots + P_n \alpha^n + \dots$$

(1) Wynik ten już znamy [patrz 440, 4].

(2) Szereg ten oczywiście będzie szeregiem Taylora [438, 9].

Aby wyznaczyć te współczynniki, zróżniczujemy równość (9) względem x :

$$\frac{x-\alpha}{(\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2})^3} = P_1 + 2P_2 \alpha + \dots + nP_n \alpha^{n-1} + \dots$$

Porównując ten wynik z (9) łatwo otrzymujemy

$$(1-2x\alpha+\alpha^2)(P_1 + 2P_2 \alpha + \dots + nP_n \alpha^{n-1} + \dots) = (x-\alpha)(1+P_1 \alpha+P_2 \alpha^2+\dots+P_n \alpha^n+\dots).$$

Porównujemy teraz współczynniki przy jednakowych potęgach po obu stronach. Otrzymamy przed wszystkim

$$P_1 = x \quad \text{i} \quad 2P_2 - 2xP_1 = -1 + xP_1, \quad \text{skąd} \quad P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Potem ogólnie

$$(n+1)P_{n+1} - 2nxP_n + (n-1)P_{n-1} = xP_n - P_{n-1}$$

lub

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Znając dwa pierwsze wielomiany, możemy z tego wzoru redukcyjnego obliczyć kolejno wszystkie pozostałe.

Na pierwszy rzut oka widać, że wielomiany P_1 i P_2 są dwoma wielomianami Legendre'a, a wspomniany przed chwilą wzór jest identyczny z analogicznym wzorem (11) ustępu 320, z którego otrzymaliśmy wielomiany Legendre'a. Wnioskujemy stąd, że *współczynnikami rozwinięcia (9) są właśnie wielomiany Legendre'a*.

W związku z tym funkcję

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

dwóch zmiennych α i x nazywamy *funkcją generującą wielomianów Legendre'a*. Rozwinięcie (9) można z powodzeniem wykorzystać do badania tych wielomianów.

448. Dzielenie szeregów potęgowych. Bardzo ważnym przykładem zastosowania twierdzenia o podstawianiu szeregu do szeregu jest zagadnienie dzielenia szeregów potęgowych.

Niech wyraz wolny a_0 szeregu (1) będzie różny od 0. Przedstawmy ten szereg w postaci

$$a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + \dots \right) = a_0(1+y),$$

przyjmując, że

$$y = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + \dots$$

Stąd

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1+y} = \frac{1}{a_0} (1-y+y^2-\dots+(-1)^m y^m+\dots).$$

Ten ostatni szereg odgrywa rolę szeregu (6), przy czym $\rho = 1$. Zgodnie z ogólnym twierdzeniem wyrażenie to można rozwinać według potęg x :

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots} = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots$$

przynajmniej dla dostatecznie małych wartości x , na przykład dla x spełniających nie-

równość

$$\left| \frac{a_1}{a_0} \right| \cdot |x| + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| \cdot |x|^2 + \dots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \cdot |x|^n + \dots < 1.$$

Rozpatrzmy drugi szereg potęgowy

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

o promieniu zbieżności różnym od 0. Wtedy iloraz

$$\frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots}$$

można dla dostatecznie małych x zastąpić przez iloczyn

$$(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots)(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots),$$

a więc można go przedstawić w postaci pewnego szeregu potęgowego

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + \dots$$

Współczynniki tego szeregu najłatwiej wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych biorąc za punkt wyjścia zależność

$$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots)(d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n + \dots) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots,$$

w której współczynniki a i b uważamy za znane. Pomnożymy szeregi po lewej stronie przez siebie według ogólnej reguły [445], a następnie porównamy współczynniki przy jednakowych potęgach x po lewej i po prawej stronie. Otrzymamy tą drogą nieskończony układ równań:

$$(10) \quad a_0 d_0 = b_0, \quad a_0 d_1 + a_1 d_0 = b_1, \quad a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 = b_2, \quad \dots \\ \dots \quad a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \dots + a_{n-1} d_1 + a_n d_0 = b_n.$$

Ponieważ założyliśmy, że współczynnik a_0 jest różny od 0, więc z pierwszego równania otrzymamy od razu $d_0 = \frac{b_0}{a_0}$, a potem z drugiego $d_1 = \frac{b_1 - a_1 d_0}{a_0} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0}$ itd.

Ogólnie, gdy już znaleźliśmy n współczynników d_0, d_1, \dots, d_{n-1} to z $(n+1)$ -szego równania zawierającą jedną niewiadomą d_n można obliczyć jej wartość. W ten sposób otrzymujemy kolejno z równań (10) wszystkie współczynniki ilorazu i przy tym w sposób jednoznaczny.

PRZYKŁADY

1) Obliczyć kilka pierwszych wyrazów ilorazu

$$\frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots}$$

Równania (10) mają w tym przypadku postać:

$$d_0 = 1, \quad d_1 + \frac{1}{2} d_0 = 0, \quad d_2 + \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{3} d_0 = 0, \quad d_3 + \frac{1}{2} d_2 + \frac{1}{3} d_1 + \frac{1}{4} d_0 = 0,$$

itd., skąd $d_0 = 1, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{12}, d_3 = -\frac{1}{24}, \dots$

A więc

$$\frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \dots$$

2) Znaleźć rozwinięcie $\operatorname{tg} x$ w otoczeniu zera, rozpatrując $\operatorname{tg} x$ jako iloraz $\sin x$ i $\cos x$, których rozwinięcia są znane [404, (12) i (13)].

Istnienie takiego rozwinięcia jest już z góry zagwarantowane przez ogólne twierdzenie. Ponieważ $\operatorname{tg} x$ jest funkcją nieparzystą więc jego rozwinięcie zawiera tylko nieparzyste potęgi x . Współczynnik przy x^{2n-1} szukanego rozwinięcia wygodnie jest zapisać w postaci $\frac{T_n}{(2n-1)!}$. Mamy więc

$$(11) \quad \operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Oczywiście $T_1 = 1$. Dla obliczenia pozostałych liczb T_n otrzymamy, porównując współczynniki przy x^{2n-1} po lewej i prawej stronie, ciąg równań postaci:

$$\frac{T_n}{(2n-1)!} - \frac{T_{n-1}}{(2n-3)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{n-2}}{(2n-5)!} \cdot \frac{1}{4!} - \dots = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

lub po pomnożeniu przez $(2n-1)!$:

$$T_n - \binom{2n-1}{2} T_{n-1} + \binom{2n-1}{4} T_{n-2} - \dots = (-1)^{n-1}.$$

Ponieważ wszystkie liczby $\binom{2n-1}{k}$ są całkowite, więc przekonujemy się kolejno, że współczynniki T_n są także liczbami całkowitymi. Oto wartości kilku pierwszych spośród nich:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad T_3 = 16, \quad T_4 = 272, \quad T_5 = 7936, \quad \dots$$

Tak więc

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

W następnym ustępie podamy inny sposób obliczenia współczynników tego rozwinięcia i dokładnie ustalimy obszar jego stosowności.

449. Liczby Bernoulli'ego i rozwinięcia, w których występują. Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład dziedzenia, który będzie miał ważne zastosowania:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots}.$$

Zgodnie z ogólną tezą ustępu 448 iloraz ten, przynajmniej dla dostatecznie małych wartości x , można przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$(12) \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Jego współczynniki przedstawiliśmy w postaci $\frac{\beta_n}{n!}$, co (jak zobaczymy) ułatwi ich kolejne wyznaczanie.

Wychodząc z zależności

$$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots\right) \left(1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{\beta_n}{n!}x^n + \dots\right) = 1,$$

przyrównujemy do zera współczynniki przy różnych potęgach x^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) po lewej stronie. Otrzymamy równania postaci

$$\frac{1}{n!1!}\beta_n + \frac{1}{(n-1)!2!}\beta_{n-1} + \dots + \frac{1}{(n-k+1)!k!}\beta_{n-k+1} + \dots + \frac{1}{1!n!}\beta_1 + \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

lub po pomnożeniu przez $(n+1)!$:

$${n+1 \choose 1}\beta_n + {n+1 \choose 2}\beta_{n-1} + \dots + {n+1 \choose k}\beta_{n+1-k} + \dots + {n+1 \choose n}\beta_1 + 1 = 0.$$

Korzystając z podobieństwa do dwumianu Newtona, można te równania napisać symbolicznie w ten sposób:

$$(\beta+1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Po podniesieniu dwumianu do potęgi według znanej reguły i redukcji pierwszego wyrazu, należy zastąpić tu potęgi β^n przez współczynniki β_k . A więc na obliczenie liczb β_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) otrzymamy nieskończony układ równań:

$2\beta_1 + 1 = 0, \quad 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 = 0, \quad 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 = 0, \quad 5\beta_4 + 10\beta_3 + 10\beta_2 + 5\beta_1 + 1 = 0, \quad \dots,$
z których kolejno otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{2}, & \beta_5 &= 0, & \beta_9 &= 0, & \beta_{13} &= 0, & \beta_{17} &= 0, \\ \beta_2 &= \frac{1}{6}, & \beta_6 &= \frac{1}{42}, & \beta_{10} &= \frac{5}{66}, & \beta_{14} &= \frac{7}{6}, & \beta_{18} &= \frac{43867}{798}, \\ \beta_3 &= 0, & \beta_7 &= 0, & \beta_{11} &= 0, & \beta_{15} &= 0, & \beta_{19} &= 0, \\ \beta_4 &= -\frac{1}{30}, & \beta_8 &= -\frac{1}{30}, & \beta_{12} &= -\frac{691}{2730}, & \beta_{16} &= -\frac{3617}{510}, & \beta_{20} &= -\frac{174611}{330}, \\ &\dots &&&&&&& \end{aligned}$$

Ponieważ liczby β otrzymujemy z równań liniowych o współczynnikach całkowitych, to wszystkie one są liczbami wymiernymi. Łatwo można ustalić ogólnie, że liczby β ze wskaźnikiem nieparzystym (oprócz pierwszego) są zerami. Rzeczywiście, przenosząc w równości (12) wyraz $-x/2$ na lewą stronę otrzymujemy oczywiście po lewej stronie funkcję parzystą

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \operatorname{ctgh} \frac{x}{2}.$$

A więc jej rozwinięcie

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$

nie może zawierać potęg nieparzystych x , c. b. d. o.

Dla liczb β o wskaźnikach parzystych podamy częściej używane oznaczenie przyjmując

$$\beta_{2n} = (-1)^{n-1} B_n \text{ (1)},$$

więc

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6}, & B_3 &= \frac{1}{42}, & B_5 &= \frac{5}{66}, & B_7 &= \frac{7}{6}, & B_9 &= \frac{43867}{798}, \\ B_2 &= \frac{1}{30}, & B_4 &= \frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{691}{2730}, & B_8 &= \frac{3617}{510}, & B_{10} &= \frac{174611}{330}, \quad \dots \end{aligned}$$

(1) Wkrótce przekonamy się, że wszystkie B_n są dodatnie.

Te właśnie liczby B_n nazywamy *liczbami Bernoulliego*. Pochodzi to od Jakuba Bernoulliego, który pierwszy otrzymał je przy badaniu sum potęg o wykładnikach naturalnych kolejnych liczb naturalnych. Liczby Bernoulliego odgrywają ważną rolę w wielu zagadnieniach analizy.

Zastępując dla ułatwienia x przez $2x$ otrzymujemy rozwinięcie

$$(13) \quad x \operatorname{ctgh} x =$$

$$= 1 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n},$$

prawdziwe dla dostatecznie małych wartości x .

W 445, 3) mieliśmy już rozwinięcie

$$\pi x \operatorname{ctgh} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} \cdot x^{2n},$$

w którym przez s_{2n} oznaczona była suma szeregu $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$. Zastępując w równości (13) x przez πx zapiszemy ją tak:

$$\pi x \operatorname{ctgh} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Obydwa rozwinięcia są oczywiście tożsamościowo równe, skąd

$$B_n = \frac{2 (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n},$$

a więc wszystkie liczby B_n są dodatnie. Ponieważ dla $n \rightarrow \infty$ oczywiście $s_{2n} \rightarrow 1$, więc z otrzymanego wzoru wynika, że liczby Bernoulliego rosną⁽¹⁾ do nieskończoności wraz ze wzrostem wskaźników.

Po drodze zwróciły uwagę na pożyteczne wzory na sumy s_{2n} :

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2 (2n)!} \cdot B_n;$$

w szczególności [porównaj 447, 6)]

$$s_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad s_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Przypominamy sobie teraz, że mieliśmy [445, 2)] już rozwinięcie

$$(14) \quad \pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n},$$

którego współczynniki też były zależne od sum s_{2n} . Zastępując tu πx przez x i podstawiając otrzymane za pomocą liczb Bernoulliego wyrażenia na s_{2n} , otrzymujemy

$$(15) \quad x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Ponieważ wiemy, że rozwinięcie (14) zachodzi dla $|x| < 1$, więc rozwinięcie (15) słuszne jest dla $|x| < \pi$. Jednakże, gdy $x \rightarrow \pm\pi$, lewa strona równości (15) rośnie do nieskończoności, a więc szereg po prawej

⁽¹⁾ Chociaż jak widzieliśmy niemonotonicznie, a według dość kapryśnego prawa.

stronie nie może być zbieżny dla $x = \pm\pi$ i tym bardziej dla $|x| > \pi$. Promień zbieżności szeregu jest dokładnie równy π ⁽¹⁾.

Stąd między innymi jest oczywiste, że taki sam promień zbieżności będzie miał szereg (13), podczas gdy szereg wyjściowy (12) ma promień zbieżności 2π .

Korzystając z tożsamości

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$$

i stosując (15), łatwo można na nowo otrzymać rozwinięcie

$$(16) \quad \operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n \cdot x^{2n-1}.$$

Jest ono równoważne z otrzymanym wcześniej wzorem [patrz (11)], lecz najczęściej używana jest ta jego postać, ponieważ liczby Bernoulliego są dobrze zbadane i istnieją obszerne tablice tych liczb. Promień zbieżności szeregu przedstawiającego $\operatorname{tg} x$ jest równy $\pi/2$, co widać już teraz z samego sposobu otrzymywania tego szeregu.

Z liczbami Bernoulliego związane są także inne pożyteczne rozwinięcia. Na przykład, ponieważ

$$\left(\ln \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (x \operatorname{ctg} x - 1) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1},$$

więc całkując wyraz za wyrazem otrzymujemy (dla $|x| < \pi$)

$$\ln \frac{\sin x}{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Analogicznie, z rozwinięcia (16) po scałkowaniu otrzymujemy (dla $|x| < \pi/2$)

$$\ln \cos x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Z tych rozwinięć łatwo otrzymamy rozwinięcie $\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Z szeregów tych korzysta się przy sporządzaniu tablic logarytmów funkcji trygonometrycznych.

Powróćmy na zakończenie do szeregu rozbieżnego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k,$$

który rozpatrywaliśmy w zadaniu 6) ustępu 425. Tam ustaliliśmy sumowalność tego szeregu metodą Cesary rzędu k , lecz samej sumy uogólnionej (oznaczamy ją przez $A^{(k)}$) nie otrzymaliśmy; zrobimy to teraz. Zresztą obliczymy tę sumę metodą Poissona-Abela, co jak wiemy [424, 2)], powinno dać ten sam wynik.

Dla $t > 0$ mamy $0 < e^{-t} < 1$ i obliczając sumę szeregu otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2t}-1} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{e^t-1} - \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{e^{2t}-1}.$$

(1) Nawiast mówiąc wszystkie zagadnienia dotyczące wyznaczenia promienia zbieżności szeregu potęgowego łatwo dają się rozwiązać, gdy skorzystamy z twierdzenia Cauchyego-Hadamarda [380]. Na przykład w przypadku szeregu (15) mamy;

$$\rho_{2n-1} = 0, \quad \rho_{2n} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}}} \cdot s_{2n} = \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{2s_{2n}},$$

$$\rho = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = \frac{1}{\pi}, \quad R = \frac{1}{\rho} = \pi.$$

Korzystając z rozwinięcia (12) dla dostatecznie małych t mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!} t^{n-1}.$$

Zróżniczkujmy oba szeregi wyraz za wyrazem k razy. W przypadku szeregu potęgowego po prawej stronie, korzystamy z twierdzenia 8° z ustępu 438, przy różniczkowaniu szeregu po lewej stronie możemy posłużyć się tym samym twierdzeniem, gdyż szereg ten będzie również szeregiem potęgowym, jeżeli wprowadzimy zmienną $x = e^{-t}$. W wyniku otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k e^{-(n+1)t} = (-1)^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!} (n-1)(n-2)\dots(n-k) t^{n-k-1}.$$

Niech t dąży teraz do 0, a więc x do 1. Po lewej stronie otrzymamy jako granicę właściwie szukane $A^{(k)}$, a po prawej wyraz wolny

$$(-1)^{k+1} \frac{(2^{2(k+1)}-1)\beta_{k+1}}{k+1}.$$

Biorąc pod uwagę, że liczby β ze wskaźnikami nieparzystymi większymi od jedności są wszystkie równe zeru, a liczby β ze wskaźnikami parzystymi sprowadzają się do liczb Bernoulliego, otrzymujemy ostatecznie wzory

$$A^{(2m)} = 0, \quad A^{(2m-1)} = (-1)^{m-1} \frac{2^{4m}-1}{2m} B_m \quad (m > 1).$$

450. Rozwiązywanie równań za pomocą szeregów. Powróćmy jeszcze raz do wyznaczenia zmiennej y jako funkcji x z równania

$$(17) \quad F(x, y) = 0$$

[porównaj 206 i 442] lecz w innym sformułowaniu:

Załóżmy, że funkcję $F(x, y)$ można w otoczeniu punktu (x_0, y_0) rozwinąć w szereg według potęg $x-x_0$ i $y-y_0$ i że wyraz wolny tego szeregu jest równy 0, a współczynnik przy $y-y_0$ różny od 0⁽¹⁾. Funkcję $y = y(x)$ określona równaniem (17) można wtedy w otoczeniu tego samego punktu także rozwinąć w szereg według potęg $x-x_0$.

Inaczej mówiąc, jeżeli funkcja F , występująca po lewej stronie równania (17), jest analityczna w punkcie (x_0, y_0) , to również funkcja $y = y(x)$, określona przez to równanie, będzie analityczna w punkcie x_0 .

Tak więc mówimy tu już nie tylko o istnieniu lub obliczeniu wartości szukanej funkcji, lecz także o jej analitycznym przedstawieniu.

Dowód. Nie zmniejszając ogólności rozumowania można przyjąć $x_0 = y_0 = 0$, co w zasadzie sprowadza się do tego, że jako nowe zmienne obieramy $x-x_0$ i $y-y_0$, lecz zachowujemy stare oznaczenia. Jeżeli po wyłączeniu wyrazu z y w pierwszej potędze przeniesiemy go na drugą stronę i podzielimy całe równanie przez jego współczynnik, to dane równanie można będzie napisać tak:

$$(18) \quad y = c_{10} x + c_{20} x^2 + c_{11} xy + c_{02} y^2 + c_{30} x^3 + c_{21} x^2 y + c_{12} xy^2 + c_{03} y^3 + \dots$$

(1) Odpowiada to dokładnie zwykłym założeniom

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Szeregu określającego y jako funkcję x będziemy szukali w postaci

$$(19) \quad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Przede wszystkim, jeżeli istnieje takie rozwinięcie w otoczeniu zera, to jego współczynniki dadzą się jednoznacznie wyznaczyć z zależności (18).

Rzeczywiście, zastępując w niej y (przy danym założeniu) przez rozwinięcie (19) otrzymujemy

$$(18a) \quad a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = c_{10} x + c_{20} x^2 + \\ + c_{11} x (a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + c_{02} (a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^2 + c_{30} x^3 + \\ + c_{21} x^2 (a_1 x + \dots) + c_{12} x (a_1 x + \dots)^2 + c_{03} (a_1 x + \dots)^3 + \dots$$

Z twierdzenia ustępu 446 wynika, że dla dostatecznie małych x można tu po prawej stronie wykonać wszystkie potęgowania i przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych. Gdy skorzystamy potem z twierdzenia o równości szeregów potęgowych i porównamy współczynniki przy jednakowych potęgach x po lewej i po prawej stronie, to otrzymamy (nieskończony!) układ równań:

$$(20) \quad \begin{aligned} a_1 &= c_{10}, \\ a_2 &= c_{20} + c_{11} a_1 + c_{02} a_1^2, \\ a_3 &= c_{11} a_2 + 2c_{02} a_1 a_2 + c_{30} + c_{21} a_1 + c_{12} a_1^2 + c_{03} a_1^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

wiązących szukane współczynniki $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Ponieważ po prawej stronie (18) wszystkie wyrazy zawierające y mają wymiar nie niższy niż drugi (tzn. zawierają bądź wyższą potęgę samego y , bądź pierwszą potęgę y pomnożoną przez jakąś potęgę x), więc w n -tym równaniu układu (20) współczynnik a_n wyraża się za pomocą współczynników a_1, a_2, \dots, a_{n-1} o mniejszych wskaźnikach (i znanych współczynników c). To właśnie pozwala na wyznaczenie współczynników a_n kolejno jeden po drugim:

$$(21) \quad \begin{aligned} a_1 &= c_{10}, \\ a_2 &= c_{20} + c_{11} c_{10} + c_{02} c_{10}^2, \\ a_3 &= (c_{11} + 2c_{02} c_{10})(c_{20} + c_{11} c_{10} + c_{02} c_{10}^2) + c_{30} + c_{21} c_{10} + c_{12} c_{10}^2 + c_{03} c_{10}^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Przy sposobności zrobimy następującą uwagę, którą później wykorzystamy. Ponieważ przy uwalnianiu się od nawiasów w (18a) nie wykonujemy na literach a i c żadnych innych działań oprócz dodawania i mnożenia, więc prawe strony równań (20) są wielomianami względem a i c o współczynnikach na pewno dodatnich (a nawet naturalnych). A więc i prawe strony wzorów (21) będą też wielomianami względem c o współczynnikach także dodatnich.

Utwórzmy teraz szereg (19) o współczynnikach a otrzymanych z tych właśnie wzorów. Można o nim powiedzieć, że spełnia on formalnie zależność (18a). Gdybyśmy wiedzieli, że szereg ten jest zbieżny dla dostatecznie małych x , to nie trzeba by już było udowadniać, że przedstawiona przezeń funkcja spełnia warunek (18) gdyż współczynniki tego szeregu

spełniają równości (20), które są w pełni równoważne z (18a). Tak więc całe zagadnienie sprowadza się teraz tylko do dowodu, że szereg (19), którego współczynniki wyznaczamy ze wzorów (21), jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera.

Rozpatrzmy wraz z (18) analogiczną zależność

$$(18^*) \quad y = \gamma_{10} x + \gamma_{20} x^2 + \gamma_{11} xy + \gamma_{02} y^2 + \gamma_{30} x^3 + \gamma_{21} x^2 y + \gamma_{12} xy^2 + \gamma_{03} y^3 + \dots,$$

w której wszystkie współczynniki γ_{ik} są dodatnie i spełniają poza tym nierówności

$$(22) \quad |c_{ik}| \leq \gamma_{ik},$$

Skonstruujemy dla niej, na razie formalnie, szereg analogiczny do (19):

$$(19^*) \quad y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n + \dots$$

przy czym jego współczynniki określmy wzorami podobnymi do wzorów (21):

$$\alpha_1 = \gamma_{10},$$

$$(21^*) \quad \alpha_2 = \gamma_{20} + \gamma_{11} \gamma_{10} + \gamma_{02} \gamma_{10}^2,$$

$$\alpha_3 = (\gamma_{11} + 2\gamma_{02} \gamma_{10}) (\gamma_{20} + \gamma_{11} \gamma_{10} + \gamma_{02} \gamma_{10}^2) + \gamma_{30} + \gamma_{21} \gamma_{10} + \gamma_{12} \gamma_{10}^2 + \gamma_{03} \gamma_{10}^3.$$

Układ tych wzorów, z uwagi na uprzednie rozważania, zapewnia dodatniość liczb α^n .
 Prócz tego, po porównaniu ich z (21) i uwzględnieniu (22) widzimy, że dla wszystkich
 n jest także

$$(23) \quad |a_n| \leq \alpha_n.$$

Gdyby się udało tak dobrać dodatnie współczynniki γ_{ik} , aby były spełnione nie tylko warunki (22), lecz żeby także odpowiedni szereg (19*) miał różny od zera promień zbieżności, to wobec (23) to samo dotyczyłoby szeregu (19) i twierdzenie byłoby udowodnione. Przejdzmy teraz do wyznaczania liczb γ_{ik} .

Istnieją takie dodatnie liczby r i ρ , że szereg podwójny

$$|c_{10}| \cdot r + |c_{20}| \cdot r^2 + |c_{11}| \cdot r\rho + |c_{02}| \rho^2 + \dots$$

jest zbieżny, a więc jego wyraz ogólny $|c_{ik}| r^i \rho^k$ dąży do 0, skąd wynika, że jest on ograniczony:

$$|c_{ik}| \cdot r^i \rho^k \leq M , \quad \text{skąd} \quad |c_{ik}| \leq \frac{M}{r^i \rho^k} .$$

Przyjmijmy $\gamma_{ik} = M/r^i \rho^k$ i zgodnie z powyższym rozpatrzmy zależność

$$y = \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r\rho}xy + \frac{M}{\rho^2}y^2 + \dots = -\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} - M - \frac{M}{\rho}y$$

lub wreszcie

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\rho+M} y + \frac{M\rho^2}{\rho+M} \cdot \frac{x}{r-x} = 0.$$

Okazuje się, że istotnie można znaleźć funkcję $y = y(x)$ spełniającą równanie, a mianowicie te jej gałąź, która staje się równa 0 dla $x = 0$. Rozwiązuje równe kwadratowe

otrzymujemy (przyjmując $|x| < r$)

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\rho+M)}{\rho^2} \cdot \frac{x}{r-x}} \right]^{(1)}.$$

Jeżeli dla uproszczenia wzoru wprowadzimy oznaczenie

$$(24) \quad r_1 = r \left(\frac{\rho}{\rho+2M} \right)^2,$$

to wzór na y możemy napisać w postaci

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{r_1} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{r} \right)^{-1/2} \right].$$

Stąd widać już, że gdy skorzystamy z szeregu dwumennego, wyrażenie to można rozwiniąć według potęg x dla $|x| < r_1 < r$. Ponieważ wspomniane rozwinięcie musi być identyczne z (19*), więc na tym kończymy dowód zbieżności szeregu (19*) przynajmniej dla $|x| < r_1$, a więc i zbieżności szeregu (19).

Należy zauważyć, że twierdzenie ustala tylko możliwość rozwinięcia y według potęg x (lub w przypadku ogólnym, według potęg $x - x_0$) w pobliżu $x = 0$ ($x = x_0$). Dokładne wyznaczenie przedziału zbieżności wymaga specjalnych badań.

W podobny sposób można potraktować także przypadek ogólny, gdy układ funkcji otrzymujemy z układu równań.

Piękna metoda rozumowania, zastosowana powyżej pochodzi od Cauchy'ego. W istocie polega ona na zamianie danych szeregów potęgowych jednej lub kilku zmiennych przez, bardziej wygodne do badań, majoranty, które mają wszystkie współczynniki dodatnie i odpowiednio większe od wartości bezwzględnych współczynników wyjściowych. W związku z tym sama metoda została nazwana *metodą majorant*. Często korzystamy z niej w teorii równań różniczkowych.

451. Odwrócenie szeregu potęgowego. Jako szczególny przypadek rozwijanego wyżej zagadnienia rozpatrzmy teraz zadanie odwrócenia szeregu potęgowego. Niech funkcja $y = f(x)$ da się w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ przedstawić w postaci szeregu ustalonego według potęg $x - x_0$. Oznaczając wyraz wolny (wartość y dla $x = x_0$) przez y_0 , napiszemy to rozwinięcie w postaci

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Jeżeli $a_1 \neq 0$, to x da się stąd wyznaczyć w otoczeniu $y = y_0$ jako funkcja y , która z kolei daje się rozwinać w szereg według potęg $y - y_0$.

Tak więc, jeżeli y jest w punkcie x_0 funkcją analityczną zmiennej x , to funkcja odwrotna też będzie analityczna w odpowiednim punkcie y_0 (przy podanych warunkach).

(1) Znak minus przed pierwiastkiem został postawiony w tym celu, żeby dla $x = 0$ było $y = 0$.

Wszystko to wynika bezpośrednio z udowodnionego twierdzenia. Przyjmując dla uproszczenia $x_0 = y_0 = 0$ napiszemy zależność wiążącą y z x wzorując się na (18) w postaci

$$x = by + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots \quad (1)$$

Możemy już więc współczynniki szukanego rozwinięcia

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

wyznaczyć kolejno z równań

$$b_1 = b$$

$$b_2 = c_2 b_1^2,$$

$$b_3 = 2c_2 b_1 b_2 + c_3 b_1^3,$$

$$b_4 = c_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3c_3 b_1^2 b_2 + c_4 b_1^4,$$

$$b_5 = 2c_2(b_1 b_4 + b_2 b_3) + 3c_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4c_4 b_1^3 b_2 + c_5 b_1^5,$$

.....

Znając na przykład rozwinięcie sinusa:

$$y = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots,$$

możemy znaleźć rozwinięcie

$$x = \arcsin y = y + b_3 y^3 + b_5 y^5 + \dots$$

(piszemy tylko potęgi nieparzyste y , gdyż z uwagi na nieparzystość funkcji $y = \sin x$ z góry wiadomo, że funkcja odwrotna też będzie nieparzysta). Równania na współczynniki b będą w tym przypadku miały postać:

$$b_1 = 1, \quad b_3 = \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{6}, \quad b_5 = \frac{1}{2}b_1^2b_3 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{3}{40}, \quad \dots$$

Inny przykład. Niech

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

skad

$$x = \ln(1+y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

Współczynniki b wyznaczamy po kolej:

$$\beta_1 = 1$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} b_1^2 = -\frac{1}{2},$$

$$b_3 = -b_1 b_2 - \frac{1}{6} b_1^3 = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{1}{2}(2b_1 b_3 + b_2^2) - \frac{1}{2} b_1^2 b_2 - \frac{1}{24} b_1^4 = -\frac{1}{4},$$

$$b_5 = -(b_1 b_4 + b_2 b_3) - \frac{1}{2} (b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) - \frac{1}{6} b_1^3 b_2 - \frac{1}{120} b_1^5 = \frac{1}{5},$$

.....

⁽¹⁾ Należy pamiętać, że tutaj x i y zamieniły swoje role w porównaniu z poprzednim ustępnem.

a więc

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \dots$$

Obszar zmienności y , w którym zagwarantowane jest istnienie funkcji odwrotnej i słuszność otrzymanego jej rozwinięcia, można ustalić rozumując jak w ustępie 450, lecz wówczas obszar ten jest zwykle zbyt zawężony. Gdy na przykład w pierwszym z przytoczonych przykładów, napiszemy równanie wiążące x i y w postaci (18):

$$x = y + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

i ograniczymy się do x i y spełniających nierówności $|x| < \frac{\pi}{2}$, $|y| < 1$, tzn. przyjmiemy $\rho = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$, wówczas otrzymamy $M = 1$, a więc ze wzoru (24)

$$r_1 = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 2} \right)^2 < 0,2,$$

podczas gdy naprawdę obszarem, w którym można stosować otrzymane wyniki, jest przedział $(-1, 1)$!

Uwaga. Dobrze jest zdać sobie sprawę ze znaczenia warunku $a_1 \neq 0$, przy którym spełniona jest teza powyższego twierdzenia. Niech $a_1 = 0$, lecz $a_2 \neq 0$, powiedzmy $a_2 > 0$. A więc w pobliżu $x = 0$ (dla uproszczenia przyjmujemy $x_0 = y_0 = 0$) mamy

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

więc $y > 0$. Oznaczając przez $y^{1/2}$ pierwiastek arytmetyczny otrzymamy

$$\sqrt{y} = \sqrt{a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots} = \pm x \sqrt{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2} x + \frac{a_4}{a_2} x^2 + \dots},$$

gdzie znak wybiera się tak, by pokrywał się ze znakiem x . Na mocy twierdzenia z ustępu 450 w pobliżu $x = 0$ ostatni pierwiastek jest sam szeregiem potęgowym z wyrazem wolnym równym 1. Tak więc, ostatecznie (gdy przeniesiemy podwójny znak na lewą stronę) będzie

$$\pm \sqrt{y} = a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots,$$

gdzie a'_1 jest równe $\sqrt{a_2} > 0$. Korzystając z twierdzenia z tego ustępu (rolę y odgrywa wielkość $\pm \sqrt{y}$) otrzymamy dwa różne rozwinięcia x w zależności od obranego znaku

$$x_1 = b_1 y^{1/2} + b_2 y + b_3 y^{3/2} + b_4 y^2 + \dots > 0 \quad (b_1 = 1/\sqrt{a_2} > 0)$$

i

$$x_2 = -b_1 y^{1/2} + b_2 y - b_3 y^{3/2} + b_4 y^2 - \dots < 0.$$

Zwracamy uwagę czytelnika na niejednoznaczność funkcji odwrotnej i na to, że każdą jej gałąź można rozwiniąć już nie według całkowitych, lecz według ułamkowych potęg zmiennej y .

425. Szereg Lagrange'a. Zastosujmy twierdzenie z ustępu 450 do równania szczególnego postaci

$$(25) \quad y' = a + x\varphi(y),$$

gdzie o funkcji $\varphi(y)$ zakładamy, że jest analityczna w punkcie $y = a$. Wtedy, jak już wiemy, dla dostatecznie małych wartości x można stąd wyznaczyć y jako funkcję zmiennej x , analityczną w punkcie $x = 0$ i przyjmującą w tym punkcie wartość a .

Niech $u = f(y)$ będzie jakąś funkcją zmiennej y , analityczną dla $y = a$. Gdy zastąpimy tu y przez wspomnianą funkcję zmiennej x , to u będzie funkcją zmiennej x też analityczną w punkcie $x = 0$. Postawmy sobie za cel rozwinąć u według potęg x , dokładniej: otrzymać wygodne wzory na współczynniki tego rozwinięcia.

Zauważmy uprzednio, że gdy zmienną jest a , wówczas y można wyznaczyć z równania (25) jako funkcję dwóch zmiennych x i a analityczną w punkcie $(0, a)$ ⁽¹⁾. Zmienna u będzie wtedy także funkcją tych samych dwóch zmiennych.

Różniczkując (25) względem x i względem a otrzymujemy

$$[1 - x \cdot \varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \quad [1 - x \cdot \varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial a} = 1,$$

skąd oczywiście

$$(26) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial a},$$

i ogólnie dla $u = f(y)$

$$(26a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}.$$

Z drugiej strony, dla dowolnej funkcji $F(y)$, dla której istnieje pochodna względem y , mamy

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] = - \frac{\partial}{\partial a} \left[F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Łatwo można się o tym przekonać bezpośrednim różniczkowaniem i powołaniem się na tożsamości (26) i (26a).

Ze wszystkich tych uwag skorzystamy przy dowodzie bardzo potrzebnego nam dalej wzoru

$$(28) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right]^{(2)}.$$

Dla $n = 1$ sprowadza się on do (26a). Założymy teraz, że jest on prawdziwy dla pewnej wartości $n \geq 1$ i udowodnimy, że jest wówczas prawdziwy dla pochodnej rzędu $n+1$. Różniczkując (28) względem x i korzystając z prawa [190] zmiany kolejności różniczkowania otrzymujemy

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

Ale na mocy (27) i (26a) otrzymujemy kolejno

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[\varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

⁽¹⁾ W twierdzeniu tym zakłada się, że twierdzenie ustępu 450 obejmuje przypadek, gdy w równaniu występują trzy zmienne i jedną z nich wyznaczamy jako funkcję dwu pozostałych.

⁽²⁾ $\varphi^n(y)$ oznacza tu potęgę $[\varphi(y)]^n$.

Podstawiając to do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = -\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left[\varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right].$$

Tak więc wzór (28) został udowodniony przez indukcję.

Przejdzmy wreszcie do interesującego nas rozwinięcia funkcji u według potęg x . Przy ustalonym a będzie ono oczywiście miało postać rozwinięcia Taylora [438, 9°]

$$u = u_0 + x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{x^2}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_0 + \dots,$$

gdzie wskaźnik 0 oznacza, że funkcję i jej pochodne bierzemy w punkcie $x = 0$. Lecz y będzie wtedy równe a , a więc $u_0 = f(a)$, dalej według wzoru (28) jest

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a) \cdot f'(a)].$$

Podstawiając otrzymane wartości współczynników, otrzymujemy rozwinięcie

$$(29) \quad f(y) = f(a) + x \cdot \varphi(a) f'(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{da} [\varphi^2(a) \cdot f'(a)] + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a) \cdot f'(a)] + \dots,$$

które nazywamy *szeregiem Lagrange'a*. Jest on ciekawy z tego względu, że jego współczynniki są przedstawione *explicite* jako funkcje a .

Jeśli $f(y) \equiv y$, to otrzymujemy w szczególności

$$(29a) \quad y = a + x \cdot \varphi(x) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{dx} [\varphi^2(x)] + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\varphi^n(x)] + \dots$$

Istnieje ścisły związek między zadaniem rozpatrywanym w tym ustępie, a zadaniem znajdowania szeregu potęgowego dla funkcji odwrotnej. Jeżeli (przy założeniu, że $\varphi(a) \neq 0$) napiszemy równanie (25) w postaci

$$x = \frac{y-a}{\varphi(y)} = b_0 + b_1(y-a) + b_2(y-a)^2 + \dots,$$

to okazuje się, że zadanie Lagrange'a jest równoważne z odwróceniem tego szeregu ustawnionego według potęg $y-a$. Jeśli przeciwnie, postawimy sobie za zadanie otrzymanie szeregu potęgowego odwrotnego dla szeregu

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (a_1 \neq 0)$$

to napiszemy tę zależność w postaci

$$y = x (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots),$$

i oznaczmy sumę szeregu przez $\psi(x)$. Dochodzimy wtedy do równania

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(x)};$$

postaci (25), gdzie $a = 0$, $\varphi(x) = 1/\psi(x)$ i oprócz tego x i y zamieniły swoje role. Ta ostatnia uwaga jest ważna jeszcze z tego powodu, że pozwala od razu napisać ogólny wzór na wynik odwrócenia według wzoru (29a):

$$(30) \quad x = y \cdot \frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!} \left[\frac{d}{dx} \frac{1}{\psi^2(x)} \right]_{x=0} + \dots + \frac{y^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{\psi^n(x)} \right]_{x=0} + \dots$$

Podamy przykłady.

1) Zaczniemy właśnie od wykorzystania wzoru (30). Niech będzie dane równanie

$$y = x(a+x) \quad (a \neq 0),$$

czyli

$$x = y \cdot \frac{1}{a+x}.$$

Ponieważ

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{(a+x)^n} = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)\dots(2n-2)}{(a+x)^{2n-1}},$$

otrzymujemy rozwinięcie

$$x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)}{(n-1)! n!} \cdot \frac{y^n}{a^{2n-1}} + \dots$$

To samo rozwinięcie otrzymalibyśmy rozwiązując równanie kwadratowe względem x i wybierając to rozwiązanie, które jest równe 0 dla $y = 0$.

2) Wyjdźmy teraz od równania typu (25)

$$y = a + \frac{x}{y},$$

jest tu więc $\varphi(y) = 1/y$. Przyjmując $f(y) = y^{-k}$, otrzymujemy na mocy wzoru Lagrange'a (29)

$$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{a^k} - x \cdot \frac{k}{a^{k+2}} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{k(k+3)}{a^{k+4}} - \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}} \dots$$

Ponieważ dane równanie sprowadza się do równania kwadratowego:

$$y^2 - ay - x = 0,$$

więc oczywiście

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x} \quad (1).$$

Gdy na przykład $a = 2$, wówczas otrzymujemy [po pomnożeniu przez 2^k] rozwinięcie

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k = 1 - k \cdot \frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!} \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{k(k+4)(k+5)}{3!} \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots$$

3) W astronomii teoretycznej ważną rolę odgrywa równanie Keplera

$$E = M + \varepsilon \sin E,$$

gdzie E jest anomalią mimośrodową planety, M – anomalią średnią, a ε – mimośrodem orbity planety. Korzystając z szeregu Lagrange'a (29a) możemy otrzymać rozwinięcie E w szereg według potęg mimośrodu o współczynnikach zależnych od M

$$E = M + \varepsilon \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{d}{dM} \sin^2 M + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \sin^n M + \dots$$

(1) Znak plus przed pierwiastkiem wybraliśmy dlatego, że dla $x = 0$ musi być $y = a$.

Ważna jest tu dokładna znajomość przedziału zbieżności. Laplace pierwszy stwierdził, że szereg jest zbieżny dla $\epsilon < 0,6627\dots$

4) Rozpatrzmy wreszcie równanie

$$y = x + \frac{\alpha}{2} (y^2 - 1) \quad (1).$$

Rozwiązańem tego równania, przyjmującym wartość x dla $\alpha = 0$, jest

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}}{x} = \frac{2x - \alpha}{1 + \sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}}.$$

Rozwinięcie tej funkcji w szereg według potęgi α ma postać

$$y = x + \frac{\alpha}{2} (x^2 - 1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{d(x^2 - 1)^2}{dx} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} + \dots$$

Zróżniczkujemy obie strony tej równości względem x (z analityczności y jako funkcji dwóch zmiennych α i x wnioskujemy, że szereg można różniczkować wyraz za wyrazem). Otrzymamy rozwinięcie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}} = 1 + \alpha \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2 - 1)}{dx} + \alpha^2 \frac{1}{2! 2^2} \cdot \frac{d^2(x^2 - 1)^2}{dx^2} + \dots + \alpha^n \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} + \dots,$$

którego współczynniki, co w tym przypadku od razu widać [porównaj 447, 8)], są wielomianami Legendre'a

$$P_n = \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

§ 5. Elementarne funkcje zmiennej zespolonej

453. Liczby zespolone. Chociaż nasz podręcznik jest całkowicie poświęcony zmiennej rzeczywistej i funkcjom rzeczywistym zmiennej rzeczywistej, w tym paragrafie odstąpimy od zasadniczej linii wykładu i będziemy się zajmowali elementarnymi funkcjami zmiennej zespolonej. Rozpatrywanie tych zagadnień nawiązuje do teorii szeregów potęgowych i z kolei rzuca nowe światło na niektóre punkty tej teorii. Prócz tego zapoznanie się z funkcjami zmiennej zespolonej jest korzystne dla analizy zmiennej rzeczywistej także pod względem rachunkowym (porównaj przykłady z ustępu 461 a także rozdział XIX z trzeciego tomu podręcznika, poświęconego szeregom Fouriera).

Zakładamy, że czytelnik zna już liczby zespolone z wykładu algebry. Dlatego też ograniczymy się tu do krótkiego przeglądu podstawowych własności tych liczb.

Liczba zespolona z ma postać $z = x + yi$, gdzie i jest jednostką urojoną: $i = \sqrt{-1}$, a x i y są liczbami rzeczywistymi. Pierwszą z nich x nazywamy częścią rzeczywistą, a drugą y częścią urojoną liczby z i oznaczamy w sposób następujący:

$$x = R(z), \quad y = I(z).$$

Dwie liczby zespolone $x + yi$ i $x' + y'i$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x'$ i $y = y'$ ⁽²⁾. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jest określone wzorami

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i;$$

⁽¹⁾ Tutaj x odgrywa rolę a , a α rolę x .

⁽²⁾ Inaczej mówiąc tu także równość sprowadza się dla nas do zwykłej tożsamości [porównaj z 2].

łatwo można wykazać istnienie różnicy i ilorazu, wyrażonych wzorami

$$(x+yi)-(x'+y'i) = (x-x')+(y-y')i,$$

$$\frac{x+yi}{x'+y'i} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + \frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i.$$

Ostatni wzór jest słuszny przy założeniu, że $x'+y'i \neq 0$, to znaczy, że $x'^2+y'^2 > 0$.

Prócz tego dla liczb zespolonych spełnione są wszystkie zwykłe prawa działań nie związane z pojęciami większy i mniejszy (pojęć tych dla liczb zespolonych nie wprowadzamy). Mówiąc ściślej, spełnione są warunki II 1° - 4° z ustępu 3 i III 1° - 5° z ustępu 4.

Wprowadźmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych xOy (rys. 63). Każda liczba zespolona $z = x+yi$ może być wtedy przedstawiona jako punkt $M(x, y)$ tej płaszczyzny, którego współrzędnymi są część rzeczywista i część urojona tej liczby. Oczywiście jest też i na odwrót: każdemu punktowi M płaszczyzny odpowiada w sposób jednoznaczny pewna liczba zespolona. W związku z powyższym rozpatrywaną płaszczyznę nazywamy *płaszczyzną zmiennej zespolonej* z lub też po prostu *płaszczyzną zespoloną*.

Liczby rzeczywiste $x = x+0 \cdot i$ są przedstawione punktami osi x (gdyż dla nich $y=0$), a liczby urojone $yi = 0+yi$ ($x=0$) punktami osi y . Dlatego też pierwszą z tych osi nazywamy *osią rzeczywistą*, a drugą – *osią urojoną*.

Ważną rolę spełniają też współrzędne biegunowe r, Θ punktu, będącego obrazem liczby $z = x+yi$ (patrz rysunek). Nieujemną liczbę r nazywamy *modułem* lub *wartością bezwzględną* liczby zespolonej z i oznaczamy $r = |z|$. Moduł liczby zespolonej wyznaczony jest jednoznacznie przez liczbę z wzorem

$$|z| = \pm \sqrt{x^2+y^2}.$$

Jest on równy零u wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$. Kąt Θ nazywamy *argumentem* liczby zespolonej z : $\Theta = \operatorname{Arg} z$. Dla $z \neq 0$ wyznaczamy go z równości

$$\cos \Theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \Theta = \frac{y}{r},$$

tylko z dokładnością do składnika postaci $2k\pi$ (k liczba całkowita). Dla $z = 0$ argument w ogóle jest nieokreślony. Z wyjątkiem tego przypadku dla każdej liczby z istnieje jeden i tylko jeden argument θ spełniający nierówność

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Nazywamy go *wartością główną argumentu* i oznaczamy przez $\arg z$. Jeżeli $\theta < \pi$, to

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{r+r \cos \theta} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

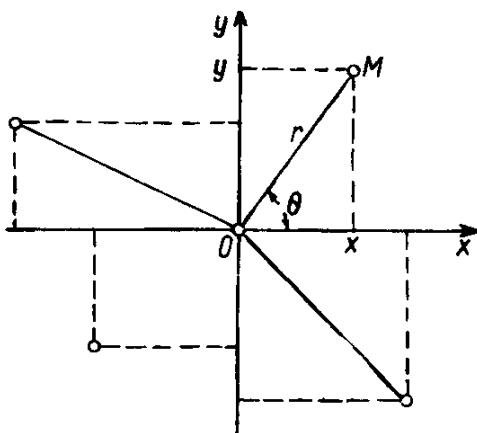
i kąt $\arg z$ można wyznaczyć z równości

$$\arg z = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Równość tę można stosować dla wszystkich liczb zespolonych oprócz liczb rzeczywistych ujemnych i zera.

Zauważmy, że moduły liczb zespolonych $z = x+yi$ i $z' = x'+y'i$ i też spełniają nierówność

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|,$$



Rys. 63

tak dobrze znaną, gdy chodzi o wartości bezwzględne liczb rzeczywistych. Rzeczywiście, tym razem srowadza się ona do znanej nierówności

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

która jest szczególnym przypadkiem nierówności Minkowskiego [133 (7)]; zobacz też odnośnik na str. 285 tomu I.

Spełnione są także wnioski wynikające z tej nierówności [patrz 17].

Gdy w oznaczeniu liczby zespolonej $z = x + yi$ przyjmiemy $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$, otrzymamy tak zwaną trygonometryczną postać liczby zespolonej:

$$z = r(\cos \Theta + i \sin \Theta).$$

Podstawmy w postaci trygonometrycznej inną liczbę zespoloną z' :

$$z' = r'(\cos \Theta' + i \sin \Theta').$$

Wtedy iloczyn zz' w postaci trygonometrycznej będzie wyglądał tak:

$$zz' = rr'[\cos(\Theta + \Theta') + i \sin(\Theta + \Theta')],$$

co bezpośrednio wynika z twierdzeń o kosinusie i sinusie sumy. Stąd

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \operatorname{Arg} zz' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'.$$

Podobnie dla ilorazu z i z' ($z' \neq 0$) znajdujemy

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \operatorname{Arg} \frac{z}{z'} = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'.$$

Ze wzoru na iloczyn otrzymujemy wzór na potęgę o wykładniku naturalnym n :

$$z^n = r^n(\cos n\Theta + i \sin n\Theta),$$

w szczególności dla $r = 1$ otrzymujemy wzór *de Moivre'a*

$$(\cos \Theta + i \sin \Theta)^n = \cos n\Theta + i \sin n\Theta.$$

Wreszcie pierwiastek n -tego stopnia z z jest równy

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\Theta}{n} + i \sin \frac{\Theta}{n} \right),$$

gdzie $\sqrt[n]{r}$ jest pierwiastkiem arytmetycznym z modułu r . Podstawiając tu kolejno

$$\Theta = \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots, \theta + 2(n-1)\pi$$

otrzymujemy n różnych wartości pierwiastka $\sqrt[n]{z}$ (zakładając oczywiście, że $z \neq 0$). Dla innych wartości Θ będą już tylko powtarzały się te same wartości pierwiastka.

454. Ciąg liczb zespolonych i jego granica. Rozpatrzmy ciąg $\{z_n\}$ utworzony z liczb zespolonych $z_n = x_n + y_n i$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Definicję granicy tego ciągu liczb zespolonych formułujemy w taki sam sposób jak w przypadku ciągu liczb rzeczywistych [23]:

Liczbę $c = a + bi$ nazywamy granicą ciągu $\{z_n\}$, jeżeli dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik N , że wszystkie wyrazy z_n o wskaźnikach $n > N$ spełniają nierówność

$$|z_n - c| < \varepsilon.$$

Zapiszemy to wzorem

$$\lim z_n = c \quad \text{lub} \quad z_n \rightarrow c.$$

Analogicznie przenosimy na ten przypadek definicje wielkości nieskończoność małych i nieskończoność dużych.

Zauważmy, że teraz nie możemy już mówić o dążeniu ciągu do nieskończoności z określonym znakiem, ponieważ zmiennym zespolonym nie przypisujemy żadnego znaku. Gdy $|z_n| \rightarrow +\infty$, to mówimy, że $z_n \rightarrow \infty$ (bez znaku!).

Rozpatrzmy, na przykład, ciąg $z_n = z^n$, gdzie z jest liczbą zespoloną. Jeżeli $|z| < 1$, to $z_n \rightarrow 0$, a jeżeli $|z| > 1$, to $z_n \rightarrow \infty$. Łatwo zauważyc, że dla $|z| = 1$ (lecz $z \neq 1$) ciąg nie ma w ogóle granicy.

Wszystkie dowody zasadniczych twierdzeń teorii granic dają się łatwo bezpośrednio przenieść do teorii ciągów o wyrazach zespolonych, przez powtórzenie, prawie dosłownie, poprzednich rozważań. Z drugiej strony, wszystkie twierdzenia całkiem automatycznie przenoszą się na przypadek zmiennej zespolonej na podstawie następującego prostego twierdzenia:

Ciąg liczb zespolonych $z_n = x_n + y_n i$ dąży do granicy $c = a + bi$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb rzeczywistych x_n i y_n dążą odpowiednio do granic a i b .

Dowód tego twierdzenia otrzymujemy natychmiast z następujących nierówności:

$$\left| \begin{array}{l} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{array} \right\| \leq |z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |x_n - a| + |y_n - b| .$$

A więc badanie ciągu liczb zespolonych można zastąpić badaniem dwóch ciągów liczb rzeczywistych. W szczególności można tą drogą udowodnić dla ciągów liczb zespolonych zasadę zbieżności [39].

Rozpatrzmy teraz szereg nieskończony

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

o wyrazach zespolonych $c_n = a_n + b_n i$. Tutaj też nazywamy sumą szeregu granicę sum częściowych

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k .$$

A więc na przykład w przypadku postępu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \dots$$

(gdzie z jest liczbą zespoloną różną od 1) suma częściowa

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} ,$$

skąd widać, że dla $|z| < 1$ szereg ma sumę

$$C = \frac{1}{1 - z} ,$$

a dla $|z| > 1$ szereg nie ma skończonej sumy.

Wszystkie zasadnicze pojęcia i twierdzenia ustępów 362, 364 [wraz z ich dowodami] można tu zachować.

Badanie szeregów liczb zespolonych może być sprowadzone do badania dwóch szeregów liczb rzeczywistych na podstawie następującego twierdzenia:

Zbieżność szeregu liczb zespolonych

$$(C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i)$$

do sumy $C = A + Bi$ jest równoważna ze zbieżnością dwóch szeregów liczb rzeczywistych

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad i \quad (B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

odpowiednio do sum A i B .

Twierdzenie to jest oczywiście tylko innym sformułowaniem twierdzenia, udowodnionego poprzednio dla ciągów.

Udowodnimy teraz twierdzenie analogiczne do twierdzenia z ustępu 377.

Jeżeli jest zbieżny szereg

$$(C^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

utworzony z modułów wyrazów szeregu (C) , to ten ostatni szereg też jest zbieżny.

Rzeczywiście, z uwagi na oczywiste nierówności

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} < |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

zbieżność szeregu (C^*) pociąga za sobą zbieżność obu szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Stąd [377] wynika, że szeregi (A) i (B) też są zbieżne, a więc na mocy poprzedniego twierdzenia, zbieżny jest także szereg (C) .

Jeżeli szereg (C^*) jest zbieżny, to szereg (C) nazywamy *bezwzględnie zbieżnymi*. Zauważmy, że wtedy jak już widzieliśmy, szeregi (A) i (B) też są bezwzględnie zbieżne.

Dzięki temu twierdzeniu kryterium d'Alemberta [377] zachowuje moc także w przypadku szeregów zespolonych.

Twierdzenie z ustępu 387 o przestawieniu wyrazów szeregu i reguła mnożenia szeregów wyraz za wyrazem z ustępu 389 także przenoszą się na przypadek bezwzględnie zbieżnych szeregów liczb zespolonych. W pierwszym przypadku dowód przeprowadzamy przez sprowadzenie do szeregów liczb rzeczywistych, a w drugim możemy w zasadzie zachować poprzedni dowód.

Wreszcie w analogiczny sposób przenosimy na przypadek liczb zespolonych zasadnicze pojęcia i twierdzenia z teorii szeregów podwójnych.

455. Funkcje zmiennej zespolonej. Niech zmienna zespolona $z = x + yi$ przyjmuje dowolne wartości z pewnego zbioru $\Sigma = \{z\}$, który interpretujemy geometrycznie jako obszar (otwarty lub nie) na płaszczyźnie zespolonej. Jeżeli każdej wartości z z obszaru Σ przyporządkowana jest jedna lub kilka wartości innej zmiennej zespolonej $w = u + vi$, to tę ostatnią nazywamy (odpowiednio jednoznaczna lub wieloznaczna) *funkcją zmiennej z w obszarze Σ* i piszemy:

$$w = f(z) \quad \text{lub} \quad w = g(z), \quad \text{itp.}$$

Przykładami funkcji jednoznacznych, i to na całej płaszczyźnie zespolonej, będą $|z|$, z^n lub w ogóle funkcja całkowita wymierna tzn. wielomian

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$$

o dowolnych współczynnikach zespolonych c_0, c_1, \dots, c_n . Funkcja wymierna ułamkowa, tzn. nieskracalny iloraz dwóch wielomianów, jest także określona jednoznacznie na całej płaszczyźnie, lecz w punktach odpowiadających pierwiastkom mianownika jest ona nieskończona. Przykładami funkcji niejednoznacznych będą $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[3]{z}$. Dalej w ustępach 457-460 zbadamy inne ważne funkcje zmiennej zespolonej.

W przyszłości, jeżeli tylko nie zrobimy innych zastrzeżeń, będziemy rozpatrywali tylko funkcje jednoznaczne.

Jeżeli $w = u + vi$ jest funkcją zmiennej $z = x + yi$ w obszarze $\mathcal{Z} = \{z\} = \{x + yi\}$, to jej części rzeczywista i urojona u i v też będą oczywiście funkcjami z lub, co na to samo wychodzi, funkcjami x, y w odpowiednim obszarze $\mathcal{Z}^* = \{(x, y)\}$, który geometrycznie jest przedstawiony tą samą figurą co i \mathcal{Z} :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Na przykład w przypadku funkcji rzeczywistej $w = |z|$ lub $w = \arg z$ mamy odpowiednio:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{lub} \quad u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (v = 0);$$

w przypadku funkcji $w = z^n = (x + yi)^n$ jest oczywiście

$$u = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \dots,$$

$$v = nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

Niech c będzie punktem skupienia obszaru \mathcal{Z} . Mówimy, że funkcja $w = f(z)$ ma granicę C , gdy z dąży do c ⁽¹⁾, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $\delta > 0$, że $|f(z) - C| < \epsilon$, jeżeli tylko $|z - c| < \delta$ (i $z \neq c$).

Fakt ten odnotowujemy jak zwykle:

$$\lim_{z \rightarrow c} w = \lim_{z \rightarrow c} f(z) = C.$$

Łatwo można zmienić sformułowanie tej definicji na przypadek, gdy c (lub C) jest równe ∞ . Można ją wypowiedzieć także „w języku ciągów”.

Jeśli $c = a + bi$, $C = A + Bi$, to jak łatwo wynika z rozważań ustępu 454, poprzedni wzór jest równoważny z dwoma wzorami

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} u(x, y) = A \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} v(x, y) = B.$$

Ciągłość funkcji $f(z)$ w dowolnym punkcie $z_0 = x_0 + y_0 i$ obszaru \mathcal{Z} definiujemy za pomocą równości

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ciągłość funkcji $f(z)$ jest oczywiście równoważna ciągłości obu części rzeczywistej i urojonej $u(x, y)$ i $v(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) .

Tak więc, gdy przypominamy sobie podane przed chwilą wzory na $|z|$ i na składowe z^n widzimy, że są to funkcje ciągłe na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Podobnie $\arg z$ jest ciągły wszędzie z wyjątkiem punktów ujemnej części osi rzeczywistej i zera.

Ciągłość można oczywiście stwierdzić także bezpośrednio z rozważań w dziedzinie zespolonej. Na przykład dla funkcji $|z|$ wynika ona od razu z nierówności

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$$

Dla funkcji z^n mamy

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}).$$

(1) Tutaj c i C są liczbami zespolonymi.

Gdy z jest dostatecznie bliskie z_0 , wartości z są ograniczone pewną stałą: $|z| < M$, a więc

$$|z^n - z_0^n| = nM^{n-1} \cdot |z - z_0|,$$

skąd otrzymujemy żądaną wynik.

Łatwo można teraz wykazać ciągłość wielomianu i funkcji wymiernej (w tym ostatnim przypadku poza pierwiastkami mianownika).

Definicja pochodnej funkcji $w = f(z)$ w punkcie $z = z_0$ ma tę samą postać co i w zwykłym rachunku różniczkowym:

$$w' = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Na przykład, w przypadku funkcji $w = z^n$, mamy

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1},$$

a więc przechodząc do granicy, gdy $z \rightarrow z_0$, otrzymujemy znów znany wzór

$$w' = nz_0^{n-1}.$$

Wzór z ustępu 94 na pochodną funkcji odwrotnej i wszystkie reguły różniczkowania z ustępów 97, 98 zachowują się bez zmian. Podobnie wprowadzamy też pojęcie pochodnych wyższego rzędu.

Wspomnijmy jeszcze o szeregach

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots,$$

których wyrazami są funkcje zmiennej z z tego samego obszaru Σ .

Tu można przede wszystkim wprowadzić pojęcie zbieżności jednostajnej w ten sam sposób co i w ustępie 428. W przypadku zespolonych szeregów funkcyjnych możemy tak samo wnosić o zbieżności jednostajnej z istnienia dodatniej majoranty, ponieważ kryterium Weierstrassa pozostaje i tu w mocy. Z twierdzeń o szeregach funkcyjnych potrzebne nam będzie w przyszłości twierdzenie o przejściu do granicy wyraz za wyrazem w szeregu jednostajnie zbieżnym [433, twierdzenie 4]. Dowód tego twierdzenia jest taki sam jak poprzednio.

Przechodzimy teraz w szczególności do badania szeregów potęgowych, które w teorii funkcji zmiennej zespolonej odgrywają wyjątkowo ważną rolę. Poświęcimy im specjalny ustęp.

456. Szeregi potęgowe. Niech będzie dany szereg

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

gdzie c_0, c_1, c_2, \dots są stałymi współczynnikami zespolonymi, a z zmienną przebiegającą całą płaszczyznę zespoloną. Całkiem tak samo, jak było to zrobione w ustępach 379 lub 380, możemy dla niego wykazać istnienie takiej nieujemnej liczby R , że dla $|z| < R$ (jeżeli $R > 0$) szereg (1) jest zbieżny bezwzględnie, a dla $|z| > R$ (o ile $R < +\infty$) szereg jest rozbieżny. A więc jeżeli odrzucimy przypadek $R = 0$, mamy dla $R = +\infty$ szereg zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej, a dla R skońzonego — szereg zbieżny wewnątrz koła o środku w początku układu i promieniu R , a rozbieżny na zewnątrz tego koła. Zamiast przedziału zbieżności mamy tu koło zbieżności i słowo promień nabiera dopiero właściwego sensu.

Na przykład, jak łatwo sprawdzić za pomocą kryterium d'Alemberta, szereg

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnej zespolonej wartości z , podczas gdy szeregi

$$\sum_0^{\infty} z^n, \quad \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

mają promień zbieżności $R = 1$.

Na brzegu koła zbieżności szeregi mogą się zachowywać różnie. Tak spośród trzech przytoczonych przed chwilą szeregów pierwszy jest wszędzie rozbieżny na okręgu $|z| = 1$, ponieważ nie jest spełniony zasadniczy warunek konieczny zbieżności: wyraz ogólny nie dąży do zera. Drugi szereg jest zbieżny bezwzględnie we wszystkich punktach tego okręgu, bo szereg $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Wreszcie jeżeli w trzecim szeregu podstawimy $z = \cos \theta + i \sin \theta$, to przyjmie on postać

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

i (poza przypadkiem $\theta = 0$, tzn. $z = 1$) jest zbieżny [385, 2)], ale nie bezwzględnie.

Uwaga. Gdy współczynnikami szeregu potęgowego są liczby rzeczywiste (tak jak w poprzednich przykładach), to oczywiście promień R „koła zbieżności” pokrywa się na płaszczyźnie zespolonej z poprzednim promieniem „przedziału zbieżności” na osi rzeczywistej.

Wymienimy teraz inne twierdzenia o szeregach potęgowych, które można przenieść do teorii szeregów potęgowych zespolonych.

Twierdzenia 1° i 2° z ustępu 437 zachowują się bez żadnych zmian, a więc wewnątrz koła zbieżności suma (1) szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą zmiennej z .

Natomiast *twierdzenie Abela* [437, 6°] wysłowimy w sposób następujący:

Jeżeli szereg (1) jest zbieżny w pewnym punkcie z_0 okręgu $|z| = R$, to gdy punkt z dąży do punktu z_0 od wewnątrz koła wzduż promienia, to

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n \text{ (1).}$$

W szczególnym przypadku, gdy $z_0 = R$, możemy przyjąć, że $z = r$ jest zmienną rzeczywistą dodatnią i równość powyższa przybiera postać:

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

Gdy podstawimy $c_n = a_n + b_n i$, to rozpada się ona na dwie równości

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \text{i} \quad \lim_{r \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n.$$

Ponieważ szeregi po prawych stronach są zbieżne z uwagi na zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i) \cdot R^n,$$

więc do dowodu tych równości wystarczy powołać się na zwykłe twierdzenie Abela.

Przejdzmy do przypadku ogólnego. Przez θ_0 oznaczmy argument liczby z_0 . Można wtedy przypiąć

$$z_0 = R(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0), \quad z = r(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

(1) Można udowodnić, że ta równość zachodzi nawet wtedy, gdy z dąży do z_0 w sposób ogólniejszy, jednak nie będziemy się na tym zatrzymywali.

i równość, którą mamy udowodnić, napiszemy tak:

$$\lim_{r \rightarrow R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) R^n.$$

Jeżeli włączymy czynniki w nawiasach do współczynników szeregu, to zagadnienie sprówdzi się do rozpatrzonego już przypadku.

Teraz, nie opierając się na ogólnym twierdzeniu o różniczkowaniu szeregów, udowodnimy bezpośrednio, że *wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem*, tzn. że jeżeli dla $|z| < R$ jest

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{to} \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Zauważmy przede wszystkim, że promień zbieżności tego ostatniego szeregu jest też równy R , o czym możemy się łatwo przekonać na przykład z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda.

Ustalmy sobie punkt z_0 , $|z_0| < R$. Mamy

$$(2) \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}).$$

Jeśli weźmiemy ρ pomiędzy $|z_0|$ a R , to możemy przyjąć także, że $|z| < \rho$ i wtedy

$$|c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1})| < n \cdot |c_n| \cdot \rho^{n-1}.$$

Szereg $\sum_1^{\infty} n |c_n| \rho^{n-1}$ jest zbieżny, gdyż ρ jest mniejsze od R , a R jest także, jak to pokazaliśmy, promieniem

zbieżności szeregu $\sum_1^{\infty} n c_n z^{n-1}$. Stosując kryterium Weierstrassa wnioskujemy stąd o zbieżności szeregu (2).

W szeregu tym możemy dla $z \rightarrow z_0$ przejść do granicy wyraz za wyrazem, co doprowadzi już do żądanego wyniku.

Już stąd wynika, że twierdzenie 8 i 9 z ustępu 438 można także przenieść bez zmian na przypadek zmiennej zespolonej.

Tak więc suma szeregu potęgowego jest wewnątrz koła zbieżności ciągła wraz ze wszystkimi pochodnymi. Innymi słowy, przy rozwijaniu funkcji w szereg według potęg z , odległość od początku do najbliższego punktu nieciągłości funkcji (lub którejś z jej pochodnych) jest naturalnym ograniczeniem promienia zbieżności tego rozwinięcia.

W przypadku szeregu

$$1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \frac{1}{1+z}$$

punktem takim jest $z = -1$. Leży on na osi rzeczywistej. Dlatego też już poprzednio widzieliśmy, że promień zbieżności rozwinięcia funkcji $1/(1+z)$ nie może być większy niż jeden. Inaczej wygląda sprawa z szeregiem

$$1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots = \frac{1}{1+z^2}.$$

Suma jego ma punkty nieciągłości $z = \pm i$ na osi ukojonej odległe o 1 od początku. Gdy znajdowaliśmy się na osi rzeczywistej, na której funkcja $1/(1+x^2)$ jest ciągła wraz ze wszystkimi pochodnymi, nie mogliśmy objaśnić, dlaczego promień zbieżności jej rozwinięcia jest równy 1.

Podobne przykłady, w których przejście do dziedziny zespolonej pomaga wykryć istotne przyczyny różnych osobliwości rozwinięcia funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej spotykamy jeszcze później.

Na zakończenie wspomnimy, że wszystkie reguły [445] działań na szeregach potęgowych: twierdzenie o podstawieniu szeregu do szeregu [446], o dzieleniu szeregów [448] i wreszcie o odwróceniu szeregu potęgowego [451] zachowują tutaj też swą moc, a ich dowody, mające charakter formalny, można w zupełności przenieść do teorii szeregów potęgowych zespolonych.

457. Funkcja wykładnicza. Widzieliśmy [404, (11)], że dla dowolnego x rzeczywistego mamy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Jeśli w szeregu tym zastąpimy zmienną rzeczywistą x przez zmienną zespoloną $z = x + yi$, to otrzymamy szereg $1 + \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, o którym wiemy już [456], że jest on zbieżny, tzn. ma określoną skończoną sumę w całej płaszczyźnie zespolonej. Sumę tego szeregu przyjmujemy właśnie z definicji jako wartość funkcji wykładniczej e^z dla dowolnego z zespolonego, tzn. przyjmujemy

$$(3) \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Jak widzieliśmy, definicja ta nie jest sprzeczna ze zwykłą definicją w przypadku wykładnika rzeczywistego, i jest jego naturalnym uogólnieniem.

Gdy skorzystamy z reguły mnożenia szeregów potęgowych, to jak i w 390, 6), przekonamy się łatwo że dla dowolnych wartości zespolonych z i z' będzie

$$(4) \quad e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

a więc charakterystyczna własność funkcji wykładniczej ma miejsce także w zakresie zespolonym.

Funkcja e^z jest ciągła na całej płaszczyźnie, a nawet więcej, ma ona wszystkie pochodne ciągłe. Różniczkując wyraz za wyrazem określający ją szereg, otrzymamy, jak poprzednio,

$$(e^z)' = e^z.$$

Niech będzie $z = x + yi$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Zastępując w (4) z przez x , a z' przez yi , otrzymujemy

$$e^z = e^x \cdot e^{xi}.$$

Zajmijmy się teraz specjalnie potągą e^{xi} o wykładniku urojonym. Gdy w podstawowej definicji (3) podstawimy yi zamiast z , otrzymujemy

$$e^{xi} = 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i - \frac{y^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}i + \dots$$

lub po oddzieleniu części rzeczywistej od urojonej:

$$e^{xi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + \left(y - \frac{y^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right)i.$$

Poznajemy w tych szeregach rozwinięcia $\cos y$ i $\sin y$ [404, (12) i (13)] i otrzymujemy stąd ciekawy wzór

$$(5) \quad e^{xi} = \cos y + i \sin y,$$

który był po raz pierwszy wyprowadzony przez Eulera.

Stąd mamy, na przykład,

$$e^{(\pi/2)i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{(3\pi/2)i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Jeżeli więc $z = x + yi$, to

$$(6) \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \text{ (1).}$$

(1) Można by przyjąć tę równość jako definicję funkcji wykładniczej o argumencie zespolonym; wzór (4) byłby wtedy wnioskiem z twierdzeń o sumie kosinusa i sinusa.

Widzimy, że

$$e^x = e^{R(z)} = |e^z|, \quad y = I(z) + \operatorname{Arg} e^z.$$

Ponieważ $e^x > 0$ dla dowolnego x rzeczywistego, więc e^z jest różne od zera dla dowolnego z zespolonego.

Zastępując w równości (5) y przez $-y$ otrzymamy, po dodaniu i odjęciu od siebie obu wzorów, zależności

$$(7) \quad \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i},$$

między funkcjami trygonometrycznymi o argumentach rzeczywistych a funkcjami o argumentach urojonych. Wróćmy jeszcze do tego ciekawego faktu później.

Gdy w równości (6) zastąpimy y przez $y+2\pi$, to wartość prawej strony (a więc i lewej) równości nie zmieni się, czyli

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Funkcja wykładnicza jest więc funkcją okresową o urojonym okresie $2\pi i$.

Łatwo wykazać, że oprócz okresów postaci $2k\pi i$ (k – liczba całkowita) funkcja e^z nie może mieć innych okresów. Rzeczywiście, gdyby było $e^{z+\omega} = e^z$, to podstawiając $z = 0$ mielibyśmy $e^\omega = 1$. Niech będzie $\omega = \alpha + \beta i$, więc [patrz (6)] $e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = 1$. Stąd $e^\alpha = 1$, a $\alpha = 0$, a więc $\cos \beta = 1$, $\sin \beta = 0$, skąd $\beta = 2k\pi$, c.b.d.o.

Teraz dopiero, gdy wiemy, że $e^{\pm 2\pi i} = 1$, staje się zrozumiałe, dlaczego rozwinięcie funkcji $\frac{x}{e^x - 1}$

w szeregu potęgowy [449, (12)] ma promień zbieżności 2π . Chociaż funkcja $\frac{x}{e^x - 1}$ nie ma na osi rzeczywistej punktów osobliwych, które mogłyby to spowodować, na osi urojonej są jednak punkty, w których funkcja jest nieskończona i spośród nich najbliższe od początku układu są punkty $z = \pm 2\pi i$ leżące w odległości 2π od niego.

W związku z uogólnieniem funkcji wykładniczej na przypadek wykładnika zespolonego przypomnijmy sobie pewną ciekawą funkcję rozpatrywaną w ustępach 138 i 407, mianowicie

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad (x \neq 0) \quad f(0) = 0.$$

Przy przejściu do zmiennej zespolonej $z = x + yi$ widać od razu, dlaczego nie da się ona rozwinać w szereg według potęg x w żadnym otoczeniu 0, mimo iż jest ona ciągła wraz ze wszystkimi pochodnymi na całej osi rzeczywistej z punktem 0 włącznie. Rzeczywiście, funkcja e^{-1/z^2} ($z \neq 0$) nie ma nawet granicy, gdy $z \rightarrow 0$, jeżeli bowiem będziemy dążyli z do zera wzduż osi urojonej, tzn. gdy $z = yi$ i $y \rightarrow 0$, to

$$e^{-1/z^2} = e^{1/y^2} \rightarrow \infty.$$

458. Funkcja logarytmiczna. Niech będzie dana dowolna liczba zespolona w różna od 0. Postawmy sobie za zadanie znaleźć liczbę z spełniającą równanie

$$e^z = w$$

(jak wiemy równanie to nie ma rozwiązań, gdy $w = 0$). Taką liczbę z nazwiemy *logarytmem naturalnym* liczby w i oznaczmy symbolem

$$(8) \quad z = \operatorname{Ln} w.$$

Jeżeli $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ i przyjmiemy $z = x + yi$, to z uwagi na (6) otrzymamy z równania (8) trzy równania

$$e^x = r, \quad \cos y = \cos \theta_1, \quad \sin y = \sin \theta_1,$$

skąd

$$x = \ln r \text{ (1)}, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \text{ jest liczbą całkowitą}).$$

(1) Chodzi nam tu o zwykły logarytm naturalny liczby dodatniej r .

Dochodzimy do wniosku, że logarytm w (dla $w \neq 0$) zawsze istnieje i jest równy

$$(9) \quad \ln w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi i,$$

a więc jest on wieloznaczny. Właściwie łatwo można to było przewidzieć biorąc pod uwagę okresowość funkcji wykładniczej. Biorąc $k = 0$ otrzymujemy tak zwaną *wartość główną logarytmu*

$$(10) \quad \ln w = \ln |w| + i \arg w,$$

która różni się od pozostałych tym, że jej część urojona jest zawarta w przedziale $(-\pi, \pi)$:

$$-\pi < I(\ln w) < \pi.$$

Mamy na przykład

$$\ln 1 = 0, \quad \ln 1 = 2k\pi i; \quad \ln(-1) = \pi i, \quad \ln(-1) = (2k+1)\pi i, \quad \ln i = \frac{\pi}{2} i, \quad \ln i = \frac{4k+1}{2}\pi i \quad \text{itd.}$$

Przy zmiennym w , wzór (10) wyznacza *gałęź główną* wieloznacznej funkcji logarytmicznej $\ln w$. Po zostale gałęzie otrzymujemy ze wzoru

$$\ln w = \ln w + 2k\pi i,$$

dla różnych wartości całkowitych k .

Łatwo zauważyc, że funkcja (10) jest ciągła na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej w , poza początkiem układu i częścią ujemną osi rzeczywistej. Nieciągłości w punkcie $w = 0$ nie da się usunąć, gdyż dla $w \rightarrow 0$ oczywiście $\ln w \rightarrow \infty$. Inaczej rzecz się ma w przypadku ujemnych wartości rzeczywistych $w_0 = -u_0 < 0$. Nieciągłość powstaje tu w pewnym sensie w sposób sztuczny z powodu naszej umowy, że wartość $\arg w$ bierzemy z przedziału $(-\pi, \pi)$. Gdy $w = u + vi \rightarrow w_0$ dla $v > 0$, wówczas $\arg w \rightarrow \pi = \arg w_0$. Jeżeli będzie $v < 0$, to $\arg w \rightarrow -\pi$. Gdybyśmy przeszli z głównej gałęzi $\ln w$ w drugiej ćwiartce do innej gałęzi $\ln w + 2\pi i$ w trzeciej, to ciągłość byłaby przywrócona. Tak więc, chcąc uniknąć wieloznaczności i rozbijając funkcję wieloznaczna na gałęzie jednoznaczne, tworzymy jednocześnie nieciągłości na każdej poszczególnej gałęzi. Odważnie, przejście od jednej gałęzi do drugiej odbywa się w sposób ciągły. Na tej właśnie spójności różnych gałęzi funkcji wieloznacznej polega ciekawa właściwość płaszczyzny zespolonej nie mająca analogii w przypadku rzeczywistych funkcji wieloznacznych określonych na osi rzeczywistej.

Z ogólnego twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy (poza punktami nieciągłości)

$$(11) \quad (\ln w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Zastępując w przez $1+w$ rozpatrzymy funkcję $z = \ln(1+w)$ ($w \neq -1$). Mamy teraz

$$e^z = e^{\ln(1+w)} = 1+w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

a więc

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Wynika stąd, że dla dostatecznie małych (co do wartości bezwzględnej) wartości w funkcję $z = \ln(1+w)$ można rozwiniąć w szereg według potęg w :

$$z = w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \dots + c_n w^n + \dots$$

Szereg

$$[\ln(1+w)]' = 1 + 2c_2 w + 3c_3 w^2 + \dots + nc_n w^{n-1} + \dots$$

jest pochodną tej funkcji względem w , którą z uwagi na (11) można napisać tak:

$$[\ln(1+w)]' = \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \dots + (-1)^{n-1} w^{n-1} + \dots$$

Porównując te dwa rozwinięcia widzimy, że

$$2c_2 = -1, \quad 3c_3 = 1, \quad \dots, \quad nc_n = (-1)^{n-1}, \quad \dots,$$

skąd

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad c_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \dots$$

A więc mamy ostatecznie w otoczeniu zera rozwinięcie

$$(12) \quad \ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n} + \dots$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymany szereg ma promień zbieżności $R = 1$. Widzieliśmy, że dla dostatecznie małych z jego sumą będzie wartość główna logarytmu $\ln(1+w)$. Czy tak samo będzie w całym kole $|w| < 1$?

Ponieważ szereg (12) spełnia formalnie równość

$$e^{w-w^2/2+w^3/3-\dots} = 1+w,$$

przeto spełnia ją też faktycznie dopóki jest zbieżny. A zatem w całym kole $|w| < 1$ suma szeregu (12) jest na pewno jedną z wartości $\ln(1+w)$. Całe zagadnienie sprowadza się do pytania, czy zawsze będzie to wartość główna.

Jeżeli $|w| < 1$, a więc punkt przedstawiający liczbę $1+w$ leży wewnątrz okręgu o środku w punkcie $w = 1$ i promieniu równym 1, to $\arg(1+w)$ jest zawarty między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$, a inne wartości $\text{Arg}(1+w)$ są zawarte w przedziałach:

$$\left(-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right), \quad \left(-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right), \quad \dots$$

lub

$$\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \quad \left(\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right), \quad \dots$$

Urojoną składową sumy szeregu (12) jest właśnie $\text{Arg}(1+w)$ [patrz (9)]. Dla dostatecznie małych $w = u+vi$ daje ona wartość główną $\arg(1+w)$, tzn. jest zawarta między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$, a jednocześnie jako funkcja ciągła zmiennych u i v nie może przeskoczyć do innych wspomnianych przedziałów, a więc dla wszystkich $|w| < 1$ jest ona równa właśnie wartości głównej $\arg(1+w)$. Udowodniliśmy więc, że równość (12) jest spełniona w całym kole $|w| < 1$.

Zastępując w (12) w przez $-w$ i odejmując otrzymany w ten sposób szereg od szeregu (12) otrzymujemy pozytyczne rozwinięcie⁽¹⁾

$$(13) \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w} = w + \frac{w^3}{3} + \dots + \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

które jest zbieżne dla $|w| < 1$.

459. Funkcje trygonometryczne i ich funkcje odwrotne. Wiemy z 404 (12) i (13), że dla x rzeczywistego funkcje $\cos x$ i $\sin x$ określone są szeregami

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

(1) Ponieważ część urojona różnicy $\ln(1+w) - \ln(1-w)$ jest zawarta między $-\pi$ i π , więc różnica ta określa właśnie wartość główną $\ln \frac{1+w}{1-w}$.

Naturalne będzie określenie funkcji $\cos z$ i $\sin z$ dla dowolnego z zespolonego za pomocą analogicznych szeregów

$$(14) \quad \cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

zbieżnych na całej płaszczyźnie zmiennej z .

Ten sposób określenia funkcji trygonometrycznych nie jest już dla nas niczym nowym — w ustępie 443 skorzystaliśmy już z niego nawet w dziedzinie rzeczywistej, ażeby wprowadzić te ważne dla analizy funkcje nie odwołując się do geometrii. Wzorując się na przeprowadzonych tam rozważaniach moglibyśmy tutaj, już dla zespolonych wartości zmiennej **niezależnej**, wprowadzić twierdzenia o kosinusie i sinusie sumy, wzory redukcyjne i reguły różniczkowania tych funkcji.

Właściwie te same wyniki możemy otrzymać na innej drodze: przez ustalenie związku między funkcjami trygonometrycznymi i funkcją wykładniczą. Uogólniając mianowicie rozważania z ustępu 457 przeprowadzone dla $z = yi$ na dowolne z zespolone możemy otrzymać [porównaj (5)]

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z,$$

a stąd [porównaj (7)]

$$(15) \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

Dzięki tym wzorom możemy całkowicie sprowadzić badanie funkcji trygonometrycznych do badania funkcji wykładniczej. Wzorów tych można by użyć do określenia funkcji trygonometrycznych zamiast (14). Proponujemy czytelnikowi przeprowadzić na podstawie wzorów (15) nowy dowód wspomnianych poprzednio własności kosinusa i sinusa, jak również dowód, że 1) $\cos z$ i $\sin z$ nie mają okresów różnych od $2k\pi$ (k — liczba całkowita) i 2) wszystkie pierwiastki tych funkcji są rzeczywiste.

Jeżeli w (15) przyjmiemy $z = yi$ (y — rzeczywiste), to otrzymamy

$$(16) \quad \cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y, \quad \sin yi = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot i = i \sinh y.$$

W ten sposób otrzymuje się bezpośredni związek między funkcjami hiperbolicznymi o argumentem rzeczywistym a funkcjami trygonometrycznymi o argumentem urojonym. Zauważmy, że $\cos yi$ jest liczbą rzeczywistą zawsze większą od jedności.

Teraz, korzystając z twierdzeń o sumie możemy napisać

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi$$

lub [biorąc pod uwagę (16)]:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

i rozłożyć w ten sposób kosinus i sinus na składowe.

Funkcje $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ określamy wzorami

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} \quad (z \neq (k + \frac{1}{2})\pi),$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} \quad (z \neq k\pi).$$

Jak widać mają one okres równy π .

Rozwinięcia otrzymane w ustępie 449 dla $\operatorname{tg} x$ i funkcji $x \operatorname{ctg} x$ zachowują ważność także po podstawieniu zmiennej zespolonej z zamiast rzeczywistej x . Podobieństwo rozwinięć $x \operatorname{ctg} x$ i $x \operatorname{ctgh} x$ jest całkiem zrozumiałe, jeżeli uwzględnimy otrzymane z (16) zależności

$$\operatorname{tg} yi = i \operatorname{tgh} y, \quad \operatorname{ctg} yi = -i \operatorname{ctgh} y.$$

Spośród funkcji odwrotnych względem funkcji trygonometrycznych rozpatrzymy tylko $\operatorname{arcustangens}$ i $\operatorname{arcussinus}$.

Z uwagi na to, że funkcje trygonometryczne dają się sprowadzić do wykładniczej, należy oczekiwac, że funkcje odwrotne względem nich będą związane z logarytmem.

Zaczniemy od uwagi, że $w = \operatorname{tg} z$ nie przyjmuje wartości $\pm i$ (łatwo można to wykazać rozumując nie wprost). Niech będzie $w \neq \pm i$. Równanie

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = w$$

można wtedy rozwiązać względem z :

$$e^{2zi} = \frac{1+wi}{1-wi}, \quad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+wi}{1-wi}.$$

Jest to właśnie wzór na funkcję odwrotną $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} w$, która jest oczywiście nieskończoność wielowartościowa tak samo jak Ln .

Gdy weźmiemy wartość główną logarytmu, otrzymamy wartość główną

$$\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+wi}{1-wi} \quad (w \neq \pm i),$$

która ma tę własność, że jej część rzeczywista jest zawarta w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$:

$$-\frac{1}{2}\pi < R(\operatorname{arc} \operatorname{tg} w) < \frac{1}{2}\pi.$$

Pozostałe wartości otrzymujemy ze wzoru

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} w = \operatorname{arc} \operatorname{tg} w + k\pi \quad (k - \text{liczba całkowita}).$$

Zastępując w szeregu (13) w przez wi otrzymamy rozwinięcie dla gałęzi głównej arcusa tangen sa

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} w = w - \frac{w^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

które jest zbieżne dla $|w| < 1$ ⁽¹⁾.

Przejdźmy teraz do rozwiązania równania

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

względem z :

$$e^{2iz} - 2wi \cdot e^{iz} - 1 = 0, \quad e^{iz} = wi \pm \sqrt{1-w^2},$$

skąd

$$z = \operatorname{Arc} \sin w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(wi \pm \sqrt{1-w^2}).$$

Otrzymujemy tu też funkcję nieskończoność wielowartościową.

(1) Gdy $w = \pm i$, funkcja $\operatorname{arc} \operatorname{tg} w$ ma wartość nieskończoną.

Ograniczymy się do wartości głównej logarytmu

$$z = \frac{1}{i} \ln(wi \pm \sqrt{1-w^2}).$$

Dla $w = +1$ lub -1 pierwiastek staje się równy 0 i otrzymujemy odpowiednio $z = \frac{1}{2}\pi$ lub $-\frac{1}{2}\pi$, co przyjmujemy jako wartość główną arcusa sinusa. Niech teraz będzie $w \neq \pm 1$, musimy dokonać wyboru jednej z dwóch wartości z . Oczywiście

$$(wi + \sqrt{1-w^2})(wi - \sqrt{1-w^2}) = 1,$$

tak że

$$\frac{1}{i} \ln(wi + \sqrt{1-w^2}) + \frac{1}{i} \ln(wi - \sqrt{1-w^2}) = \pm\pi,$$

a więc

$$R\left(\frac{1}{i} \ln(wi + \sqrt{1-w^2})\right) + R\left(\frac{1}{i} \ln(wi - \sqrt{1-w^2})\right) = \pm\pi,$$

podczas gdy części urojone różnią się tylko znakiem. Ponieważ żadna z części rzeczywistych nie wychodzi poza przedział $(-\pi, \pi)$, więc tylko jedna z nich będzie zawarta między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$; odpowiednią wartość funkcji przyjmujemy jako główną. Wyjątkową sytuację otrzymamy tylko w przypadku, gdy obie części rzeczywiste są równe $\frac{1}{2}\pi$ lub $-\frac{1}{2}\pi$, wtedy jako główną przyjmujemy tę wartość, której odpowiada część urojona dodatnia⁽¹⁾. Z tym zastrzeżeniem można powiedzieć, że wartość główną funkcji arcusa sinus otrzymamy z warunku

$$-\frac{1}{2}\pi \leq R(\arcsin w) \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Łatwo sprawdzić, że pozostałe wartości otrzymamy ze wzorów

$$\text{Arc sin } w = \arcsin w + 2k\pi,$$

$$\text{Arc sin } w = (2k+1)\pi - \arcsin w \quad (k \text{ -- liczba całkowita}).$$

Na zakończenie zatrzymamy się na rozwinięciu $\arcsin w$ według potęg w . W przypadku zmiennej rzeczywistej widzieliśmy już, że odwróceniem szeregu

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

określającego $\sin x$ jest szereg

$$x = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

określający $\arcsin y$ [patrz 440, 3)]. Ponieważ w przypadku zmiennej zespolonej współczynniki obliczamy w ten sam sposób, widać, że odwróceniem szeregu

$$w = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

musi być szereg

$$z = w + \frac{1}{2} \cdot \frac{w^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{w^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

(1) Na przykład $\arcsin 2 = \frac{1}{2}\pi + i \ln(2 + \sqrt{3})$.

Jego promień zbieżności $R = 1$ ⁽¹⁾. Dla $|w| < 1$ otrzymujemy tu jedną z wartości $\text{Arc sin } w$. Wykażemy, że będzie to właśnie wartość główna $\text{arc sin } w$. Rzeczywiście $|R(z)|$ jest nie większy niż

$$|z| < 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika żądany wniosek.

460. Funkcja potęgowa. Niech a i b będą dwiema liczbami zespolonymi i niech $a \neq 0$. Wtedy potęgę a^b określmy ogólnie wzorem

$$a^b = e^{b \ln a} = e^{b(\ln a + 2k\pi i)} \quad (k - \text{liczba całkowita}),$$

a więc potęga jest na ogół wieloznaczna. Dla $k = 0$ otrzymujemy tak zwaną główną wartość potęgi

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Dla odróżnienia wzór ogólny na potęgę oznacza się niekiedy w ślad za Cauchym przez $((a))^b$. Tak więc

$$((a))^b = a^b \cdot e^{2k\pi b i} \quad (k - \text{całkowite}).$$

Jeżeli b jest liczbą całkowitą, to drugi czynnik jest równy 1; potęga będzie miała w tym przypadku tylko jedną wartość. Gdy b jest ułamkiem nieskracalnym p/q ($q > 1$), potęga będzie miała q różnych wartości. Wreszcie dla każdej innej wartości b potęga będzie miała nieskończony zbiór wartości.

Na przykład

$$2^i = e^{i \ln 2} = \cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2), \quad ((2))^i = 2^i \cdot e^{-2k\pi} \quad (k - \text{całkowite})$$

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}, \quad ((i))^i = e^{-(4+1)\pi/2} \quad (k - \text{całkowite}).$$

Jeżeli m jest dowolną stałą liczbą zespoloną, funkcja potęgowa $((z))^m$ jest w ogólności wieloznaczna. Gałęzią główną jej jest $(z \neq 0)$ ⁽²⁾:

$$z^m = e^{m \ln z},$$

Z zależności

$$(1+z)^m = e^{m \ln(1+z)}$$

całkiem tak samo jak w 447, 2) można otrzymać szereg dwumienny

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots$$

Szereg ten jest zbieżny dla dowolnego m zespolonego, jeżeli $|z| < 1$ ⁽³⁾ i wyznacza, jak to widać z samego sposobu jego konstrukcji, właśnie wartość główną potęgi dwumianu.

Badaniem tego szeregu zajmował się Abel.

(1) Dla $w = \pm 1$ pochodna arcusa sinusa $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ nie jest ciągła.

(2) Czasem dla $z = 0$ przyjmujemy $z^m = 0$, jeżeli $R(m) > 0$.

(3) Dla $z = -1$, jeśli nie sama potęga $(1+z)^m$, to wystarczająco dalekie pochodne są nieciągłe. Wyjątkiem jest przypadek, gdy $m = 0$ lub liczba naturalna.

461. Przykłady. W tym ustępie pokażemy na kilku przykładach, jakie korzyści daje zmienna zespolona i jej funkcje elementarne dla analizy funkcji rzeczywistej.

1) Łatwo można wyznaczyć kolejne pochodne funkcji $y = 1/(x^2+1)$, gdy przedstawimy ją w postaci

$$y = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Mianowicie

$$\begin{aligned} y^{n-1} &= \frac{1}{2i} (-1)^{n-1}(n-1)! \left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \cdot \frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n} \cdot \left[n x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Na przykład

$$\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(4)} = 24 \cdot \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2+1)^5}.$$

Tym samym otrzymujemy oczywiście również kolejne pochodne funkcji $\operatorname{arc tg} x$ [porównaj 116,8 i 118,4].

2) Wzory Eulera wyrażające kosinus i sinus przez funkcję wykładniczą mają różnorodne zastosowania. Gdy chcemy, na przykład, otrzymać zwięzły wzór na sumę

$$s = \sum_1^n \cos kx,$$

możemy to zrobić po prostu obliczając sumę postępu geometrycznego:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left(\sum_1^n e^{kx} + \sum_1^n e^{-kx} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{xt} - e^{(n+1)xt}}{1 - e^{xt}} + \frac{e^{-xt} - e^{-(n+1)xt}}{1 - e^{-xt}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}xt} - e^{(n+\frac{1}{2})xt}}{e^{-\frac{1}{2}xt} - e^{\frac{1}{2}xt}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}xt} - e^{-(n+\frac{1}{2})xt}}{e^{\frac{1}{2}xt} - e^{-\frac{1}{2}xt}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot = \frac{\frac{1}{2i} \left(e^{(n+\frac{1}{2})xt} - e^{-(n+\frac{1}{2})xt} \right) - \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{1}{2}xt} - e^{-\frac{1}{2}xt} \right)}{\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{1}{2}xt} - e^{-\frac{1}{2}xt} \right)} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Dodatnie całkowite potęgi $\sin x$ i $\cos x$, jak również iloczyny tych potęg można przedstawić jako kombinację liniową sinusów i cosinusów wielokrotności argumentu. Łatwo można to zrobić na podstawie wzorów Eulera rozwijając wyrażenia

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2i} \right)^n, \quad \cos^n x = \left(\frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2} \right)^n, \quad \dots$$

według wzorów na dwumian Newtona. Na przykład

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \frac{1}{32i} (e^{5xt} - 5e^{3xt} + 10e^{xt} - 10e^{-xt} + 5e^{-3xt} - e^{-5xt}) = \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{e^{5xt} - e^{-5xt}}{2i} - 5 \frac{e^{3xt} - e^{-3xt}}{2i} + 10 \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2i} \right) = \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos^4 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{128i} (e^{2xi} - e^{-2xi})^3 (e^{xi} + e^{-xi}) = \\
 &= -\frac{1}{128i} (e^{6xi} - 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} - e^{-6xi}) (e^{xi} + e^{-xi}) = \\
 &= -\frac{1}{128i} (e^{7xi} + e^{5xi} - 3e^{3xi} - 3e^{-xi} + 3e^{-3xi} + 3e^{-5xi} - e^{-7xi}) = \\
 &= -\frac{1}{64} (\sin 7x + \sin 5x - 3 \sin 3x - 3 \sin x).
 \end{aligned}$$

Możemy wprowadzić także wzory ogólne:

$$\text{(a)} \quad \sin^{2v} x = \frac{(-1)^v}{2^{2v-1}} \left\{ \cos 2vx - 2v \cos (2v-2) x + \frac{2v(2v-1)}{1 \cdot 2} \cos (2v-4) x - \dots + \right. \\
 \left. + \frac{(-1)^v}{2} \cdot \frac{2v(2v-1) \dots (v+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} \right\},$$

$$\text{(b)} \quad \sin^{2v+1} x = \frac{(-1)^v}{2^{2v}} \left\{ \sin (2v+1) x - (2v+1) \sin (2v-1) x + \right. \\
 \left. + \frac{(2v+1) 2v}{1 \cdot 2} \sin (2v-3) x + \dots + (-1)^v \frac{(2v+1) 2v \dots (v+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} \sin x \right\},$$

$$\text{(c)} \quad \cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos nx + n \cos (n-2) x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4) x + \dots \right\},$$

przy czym ostatni wyraz we wzorze (c) ma postać

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2v(2v-1) \dots (v+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} \quad \text{lub} \quad \frac{(2v+1) 2v \dots (v+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} \cos x.$$

zależnie od tego, czy $n = 2v$ czy $2v+1$.

Podobne przekształcenia są pożyteczne przy całkowaniu [porównaj 287].

4) Najprostsze wzory rachunku całkowego (dotyczące obliczania funkcji pierwotnych) stosują się, także do funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej lub zespolonej.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć całki

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Zadanie to jest równoważne z obliczeniem całki

$$\int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{(a+bi)x} dx,$$

która według elementarnego wzoru jest równa

$$\frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x} = \frac{\cos bx + i \sin bx}{a+bi} e^{ax} = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax} + i \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}.$$

Porównując oddzielnie części rzeczywiste i części urojone otrzymujemy szukane całki [(porównaj 271,6)].

Wzór na obliczenie całki postaci

$$\int P(x) e^{ax} dx,$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem całkowitym [271,4] możemy uogólnić na przypadek zespolonego a . Wtedy sprowadzą się do niego nie tylko całki

$$\int P(x) \cos bx dx, \quad \int P(x) \sin bx dx,$$

lecz także całki

$$\int P(x) e^{ax} \cos bx dx, \quad \int P(x) e^{ax} \sin bx dx$$

[271,4); 289].

5) Związek między funkcją logarytmiczną i funkcjami cyklotometrycznymi łączy wiele wzorów rachunku całkowego, które wydają się całkiem różne, a także pozwala wyprowadzić nowe wzory. Na przykład całki:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad \text{i} \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a}$$

lub

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

i

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

można sprowadzić jedną do drugiej przez zamianę x na xi .

6) Oddzielając części rzeczywiste i urojone w znanych rozwińciach zespolonych możemy czasem łatwo otrzymać rozwiniecia w dziedzinie rzeczywistej.

(a) Weźmy dla $|z| < 1$. postęp

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

i podstawmy $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Po prawej stronie otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

a po lewej

$$\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{(1-r \cos \theta) - ir \sin \theta} = \frac{r \cos \theta - r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} + \frac{r \sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone po obu stronach równości (i skracając przez r) otrzymujemy rozwiniecia:

$$\frac{\cos \theta - r}{1-2r \cos \theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cos n\theta,$$

$$\frac{\sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \sin n\theta$$

[porównaj 440,11)].

(b) Postępując analogicznie z szeregiem logarytmicznym

$$\ln(1-z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1),$$

otrzymujemy dla $r < 1$ [porównaj 440, 11)]

$$\frac{1}{2} \ln(1-2r \cos \theta + r^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n},$$

$$\operatorname{arc tg} \frac{r \sin \theta}{1-r \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Niech będzie $0 < \theta < \pi$. Ponieważ dla $r = 1$ szeregi po prawej stronie są nadal zbieżne [385,2)], więc korzystając z twierdzenia Abela [437, 6^o] można tu przejść do granicy, gdy $r \rightarrow 1 - 0$. Po lewej stronie otrzymujemy w pierwszym przypadku $\frac{1}{2} \theta \ln(2 - 2 \cos \theta) = \ln 2 \sin \frac{1}{2} \theta$, a w drugim $\operatorname{arc tg}(\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta) = \operatorname{arc tg}(\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\pi - \theta)) = \frac{1}{2} (\pi - \theta)$. Mamy więc

$$\ln 2 \sin \frac{\theta}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad \frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta < \pi).$$

W trzecim tomie tego podręcznika spotkamy się z wieloma ciekawymi rozwinięciami trygonometrycznymi.

7) W 447,8) mieliśmy rozwinięcie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \alpha^n.$$

gdzie $P_n(x)$ są to wielomiany Legendre'a. Niech x przyjmuje wartości między -1 i $+1$. Przyjmijmy $x = \cos \theta$; otrzymamy

$$(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \cdot \alpha^n.$$

Zastępując teraz $2 \cos \theta$ przez $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, mamy

$$\begin{aligned} (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-1/2} &= [1 - \alpha(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \alpha^2]^{-1/2} = (1 - \alpha e^{i\theta})^{-1/2} (1 - \alpha e^{-i\theta})^{-1/2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \alpha e^{i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 e^{2i\theta} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha e^{-i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 e^{-2i\theta} + \dots\right). \end{aligned}$$

Mnożąc przez siebie te dwa szeregi według zwykłej reguły i porównując współczynniki przy α^n w obu rozwinięciach otrzymamy wreszcie wzór na $P_n(\cos \theta)$:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}) + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{2} (e^{(n-1)i\theta} + e^{-(n-1)i\theta}) + \\ &\quad + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (e^{(n-2)i\theta} + e^{-(n-2)i\theta}) + \dots \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach możemy teraz zastępować kolejno przez $2 \cos n\theta$, $2 \cos(n-1)\theta$, $2 \cos(n-2)\theta$ itd. Ponieważ wszystkie współczynniki są tu dodatnie, więc jest oczywiste, że największą wartość osiągnie to wyrażenie dla $\theta = 0$, tzn. dla $x = \cos 0 = 1$. W ten sposób korzystając z rozważań dotyczących funkcji zmiennej zespolonej, otrzymaliśmy ciekawy wynik dotyczący całkowicie dziedziny rzeczywistej: gdy x przebiega wartości z przedziału $(-1, +1)$ każdy z wielomianów Legendre'a osiąga swą największą wartość na końcu, dla $x = 1$.

§ 6. Szeregi oscylujące i szeregi asymptotyczne. Wzory Eulera-Maclaurina

462. Przykłady. W § 9 poprzedniego rozdziału zapoznaliśmy czytelnika z najważniejszymi definicjami sumy uogólnionej szeregów rozbieżnych. Same sumy częściowe były jak najmniej przydatne do obliczeń przybliżonych tej sumy. Wróćmy teraz znów do szeregów rozbieżnych, lecz badania przeprowadzimy w innej płaszczyźnie: udowodnimy, że jeśli spełnione są określone warunki, to w pewnym obszarze właśnie

sumy częściowe szeregu rozbieżnego mogą być doskonałymi przybliżeniami liczby, która w tym czy innym sensie zrodziła ten szereg. Aby czytelnik mógł z góry wyczuć praktyczną możliwość stosowania szeregów w rachunkach przybliżonych, wystarczy wspomnieć, że z metod tych korzystają zwykle astronomowie przy obliczeniach położenia ciał niebieskich, a dokładność otrzymanych wyników jest całkowicie zadowalająca.

Postaramy się najpierw wyjaśnić potrzebne nam idee na prostych przykładach.

1) Rozpatrzmy szereg logarytmiczny

$$(1) \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Dobrze wiadomo [405], że szereg ten jest zbieżny i przedstawia funkcję $\ln(1+x)$ tylko dla $-1 < x \leq 1$. Poza tym przedziałem (na przykład dla $x > 1$) szereg ten jest rozbieżny i nie ma sumy. Jednakże nawet dla wartości $x > 1$ funkcja $\ln(1+x)$ jest nadal związana z sumami częściowymi tego szeregu rozbieżnego. A mianowicie, na mocy wzoru Taylora jest

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

gdzie resztę $r_n(x)$ możemy wziąć na przykład w postaci Lagrange'a [126]

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0 < \theta, \theta_1 < 1).$$

Okazuje się, że reszta jest co do bezwzględnej wartości mniejsza niż pierwszy odrzucony wyraz szeregu i ma ten sam znak (tak samo jak w przypadku zbieżnego szeregu naprzemiennego). Tak więc, jeżeli wartość $\ln(1+x)$, dla $x > 1$ zastąpimy przez sumę częściową szeregu rozbieżnego (1), to otrzymamy wygodne oszacowanie błędu (znamy nawet jego znak). Wystarczy to już, by można było użyć tej sumy częściowej do obliczenia przybliżonej wartości $\ln(1+x)$.

Oczywiście, jeżeli $0 < x \leq 1$, to dla n dążącego do nieskończoności błąd dąży do 0, a przy ustalonym n i $x \rightarrow 0$ mamy nawet

$$\frac{r_n(x)}{x^n} \rightarrow 0, \quad \text{tzn.} \quad r_n(x) = o(x^n),$$

czyli że błąd jest w porównaniu z x nieskończonie małą rzędem wyższego niż n . Dla dowolnego ustalonego $x > 1$ wyrażenie dające oszacowanie samo rośnie do nieskończoności wraz z n . A więc nie może tu być mowy o tym, żeby dla danego x uczynić błąd dowolnie małym przez odpowiedni wybór n . Jednakże, jak widać z samego oszacowania,

$$|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

dla x dostatecznie bliskich 1 błąd może być dowolnie mały. Gdy x będzie ustalone, lecz bliskie 1, wówczas wyrazy szeregu (1), nawet dla $x > 1$, będą najpierw małe co do wartości bezwzględnej, a mianowicie dopóki będzie

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x < 1 \quad \text{lub} \quad n < \frac{1}{x-1},$$

potem zaś dopiero zaczną rosnąć. Najwygodniej obciąć szereg na wyrazie o wskaźniku $n = E\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Otrzymamy w ten sposób dla danego x najlepsze przybliżenie liczby $\ln(1+x)$.

W przedstawionym przykładzie rozpatrywany szereg (1) był jednak zbieżny dla $-1 < x \leq 1$. Przykład drugi będzie bardziej pouczający z tego względu, że będziemy tu rozpatrywali szereg wszędzie rozbieżny.

2) Przyjmijmy teraz (dla $x > 0$)

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k},$$

gdzie $0 < c < 1$ (szereg jest zbieżny!).

Dla $k < x$ mamy

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \dots;$$

gdy $k > x$, szereg ten jest rozbieżny. Mimo to podstawiając formalnie to rozwinięcie do szeregu określającego funkcję $F(x)$ możemy dodać wyrazy podobne i otrzymać tą drogą szereg

$$(2) \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots,$$

gdzie

$$A_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} c^k.$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie szeregi wyznaczające współczynniki A_n są zbieżne. Poprzedni szereg jest jednak wyraźnie rozbieżny, gdyż

$$|A_n| > n^{n-1} c^n \quad \text{i} \quad \left| \frac{A_n}{x^n} \right| > \frac{n^{n-1} c^n}{x^n},$$

a to ostatnie wyrażenie dąży do ∞ , gdy $n \rightarrow \infty$.

Podany szereg rozbieżny (2) ma n -tą sumę częściową

$$S_n(x) = \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{x^v} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k \sum_{v=1}^n \frac{(-1)^{v-1} k^{v-1}}{x^v} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{n+1} \frac{k^n}{x^n} \right] \frac{c^k}{x+k},$$

a więc reszta wynosi

$$r_n(x) = F(x) - S_n(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n c^k}{(x+k) x^n}.$$

Tu także mamy

$$r_n(x) = 0 \cdot (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot c^k \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \theta \cdot \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Znow otrzymaliśmy znaną własność szeregu naprzemienneego, chociaż rozpatrywany szereg jest rozbieżny. Oczywiście, biorąc sumę częściową tego szeregu rozbieżnego $S_n(x)$ jako przybliżenie $F(x)$, na pewno nie można przy ustalonym x otrzymać dowolnej dokładności, można jednak otrzymać dowolną dokładność dla dostatecznie dużych x . W rozpatrywanym przykładzie pozostaje w mocy uwaga, o tym, że dodawanie do $S_n(x)$ nowych wyrazów opłaca się (w sensie zwiększenia dokładności) tylko dopóty, dopóki wyrazy maleją co do bezwzględnej wartości, tzn. $|A_{n+1}|/A_n < x$.

Oczywiście przy ustalonym n reszta $r_n(x)$ dąży do 0, gdy $x \rightarrow \infty$. Więcej nawet, ponieważ wtedy

$$x^n r_n(x) = \frac{\theta A_{n+1}}{x} \rightarrow 0,$$

więc

$$(3) \quad r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

i $r_n(x)$ jest nieskończonie małą rzędem wyższego niż n . Im więcej wyrazów szeregu rozbieżnego (2) zatrzymamy przy przybliżonym obliczeniu $F(x)$, tym większy rzad małości ma błąd tego przybliżenia dla $x \rightarrow \infty$.

463. Definicje. Przejdzmy teraz do ogólnych sformułowań i definicji.

Niech będzie dany szereg liczbowy

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

(a) Jeżeli jego sumy częściowe są kolejno raz mniejsze, a raz większe od pewnej liczby A , tzn. jeśli reszta r_n określona wzorem

$$(5) \quad A = a_0 + a_1 + \dots + a_n + r_n$$

ma wyrazy na przemian dodatnie i ujemne, to mówimy, że szereg (4) oscyluje wokół liczby A .

Z prostej równości

$$r_n = a_{n+1} + r_{n+1}$$

widzimy, że to określenie jest równoważne z takim:

(b) Szereg (4) nazywamy oscylującym wokół liczby A , gdy po pierwsze, wyrazy jego zmieniają wciąż znak i po drugie, reszta r_n ze wzoru (5) jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od liczby a_{n+1} i ma ten sam znak co ona ⁽¹⁾.

W poprzednim ustępie mieliśmy już do czynienia z takimi szeregami: szereg (1) wyraźnie oscylował wokół liczby $\ln(1+x)$ (dla dowolnego $x > 0$), a szereg (2) oscylował wokół funkcji $F(x)$ określonej w 2) (także dla $x > 0$).

Zauważmy, że gdy szereg (4) jest rozbieżny, może on oscylować jednocześnie wokół nieskończonie wielu liczb A . Na przykład szereg

$$1 - 2 + 2 - 2 + 2 - \dots$$

o sumach częściowych $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ oscyluje oczywiście wokół każdej liczby z przedziału $(-1, 1)$.

Dzięki własności szeregu oscylującego sformułowanej w definicji (b) można z niego często zrobić doskonały środek do obliczenia przyblizonej wartości liczby A , widać jednak wyraźnie, że nie każdy szereg oscylujący wokół liczby A nadaje się do tego celu.

Weźmy teraz zamiast szeregu (4) o wyrazach stałych i liczby A szereg funkcyjny

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots$$

i pewną funkcję $A(x)$. Niech funkcje $a_n(x)$ i $A(x)$ będą określone w tym samym obszarze X . Podana przed chwilą definicja szeregu liczbowego oscylującego wokół danej liczby daje się w sposób naturalny uogólnić na przypadek szeregu funkcyjnego oscylującego wokół danej funkcji. Nie zatrzymując się na tym podamy nową definicję dotyczącą przypadku, gdy podobnie jak w (6) wyrazy szeregu zawierają jeszcze parametr x , którego obszar zmienności ma jako punkt skupienia skończoną lub nieskończoną liczbę ω . Jak zwykle określmy resztę $r_n(x)$ za pomocą równości

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + r_n(x).$$

(c) Szereg (6) nazywamy rozwinięciem asymptotycznym funkcji $A(x)$ w pobliżu $x = \omega$, jeżeli dla dowolnego n

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{r_n(x)}{a_n(x)} = 0 \text{ (2).}$$

⁽¹⁾ Będziemy używali nazwy „oscylujący” nawet wtedy, gdy warunki tej definicji będą spełnione tylko dla dostatecznie dużych n (powiedzmy dla $n > n_0 > 1$).

⁽²⁾ Zakładamy przy tym naturalnie, że wyrazy $a_n(x)$ są różne od 0 przynajmniej dla x dostatecznie bliskich ω .

Fakt ten zapisujemy tak:

$$A(x) \sim a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + \dots$$

Z uwagi na to, że

$$r_n(x) = a_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$$

i

$$\frac{r_n(x)}{a_n(x)} = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \left[1 + \frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)} \right]$$

otrzymujemy jako wniosek z (7) równość

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0.$$

Łatwo udowodnimy twierdzenie:

Jeżeli szereg (6) oscyluje wokół funkcji $A(x)$ i spełnia warunek (8), to szereg ten jest także rozwinięciem asymptotycznym funkcji $A(x)$ w pobliżu $x = \infty$.

Rzeczywiście, mamy

$$|r_n(x)| \leq |a_{n+1}(x)|,$$

więc

$$\left| \frac{r_n(x)}{a_n(x)} \right| < \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right|$$

i z (8) wynika już bezpośrednio (7).

Obydwa szeregi (1) i (2) przytoczone poprzednio jako przykłady są rozwinięciami asymptotycznymi odpowiednich funkcji, pierwszy w pobliżu $x = 0$, a drugi w pobliżu $x = \infty$.

W toku dalszego wykładu będziemy mieli z reguły do czynienia z szeregiem asymptotycznym postaci

$$(9) \quad A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots$$

w pobliżu $x = \infty$. Przypominamy, że sens podanej zależności polega tylko na tym, że dla dowolnego ustalonego n jest zawsze

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

lub dokładniej

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_n}{x^n} \right] x^n = 0.$$

A więc dla „dużych” x zachodzi wzór przybliżony

$$A(x) \approx a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n},$$

którego dokładność określa równość (10).

Jeżeli napiszemy tę równość w postaci

$$(10^*) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \right] \cdot x^n = a_n,$$

to wyraźnie dostrzeżemy jednoznaczność rozwinięcia asymptotycznego postaci (9) funkcji $A(x)$, oczywiście przy założeniu, że funkcja ta w ogóle takie rozwinięcie posiada. Wszystkie współczynniki a_n wyznaczamy kolejno ze wzoru (10*) w sposób zupełnie jednoznaczny.

Twierdzenie odwrotne nie jest jednak prawdziwe: *różne funkcje mogą mieć to samo rozwinięcie asymptotyczne.*

Wiadomo na przykład, że $e^{-x} x^n \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow \infty$. Stąd widać oczywiście, że wszystkie funkcje postaci $A(x) + Ce^{-x}$ mają takie same rozwinięcie asymptotyczne jak funkcja $A(x)$.

Uwaga. Czasem będziemy dla wygody pisali

$$B(x) \sim \varphi(x) + \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n},$$

gdzie $B(x)$, $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcjami określonymi w \mathfrak{X} , rozumiejąc przez to, że

$$\frac{B(x) - \varphi(x)}{\psi(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

464. Podstawowe własności rozwinięć asymptotycznych. Przez rozwinięcia asymptotyczne będziemy zarówno teraz jak i dalej rozumieli rozwinięcia postaci (9) ⁽¹⁾. Zakładamy, że wszystkie rozpatrywane funkcje są określone w obszarze \mathfrak{X} z punktem skupienia $+\infty$.

1º Jeżeli

$$(11) \quad A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n},$$

to oczywiście także

$$A(x) \pm B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{x^n},$$

tzn. *rozwinięcia asymptotyczne można dodawać i odejmować wyraz za wyrazem*.

2º Wykażemy teraz, że rozwinięcie asymptotyczne iloczynu $A(x) \cdot B(x)$ można otrzymać przez formalne pomnożenie przez siebie według reguły Cauchy'ego rozwinięć (11).

Dla dowolnego n mamy

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

i

$$B(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Mnożąc przez siebie otrzymujemy

$$A(x) \cdot B(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

gdzie

$$c_m = \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i}.$$

Jest to równoważne z

$$A(x) \cdot B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

co należało udowodnić.

⁽¹⁾ Teorię takich szeregów asymptotycznych rozwinał Henri Poincaré, który podał jej ważniejsze zastosowania zarówno w teorii równań różniczkowych, jak też i w mechanice nieba.

Jeżeli utożsamimy $B(x)$ z $A(x)$, to otrzymamy rozwinięcie kwadratu $[A(x)]^2$. Analogicznie możemy otrzymać rozwinięcie asymptotyczne funkcji $[A(x)]^m$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną.

3° Niech teraz dana będzie pewna funkcja $F(y)$ analityczna w punkcie $y = 0$, tzn. funkcja, którą można w otoczeniu tego punktu rozwinąć w szereg potęgowy

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m y^m = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \dots + \beta_m y^m + \dots$$

Rozpatrzmy poza tym funkcję $A(x)$, która ma rozwinięcie asymptotyczne bez wyrazu wolnego:

$$(12) \quad A(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots,$$

a więc $A(x) \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow \infty$. W tym przypadku ma sens funkcja złożona

$$F(A(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m [A(x)]^m,$$

przynajmniej dla dostatecznie dużych x .

Funkcja $F(A(x))$ ma rozwinięcie asymptotyczne, które możemy otrzymać z poprzedniego rozwinięcia, gdy zamiast każdej z potęg $[A(x)]^m$ podstawimy jej rozwinięcie asymptotyczne i dokonamy w sposób formalny redukcji wyrazów podobnych [porównaj 446].

Zauważmy przede wszystkim, że w otoczeniu punktu $y = 0$ funkcja $F(y)$ ma ciągłą (a więc również ograniczoną) pochodną i dla dowolnych dwóch punktów y i \bar{y} tego otoczenia jest spełniona nierówność

$$|F(\bar{y}) - F(y)| < L \cdot |\bar{y} - y| \quad (L = \text{const}).$$

Oznaczmy n -tą sumę częściową szeregu (12) przez $A_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

Przy ustalonym n obie funkcje $A(x)$ i $A_n(x)$ trafią dla dostatecznie dużych x do wspomnianego otoczenia a więc

$$|x^n [F(A(x)) - F(A_n(x))]| < L x^n |A(x) - A_n(x)| = L x^n |r_n(x)| \rightarrow 0,$$

gdy $x \rightarrow \infty$, i

$$F(A(x)) = F(A_n(x)) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Z drugiej strony, na podstawie znanego już nam twierdzenia z ustępu 446, mamy dla dostatecznie dużych x

$$\begin{aligned} F(A_n(x)) &= \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (A_n(x))^m = \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{aligned}$$

i z uwagi na poprzednią zależność możemy taką samą równość napisać dla $F(A(x))$, co dowodzi prawdziwości rozwinięcia asymptotycznego

$$F(A(x)) \sim \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \dots,$$

o które chodziło.

Jeżeli weźmiemy na przykład

$$F(y) = e^y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!},$$

to okazuje się, że

$$e^{A(x)} \sim 1 + \frac{a_1}{x} + \left[\frac{a_2}{1!} + \frac{a_1^2}{2!} \right] \frac{1}{x^2} + \left[\frac{a_3}{1!} + \frac{2a_1 a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} \right] \frac{1}{x^3} + \dots + \left[\frac{a_n}{1!} + \dots + \frac{a_1^n}{n!} \right] \frac{1}{x^n} + \dots$$

Ciekawym zastosowaniem tego twierdzenia o podstawianiu szeregu do szeregu jest (podobnie jak w przypadku zbieżnych szeregów potęgowych, 448) dzielenie rozwinięć asymptotycznych funkcji $B(x)$ i $A(x)$ przy założeniu, że wyraz wolny a_0 drugiego z nich jest różny od zera. Ponieważ w porównaniu z ustępem 448 nie trzeba tu używać żadnych nowych idei, nie będziemy się na tym zatrzymywali.

4º Przejedźmy do całkowania rozwinięcia asymptotycznego.

Niech funkcja $A(x)$ będzie ciągła w przedziale $X = (a, +\infty)$ i ma rozwinięcie asymptotyczne

$$(13) \quad A(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots,$$

rozpoczynające się od wyrazu zawierającego $1/x^2$. Istnieje wtedy skończona całka tej funkcji w granicach od dowolnego $x > a$ do $+\infty$ ⁽¹⁾ i całka ta, jako funkcja x , ma rozwinięcie asymptotyczne

$$(14) \quad \int_x^{\infty} A(x) dx \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \dots$$

które otrzymujemy z rozwinięcia (13) całkując je w sposób formalny wyraz za wyrazem.

Rzeczywiście, przyjmując, że

$$A_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{x^k}, \quad r_n(x) = A(x) - A_n(x),$$

mamy dla dowolnie obranego $\epsilon > 0$ i dowolnego ustalonego n

$$(15) \quad x^n |r_n(x)| < \epsilon,$$

jeżeli tylko x będzie dostatecznie duże.

Jeżeli $X > x$, to

$$\int_x^X A(x) dx = \int_x^X A_n(x) dx + \int_x^X r_n(x) dx = \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k-1} \left(\frac{1}{x^{k-1}} - \frac{1}{X^{k-1}} \right) + \int_x^X r_n(x) dx.$$

Dla $X \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$(16) \quad \int_x^{\infty} A(x) dx = \frac{a_2}{1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + R_{n-1}(x),$$

gdzie

$$R_{n-1}(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_x^X r_n(x) dx = \int_x^{\infty} r_n(x) dx.$$

(1) Przypominamy [patrz str. 244], że całkę funkcji $f(x)$ w granicach od a do $+\infty$ nazywamy granicę

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Ponieważ z uwagi na (15) mamy dla dostatecznie dużych x

$$\left| \int_x^X r_n(x) dx \right| < \int_x^X |r_n(x)| dx < \varepsilon \int_x^X \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-1} \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}} \right),$$

więc przechodząc do granicy, gdy $X \rightarrow \infty$, mamy (dla wskazanych wyżej x)

$$|R_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{x^{n-1}},$$

więc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1} R_{n-1}(x) = 0,$$

co wraz z równością (16) dowodzi prawdziwości rozwinięcia asymptotycznego (14).

Można wykazać, że jeśli rozwinięcie asymptotyczne funkcji $A(x)$ zawiera wyraz a_1/x (gdzie $a_1 \neq 0$), to funkcja ta nie może już mieć całki skończonej w granicach od x do $+\infty$ [patrz niżej 474].

Uwaga. Warto zauważać, że na ogół formalne różniczkowanie wyraz za wyrazem jest niedopuszczalne. Rozpatrzmy dla przykładu funkcję $F(x) = e^{-x} \sin e^x$. Ponieważ dla dowolnego n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \cdot x^n = 0,$$

więc $F(x) \sim 0$, tzn. rozwinięcie asymptotyczne funkcji $F(x)$ składa się z zer. Tymczasem w przypadku pochodnej $F'(x) = -e^{-x} \sin e^x + e^{-x} \cos e^x$ rozwinięcie takie jest na ogół niemożliwe, gdyż nie istnieje nawet granica $\lim F'(x)$.

465. Wyprowadzenie wzoru Eulera-Maclaurina. Wzór ten odgrywa ważną rolę w analizie. W szczególności korzystamy z niego często, gdy chcemy otrzymać konkretne rozwinięcia oscylujące lub asymptotyczne. Wyprowadzimy ten wzór i wskażemy jego zastosowania.

Wyjdziemy ze wzoru Taylora z resztą w postaci całki oznaczonej [318] ⁽¹⁾

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0) + \rho,$$

gdzie reszta ma postać

$$\rho = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_0+h} f^{(m+1)}(t) (x_0 + h - t)^m dt = \int_0^h f^{(m+1)}(x_0 + h - z) \frac{z^m}{m!} dz.$$

Weźmiemy teraz zamiast f kolejno funkcje

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad f(x), \quad hf'(x), \quad h^2 f''(x), \quad \dots, \quad h^{m-2} f^{(m-2)}(x),$$

zastępując równocześnie m przez

$$m, \quad m-1, \quad m-2, \quad m-3, \quad \dots, \quad 1,$$

⁽¹⁾ Zarówno teraz jak i później będziemy zakładali bez specjalnych zastrzeżeń istnienie i ciągłość wszystkich wypisanych pochodnych.

Otrzymujemy układ m równości:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt &= f(x_0) + \frac{h}{2!} f'(x_0) + \frac{h^2}{3!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_0, & 1 \\
 \Delta f(x_0) &= hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_1, & A_1 \\
 h\Delta f'(x_0) &= h^2 f''(x_0) + \dots + \frac{h^{m-1}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_2, & A_2 \\
 \dots &\dots & \dots \\
 h^{m-2} \Delta f^{m-2}(x_0) &= \frac{h^{m-1}}{1!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_{m-1} & A_{m-1}
 \end{aligned}$$

Wyrugujmy z tego układu wszystkie pochodne po prawych stronach. Dodamy w tym celu wyraz za wyrazem pierwszą równość do wszystkich pozostałych pomnożonych odpowiednio przez liczby A_1, A_2, \dots, A_{m-1} , które obieramy w ten sposób, żeby było

$$(17) \quad \frac{1}{2!} + A_1 = 0, \quad \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} A_1 + A_2 = 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m-1)!} A_1 + \frac{1}{(m-2)!} A_2 + \dots + A_{m-1} = 0.$$

W wyniku otrzymujemy

$$(18) \quad f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt + A_1 \Delta f(x_0) + A_2 h\Delta f'(x_0) + \dots + A_{m-1} h^{m-2} \Delta f^{(m-2)}(x_0) + r,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 r &= -\rho_0 - A_1 \rho_1 - A_2 \rho_2 - \dots - A_{m-1} \rho_{m-3} = \\
 &= -\frac{1}{h} \int_0^h f^{(m)}(x_0+h-z) \left\{ \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{hz^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1} h^{m-1} z \right\} dz
 \end{aligned}$$

lub krócej

$$(18^*) \quad r = -\frac{1}{h} \int_0^h f^{(m)}(x_0+h-z) \varphi_m(z) dz,$$

gdzie przyjęliśmy

$$(19) \quad \varphi_m(z) = \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{hz^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1} h^{m-1} z.$$

Oczywiście z układu równań (17) możemy w sposób jednoznaczny obliczyć kolejno współczynniki A_1, A_2, \dots, A_{m-1} i to niezależnie od wyboru funkcji f i liczb x_0 i h . Nawiast mówiąc, współczynniki te są już nam znane — są to współczynniki $\frac{\beta_k}{k!}$ rozwinięcia funkcji $\frac{x}{e^x - 1}$ według potęg x [449, (12)]. Rzeczywiście, gdy przypomnimy sobie postać symbolicznych równań

$$(\beta+1)^k - \beta^k = 0,$$

którym czynią zadość liczby β , to łatwo się przekonamy, że właśnie liczby $\frac{\beta_k}{k!}$ są rozwiązaniami równań

(17). Z tego, co powiedzieliśmy w ustępie 449 o liczbach β_k , widać, że

$$(20) A_1 = \frac{\beta_1}{1!} = -\frac{1}{2}, \quad A_{2p-1} = \frac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!} = 0 \quad \text{dla } p > 1, \quad A_{2p} = \frac{\beta_{2p}}{(2p)!} = (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!},$$

gdzie β_p jest p -tą liczbą Bernoulliego.

Funkcję $f(x)$ będziemy rozpatrywać w przedziale skończonym $\langle a, b \rangle$. Przyjmijmy $h = \frac{b-a}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną. Biorąc za x_0 kolejno liczby

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \quad \dots, \quad a+(n-1)h = b-h$$

napiszmy równości postaci (18) z resztą postaci (18*) dla każdego przedziału $\langle a+(i-1)h, a+ih \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) z osobna, a następnie dodajmy wszystkie te równości wyraz za wyrazem. Otrzymamy

$$(21) \quad \sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h) = \sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1[f(b)-f(a)] + A_2 h [f'(b)-f'(a)] + \dots + A_{m-1} h^{m-2} [f^{(m-2)}(b)-f^{(m-2)}(a)] + R,$$

gdzie reszta

$$(21') \quad R = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \int_0^h f^{(m)}(a+ih-z) \varphi_m(z) dz = \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h f^{(m)}(x+h-z) \varphi_m(z) dz.$$

Jest to właśnie wzór Eulera-Maclaurina i przy tym z resztą (która oczywiście nie została podana przez autorów). Liczba m może przyjmować różne wartości, poczynając od 2.

466. Badanie reszty. Zrobimy najpierw pewne uwagi o funkcji $\varphi_m(z)$.

Przede wszystkim, różniczkując (19), otrzymujemy

$$(22) \quad \varphi'_m(x) = \varphi_{m-1}(z) + A_{m-1} h^{m-1},$$

co widać od razu z samej postaci wielomianu $\varphi_m(z)$ [patrz (19)].

Następnie, dla dowolnego $m \geq 2$ mamy

$$(23) \quad \varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(h) = 0,$$

co wynika z ostatniej równości układu (17).

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Funkcja $\varphi_{2k}(z)$ (parzystego rzędu) nie może przyjmować w przedziale $\langle 0, h \rangle$ żadnej wartości więcej niż dwa razy.

Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy jej pochodna [patrz (23)] $\varphi'_{2k}(z) = \varphi_{2k-1}(z)$ (przecież $A_{2k-1} = 0$) przyjmowałaby wewnątrz przedziału — według twierdzenia Rolle'a — wartość 0 co najmniej dwukrotnie. A więc pochodna $\varphi'_{2k-1}(z) = \varphi_{2k-2}(z) + A_{2k-2}h^{2k-2}$ przyjmowałaby według tego samego twierdzenia wartość 0 wewnątrz przedziału $\langle 0, h \rangle$ co najmniej trzy razy, tzn. funkcja $\varphi_{2k-2}(z)$ przyjmowałaby wewnątrz tego przedziału tę samą wartość — $A_{2k-2}h^{2k-2}$ co najmniej trzy razy. Tak obniżając stopniowo rzad funkcji o dwie jednostki doszliśmy do wniosku, że funkcja $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$ (wielomian kwadratowy) przyjmowałaby pewną wartość co najmniej trzy razy, co jest niemożliwe. Twierdzenie nasze zostało udowodnione.

Wynika z niego ważny wniosek: funkcja $\varphi_{2k}(z)$ zachowuje znak w przedziale $(0, h)$, bo przyjmując wartość 0 na końcach przedziału [(23)] nie może już przyjąć wewnątrz przedziału wartości 0. Łatwo ustalić, jaki to właśnie znak zachowuje funkcja $\varphi_{2k}(z)$: dla małych wartości z (a więc wszędzie pomiędzy 0 i h) wielomian ten ma znak wyrazu najniższego stopnia $A_{2k-2}h^{2k-2}z^2$ ($A_{2k-1} = 0$), tzn. znak $(-1)^k$, bo $A_{2k-2} =$

$$= (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}.$$

Dwie kolejne funkcje parzystego rzędu $\varphi_{2k}(z)$ i $\varphi_{2k+2}(z)$ zachowują więc każda z osobna swój określony znak w $(0, h)$, lecz znaki te są przeciwe. Uwaga ta zaraz się nam przyda.

Powróćmy do reszty R . Założymy teraz, że m jest liczbą parzystą: $m = 2k$, i że tym razem pochodne $f^{(2k)}(z)$ i $f^{(2k+2)}(z)$ są w przedziale $\langle a, b \rangle$ obie dodatnie lub obie ujemne.

Ze wzoru na R po dwukrotnym całkowaniu przez części i uwzględnieniu (22) i (23) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z) dz = \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h (A_{2k} h^{2k} - \varphi_{2k+1}(z)) f^{(2k)}(x+h-z) dz = \\ &= \frac{1}{h} A_{2k} h^{2k} \sum_a^b [f^{(2k-1)}(x+h) - f^{(2k-1)}(x)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+1}(z) f^{(2k+1)}(x+h-z) dz = \\ &= A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi'_{2k+2}(z) f^{(2k+1)}(x+h-z) dz = \\ &= A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+2}(z) f^{(2k+2)}(x+h-z) dz. \end{aligned}$$

Ponieważ podkreślone sumy całek, jak to wynika z założeń, mają znaki przeciwe, więc pierwsza z nich ma ten sam znak co wyrażenie

$$A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

i jest mniejsza od niego co do bezwzględnej wartości. A więc ostatecznie

$$(21^*) \quad R = R_{2k} = \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] = \\ = \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \quad (0 < \theta < 1).$$

Jeżeli założymy teraz, że wszystkie pochodne $f^{(2k)}(z)$ parzystego rzędu zachowują w przedziale $\langle a, b \rangle$ ten sam znak i zamiast skończonego wzoru (21) napiszemy szereg nieskończony, to po uwzględnieniu wartości (20) współczynników A_m otrzymamy szereg nieskończony Eulera-Maclaurina

$$(24) \quad \sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] + \frac{B_1}{2!} h [f'(b) - f'(a)] - \frac{B_2}{4!} h^3 [f'''(b) - f'''(a)] + \dots \\ \dots + (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!} h^{2k-3} [f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)] + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \dots$$

Jest to na ogół szereg rozbieżny (a więc znak = został tu postawiony umownie!). Z uwagi na zrobione założenia jego kolejne wyrazy zmieniają znak poczynając przynajmniej od trzeciego wyrazu. Uwzględniając ponadto (21*) można powiedzieć, że szereg ten oscyluje wokół sumy $\sum_a^b f(x)$ stojącej po lewej stronie

równości. Jeżeli przestawimy teraz tę sumę z całką $\frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx$, zmieniając przy tym znaki pozostałych wyrazów na przeciwe, otrzymamy szereg oscylujący wokół tej całki.

Sumy częściowe tych szeregów pozwalają czasem obliczyć sumę \sum_a^b z dużą dokładnością, gdy znamy całkę lub obliczyć całkę $\frac{1}{h} \int_a^b$, gdy znamy sumę. Oczywiście podstawową rolę w tym odgrywa fakt, że znamy z góry oszacowanie reszty!

477. Przykłady obliczeń z zastosowaniem wzoru Eulera-Maclaurina

1) Postawmy sobie za zadanie przybliżone obliczenie wartości sumy poniższych 900 (!) składników

$$\sum_{i=100}^{1000} \frac{1}{i} = \sum_{100}^{1000} \frac{1}{x}$$

przyjmując $f(z) = 1/z$, $a = 100$, $b = 1000$, $h = 1$. Ponieważ

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{z^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{z^4}, \quad f^{(4)}(z) = \frac{24}{z^5}, \quad f^{(5)}(z) = -\frac{120}{z^6}$$

i ogólnie

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{z^{2k+1}},$$

więc warunki na pochodne parzystego rzędu są spełnione.

Przedłużamy rozwinięcie do wyrazu zawierającego f''' , a więc do reszty wejdzie już $f^{(5)}$. Ze wzoru Eulera-Maclaurina:

$$\begin{aligned} \sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} &= \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2} \right) - \\ &\quad - \frac{6}{720} \left(\frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4} \right) + \theta \frac{12}{3024} \left(\frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6} \right) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Ponieważ jest

$$\begin{aligned} \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} &= \ln 10 = 2,302585092994045 \dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000} \right) &= 0,0045 \\ \frac{1}{12} \left(\frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2} \right) &= 0,000000825 \\ -\frac{1}{720} \left(\frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4} \right) &= -0,000000000083325 \\ &\hline 2,307093342910720 \end{aligned}$$

$$\theta \frac{12}{3024} \left(\frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6} \right) < 0,000000000000004,$$

więc z dokładnością do $\frac{1}{10^{14}}$ możemy przyjąć

$$\sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} = 2,30709334291072.$$

2) Obliczmy teraz $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Tutaj $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $a = 0$, $b = 1$. Przyjmijmy

$h = \frac{1}{10}$ ($n = 10$). Mamy

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{(1+z)^4},$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{24}{(1+z)^5}, \quad f^{(5)}(z) = -\frac{120}{(1+z)^6}$$

i ogólnie

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{(1+z)^{2k}},$$

a więc warunki nasze są spełnione. Wykorzystajmy zmodyfikowany wzór Eulera-Maclaurina obcinając go tym razem na wyrazie zawierającym f''' :

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \\ - \frac{1}{20} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{1200} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{6}{7200000} \left(1 - \frac{1}{16}\right) - \theta \frac{12}{3024000000} \left(1 - \frac{1}{64}\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Znajdujemy następnie sumy:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} = 0,718771403$$

$$- \frac{1}{20} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -0,025$$

$$- \frac{1}{1200} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -0,000625$$

$$\frac{6}{7200000} \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 0,000000781$$

$$0,693147184$$

$$\theta \cdot \frac{12}{3024000000} \left(1 - \frac{1}{164}\right) < 0,000000004.$$

A więc otrzymujemy z dokładnością do $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,69314718.$$

3) Pokażemy wreszcie, jak można wykorzystać wzór Eulera-Maclaurina do przybliżonego obliczenia sumy szeregu nieskończonego, co prawda zbieżnego, lecz wolno. Jako przykład weźmiemy szereg

$$\pi^2 = 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Przymijmy w ogólnym wzorze (21) [i (21*)]

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad h = 1, \quad b = a + nh,$$

gdzie a i n są na razie dowolnymi liczbami naturalnymi. Całkę i pochodne obliczamy łatwo. Podstawiając

zamiast A_m ich wartości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+i)^2} = & - \left[\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+n)^2} - \frac{1}{a^2} \right] - B_1 \left[\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3} \right] + \\ & + B_2 \left[\frac{1}{(a+n)^4} - \frac{1}{a^4} \right] - \dots - (-1)^{k-2} B_{k-1} \left[\frac{1}{(a+n)^{2k-1}} - \frac{1}{a^{2k-1}} \right] - \\ & - \theta_n (-1)^{k-1} B_k \left[\frac{1}{(a+n)^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right] \quad (0 < \theta_n < 1). \end{aligned}$$

Przejdzmy teraz do granicy, gdy $n \rightarrow +\infty$, przy ustalonych a i k . Łatwo się przekonać, że czynnik θ_n także dąży przy tym do pewnej granicy θ , $0 < \theta < 1$, a więc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+i)^2} = & \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + B_1 \cdot \frac{1}{a^3} - B_2 \cdot \frac{1}{a^5} + B_3 \cdot \frac{1}{a^7} - \dots \\ & \dots + (-1)^{k-2} B_{k-1} \cdot \frac{1}{a^{2k-1}} + \theta (-1)^{k-1} B_k \cdot \frac{1}{a^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Obierzmy teraz konkretnie $a = 10$ i $k = 10$ i skorzystajmy ze znanych wartości liczb Bernoulliego [449]. Otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \pi^2 = 6 \sum_{i=1}^9 \frac{1}{i^2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{5 \cdot 10^5} + \frac{1}{7 \cdot 10^7} - \frac{1}{5 \cdot 10^9} + \\ + \frac{5}{11 \cdot 10^{11}} - \frac{691}{455 \cdot 10^{13}} + \frac{7}{10^{15}} - \frac{3617}{85 \cdot 10^{17}} + \frac{43867}{133 \cdot 10^{19}} - \theta \frac{174611}{55 \cdot 10^{21}}. \end{aligned}$$

Obliczenia przeprowadzimy z 19 cyframi po przecinku

$$\begin{aligned} 6 \sum_{i=1}^9 \frac{1}{i^2} &= 9,2386063869992441421 \\ \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} &= 0,631 \\ - \frac{1}{5 \cdot 10^5} &= -0,000002 \\ \frac{1}{7 \cdot 10^7} &= 0,0000000142857142857 \\ - \frac{1}{5 \cdot 10^9} &= -0,00000000002 \\ \frac{5}{11 \cdot 10^{11}} &= 0,0000000000045454545 \\ - \frac{691}{455 \cdot 10^{13}} &= -0,00000000000001518681 \\ \frac{7}{10^{15}} &= 0,0000000000000000007 \\ - \frac{3617}{85 \cdot 10^{17}} &= -0,00000000000000004255 \\ \frac{43867}{133 \cdot 10^{19}} &= 0,0000000000000000330 \\ \hline & 9,8696044010893586217 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu poprawek na zaokrąglenie i resztę otrzymujemy

$$\pi^2 = 9,86960440108935862$$

z dokładnością do $\frac{1}{2 \cdot 10^{17}}$.

Jest to przykład bardzo pouczający. Obliczyliśmy za pomocą wzoru Eulera-Maclaurina z bardzo dużą dokładnością sumę π^2 szeregu zbieżnego, posługując się w gruncie rzeczy sumą częściową szeregu rozbieżnego oscylującego wokół liczby π^2 . Gdybyśmy chcieli otrzymać to samo, korzystając z samego szeregu zbieżnego, wówczas musielibyśmy wziąć ponad miliard wyrazów szeregu.

468. Inna postać wzoru Eulera-Maclaurina. Wróćmy do wzorów (21) i (21'), lecz założymy, że istnieją pochodne wszystkich rzędów funkcji $f(x)$ w przedziale nieskończonym $(a, +\infty)$ i spełniają warunki:

- a) wszystkie pochodne $f^{(2k)}(z)$ rzędu parzystego mają w tym przedziale jeden i ten sam znak.
- b) wszystkie pochodne $f^{(2k-1)}(z)$ nieparzystego rzędu dążą do 0, gdy $z \rightarrow +\infty$.

Przypuśćmy, że m jest liczbą parzystą, $m = 2k$. Liczby a i h ustalimy, a $b = a + nh$ uważajmy za zmienne (wraz z n). Przedstawmy teraz resztę R [patrz (21')] w postaci następującej:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz + \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k} f^{(2k)}(a + ih - z) dz &\equiv \\ &\equiv -\frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz + \frac{1}{h} \sum_{b}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz. \end{aligned}$$

Łącząc pierwszą z tych sum ze wszystkimi wyrazami wzoru (21) zawierającymi a w jedną stałą

$$C_k = -A_1 f(a) - A_2 h f'(a) - \dots - A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(a) - \frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_0^h$$

wyraźnie niezależną od b , napiszemy wzór (21) tak:

$$(25) \quad \sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \dots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + R',$$

gdzie

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b + ih - z) dz \equiv \\ &\equiv \frac{1}{h} \sum_{b}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz. \end{aligned}$$

Aby uzasadnić te przekształcenia, wystarczy tylko przekonać się o zbieżności wykorzystanych tu szeregów nieskończonych. Zaczniemy od szeregu $\frac{1}{h} \sum_n^{\infty}$. Z (24) wynika, że

$$0 < \frac{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz}{A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(a + nh)]} < 1.$$

Z własności funkcji $\varphi_{2k}(z)$ [466] wynika po uwzględnieniu a), że wszystkie składniki licznika mają taki sam znak, zgodny ze znakiem mianownika. Stąd, przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ i uwzględniając b), wnioskujemy o zbieżności szeregu

$$\frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z) dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z) dz,$$

którego suma ma także ten sam znak, co wyrażenie $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(a)$ i jest co do wartości bezwzględnej nie większa od niego. Podstawiając w tych wzorach liczbę a zamiast b przekonamy się o zbieżności szeregu

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z) dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b+ih-z) dz,$$

jak również o tym, że jego suma ma taki sam znak jak wyrażenie $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b)$ i jest co do wartości bezwzględnej nie większa od niego.

A więc nie tylko przekonaliśmy się o zbieżności zastosowanych szeregów nieskończonych, lecz po drodze stwierdziliśmy, że resztę R' wzoru (25) można napisać w postaci

$$(25^*) \quad R' = \theta A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) = \theta (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k!} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) \quad (0 < \theta < 1).$$

Bardzo ciekawe, że stała C_k ze wzoru (25), która jak to wynikało ze sposobu jej konstrukcji, mogłaby zależeć od wskaźnika k , w rzeczywistości od k nie zależy. Aby się o tym przekonać, wystarczy porównać wzory (25) i (25*) z takimi samymi wzorami dla przypadku $k = 1$:

$$\sum_a^b f(x) = C_1 + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + A_1 f(b) + \bar{R}',$$

gdzie

$$\bar{R}' = \bar{\theta} \cdot A_2 h \cdot f'(b) \quad (0 < \bar{\theta} < 1).$$

Mamy

$$C_1 + \bar{\theta} A_2 h f'(b) = C_k + A_2 h f'(b) + \dots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + \theta A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b).$$

Jeżeli przejdziemy teraz do granicy przy $b \rightarrow \infty$, to po uwzględnieniu b) otrzymamy

$$C_k = C_1 = C.$$

Stała C , którą najnaturalniej nazwać *stałą Eulera-Maclaurina* funkcji $f(x)$, zależy nie tylko od tej funkcji, lecz także od wyboru a i h .

Uwaga. Przechodząc do granicy w nierównościach powinnibyśmy do znaków nierówności dołączyć znaki równości i pisać do czynnika θ z (25*) nierówność $0 < \theta < 1$.że $\theta \neq 0$, widać od razu, gdyż suma szeregu nieskończonego o wyrazach tego samego znaku nie może być równa zeru. Jeśli zaś założymy, że $\theta = 1$, to po zwiększeniu o jeden wskaźnika k we wzorze (25) otrzymamy $R' = 0$, co jak przed chwilą wykazaliśmy, jest niemożliwe. A więc w rzeczywistości $0 < \theta < 1$, tak jak pisaliśmy.

Zamiast sumy skończonej (25) napiszmy szereg nieskończony. Otrzymamy *szereg Eulera-Maclaurina* w postaci

$$\begin{aligned} \sum_a^b f(x) &= C + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} f(b) + \frac{B_1}{2!} h f'(b) - \frac{B_2}{4!} h^3 f'''(b) + \dots \\ &\dots + (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) + \dots \end{aligned}$$

(znak = ma tu także sens umowny!). Z uwagi na a) wszystkie pochodne $f^{(2k-1)}(b)$ zmieniają się wraz ze wzrostem b w tym samym kierunku, a ponieważ z b) wynika, że gdy $b \rightarrow \infty$, pochodne te dążą do 0, więc mają one wszystkie ten sam znak. Stąd [i z (25*)] wnioskujemy, że szereg Eulera-Maclaurina w nowej

postaci także oscyluje wokół sumy $\sum_a^b f(x)$ występującej po lewej stronie.

Uwaga. Wyjaśnimy na zakończenie, w jaki sposób można wyznaczyć wartość stałej C występującej w przedstawionym poprzednio rozwinięciu. Obierając pewną wartość $b > a$, dla której możemy łatwo obliczyć sumę i całkę, otrzymujemy szereg oscylujący wokół stałej C

$$C = \sum_a^b f(x) - \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} f(b) - \frac{B_1}{2!} h f'(b) + \frac{B_2}{4!} h^3 f'''(b) - \dots,$$

z którego w wielu przypadkach można obliczyć przybliżoną wartość C .

469. Wzór i szereg Stirlinga. Jako ważny przykład wykorzystania rozwinięć otrzymanych w poprzednim ustępie podamy ich zastosowanie do obliczenia liczby

$$\ln(n!) = \ln n + \sum_{i=1}^n \ln i.$$

Biorąc $a = 1$, $h = 1$ i $b = n$ (po zastąpieniu n przez $n-1$) przyjmiemy

$$f(z) = \ln z, \quad \text{skąd} \quad f^{(m)}(z) = (-1)^{m-2} \frac{(m-1)!}{z^m},$$

a więc warunki a) i b) są spełnione. Otrzymujemy w ten sposób *rozwinięcie asymptotyczne* $\ln(n!)$ (1); (26)

$$\ln(n!) \sim C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) 2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \dots$$

Jest to tak zwany *szereg Stirlinga*, jest on wyraźnie rozbieżny, gdyż wartość bezwzględna jego wyrazu ogólnego [449], która wynosi $\frac{s_{2k}}{2\pi^2 n} \cdot \frac{(2k-2)!}{(2\pi n)^{2k-2}}$, dąży do ∞ .

Z rozwinięcia asymptotycznego $\ln(n!)$ możemy otrzymać rozwinięcie samej silni, jak to widzieliśmy w ustępie 464, 3º. A mianowicie, podstawiając zamiast współczynników B_k ich wartości liczbowe, mamy

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left\{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right\}.$$

Gdy obetniemy szereg (26) zadowalając się napisanymi wyrazami, lecz dodamy resztę, to otrzymamy *wzór Stirlinga*

$$(27) \quad \ln(n!) = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) 2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \theta(-1)^k \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{n^{2k+1}},$$

który, jak zobaczymy, jest już całkiem dogodny dla rachunków przybliżonych.

Przyjmując $k = 1$ otrzymujemy prosty i ważny przypadek szczególny wzoru Stirlinga

$$\ln(n!) = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{\theta}{12n};$$

piszemy go zwykle w postaci

$$n! = e^C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/12n}.$$

(1) Do sumy logarytmów dodajemy napisany osobno $\ln n$. Liczba 1 otrzymana przy całkowaniu jako składnik została włączona do C .

Wzór ten został już wyprowadzony w inny sposób w ustępie 406. Tam też obliczyliśmy, że $e^C = a = \sqrt{2\pi}$, a więc nieznana nam dotychczas stała C wynosi $\frac{1}{2} \ln 2\pi$.

Obliczymy dla przykładu $\ln(100!)$ z dziesięcioma cyframi po przecinku, korzystając ze wzoru (27) i przyjmując $k = 2$. Po uwzględnieniu tylko pięciu liczb:

$$\frac{1}{2} \ln 2\pi = 0,918938533204$$

$$(n + \frac{1}{2}) \ln n = 100,5 \ln 100 = 462,819603691803$$

$$-n = -100 = -100$$

$$\frac{B_1}{2n} = \frac{1}{1200} = 0,000833333333$$

$$-\frac{B_2}{12n^3} = -\frac{1}{36 \cdot 10^7} = -0,00000002777$$

otrzymamy wartość $\ln(100!)$ równą 363,7393755556 z dokładnością do $\frac{1}{2 \cdot 10^{10}}$ (z uwzględnieniem reszty i poprawek przy zaokrąglaniu). Dokładność przybliżenia możemy jeszcze znacznie zwiększyć, gdy weźmiemy więcej wyrazów i każdy z nich z większą dokładnością. Dokładność ta będzie wzrastała, w danym przypadku w przybliżeniu do 300 wyrazu (dopóki wyrazy będą małe co do wartości bezwzględnej).

Uwaga. Czytelnik widział na wielu przykładach, że za pomocą sum częściowych szeregów na pewno rozbieżnych możemy niekiedy obliczyć wartości potrzebnych nam wielkości i to nawet z dużą dokładnością. Zarówno dawniej, jak i teraz niektórzy autorzy nazywają takie szeregi „półzbieżnymi”. Wolelibyśmy jednak nie używać tego terminu, ponieważ mamy trudności z podaniem dla niego dostatecznie ogólnej, a jednocześnie ścisłej definicji.

ROZDZIAŁ XIII

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

§ 1. Całki niewłaściwe o granicach nieskończonych

470. Definicja całki o granicach nieskończonych. W rozdziale IX poznaliśmy pojęcie całki oznaczonej $\int_a^b f(x) dx$ w przypadku przedziału skończonego (a, b) i funkcji ograniczonej $f(x)$. Ten rozdział poświęcimy uogólnieniu tego pojęcia w różnych kierunkach. Zaczniemy od całki w przedziale nieskończonym.

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w przedziale $(a, +\infty)$, to znaczy dla $x \geq a$ i całkowalna w każdej skończonej części (a, A) tego przedziału; całka $\int_a^A f(x) dx$ ma więc sens dla dowolnego $A > a$.

Granicę tej całki (skończoną lub nieskończoną), gdy $A \rightarrow +\infty$, nazywamy całką funkcji $f(x)$ w granicach od a do $+\infty$ i oznaczamy symbolem

$$(1) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx .$$

W przypadku gdy ta granica jest skończona, mówimy, że całka (1) jest zbieżna, a funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale nieskończonym $(a, +\infty)$. Jeżeli granica (1) jest nieskończona, bądź w ogóle nie istnieje, to mówimy o całce, że jest ona rozbieżna. W odróżnieniu od zbadanej poprzednio całki w sensie właściwym, czyli całki właściwej, określoną przed chwilą całkę oznaczoną (1) nazywamy całką niewłaściwą⁽¹⁾.

PRZYKŁADY

1) Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest całkowalna w dowolnym przedziale skończonym $(0, A)$ ($A > 0$) i mamy

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^A = \arctg A .$$

Ponieważ całka ta ma dla $A \rightarrow +\infty$ granicę skońzoną $\pi/2$, więc całka jest zbieżna w przedziale od 0 do $+\infty$ i ma wartość

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A = \frac{\pi}{2} .$$

(1) Spotkaliśmy już pojęcie całki niewłaściwej w ustępie 373.

2) Zbadajmy zagadnienie, dla jakich wartości wykładnika $\lambda > 0$ istnieje całka niewłaściwa

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a > 0).$$

Niech $\lambda \neq 1$. Wówczas

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda} (A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}).$$

Gdy $A \rightarrow \infty$, wyrażenie to ma granicę ∞ lub równą liczbę skończonej $\frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$ w zależności od tego, czy $\lambda < 1$ czy też $\lambda > 1$. Gdy $\lambda = 1$, mamy

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^A = \ln A - \ln a,$$

gdy $A \rightarrow \infty$, otrzymujemy granicę ∞ .

A więc dla $\lambda > 1$ całka (2) jest zbieżna (i jest równa $\frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$), a dla $\lambda \leq 1$ rozbieżna.

Podobnie do (1) definiujemy także całkę funkcji $f(x)$ w przedziale od $-\infty$ do a :

$$(3) \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x) dx \quad (A' < a),$$

jak również całkę funkcji $f(x)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^A f(x) dx.$$

Zachowujemy tu też terminologię podaną przy definiowaniu całki (1).

W ostatnim przypadku biorąc dowolne a możemy przyjąć:

$$\int_{A'}^A f(x) dx = \int_{A'}^a f(x) dx + \int_a^A f(x) dx,$$

a więc istnienie granicy przy $A' \rightarrow -\infty$ i $A \rightarrow +\infty$ dla całki po lewej stronie jest równoważne istnieniu poszczególnych granic (1) i (3) całek występujących po prawej stronie wzoru ⁽¹⁾. Można więc określić całkę w granicach od $-\infty$ do $+\infty$ za pomocą równości

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

przy założeniu, że poszczególne całki po prawej stronie istnieją. Definicja ta nie zależy w istocie od wyboru punktu a .

⁽¹⁾ Z wyjątkiem przypadku, gdy obie te całki są równe nieskończoności, lecz mają różne znaki.

PRZYKŁADY:

$$3) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} (-\arctg A') = \frac{1}{2}\pi.$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 = \pi.$$

471. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego. W podanych wyżej przykładach obliczyliśmy najpierw całkę w przedziale skończonym za pomocą funkcji pierwotnej, a następnie przechodziliśmy do granicy. Można połączyć oba te kroki w jednym wzorze.

Niech, na przykład, będzie dana funkcja $f(x)$ określona w przedziale $(a, +\infty)$ i całkowalna w każdej skończonej jego części (a, A) . Jeśli funkcja $f(x)$ ma oprócz tego funkcję pierwotną $F(x)$ w całym przedziale $(a, +\infty)$, to na podstawie podstawowego wzoru rachunku całkowego [308]

$$\int_a^A f(x) dx = F(A) - F(a) = F(x)|_a^A$$

Widac stąd, że całka niewłaściwa (1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{A' \rightarrow \infty} F(A) = F(\infty).$$

Mamy wtedy

$$\int_a^\infty f(x) dx = F(\infty) - F(a) = F(x)|_a^\infty.$$

Analogicznie

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(x)|_{-\infty}^a, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = F(x)|_{-\infty}^\infty,$$

gdzie przez $F(-\infty)$ jest oznaczona granica $\lim_{A \rightarrow -\infty} F(A)$. Sama możliwość podstawienia granic całkowania związana z istnieniem i ze skończonością występującej w niej granicy świadczy już o zbieżności całki.

Przejdźmy do dalszych przykładów.

472. Przykłady

1) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx$ ($a > 0$). Ponieważ funkcją pierwotną jest

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax},$$

więc $F(0) = -b/(a^2 + b^2)$ i $F(\infty) = 0$, a zatem

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Podobnie

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$2) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc tg}(x\sqrt{2}-1) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$3) \int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{2/\pi}^\infty = 1.$$

4) $\int_0^\infty \sin x dx$. Funkcją pierwotną jest tu $-\cos x$, symbol $\cos x \Big|_0^\infty$ nie ma jednak sensu, bo $\cos x$ nie dąży do żadnej granicy gdy $x \rightarrow \infty$, a więc całka nie istnieje.

$$5) \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx.$$

Po całkowaniu przez części i przez rozkład na ułamki proste otrzymujemy funkcję pierwotną

$$F(x) = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Gdy $x \rightarrow 0$, wówczas $\lim F(x) = -\frac{1}{8}$. Tę właśnie granicę przyjmujemy jako wartość funkcji dla $x = 0$. Z drugiej strony, $F(+\infty) = 0$. A więc wartością całki jest $-\frac{1}{8}$.

6) Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły otrzymanej przez obrót hiperholi $xy = 1$ dookoła osi x , dla części wyznaczonej z nierówności $x \geq 1$.

Skończona część bryły odpowiadająca zmianie x od 1 do A ($A > 1$) ma objętość i pole powierzchni bocznej równe odpowiednio

$$V_A = \pi \int_1^A \frac{dx}{x^2}, \quad S_A = 2\pi \int_1^A \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Naturalne będzie przyjęcie objętości V i pola powierzchni bocznej S całej (rozciągniętej do nieskończoności) bryły jako granicy tych wielkości, czyli

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}, \quad S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Jednakże, podczas gdy pierwsza z tych całek jest zbieżna [470, 2)] i otrzymujemy dla objętości skończoną wartość π , druga jest rozbieżna, co wskazuje na to, że pole powierzchni bocznej jest nieskończone.

Aby się o tym przekonać wystarczy zauważyć, że

$$S_A > 2\pi \int_1^A \frac{dx}{x} = 2\pi \ln A$$

i S_A dąży do ∞ , gdy $A \rightarrow \infty$.

7) W początku współrzędnych O umieszczona jest masa m , która przyciąga punkt materialny M o masie 1, znajdujący się na osi x w odległości x od O , z siłą

$$F = \frac{m}{x^2}$$

(według prawa Newtona). Jaką pracę A wykona siła F przy przesunięciu punktu M wzdłuż osi x z punktu $x = r$ do nieskończoności?

Praca będzie oczywiście ujemna, ponieważ siła jest skierowana w przeciwną stronę niż ruch. Stosując do tego przypadku wzór (9) z ustępu 353, otrzymujemy

$$A = \int_r^\infty -\frac{m}{x^2} dx = \frac{m}{x} \Big|_r^\infty = -\frac{m}{r}.$$

Odwrotnie, przy przesunięciu punktu M z nieskończoności do punktu $x = r$, newtonowska siła przyciągania wykona pracę dodatnią m/r . Wielkość tę nazywamy *potencjałem rozpatrywanej siły w punkcie M* i jest ona miarą nagromadzonej w punkcie *energii potencjalnej*.

8) Mieliśmy wzór [354 (10)]:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

na pracę wykonaną przez gaz przy jego rozszerzaniu się od objętości V_1 do objętości V_2 ($V_2 > V_1$).

Dana jest pewna masa gazu idealnego zajmującego objętość V_1 pod ciśnieniem p_1 . Przypuśćmy, że gaz ten rozszerza się do nieskończoności adiabatycznie, tzn. bez wymiany ciepła z otoczeniem. Jak wiemy [361, 3)], w tych warunkach zachodzi wzór Poissona

$$pV^k = c \quad (\text{gdzie } k = \frac{c_p}{c} > 1).$$

Zatem praca, którą może wykonać gaz przy takim rozszerzaniu się, wynosi

$$A_{\max} = \int_{V_1}^\infty c V^{-k} dV = \frac{c}{1-k} \cdot \frac{1}{V^{k-1}} \Big|_{V_1}^\infty = \frac{c}{k-1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}}.$$

Biorąc pod uwagę, że $c = p_1 V_1^k$ i podstawiając to do otrzymanego wzoru, mamy ostatecznie

$$A_{\max} = \frac{p_1 V_1}{k-1}.$$

9) W zadaniu 8) z ustępu 356 otrzymaliśmy siłę F , z którą działa na jednostkę ładunku magnetycznego prąd płynący przez skończony prostoliniowy odcinek przewodnika:

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{3/2}} ds.$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy przewodnik jest nieskończony w obie strony, tzn. przyjmijmy $s_1 = -\infty$, $s_2 = +\infty$. Wtedy

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{3/2}} ds = \frac{I}{a} \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{a}.$$

Oczywiście, przewodnik nieskończony jest fikcją, lecz tym niemniej otrzymany wynik może się okazać pożyteczny: w przypadku bardzo długiego przewodnika wygodniej będzie rozpatrywać go w przybliżeniu jako nieskończony, gdyż uzyskujemy w ten sposób znaczne uproszczenie wzoru.

10) Gdy w obwodzie elektrycznym z samoindukcją wyłączymy prąd I_0 w momencie $t = 0$, to powstanie w nim prąd dodatkowy podlegający prawu

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

[patrz 359, 4) (a). Zachowujemy tu poprzednie oznaczenia]. Obliczmy całkowitą ilość ciepła Joula Q wydzielonego przez ten prąd.

Elementarna ilość ciepła w przedziale czasu $\langle t, t+dt \rangle$ jest oczywiście równa

$$dQ = I^2 R \cdot dt.$$

Sumując w całym przedziale nieskończonym, otrzymujemy

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt = RI_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{\frac{-2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Zauważmy, że chociaż praktycznie biorąc prąd będzie po skończonym czasie nieodczuwalny, mimo to, aby wyznaczyć całkowitą ilość energii elektrycznej, przechodzącej w ciepło, musimy całkować w przedziale nieskończonym.

473. Analogia z szeregiem. Najprostsze twierdzenia. Ograniczymy się teraz do całek postaci (1); wszystko co powiemy o nich, łatwo da się przenieść na przypadki (2) i (3). Będziemy przy tym zawsze zakładali, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie właściwym w przedziale od a do $A > a$, tak że zagadnienie dotyczy tylko całki niewłaściwej od a do ∞ .

Miedzy całkami niewłaściwymi $\int_a^\infty f(x) dx$ i szeregiem liczbowym $\sum_1^\infty a_n$ istnieje głęboka analogia, którą warto podkreślić.

Gdy proces sumowania względem n zastąpimy procesem całkowania względem x , to wystąpią analogie pojęć:

wyraz ogólny szeregu

$$a_n$$

suma częściowa szeregu

$$\sum_1^N a_n$$

suma szeregu

$$\sum_1^\infty a_n$$

jako granica sumy częściowej

dla $N \rightarrow \infty$

reszta szeregu

$$\sum_{N+1}^\infty a_n$$

funkcja podcałkowa

$$f(x)$$

całka właściwa

$$\int_a^A f(x) dx$$

całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

jako granica poprzedniej całki

dla $A \rightarrow \infty$

całka

$$\int_A^\infty f(x) dx$$

Podamy najprostsze twierdzenia o całkach niewłaściwych analogiczne do twierdzeń o szeregach z ustępu 364. Dowód ich, przy wykorzystaniu wymienionych analogii, pozostawiamy czytelnikowi.

1° Jeżeli całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, to zbieżna jest także całka $\int_A^{\infty} f(x) dx$ ($A > a$) i na odwrót. Ponadto

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{\infty} f(x) dx.$$

2° Gdy całka $\int_A^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, mamy

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} f(x) dx = 0.$$

3° Ze zbieżnością całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^{\infty} c \cdot f(x) dx$ ($c = \text{const}$), przy czym

$$\int_a^{\infty} c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Wreszcie:

4° Jeżeli zbieżne są obie całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ i $\int_a^{\infty} g(x) dx$, to zbieżna jest całka $\int_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$

$$\int_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \pm \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

474. Zbieżność całki w przypadku funkcji dodatniej. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia (nieujemna), to całka

$$(4) \quad \Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$$

jest funkcją monotonicznie rosnącą zmiennej A . Odpowiedź na pytanie o istnieniu jej granicy skończonej dla $A \rightarrow \infty$ otrzymuje się bardzo łatwo na podstawie twierdzenia o granicy funkcji monotonicznej [57].

Na to, żeby całka niewłaściwa (1) z funkcji dodatniej $f(x)$ była zbieżna, potrzeba i wystarcza, żeby całka (4) pozostała dla A rosnącego ograniczona od góry:

$$\int_a^A f(x) dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to całka (1) ma wartość ∞ [porównaj z 365].

Na tym oparte jest następujące twierdzenie porównawcze o całkach z funkcji dodatnich:

TWIERDZENIE 1. Jeżeli przynajmniej dla $x \geq A$ ($A \geq a$) zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$, to ze zbieżnością całki $\int_a^{\infty} g(x) dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ lub też, co na to samo wychodzi, z rozbieżnością $\int_a^{\infty} f(x) dx$ wynika rozbieżność $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

Dowód można skopiować z dowodu twierdzenia 1 z ustępu 366.

Często potrzebne jest następujące twierdzenie, będące wnioskiem z poprzedniego:

TWIERDZENIE 2. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty),$$

to ze zbieżnością całki $\int_a^{\infty} g(x)dx$ dla $K < +\infty$ wynika zbieżność całki $\int_a^{\infty} f(x)dx$, a z rozbieżnością pierwnej całki dla $K > 0$ wynika rozbieżność drugiej. (A więc dla $0 < K < +\infty$ obie całki są zbieżne lub rozbieżne równocześnie).

Dowód jest taki sam jak dowód analogicznego twierdzenia 2 z ustępu 366 [patrz 473, 3°].

Wybierając konkretną funkcję do porównania możemy stąd otrzymać szczegółowe kryteria zbieżności lub rozbieżności całki $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Praktyczną wartość ma porównanie z funkcją $-1/x^{\lambda}$, która jest całkowalna w granicach od $a > 0$ do ∞ dla $\lambda > 1$ i nie jest całkowalna dla $\lambda \leq 1$ [470, 2)]. Na tym fakcie oparte są następujące *kryteria Cauchy'ego*:

Niech funkcja $f(x)$ ma dla dostatecznie dużych x postać

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \quad (\lambda > 0).$$

Wtedy: 1) jeżeli $\lambda > 1$ i $\varphi(x) \leq c < +\infty$, to całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, 2) jeżeli natomiast $\lambda \leq 1$ i $\varphi(x) \geq c > 0$, to całka ta jest rozbieżna.

Przy dowodzie należy skorzystać z twierdzenia 1. Funkcją porównawczą jest c/x^{λ} [473, 3°].

Jeżeli dla $x \rightarrow \infty$ funkcja $f(x)$ jest nieskończenie małe rzędu $\lambda > 0$ (w porównaniu z $1/x$), to całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna lub rozbieżna w zależności od tego, czy $\lambda > 1$ czy też $\lambda \leq 1$.

Należy tu powołać się na twierdzenie 2; rolę funkcji $g(x)$ odgrywa $\frac{1}{x^{\lambda}}$.

PRZYKŁADY

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}.$$

Funkcje podcałkowe są dla $x \rightarrow \infty$ nieskończenie małe rzędów odpowiednio $\frac{1}{2}$ i 2. A więc pierwsza całka jest rozbieżna, a druga zbieżna.

2) $\int_1^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia m , a $Q(x)$ wielomianem stopnia $n > m$ nie mającym pierwiastków w przedziale (a, ∞) .

Dla dostatecznie dużych x funkcja podcałkowa zachowuje określony znak. Dlatego też (zmieniając znak, gdy zajdzie potrzeba) możemy tu zastosować podane poprzednio kryteria. Funkcja podcałkowa jest (dla $x \rightarrow \infty$) nieskończenie małe rzędu $n-m$. A więc dla $n = m+1$ całka jest rozbieżna, a dla $n > m+2$ zbieżna. (Dla $n < m$ jest ona oczywiście rozbieżna).

475. Zbieżność całki w przypadku ogólnym. Zagadnienie zbieżności całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x) dx$ sprowadza się zgodnie z definicją (1) do zagadnienia istnienia granicy skończonej funkcji zmiennej A

$$(4) \quad \Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$$

dla $A \rightarrow \infty$.

Stosując do tej funkcji kryterium Bolzano-Cauchy'ego [58] możemy warunek istnienia całki niewłaściwej przedstawić w następującej postaci:

Na to, żeby całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (1) była zbieżna, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można było dobrać taką liczbę $A_0 > a$, żeby dla $A > A_0$ i $A' > A_0$ zachodziła nierówność

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Kryterium to pozwala z łatwością otrzymać następujące twierdzenie:

Jeżeli całka $\int_a^\infty |f(x)| dx$ jest zbieżna (2), to tym bardziej jest zbieżna całka $\int_a^\infty f(x) dx$.

Rzeczywiście, stosując powyższe kryterium do całki $\int_a^\infty |f(x)| dx$, o której zakładamy, że jest zbieżna, widzimy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $A_0 > a$, że

$$\int_a^{A'} |f(x)| dx < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $A' > A > A_0$. Ale jest oczywiste $\left| \int_a^{A'} f(x) dx \right| \leq \int_a^{A'} |f(x)| dx$, więc dla tych samych A i A' tym bardziej zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

skąd zgodnie z naszym kryterium wynika już zbieżność całki $\int_a^\infty f(x) dx$.

Zauważmy, że ze zbieżności tej ostatniej całki bynajmniej nie wynika zbieżność całki $\int_a^\infty |f(x)| dx$. Pozwala to na wyróżnienie następującego, szczególnego przypadku. Jeżeli wraz z całką $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna całka $\int_a^\infty |f(x)| dx$, to całkę $\int_a^\infty f(x) dx$ nazywamy bezwzględnie zbieżną, a funkcję $f(x)$ bezwzględnie całkowalną w przedziale $(a, +\infty)$. Przykład całki zbieżnej nie bezwzględnie podamy w następnym ustępie.

(1) Przy założeniu, że funkcja $f(x)$ jest w każdym przedziale (a, A) , $A > a$, całkowalna (w zwykłym sensie).

(2) Patrz poprzedni odsyłacz.

Kryteriów z ustępu 474 nie można stosować bezpośrednio w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ nie ma stałego znaku. Można natomiast spróbować ustalić z ich pomocą zbieżność całki z funkcji dodatniej $|f(x)|$. Jeżeli ta funkcja jest całkowalna, to funkcja $f(x)$ też jest całkowalna i to bezwzględnie.

Stąd otrzymujemy następujące twierdzenie, które jest często przydatne.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$, a funkcja $g(x)$ jest ograniczona, to ich iloczyn $f(x) \cdot g(x)$ też jest funkcją bezwzględnie całkowalną w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$.

Dla dowodu wystarczy powołać się na nierówność:

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq L \cdot |f(x)| .$$

Niech na przykład, będzie dana całka $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx$. Funkcja $f(x) = \frac{1}{k^2+x^2}$ jest tu, jak się okazuje, bezwzględnie całkowalna, podczas gdy $g(x) = \cos ax$ jest oczywiście ograniczona. Stąd wynika bezwzględna zbieżność danej całki.

Jak widać, w przypadku funkcji nie zachowującej stałego znaku, można przy sprzyjających warunkach ustalić za pomocą wyłożonej tu teorii tylko bezwzględną zbieżność całki. Jeżeli natomiast całka z danej funkcji jest rozbieżna lub zbieżna, lecz nie bezwzględnie, to nie można rozróżnić tych przypadków za pomocą sformułowanych tu kryteriów.

476. Kryteria Abela i Dirichleta. Podamy teraz kryteria innego typu, oparte na zastosowaniu drugiego twierdzenia o wartości średniej [306]. Są one analogiczne do kryteriów Abela i Dirichleta zbieżności szeregów nieskończonych [384], najwygodniej więc będzie powiązać je z tymi właśnie nazwiskami. Za pomocą tych kryteriów można będzie ustalić zbieżność całek niewłaściwych w wielu przypadkach, kiedy są one bezwzględnie zbieżne.

KRYTERIUM ABELA. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą określone w przedziale $\langle a, \infty \rangle$, przy czym*

1) *funkcja $f(x)$ jest całkowalna w tym przedziale, więc całka (1) jest zbieżna (chociaż nie bezwzględnie),*

2) *funkcja $g(x)$ jest monotoniczna i ograniczona:*

$$|g(x)| \leq L \quad (L = \text{const}, \quad a \leq x < \infty) .$$

Wtedy całka

$$(5) \quad \int_a^\infty f(x) g(x) dx$$

jest zbieżna.

Dowód. Z drugiego twierdzenia o wartości średniej mamy dla dowolnych $A' > A > a$

$$(6) \quad \int_A^{A'} f(x) g(x) dx = g(A) \int_A^\xi f(x) dx + g(A') \int_\xi^{A'} f(x) dx ,$$

gdzie $A \leq \xi \leq A$. Z uwagi na założenie (1) możemy dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$ dobrać takie $A_0 > 0$, że

$$\left| \int_A^\xi f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

jeżeli tylko $A > A_0$. Z uwagi na 2) mamy dla $A' > A > A_0$:

$$\left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| \leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right| < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

co pociąga już [475] zbieżność całki (5).

Dla całek możemy także podać inny układ warunków nałożonych na funkcje $f(x)$ i $g(x)$, przy których jest zbieżna całka z ich iloczynu.

KRYTERIUM DIRICHLETA. Założymy, że:

1) funkcja $f(x)$ jest całkowalna w każdym skończonym przedziale $\langle a, A \rangle$ ($A > a$) i całka (4) jest ograniczona

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq K \quad (K = \text{const}, \quad a \leq A < \infty),$$

2) funkcja $g(x)$ jest zbieżna monotonicznie do 0, gdy $x \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Wtedy całka (5) jest zbieżna.

Jak czytelnik zauważył, poprzedni warunek 1) jest nieco osłabiony, gdyż nie żądamy tu zbieżności całki (1), natomiast warunek 2) został zastąpiony mocniejszym.

Dowód prowadzimy jak poprzednio. Wychodzimy z równości (6), lecz w tym przypadku pierwsze czynniki $g(A)$ i $g(A')$ można uczynić dowolnie małymi, jeżeli weźmiemy A i A' dostatecznie duże, a drugie czynniki są ograniczone przez liczbę $2K$.

Uwaga. Tu także kryterium Abela wynika z kryterium Dirichleta. Rzeczywiście, funkcja monotoniczna i ograniczona $g(x)$ ma na pewno granicę skończoną

$$g(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

Przedstawiając $f(x) \cdot g(x)$ w postaci:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(\infty) + f(x) \cdot [g(x) - g(\infty)]$$

widzimy, że dla drugiego iloczynu są już spełnione założenia kryterium Dirichleta [patrz 473, 3° i 4°].

Łatwo zauważyc, na przykład, że dla $\lambda > 0$ całki

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \quad \text{i} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda} dx \quad (a > 0)$$

są zbieżne. Korzystamy z kryterium Dirichleta przyjmując $f(x) = \sin x$ lub $\cos x$, a $g(x) = 1/x^\lambda$. Założenia 1) i 2) są spełnione, gdyż

$$\left| \int_a^A \sin x \, dx \right| = |\cos x - \cos A| < 2 \quad \text{i analogicznie} \quad \left| \int_a^A \cos x \, dx \right| < 2,$$

a funkcja $\frac{1}{x^\lambda}$ monotonicznie malejąco dąży do 0, gdy $x \rightarrow \infty$.

W szczególności wynika stąd dla $\lambda = 1$ zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

(moglibyśmy przyjąć tu $a = 0$, ponieważ funkcja podcałkowa ma granicę skońzoną dla $x \rightarrow 0$). Można wykazać, że całka ta jest zbieżna warunkowo, tzn. że całka

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, dx$$

jest rozbieżna. Rzeczywiście, gdyby ta całka była zbieżna, to na mocy twierdzenia 1 z ustępu 474 zbieżna byłaby całka

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} \, dx \quad (a > 0),$$

gdzie $\sin^2 x < |\sin x|$. Inaczej mówiąc, byłaby zbieżna całka

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} \, dx.$$

Po dodaniu do niej na pewno zbieżnej całki

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} \, dx$$

doszliśmy do wniosku, że całka

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

jest zbieżna, a tak nie jest [470, 2]).

Uwaga. Teraz, gdy stwierdziliśmy już zbieżność całek

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx \quad \text{i} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x} \, dx,$$

możemy wreszcie lepiej sprecyzować definicje funkcji nieelementarnych si x („sinus całkowy”) i ci x („kosinus całkowy”), o których mówiliśmy już w ustępie 289. Przyjmujemy mianowicie

$$\text{si } x = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt \quad (x > 0), \quad \text{ci } x = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \, dt \quad (x > 0).$$

Jeśli drugi wzór napiszemy w postaci

$$\operatorname{ci} x = - \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt,$$

to ze znanej własności całki oznaczonej [305, 12°] widać już, że pochodna funkcji $\operatorname{ci} x$ jest rzeczywiście równa $\frac{\cos x}{x}$.

477. Srowadzenie całki niewłaściwej do szeregu nieskończonego. Wiemy, że pojęcie granicy funkcji może być wprowadzone w dwojakim sposobie — „w języku $\varepsilon - \delta$ ” i „w języku ciągów” [52, 53]. Jeśli do funkcji $\Phi(A)$ [patrz (4)] zastosujemy tę drugą definicję granicy, to definicję (1) całki niewłaściwej można wysłowić tak: jakkolwiek weźmiemy ciąg $\{A_n\}$ ($A_n > a$) liczb rosnących do nieskończoności, ciąg całek $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$ ma dążyć do tej samej granicy skończonej ⁽¹⁾, która jest właśnie całką niewłaściwą $\int_a^\infty f(x) dx$.

Z drugiej strony, granica ciągu $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$ jest identyczna z sumą szeregu [362]

$$\int_a^{A_1} + \left\{ \int_a^{A_2} - \int_a^{A_1} \right\} + \left\{ \int_a^{A_3} - \int_a^{A_2} \right\} + \dots = \int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A_3} + \dots$$

Możemy więc twierdzić, że na to, by istniała całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x) dx$, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego ciągu $A_n \rightarrow \infty$ ($A_n > a$) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) dx \quad (A_0 = a)$$

był zbieżny do tej samej sumy, która jest właśnie całką niewłaściwą.

Zauważmy, że jeśli funkcja $f(x)$ jest dodatnia (nieujemna), to warunkiem dostatecznym istnienia całki jest zbieżność wspomnianego szeregu dla jednego konkretnego ciągu $\{A_n\}$ ($A_n \rightarrow \infty$). Rzeczywiście, funkcja rosnąca (4) zmiennej A jest wtedy ograniczona przez sumę tego szeregu, a więc ma granicę skońzoną dla $A \rightarrow \infty$ [474].

Srowadzenie zagadnienia zbieżności całki do zagadnienia zbieżności szeregu jest często przydatne, pozwala zastosować liczne kryteria zbieżności lub rozbieżności szeregow.

Rozpatrzmy dla przykładu jeszcze raz całkę $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, o której już mówiliśmy w poprzednim ustępie. Ponieważ $\sin x$ przyjmuje, gdy x rośnie, na przemian wartości dodatnie i ujemne i zmienia znak

(1) Wystarczy założyć, że wszystkie ciągi $\left\{ \int_a^{A_n} f(x) dx \right\}$ są zbieżne, żeby można już było twierdzić, że będą miały tę samą granicę [53].

w punktach $n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), więc naturalne będzie właśnie te liczby przyjąć jako A_n i rozpatrywać szereg

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dokonując w wyrazie ogólnym $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ podstawienia $x = n\pi + t$, otrzymujemy

$$v_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$

Widać stąd, że wyrazy szeregu przyjmują na przemian znaki dodatnie i ujemne i maleją co do bezwzględnej wartości. Poza tym dla $n > 0$

$$|v_n| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{n\pi + t} dt < \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} dt = \frac{1}{n},$$

a więc ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu dąży do zera wraz ze wzrostem wskaźnika. Szereg (7) jest szeregiem naprzemiennym i na mocy znanego twierdzenia Leibniza [381] jest zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez I . Dla dowolnego $\epsilon > 0$ można więc znaleźć takie N , że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$(8) \quad \left| \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx - I \right| < \epsilon.$$

Teraz zakończenie dowodu istnienia całki łatwiej jest przeprowadzić w języku $\epsilon - \delta$. Niech będzie $A > N\pi$. Istnieje więc taka liczba naturalna n_0 , że $n_0\pi < A < (n_0 + 1)\pi$, przy czym oczywiście $n_0 > N$. Ponieważ funkcja $\sin x$ zachowuje stały znak w przedziale od $n_0\pi$ do $(n_0 + 1)\pi$, więc całka $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ jest zawarta

między całkami $\int_0^{n_0\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ i $\int_0^{(n_0+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, z których każda leży z uwagi na (8) — między $I - \epsilon$ a $I + \epsilon$. To samo można

powiedzieć o całce $\int_0^A \frac{|\sin x|}{x} dx$. Mamy więc ostatecznie dla $A > N\pi$

$$\left| \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx - I \right| < \epsilon,$$

a więc istnieje całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = I^{(1)}.$$

Wiemy już [476], że całka ta jest warunkowo zbieżna, to znaczy że całka $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ jest rozbieżna. Łatwo można się o tym przekonać przedstawiając całkę w postaci szeregu. Rzeczywiście, gdyby całka ta była zbieżna, to mielibyśmy jak poprzednio

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{n\pi + t} dt,$$

(1) Interesuje nas tu (tak jak w poprzednim ustępie) tylko zagadnienie zbieżności tej całki. Zobaczymy później, że $I = \pi/2$.

lecz $n\pi + t < (n+1)\pi$, więc

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

a tymczasem szereg $\frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny! [365, 1)].

478. Przykłady

1) Zbadać zbieżność całek:

$$(a) \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx, \quad (b) \int_{z_0}^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}} \quad (z_0 > a > b > 0),$$

$$(c) \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx, \quad (d) \int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

Rozwiązanie. (a) Funkcja podcałkowa jest dla $x \rightarrow +\infty$ nieskończonym małym rzędem pierwszego — całka jest zbieżna.

(b) Funkcja podcałkowa jest dla $x \rightarrow \infty$ nieskończonym małym rzędem $\frac{3}{2}$ — całka jest zbieżna.

(c) Gdy $x \rightarrow 0$, funkcja podcałkowa dąży do 0. Po rozwinięciu w szereg zauważamy, że wyrażenie

$$e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2} = \frac{b^2 - a^2}{x^2} + \dots$$

jest dla $x \rightarrow +\infty$ nieskończonym małym rzędem drugiego — całka jest zbieżna.

(d) Rozwijając e^{tx} w szereg, łatwo otrzymujemy

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{12} + \dots,$$

a więc gdy $x \rightarrow 0$, wyrażenie podcałkowe dąży do $-\frac{1}{12}$. Dla $x \rightarrow \infty$ będzie ono nieskończonym małym rzędem drugiego. Całka jest zbieżna.

2) To samo, dla całek:

$$(a) \int_a^\infty x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0), \quad (b) \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}, \quad (c) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x \sqrt{x^2-1}} dx.$$

Rozwiązanie. (a) Biorąc dowolne $\lambda > 1$, mamy

$$\frac{x^\mu e^{-ax}}{1/x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{e^{ax}} \rightarrow 0;$$

całka jest zbieżna.

(b) Zauważmy najpierw, że gdy $x \rightarrow 0$, funkcja podcałkowa dąży do 0. Biorąc teraz znowu dowolne $\lambda > 1$, otrzymujemy

$$\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}x^{-(2\lambda+2)} - x^{-2\lambda+2}}} \rightarrow 0, \quad \text{dla } x \rightarrow +\infty.$$

Całka jest zbieżna.

(c) Gdy $x \rightarrow 1$, funkcja podcałkowa ma granicę 0. Niech będzie $1 < \lambda < 2$. Stosunek tej funkcji do $1/x^\lambda$ możemy zapisać w postaci

$$\frac{x^\lambda \ln x}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\ln x}{x^{2-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty.$$

Całka jest zbieżna.

3) To samo dla całek:

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} dx \quad (a > 0), \quad (b) \int_0^\infty x^\mu e^{-ax} \cos x dx \quad (\mu, a > 0).$$

Wskazówka. W obu przypadkach mamy iloczyn funkcji ograniczonej przez funkcję całkowalną (bezwzględnie).

4) Zbadać zbieżność całki ($\alpha > 0$)

$$\int_1^\infty dx \int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3) d\beta = \int_1^\infty \left\{ \int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3) d\beta \right\} dx \quad (1).$$

Postaramy się oszacować rząd małości całki wewnętrznej dla $x \rightarrow \infty$. Podstawiając w niej $\beta^2 x^3 = z$, mamy

$$\int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3) d\beta = \frac{1}{2x^{3/2}} \int_0^{\alpha^2 x^3} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz.$$

Z uwagi na zbieżność całki $\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$ [476] można dobrać taką stałą L , żeby dla wszystkich $A > 0$ było

$$\left| \int_0^A \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz \right| < 2L.$$

A więc bezwzględna wartość całki $\int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3) d\beta$ nie przewyższa $L/x^{3/2}$. Stąd wynika już zbieżność rozpatrywanej całki.

5) Wykazać zbieżność całek ($a, k, \lambda > 0$):

$$(a) \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} dx, \quad (b) \int_0^\infty e^{sin x} \frac{\sin 2x}{x^\lambda} dx,$$

$$(c) \int_a^\infty |\ln x|^\lambda \frac{\sin x}{x} dx, \quad (d) \int_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\lambda} dx.$$

Rozwiązanie: We wszystkich przypadkach korzystamy z kryterium Dirichleta.

(a) $g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$ monotonicznie maleje dla dostatecznie dużych x i dąży do zera, gdy $x \rightarrow \infty$.

Całka $\int_0^\infty \sin ax dx$ jest oczywiście ograniczona.

(1) Przyjmiemy tu bez dowodu, że całka „wewnętrzna” jest funkcją ciągłą zmiennej x .

(b) $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ monotonicznie maleje i dąży do zera, gdy $x \rightarrow \infty$. $f(x) = e^{\sin x} \sin 2x$, więc (gdy podstawimy $\sin x = t$)

$$\left| \int_0^A f(x) dx \right| = 2 \left| \int_0^{\sin A} te^t dt \right| < 2e.$$

(c) $g(x) = |\ln x|^\lambda \frac{1}{x}$. Dla dostatecznie dużych x

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{\lambda-1}}{x^2} (\lambda - \ln x) < 0,$$

a więc $g(x)$ oczywiście maleje i dąży do zera itd.

(d) $g(x) = \frac{1}{x^4}$; $f(x) = \sin(x+x^2)$, więc (po podstawieniu $z = x+x^2$)

$$\int_a^A \sin(x+x^2) dx = \int_{a+a^2}^{a+a^2+4a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}} dz.$$

Wyrażenie to jest co do wartości bezwzględnej ograniczone, ponieważ całka $\int_{a+a^2}^{\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}$ jest zbieżna (o czym możemy się przekonać korzystając z tegoż kryterium Dirichleta).

6) Udowodnić twierdzenie:

Niech będzie dana funkcja $f(x)$ określona w przedziale $(a, +\infty)$ o okresie $\omega > 0$ i funkcja $g(x)$ monotoniczna w tym samym przedziale i dążąca do 0, gdy $x \rightarrow +\infty$. Jeżeli całka (właściwa)

$$(9) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = 0,$$

to całka niewłaściwa

$$\int_a^{\infty} f(x) g(x) dx$$

jest zbieżna. Jeżeli natomiast

$$(9^*) \quad \int_a^{+\omega} f(x) dx = K \neq 0,$$

to całka (5) jest zbieżna lub rozbieżna w zależności od tego, czy jest zbieżna czy też rozbieżna całka

$$(10) \quad \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

(a) Założymy najpierw, że jest spełniony warunek (9) i udowodnimy, że całka

$$\int_a^A f(x) dx$$

jest wtedy ograniczona dla wszystkich $A > a$.

Z ustępu 314, 10) i uwagi w ustępie 316 wynika oczywiście, że także

$$\int_a^{a+k\omega} f(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Stąd, gdy przyjmiemy $k = E\left(\frac{A-a}{\omega}\right)$, będziemy mieli dla dowolnego $A > a$

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_{a+k\omega}^A \right| = \left| \int_a^{A-k\omega} \right| < \int_a^{a+\omega} |f(x)| dx = L,$$

a żądanego wniosku wynika już bezpośrednio z kryterium Dirichleta.

(b) Założymy teraz (9*) i zastąpmy $f(x)$ przez $f(x) - K/\omega$. Ponieważ funkcja ta spełnia założenie (9), więc całka

$$(5*) \quad \int_a^\infty \left[f(x) - \frac{1}{\omega} K \right] g(x) dx$$

jest zbieżna, jak to zostało udowodnione. Stąd już widać, że całki (5) i (10) są zbieżne (lub rozbieżne) jednocześnie.

7) Jeżeli przyjmiemy na przykład $f(x) = \sin^2 x$ w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ i $\omega = \pi$, to zobaczymy, że

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

a więc całka

$$\int_0^\infty \sin^2 x \cdot g(x) dx$$

jest (przy poprzednich założeniach co do g) zbieżna lub rozbieżna równocześnie z całką (10).

Przeciwnie, całka

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x \right) g(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \cos 2x \cdot g(x) dx$$

jest zbieżna w każdym przypadku niezależnie od zachowania się całki (10)!

8) Zbadać zbieżność całek

$$(a) \int_0^\infty e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{dx}{x}, \quad (b) \int_0^\infty e^{\sin x} \sin(\sin x) \frac{dx}{x}.$$

(a) Mamy

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} = 0,$$

gdyż druga z tych całek różni się od pierwszej tylko znakiem (podstawienie $z = 2\pi - x$). Z 6) wynika, że całka (a) jest zbieżna.

(b) Tym razem

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \sin(\sin x) dx > 0,$$

więc [patrz 6)] z rozbieżnością całki

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} \quad (a > 0)$$

wynika, że całka (b) jest rozbieżna.

9) Zbadać całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu + \sin x} dx$$

w zależności od wartości parametru $\mu > 0$.

Zachodzi tożsamość

$$\frac{\sin x}{x^\mu + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\mu} - \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}.$$

Całka z pierwszego wyrazu po prawej stronie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu} dx$$

jest, jak wiemy z 476, zawsze zbieżna. Przejedźmy do całki z wyrazu drugiego

$$(11) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)} dx.$$

Ponieważ

$$\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + 1)} < \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)} < \frac{1}{x^\mu(x^\mu - 1)},$$

więc dla $\mu > \frac{1}{2}$ całka z wyrażenia po prawej stronie, a wraz z nią całka (11) są zbieżne. Rozpatrzymy dla $\mu < \frac{1}{2}$ wyrażenie po lewej stronie. Całka z tego wyrażenia — z uwagi na 7) — zachowuje się tak jak całka

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\mu(x^\mu + 1)} \quad (a > 0),$$

tz. jest rozbieżna, a wraz z nią rozbieżna jest także całka (11).

Ostatecznie więc dana całka jest zbieżna dla $\mu > \frac{1}{2}$ i rozbieżna dla $\mu < \frac{1}{2}$.

Pouczające jest porównanie tego przykładu w przypadku $\mu < \frac{1}{2}$ z kryterium zbieżności Dirichleta. Całka z pierwszego czynnika $\sin x$ jest ograniczona, podczas gdy drugi czynnik

$$\frac{1}{x^\mu + \sin x}$$

dąży do 0, gdy $x \rightarrow \infty$. Nie jest spełnione tylko żądanie monotoniczności tego czynnika, a całka już jest rozbieżna!

10) Zbadać całkę

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + x^\beta \sin^2 x}$$

w zależności od wartości parametrów $\alpha, \beta > 0$.

Funkcję podcałkową oznaczmy przez $f(x)$. Gdy x zmienia się od $n\pi$ do $(n+1)\pi$, mamy

$$\frac{(n\pi)^\alpha}{1 + [(n+1)\pi]^\beta \sin^2 x} < f(x) < \frac{[(n+1)\pi]^\alpha}{1 + (n\pi)^\beta \sin^2 x}.$$

Skałkujemy te nierówności uwzględniając, że

$$(12) \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+A \sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{1+A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} \quad (1).$$

Otrzymamy

$$\frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^\beta \pi^\beta}} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx < \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^\beta \pi^\beta}}.$$

Sumując teraz względem n od 0 do ∞ , mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^\beta \pi^\beta}} < \int_0^\infty f(x) dx < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^\beta \pi^\beta}}.$$

Ponieważ obydwa skrajne szeregi są zbieżne lub rozbieżne jednocześnie z szeregiem

$$\sum_0^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}\beta},$$

więc to samo możemy twierdzić o całce.

A więc całka nasza jest zbieżna dla $\beta > 2(\alpha + 1)$ i rozbieżna dla $\beta < 2(\alpha + 1)$.

11) To samo dla całki

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta |\sin x|} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Metoda rozumowania jest taka sama jak w poprzednim przykładzie. Musimy tu jednak rozpatrzyć całkę [patrz 288, 14)]

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+A \sin x} = 2 \frac{\ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (A > 1)$$

zamiast całki (12). Ponieważ dla $A \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}{\sqrt{A^2 - 1}} : \frac{\ln A}{A} \rightarrow 1,$$

więc wystarczy porównać daną całkę z szeregami

$$\sum_1^{\infty} n^\alpha \frac{\ln(n+1)^\beta}{(n+1)^\beta} \quad i \quad \sum_1^{\infty} (n+1)^\alpha \cdot \frac{\ln n^\beta}{n^\beta},$$

czyli właściwie z szeregiem

$$\sum_2^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$$

Odpowiedź. Całka jest zbieżna dla $\beta > \alpha + 1$, a rozbieżna dla $\beta < \alpha + 1$.

Przykłady 6), 7), 9), 10), 11) pochodzą od G. H. Hardy'ego.

(1) Łatwo to wyrowadzić z 288, 10) lub 309, 9).

12) Zbadać wszystkie możliwe przypadki zbieżności i rozbieżności całki

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta}$$

w zależności od wartości parametrów α i β ($\alpha, \beta > 0$).

(a) Niech $\alpha < 1$. Ponieważ

$$\frac{1}{1+x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta} > \frac{1}{1+x^\alpha},$$

więc w tym przypadku całka jest rozbieżna [474].

(b) Niech będzie $\alpha < \beta$. Przechodząc do szeregu [477], mamy przy tym założenie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\alpha \cdot |\sin x|^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha \sin^\beta z} > \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}}$$

Dla $0 < z < \frac{1}{(n+1)\pi}$ jest jednak

$$(n\pi+z)^\alpha \sin^\beta z < (n+1)^\alpha \pi^\alpha z^\beta < (n+1)^\beta \pi^\beta \left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^\beta = 1,$$

więc wyrazy tego ostatniego szeregu są większe niż odpowiednie wyrazy szeregu rozbieżnego

$$\frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{n+1}.$$

Ciąg jest w tym przypadku rozbieżny.

(c) Niech będzie $\alpha > \beta > 1$. Przedstawmy I w postaci sumy $I_1 + I_2$, gdzie

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha \sin^\beta z}, \quad I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+(n\pi-z)^\alpha \sin^\beta z}.$$

Dalej, dla $0 < z < \pi/2$ i $n > 1$, jest

$$(n\pi+z)^\alpha \sin^\beta z > (n\pi)^\alpha \left(\frac{2}{\pi}z\right)^\beta = n^\alpha c^\beta z^\beta, \quad \text{gdzie } c = 2\pi^{\frac{\alpha}{\beta}-1},$$

skąd

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha \sin^\beta z} < \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+n^\alpha c^\beta z^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha/\beta} \cdot c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^\beta} > \frac{c^*}{n^{\alpha/\beta}},$$

gdzie $c^* = \frac{1}{c} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^\beta}$. Tak więc

$$I_1 < \frac{\pi}{2} + c^* \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}} < \infty.$$

Analogicznie także $I_2 < \infty$, a więc całka jest zbieżna.

(d) Zamiast przypadku $\alpha > \beta > 1$ można rozpatrywać przypadek ogólny, gdy jednocześnie $\alpha > 1$ i $\alpha > \beta$. Rzeczywiście, łatwo jest w tym przypadku znaleźć takie $\beta' > \beta$, żeby było $\alpha > \beta' > 1$. Ponieważ przy zmniejszeniu β zbieżność się tylko wzmacnia, więc i w tym ogólnym przypadku mamy zbieżność.

Reasumując całe rozumowanie widzimy, że całka I jest zbieżna tylko wtedy, gdy jednocześnie są spełnione nierówności $\alpha > 1$ i $\alpha > \beta$, a jest rozbieżna w każdym innym przypadku. Można powiedzieć krócej: gdy $\alpha > \max(1, \beta)$ to całka jest zbieżna, jest zaś rozbieżna, gdy $\alpha < \max(1, \beta)$.

§ 2. Całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych

479. Definicja całki z funkcji nieograniczonej. Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x)$ określoną w przedziale skończonym $\langle a, b \rangle$, lecz nieograniczoną w tym przedziale. Założymy nawet dokładniej, że funkcja jest ograniczona i całkowalna w dowolnym przedziale $\langle a, b-\eta \rangle$ ($0 < \eta < b-a$), lecz jest nieograniczona w każdym przedziale $\langle b-\eta, b \rangle$ na lewo od punktu b . Punkt b nazywamy *punktem osobliwym* funkcji $f(x)$.

Granicę skończoną lub nieskończoną całki $\int_a^b f(x) dx$ dla $\eta \rightarrow 0$ nazywamy *całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale od a do b* i oznaczamy jak zwykle

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx .$$

W przypadku gdy granica ta jest skończona, mówimy, że całka (1) jest zbieżna, a funkcję $f(x)$ nazywamy *całkowalną w przedziale $\langle a, b \rangle$* . Gdy natomiast granica (1) jest nieskończona lub nie istnieje w ogóle, mówimy że całka jest rozbieżna.

PRZYKŁAD. 1) Funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest ograniczona i całkowalna w dowolnym przedziale $\langle 0, 1-\eta \rangle$

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta) .$$

W punkcie $x = 1$ funkcja ma wartość nieskończoną. Przypominamy, że znaczy to tylko, że funkcja $1/\sqrt{1-x^2}$ dąży do nieskończoności, gdy $x \rightarrow 1$. Oczywiście w dowolnym przedziale $(1-\eta, 1)$ funkcja jest nieograniczona, a więc punkt $x = 1$ jest jej punktem osobliwym. W praktyce mamy zazwyczaj do czynienia właśnie z tego rodzaju punktami osobliwymi.

Ponieważ badana całka dąży do granicy $\arcsin 1 = \pi/2$, gdy $\eta \rightarrow 0$, więc istnieje całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2} .$$

Przyjmijmy teraz, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w dowolnym przedziale $\langle a+\eta', b \rangle$ ($0 < \eta' < b-a$), lecz jest nieograniczona w każdym przedziale $\langle a, a+\eta' \rangle$ na prawo od punktu a (punkt osobliwy). *Ciągłość funkcji $f(x)$ w przedziale od a do b* jest wówczas określona równością

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta' \rightarrow 0} \int_{a+\eta'}^b f(x) dx .$$

W ogólnym przypadku funkcja $f(x)$ może mieć w przedziale $\langle a, b \rangle$ dowolną skończoną liczbę punktów osobliwych $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m$, w których otoczeniu jest nieograniczona, podczas gdy w każdej części tego przedziału nie zawierającej punktów osobliwych funkcja jest ograniczona i całkowalna.

Przyjmijmy (dla uproszczenia), że takie punkty są trzy, przy czym dwa spośród nich są końcami przedziału $\langle a, b \rangle$, a trzeci leży pomiędzy nimi. Całki w przedziale od a do b określmy wtedy wzorem

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \eta_4 \rightarrow 0}} \left\{ \int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} + \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} \right\}.$$

Biorąc wewnątrz każdego z przedziałów $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$ odpowiednio punkty d i e otrzymujemy

$$\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int_{a+\eta_1}^d + \int_d^{c-\eta_2}, \quad \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} = \int_{c+\eta_3}^e + \int_e^{b-\eta_4}.$$

Łatwo zauważyć, że istnienie granicy (3) jest równoważne z istnieniem granic każdej z tych czterech całek z osobna, a więc definicję (3) można zastąpić taką:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^c f(x) dx + \int_c^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx,$$

przy założeniu, że wszystkie całki niewłaściwe po prawej stronie istnieją ⁽¹⁾. Definicja ta nie zależy od wyboru punktów d i e .

Dla całek niewłaściwych (2) i (3) zachowujemy poprzednią terminologię.

PRZYKŁADY

$$2) \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{punkt osobliwy } -1.$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \rightarrow 0} \int_{-1+\eta'}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \rightarrow 0} [-\arcsin(-1+\eta')] = \frac{1}{2}\pi.$$

$$3) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{dwa punkty osobliwe } -1 \text{ i } 1.$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4) Zbadajmy dla jakich wartości wykładnika $\lambda > 0$ całka niewłaściwa

$$(4) \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad (b > a)$$

jest zbieżna.

⁽¹⁾ Z wyjątkiem przypadku, gdy dwie spośród tych całek są równe nieskończoności o różnych znakach.

Gdy $\lambda \neq 1$, całka

$$\int_{a+\eta}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} [(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}]$$

ma dla $\eta \rightarrow 0$ granicę ∞ lub skończoną $\frac{1}{1-\lambda} (b-a)^{1-\lambda}$ w zależności od tego czy, $\lambda > 1$ czy też $\lambda < 1$. Jeśli $\lambda = 1$, to

$$\int_{a+\eta}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln \eta \rightarrow \infty \quad (\text{dla } \eta \rightarrow 0).$$

A więc całka (4) jest dla $\lambda < 1$ zbieżna i ma wartość $\frac{1}{1-\lambda} (b-a)^{1-\lambda}$, a dla $\lambda > 1$ rozbieżna [porównaj 470, 2)].

5) Podobny wynik możemy otrzymać dla całki

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (b > a, \lambda > 0),$$

która nie różni się istotnie od poprzedniej.

Uwaga. Warto zauważyć co następuje: jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle a, b \rangle$ całkowalna w sensie właściwym (a więc całka $\int_a^b f(x) dx$ jest już określona), to równość graniczna (1) [(2) lub (3)] ma tu także miejsce. Wynika ona bezpośrednio z ciągłości całki względem zmiennej górnej (dolnej) granicy całkowania [305, 11°]. Tak więc jako definicję całki niewłaściwej przyjęliśmy równość, która jest spełniona sama przez sie w przypadku całki właściwej.

Rozpatrzmy wreszcie funkcję $f(x)$ określoną w przedziale nieskończonym, na przykład w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$ i mającą w tym przedziale skońzoną liczbę punktów osobliwych ⁽¹⁾, w otoczeniu których nie jest ona ograniczona. Założmy, że w każdym przedziale skończonym $\langle a, A \rangle$, całka $\int_a^A f(x) dx$ istnieje jako właściwa lub niewłaściwa, zgodnie z podaną definicją. Przechodząc wtedy jeszcze raz do granicy, gdy $A \rightarrow \infty$, można za pomocą równości (1) [470] zdefiniować całkę niewłaściwą w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$.

W przypadku przedziału nieskończonego punkt $\pm \infty$ odgrywa tę samą rolę co i punkty osobliwe i wymaga podobnie jak one, dodatkowego przejścia do granicy. Na tej samej podstawie punkt $\pm \infty$ także nazywamy *osobliwym*, niezależnie od tego, czy funkcja będzie przy $x \rightarrow \infty$ ograniczona czy też nie.

480. Uwaga o punktach osobliwych. Rozpatrzmy funkcję $f(x)$ określoną w przedziale skończonym $\langle a, b \rangle$ i założmy, że jest ona niecałkowalna w sensie właściwym w tym przedziale. *Musi wtedy istnieć w przedziale $\langle a, b \rangle$ taki punkt c , w którego każdym otoczeniu funkcja jest niecałkowalna w sensie właściwym.*

⁽¹⁾ Punktów osobliwych może być także nieskończenie wiele, byleby tylko w przedziale skończonym $\langle a, A \rangle$ ($A > a$) była ich liczba skończona (która może rosnąć do nieskończoności wraz z A).

Rzeczywiście, przypuśćmy, że takiego punktu nie ma. Dla każdego punktu x z przedziału $\langle a, b \rangle$ można by więc znaleźć takie otoczenie σ , że funkcja nie jest w nim całkowalna. Stosując do układu otoczeń $\Sigma = \{\sigma\}$ pokrywającego przedział $\langle a, b \rangle$ lemat Borela [88] łatwo moglibyśmy rozbić odcinek $\langle a, b \rangle$ na skończoną liczbę części, tak że w każdej z nich funkcja jest całkowalna. Stąd wynikałaby już jednak całkowalność w całym przedziale $\langle a, b \rangle$ wbrew założeniu.

Naturalne jest nazwać ten punkt c punktem *osobliwym*: w punkcie tym niecałkowalność funkcji jak-gdyby się „zagęszcza”. Punktów osobliwych może być kilka, a nawet nieskończonie wiele. Na przykład w przypadku funkcji Dirichleta [300, 2] punkty osobliwe wypełniają cały przedział $\langle 0, 1 \rangle$.

Ograniczymy się do przypadku skończonej liczby punktów osobliwych $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$. W tym przypadku istotę osobliwości łatwo można wykryć: funkcja jest po prostu w otoczeniu każdego z nich nieograniczona (a więc właśnie nieograniczoną jest tu powodem niecałkowalności w sensie właściwym). Żeby się o tym przekonać, wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy jedynym punktem osobliwym jest b .

Niech więc dla dowolnego $\eta > 0$ ($\eta < b - a$) funkcja $f(x)$ będzie całkowalna (a więc koniecznie ograniczona) w przedziale $\langle a, b - \eta \rangle$, lecz niecałkowalna w przedziale $\langle b - \eta, b \rangle$. Trzeba udowodnić, że przy tych założeniach *funkcja nie może być ograniczona w pobliżu punktu b*. Założymy, że jest przeciwnie, to znaczy że dla wszystkich x z $\langle a, b \rangle$ jest

$$|f(x)| < L \quad (L = \text{const}).$$

Obierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i przyjmijmy $\eta < \frac{\varepsilon}{6L}$. Dla przedziału $\langle a, b - \eta \rangle$, w którym funkcja $f(x)$ jest całkowalna, możemy do liczby $\frac{1}{3} \varepsilon$ dobrać takie $\delta > 0$, że po podzieleniu tego przedziału na części o długości $\Delta x_i < \delta$ będzie

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{1}{3} \varepsilon,$$

gdzie $\omega_{i'}$ oznaczają jak zwykle odpowiednie oscylacje funkcji [297]. Możemy założyć poza tym, że $\delta < \eta$. Rozbijemy teraz cały przedział $\langle a, b \rangle$ na części o długościach $\Delta x_i < \delta$. Niech $\Delta x_{i''}$ odpowiadają tym częściom, które nie wchodzą poza $\langle a, b - \eta \rangle$, a $\Delta x_{i''''}$ pozostałyim częściom. Tylko jedna spośród nich może wychodzić poza $\langle a, b - \eta \rangle$, jeżeli tylko punkt $b - \eta$ nie występuje wśród punktów podziału. Mamy więc znów

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \frac{1}{3} \varepsilon,$$

z drugiej strony,

$$\sum_{i''''} \omega_{i''''} \Delta x_{i''''} < 2L \cdot \sum_{i''''} \Delta x_{i''''} < 2L(\eta + \delta) < 4L\eta < \frac{2}{3} \varepsilon,$$

więc ostatecznie

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} + \sum_{i''''} < \varepsilon.$$

To gwarantuje już [297] całkowalność funkcji $f(x)$ w całym przedziale $\langle a, b \rangle$, punkt b nie jest więc punktem osobliwym, wbrew założeniu. Dowód został przez to zakończony.

Tak więc w przypadku skończonej liczby punktów osobliwych możemy je scharakteryzować właśnie w ten sposób, że w pobliżu nich funkcja nie jest ograniczona, co posłużyło już nam do określenia punktów osobliwych w poprzednim ustępie.

481. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego. Przykłady. Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w przedziale $\langle a, b \rangle$ i całkowalna w sensie właściwym w każdym przedziale $\langle a, b - \eta \rangle$, a b niech będzie jej punktem osobliwym. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w przedziale $\langle a, b \rangle$, tzn. dla $a \leq x < b$, funkcję pierwotną $F(x)$, to

$$\int_a^{b-\eta} f(x) dx = F(b - \eta) - F(a) = F(x)|_a^{b-\eta}.$$

i istnienie całki niewłaściwej (1) jest równoważne z istnieniem skończonej granicy $\lim_{\eta \rightarrow 0} F(b - \eta)$. Jeżeli ta ostatnia istnieje, to naturalne jest przyjęcie jej jako wartości $F(b)$ funkcji pierwotnej dla $x = b$, uzyskując w ten sposób ciągłość funkcji $F(x)$ w całym przedziale $\langle a, b \rangle$. Mamy więc wzór na całkę (1) w jego zwykłej postaci

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Ten sam wzór jest słuszny także wtedy, gdy punkt osobliwy leży wewnątrz przedziału lub gdy istnieje kilka punktów osobliwych, ale (należy o tym dobrze pamiętać) tylko wtedy, gdy funkcja pierwotna $F(x)$, której pochodną jest wszędzie z wyjątkiem punktów osobliwych funkcja $f(x)$, jest ciągła także w tych punktach osobliwych. Istnienie takiej funkcji pierwotnej jest warunkiem koniecznym istnienia całki niewłaściwej.

Uwaga. „Funkcję pierwotną” $F(x)$ można by rozumieć w nieco ogólniejszym sensie: $f(x)$ musi być pochodną $F(x)$ wszędzie poza punktami osobliwymi i być może jeszcze pewną skońzoną liczbą punktów, byleby w tych punktach była zachowana ciągłość funkcji $F(x)$ [porównaj 310].

Zastępując w podstawowym wzorze (5) b przez x , a $f(x)$ przez $F'(x)$ możemy go napisać, tak samo jak w 310, w postaci

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x) dx.$$

A więc korzystając z danej pochodnej $F'(x)$ odtwarzamy funkcję pierwotną $F(x)$, jeżeli tylko pochodna ta jest całkowalna, chociażby nawet w sensie niewłaściwym.

PRZYKŁADY

1) $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Punkt osobliwy $x = 0$. Ponieważ funkcja pierwotna $\frac{3}{2} x^{2/3}$ jest ciągła w tym punkcie, całka istnieje:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^8 = \frac{9}{2}.$$

2) $\int_{-2}^2 \frac{2x dx}{x^2 - 1}$ nie istnieje, gdyż funkcja pierwotna $\ln|x^2 - 1|$ jest nieskończona w punktach osobliwych $x = \pm 1$.

3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Punkt osobliwy $x = 1$. Funkcja pierwotna $\frac{1}{2} (\arcsin x)^2$ jest ciągła dla $x = 1$, całka istnieje i równa się $\frac{1}{8} \pi^2$.

4) $\int_0^1 \ln x dx$. Punkt osobliwy $x = 0$. Funkcja pierwotna $x \ln x - x$ ma dla $x \rightarrow 0$ granicę równą 0. Przypisując jej dla $x = 0$ właściwie tę wartość, mamy

$$\int_0^1 \ln x dx = x \ln x - x \Big|_0^1 = -1.$$

5) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{3x^2-2x-1}}$. Punkt osobliwy $x = 1$; mamy

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{3x^2-2x-1}} = -\arcsin \frac{x+1}{2x} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}.$$

6) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$. Punkt osobliwy $x = 1$. Całka nie istnieje, bo funkcja pierwotna $\ln \ln x$ przyjmuje wartość ∞ dla $x = 1$.

482. Warunki i kryteria istnienia całki. Zajmiemy się tylko przypadkiem związanym z definicją (1), gdyż przeniesienie wyników na pozostałe przypadki nie sprawia już trudności. Z uwagi na całkowitą analogię z całką niewłaściwą w przedziale nieskończonym $\langle a, \infty \rangle$ ograniczymy się tylko do sformułowania pewnych podstawowych twierdzeń. Dowody przebiegają analogicznie jak poprzednio.

Na to, by była zbieżna całka niewłaściwa (1) z funkcji dodatniej $f(x)$, potrzeba i wystarcza, żeby dla wszystkich $\eta > 0$ zachodziła nierówność

$$\int_a^{b-\eta} f(x) dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Twierdzenia porównawcze z ustępu 474 można sformułować i udowodnić w tym przypadku prawie dosłownie tak samo. Podamy bez dowodu wynikające stąd *kryteria Cauchy'ego*.

Załóżmy, że dla wartości x dostatecznie bliskich b funkcja $f(x)$ ma postać

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Wtedy:

1) jeśli $\lambda < 1$ i $g(x) \leq c < +\infty$, to całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna,

2) jeśli $\lambda \geq 1$ i $g(x) \geq c > 0$, to całka ta jest rozbieżna.

Bardziej szczegółowa postać, wygodniejsza w praktyce:

Jeżeli dla $x \rightarrow b$ funkcja $f(x)$ jest nieskończenie dużą rzędem $\lambda > 0$ (w porównaniu z $\frac{1}{b-x}$),

to całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna lub rozbieżna w zależności od tego, czy $\lambda < 1$ czy też $\lambda \geq 1$.

PRZYKŁADY.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. Funkcja podcałkowa ma dla $x \rightarrow 1$ rzad wielkości $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \quad \text{gdy } x \rightarrow 1.$$

A więc całka jest zbieżna.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1).$ Wielkość rzędu $\frac{1}{2}$. Całka jest zbieżna.

3) $\int_0^1 x^\mu \ln x \, dx.$ Jeżeli $\mu > 0$, to $f(x) = x^\mu \ln x \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow 0$. Całka istnieje jako całka właściwa.

Dla $\mu < 0$ funkcja podcałkowa przyjmuje wartość ∞ dla $x = 0$.

Jeśli $\mu > -1$, to biorąc λ spełniające nierówność $1 > \lambda > |\mu| = -\mu$ otrzymujemy

$$\frac{x^\mu \ln x}{1/x^\lambda} = x^{\lambda+\mu} \ln x \rightarrow 0 \quad (\text{dla } x \rightarrow 0).$$

Ponieważ całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ jest zbieżna, więc dana całka jest też zbieżna (zgodnie z twierdzeniem analogcznym do twierdzenia 2 z 474) (¹).

Wreszcie, jeżeli $\mu < -1$, to całka $\int_0^1 x^\mu dx$ jest rozbieżna, a dana całka jest tym bardziej rozbieżna, gdyż

$$\frac{x^\mu \ln x}{x^\mu} = \ln x \rightarrow \infty \quad (\text{dla } x \rightarrow 0)$$

(zgodnie z tym samym twierdzeniem).

Dalsze przykłady czytelnik znajdzie w następnym ustępie.

Stosując kryterium Bolzano-Cauchy'ego otrzymujemy taki ogólny warunek zbieżności:

Na to, żeby całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ (gdzie b jest punktem osobliwym) była zbieżna, potrzeba i wystarcza, żeby każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiadała taka liczba $\delta > 0$, że dla $0 < \eta < \delta$ i $0 < \eta' < \delta$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Stąd, tak jak poprzednio, wynika:

Jeżeli całka $\int_a^b |f(x)| dx$ jest zbieżna, to (²) tym bardziej jest zbieżna całka $\int_a^b f(x) dx$.

Twierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe. Dlatego też i tutaj wyróżniamy specjalnie przypadek, gdy wraz z całką $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna całka $\int_a^b |f(x)| dx$. Pierwszą całkę nazywamy wtedy *bezwzględnie zbieżną*, a funkcję $f(x)$ *bezwzględnie całkowalną* w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Można tu udowodnić twierdzenie analogiczne do ostatniego twierdzenia ustępu 476.

(¹) Do funkcji $x^\mu \ln x$ stosujemy kryteria dotyczące funkcji dodatnich, ponieważ można z niej zrobić funkcję dodatnią przez zwykłą zmianę znaku.

(²) Przy założeniu, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie właściwym w każdym przedziale $\langle a, b-\eta \rangle$ ($\eta > 0$).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, a funkcja $g(x)$ jest całkowalna w $\langle a, b \rangle$ w sensie właściwym, to funkcja $f(x)g(x)$ jest też bezwzględnie całkowalna w tym przedziale.

Związek z szeregiem nieskończonym ustala twierdzenie:

Na to, by całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ (gdzie b jest punktem osobliwym) była zbieżna, potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego ciągu $a_n \rightarrow b$ szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx \quad (a_0 = a, \quad a \leq a_n < b)$$

był zbieżny do tej samej sumy. Ta suma jest właśnie wartością całki niewłaściwej.

Podamy teraz przykład całki zbieżnej, lecz nie bezwzględnie zbieżnej. Weźmy dla $0 < x < 2$ funkcję

$$f(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2}.$$

Funkcja ta jest ciągła dla $x > 0$, a jedynym jej punktem osobliwym w przedziale $\langle 0, 2 \rangle$ jest 0. Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ jest, jak łatwo sprawdzić, funkcja

$$F(x) = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x^2},$$

która ma dla $x \rightarrow 0$ granicę $F(+0) = 0$. Całka

$$\int_0^2 f(x) dx = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x^2} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$$

jest więc zbieżna.

Na to, by stwierdzić, że całka $\int_0^2 |f(x)| dx$ jest rozbieżna, przedstawimy ją w postaci szeregu. Weźmy ciąg $\{a_n\}$ dążący do 0, określony wzorami

$$a_0 = 2, \quad a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(x)| dx > \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)| dx.$$

W przedziale $\langle a_{2k}, a_{2k-1} \rangle$, tzn. dla $k\pi > \frac{\pi}{x^2} > k\pi - \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{x^2}$ i $\cos \frac{\pi}{x^2}$ mają znaki przeciwe, więc funkcja zachowuje znak. Dlatego

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)| dx = \left| \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x) dx \right| = |F(a_{2k-1}) - F(a_{2k})| = \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}.$$

Wobec rozbieżności szeregu harmonicznego $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$ rozpatrywany szereg jest też rozbieżny, a wraz z nim jest rozbieżna nasza całka.

483. Przykłady. Zbadać zbieżność całek:

1) (a) $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}}, \quad (\text{b}) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}, \quad (\text{c}) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}, \quad (\text{d}) \int_0^{\pi/2} (\tan x)^p dx,$

(e) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)^p d\theta.$

Rozwiązanie. (a) Punkt osobliwy $\varphi = \theta$. Z uwagi na istnienie pochodnej

$$\lim_{\varphi \rightarrow \theta} \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{\varphi - \theta} = -\sin \theta.$$

Wyrażenie podcałkowe będzie (dla $\varphi \rightarrow \theta$) nieskończoność duże rzędu $\frac{1}{2}$ (względem $\frac{1}{\theta - \varphi}$). Zbieżność.

(b) Punkt osobliwy $x = 0$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2,$$

więc rząd wyrażenia podcałkowego względem $\frac{1}{x}$ jest równy $\frac{2}{3}$. Zbieżność.

(c) Tu też

$$\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1 \quad \text{dla } x \rightarrow 1.$$

Rząd (względem $\frac{1}{1-x}$) jest równy 1. Rozbieżność.

(d) Jeśli $p > 0$, to punktem osobliwym jest $\pi/2$, jeśli $p < 0$, punktem osobliwym jest 0. W obu przypadkach wyrażenie podcałkowe jest rzędu $|p|$. Mamy więc zbieżność dla $|p| < 1$ i rozbieżność dla $|p| \geq 1$.

(e) Gdy $p > 0$, punktem osobliwym jest $-\pi/4$, a gdy $p < 0$, punktem osobliwym jest $\pi/4$. Odpowiedź taka sama jak poprzednio.

2) (a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (\text{b}) \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx \quad (a, b > 0),$

(c) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx, \quad (\text{d}) \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 \theta - k^2| d\theta \quad (k^2 < 1).$

Rozwiązanie. (a) Gdy $x \rightarrow 1$, funkcja podcałkowa dąży do 0. Punkt osobliwy $x = 0$. Jeżeli $0 < \lambda < 1$, to

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow 0.$$

Zbieżność.

(b) Obliczając wyrażenie nieoznaczone stwierdzamy, że funkcja podcałkowa ma granicę skońzoną ($= b-a$), gdy $x \rightarrow 1$. Punkt osobliwy $x = 0$ (jeżeli chociażby jedna z liczb a, b jest mniejsza niż 1, co też założymy). Stosunek funkcji podcałkowej do licznika równy $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$ (dla $x \rightarrow 0$). Ponieważ

$\int_0^1 (x^{b-1} - x^{a-1}) dx$ jest zbieżna, więc zbieżna jest także nasza całka.

(c) Punkt osobliwy $x = 0$. Dla $0 < \lambda < 1$ mamy

$$\frac{\ln \sin x}{1/x^\lambda} = \left(\frac{x}{\sin x} \right)^\lambda \sin^2 x \ln \sin x \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow 0.$$

Zbieżność.

(d) Przyjmijmy $k = \sin \omega$ ($0 < \omega < \pi/2$). Punkt osobliwy $\theta = \omega$. Niech znów będzie $0 < \lambda < 1$; wówczas wyrażenie

$$\frac{\ln |\sin^2 \theta - \sin^2 \omega|}{1/|\theta - \omega|^\lambda} = \left| \frac{\theta - \omega}{\sin \theta - \sin \omega} \right|^\lambda |\sin \theta - \sin \omega|^\lambda \{ \ln |\sin \theta - \sin \omega| + \ln (\sin \theta + \sin \omega) \}$$

dąży do zera, gdy $\theta \rightarrow \omega$. Całka jest zbieżna.

$$3) \quad (a) \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad (b) \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \ln x dx.$$

Rozwiązanie. (a) Gdy $a < 1$, punktem osobliwym jest 0, gdy $b < 1$ punktem osobliwym jest 1. Rozbijmy daną całkę na dwie, na przykład tak: $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest dla $x \rightarrow 0$ nieskończonym dużym (gdy $a < 1$) rzędu $1-a$, więc pierwsza całka jest zbieżna tylko wtedy, gdy $1-a < 1$, to znaczy gdy $a > 0$. Analogicznie, druga jest zbieżna, gdy $b > 0$. A więc dana całka jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie $a > 0$ i $b > 0$.

(b) W stosunku do $x = 0$ nic się nie zmieniło. Wystarczy rozpatrzyć całkę $\int_0^{1/2}$ przy założeniu $a < 1$ (dla $a > 1$ całka istnieje jako właściwa). Rozumujemy tak samo, jak w przykładzie 3) z ustępu 482. Całka jest zbieżna dla $a > 0$ tak samo jak w przypadku (a).

Natomiast w punkcie $x = 1$ sytuacja się zmieniła, ponieważ $\ln x$ jest dla $x \rightarrow 1$ nieskończonym małym rzędem pierwszego. Całka $\int_1^{1/2}$ istnieje dla $b > -1$.

Ostatecznie warunki zbieżności danej całki wyglądają tak: $a > 0$, $b > -1$.

$$4) \int_0^\pi \frac{\sin^{n-1} \varphi d\varphi}{|1+k \cos \varphi|^n}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ przypadek $k < 0$ da się sprowadzić do przypadku $k > 0$ za pomocą podstawienia $\varphi = \pi - \varphi_1$, możemy przyjąć dodatkowe założenie, $k > 0$. Oprócz tego dla zbieżności całki potrzeba w każdym razie, by $n > 0$, bo w przeciwnym razie dla $\varphi \rightarrow 0$ (lub $\varphi \rightarrow \pi$) funkcja podcałkowa jest nieskończonym dużym rzędem > 1 .

Jeżeli $k < 1$, to warunek ten jest także dostateczny. Dla $k = 1$ całka nie może być zbieżna, bo dla $\varphi \rightarrow \pi$ mamy nieskończonym dużym rzędem 1.

Wreszcie niech będzie $k > 1$. Pojawia się wtedy jeszcze jeden punkt osobliwy $\alpha = \arccos \left(-\frac{1}{k} \right)$.

Gdy $\varphi \rightarrow \alpha$ wyrażenie podcałkowe jest nieskończonym rzędem n , więc na to, by całka była zbieżna, należy jeszcze zażądać, by było $n < 1$.

A więc całka jest zbieżna, gdy 1) $0 < k < 1$ i $n > 0$ lub 2) $k > 1$ i $0 < n < 1$, a w pozostałych przypadkach jest rozbieżna.

$$5) \quad (a) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad (c) \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx.$$

Rozwiązanie. (a) Punkty osobliwe: ∞ i 0 (dla $a < 1$) także 0 . Jeżeli rozbijemy całkę na dwie: $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, to pierwsza całka jest zbieżna dla $a > 0$ (nieskończenie duża rzędu $1-a < 1$ względem x), a druga dla $a < 1$ (nieskończenie mała rzędu $2-a > 1$ względem $1/x$). A więc ostatecznie całka jest zbieżna dla $0 < a < 1$.

(b) Punkty osobliwe ∞ i 0 . $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Biorąc $0 < \lambda < 1$ mamy

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{1+x^2} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow 0.$$

Całka \int_0^1 jest zbieżna. Jeżeli natomiast $1 < \mu < 2$,

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\mu} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2-\mu}} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty,$$

a więc całka \int_1^∞ jest zbieżna. Stąd otrzymujemy zbieżność \int_0^∞ .

(c) Punkty osobliwe ∞ i 0 (dla $p < 1$). Całka \int_0^1 istnieje tylko dla $p > 0$ (nieskończenie mała rzędu $1-p$ względem $\frac{1}{x}$), \int_1^∞ istnieje dla każdego p , ponieważ dla $\lambda > 1$ mamy

$$\frac{x^{p-1} e^{-x}}{1/x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty.$$

Całka \int_0^∞ istnieje dla $p > 0$.

W dwóch następnych ćwiczeniach zakładamy o funkcjach rozpatrywanych w skończonym (lub nieskończonym) przedziale $\langle a, b \rangle$, że mają one w tym przedziale (lub w każdej jego części skończonej, gdy przedział jest nieskończony) co najwyżej skończoną liczbę punktów osobliwych.

6) Udowodnić, że:

(a) jeśli funkcja f^2 jest całkowalna, to sama funkcja f jest bezwzględnie całkowalna (o takiej funkcji mówimy, że jest całkowalna z kwadratem),

(b) jeśli obie funkcje f i g są całkowalne z kwadratem, to ich suma $f+g$ też jest całkowalna z kwadratem,

(c) przy tych samych założeniach iloczyn fg jest funkcją bezwzględnie całkowalną.

Na mocy twierdzenia porównawczego wynika to od razu z nierówności

$$|f| < \frac{1+f^2}{2}, \quad (f+g)^2 < 2(f^2+g^2), \quad |fg| < \frac{f^2+g^2}{2}.$$

7) Dla funkcji tej klasy można wyprowadzić takie same nierówności całkowe, jakie wyprowadziliśmy w 321 przy założeniu całkowalności rozpatrywanych funkcji w sensie właściwym. Jeżeli na przykład jednym punktem osobliwym jest we wszystkich przypadkach b (które może być także równe ∞), to wystarczy napisać którąś z nierówności całkowych dla przedziału $\langle a, x_0 \rangle$, gdzie $a < x_0 < b$, a następnie przejść do granicy, gdy $x_0 \rightarrow b$, aby przekonać się, że nierówności zachodzą także dla całek niewłaściwych. Poza tym, że zbieżności całek po prawej stronie nierówności wynika zbieżność całek po lewej stronie, analogicznie jak w 375, 8), gdzie mieliśmy do czynienia z szeregami nieskończonymi.

484. Wartości główne całek niewłaściwych. Przypuśćmy, że w przedziale $\langle a, b \rangle$ dana jest funkcja $f(x)$ mająca wewnątrz tego przedziału tylko jeden punkt osobliwy c i całkowalna (w sensie właściwym) w każdej jego części nie zawierającej c . Całka niewłaściwa w przedziale od a do b jest określona równością

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 0}} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^b \right\},$$

przy czym granica musi istnieć przy niezależnym zdążaniu η i η' do 0. W pewnych przypadkach, gdy granica ta nie istnieje, pozytycznie jest rozpatrywać granicę, gdy η i η' dążą do zera pozostając stale równe: $\eta' = \eta \rightarrow 0$. Jeżeli ta granica istnieje, nazywamy ją (za Cauchy'm) wartością główną całki niewłaściwej $\int_a^b f(x) dx$ i oznaczamy symbolem

$$\text{V.p. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b \right\}.$$

(V. p. są literami początkowymi słów „Valeur principale” po francusku „wartość główna”). Mówimy wtedy, że całka $\int_a^b f(x) dx$ istnieje w sensie wartościowej. Jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ istnieje jako całka niewłaściwa, to oczywiście istnieje także w sensie wartościowej. Twierdzenie odwrotne jest na ogół fałszywe. Rozpatrzmy przykłady.

PRZYKŁADY

1) Całka $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ ($a < c < b$) nie istnieje oczywiście jako całka niewłaściwa, gdyż wyrażenie

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\eta}{\eta'}$$

nie ma określonej granicy, gdy η i η' dążą do 0 niezależnie od siebie. Tymczasem, jeżeli powiążemy η i η' warunkiem $\eta' = \eta$, to otrzymamy wyrażenie

$$\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b = \ln \frac{b-c}{c-a},$$

w rzeczywistości niezależne od η , istnieje więc wartość główna

$$\text{V.p. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

2) Całka $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ ($a < c < b$, $n > 2$) ma wartość nieskończoną dla n parzystego, a nie istnieje w ogóle jako niewłaściwa dla n nieparzystego.

Rozpatrzmy wyrażenie

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left\{ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{\eta^{n-1}} \right\}.$$

Dla n nieparzystego jest ono liczbą stałą. Taka sama będzie też wartość główna

$$\text{V.p. } \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right] \quad (n - \text{nieparzyste}).$$

3) Rozpatrzmy następnie całkę rozbieżną $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k - \sin \theta}$ ($0 < k < 1$). Punktem osobliwym jest $\alpha = \arcsin k$ i gdy $\theta \rightarrow \alpha$, funkcja podcałkowa jest nieskończonością rzędu 1. Mamy

$$\int \frac{d\theta}{k - \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{k - \sin \theta}{1 - k \sin \theta - \sqrt{1-k^2} \cos \theta} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{\sin \alpha - \sin \theta}{1 - \cos(\alpha - \theta)} \right|.$$

Dlatego

$$\int_0^{\alpha-\eta} + \int_{\alpha+\eta}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ \ln \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha - \eta)}{\sin(\alpha + \eta) - \sin \alpha} + \ln \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right\}.$$

Gdy $\eta \rightarrow 0$ wyrażenie pod znakiem logarytmu w pierwszym składniku dąży do 1 (łatwo się można o tym przekonać obliczając nieoznaczoność według reguły de L'Hospitala). Mamy ostatecznie

$$\text{V.p. } \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k - \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k} \quad (0 < k < 1).$$

W pewnych przypadkach możemy z góry ustalić istnienie wartości głównej całki. Rozpatrzmy jeden z takich przypadków. Niech będzie dana całka

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)},$$

gdzie $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) i przyjmuje wartość zero w jednym tylko punkcie c wewnątrz przedziału. Założmy, że w otoczeniu punktu c istnieje pierwsza pochodna $f'(x)$ różna od zera dla $x = c$, a w samym tym punkcie istnieje także druga pochodna $f''(c)$.

Ponieważ $1/f(x)$ jest dla $x \rightarrow c$ nieskończoność dużą rzędu pierwszego i zmienia przy tym znak przy przejściu x przez c , więc całka niewłaściwa nie istnieje. Wykażemy, że całka ta istnieje w sensie wartości głównej.

Przyjmijmy

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f'(c)(x-c)} + \varphi(x).$$

Funkcja ta jest ciągła dla $x \neq c$. W otoczeniu $x = c$ mamy według wzoru Taylora z resztą w postaci Peano [124]:

$$f(x) = f'(c)(x-c) + [f''(c) + \alpha(x)] \cdot \frac{(x-c)^2}{2},$$

gdzie $\alpha(x) \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow c$. Wtedy oczywiście

$$x = - \frac{\frac{1}{2} [f''(c) + \alpha(x)]}{f'(c) \left[f'(c) + \frac{f''(c) + \alpha(x)}{2} (x-c) \right]},$$

a więc $\varphi(x)$ jest w pobliżu $x = c$ ograniczona, skąd wynika, że jest ona całkowalna nawet w sensie właściwym. Ponieważ istnieje całka w sensie wartości głównej z funkcji $\frac{1}{f'(c)(x-c)}$ [patrz 1)], więc to samo można powiedzieć o naszej całce.

Z pomocą tego kryterium można na przykład łatwo ustalić istnienie wartości głównej w przykładzie 3). Jako drugi przykład może posłużyć definicja bardzo ważnej funkcji nieelementarnej, tak zwanego *logarytmu całkowego*:

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{dx}{\ln x}.$$

Całka ta jest zbieżna tylko dla $0 < a < 1$; jeżeli $a > 1$ rozumiemy ją właśnie w sensie wartości głównej.

Pojęcie wartości głównej łatwo daje się uogólnić na przypadek dowolnej skończonej liczby punktów osobliwych wewnątrz rozpatrywanego przedziału.

Dotychczas wyłączaliśmy z rozważań przypadek istnienia osobliwości na końcach przedziału. Można tego nie robić, jeżeli tylko nie będziemy uwzględniali tych osobliwości przy obliczaniu wartości głównych.

4) Niech będzie dana całka ($a > 0$)

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx,$$

o której z góry wiadomo, że jest rozbieżna. Punktem osobliwym jest tu punkt $x = 1$ i (gdy $a < 1$) koniec przedziału — punkt $x = 0$. Łatwo wykazać, że wówczas

$$\text{V.p. } \int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^2 \right\}$$

sprawdza się do całki

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1} - (1+t)^{a-1}}{t} dt$$

(dla $a < 1$ — całki niewłaściwej).

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze jeden rodzaj „wartości głównej”, z którego musimy często korzystać. A mianowicie rozpatrzmy całkę w całym przedziale nieskończonym $(-\infty, +\infty)$. Zakładamy przy tym, że nie ma punktów osobliwych wewnątrz przedziału. Jak wiadomo całkę tę definiujemy za pomocą równości

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_A^{A'} f(x) dx,$$

przy czym zakładamy, że przejście do granicy względem A i A' odbywa się niezależnie od siebie. Może się przy tym jednak zdarzyć, że granica w tym sensie nie istnieje, natomiast istnieje granica odpowiadająca przypadkowi szczególnemu $A' = -A$. Granicę tę też nazywamy wartością główną całki $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ i oznaczamy

$$\text{V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ -A \rightarrow -\infty}} \int_A^{-A} f(x) dx.$$

Na przykład, jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, to jej całka w przedziale $(-A, A)$ symetrycznym względem 0 będzie równa 0, a więc

$$\text{V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0,$$

choćż całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ może w ogóle nie istnieć (jak to jest na przykład w przypadku funkcji $\sin x$).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

i granica tej całki istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica całki $\int_0^a f(x) dx$, tzn. gdy istnieje całka

niewłaściwa $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, a wraz z nią także $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Tak więc w przypadku funkcji parzystej wartość główna całki istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka niewłaściwa, są więc one oczywiście równe.

Dowolną funkcję $f(x)$ całkowalną w każdym przedziale skończonym możemy przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{i} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

parzystej i nieparzystej, tak samo całkowalnych.

Z tego, cośmy przed chwilą powiedzieli, widzimy, że

$$\text{V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx,$$

jeżeli ta ostatnia całka niewłaściwa istnieje. Biorąc na przykład pod uwagę to, że funkcja $\frac{1+x}{1+x^2}$ składa się z części parzystej $\frac{1}{1+x^2}$ i części nieparzystej $\frac{x}{1+x^2}$, możemy od razu napisać

$$\text{V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

485. Uwaga o wartościach uogólnionych całek rozbieżnych. W §9 rozdziału XI zajmowaliśmy się sumowaniem szeregów rozbieżnych, dla których określaliśmy według pewnego prawa „sumę uogólnioną”.

Podobnie istnieją metody, które pozwalają w pewnych przypadkach określić *uogólnione wartości* całek rozbieżnych. Właściwie robiliśmy to już także w poprzednim ustępie, przez wprowadzenie pewnych upraszczających założeń specjalizujących te przejścia do granicy, które zazwyczaj prowadzą do zwykłych całek niewłaściwych. Tutaj chodzi o zasadniczo inne procesy podobne do tych, z których korzystaliśmy w przypadku szeregów rozbieżnych. Ograniczymy się do dwóch przykładów takich procesów, które są odpowiednikami metody Cesary i metody Poissona-Abela dla szeregów.

I. Niech funkcja $f(x)$ będzie określona dla $x > 0$ i całkowalna w sensie właściwym w każdym przedziale skończonym $(0, x)$, lecz niecałkowalna w przedziale $(0, \infty)$. Określmy funkcję

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

i utwórzmy jej wartość średnią

$$\frac{1}{x} \int_0^x F(u) du.$$

Jeżeli ma ona granicę skończoną

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = I,$$

to tę właśnie granicę będziemy traktowali jako *wartość uogólnioną całki*.

Zastosujemy to na przykład do znanej nam już całki rozbieżnej

$$\int_0^{\infty} \sin x dx$$

[472, 4)]. Jest tu $f(x) = \sin x$, $F(x) = 1 - \cos x$ i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

„Wartością uogólnioną” całki rozbieżnej (6) jest tu więc liczba 1.

Oczywiście także tutaj powstaje pytanie, czy metoda ta jest regularna, tzn. czy przypisuje ona całe zbieżnej

$$(7) \quad \int_0^\infty f(x) dx,$$

mającej według definicji z ustępu 470 wartość skońzoną I , tę samą liczbę I jako „wartość uogólnioną”. Wykażemy, że tak właśnie jest.

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ można, z uwagi na zbieżność całki (7), dobrać takie $x_0 > 0$, że jeżeli $x > x_0$, to

$$|F(x) - I| < \frac{1}{2} \epsilon, \quad \text{gdzie} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Przyjmując $x > x_0$ mamy

$$\frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I = \frac{1}{x} \int_0^x [F(u) - I] du = \frac{1}{x} \int_0^{x_0} [F(u) - I] du + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [F(u) - I] du,$$

a więc

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I \right| < \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} [F(u) - I] du \right| + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |F(u) - I| du.$$

Drugi składnik po prawej stronie jest $< \frac{1}{2} \epsilon$ (z uwagi na sposób wyboru x_0), natomiast pierwszy także będzie $< \frac{1}{2} \epsilon$ dla dostatecznie dużego x . Również

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du - I \right| < \epsilon,$$

a więc rzeczywiście

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = I.$$

II. Tym razem dla ustalonej funkcji $f(x)$, której całka (7) nie istnieje, rozpatrzymy inną całkę

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx.$$

Jeżeli ta ostatnia całka jest zbieżna dla $k > 0$ i istnieje granica skończona

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx = I,$$

to granicę tę przyjmujemy jako wartość uogólnioną całki rozbieżnej (7).

Dla przykładu rozpatrzymy znów całkę (6). Ponieważ

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin x dx = \frac{1}{k^2 + 1}$$

472, 1)] dąży do 1, gdy $k \rightarrow +0$, więc tutaj także „wartością uogólnioną” całki (6) jest 1.

Do zagadnienia regularności tej drugiej metody powrócimy dalej [520].

§ 3. Własności i przekształcanie całek niewłaściwych

486. Najprostsze własności. Będziemy rozpatrywali funkcje całkowalne (w sensie właściwym lub nie) w przedziale skończonym lub nieskończonym $\langle a, b \rangle$. A więc a i b mogą być nie tylko liczbami skończonymi, lecz także $\pm\infty$. Najprostsze własności całek niewłaściwych, które tylko przytoczymy bez dowodu, są całkiem analogiczne do własności całek właściwych [302-306] i można je z nich wyprowadzić jednolitą metodą. Ponieważ całki niewłaściwe są granicami całek właściwych, wystarczy zwykle napisać równość czy też nierówność wyrażającą daną własność dla całek właściwych i następnie przejść do granicy.

Przede wszystkim można tutaj także wprowadzić pojęcie całki w przedziale zorientowanym i wykazać że:

1º Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to jest ona także całkowalna w przedziale $\langle b, a \rangle$ i

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx .$$

(Można to przyjąć po prostu za definicję całki \int_a^b w przypadku, gdy $a > b$).

2º Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w największym ⁽¹⁾ spośród przedziałów $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$.

Jest ona wtedy całkowalna w obu pozostałych i zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

3º Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w $\langle a, b \rangle$ i $c = \text{const}$, to funkcja $c \cdot f(x)$ jest także całkowalna i

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx .$$

4º Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą obie całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$. Wtedy całkowalna jest także funkcja $f(x) \pm g(x)$ i

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx .$$

Przy dowodzie ⁽²⁾ tej i następnej własności należy pamiętać o uwadze z ustępu 479. Niech na przykład b będzie jedynym punktem osobliwym jednej z funkcji $f(x)$, $g(x)$. Wówczas z równości

$$\int_a^{x_0} [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^{x_0} f(x) dx \pm \int_a^{x_0} g(x) dx \quad (a < x_0 < b)$$

⁽¹⁾ Ścisłej, w tym spośród przedziałów, który zawiera obydwa pozostałe.

⁽²⁾ Własności 3º i 4º były już wymienione w ustępie 473 w przypadku całek w przedziale nieskończonym i były nawet wykorzystane w następnych ustępach. Tu podajemy ogólniejsze ich sformułowanie.

możemy otrzymać poprzedni wzór przechodząc do granicy dla $x_0 \rightarrow b$ zarówno w przypadku, gdy wszystkie całki w granicach od a do b są niewłaściwe, jak również w przypadku, gdy jedna z nich jest właściwa.

5° Jeżeli dla funkcji $f(x)$ i $g(x)$ całkowalnych w $\langle a, b \rangle$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$, to dla $a < b$ jest

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

6° Jeżeli funkcja $f(x)$ jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to (dla $a < b$)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

7° Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w $\langle a, b \rangle$ to dla dowolnego x zawartego w tym przedziale istnieje całka

$$(1) \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

i jest funkcją ciągłą zmiennej x .

Załóżmy, że $a < x_0 \leq b$. Udowodnimy na przykład lewostronną ciągłość funkcji $\Phi(x)$ w punkcie x_0 . Biorąc c zawarte pomiędzy a i x_0 w ten sposób, żeby przedział $\langle c, x_0 \rangle$ nie zawierał innych punktów osobliwych oprócz być może x_0 , mamy dla $c < x \leq x_0$

$$(2) \quad \int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_c^x f(t) dt = \int_c^{x_0} f(t) dt.$$

Ta równość zachodzi [patrz uwaga z ustępu 479] zarówno w przypadku, gdy całka po prawej stronie jest właściwa jak również w przypadku, gdy jest niewłaściwa.

Jeżeli $x_0 = b = +\infty$, to ciągłość funkcji $\Phi(x)$ dla $x = +\infty$ rozumiemy w tym sensie, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty) = \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

8° Przy tych samych założeniach, jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = x_0$, to istnieje w tym punkcie pochodna funkcji $\Phi(x)$ [patrz (1)] i

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Przy dowodzie korzystamy z (2) i powołujemy się na analogiczną własność całki właściwej.

Własności 7° i 8° dają się łatwo zmodyfikować dla przypadku, gdy zmienna jest dolna granica całki.

487. Twierdzenie o wartości średniej. W pierwszym twierdzeniu o wartości średniej w postaci pierwotnej [304, 9°] korzystamy w sposób istotny z tego, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona, a przedział całkowania skończony. Dlatego też nie można tego twierdzenia przenieść na przypadek całki niewłaściwej. Możemy to natomiast zrobić, jeżeli weźmiemy je w postaci uogólnionej [304, 10°].

PIERWSZE TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$ i niech $f(x)$ będzie ograniczona:*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

a $g(x)$ nie zmienia znaku. Wtedy funkcja $f(x) \cdot g(x)$ jest całkowalna i

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx,$$

gdzie $m \leq \mu \leq M$.

Istnienie całki wynika z końcowego twierdzenia z ustępu 475 i analogicznego twierdzenia z ustępu 482. Natomiast samą równość dowodzimy w sposób formalny tak samo, jak dla całek właściwych.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, to jako m, M możemy wziąć najmniejszą i największą wartość $f(x)$ w $\langle a, b \rangle$ i czynnik μ jest wtedy równy jednej z wartości funkcji $f(x)$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx,$$

gdzie c jest zawarte w $\langle a, b \rangle$. Jest to prawdziwe także wtedy, gdy przedział $\langle a, b \rangle$ jest nieskończony, gdyż twierdzenia Weierstrassa i Bolzano-Cauchy'ego [85, 82] mogą być zastosowane w tym przypadku, o czym łatwo można się przekonać.

Zachodzi także [porównaj 306, 14°]

DRUGIE TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. *Niech funkcja $f(x)$ będzie monotoniczna i ograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$, a funkcja $g(x)$ całkowalna w tym przedziale. Wtedy funkcja $f(x) \cdot g(x)$ jest też całkowalna i*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Zatrzymamy się na przypadku, gdy a jest skończone, $b = +\infty$ i $g(x)$ nie ma innych punktów osobliwych. Istnienie całki wynika z kryterium Abela.

Nie ograniczając ogólności możemy przyjąć, że funkcja $f(x)$ jest malejąca. Z uwagi na jej ograniczonosć istnieje granica skończona

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Wtedy $f^*(x) = f(x) - f(+\infty) \geq 0$. Dla przedziału skończonego $\langle a, A \rangle$ mamy [306, 13°]

$$(3) \quad \int_a^A f^*(x) g(x) dx = f^*(a) \int_a^\eta g(x) dx \quad (a \leq \eta \leq A).$$

Funkcja $\int_a^A g(x) dx$ zmiennej A , ciągła w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$ ma granice skończone m i M , więc [patrz (3)]:

$$mf^*(a) \leq \int_a^A f^*(x) g(x) dx \leq Mf^*(a)$$

i gdy $A \rightarrow +\infty$, mamy

$$mf^*(a) \leq \int_a^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \leq Mf^*(a).$$

Stąd

$$(4) \quad \int_a^{+\infty} f^*(x) g(x) dx = \mu f^*(a), \quad m \leq \mu \leq M.$$

Lecz funkcja ciągła $\int_a^A g(x) dx$ osiąga swoje kresy m, M i przyjmuje dowolną wartość zawsze pomiędzy nimi, tzn. $\mu = \int_a^\xi g(x) dx$, gdzie $a \leq \xi \leq +\infty$.

Przyjmując w (4) $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$ i podstawiając uzyskane przed chwilą wyrażenie na μ , otrzymamy dowodzony właśnie wzór.

488. Całkowanie przez części w przypadku całek niewłaściwych. Niech funkcje $u = u(x)$ i $v = v(x)$ będą określone i ciągle wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi w każdym punkcie przedziału $\langle a, b \rangle$ z wyjątkiem punktu b (który może być także równy $+\infty$). Wówczas zachodzi równość

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

jeżeli przez symbol $uv|_a^b$ rozumiemy różnicę

$$\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

Zakładamy przy tym, że spośród trzech występujących w równości wyrażeń (dwie całki i podstawienie granic całkowania) mają sens dwa. Stąd już wynika istnienie trzeciego.

I rzeczywiście, biorąc $a < x_0 < b$ napiszemy zwykły wzór na całkowanie przez części w przedziale $\langle a, x_0 \rangle$

$$\int_a^{x_0} u dv = [u(x_0)v(x_0) - u(a)v(a)] - \int_a^{x_0} v du,$$

gdzie wszystkie całki są właściwe. Niech teraz w równości tej x_0 dąży do b . Z założenia dwa spośród występujących w niej wyrażeń mają granicę skończoną dla $x \rightarrow x_0$ ⁽¹⁾. Wynika stąd, że trzecie wyrażenie także ma granicę skończoną i prawdziwość dowodzonej równości stwierdzamy przez przejście do granicy.

(1) Zobacz uwagę z 477.

489. Przykłady

$$1) \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx.$$

Z pomocą całkowania przez części udało się nam sprowadzić całkę niewłaściwą do właściwej i udowodnić w ten sposób istnienie całki właściwej [porównaj 483, 2) (c)]. Ten sam charakter mają także następujące przykłady:

$$2) \text{(a)} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \ln x \, d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \ln x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \, dx = - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \, dx,$$

(b) analogicznie:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \, dx.$$

$$3) \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = - \int_a^\infty \frac{d \cos x}{x} = - \frac{\cos x}{x} \Big|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2} \, dx \quad (a > 0).$$

Ponieważ podstawienie granic całkowania i całka po prawej stronie mają sens, więc tym samym znów udowodnione zostało istnienie całki po lewej stronie [patrz 476, 477].

Analogicznie możemy wykazać istnienie całki $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\lambda} \, dx$ ($a, \lambda > 0$), gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła i jej całka $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ jest ograniczona dla wszystkich $x > a$. Wynika to z kryterium Dirichleta.

Całkując przez części możemy czasem otrzymać wzory redukcyjne, za pomocą których łatwo już obliczyć całki. Zilustrujemy to na następujących przykładach (n i k są liczbami naturalnymi):

$$4) I_n = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt.$$

Mamy

$$I_n = -e^{-t} t^n \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \, dt = n I_{n-1},$$

skąd $I_n = n!$.

Zniknięcie tutaj (i w dalszych przykładach) wyrazu z symbolem $\Big|_0^\infty$ wskazuje na wyższość stosowania wzoru na całkowanie przez części właśnie w przypadku całek oznaczonych (nie zaś nieoznaczonych).

$$5) E_n = \int_0^\infty e^{-xa} \sin^n x \, dx \quad (a > 0).$$

Przede wszystkim otrzymujemy całkując przez części

$$E_n = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin^n x \Big|_0^\infty + \frac{n}{a} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \, dx.$$

Ponieważ wyraz z symbolem $\Big|_0^\infty$ jest równy zeru, więc stosując znów całkowanie przez części otrzymujemy

$$E_n = -\frac{n}{a^2} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^\infty + \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx - \frac{n}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x \, dx.$$

Gdy zastąpimy tu $\cos^2 x$ przez $1 - \sin^2 x$, łatwo otrzymamy wzór rekurencyjny

$$E_n = \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} E_{n-2}.$$

Ponieważ $E_0 = \frac{1}{a}$ i $E_1 = \frac{1}{1+a^2}$, więc ostatecznie w przypadku n nieparzystego

$$E_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2) \dots [(2k-1)^2+a^2]}$$

i odpowiednio w przypadku n parzystego

$$E_{2k} = \frac{2k!}{a(2^2+a^2)(4^2+a^2) \dots [(2k)^2+a^2]}.$$

6) Latwo daje się dostosować do przypadku całek niewłaściwych także uogólniony wzór na całkowanie przez części [311, (7)].

Gdy mamy na przykład daną całkę

$$K = \int_0^\infty e^{-(p+1)x} L_n(x) dx,$$

gdzie $p > 0$ i $L_n(x)$ jest tak zwany n -tym wielomianem Czebyszewa-Laguerre'a

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

to korzystając ze wspomnianego wzoru otrzymujemy

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\infty e^{-px} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx = \left\{ e^{-px} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} \right. - \dots \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}e^{-px}}{dx^{n-1}} x^n e^{-x} \right\} \Big|_0^\infty + (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} \frac{d^n e^{-px}}{dx^n} dx = p^n \int_0^\infty x^n e^{-(p+1)x} dx \end{aligned}$$

i ostatecznie [patrz (4)]:

$$K = \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}} n!.$$

W sposób analogiczny otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) \cdot L_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \neq n, \\ (n!)^2, & \text{gdy } k = n. \end{cases}$$

490. Zamiana zmiennych w całkach niewłaściwych. Niech będzie dana funkcja $f(x)$ określona i ciągła w przedziale skończonym lub nieskończonym (a, b) , a więc całkowalna w sensie właściwym w każdej jego części nie zawierającej punktu b , który może być także równy $+\infty$. Zakładamy, że punkt b jest jedynym punktem osobliwym funkcji $f(x)$.

Rozpatrzmy teraz funkcję $x = \varphi(t)$ monotonicznie rosnącą i ciągłą wraz ze swoją pochodną $\varphi'(t)$ w przedziale (α, β) , gdzie β może być też równe $+\infty$. Założymy ponadto, że $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Tę ostatnią nierówność należy rozumieć w ten sposób, że $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$.

Przy tych założeniach zachodzi równość

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

jeżeli tylko istnieje jedna z tych całek (istnienie drugiej już stąd wynika).

Druga całka jest bądź właściwa, bądź niewłaściwa z jednym punktem osobliwym β .

Z twierdzenia o funkcji odwrotnej [83] widać, że t można też traktować jako funkcję zmiennej x , $t = \theta(x)$ monotonicznie rosnącą i ciągłą w (a, b) , przy czym $\lim_{x \rightarrow b} \theta(x) = \beta$.

Przypuśćmy teraz, że x_0 i t_0 są dowolnymi, lecz odpowiadającymi sobie wartościami x i t z przedziałów (a, b) i (α, β) . Dokonując w całce właściwej podstawienia otrzymujemy

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_a^{t_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Przypuśćmy, że istnieje druga spośród całek (5). Będziemy wtedy zbliżać w dowolny sposób x_0 do b , wówczas $t_0 = \theta(x_0)$ będzie dążyło do β i otrzymamy wzór (5) wraz z dowodem istnienia całki po lewej stronie tej równości.

Rozumowanie nasze da się także zastosować w przypadku funkcji monotonicznie malejącej $\varphi(t)$, gdy $\alpha > \beta$. W ten sam sposób postępujemy w przypadku innych możliwych położen punktów osobliwych. Przy rozmieszczaniu granic w całce przekształconej należy zawsze pamiętać, że dolna granica α odpowiada dolnej granicy a , a górna granica β górnej granicy b niezależnie od tego, czy będzie $\alpha < \beta$ czy też $\alpha > \beta$.

491. Przykłady

1) Całkę $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}$ ($k^2 < 1 < x_0$) można za pomocą podstawienia $x = \frac{1}{t^2}$, $dx = -\frac{2}{t^3} dt$ sprowadzić do całki

$$-2 \int_{1/\sqrt{x_0}}^0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2 \int_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Tutaj $a = x_0$, $b = \infty$, $\alpha = 1/\sqrt{x_0}$, $\beta = 0$. Całka niewłaściwa przechodzi we właściwą.

2) Obliczyć całkę

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

za pomocą podstawienia

$$x = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi.$$

Wskazówka. Tutaj $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ i szukana całka sprowadza się do całki właściwej

$$2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$$

3) Celem wykazania zbieżności całki $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ dokonamy podstawienia $x = \sqrt{t}$, $dx = dt/2\sqrt{t}$

teraz $a = \alpha = 0, b = \beta = \infty$. Otrzymamy na pewno zbieżną [476 lub 489, 3)] całkę

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

a więc zbieżna jest także rozpatrywana całka. Ciekawe, że jej funkcja podcałkowa nie dąży, gdy $x \rightarrow \infty$, do żadnej granicy, oscylując pomiędzy -1 i $+1$.

Analogicznie rozwiązujemy zagadnienie zbieżności całki $\int_0^\infty \cos x^2 dx$. W kolejnym przykładzie otrzymamy wynik znacznie ogólniejszy.

4) Udowodnić, że całki

$$\int_a^\infty \sin f(x) dx, \quad \int_a^\infty \cos f(x) dx$$

są zbieżne, jeżeli $f'(x)$ rośnie monotonicznie i dąży do ∞ , gdy $x \rightarrow \infty$.

Stwierdzamy przede wszystkim, że dla dostatecznie dużych x jest $f'(x) > 0$ i że $f(x)$ monotonicznie rośnie. Przyjmiemy, że zachodzi to już poczynając od $x = a$. Ze wzoru na przyrosty skończone otrzymujemy

$$f(x+1) = f(x) + f'(x+\theta) > f(a) + f'(x),$$

a więc sama funkcja $f(x) \rightarrow \infty$, gdy $x \rightarrow \infty$. Wprowadźmy nową zmienną $t = f(x)$, skąd

$$x = g(t), \quad dx = g'(t) dt \quad (\alpha = f(a), \beta = \infty),$$

gdzie g oznacza funkcję odwrotną względem f . Lecz pochodna $g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$ monotonicznie maleje i dąży do 0, gdy $t \rightarrow \infty$, dlatego przekształcone całki

$$\int_{f(a)}^\infty \sin tg'(t) dt, \quad \int_{f(a)}^\infty \cos tg'(t) dt$$

są zbieżne zgodnie z kryterium Dirichleta, a wraz z nimi zbieżne są rozpatrywane całki.

5) W celu obliczenia całki $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x} dx$ [jej zbieżność już ustaliliśmy w 483 5) (b)] rozłożymy ją na dwie całki: $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. W drugiej z tych całek dokonamy podstawienia $x = 1/t$ ($a = 1, b = \infty, \alpha = 1, \beta = 0$) i otrzymamy

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

skąd już wynika, że rozpatrywana całka równa się 0.

6) Niech będzie dana całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Z pomocą podstawienia $x = \sin t$ ($a = 0, b = 1, \alpha = 0, \beta = \pi/2$) sprowadzamy ją do całki właściwej

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin t} dt.$$

7) Obliczenie całki

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

porównaj 472, 2)] możemy uprościć stosując odpowiednie podstawienie.

Do tej całki można przede wszystkim sprowadzić całkę

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

stosując podstawienie $x = 1/t$ ($a = 0, b = \infty, \alpha = \infty, \beta = 0$). Możemy więc napisać

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{(1+x^2) dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

Jeżeli teraz dokonamy podstawienia $x - \frac{1}{x} = z$ ($a = 0, b = +\infty, \alpha = -\infty, \beta = +\infty$), to otrzymamy od razu

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

8) Aby obliczyć całkę $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}}$, możemy podstawić $t = \sqrt{\tan \theta}$, tzn. $\theta = \operatorname{arc tg} t^2$ ($a = 0, b = \pi/2, \alpha = 0, \beta = \infty$) i otrzymamy obliczoną poprzednio całkę

$$2 \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

9) Wykazać, że

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\alpha^2 - x^2) \sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (\alpha > 1);$$

$$(b) \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2) \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\operatorname{arc sin} \alpha}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha > 0);$$

$$(d) \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha > 0);$$

$$(e) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{x^2 + 1}} = \begin{cases} \frac{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} & (\alpha > 1); \\ 1 & (\alpha = 1), \\ \frac{\operatorname{arc cos} \alpha}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} & (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

Wskazówka. We wszystkich przykładach należy skorzystać z podstawienia Abela [284].

10) Zagadnienie zbieżności całek

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^{\lambda} x}, \quad \int_A^\infty \frac{dx}{x \ln x \ln^{\lambda}(\ln x)} \quad (\lambda > 0), \quad a > 1, \quad A > a$$

rozwiążemy natychmiast, gdy za pomocą podstawienia

$$t = \ln x, \quad u = \ln(\ln x).$$

sprowadzimy je do całek

$$\int_{\ln a}^\infty \frac{dt}{t^\lambda}, \quad \int_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{du}{u^\lambda}.$$

Obydwie całki są zbieżne dla $\lambda > 1$ i rozbieżne dla $\lambda < 1$.

W następnych przykładach będziemy przez $f(u)$ rozumieli dowolną funkcję ciągłą, dla $u \geq 0$.

11) Udowodnić, że

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \ln x \frac{dx}{x} = \ln a \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x} \quad (a > 0),$$

jeżeli tylko całki są zbieżne.

Wskazówka. Dokonać podstawienia $x = ae^u$ ($\alpha = -\infty, \beta = +\infty$).

12) Udowodnić, że (dla $p > 0$):

$$(a) \int_0^\infty f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{x} = 0, \quad (b) \int_0^\infty f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

jeżeli tylko całki są zbieżne.

Mamy na przykład w przypadku (a) $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, lecz $\int_1^\infty = -\int_0^1$, o czym łatwo możemy się przekonać,

dokonując podstawienia $x = \frac{1}{t}$, itd.

13) Udowodnić wzór

$$\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx = \frac{1}{A} \int_0^\infty f(y^2) dy \quad (A, B > 0),$$

przy założeniu, że całka po prawej stronie jest zbieżna.

Z pomocą podstawienia $y = Ax - \frac{B}{x}$ ($a = -\infty, b = +\infty, \alpha = 0, \beta = +\infty$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2) dy &= \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \left(A + \frac{B}{x^2}\right) dx = \\ &= A \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx + B \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \frac{dx}{x^2}. \end{aligned}$$

Tę ostatnią całkę możemy jednak za pomocą podstawienia $x = -B/At$ ($a = 0, b = +\infty, \alpha = -\infty, \beta = 0$) sprowadzić do

$$A \int_{-\infty}^0 f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right] dt,$$

więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx.$$

Stąd — z uwagi na parzystość funkcji podcałkowej — wynika żądaný wzór.

14) Na zakończenie, po opanowaniu techniki podstawiania w całkach niewłaściwych, powrócimy do jednego nie rozwiązanego poprzednio do końca zagadnienia. W ustępie 439, 1) badaliśmy już ciągłość funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q},$$

lecz nie ustaliliśmy jej zachowania się w punkcie $x = 0$ w przypadku, gdy $0 < p < 1, q > 1$ i $p + q < 2$.

Korzystając ze wzoru (10a) w notce na str. 245 możemy oszacować od dołu sumę szeregu za pomocą całki

$$f(x) > \int_1^{\infty} \frac{x dt}{t^p + t^q x^2}.$$

Podstawiając tu $t = x^{-2/(q-p)}v$ sprowadzamy tę nierówność do nierówności

$$f(x) > x^{\frac{p+q-2}{q-p}} \int_{2/(q-p)}^{\infty} \frac{dv}{v^p + v^q}.$$

Gdy $x \rightarrow +0$, całka dąży do granicy dodatniej skończonej

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{v^p + v^q},$$

a współczynnik przy niej bądź równa się 1 (jeżeli $p + q = 2$), bądź nawet dąży do ∞ , gdy $x \rightarrow +0$ (jeżeli $p + q < 2$). Ponieważ $f(0) = 0$, mamy w każdym razie w punkcie $x = 0$ prawostroonną nieciągłość. Tak samo lewostronną.

Uwaga. Całkę z granicą nieskończoną $\int_a^{\infty} f(x) dx$ możemy zawsze za pomocą odpowiedniego podstawienia sprowadzić do całki o granicach skończonych — właściwej lub też niewłaściwej. Na przykład, jeżeli $a > 0$, możemy przyjąć $x = \frac{1}{t}$,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_0^{1/a} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}.$$

Przeciwne całkę niewłaściwą $\int_a^b f(x) dx$ z jednym punktem osobliwym b możemy zawsze sprowadzić do całki z granicą nieskończoną bez innych punktów osobliwych. Na przykład, podstawiając $x = b - \frac{1}{t}$ otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}.$$

§ 4. Specjalne metody obliczania całek niewłaściwych

492. Pewne ważne całki. Zaczniemy od obliczenia pewnych ważnych całek, stosując różne sztuczne chwyty.

1° Calka Eulera

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx ,$$

o której istnieniu przekonaliśmy się już poprzednio. Obliczenie całki Eulera oparte jest na zastosowaniu zamiany zmiennej. Podstawiając $x = 2t$ mamy

$$J = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t \, dt = \frac{1}{2}\pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt .$$

Podstawiając w tej ostatniej całce $t = \frac{1}{2}\pi - u$, sprowadzamy ją do postaci $2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du$.

Ostatecznie otrzymujemy równanie na obliczenie J

$$J = \frac{1}{2}\pi \ln 2 + 2J, \quad \text{skąd} \quad J = -\frac{1}{2}\pi \ln 2 .$$

Do tej samej całki, z dokładnością do znaku, można sprowadzić także całki niewłaściwe [porównaj 489, 1) i 2) (b)]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx, \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{arc sin} x}{x} \, dx .$$

2° Przejdzmy do obliczenia całki Eulera-Poissona

$$K = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx ,$$

występującej w rachunku prawdopodobieństwa. W tym celu wyrowadzimy najpierw pewne nierówności.

Zwykłymi metodami rachunku różniczkowego łatwo można wykazać, że funkcja $(1+t)e^{-t}$ osiąga swą największą wartość 1 dla $t = 0$. A więc dla $t > 0$ i $t < 0$ zachodzi nierówność

$$(1+t) e^{-t} < 1 .$$

Podstawiając tu $t = \pm x^2$, otrzymujemy

$$(1-x^2) e^{x^2} < 1 \quad \text{i} \quad (1+x^2) e^{-x^2} < 1 ,$$

skąd

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0) .$$

Ograniczając w pierwszej z tych nierówności przedział zmienności x do $(0, 1)$ (a więc $1 - x^2 > 0$), a w drugiej przyjmując, że x jest dowolne, podnieśmy wszystkie te wyrażenia do potęgi n , gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Otrzymujemy ⁽¹⁾

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1) \quad i \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x > 0).$$

Całkując pierwszą nierówność w przedziale od 0 do 1, a drugą od 0 do $+\infty$ otrzymujemy

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n};$$

lecz

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} K \quad (\text{podstawienie } u = \sqrt{nx}),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{podstawienie } x = \cos t)$$

i wreszcie

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{podstawienie } x = \operatorname{ctg} t).$$

(Korzystaliśmy tu ze znanych wyrażeń na $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ z 312 (8)). A więc nieznaną wartość K możemy zatrzymać między następującymi dwoma wyrażeniami:

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

po podniesieniu do kwadratu i dokonaniu przekształceń otrzymujemy

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{((2n-3)!!)^2(2n-1)}{((2n-2)!!)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Ze wzoru Wallisa [317]:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n-1)}$$

łatwo już widać, że oba skrajne wyrażenia dążą do tej samej granicy $\pi/4$, gdy $n \rightarrow \infty$, a więc

$$K^2 = \frac{\pi}{4} \quad i \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{ponieważ } K > 0).$$

⁽¹⁾ W przypadku nierówności o wyrazach dodatnich dopuszczalne jest podnoszenie do potęgi naturalnej stronami.

3º Rozpatrzmy wreszcie całkę

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx .$$

Wiemy już, że jest ona zbieżna [476, 477, 489, 3)]. Przedstawmy tę całkę w postaci sumy szeregu

$$I = \sum_{v=0}^{\infty} \int_{v\cdot\pi/2}^{(v+1)\cdot\pi/2}$$

Przyjmując $v = 2\mu$ lub $2\mu - 1$ i stosując odpowiednio podstawienia $x = \mu\pi + t$ lub $x = \mu\pi - t$, otrzymujemy

$$\int_{2\mu\cdot\pi/2}^{(2\mu+1)\cdot\pi/2} = (-1)^\mu \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\mu\pi + t} dt$$

oraz

$$\int_{(2\mu-1)\cdot\pi/2}^{2\mu\cdot\pi/2} = (-1)^{\mu-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\mu\pi - t} dt .$$

Stąd

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi} \right) \sin t dt .$$

Ponieważ szereg

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi} \right) \sin t$$

jest w przedziale $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ zbieżny jednostajnie, gdyż jego majoranta $\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - \frac{1}{4}}$ jest zbieżna, możemy go całkować wyraz za wyrazem.

Mamy teraz prawo napisać wyrażenie na I w postaci

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \left[\frac{1}{t} + \sum_1^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi} \right) \right] dt .$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest jednak rozwinięciem funkcji $\frac{1}{\sin t}$ na ułamki proste [441, 9)]. Tak więc mamy ostatecznie

$$I = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}\pi .$$

Przeprowadzone tu eleganckie rachunki pochodzą od Łobaczewskiego, który pierwszy zwrócił uwagę na nieścisłość metody, za pomocą której obliczano tę ważną całkę dawniej.

493. Obliczenie całek niewłaściwych za pomocą sum całkowych. Przypadek skończonych granic całkowania. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle a, b \rangle$ nieograniczona, to oczywiście nie można korzystać przy obliczeniu całki tej funkcji z dowolnych sum całkowych (riemanowskich). Jednakże zawsze można w ten sposób wybierać te sumy, abyły przy rozdrabnianiu przedziału do wartości całki niewłaściwej. Udowodnimy to w najprostszym przypadku funkcji monotonicznej.

Niech więc będzie dana funkcja dodatnia $f(x)$ monotonicznie malejąca w przedziale $\langle 0, a \rangle$ ($a > 0$) i dążąca do $+\infty$, gdy $x \rightarrow 0$. Założymy przy tym, że istnieje jej całka niewłaściwa w przedziale od 0 do a . Po podzieleniu przedziału $\langle 0, a \rangle$ na n równych części mamy

$$\int_0^a f(x) dx = \sum_{v=0}^{n-1} \int_{\frac{v}{n}a}^{\frac{v+1}{n}a} f(x) dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x) dx + \sum_{v=1}^{n-1} f\left(\frac{v}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n},$$

a więc tym bardziej

$$\int_0^a f(x) dx < \int_0^{a/n} f(x) dx + \sum_{v=1}^n f\left(\frac{v}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n}.$$

Poza tym jest oczywiste

$$\int_0^a f(x) dx > \sum_{v=1}^n f\left(\frac{v}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n},$$

a więc biorąc to wszystko pod uwagę mamy

$$0 < \int_0^a f(x) dx - \frac{a}{n} \cdot \sum_{v=1}^n f\left(\frac{v}{n}a\right) < \int_0^{a/n} f(x) dx.$$

Ponieważ ta ostatnia całka dąży do zera ⁽¹⁾, gdy $n \rightarrow \infty$, więc ostatecznie

$$\int_0^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{v=1}^n f\left(\frac{v}{n}a\right).$$

Gdy funkcja $f(x)$ jest dodatnia, rosnąca i dąży do $+\infty$ dla $x \rightarrow a$, otrzymujemy podobnie

$$\int_0^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{v=0}^{n-1} f\left(\frac{v}{n}a\right).$$

Zmieniając wreszcie znak f , łatwo można otrzymać te same wzory dla funkcji monotonicznej ujemnej.

⁽¹⁾ Całka ta jest różnicą całki niewłaściwej $\int_0^a f(x) dx$ i dążącej do niej całki właściwej $\int_0^{a/n} f(x) dx$.

PRZYKŁADY

1) Obliczmy całkę $\int_0^1 \ln x \, dx$ (z punktem osobliwym 0). Mamy

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \ln \frac{v}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Ponieważ [77, 4)] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, powyższa granica równa się -1 . Jest to rzeczywiście wartość szukanej całki.

2) Jako drugi przykład rozpatrzmy bardziej skomplikowaną całkę $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. Mamy tu

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{v=1}^{n-1} \ln \sin \frac{v\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \ln \prod_{v=1}^{n-1} \sin \frac{v\pi}{2n}.$$

Chcąc otrzymać prostsze wyrażenie na to ostatnie rozwinięcie rozpatrzmy wielomian, otrzymana przez podzielenie $z^{2n}-1$ przez z^2-1 i rozłożmy go na czynniki liniowe, łącząc razem czynniki odpowiadające pierwiastkom sprzężonym. Otrzymujemy (dla dowolnego rzeczywistego z różnego od ± 1):

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = \prod_{v=1}^{n-1} \left[\left(z - \cos \frac{v\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{v\pi}{n} \right]^{(1)}.$$

Gdy $z \rightarrow 1$, otrzymujemy

$$n = \prod_{v=1}^{n-1} \left[\left(1 - \cos \frac{v\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{v\pi}{n} \right] = 4^{n-1} \prod_{v=1}^{n-1} \sin^2 \frac{v\pi}{2n},$$

a więc ostatecznie

$$\prod_{v=1}^{n-1} \sin \frac{v\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Dlatego też

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \ln n - (n-1) \ln 2}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

[porównaj 492, 1°].

494. Całki w przedziale nieskończonym. Założmy, że funkcja jest określona i całkowalna w przedziale od 0 do $+\infty$. Dzieląc ten przedział na nieskończenie wiele równych przedziałów o długości $h > 0$ utwórzmy sumę $\sum_{v=0}^{\infty} f(vh) \cdot h$, której postać przypomina sumę

Riemanna. Czy szereg ten jest zbieżny? Czy jego suma dąży do całki niewłaściwej $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$, gdy $h \rightarrow 0$? Oto pytania, na które postaramy się odpowiedzieć przy pewnych szczególnych założeniach o funkcji $f(x)$.

Założmy najpierw, że $f(x)$ jest dodatnia, maleje monotonicznie i dąży do 0, gdy $x \rightarrow +\infty$. Wtedy

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \sum_{v=0}^{\infty} \int_{vh}^{(v+1)h} f(x) \, dx < h \cdot \sum_{v=0}^{\infty} f(vh),$$

(1) Patrz notka na str. 105.

a z drugiej strony oczywiście

$$\int_0^\infty f(x) dx > h \sum_{v=1}^{\infty} f(vh) = h \sum_{v=0}^{\infty} f(vh) - hf(0)$$

więc

$$0 < h \sum_{v=0}^{\infty} f(vh) - \int_0^\infty f(x) dx < hf(0)$$

i

$$(1) \quad \int_0^\infty f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{v=0}^{\infty} f(vh),$$

PRZYKŁADY

1) Przyjmijmy $f(x) = e^{-x}$. Wtedy

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{v=0}^{\infty} e^{-vh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1-e^{-h}} = 1.$$

2) Znając skądinąd wartość całki

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

możemy mimo to zastosować wyprowadzony wzór. Otrzymamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{v=0}^{\infty} e^{-v^2 h^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Jeżeli przyjmiemy $e^{-h^2} = t$, to $h = \sqrt{\ln 1/t} \sim \sqrt{1-t}$, gdy $t \rightarrow 1$. Stąd wynika ciekawa równość

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \cdot (1+t+t^4+t^9+t^{16}+\dots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Może się zdarzyć, że założenie o monotonicznym maleniu funkcji $f(x)$ jest spełnione tylko dla $x \geq A > 0$. Ta okoliczność nie przeszkadza w zastosowaniu metody podanej wyżej dla funkcji monotonicznych. Musimy tylko postarać się o to, żeby stosunek A/h był liczbą całkowitą. Mamy wtedy

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{v=0}^{\frac{A}{h}-1} f(vh) h = \int_0^A f(x) dx$$

z samej definicji całki właściwej, a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{v=\frac{A}{h}}^{\infty} f(vh) h = \int_A^\infty f(x) dx$$

zgodnie z tym, co udowodniliśmy wyżej.

3) Dana jest funkcja $f(x) = xe^{-x}$. Jest to funkcja monotonicznie malejąca poczynając od $x = 1$.
Tym niemniej

$$\int_1^\infty xe^{-x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} h^2(e^{-h} + 2e^{-2h} + 3e^{-3h} + \dots) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 e^{-h} (1 - e^{-h})^{-2} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h \left(\frac{h}{e^h - 1} \right)^2 = 1,$$

co łatwo sprawdzić całkując przez części.

Przejdźmy do bardziej ogólnego przypadku. Nie zakładamy na razie nic o funkcji $f(x)$ oprócz całkowalności. Mamy

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^A f(x) dx + \int_A^\infty f(x) dx.$$

Dla dostatecznie dużego A ta ostatnia będzie co do bezwzględnej wartości dowolnie mała (1). Dla dowolnego A będziemy tu dobierały h w ten sposób, żeby A/h było liczbą całkowitą. Wtedy dla $A = \text{const}$ również będzie spełniona równość (2).

Widać teraz, że na to, żeby zachodziła równość (1), wystarcza, by spełniony był ponadto warunek

$$(3) \quad \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \sum_{v=1}^{\lfloor A/h \rfloor} f(vh) h = 0.$$

Rzeczywiście, dla dostatecznie dużego A i dostatecznie małego h wszystkie składniki po prawej stronie równości

$$\int_0^\infty - \sum_{v=0}^\infty = \left[\int_0^A - \sum_{v=0}^{\lfloor A/h \rfloor - 1} \right] + \int_A^\infty - \sum_{v=\lfloor A/h \rfloor}^\infty$$

będą wówczas dowolnie małe.

Warunek (3) jest automatycznie spełniony przy podanych uprzednio założeniach o funkcji $f(x)$, gdyż

$$0 < \sum_{v=\lfloor A/h \rfloor}^\infty f(vh) h < \int_A^\infty f(x) dx.$$

Jest on także spełniony, gdy $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, gdzie funkcja $\varphi(x)$ spełnia (chociażby dla $x \geq x_0 > 0$) te założenia, które były podane dla $f(x)$, a funkcja $\psi(x)$ jest ograniczona: $|\psi(x)| \leq L$. W tym przypadku

$$\left| \sum_{v=A/h}^\infty \varphi(vh) \psi(vh) \right| \leq L \sum_{v=A/h}^\infty \varphi(vh) h < L \int_A^\infty \varphi(x) dx,$$

itd.

(1) Jest ona równa różnicy całki niewłaściwej \int_0^∞ i dążącej do niej dla $A \rightarrow \infty$ całki właściwej \int_0^∞ .

4) Rozpatrzmy całkę $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$; tutaj $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$, $\psi(x) = \sin^2 x$. Mamy

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 vh}{(vh)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 vh}{v^2}.$$

Przy obliczaniu tej ostatniej sumy zauważymy najpierw, że

$$\left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 vh}{v^2} \right\}' = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2vh}{v} = \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2} - h$$

]461, 6) (b)]. Różniczkowanie wyraz za wyrazem przy $h \neq 0$ jest dopuszczalne z uwagi na twierdzenie 7 z ustępu 435, gdyż szereg utworzony z pochodnych jest jednostajnie zbieżny [kryterium Dirichleta, 430].

Całkując, otrzymamy wyrażenie, które jest szukaną sumą $\frac{\pi - h}{2} h$. Stąd mamy nareszcie

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - h}{2} h = \frac{\pi}{2}.$$

W innych przypadkach to, że spełnione jest założenie (3), musimy sprawdzić bezpośrednio.

5) Niech będzie dana na przykład całka $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Ograniczymy się (mamy oczywiście do tego prawa) do wartości $h = \pi/k$ i $A = m\pi$, gdzie k i m są liczbami naturalnymi.

Przedstawmy potrzebną sumę w postaci

$$\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1} + \dots$$

Łatwo sprawdzić, że składniki po prawej stronie w obrębie każdej z tych skończonych sum będą miały ten sam znak, który zmieni się przy przejściu do następnej sumy. W ogólności szereg po prawej stronie jest szeregiem naprzemiennym. Dlatego też jego suma będzie co do wartości bezwzględnej mniejsza od wartości bezwzględnej pierwszego składnika. Poza tym, ponieważ $kmh = m\pi = A$, będzie

$$\left| \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh} h \right| = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh} h < \frac{1}{A} \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh| \cdot h = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{k-1} \sin ih \cdot h,$$

Ta ostatnia suma jest dla dostatecznie małego h mniejsza od dowolnej liczby $C > 2$, jako suma całkowa całki $\int_0^\pi \sin x dx = 2$; a zatem

$$\left| \sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} h \right| < \frac{C}{A},$$

a z tego wynika, że założenie (3) jest spełnione.

Samo obliczenie danej całki usankcjonowane przez powyższe rozumowanie, odbywa się bardzo prosto [patrz 461, 6) (b)]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

co już otrzymaliśmy wyżej na innej drodze [492, 3º].

495. Całki Froullaniego. Rozpatrzmy zagadnienie istnienia i obliczenia pewnego szczególnego typu całek niewłaściwych

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0),$$

które są zwykle nazywane *całkami Froullaniego*.

I. O funkcji $f(x)$ zrobimy następujące założenia: 1° jest ona określona i ciągła dla $x \geq 0$ i 2° istnieje granica skończona

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Z 1° widać, że istnieje (dla $0 < \delta < \Delta < +\infty$) całka

$$\begin{aligned} \int_\delta^\Delta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

Nasza całka jest natomiast określana za pomocą równości

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Stosując do tych dwóch ostatnich całek uogólnione twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy

$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dz}{z} = f(\xi) \ln \frac{b}{a} \quad (\text{gdzie } a\delta \leq \xi \leq b\delta)$$

i analogicznie

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz = f(\eta) \ln \frac{b}{a} \quad (\text{gdzie } a\Delta \leq \eta \leq b\Delta).$$

Ponieważ oczywiście $\xi \rightarrow 0$ (gdy $\delta \rightarrow 0$), a $\eta \rightarrow +\infty$ (gdy $\Delta \rightarrow +\infty$), więc mamy stąd

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}.$$

PRZYKŁADY

1) W przypadku całki

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

mamy

$$f(x) = e^{-x}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0,$$

a więc wartość całki wynosi $\ln \frac{b}{a}$.

2) Dana jest całka

$$\int_0^\infty \ln \frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x} \quad (p, q > 0).$$

Zastępując logarytm ilorazu różnicą logarytmów możemy przyjąć tu $f(x) = \ln(p+qe^{-x})$, a więc $f(0) = \ln(p+q)$ i $f(+\infty) = \ln p$.

Odpowiedź. $\ln \left(1 + \frac{q}{p}\right) \ln \frac{b}{a}$.

3) Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx.$$

Mamy w tym przypadku

$$f(x) = \arctg x, \quad f(0) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{1}{2}\pi.$$

Odpowiedź. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$.

II. Czasami funkcja $f(x)$ nie ma granicy skończonej dla $x \rightarrow +\infty$, istnieje natomiast całka

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Zastępując w podanych rozważaniach od razu A przez $+\infty$, otrzymamy zamiast (4) wynik

$$(4a) \quad \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

PRZYKŁAD 4)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

(gdyż całka $\int_0^\infty \frac{\cos z}{z} dz$, jak wiemy, istnieje).

III. Analogicznie, gdy funkcja $f(x)$ jest nieciągła w punkcie $x=0$, lecz istnieje całka

$$\int_0^A \frac{f(z)}{z} dz \quad (A < +\infty),$$

to

$$(4b) \quad \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \ln \frac{a}{b}.$$

Nawiasem mówiąc, ten przypadek sprowadza się do poprzedniego przez podstawienie

$$x = \frac{1}{t}.$$

496. Całki z funkcji wymiernych w granicach nieskończonych. Rozpatrzmy wreszcie jeszcze jedną szczególną postać całki w granicach nieskończonych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami. Założymy, że wielomian $Q(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych i że stopień wielomianu $P(x)$ jest co najmniej o dwie jednostki mniejszy niż stopień $Q(x)$. Przy tych założeniach całka istnieje [474, 2)], chodzi tylko o jej obliczenie.

Jeśli $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ ($\beta_\lambda > 0$ lub $\beta_\lambda < 0$ i $\lambda = 1, 2, \dots$) są różnymi pierwiastkami wielomianu $Q(x)$, to ułamek $P(x)/Q(x)$ można w następujący sposób rozłożyć na ułamki proste

$$(5) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \left[\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + \frac{A'_\lambda}{(x - x_\lambda)^2} + \dots \right],$$

przy czym liczba ułamków w każdym nawiasie jest równa krotności odpowiedniego pierwiastka ⁽¹⁾.

Uogólniając na przypadek funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej elementarne sposoby obliczania całek widzimy od razu, że dla $m > 0$ jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - x_\lambda)^{m+1}} = - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(x - x_\lambda)^m} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

a więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_\lambda \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^h \sum_\lambda \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} dx.$$

⁽¹⁾ W rozdziale VIII [274] mieliśmy już podobne rozwinięcie, lecz tam staraliśmy się nie brać pod uwagę pierwiastków urojonych i w przypadku takich pierwiastków rozpatrywaliśmy ułamki, których mianownikami były potęgi trójmianu kwadratowego już o współczynnikach rzeczywistych. Tutaj zaś pierwiastki urojone traktujemy na równi z rzeczywistymi.

Z drugiej strony,

$$\frac{1}{x-x_\lambda} = \frac{1}{x-\alpha_\lambda - \beta_\lambda i} = \frac{x-\alpha_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2} + i \frac{\beta_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2}$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \frac{dx}{x-x_\lambda} &= \left\{ \frac{1}{2} \ln [(x-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2] + i \arctg \frac{x-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \right\} \Big|_{-h}^h = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(h-\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2}{(h+\alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2} + i \left[\arctg \frac{h-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} + \arctg \frac{h+\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Gdy $h \rightarrow +\infty$, pierwszy składnik w ostatnim wyrażeniu dąży do 0, a drugi do $+\pi i$ lub $-\pi i$ w zależności od tego, czy $\beta_\lambda > 0$ czy też $\beta_\lambda < 0$.

Otrzymujemy więc wynik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \pi i \sum_{\lambda} \pm A_{\lambda},$$

gdzie przed A_{λ} stoi znak plus, jeżeli odpowiednio $\beta_\lambda > 0$, i znak minus w przeciwnym przypadku. Wzór ten można nieco zmienić na podstawie następujących rozważań. Pomnożmy obie strony tożsamości (5) przez x . Gdy $x \rightarrow \infty$, lewa strona będzie dążyła do 0, gdyż stopień wielomianu $x P(x)$ jest mimo wszystko niższy niż stopień $Q(x)$. Po prawej stronie znikną w granicy wszystkie wyrazy o mianownikach nieliniowych, a zatem granicą sumy pozostałych wyrazów będzie także 0. Stąd $\sum_{\lambda} A_{\lambda} = 0$, a więc $\sum^{(+)} A_{\lambda} = - \sum^{(-)} A_{\lambda}$, jeżeli za pomocą znaków $(+)$ i $(-)$ oznaczymy sumy tych A_{λ} , które odpowiadają przypadkom $\beta_\lambda > 0$ i $\beta_\lambda < 0$ odpowiednio. Teraz otrzymany wzór możemy napisać w postaci

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\lambda}^{(+)} A_{\lambda}.$$

Jeżeli chodzi o obliczenie współczynników A_{λ} , to ograniczymy się do wskazówki dotyczącej przypadku pojedynczego pierwiastka x_{λ} , dla którego $Q(x_{\lambda}) = 0$, lecz $Q'(x_{\lambda}) \neq 0$.

W rozwinięciu (5) będzie mu odpowiadał tylko jeden wyraz $\frac{A_{\lambda}}{x-x_{\lambda}}$. Jeżeli pomnożymy obie strony równości (5) przez $x-x_{\lambda}$, to otrzymamy następującą jej postać:

$$\frac{P(x)}{Q(x)-Q(x_{\lambda})} = A_{\lambda} + (x-x_{\lambda}) R(x),$$

gdzie $R(x)$ oznacza grupę wyrazów, które pozostają skończone, gdy x zbliża się do x_{λ} .

Przechodząc do granicy, gdy $x \rightarrow x_\lambda$, otrzymujemy

$$(7) \quad A_\lambda = \frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)}.$$

Przejdźmy teraz do przykładów zastosowania wzorów (6) i (7).

PRZYKŁADY

1) Na początek rozpatrzmy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx,$$

gdzie m i n są liczbami naturalnymi i $m < n$. Wszystkie warunki do zastosowania wyprowadzonego wzoru są spełnione.

Pierwiastkami mianownika są tu liczby

$$x_\lambda = \cos \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1; n, \dots, 2n-1),$$

lecz tylko pierwsze n spośród nich mają dodatnie części urojone. Oczywiście $x_\lambda = x_0^{2\lambda+1}$, gdzie

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Ze wzoru (7) dla $\lambda = 0, 1, \dots, n-1$ mamy

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m}}{2nx_\lambda^{2n-1}} = -\frac{1}{2n} x_\lambda^{2m+1} = -\frac{1}{2n} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

(uwzględniając, że $x_\lambda^{2n} = -1$). Obliczając sumę postępu, otrzymujemy

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} A_\lambda = -\frac{1}{2n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}}$$

lub też, ponieważ $x_0^{2n} = -1$,

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} A_\lambda = -\frac{1}{n} \cdot \frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}}.$$

Podstawiając

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos \frac{2m+1}{2n}\pi \pm i \sin \frac{2m+1}{2n}\pi,$$

przedstawimy ostatecznie szukaną sumę w postaci

$$\frac{1}{2ni} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Stąd według wzoru (6) mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi} \quad (m < n).$$

2) Trochę ogólniejszy jest przykład

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}} dx,$$

gdzie m, m', n są liczbami naturalnymi i $m, m' < n$.

Warunki są spełnione z wyjątkiem tego, że mianownik ma pierwiastki rzeczywiste ± 1 . Nie jest to tutaj istotne, ponieważ te same pierwiastki ma także licznik, a więc ułamek można skrócić przez $x^2 - 1$. Tych pierwiastków nie będziemy brali później pod uwagę.

Pozostałymi pierwiastkami mianownika są liczby

$$x_\lambda = \cos \frac{\lambda\pi}{n} + i \sin \frac{\lambda\pi}{n} = x_1^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1).$$

Tylko pierwsze $n-1$ spośród nich mają dodatnie części urojone. Ze wzoru (7)

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m} - x_\lambda^{2m'}}{-2nx_\lambda^{2n-1}} = \frac{1}{2n} (x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}),$$

więc

$$\sum^{(+)} A_\lambda = \frac{1}{2n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} (x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}) = \frac{1}{2n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} (x_1^{\lambda(2m'+1)} - x_1^{\lambda(2m+1)}).$$

Otrzymane wyrażenie przekształcamy kolejno w taki sposób (¹):

$$\begin{aligned} \sum^{(+)} A_\lambda &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x_1^{\lambda(2m'+1)} - x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1} - 1} - \frac{x_1^{\lambda(2m+1)} - x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1} - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{1 + x_1^{2m'+1}}{1 - x_1^{2m'+1}} - \frac{1 + x_1^{2m+1}}{1 - x_1^{2m+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x_1^{(2m+1)/2} + x_1^{-(2m+1)/2}}{x_1^{(2m+1)/2} - x_1^{-(2m+1)/2}} - \frac{x_1^{(2m'+1)/2} + x_1^{-(2m'+1)/2}}{x_1^{(2m'+1)/2} - x_1^{-(2m'+1)/2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2ni} \left[\operatorname{ctg} \frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg} \frac{2m'+1}{2n}\pi \right]. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n} \left[\operatorname{ctg} \frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg} \frac{2m'+1}{2n}\pi \right] \quad (m, m' < n).$$

Zauważmy, że z tego wzoru łatwo można by otrzymać poprzedni wynik, gdybyśmy zastąpili n przez $2n$ i podstawili $m' = m+n$ (dla $m < n$).

3) Rozpatrzmy wreszcie całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n} \cos \theta + 1} dx,$$

gdzie $m < n$ i $-\pi < \theta < \pi$.

(¹) Uwzględniając, że $x^n = -1$.

Wprowadzając kąt $\theta' = \pi - \theta$, $0 < \theta < 2\pi$ otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} - 2x^{2n} \cos \theta' + 1} dx.$$

Przy obliczeniu pierwiastków mianownika podstawiamy $x^{2n} = z$, wtedy możemy z wyznaczyć z równań $z^2 - 2z \cos \theta' + 1 = 0$, a mianowicie $z = \cos \theta' \pm i \sin \theta'$. Otrzymujemy dwie serie wartości x :

$$x_v = x_0 \varepsilon^v \quad \text{dla} \quad x_0 = \cos \frac{\theta'}{2n} + i \sin \frac{\theta'}{2n}, \quad \varepsilon = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n},$$

$$\bar{x}_v = \bar{x}_0 \bar{\varepsilon}^v \quad \text{dla} \quad \bar{x}_0 = \cos \frac{\theta'}{2n} - i \sin \frac{\theta'}{2n}, \quad \bar{\varepsilon} = \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n},$$

$$(v = 0, 1, \dots, n-1; \quad n, \dots, 2n-1).$$

Przy tym dodatnią część urojoną będzie miało n pierwszych wyrazów pierwszej serii i n ostatnich drugiej.

Współczynniki A_v odpowiadające pierwiastkom x_v ($v = 0, 1, \dots, n-1$) obliczamy ze wzoru (7):

$$A_v = \frac{x_v^{2m}}{4n(x_v^{4n-1} - x_v^{2n-1} \cos \theta')} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_v^{2m+1}}{x_v^{2n}(x_v^{2n} - \cos \theta)} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_0^{2m+1} \cdot \varepsilon^{(2m+1)v}}{(\cos \theta' + i \sin \theta') \cdot i \sin \theta'}.$$

Sumując te współczynniki i mnożąc przez $2\pi i$ otrzymujemy ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos \left(\frac{2m+1}{2n} - 1 \right) \theta' + i \sin \left(\frac{2m+1}{2n} - 1 \right) \theta'}{\sin \theta'} \cdot \frac{1 - (\varepsilon^n)^{2m+1}}{1 - \varepsilon^{2m+1}} = \\ & = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\cos \left(1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta' - i \sin \left(1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta'}{\sin \theta'} \cdot \frac{1}{\left(1 - \cos \frac{2m+1}{n} \pi \right) - i \sin \frac{2m+1}{n} \pi}. \end{aligned}$$

Dla drugiej grupy pierwiastków \bar{x}_v ($v = n, n+1, \dots, 2n-1$) otrzymamy analogicznie sprzężone z nim wyrażenie. Suma tych wyrażeń da podwójną część rzeczywistą. Po dokonaniu elementarnych przekształceń suma ta sprowadza się do

$$\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \left[\left(1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta' + \frac{2m+1}{2n} \pi \right]}{\sin \theta' \sin \frac{2m+1}{2n} \pi}.$$

Biorąc znów kąt $\theta = \pi - \theta'$ otrzymujemy ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n} \cos \theta + 1} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \left(1 - \frac{2m+1}{2n} \right) \theta}{\sin \theta \cdot \sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad (m < n, \quad -\pi < \theta < \pi).$$

⁽¹⁾ $\varepsilon^n = -1$.

497. Mieszane przykłady i ćwiczenia

1) Udowodnić zbieżność całki

$$I = \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot (\sin x)^{2/3}}.$$

Punktów osobliwych mamy nieskończonie wiele: $x = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$). W każdym przedziale skończonym jest ich skończenie wiele i całka jest zbieżna. Chodzi więc tylko o zbieżność całki w przedziale nieskończonym. Jest

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(x+n\pi)^2 (\sin x)^{2/3}} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} < +\infty.$$

2) Jeżeli w zbieżnej [478, 5] (c)] całce

$$\int_0^{\infty} |\log t|^{\lambda} \frac{\sin t}{t} dt \quad (\lambda > 0)$$

dokonamy podstawienia $t = e^x$, $x = \ln t$, otrzymamy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\lambda} \sin e^x dx.$$

Ostatnia całka jest więc zbieżna, mimo iż funkcja podcałkowa przy nieograniczonym wzroście $|x|$ oscyluje między $-\infty$ a $+\infty$.

3) Widzieliśmy przed chwilą, że na to by całka

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

była zbieżna, nie trzeba nawet, żeby

$$(9) \quad f(x) = o(1) \quad (\text{dla } x \rightarrow \infty).$$

Udowodnić, że jednak

(a) jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

to w przypadku zbieżności całki (8), granica ta jest na pewno równa 0, co więcej

(b) jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x),$$

to granica ta równa się 0, tzn.

$$(10) \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right),$$

(c) jeżeli funkcja całkowalna w przedziale $\langle a, \infty \rangle$ maleje monotonicznie, to ten warunek (10) jest na pewno spełniony.

Dowód [w przypadku (b) i (c)] jest podobny do dowodu analogicznych twierdzeń dotyczących szeregów dodatnich [375, 3)].

Zauważmy jeszcze (także podobnie jak w przypadku szeregów), że nawet, gdy funkcja $f(x)$ monotonicznie maleje, warunek (10) nie gwarantuje zbieżności całki (8). Jako przykład może służyć rozbieżna całka

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad (a > 1).$$

4) Uogólnić twierdzenie udowodnione w 478, 6) na przypadek, gdy funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, a+\omega \rangle$ w sensie właściwym (z zachowaniem pozostałych założeń).

Korzystając z tego wykazać, zakładając, że $g(x)$ dąży monotonicznie do 0, gdy $x \rightarrow \infty$, że całka

$$\int_0^\infty \ln |\sin x| \cdot g(x) dx$$

jest zbieżna lub rozbieżna równocześnie z całką

$$\int_0^\infty g(x) dx,$$

podczas gdy całka

$$\int_0^\infty \ln 2 |\sin x| \cdot g(x) dx$$

jest zbieżna zawsze.

5) Obliczyć całki

$$(a) \int_0^\pi x \ln \sin x dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (c) \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Wskazówka. (a) Za pomocą podstawienia $x = \pi - t$ całkę sprowadzamy do $\int_0^\pi \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt$.

(b), (c). Całki sprowadzają się do $\int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt$ za pomocą podstawień $x = \sin t$, $\ln \frac{1}{\sin t}$.

6) Obliczyć całkę

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx.$$

Mamy (przyjmując $x = \sin \theta$)

$$J = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta d\theta.$$

Całkując przez części otrzymujemy dalej

$$J = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2} \pi.$$

7) Obliczyć całkę

$$K = \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 \theta - a^2| d\theta \quad (a^2 < 1).$$

Przyjmując $a = \sin \omega$ i korzystając z tożsamości

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \omega = \sin(\theta - \omega) - \sin(\theta + \omega),$$

mamy

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\omega + \frac{\pi}{2}} \ln |\sin \theta| d\theta = \int_0^\pi \ln \sin \theta d\theta = -\pi \ln 2.$$

8) Obliczyć całkę

$$L = \int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx \quad (a, b > 0).$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru [491, 13)] mamy

$$L = e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$$

[patrz 492, 2°].

9) Obliczyć całki

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi, \quad J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy $\cos \theta$ przez x i dokonajmy podstawienia $z = \cos \varphi$. Wtedy

$$\cos \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad \cos \frac{3}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}(2z-1),$$

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}, \quad J_1 = \frac{1}{\pi} \int_z^1 \frac{(2z-1)dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}.$$

Po wprowadzeniu jeszcze raz nowej zmiennej t według wzoru $\sqrt{(z-x)(1-z)} = t(1-z)$ otrzymujemy

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 1,$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2+2x-1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} + 2(x-1) \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right\} = x.$$

A więc $J_0 = 1$, i $J_1 = \cos \theta$. Dalej [511, 3)] otrzymamy ogólniejszy wynik.

10) Całkując przez części sprawdzić, że

$$(a) \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b-a), \quad (b) \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi}(b-a),$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2 x^2) - \ln(1+b^2 x^2)}{x^2} dx = \pi(a-b).$$

11) Łatwo zauważyc, że [492, 3°, 494, 5)]

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \alpha > 0, \\ 0 & \text{dla } \alpha = 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{dla } \alpha < 0. \end{cases}$$

Stąd wynika, wobec

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x} dx + \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x} dx \right\},$$

że oczywiście (jeżeli przyjmiemy dla uproszczenia, że α i $\beta > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \beta < \alpha, \\ \frac{1}{4}\pi & \text{dla } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{dla } \beta > \alpha. \end{cases}$$

Całka ta była często stosowana przez Dirichleta i znana jest pod nazwą *nieciąglego czynnika Dirichleta*.

Wiele innych całek daje się do niego sprowadzić. Na przykład

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \alpha < \beta + \gamma, \\ \frac{1}{8}\pi & \text{dla } \alpha = \beta + \gamma, \\ 0 & \text{dla } \alpha > \beta + \gamma \end{cases}$$

(gdy $\alpha, \beta, \gamma > 0$ i α jest największą z tych liczb). Zastępujemy tu iloczyn dwóch sinusów przez różnicę kosinusów lub (przyjmując znów $\alpha, \beta > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\beta & \text{dla } \beta < \alpha, \\ \frac{1}{2}\pi\alpha & \text{dla } \beta > \alpha \end{cases}$$

(całkujemy przez części).

Ten ostatni wynik można uogólnić w sposób następujący:

Jeżeli $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ i $a > \sum_1^n \alpha_i$, to

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Dowód przeprowadzamy metodą indukcji matematycznej (całkowanie przez części).

12) Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Wskazówka. Całkować przez części; wykorzystać nieciągły czynnik Dirichleta. Odpowiedź: $\frac{1}{2}\pi |a-b|$.

13) Obliczyć

$$\text{V.p. } \int_0^\infty \frac{2x \cdot \sin \alpha x}{x^2 - r^2} dx \quad (\alpha, r > 0).$$

Rozwiązanie. Punkt osobliwy $x = r$. Korzystając z tożsamości

$$\frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r},$$

wydzielimy do razu całkę zbieżną

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x+r} dx = \cos \alpha r \int_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} dy - \sin \alpha r \int_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y} dy.$$

Następnie za pomocą łatwych przekształceń otrzymujemy

$$\left(\int_0^{r-\epsilon} + \int_{r+\epsilon}^\infty \right) \frac{\sin \alpha x}{x-r} dx = \cos \alpha r \int_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} dy + \sin \alpha r \int_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y} dy + 2 \cos \alpha r \int_\epsilon^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} dy,$$

więc

$$\text{V.p. } \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x-r} dx,$$

gdzie w ostatniej całce przyjmiemy po prostu $\epsilon = 0$.

Ostatecznie

$$\text{V.p. } \int_0^\infty \frac{2x \sin \alpha x}{x^2 - r^2} dx = 2 \cos \alpha r \cdot \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} dy = \pi \cos \alpha r.$$

14) Niech funkcja $f(x)$ ($0 < x < \infty$) spełnia warunki

$$f(x+\pi) = f(x) \quad \text{i} \quad f(\pi-x) = f(x).$$

Przy założeniu istnienia całki po lewej stronie udowodnić wzór

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

Wzór ten pochodzi od Łobaczewskiego i jego dowód polega na rozkładzie funkcji $1/\sin x$ na ułamki proste, tak samo jak w szczególnym przypadku $f(x) \equiv 1$ [patrz 492, 3°].

Zastosować ten wzór do obliczenia całek

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin^{2v+1}}{x} dx = \int_0^\infty \sin^{2v} x \frac{\sin x}{x} dx \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$$(b) \int_0^\infty \operatorname{arc tg}(a \sin x) \frac{dx}{x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arc tg}(a \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \quad (a > 0).$$

Ciąkę (a) sprowadzamy do znanej już [312 (8)] całki

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2v} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!},$$

a całą (b) do całki

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} at}{t \sqrt{1-t^2}} dt$$

(podstawienie: $t = \sin x$), której wartość

$$\frac{1}{2} \pi \ln(a + \sqrt{1+a^2})$$

obliczymy później [511, 9]).

15) Nakładając te same warunki na funkcję $f(x)$ udowodnić – znowu przy założeniu istnienia całki po lewej stronie – wzór

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

Wskazówka. Tutaj też zastosujemy metodę Łobaczewskiego tylko z uwzględnieniem rozwinięcia na ułamki proste funkcji $1/\sin^2 x$ [441, 9)].

Gdy $f(x) \equiv 1$, otrzymujemy znów znaną nam już całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

[patrz 494, 4)].

16) Obliczyć całki ($a, b > 0$):

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bx dx, \quad (c) \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx.$$

Wskazówka. Wszystkie sprowadzamy do całek Froullaniego; pierwsze dwie całki są dla $a = b$ rozbieżne.

Odpowiedź. (a) $\ln \sqrt{\frac{a+b}{|a-b|}}$, (b) $\ln \frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$, (c) $\ln \frac{a}{b}$.

17) Obliczyć całki ($a, b > 0$):

$$(a) \int_0^\infty \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{b \ln(1+ax) - a \ln(1+bx)}{x^2} dx, \quad (c) \int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Wskazówka. Wszystkie trzy sprowadzają się do całek Froullaniego całkowaniem przez części.

18) Obliczyć całkę ($a > 0$)

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

Rozwiązanie. Mamy tożsamość

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) = & -\frac{1}{2x} (e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} e^{-x} \right) - \\ & -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right). \end{aligned}$$

Całki z drugiego i trzeciego wyrażenia znoszą się wzajemnie (o czym łatwo można się przekonać przez zamianę zmiennej) i wszystkie sprowadzają się do całki Froullaniego. Odpowiedź: $-\frac{1}{2} \ln 2$.

19) Obliczyć całkę ($a, b > 0$)

$$\int_a^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2} dx.$$

Rozwiązanie. Mamy (dla $\eta > 0$)

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx + (a-b) \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx \quad (1).$$

Pierwszą z całek po prawej stronie przekształcamy całkując przez części:

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx = - \left. \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right|_{\eta}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{be^{-bx} - ae^{-ax}}{x} dx,$$

więc ostatecznie

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + xa - be^{-bx}}{x^2} dx = \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx.$$

Gdy $\eta \rightarrow 0$, pierwsze wyrażenie po prawej stronie dąży do $b-a$, a drugie do całki Froulianiego:

$$a \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = a \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

20) Wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{A \cos ax + B \cos bx + \dots + K \cos kx}{x} dx = -\{A \ln a + B \ln b + \dots + K \ln k\}$$

przy założeniu, że $a, b, \dots, k > 0$ i $A+B+\dots+K=0$ (ostatni warunek jest oczywiście konieczny dla istnienia całki).

Wskazówka. Przyjmując $K = -A-B-\dots$, skorzystać ze wzorów

$$\int \frac{A \cos ax - A \cos kx}{x} dx = -A \ln a + A \ln k, \quad \text{itd.}$$

Łatwo można uogólnić powyższy wzór na przypadek dowolnej funkcji $f(x)$ spełniającej warunki ustępu 495, II.

21) Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^m} dx,$$

gdzie n i m są liczbami naturalnymi i $n > m \geq 2$.

Rozwiązanie. Przenosząc na przypadek przedziału nieskończonego uogólniony wzór na całkowanie przez części [311], otrzymujemy od razu

$$(11) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^m} dx = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \sin^n x \frac{dx}{x}$$

(gdyż znika tu pierwszy wyraz).

(1) Całki te nie są zbieżne, gdy $\eta = 0$.

Przy obliczeniu tej ostatniej całki wygodnie jest skorzystać ze znanego już nam rozkładu $\sin^n x$ na sumę sinusów i kosinusów łuków krotnych [461, 3), (a) i (b)].

Rozpatrzmy różne przypadki, które mogą tu wystąpić.

(a) $n = 2v+1, m = 2\mu+1$. Wtedy

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2v+1} x = \frac{(-1)^{v+\mu}}{2^{2v}} \left[(2v+1)^{2\mu} \sin(2v+1)x - (2v+1)(2v-1)^{2\mu} \sin(2v-1)x + \frac{(2v+1)2v}{1 \cdot 2} (2v-3)^{2\mu} \sin(2v-3)x - \dots \right]$$

i na podstawie wzoru (11)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2v+1} x}{x^{2\mu+1}} dx = \frac{(-1)^{v+\mu}}{2^{2v} \cdot (2\mu)!} \cdot \frac{\pi}{2} \left[(2v+1)^{2\mu} - (2v+1)(2v-1)^{2\mu} + \frac{(2v+1)2v}{1 \cdot 2} (2v-3)^{2\mu} - \dots \right],$$

(b) $n = 2v, m = 2\mu+1$. W tym przypadku

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2v} x = \frac{(-1)^{v+\mu}}{2^{2v-1}} \left[(2v)^{2\mu} \cos 2vx - 2v(2v-2)^{2\mu} \cos(2v-2)x + \frac{2v(2v-1)}{1 \cdot 2} (2v-4)^{2\mu} \cos(2v-4)x - \dots \right].$$

Łatwo zauważyć, że lewa strona jest równa 0 dla $x = 0$ (ponieważ $v > \mu$). A więc suma współczynników przy kosinusach równa się 0 i możemy skorzystać z poprzedniego przykładu 20. Stąd

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2v} x}{x^{2\mu+1}} dx = \frac{(-1)^{v+\mu+1}}{2^{2v-1} (2\mu)!} \left[(2v)^{2\mu} \ln 2v - 2v(2v-2)^{2\mu} \ln(2v-2) + \frac{2v(2v-1)}{1 \cdot 2} (2v-4)^{2\mu} \ln(2v-4) - \dots \right].$$

W analogiczny sposób otrzymuje się wzory w przypadku (c) $n = 2v+1, m = 2\mu$ i (d) $n = 2v, m = 2\mu$. Należy zauważyć, że w szczególności dla dowolnego $n \geq 2$ jest

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \frac{\pi}{2^n (n-1)!} \left[n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-1} - \dots \right].$$

22) Za pomocą tego samego rozkładu z 461, 3) (b) łatwo można otrzymać (w przypadku $p > 0$), że

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2v+1} px}{x} dx = \frac{(-1)^v \pi}{2^{2v+1}} \left[1 - (2v+1) + \frac{(2v+1)2v}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^v \frac{(2v+1) \cdot 2v \cdot \dots \cdot (v+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} \right].$$

Nawiasem mówiąc, wyrażenie to daje się za pomocą elementarnych przekształceń sprowadzić do prostszego:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!}.$$

Ciąka $\int_0^\infty \frac{\sin^{2v} px}{x} dx$ jest rozbieżna. Ciąka Froullaniego

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2r} px - \sin^{2q} qx}{x} dx \quad (p, q > 0)$$

nie spełnia warunków z ustępu 495, ale za pomocą rozkładu z ustępu 461, 3) (a) można łatwo wykazać,

że daje się ona sprowadzić do przypadku II całki Froullaniego, jeżeli $\sin^{2v}x$ zastąpimy przez

$$\sin^{2v}x = \frac{1}{2^v} \cdot \frac{2v(2v-1)\dots(v+1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot v}.$$

Ostatecznie ze wzoru (4a) otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2v}px - \sin^{2v}qx}{x} dx = \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \ln \frac{q}{p}.$$

Całka $\int_0^\infty \frac{\cos^n x}{x} dx$ nie jest zbieżna dla żadnego n naturalnego, ale dla $n = 2v+1$ zbieżna jest całka $\int_0^\infty \frac{\cos^{2v+1}px - \cos^{2v+1}qx}{x} dx$ i ze wzoru Froullaniego (4a) otrzymujemy od razu

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2v+1}px - \cos^{2v+1}qx}{x} dx = \ln \frac{q}{p}.$$

Dla $n = 2v$ korzystamy z rozkładu z 461, 3) (c) tak samo jak poprzednio dla sinusów. Otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2v}px - \cos^{2v}qx}{x} dx = \left(1 - \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!}\right) \ln \frac{q}{p}.$$

23) Wykazać prawdziwość następujących wzorów (¹):

$$(a) \int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma} & \text{dla } |\gamma| > 1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{dla } |\gamma| = 1, \\ 0 & \text{dla } |\gamma| < 1, \end{cases}$$

$$(b) \int_0^\infty \sin \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma} & \text{dla } |\gamma| > 1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{dla } |\gamma| = 1, \\ 0 & \text{dla } |\gamma| < 1, \end{cases}$$

$$(c) \int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} \ln \left| \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right| & \text{dla } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 1 & \text{dla } \gamma = 0 \text{ (²).} \end{cases}$$

(¹) Całki

$$- \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{i} \quad - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

to są właśnie funkcje si x i ci x („sinus całkowy” i „kosinus całkowy”), wspomniane w ustępie 289.

(²) Dla $\gamma = \pm 1$ całka jest rozbieżna.

$$(d) \int_0^\infty \sin yx dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \ln |1 - \gamma^2| & \text{dla } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 0 & \text{dla } \gamma = 0 \text{ (1)}, \end{cases}$$

$$(e) \int_0^\infty e^{-yx} dx \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma) & \text{dla } \gamma > 0, \\ 1 & \text{dla } \gamma = 0. \end{cases}$$

Dowód. (a) Przyjmując, że $\gamma > 0$ lub że $\gamma < 0$ całkujemy przez części

$$\int_0^\infty \cos yx dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{1}{\gamma} \sin yx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} \cos x dx.$$

Ponieważ

$$\left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| < \left| \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| + \left| \int_x^1 \frac{dx}{x} \right| = c + |\ln x|$$

i wyrażenie to, po podstawieniu granic, równa się 0, więc całka sprowadza się do nieciągłego czynnika Dirichleta [(11)].

Oddzielnie rozpatrzmy przypadek $\gamma = 0$. Dla dowolnego $A > 0$, całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^A dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt &= x \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_0^A + \int_0^A \cos x dx = A \int_A^\infty \frac{\cos t}{t} dt + \sin A = \\ &= A \frac{\sin t}{t} \Big|_A^\infty + A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt + \sin A = A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Stosując drugie twierdzenie o wartości średniej [487], sprowadzamy to ostatnie wyrażenie do postaci $\int_A^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ ($\bar{A} > A$), a ta całka dąży do 0, gdy $A \rightarrow \infty$, z uwagi na warunki Bolzano-Cauchy'ego [475]

zastosowane do zbieżnej całki $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$. A więc

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = 0.$$

Dowody przebiegają analogicznie także w pozostałych przypadkach.

24) Udoswodnić prawdziwość następujących wzorów ($\alpha, \beta > 0$):

$$(a) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha}, & \text{gdy } \alpha > \beta, \\ \frac{\pi}{2\beta}, & \text{gdy } \alpha < \beta. \end{cases}$$

(1) Dla $\gamma = \pm 1$ całka jest rozbieżna.

$$(b) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha}, & \text{gdy } \alpha > \beta, \\ \frac{\pi}{2\beta}, & \text{gdy } \alpha < \beta. \end{cases}$$

$$(c) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right| + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{|\alpha^2 - \beta^2|}{\alpha^2}, & \text{gdy } \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{\alpha} \ln 2, & \text{gdy } \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$(d) \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Dowód. (a) Całkując przez części sprowadzamy daną całkę do całek postaci (23) (a):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \left\{ \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right\} = \\ &= x \cdot \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \cos \alpha x dx \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt + \int_0^\infty \cos \beta x dx \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \cos \frac{\alpha}{\beta} x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \cos \frac{\beta}{\alpha} x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{2\beta}, \end{aligned}$$

zależnie od tego, czy $\alpha > \beta$, czy też $\alpha < \beta$.

Podamy jeszcze pewne wyjaśnienie o zerowaniu się wyrażenia otrzymanego po podstawieniu granic. Ze znanego już nam oszacowania

$$\left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| < c + |\ln x|$$

widac, że wyrażenie występujące przed symbolem $\Big|_{x=0}^{x=\infty}$ dąży do 0 wraz z x . Z drugiej strony,

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin t}{t} \Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt, \quad \left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \right| < \frac{2}{x},$$

skąd wynika, że wspomniane wyrażenie dąży do 0 także dla $x \rightarrow \infty$.

Dowody pozostałych wzorów przebiegają analogicznie. Trzeba się przy tym powołać na wzory wyrowadzone w 23) (b), (c), (d) i (e).

§ 5. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych

498. Całki o skończonych granicach całkowania; wydzielenie osobliwości. Wyżej w ustępach 322-328 zbadaliśmy różne przykłady na obliczanie przybliżone całek oznaczonych w sensie właściwym. Do całek niewłaściwych metod tych i podanych dla nich oszacowań błędów nie można bezpośrednio zastosować. Czasem udaje się przez zamianę zmiennej lub też całkowaniem przez części sprowadzić całkę niewłaściwą do właściwej. Wtedy całkowanie przybliżone całki niewłaściwej sprowadza się do znanego już nam zadania.

W wielu przypadkach obliczenie przybliżone całki niewłaściwej $\int_a^b f(x) dx$ w przedziale skończonym można uprościć, stosując tzw. *wydzielenie osobliwości* ⁽¹⁾. Metoda ta polega na znalezieniu takiej funkcji $g(x)$ prostego kształtu, która jak gdyby pochłania wszystkie osobliwości funkcji $f(x)$ tak, że różnica $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ nie zawiera już osobliwości, to znaczy jest całkowalna w sensie właściwym. Staramy się przy tym tak dobrąć funkcję $g(x)$, żeby całkę z $g(x)$ otrzymać w postaci skończonej i żeby funkcja $\varphi(x)$ miała pochodne dostatecznie wysokiego rzędu, aby przy przybliżonym obliczaniu jej całki można było wykorzystać odpowiednie wzory na oszacowanie błędu.

Funkcję $g(x)$ dobieramy w różny sposób zależnie od przypadku. Jako przykład podamy ogólną regułę konstrukcji tej funkcji dla pewnej często spotykanej klasy całek.

Przypuśćmy, że funkcja podcałkowa ma postać

$$f(x) = (x - x_0)^{-\alpha} h(x) \quad (a < x_0 < b, \quad 0 < \alpha < 1),$$

gdzie $h(x)$ dla $a < x < b$ daje się rozwinąć w szereg

$$h(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$$

Przyjmujemy wtedy

$$g(x) = (x - x_0)^{-\alpha} [c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n]$$

i

$$\varphi(x) = (x - x_0)^{-\alpha} [c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots] = (x - x_0)^{\alpha+(1-\alpha)} [c_{n+1} + \dots].$$

Całkę z $g(x)$ obliczamy łatwo; ponadto $\varphi(x)$ ma oczywiście w przedziale $\langle a, b \rangle$, z punktem x_0 włącznie, n pochodnych ciągłych.

499. Przykłady

1) Niech dana będzie całka

$$\int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} dx = 2 \int_0^{1/2} x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} dx;$$

w ostatniej całce jedynym punktem osobliwym jest 0.

Rozwijając $(1-x)^{-1/2}$ według potęg x , poprzestaniemy na wyrazie zawierającym x^4 . Przyjmijmy

$$g(x) = x^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right),$$

$$\varphi(x) = x^{-1/2} \left[(1-x)^{-1/2} - \left(1 + \dots + \frac{35}{128}x^4 \right) \right] = \frac{63}{256}x^{9/2} + \dots$$

Wtedy

$$I = \int_0^{1/2} x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} dx = \int_0^{1/2} g(x) dx + \int_0^{1/2} \varphi(x) dx = I_1 + I_2.$$

Wartość I_1 łatwo można obliczyć

$$I_1 = \frac{715801}{645120} \sqrt{2} = 1,5691585\dots$$

⁽¹⁾ Metoda podana przez L. W. Kantorowicza.

Natomiast I_2 obliczymy według wzoru Simpsona dzieląc przedział $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ na $2n = 10$ części i prowadząc obliczenia do 6 cyfr po przecinku:

$$\begin{array}{ll}
 y_0 = y_{1/2} = 0 & 2y_1 = 0,000018 \\
 & 4y_{3/2} = 0,000225 \\
 & 2y_2 = 0,000431 \\
 & 4y_{5/2} = 0,002496 \quad I_1 \approx 1,5691585 \\
 & 2y_3 = 0,003017 \quad I_2 \approx 0,0016385 \\
 & 4y_{7/2} = 0,012901 \quad I \approx 1,5707970 \\
 & 2y_4 = 0,012632 \\
 & 4y_{9/2} = 0,046350 \\
 & \underline{y_5 = 0,020239} \\
 & \underline{0,098309} \underline{|} 60 \\
 & \underline{\underline{0,0016385}}
 \end{array}$$

Prawdziwa wartość I jest równa (jak to wynika z teorii funkcji beta 529 (5a))

$$\frac{\pi}{2} = 1,5707963\dots$$

Oszacujemy błąd, nie korzystając oczywiście z tego, że możemy za pomocą innych rozważań otrzymać dokładną wartość całki. Mamy:

$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{63}{256} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} + \dots > 0,$$

więc $\varphi^{(4)}$ rośnie z x i największą wartość osiąga dla $x = \frac{1}{2}$. Stąd łatwo otrzymujemy, że $\max \varphi^{(4)}(x) = 288$.

Błąd we wzorze Simpsona wyraża się według znanego wzoru [327]

$$R = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4} \cdot \frac{\varphi^{(4)}(\xi)}{180}.$$

A więc

$$R < 0, \quad |R| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4} \cdot \frac{288}{180} = \frac{5}{10^6}.$$

Natomiast błąd otrzymanej wartości I_2 , który powstał przy zaokrąglaniu, jest co do wartości bezwzględnej mniejszy niż $\frac{5 \cdot 10^{-6}}{60} < 10^{-7}$. Taki sam jest bezwzględny błąd wartości I_1 . Ogólny błąd jest zawarty między $-\frac{5,2}{10^6}$ i $\frac{0,2}{10^6}$, a więc

$$1,5707918 < I < 1,5707972 \quad \text{lub} \quad 1,570791 < I < 1,570798.$$

Ostatecznie

$$I = 1,57079_{+0,00001}.$$

2) W przypadku całki $I = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-3/4} dx$ obydwa punkty 0 i 1 są punktami osobliwymi.

Odpowiednio dzielimy ją na dwie całki:

$$I = \int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 = I_1 + I_2.$$

Aby obliczyć I_1 przyjmujemy

$$g(x) = x^{-1/2} \left(1 + \frac{3}{4}x + \frac{31}{32}x^2 + \frac{77}{128}x^3 + \frac{1155}{2048}x^4 \right),$$

$$\varphi(x) = x^{-1/2} \left[(1-x)^{-3/4} - \left(1 + \dots + \frac{1155}{2048}x^4 \right) \right],$$

A więc

$$I_1 = \int_0^{1/2} g(x) dx + \int_0^{1/2} \varphi(x) dx = I_{11} + I_{12}.$$

Otrzymujemy natychmiast

$$I_{11} = \frac{576293}{491520} \sqrt{2} = 1,6581248.$$

Całkę I_{12} obliczamy według wzoru Simpsona, $2n = 10$, do szóstego miejsca: $I_{12} \approx 0,003813$. Stąd $I_1 \approx 1,661938$. Szacując błąd jak poprzednio, otrzymujemy

$$I_1 = 1,66193 \pm 0,000001.$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{1/2}^1 x^{-1/2} (1-x)^{-3/4} dx = \int_0^{1/2} x^{-3/4} (1-x)^{-1/2} dx = \\ &= \int_0^{1/2} x^{-3/4} \left(1 + \frac{1}{2}x + \dots + \frac{35}{128}x^4\right) dx + \int_0^{1/2} x^{-3/4} [(1-x)^{-1/2} - (1+\dots)] dx = I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$I_{21} = 3,580291, \quad I_{22} = 0,002033, \quad I_2 = 3,582324.$$

Gdy oszacujemy błąd jak poprzednio, otrzymamy

$$I_2 = 3,58232 \pm 0,000005.$$

A więc

$$I = 5,24425 \pm 0,000015 \quad \text{lub} \quad I = 5,24426 \pm 0,00001.$$

3) Dana jest całka $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$. Osobliwość w punkcie $x=0$.

Celem wydzielenia osobliwości postąpimy podobnie jak poprzednio. Przyjmijmy

$$I = \int_0^1 (1+x+x^2+x^3+x^4) \ln x dx + \int_0^1 \frac{x^5 \ln x}{1-x} dx = I_1 + I_2.$$

Łatwo obliczyć całkowaniem przez części, że $I_1 = -1,46361\dots$ Całkę I_2 obliczamy według wzoru Simpsona ($2n = 10$, z pięcioma cyframi po przecinku). Otrzymamy $I_2 \approx 0,18135$. A więc $I \approx -1,64496$. Prawdziwa wartość szukanej całki [519, 1) (b)]: $-\frac{1}{6}\pi^2 = 1,644934\dots$

Przy szacowaniu błędu obliczamy pochodną $\varphi^{(4)}(x)$ według wzoru Leibniza [117]. Wygodnie jest przy tym korzystać z dającego się łatwo wyprowadzić wzoru

$$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right]^{(k)} = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(c),$$

(gdzie c jest zawarte pomiędzy a i x), biorąc poza tym $f(x) = \ln x$, $a = 1$. Oszacowanie z grubsza daje: $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$. Stąd

$$|R| < \frac{1}{10^4} \cdot \frac{200}{180} = 0,00011.$$

Ogólny błąd $\pm 0,00013$. Ostatecznie

$$|I| = 1,645 \pm 0,0002.$$

4) W końcu rozpatrzmy przykład innego rodzaju

$$I = \int_0^{\pi/2} \log_{10} \sin x \, dx,$$

z punktem osobliwym 0.

Naturalne będzie przyporządkowanie funkcji podcałkowej funkcji $g(x) = \log_{10} x$, której całkę łatwo obliczymy ⁽¹⁾.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log_{10} x \, dx = M \int_0^{\pi/2} \ln x \, dx = Mx(\ln x - 1) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi \cdot (\log \frac{1}{2}\pi - M) \approx -0,374123.$$

Natomiast całkę I_2 z funkcji $\varphi(x) = \log \frac{\sin x}{x}$ obliczamy według wzoru Simpsona ($2n = 18$, sześć cyfr po przecinku). Mamy

$$I_2 = - \int_0^{\pi/2} [\log_{10} x - \log_{10} \sin x] \, dx \approx -0,098733.$$

Wobec tego

$$I = I_1 + I_2 \approx -0,472856.$$

W rzeczywistości całka I różni się od znanej już nam [492, 1°] całki

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \frac{1}{2}\pi \cdot \ln 2$$

tylko o czynnik M , więc

$$I = -\frac{1}{2}\pi \log_{10} 2 = -0,4728568\dots;$$

widzimy, że wszystkie sześć cyfr w otrzymanej poprzednio wartości całki są dokładne.

Nie znając prawdziwej wartości, musielibyśmy korzystać z oszacowania błędu we wzorze Simpsona. Tutaj

$$\varphi(x) = M(\ln x - \ln \sin x), \quad \varphi^{(4)}(x) = M \frac{6(x^4 - \sin^4 x) - 4x^4 \sin^2 x}{x^4 \sin^4 x}.$$

Można wykazać, że $0 < \varphi^{(4)}(x) < \frac{\pi^4}{12} M < 36$, skąd $R < 0$ i $|R| < 0,000002$. Uwzględniając błąd przy zaokrąglaniu moglibyśmy stwierdzić tylko tyle, że

$$|I| \approx 0,47285_{+0,00001}.$$

500. Uwaga o przybliżonym obliczaniu całek właściwych. Metoda wydzielania osobliwości może się okazać przydatna także przy obliczaniu całek właściwych, jeżeli funkcja podcałkowa, będąc nawet ciągła, nie ma potrzebnej liczby ciągłych pochodnych (utrudnia to oszacowanie błędu). Wyjaśnimy to na przykładzie.

Rozpatrzmy całkę

$$I = \int_0^1 \ln x \ln(1+x) \, dx.$$

⁽¹⁾ Litera M oznacza współczynnik przejścia od logarytmów naturalnych do dziesiętnych.

Łatwo można zauważyć, że gdy $x \rightarrow 0$, funkcja podcałkowa dąży do 0, a więc funkcję tę można uważać za ciągłą w całym przedziale całkowania, lecz już pierwsza pochodna funkcji podcałkowej jest w punkcie $x = 0$ nieskończona. Korzystając z rozwinięcia logarytmu przedstawimy naszą funkcję w postaci sumy dwóch funkcji

$$g(x) = \ln x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)$$

i

$$\varphi(x) = \ln x \cdot \left[\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right].$$

Całkę z pierwszej funkcji można łatwo obliczyć: wartość jej wynosi $-0,20528\dots$. Całkę z drugiej funkcji (która ma już cztery pochodne ciągłe) obliczamy według wzoru Simpsona ($2n = 10$, pięć cyfr po przecinku). Otrzymamy $-0,00348$, a więc wynik ostateczny wynosi $-0,20876$.

Ponieważ $|\varphi^{(4)}(x)| < 36$ więc $|R| < 0,00002$. Ostatecznie

$$|I| = 0,20876_{\pm 0,00003} = 0,2087_{+0,0001}.$$

(W rzeczywistości wszystkie otrzymane cyfry tej wartości przybliżonej są dokładne, ponieważ prawdziwa wartość I wynosi $-0,2087618\dots$).

Ciekawe, że gdy wzór Simpsoona (dla tej samej wartości $2n = 10$ i obliczając tak samo do pięciu cyfr po przecinku) zastosujemy do funkcji podcałkowej bez uprzedniego wydzielenia osobliwości, otrzymamy $I \approx -0,2080$, tzn. otrzymamy tylko trzy dokładne cyfry po przecinku.

Tak więc, jeżeli nie skorzystamy z wydzielenia osobliwości, to nie tylko będziemy mieli trudności z oszacowaniem błędu, lecz możemy nawet faktycznie uzyskać mniejszą dokładność wyniku.

501. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych w przedziale nieskończonym. Rzadko udaje się obliczyć całkę $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

na podstawie jej definicji jako granicę całki właściwej $\int_a^A f(x) dx$ przyjmując w przybliżeniu dla dostatecznie dużego A , że $\int_a^{+\infty} f(x) dx \approx \int_a^A f(x) dx$ i obliczając znanymi metodami tę ostatnią całkę. Może się to okazać korzystne tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa szybko maleje wraz ze wzrostem x , tzn. wtedy, gdy nawet przy niewielkim A podana poprzednio przybliżona równość jest już wystarczająco dokładna.

1) Tak będzie na przykład w przypadku całki $I \approx \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Z nierówności $x^2 \geq 2Ax - A^2$ wynika, że

$$e^{-x^2} \leq e^{A^2} \cdot e^{-2Ax}$$

oraz

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{A^2} \cdot \int_A^{+\infty} e^{-2Ax} dx = \frac{1}{2A} e^{-A^2}.$$

Dla $A = 3$ jest

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx < 0,00002.$$

Całkę $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ obliczamy według wzoru Simpsoona biorąc $n = 30$ i uwzględniając w obliczeniach pięć cyfr po przecinku. Otrzymujemy $0,88621$. Łatwo otrzymujemy oszacowanie $|(e^{-x^2})^{(4)}| < 12$, $|R| < 2 \cdot 10^{-5}$. Ogólny błąd zawarty jest między $-0,00004$ i $0,00006$. A więc

$$0,88617 < I < 0,88627, \quad I = 0,8862_{\pm 0,0001}.$$

Jak wiemy [492, 2°], dokładna wartość I wynosi $\sqrt{\pi/2} = 0,886226\dots$

Najczęściej wygodniej jest przekształcić całkę \int_a^{∞} tak, by miała skończone granice całkowania lub rozłożyć ją na dwie całki $\int_0^1 + \int_1^{\infty}$ i przekształcić w taki sposób tę drugą.

2) Weźmy znów tę samą całkę $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ i przedstawmy ją w postaci sumy

$$\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty} = I_1 + I_2 .$$

I_1 obliczymy według wzoru Simpsona biorąc $2n = 10$ i pięć cyfr po przecinku; $|R| < 0,00001$, $I_1 = 0,746830_{\pm 0,00002}$. I_2 przekształcimy za pomocą podstawienia $x = 1/t$ i otrzymamy

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-1/t^2} dt .$$

Obliczymy zwykłymi metodami $I_2 \approx 0,13945$, a więc $I \approx 0,88628$.

Oszacowaniem błędu nie będziemy się zajmowali.

Gdy całka w przedziale nieskończonym ma punkt osobliwy, również w skończeności należy rozłożyć przedział na dwa, zawierające tylko jedną osobliwość.

3) Rozpatrzmy (dla $0 < a < 1$) całkę

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = I_1 + I_2 .$$

Całkę I_1 obliczamy wydzielając osobliwości

$$I_1 = \int_0^1 (x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3}) dx - \int_0^1 \frac{x^{a+4}}{1+x} dx = I_{11} - I_{12} .$$

$$I_{11} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4}, \text{ a } I_{12} \text{ obliczamy według wzoru Simpsona.}$$

Niech na przykład $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071068\dots$; wtedy $I_{11} = 1,14052\dots$ Dla I_{12} ($2n = 10$, pięć cyfr po przecinku) otrzymujemy wartość $0,09518$. A więc $I_1 \approx 1,04534$.

Całkę I_2 sprowadzamy za pomocą podstawienia $x = 1/t$ do postaci

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t} dt ,$$

gdzie $b = 1-a = 0,2928931\dots$ Tak samo jak poprzednio otrzymamy $I_2 \approx 2,90289$. Ostatecznie $I \approx 3,94823$. Później [522, 1º] dowiemy się, że prawdziwa wartość I wynosi $\frac{\pi}{\sin \pi a} = 3,948246\dots$

Czasem w przypadku wolno zbieżnej całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ może się udać wydzielenie z niej (na przykład całkując kilkakrotnie przez części) łatwych od obliczenia wyrazów, w ten sposób, aby pozostała całka była już bardzo mała.

4) Niech będzie dana całka

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Przedstawmy ją w postaci sumy całek $\int_0^A + \int_A^\infty$ nie starając się jednak o to, żeby druga z nich była mała. Całkując następnie przez części

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \left\{ -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \frac{\cos x}{x^3} + 6 \frac{\sin x}{x^4} - 24 \frac{\cos x}{x^5} - 120 \frac{\sin x}{x^6} \right\} \Big|_A^\infty + \\ &\quad + 720 \int_A^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx. \end{aligned}$$

Biorąc na przykład $A = 2\pi$, otrzymujemy

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx.$$

Suma całkowalnych wyrazów wynosi 0,15354...

Dalej

$$0 < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{dx}{x^7} = \frac{120}{(2\pi)^6} < 0,002.$$

Obliczając całkę $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^7} dx$ według wzoru Simpsona ($2n = 40$, cztery cyfry po przecinku), otrzymujemy 1,4182.

Oszacowanie błędu:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}, \quad f^{(4)}(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{2m!(2m+5)},$$

$$|f^{(4)}(x)| < \frac{1}{5} \cosh 2\pi < 54, \quad |R| < 0,0012.$$

Stąd po uwzględnieniu ogólnego błędu mamy

$$1,5702 < I < 1,5752, \quad I = 1,57_{+0,01}.$$

Jak wiemy [492, 3°], w rzeczywistości jest $I = \frac{1}{2}\pi = 1,5707\dots$

502. Wykorzystanie rozwinięć asymptotycznych. Przy przybliżonym obliczaniu całek postaci

$$\int_x^\infty f(t) dt$$

wygodne jest często korzystanie z rozwinięć asymptotycznych. Wyjaśnimy to na przykładach.

1° *Logarytm całkowy.* Gdy $0 < a < 1$, logarytm całkowy li a definiujemy wzorem

$$(12) \quad \text{li } a = \int_0^a \frac{du}{\ln u};$$

w przypadku gdy $a > 1$ całka ta jest rozbieżna i rozumiemy ją w sensie wartości głównej:

$$(12^*) \quad \text{li } a = \text{V.P.} \int_0^a \frac{du}{\ln u} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^a \right) \frac{du}{\ln u}$$

[patrz 484].

Niech najpierw $a < 1$. Przyjmijmy $a = e^{-x}$ dla $x > 0$ i dokonajmy w całce (12) podstawienia $u = e^{-t}$:

$$(13) \quad \text{li}(e^{-x}) = - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Podstawiając $t = x+v$, otrzymamy całkę

$$(14) \quad \text{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-v} dv}{x+v}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{x+v} = \frac{1}{x} - \frac{v}{x^2} + \frac{v^2}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{v^{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{v^n}{x^n(x+v)},$$

więc stąd wynika [489, 4], że

$$(15) \quad \text{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + r_n(x) \right\},$$

gdzie reszta ma postać całki

$$(15a) \quad r_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{v^n e^{-v} dv}{x^n(x+v)}.$$

Jeżeli odrzucimy tę resztę i przedłużymy rozwinięcie do nieskończoności

$$(16) \quad \text{li}(e^{-x}) \sim -e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots \right\},$$

to otrzymany szereg będzie wyraźnie rozbieżny, gdyż stosunek następnego wyrazu do poprzedniego

$$\frac{n}{x} \rightarrow \infty, \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ze wzoru (15a) widać jednak, że reszta ma znak pierwszego odrzuconego wyrazu szeregu i jest co do bezwzględnej wartości mniejsza od tego wyrazu:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-v} v^n dv = \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (1).$$

A więc szereg (16) oscyluje wokół funkcji $\text{li}(e^{-x})$ i jednocześnie jest jej przedstawieniem asymptotycznym [463]. Z § 6 poprzedniego rozdziału czytelnik wie, że taki szereg można wykorzystać do rachunków przybliżonych. Najlepszy wynik otrzymamy, gdy $n = [x]$.

(1) W rozpatrywanym przypadku, gdy $a < 1$, rozwinięcie asymptotyczne (16) i resztę szeregu można otrzymać przez wielokrotne całkowanie (13) przez części. Droga ta nic nie daje w przypadku $a > 1$.

Jeżeli $a > 1$ i $x < 0$, to sprawia znacznie się komplikuje. W tym przypadku też możemy otrzymać wzory (13)-(16), lecz wszystkie całki musimy rozumieć w sensie wartości głównych. Wyrazy szeregu (16) będą miały w tym przypadku stały znak (przecież $x < 0$) i przy szacowaniu reszty natrafimy na duże trudności. Za pomocą dokładnych i głębokich badań udało się Stieltjesowi wykazać, że aby otrzymać najlepsze przybliżenie wartości $\text{li}(e^{-x})$ należy dla danego $x < 0$ wziąć także $n = \lfloor |x| \rfloor$. Stopień przybliżenia szacuje się przy tym przez $\sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}$.

Mogemy otrzymać dla funkcji $\text{li}(e^{-x})$ rozwinięcie według całkowitych rosnących potęg x , słuszne dla wszystkich wartości x . Napiszemy w tym celu wzór (13) w postaci

$$\text{li}(e^{-x}) = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t}.$$

Gdy $x < 0$, całka $\int_1^x \frac{dt}{t}$ jest rozbieżna i trzeba wziąć jej wartość główną. Jest ona równa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_1^\varepsilon + \int_{-\varepsilon}^x \right) \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\ln \varepsilon + \ln \frac{-x}{\varepsilon} \right] = \ln(-x) = \ln|x|.$$

Suma pierwszych dwóch całek nie zależy od x i jest równa stałej C ⁽¹⁾. Pozostaje tylko rozwinąć ostatnią całkę według potęg x , żeby otrzymać szukany wynik

$$(17) \quad \text{li}(e^{-x}) = C + \ln|x| - x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} - \frac{x^3}{3! \cdot 3} - \frac{x^4}{4! \cdot 4} - \dots - \frac{x^n}{n! \cdot n} - \dots$$

Jednak korzystać z tego rozwinięcia dla dużych wartości $|x|$ nie jest wygodnie i szereg rozbieżny (16) ma w tym przypadku nad nim wyraźną przewagę. Stieltjes obliczył, biorąc 23 wyrazy szeregu (16), że

$$\text{li } 10^{10} = 455055614,586;$$

natomiast w szeregu (17) trzeba by wziąć ponad 10^{10} wyrazów, żeby uzyskać tę samą dokładność!

2º *Kosinus i sinus całkowy:*

$$P = \text{ci } x = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad Q = \text{si } x = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

W celu uproszczenia rozważań rozpatrzymy całkę z funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej

$$P + Qi = - \int_x^\infty \frac{e^{it}}{t} dt = i \int_x^\infty \frac{de^{it}}{t}.$$

Kolejnym całkowaniem przez części otrzymamy wzór

$$P + Qi = \frac{e^{ix}}{ix} + \frac{e^{ix}}{(ix)^2} + 2! \frac{e^{ix}}{(ix)^3} + 3! \frac{e^{ix}}{(ix)^4} + \dots + (n-1)! \frac{e^{ix}}{(ix)^n} + r_n(x),$$

gdzie

$$r_n(x) = (-1)^{n-1} i^n \cdot n! \cdot \int_x^\infty \frac{e^{it}}{t^{n+1}} dt.$$

(1) Jak zobaczymy później, jest ona rzeczywiście równa stałej Eulera [538, 3)].

Jeżeli otrzymany wzór podzielimy wyraz za wyrazem przez $-e^{ix}$ i porównamy oddzielnie części rzeczywiste i urojone po obu stronach równości, to otrzymamy dogodniejsze do obliczeń wzory

$$(18) \quad \int_x^{\infty} \frac{\cos(t-x)}{t} dt = -P \cos x - Q \sin x = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \dots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m-1)!}{x^{2m-1}} \right\} + r'_{2m-1}(x)$$

oraz

$$(19) \quad \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = P \sin x - Q \cos x = \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{2!}{x^2} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{x^{2m-2}} \right\} + r''_{2m-2}(x) \text{ (1)},$$

gdzie odpowiednio

$$r'_{2m-1}(x) = (-1)^m (2m+1)! \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+2}} dt$$

oraz

$$r''_{2m-2}(x) = (-1)^m (2m)! \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+1}} dt.$$

Łatwo wykazać (na przykład korzystając ze wzoru Bonneta, 306 (3)), że

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t^n} dt \right| < \frac{2}{x^n}.$$

Przechodząc do granicy dla $X \rightarrow \infty$ stwierdzimy, że reszty we wzorach (18) i (19) są co do wartości bezwzględnej odpowiednio nie większe niż podwojony wyraz następnego odpowiedniego rozwinięcia. Stąd widać wyraźnie, że po przedłużeniu rozwinięć (18) i (19) do nieskończoności otrzymamy przedstawienia asymptotyczne całek, występujących po lewej stronie tych wzorów.

W szczególności, na przykład z (19) otrzymamy po podstawieniu $x = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\rho_k = \sin(k\pi) = - \int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \sim (-1)^{k+1} \left\{ \frac{1}{k\pi} + \frac{2!}{(k\pi)^3} + \frac{4!}{(k\pi)^5} - \frac{6!}{(k\pi)^7} + \dots \right\}.$$

Stąd możemy już łatwo otrzymać dla $k > 2$ przybliżone wartości

$$\rho_3 = 0,1040, \quad \rho_4 = -0,0786, \quad \rho_5 = 0,0631, \quad \rho_6 = -0,0528, \dots$$

(1) Ciekawe, że wyrazy w nawiasie klamrowym $\{ \dots \}$ są właśnie odwrotnościami wyrazów znanych rozwinięć sinusa i kosinusa w szeregi potęgowe [404 (12) i (13)].

ROZDZIAŁ XIV

CAŁKI ZALEŻNE OD PARAMETRU

§ 1. Teoria elementarna

503. Sformułowanie zagadnienia. Rozpatrzmy funkcję $f(x, y)$ dwu zmiennych, określoną dla wszystkich wartości x z pewnego przedziału $\langle a, b \rangle$ i wszystkich wartości y ze zbioru $\mathcal{Y} = \{y\}$. Założymy, że dla każdej ustalonej wartości y z \mathcal{Y} istnieje całka właściwa lub niewłaściwa z funkcji $f(x, y)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$. Przy tym założeniu całka

$$(1) \quad I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

jest oczywiście funkcją pomocniczą zmiennej, czyli parametru y .

W ustępie 436 mówiąc o ciągu funkcji $\{f_n(x)\}$ rozpatrywaliśmy całki

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx,$$

są one szczególnym przypadkiem całek (1), w roli parametru występuje tu wskaźnik naturalny n .

Nasuwa się oczywiście wiele zagadnień związanych z funkcją (1) i dotyczących istnienia i obliczania granicy tej funkcji przy określonym przejściu granicznym, jej ciągłości, różniczkowalności i obliczania pochodnej i wreszcie całki z niej. Tym wszystkim zagadnieniom poświęcony jest niniejszy rozdział.

Badanie własności funkcji określonej całką (1) zależną od parametru jest interesujące samo przez się, ponadto twierdzenia o tego typu funkcjach, które udowodnimy niżej, mają różnorodne zastosowania, w szczególności do obliczania całek niewłaściwych.

504. Zbieżność jednostajna do funkcji granicznej. Zasadniczą rolę w badaniach, do których przystępujemy, będzie właśnie odgrywało pojęcie wymienione w tytule ustępu.

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona, ogólnie biorąc, w dwuwymiarowym zbiorze $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gdzie \mathcal{X} i \mathcal{Y} są zbiorami wartości odpowiednio zmiennej x i y . Niech przy tym \mathcal{Y} ma jako punkt skupienia skończoną liczbę y_0 .

Jeżeli 1) dla funkcji $f(x, y)$ przy $y \rightarrow y_0$ istnieje skończona funkcja graniczna .

$$(2) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$

i 2) dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$ niezależną od x , że

$$(3) \quad \text{gdy } |y - y_0| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich x ze zbioru \mathcal{X} jednocześnie, to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ dąży do funkcji granicznej $\varphi(x)$ jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X} .

Łatwo jest rozciągnąć to określenie na przypadek, gdy punkt skupienia y_0 jest w nieskończoności, np. gdy jest nim $+\infty$. Trzeba przy tym tylko nierówność $|y - y_0| < \delta$ zastąpić przez nierówność postaci $y > \Delta$. W rozdziale XII, w ustępie 428, mieliśmy już do czynienia z przypadkiem szczególnym takiego jednostajnego zbliżania się do funkcji granicznej, chodziło tam o funkcję $f_n(x)$ mającą wskaźnik naturalny n jako parametr.

W ustępie 429, rozpatrując ciągi funkcji stwierdziliśmy, że na to, aby zbieżność była jednostajna, musi zwykła zbieżność zachodzić w pewnym sensie równomiernie. Można to samo powiedzieć i w ogólnym przypadku. Mianowicie, gdy y_0 jest skończone, to

1° Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $f(x, y)$ przy $y \rightarrow y_0$ miała funkcję graniczną i dążyła do niej jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X} jest, żeby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba $\delta > 0$, niezależna od x , że nierówność

$$(4) \quad |f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

spełniona jest dla wszystkich x ze zbioru \mathcal{X} jednocześnie, jeżeli tylko

$$(5) \quad |y - y_0| < \delta, \quad |y' - y_0| < \delta \quad (y, y' \in \mathcal{Y}).$$

W przypadku gdy $y_0 = +\infty$, ostatnie nierówności trzeba zastąpić nierównościami $y > \Delta, y' > \Delta$.

Konieczność. Przypuśćmy, że zbieżność jest jednostajna. Zamieńmy ε , występujące w definicji na $\varepsilon/2$ i dobierzmy odpowiednio δ , a następnie weźmy dwie wartości y i y' z \mathcal{Y} tak, żeby spełniony był warunek (5). Niezależnie od wartości x będzie teraz

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{i} \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

skąd wynika już (4).

Dostateczność. Jeśli warunek 1° jest spełniony, to istnienie funkcji granicznej (2) jest od razu widoczne. Przejdzmy wobec tego do granicy w nierówności (4) przy $y' \rightarrow y_0$ i przy y ustalonym tak, żeby $|y - y_0| < \delta$. Otrzymujemy

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon,$$

a to właśnie oznacza, że $f(x, y)$ dąży jednostajnie do funkcji granicznej $\varphi(x)$.

Pokażemy teraz, że badanie zbieżności jednostajnej funkcji można sprowadzić do badania zbieżności ciągu funkcji:

2° Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $f(x, y)$ dla $y \rightarrow y_0$ dążyła do funkcji $\varphi(x)$ jednostajnie względem x w obszarze \mathcal{X} jest, aby dla każdego ciągu $\{y_n\}$ o wyrazach należących do \mathcal{X} , ciąg $\{f(x, y_n)\}$ dążył jednostajnie do $\varphi(x)$.

W dowodzie ograniczymy się do przypadku, gdy y_0 jest skończone.

Konieczność. Jeżeli $f(x, y)$ dąży jednostajnie do $\varphi(x)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać takie δ , aby spełniona była zależność (3). Dalej, dla każdego ciągu $y_n \rightarrow y_0$ istnieje taki wskaźnik N , że $|y_n - y_0| < \delta$, gdy $n > N$. Tym samym dla tych wartości n spełniona jest na mocy (3) nierówność

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

i to od razu dla wszystkich x . Wobec tego ciąg $\{f(x, y_n)\}$ jest jednostajnie zbieżny.

Dostateczność. Założmy teraz, że każdy ciąg $\{f(x, y_n)\}$ dąży do $\varphi(x)$ jednostajnie.

Aby wykazać, że funkcja $f(x, y)$ dąży do $\varphi(x)$ jednostajnie, przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas przy pewnym $\varepsilon > 0$ dla każdego $\delta = \delta' > 0$ znajdzie się taka wartość $y = y'$ z \mathcal{Y} , że chociaż $|y' - y_0| < \delta'$, to jednak co najmniej dla jednej wartości $x = x'$ z \mathcal{X} spełniona będzie nierówność $|f(x', y') - \varphi(x')| \geq \varepsilon$.

Weźmy teraz ciąg liczb dodatnich $\{\delta_n\}$ dążący do zera. Zgodnie z tym co powiedzieliśmy, każdemu δ_n można przyporządkować dwie liczby y_n i x_n takie, że

$$(6) \quad |y_n - y_0| < \delta_n \quad \text{i} \quad |f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Oczywiście $y_n \rightarrow y_0$, bo $\delta_n \rightarrow 0$, i z nierówności (6) wynika, że ciąg $\{f(x, y_n)\}$ nie dąży jednostajnie do $\varphi(x)$. Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem.

Niech teraz zbiór \mathcal{X} będzie skończonym przedziałem $\langle a, b \rangle$. Wiemy już [436], że jeśli ciąg $\{f_n(x)\}$ funkcji ciągłych (lub całkowalnych w zwykłym sensie) dąży jednostajnie do funkcji granicznej, to funkcja graniczna też jest ciągła (całkowalna). Z 2° widać od razu, że przenosi się to na przypadek ogólny:

3° Jeżeli funkcja $f(x, y)$ dla dowolnego $y \in \mathcal{Y}$ jest ciągła (całkowalna) względem x w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i dla $y \rightarrow y_0$ dąży jednostajnie do funkcji granicznej $\varphi(x)$, to funkcja $\varphi(x)$ jest też ciągła (całkowalna).

Udowodnimy jeszcze twierdzenie, z którego będziemy później korzystali, a które jest uogólnieniem twierdzenia Diniego [431]. Przyjmiemy przy tym, że stale jest $y < y_0$.

4° Założmy, że funkcja $f(x, y)$ jest przy dowolnym $y \in \mathcal{Y}$ ciągła (całkowalna) względem x w przedziale $\mathcal{X} = \langle a, b \rangle$ i przy wzrastaniu y dąży, rosnąc monotonicznie, do ciąglej funkcji granicznej $\varphi(x)$. Wówczas zbieżność ta musi być jednostajna względem x w przedziale \mathcal{X} .

Wybierzmy w \mathcal{Y} ciąg $\{y_n\}$ wartości y , rosnące单调nie i dążące do y_0 . Rozpatrzmy odpowiedni ciąg funkcji $\{f(x, y_n)\}$, także oczywiście rosnące单调nie wraz z n . Ponieważ szereg

$$f(x, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] = \varphi(x)$$

ma wszystkie wyrazy dodatnie (z wyjątkiem co najwyżej pierwszego), więc z twierdzenia Diniego wynika, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie względem x w przedziale \mathcal{X} . Dla danego $\varepsilon > 0$ można zatem znaleźć taki wskaźnik n_0 , że nierówność

$$|\varphi(x) - f(x, y_{n_0})| < \varepsilon$$

jest spełniona od razu dla wszystkich x z \mathcal{X} . Ponieważ funkcja f rośnie monotonicznie wraz z y , więc spełniona jest także nierówność

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $y > y_{n_0}$; tym samym twierdzenie jest udowodnione.

Powyższe kryterium zbieżności jednostajnej wydaje się bardzo specjalne, jest ono jednak nierzaz użyteczne i będziemy z niego korzystali.

505. Przedstawienie dwóch przejść do granicy. Przez cały wykład w tym rozdziale przewijają się zagadnienia przedstawiania dwóch przejść do granicy, przy różnego rodzaju przejściach granicznych. W najprostszej formie zagadnienie to wystąpiło już w ustępie 168, gdy badaliśmy istnienie i równość granic iterowanych

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

zakładając przy tym, że istnieje granica podwójna

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Dalej, w ustępie 436 stwierdziliśmy, że twierdzenie o przejściu do granicy wyraz za wyrazem w szeregu funkcyjnym zbieżnym jednostajnie może być wyrażone w podobnej formie

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Równość ta była znaleziona przy założeniu, że dla $n \rightarrow \infty$ funkcje $f_n(x)$ dążą jednostajnie do funkcji granicznej.

Posługując się pojęciem zbieżności jednostajnej, wprowadzonym w poprzednim ustępie, sformułujemy teraz ogólne twierdzenie tego typu. Założymy przy tym, że funkcja $f(x, y)$ jest określona w dwuwymiarowym zbiorze $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ i zbiory $\mathcal{X} = \{x\}$ i $\mathcal{Y} = \{y\}$ mają punkty skupienia odpowiednio x_0 i y_0 (skończone lub nie).

TWIERDZENIE. *Niech dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje zwykła granica*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

i dla każdego $y \in \mathcal{Y}$ zwykła granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y).$$

Jeżeli przy $y \rightarrow y_0$ funkcja $f(x, y)$ dąży do funkcji granicznej $\varphi(x)$ jednostajnie względem x w zbiorze \mathcal{X} , to istnieją i są równe obydwie granice iterowane (7).

Łatwo by było sprowadzić to twierdzenie do wspomnianego wyżej jego szczególnego przypadku, ale podamy tu dowód niezależny, przyjmując przy tym dla ustalenia uwagi, że obie liczby x_0 i y_0 są skończone.

Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, można na mocy twierdzenia 1° z ustępu 504 znaleźć odpowiednią liczbę $\delta > 0$ taką, że dla każdego $x \in \mathcal{X}$ nierówności (5) pociągają za sobą nie-

równość (4). Ustalmy wartości y i y' spełniające warunki (5), a x niech dąży do x_0 . Przechodząc w (4) do granicy otrzymujemy

$$(8) \quad |\psi(y') - \psi(y)| \leq \varepsilon.$$

Tym samym dla funkcji $\psi(y)$ przy $y \rightarrow y_0$ spełniony jest klasyczny warunek zbieżności Bolzano-Cauchego [58]. Stąd wynika już istnienie skończonej granicy

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = A.$$

Widac teraz, że jeżeli tylko $|y - y_0| < \delta$, to dla dowolnego $x \in X$

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |\psi(y) - A| \leq \varepsilon;$$

można to łatwo sprawdzić przechodząc w nierównościach (4) i (8) do granicy przy ustalonych x i y i $y' \rightarrow y_0$.

Zachowując wybraną wartość y znajdujemy takie $\delta' > 0$, że

$$|f(x, y) - \psi(y)| < \varepsilon$$

dla $|x - x_0| < \delta'$. Z wszystkich tych nierówności wynika, że dla tych samych wartości x spełniona jest też nierówność

$$|\varphi(x) - A| < 3\varepsilon,$$

a więc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A.$$

Twierdzenie jest udowodnione.

Uwaga. Można wykazać, że liczba A występująca w dowodzie jest jednocześnie podwójną granicą funkcji $f(x, y)$ przy jednoczesnym przejściu granicznym $x \rightarrow x_0$ i $y \rightarrow y_0$. Uwaga ta zbliża powyższe twierdzenie do twierdzenia z ustępu 168.

506. Przejście do granicy pod znakiem całki. Wróćmy teraz do badania całki (1) zależnej od parametru y ograniczając się przy tym początkowo do przedziału skończonego (a, b) i funkcji całkowalnej w zwykłym sensie. Przy założeniu, że obszar Y zmienności parametru ma punkt skupienia y_0 , zajmiemy się najpierw zagadnieniem istnienia granicy funkcji (1) dla $y \rightarrow y_0$.

TWIERDZENIE 1. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ przy ustalonym y jest całkowalna względem x w przedziale (a, b) i dla $y \rightarrow y_0$ dąży do funkcji granicznej (2) jednostajnie względem x , to zachodzi równość

$$(9) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Dowód (1). Wiemy już z ustępu 504, 3°, że funkcja graniczna $\varphi(x)$ jest całkowalna. Biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ znajdujemy taką liczbę $\delta > 0$, żeby spełniona była zależność (3).

(1) Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że y_0 jest skończone.

Wówczas dla $|y - y_0| < \delta$ jest

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

co dowodzi równości (9).

Wzór (9) można napisać w postaci

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

Jeżeli równość ta zachodzi, to mówimy, że przejście graniczne względem parametru można wnieść pod znak całki lub że jest ono dopuszczalne pod znakiem całki.

Zakładając, że stale jest $y < y_0$ otrzymujemy

Wniosek. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ przy ustalonym y jest w przedziale $\langle a, b \rangle$ ciągła względem x i przy wzrastaniu y dąży do ciągłej funkcji granicznej rosnąc przy tym monotonicznie, to równość (9) jest prawdziwa.

Wynika to z uogólnionego twierdzenia Diniego [504, 4°].

Rozpatrzmy na zakończenie problem ciągłości funkcji (1) przy założeniu, że obszar \mathcal{Y} jest też skończonym przedziałem $\langle c, d \rangle$.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła jako funkcja dwu zmiennych w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$, to całka (1) jest funkcją ciągłą parametru w przedziale $\langle c, d \rangle$.

Dowód. Wobec jednostajnej ciągłości $f(x, y)$ [174], można dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znaleźć takie $\delta > 0$, że z nierówności

$$|x'' - x'| < \delta, \quad |y'' - y'| < \delta$$

wynika nierówność

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Weźmy w szczególności $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$. Dla $|y - y_0|$ i dla dowolnego x jest teraz

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Tym samym dla y dążącego do dowolnej, ustalonej wartości y_0 , funkcja $f(x, y)$ dąży do $f(x, y_0)$ jednostajnie względem x . W tym przypadku zgodnie z twierdzeniem 1

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx,$$

czyli

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0),$$

z czego wynika już dowodzone twierdzenie.

Na przykład, nie obliczając całek

$$\int_0^1 \arctg \frac{x}{y} dx, \quad \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx,$$

widzimy od razu, że są one ciągłymi funkcjami parametru y dla dowolnych dodatnich jego wartości.

507. Różniczkowanie pod znakiem całki. Przy badaniu własności funkcji (1), która określona jest za pomocą całki zawierającej parametr y , zasadnicze znaczenie ma problem istnienia pochodnej tej funkcji względem parametru.

Przy założeniu istnienia pochodnej cząstkowej $f_y(x, y)$ Leibniz podał regułę obliczania pochodnej $I'(y)$, którą w oznaczeniach Lagrange'a można napisać tak:

$$(10) \quad I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

lub posługując się wymowniejszymi oznaczeniami Cauchy'ego:

$$D_y \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b D_y f(x, y) dx.$$

Jeżeli takie przedstawienie symbolu pochodnej względem y i całki względem x jest dopuszczalne, to mówimy, że funkcję (1) można różniczkować względem parametru y pod znakiem całki.

Taki sposób obliczania pochodnej będziemy nazywali *regułą Leibniza*.

Następujące twierdzenie podaje proste warunki wystarczające na to, aby można było stosować tę regułę.

TWIERDZENIE 3. Niech funkcja $f(x, y)$ określona w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$ będzie ciągła względem x w przedziale $\langle a, b \rangle$ przy dowolnie ustalonym y z przedziału $\langle c, d \rangle$. Założymy dalej, że w całym prostokącie istnieje pochodna cząstkowa $f_y(x, y)$, ciągła jako funkcja dwu zmiennych⁽¹⁾. Wówczas przy dowolnym y z przedziału $\langle c, d \rangle$ prawdziwy jest wzór (10).

Ciągłość funkcji $f(x, y)$ względem x gwarantuje istnienie całki (1).

Ustalmy dowolnie wartość $y = y_0$ i weźmy pewien przyrost tej zmiennej $\Delta y = k$. Jest zatem

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx, \quad I(y_0 + k) = \int_a^b f(x, y_0 + k) dx,$$

a więc

$$(11) \quad \frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx.$$

(1) Z tych założeń wynika już ciągłość funkcji $f(x, y)$ względem obu argumentów, nie będącym jednak z niej korzystali.

Całka z prawej strony zależy od parametru k . Czeka nas dowód tego, że przy $k \rightarrow 0$ można przejść do granicy pod znakiem całki. Będzie stąd wynikało istnienie pochodnej

$$I'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k}$$

i od razu otrzymamy potrzebną nam równość

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \\ &= \int_a^b \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \int_a^b f_y(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

W tym celu napiszmy najpierw, posługując się wzorem Lagrange'a,

$$(12) \quad \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f_y(x, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1).$$

Korzystając z jednostajnej ciągłości funkcji $f_y(x, y)$ możemy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znaleźć takie $\delta > 0$, że dla

$$|x'' - x'| < \delta \quad i \quad |y'' - y'| < \delta$$

spełniona jest nierówność

$$|f'_y(x'', y'') - f'_y(x', y')| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy tutaj $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \theta k$ i weźmy $|k| < \delta$. Korzystając z równości (12) możemy teraz powiedzieć, że dla wszystkich x jest

$$\left| \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} - f_y(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Widać stąd, że funkcja podcałkowa (12) dla $k \rightarrow 0$ dąży jednostajnie (względem x) do funkcji granicznej $f_y(x, y_0)$. Tym samym z twierdzenia 1 wynika, że dopuszczalne jest przejście graniczne pod znakiem całki (11).

Jako przykład rozpatrzymy znowu całki, o których mówiliśmy w poprzednim ustępie. Oczywiście, dla $y > 0$ jest

$$D_y \int_0^1 \arctg \frac{x}{y} dx = \int_0^1 D_y \arctg \frac{x}{y} dx = - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2},$$

$$D_y \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx = \int_0^1 D_y \ln(x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 2 \arctg \frac{1}{y}.$$

Latwo jest sprawdzić te wyniki obliczając bezpośrednio całki

$$I_1(y) = \int_0^1 \arctg \frac{x}{y} dx = \arctg \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2},$$

$$I_2(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx = \ln(1+y^2) - 2 + 2y \arctg \frac{1}{y}$$

i następnie różniczkując je względem y .

Dla $y = 0$ założenia twierdzenia 3 nie są spełnione; zbadajmy zatem co można powiedzieć o pochodnych funkcji $I_1(y)$ i $I_2(y)$ w tym punkcie. Jeżeli w pierwszej całce przy $y = 0$ i $x > 0$ przypiszemy funkcji podcałkowej — dla zachowania ciągłości — wartość $\frac{1}{2}\pi$, to otrzymamy $I_1(0) = \frac{1}{2}\pi$. Funkcja $I_1(y)$ będzie tym samym ciągła względem y przy $y = 0$. Jednak

$$\frac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2} - \frac{\arctg y}{y} \rightarrow -\infty$$

dla $y \rightarrow 0$, a więc pochodna skończona przy $y = 0$ nie istnieje. Dla funkcji $I_2(y)$ jest

$$I_2(0) = -2, \quad \frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + 2 \arctg \frac{1}{y} \rightarrow \pi$$

przy $y \rightarrow 0$. Zatem $I_2'(0) = \pi$, a tymczasem pochodna funkcji podcałkowej względem y jest równa zeru dla $y = 0$, a więc i całka z niej też jest równa零. Reguły Leibniza nie można stosować.

508. Całkowanie pod znakiem całki. Zajmiemy się teraz zagadnieniem istnienia całki funkcji (1) w przedziale $\langle c, d \rangle$.

Będzie nas szczególnie interesował przypadek, gdy całka ta może być przedstawiona wzorem

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx,$$

który — bez nawiasów — pisze się zwykle tak:

$$(13) \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

Gdy wzór ten jest prawdziwy, wówczas mówimy, że funkcję (1) można całkować względem parametru y pod znakiem całki (względem zmiennej x).

Następujące twierdzenie daje najprostsze warunki wystarczające na to, aby całki iterowane (13) były równe.

TWIERDZENIE 4. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła względem obu zmiennych w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$, to prawdziwa jest równość (13).

Udowodnimy ogólniejszą równość

$$(13a) \quad \int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy,$$

gdzie $c \leq \eta \leq d$.

Po obu stronach tej równości są funkcje parametru η ; obliczymy ich pochodne względem η . W zewnętrznej całce z lewej strony pod całką jest funkcja (1) ciągła względem y na mocy twierdzenia 2. Wobec tego pochodna tej całki względem zmiennej granicy górnej jest równa funkcji podcałkowej przy $y = \eta$, a więc jest równa całce

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx.$$

Z prawej strony równości (13a) występuje całka

$$\int_a^b \varphi(x, \eta) dx, \quad \text{gdzie} \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

Funkcja $\varphi(x, \eta)$ spełnia założenia twierdzenia 3. Rzeczywiście, jest ona ciągła względem x ⁽¹⁾ na mocy twierdzenia 2, a jej pochodna

$$\varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta)$$

jest funkcją ciągłą dwu zmiennych. Można wobec tego do całki z prawej strony zastosować regułę Leibniza

$$D_\eta \int_a^b \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b \varphi'_\eta(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx = I(\eta).$$

Obie strony równości (13a) mają zatem równe pochodne względem η i tym samym mogą się różnić co najwyżej o stałą. Gdy $\eta = c$ obie strony są równe zeru, muszą być zatem тожsamościowo równe dla wszystkich wartości η . Równość (13a) jest więc udowodniona.

Dla $\eta = d$ otrzymujemy z niej w szczególności równość (13).

PRZYKŁADY

1) Niech $f(x, y) = x^y$ w prostokącie $\langle 0, 1; a, b \rangle$, gdzie $0 < a < b$. Założenia twierdzenia są spełnione. Wobec tego

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

Łatwo jest obliczyć lewą stronę

$$\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Z prawej strony dochodzimy do całki $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$. Obliczyliśmy zatem jej wartość stosując zmianę kolejności całkowania [por. ustęp 497, 16) (c)].

2) W przypadku funkcji $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ w prostokącie $\langle 0, 1; 0, 1 \rangle$ założenia twierdzenia nie są spełnione: punkt $(0, 0)$ jest punktem nieciągłości. Jest teraz

$$\int_0^1 f dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \quad (y > 0).$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f dx = \arctg y \Big|_0^1 = \frac{1}{4}\pi,$$

(1) Zmienna x gra tu rolę parametru.

podczas gdy

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy = -\frac{1}{4}\pi.$$

509. Przypadek gdy granice całki także zależą od parametru. Rozpatrzmy teraz bardziej złożony przypadek, kiedy nie tylko wyrażenie podcałkowe zawiera parametr, ale i granice całki też od niego zależą.

W tym przypadku całka ma postać

$$(14) \quad I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Ograniczymy się do badania ciągłości i różniczkowalności takiej całki względem parametru.

TWIERDZENIE 5. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$, a krzywe

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

są ciągłe i nie wychodzą poza ten prostokąt, to całka (14) jest funkcją ciągłą parametru y w przedziale $\langle c, d \rangle$.

Niech y_0 będzie dowolną wartością y ; całkę (14) można napisać w postaci

$$(15) \quad I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx.$$

Na podstawie twierdzenia 2 pierwsza całka, w której granice są już stałe, dąży dla $y \rightarrow y_0$ do całki

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx.$$

Pozostałe dwie całki można oszacować następująco:

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right| \leq M \cdot |\beta(y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \right| \leq M \cdot |\alpha(y) - \alpha(y_0)|,$$

gdzie $M = \max |f(x, y)|$. Wobec ciągłości funkcji $\alpha(y)$ i $\beta(y)$ dążą one do zera, gdy $y \rightarrow y_0$. Tym samym

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0),$$

co dowodzi twierdzenia.

TWIERDZENIE 6. Jeżeli oprócz założeń twierdzenia 5 przyjmiemy jeszcze, że funkcja $f(x, y)$ ma w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$ ciągłą pochodną $f'_y(x, y)$ i że istnieją pochodne $\alpha'(y)$ i $\beta'(y)$, to całka (14) będzie miała pochodną względem parametru, wyrażającą się wzorem

$$(16) \quad I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Teraz także wyjdziemy z równości (15). Z twierdzenia 3 wynika, że pierwsza całka ma przy $y = y_0$ pochodną równą całce z pochodnej

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx.$$

Dla drugiej całki równej零, gdy $y = y_0$, z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \cdot f(\bar{x}, y),$$

gdzie \bar{x} jest zawarte między $\beta(y_0)$ i $\beta(y)$. Zatem pochodna tej całki dla $y = y_0$, pokrywająca się z granicą powyższego wyrażenia dla $y \rightarrow y_0$, jest równa

$$\beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0).$$

Dla pochodnej trzeciej całki przy $y = y_0$ otrzymujemy analogicznie

$$-\alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0).$$

Łącząc otrzymane wyniki stwierdzamy, że pochodna $I'(y_0)$ istnieje i jest przedstawiona wzorem (16).

Uwaga. Tezy obu twierdzeń są prawdziwe również wtedy, gdy funkcja $f(x, y)$ jest określona i ma wymienione w założeniach własności tylko w obszarze zawartym między krzywymi

$$x = \alpha(y) \quad \text{i} \quad x = \beta(y).$$

Możliwość rozpatrywania funkcji poza tym obszarem była wykorzystana tylko dla uproszczenia rozumowania. Pouczającym będzie spojrzenie na znalezione wyniki z następującego punktu widzenia. Całka $I(y)$ może być otrzymana z całki

$$I(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx,$$

zależnej od trzech parametrów y, u, v za pomocą podstawienia $u = \alpha(y), v = \beta(y)$. Zagadnienie zbadania jej własności sprowadza się do ogólnych twierdzeń o ciągłości i różniczkowalności funkcji złożonej. W szczególności wzór (16) może być napisany według klasycznego schematu

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u} \cdot \alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v} \cdot \beta'(y).$$

510. Wprowadzenie czynnika zależnego tylko od x . Łatwo jest otrzymać pewne uogólnienie otrzymanych wyżej rezultatów i to bez wprowadzania nowych idei. Można mianowicie zamiast całki (1) rozpatrywać całkę (1a)

$$(1a) \quad I(y) = \int_a^b f(x, y) g(x) dx,$$

gdzie $g(x)$ jest funkcją zmiennej x całkowalną bezwzględnie (w sensie właściwym lub

niewłaściwym) w przedziale $\langle a, b \rangle$. W ten sposób można wyłożyć teorię elementarną rozciągając częściowo na całki niewłaściwe.

Sformułujemy twierdzenia analogiczne do twierdzeń 1, 2, 3 i 4.

TWIERDZENIE 1*. Przy założeniach twierdzenia 1 prawdziwa jest równość

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx.$$

Zauważmy przede wszystkim, że wszystkie całki występujące tutaj istnieją. Całkowalność funkcji granicznej $\varphi(x)$ była już udowodniona. Istnienie zaś całek z funkcji $f \cdot g$ i $\varphi \cdot g$ (ogólnie mówiąc niewłaściwych) wynika z ustępu 482.

Teraz, biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ znajdujemy, korzystając z jednostajnej zbieżności funkcji $f(x, y)$ do $\varphi(x)$, taką liczbę $\delta > 0$, aby spełniona była nierówność (3) ⁽¹⁾. Dla $|y - y_0| < \delta$ jest zatem prawdziwe oszacowanie

$$\left| \int_a^b f(x, y) g(x) dx - \int_a^b \varphi(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| \cdot |g(x)| dx < \varepsilon \cdot \int_a^b |g(x)| dx,$$

z którego wynika dowodzona równość, bo z prawej strony dowolnie mała liczba jest pomnożona przez liczbę skończoną $\int_a^b |g(x)| dx$.

Twierdzenie to jest prawdziwe w szczególności dla ciągu funkcji $\{f_n(x)\}$ z wskaźnikiem n w roli parametru. Sformułujemy je w „języku” szeregów nieskończonych, ponieważ w takiej postaci stosuje się je najczęściej.

WNIOSEK. Jeżeli 1) wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

są funkcjami całkowalnymi w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz szereg ten jest jednostajnie zbieżny, 2) istnieje całka niewłaściwa z wartości bezwzględnej funkcji $g(x)$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) g(x)$$

można całkować wyraz za wyrazem.

Dalej, zupełnie tak samo jak twierdzenia 2 i 3 (tylko z powołaniem się na twierdzenie 1* zamiast na twierdzenie 1) można udowodnić następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 2*. Przy założeniach twierdzenia 2 całka (1a) jest funkcją ciągłą parametru y w przedziale $\langle c, d \rangle$.

TWIERDZENIE 3*. Przy założeniach twierdzenia 3 funkcja (1a) jest różniczkowalna względem parametru i prawdziwa jest przy tym równość

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x, y) g(x) dx.$$

⁽¹⁾ Tutaj, jak zwykle, rozpatrujemy dla przykładu przypadek skończonej wartości y_0 ; przejście do przypadku $y_0 = +\infty$ nie przedstawia trudności.

Wreszcie

TWIERDZENIE 4*. Przy założeniach twierdzenia 4 równe są całki iterowane

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b g(x) dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Dowód jest dosłownie taki sam jak dowód twierdzenia 4, należy się tylko powołać na twierdzenia 2* i 3* zamiast na twierdzenia 2 i 3.

Liczne przykłady zastosowania tych twierdzeń (jak również twierdzeń poprzednich) znajdzie czytelnik w następnym ustępie.

511. Przykłady.

1) Posługując się rozwinięciem w szereg funkcji e^x , przedstawić w postaci sumy szeregu całki

$$(a) \int_0^1 e^x \ln x dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Na podstawie wniosku z twierdzenia 1* mamy

$$(a) \int_0^1 e^x \ln x dx = \int_0^1 \ln x \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right\} dx = \int_0^1 \ln x dx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^m \ln x dx = \\ = - \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)! (m+1)} \right\},$$

$$(b) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{m-3/2} dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)m!}.$$

2) Rozwijając w szereg obliczyć całkę

$$I = \int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx.$$

Na podstawie twierdzeń z ustępu 437, 5^o szereg

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Ponieważ funkcja $\ln x$ jest bezwzględnie całkowalna w tym przedziale, to na podstawie tego samego wniosku z twierdzenia 1* jest

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^n \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}.$$

Korzystając z tożsamości

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

oraz ze znanych rozwinięć

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} = \ln 2, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ (1)},$$

(1) Patrz ustępy 405 (18); 440, 8.

można znalezione wyrażenie dla I napisać w postaci

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = 2 - 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Tutaj znaleźliśmy wartość I w „skończonej postaci”. Oczywiście nie zawsze się to udaje.

3) Oznaczmy przez $P_n(x)$ n -ty wielomian Legendre'a. Trzeba dowieść, że

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}}.$$

Jeżeli sobie przypomnimy pochodzenie wielomianów Legendre'a $P_n(x)$, które wyprowadziliśmy jako współczynniki rozwinięcia według potęg α wyrażenia $1/\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}$ (patrz ustęp 447, 8), to zobaczymy, że wystarczy rozpatrzyć szereg

$$(17) \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}}$$

i pokazać, że suma jego jest równa podanemu wyrażeniu dla $x = \cos \theta$. Gdy $|\alpha| < 1$, wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos(n + \frac{1}{2}) \varphi = (1-\alpha) \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{1-2\alpha \cos \varphi + \alpha^2}$$

[por. 461, 2] i przy tym szereg ten jest zbieżny jednostajnie względem φ , bo jest zmajoryzowany przez szereg geometryczny $\sum_0^\infty |\alpha|^n$. Przekształcając ten szereg i opierając się znowu na tym samym wniosku widzimy, że suma szeregu (17) może być przedstawiona w postaci całki

$$2 \frac{1-\alpha}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} \cdot \frac{d\varphi}{1-2\alpha \cos \varphi + \alpha^2}.$$

Stosując te same podstawienia, co w zadaniu 9) z ustępu 497 (w którym właściwie znaleźliśmy wynik częściowy, dla $n = 0$ i $n = 1$) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(z-x)(1-z)}} \cdot \frac{dz}{1-2\alpha z + \alpha^2} &= \frac{2}{\pi} (1-\alpha) \int_0^\infty \frac{dt}{(1-\alpha)^2 t^2 + (1-2\alpha x + \alpha^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Tym samym dowód jest zakończony.

4) Pokażemy tu jeden ze sposobów, za pomocą których Euler otrzymał swój wynik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Obliczymy całkę

$$E = \int_0^1 \arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\pi^2}{8}$$

na innej drodze, posługując się znanym rozwinięciem na szereg funkcji $\arcsin x$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Szereg ten w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ jest zbieżny jednostajnie. Otrzymujemy teraz

$$E = \int_0^1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!(2n+1)} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Ponieważ

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi \, d\varphi = \frac{2n!!}{(2n+1)!!},$$

więc ostatecznie

$$E = \frac{\pi^2}{8} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Stąd łatwo już jest otrzymać dowodzoną równość.

5) Pokazać, że metodę Łobaczewskiego, za pomocą której w zadaniach 14) i 15) z ustępu 497 wyrowadziliśmy wzory

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\pi/2} f(x) \, dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} f(x) \, dx,$$

można stosować także wówczas, gdy całka funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ jest niewłaściwa (i przy tym spełnione są pozostałe warunki).

Za pomocą tych wzorów obliczamy np. następujące całki:

$$(a) \int_0^{\infty} \ln |\sin x| \cdot \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2;$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{\ln |\cos x|}{x^2} \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln |\cos x|}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{\pi}{2}$$

(całkujemy przez części);

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 |\cos x|}{x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln^2 \cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\pi \ln 2$$

(całkujemy przez części).

6) Stwierdzić bezpośrednio, że dla całek ($y > 0$)

$$(a) \int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y} \, dx$$

przejście graniczne przy $y \rightarrow 0$ nie może być wniesione pod znak całki. Sprawdzić, że założenia twierdzenia 2 nie są spełnione.

7) Zastosujmy regułę Leibniza obliczania pochodnej względem parametru do całki

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 \theta) \, d\theta \quad (a > 1).$$

Łatwo jest sprawdzić, że założenia twierdzenia 3 są tu spełnione. Jest zatem

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a d\theta}{a^2 - \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Stąd, całkując względem a , odnajdujemy z powrotem wartość $I(a)$:

$$I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C.$$

Aby znaleźć stałą C , przedstawiamy całkę $I(a)$ w postaci

$$I(a) = \pi \ln a + \int_0^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) d\theta.$$

Korzystając teraz ze znalezionej wartości $I(a)$ obliczamy

$$C = \int_0^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) d\theta - \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}.$$

Przejdziemy teraz do granicy dla $a \rightarrow +\infty$. Ponieważ

$$\left| \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta \right) \right| < \left| \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right|,$$

to całka dąży do zera i otrzymujemy $C = -\pi \ln 2$. Ostatecznie więc dla $a > 1$ jest

$$I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}$$

(por. 497, 7). Warto zauważyć, że różniczkowanie według reguły Leibniza pozwoliło znaleźć skończone wyrażenie dla rozpatrywanej całki. Metoda ta dość często okazuje się skuteczna.

8) Jeszcze łatwiej jest obliczyć znaną już całkę [por. 307, 4); 314, 14); 440, 11)]

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx \quad (|r| < 1).$$

Według reguły Leibniza

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx.$$

Za pomocą podstawienia $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ łatwo jest przekonać się, że otrzymana całka jest równa zeru. Wobec tego

$$I(r) = C = \text{const.}$$

Ale $I(0) = 0$, a więc $C = 0$. Zatem dla $|r| < 1$ całka $I(r)$ jest równa zeru.

9) Obliczyć całkę $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x \sqrt{1-x^2}} dx$.

Wprowadzając parametr rozpatrzymy ogólniejszą całkę,

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} xy}{x \sqrt{1-x^2}} dx \quad (y > 0),$$

z której daną całkę otrzymuje się dla $y = 1$. Założenia twierdzenia 3 będą spełnione, jeżeli przyjmiemy

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arc tg} xy}{x} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Różniczkując pod znakiem całki względem y znajdujemy

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Całkę tę łatwo obliczyć np. za pomocą podstawienia $x = \cos \theta$

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+y^2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Całkując otrzymujemy stąd

$$I(y) = \frac{1}{2} \pi \ln (y + \sqrt{1+y^2}) + C.$$

Ponieważ $I(0) = 0$, więc $C = 0$; dla $y = 1$ otrzymujemy ostatecznie szukaną całkę

$$I = I(t) = \frac{1}{2} \pi \ln (1 + \sqrt{2}).$$

10) Udowodnić, że funkcje

$$(a) \quad u = x^n \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad \text{i} \quad (b) \quad u = \int_0^\pi \cos(n\theta - x \cdot \sin \theta) d\theta$$

dla całkowitych i nieujemnych n) spełniają równanie różniczkowe

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0,$$

zwane *równaniem Bessela*.

Rolę parametru odgrywać będzie tu x . Różniczkując dwukrotnie pod znakiem całki (twierdzenie 3) obliczamy u' i u'' , a następnie przekonujemy się, że suma z lewej strony równania po podstawieniu za u funkcji (a) lub (b) jest równa

$$(a) \quad x^{n+1} \int_0^\pi [x \cos(x \cos \theta) \sin^{2n+2} \theta - (2n+1) \sin(x \cos \theta) - \cos \theta \sin^{2n} \theta] d\theta = -\sin^{2n+1} \theta \cdot \sin(x \cos \theta) \Big|_0^\pi = 0,$$

$$(b) \quad - \int_0^\pi [(x^2 \sin^2 \theta + n^2 - x^2) \cos(n\theta - x \sin \theta) - x \sin \theta \cdot \sin(n\theta - x \sin \theta)] d\theta = -(n + x \cos \theta) \cdot \sin(n\theta - x \sin \theta) \Big|_0^\pi = 0.$$

11) Udowodnić, że równanie

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - n^2 u = 0$$

(dla całkowitych n) jest spełnione przez funkcję $Au_1 + Bu_2$ (A i B są dowolnymi stałymi), dla której

$$u_1 = \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} d\theta, \quad u_2 = \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} \ln(r \sin^2 \theta) d\theta.$$

Oczywiście wystarczy sprawdzić, że każda z tych funkcji z osobna spełnia równanie. Przekonujemy się o tym podobnie, jak w zadaniu poprzednim różniczkując pod znakiem całki, przy czym w przypadku funkcji u_1 stosujemy twierdzenie 3, a w przypadku funkcji

$$u_2 = \ln r \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} d\theta + 2 \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} \ln \sin \theta d\theta$$

także twierdzenie 3*.

12) Znaleźć pochodne całek eliptycznych zupełnych

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

względem modułu k ($0 < k < 1$).

Jest tutaj

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= - \int_0^{\pi/2} k \sin^2 \varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi - \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \right\} = \frac{E-K}{k}. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi - \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \right\}.$$

Ponieważ

$$\int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi = \frac{1}{1-k^2} \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \quad (1),$$

więc

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}.$$

Otrzymane wzory mają interesujące zastosowania. Na przykład jeżeli wprowadzimy moduł sprzężony $k' = \sqrt{1-k^2}$ oraz funkcję

$$E'(k) = E(k') \quad i \quad K'(k) = K(k'),$$

to z łatwością otrzymamy

$$\frac{d}{dk} (EK' + E'K - KK') = 0.$$

Wynika stąd, że $EK' + E'K - KK' = c = \text{const.}$

(1) Wynika to z łatwej do sprawdzenia tożsamości

$$(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} = \frac{1}{1-k^2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} - \frac{k}{1-k^2} \cdot \frac{d}{d\varphi} [\sin \varphi \cos \varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}].$$

Dla określenia stałej c znajdziemy granicę lewej strony przy $k \rightarrow 0$ ($k' \rightarrow 1$). Granicą tą będzie oczywiście c . Obliczamy przed wszystkim łatwo, że

$$\lim_{k \rightarrow 0} K = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} E' = \lim_{k' \rightarrow 1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 1$$

[twierdzenie 2, ustęp 506]. Jest zatem

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k'^2}} = \frac{\pi}{2k},$$

$$|E - K| = K - E = \int_0^{\pi/2} \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < \frac{\pi}{2} \cdot k^2,$$

a więc

$$|K'(E - K)| < \frac{1}{4} \pi^2 k \quad \text{i} \quad \lim_{k \rightarrow 0} K'(E - K) = 0.$$

Szukana granica jest równa $\frac{1}{2} \pi$ i ostatecznie otrzymujemy znaną zależność Legendre'a

$$EK' + E'K - KK' = \frac{1}{2} \pi.$$

13) Udowodnić tożsamość

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1} \underbrace{\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_a^1}_{n} f(t) dt}_{n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

gdzie $f(t)$ jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i $a < x < b$.

Rozwiązańe. Uciekniemy się do indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ tożsamość jest oczywista. Założymy teraz, że jest ona prawdziwa dla pewnego $n \geq 1$ i wykażemy, że pozostaje też prawdziwa przy zamianie n na $n+1$.

Dla skrócenia oznaczmy

$$I_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Zróżniczkujemy względem x funkcję

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt$$

stosując twierdzenie 6. Ponieważ dolna granica jest tutaj stała, a dla t równej górnej granicy, tzn. dla $t = x$ funkcja podcałkowa jest równa zeru, więc we wzorze (16) odpadają wyrazy nie zawierające całek i otrzymujemy

$$\frac{dI_{n+1}(x)}{dx} = I_n(x).$$

Ponieważ $I_n(a) = 0$, więc

$$I_{n+1}(x) = \int_a^x I_n(t_n) dt_n.$$

Podstawiając tu zamiast I_n odpowiednią całkę iterowaną otrzymujemy analogiczną całkę dla I_{n+1} .

Zupełnie tak samo można otrzymać ogólniejszy wynik

$$\int_0^x \varphi'(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} \varphi'(t_{n-2}) dt_{n-2} \dots \int_a^t f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^{n-1} f(t) dt,$$

gdzie f i φ są funkcjami ciągły w przedziale $\langle a, b \rangle$, przy czym φ ma również ciągłą pochodną.

14) Znaleźć pochodną względem parametru α całki

$$I(x) = \int_0^x \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

w której $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą wraz ze swoją pochodną $\varphi'(x)$ w przedziale $\langle 0, a \rangle$ i $0 < \alpha < a$. Nie możemy stosować bezpośrednio wzoru (16), ponieważ wyrażenie podcałkowe przy $x = \alpha$ jest ogólnie biorąc równe nieskończoności. Pójdziemy inną drogą, mianowicie przez podstawienie $x = \alpha t$ nadamy całce postać

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Teraz możemy stosować twierdzenie 3*. Różniczkując całkę według reguły Leibniza otrzymujemy

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt + \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}} dt$$

i wracając do starej zmiennej

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^x \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

Obliczając pierwszą z tych całek metodą całkowania przez części doprowadzimy ten wzór do prostszej postaci

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\infty \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

15) Niech

$$f(x, y) = \arctg \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{gdy } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$f(0, y) = \frac{1}{2}\pi.$$

Sprawdzić bezpośrednio, że do całki $\int_0^1 f(x, y) dx$ przy $y = 0$ nie można stosować reguły Leibniza.

To samo dla funkcji

$$f(x, y) = x \cdot e^{-x^2/y}, \quad \text{gdy } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$f(x, 0) = 0.$$

16) Pokażemy drugi sposób obliczenia całki

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x \sqrt{1-x^2}} dx,$$

która obliczyliśmy w zadaniu 9) różniczkując względem parametru. Zastępując w wyrażeniu podcałkowym $\frac{\operatorname{arc tg} x}{x}$ przez równą mu całkę

$$\frac{\operatorname{arc tg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

możemy przedstawić I w postaci całki iterowanej

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}.$$

Stosując twierdzenie 4* zmienimy kolejność całkowania

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

17) Obliczyć za pomocą całkowania pod znakiem całki całkę

$$K = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} \quad (a > b > 0).$$

Przedstawmy funkcję podcałkową w postaci całki

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}.$$

Wobec tego

$$K = 2ab \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$$

Zmieńmy teraz kolejność całkowania korzystając z twierdzenia 4. Otrzymujemy

$$K = 2ab \int_0^1 dy \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}.$$

Ponieważ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2a \sqrt{a^2-b^2y^2}},$$

więc ostatecznie

$$K = \pi b \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2-b^2y^2}} = \pi \arcsin \frac{b}{a}.$$

18) Podamy jeszcze przykłady całek, w których nie można zmienić kolejności całkowania:

$$(a) \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy = -\frac{1}{2},$$

$$(b) \int_0^1 dy \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right) e^{-x^2/y} dx = -\frac{1}{e}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right) e^{-x^2/y} dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

W tych przypadkach założenia odpowiednich twierdzeń nie są oczywiście spełnione — funkcja podcałkowa jest nieciągła w punkcie $(0, 0)$ ⁽¹⁾.

512. Dowód Gaussa podstawowego twierdzenia algebry. Korzystając z twierdzenia 4 Gauss podał bardzo interesujący dowód *podstawowego twierdzenia algebry*.

Twierdzenie to orzeka, że:

Każdy wielomian

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty lub zespolony.

Weźmy $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; wówczas

$$x^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)$$

oraz

$$f(x) = P + Qi,$$

gdzie

$$P = r^n \cos n\theta + \dots, \quad Q = r^n \sin n\theta + \dots$$

Nie napisane wyrazy zawierają tylko niższe potęgi r ; wyrazy nie zawierające r są po prostu stałe.

Twierdzenie będzie oczywiście udowodnione, jeżeli wykażemy, że suma $P^2 + Q^2$ jest równa zeru dla pewnego układu wartości r i θ .

Wprowadźmy pomocniczą funkcję

$$U = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{P}{Q},$$

i obliczmy jej pochodne

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r} Q - P \frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2}.$$

Widać, że

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \frac{H(r, \theta)}{(P^2 + Q^2)^2};$$

gdzie $H(r, \theta)$ jest funkcją ciągłą zmiennych r i θ ; dokładne wyrażenie tej funkcji nie jest nam potrzebne.

(1) Dla całki (b) funkcję podcałkową można zrobić ciągłą poza punktem $(0, 0)$ przyjmując jej wartość równą零 dla $y = 0$ (i $x \neq 0$).

Utwórzmy teraz całki iterowane

$$I_1 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta \quad i \quad I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr,$$

gdzie R jest stałą dodatnią, której wartość określmy niżej.

Gdyby funkcja $P^2 + Q^2$ nigdy nie była równa zeru, to funkcja podcałkowa w tych całkach byłaby ciągła i zgodnie z twierdzeniem 4 musiałaby być $I_1 = I_2$. Pokażemy, że przy dostatecznie dużym R równość taka nie może być prawdziwa; będzie stąd wynikało, że w jakimś punkcie koła o promieniu R i środka w początku układu funkcja $P^2 + Q^2$ musi być równa zeru. Twierdzenie będzie tym samym udowodnione.

Obliczając całkę wewnętrzną dla I_1 otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0,$$

bo pochodna $\frac{\partial U}{\partial r}$, jak widać od razu, jest funkcją zmiennej θ o okresie 2π . Wynika stąd, że $I_1 = 0$.

Zajmijmy się teraz całką I_2 . Mamy tu

$$\int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{r=0}^{r=R}.$$

Musimy teraz rozpatrzyć te wyrazy z licznika i mianownika ułamka przedstawiającego pochodną $\partial U / \partial \theta$, w których występują najwyższe potęgi r .

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -nr^n \sin n\theta + \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = nr^n \cos n\theta + \dots,$$

więc

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot Q - P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -nr^{2n} + \dots$$

Z drugiej strony,

$$P^2 + Q^2 = r^{2n} + \dots$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-nr^{2n} + \dots}{r^{2n} + \dots}$$

Wyrazy nie napisane zawierają niższe potęgi r , przy których współczynnikami są ograniczone funkcje zmiennej θ . Wobec tego

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -n$$

i przy tym zbieżność jest jednostajna względem θ .

Dla $r = 0$ jest $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, bo w tym przypadku $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$. Tym samym wewnętrzna całka w I_2 jest równa wartości $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ przy $r = R$. Ale, jeżeli $R \rightarrow \infty$, to wartość ta dąży, jak wiemy, do $-n$ i to jednostajnie względem θ . Na podstawie twierdzenia 1 jest zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = -2\pi n.$$

Dla dostatecznie dużych R całka I_2 jest więc ujemna i równość $I_1 = I_2$ nie może być prawdziwa.

§ 2. Zbieżność jednostajna całek

513. Definicja całki zbieżnej jednostajnie. Aby wyłożoną teorię rozciągnąć na przypadek całek niewłaściwych, trzeba wprowadzić pojęcie zbieżności jednostajnej całki, które będzie tu grało ważną rolę. Wyjaśnimy więc najpierw to pojęcie.

Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ określona jest dla wszystkich wartości $x \geq a$ i wszystkich wartości y z pewnego obszaru \mathcal{Y} . Założymy dalej, że dla każdej wartości y z obszaru \mathcal{Y} istnieje całka

$$(1) \quad I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx .$$

Zgodnie z definicją całki niewłaściwej o nieskończonej granicy górnej (patrz ustęp 470)

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x, y) dx .$$

Wobec tego całka

$$(2) \quad F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx .$$

będąca funkcją zmiennych A i y , ma jako granicę — przy $y = \text{const}$ i $A \rightarrow \infty$ — całkę $I(y)$. Jeżeli całka (2) dąży do $I(y)$ jednostajnie ze względu na y w obszarze \mathcal{Y} , to całkę $I(y)$ nazywamy *zbieżną jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y}* .

Zbieżność jednostajna całki (1) oznacza więc, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $A_0 \geq a$ niezależną od y , że jeżeli $A > A_0$, to nierówność

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

jest spełniona jednocześnie dla wszystkich y z obszaru \mathcal{Y} .

Rozpatrzmy dla przykładu całkę

$$\int_0^{\infty} ye^{-xy} dx ,$$

która jest zbieżna przy każdej ustalonej wartości $y \geq 0$.

Obliczymy bezpośrednio całkę

$$\int_A^{\infty} ye^{-xy} dx .$$

Dla $y = 0$ jest ona równa零 przy każdej wartości A ; jeżeli zaś $y > 0$, to za pomocą podstawienia $xy = t$ znajdujemy łatwo

$$\int_A^{\infty} ye^{-xy} dx = \int_{Ay}^{\infty} e^{-t} dt = e^{-Ay} .$$

Jeżeli y jest ustalone, to otrzymane wyrażenie dąży oczywiście do zera dla $A \rightarrow \infty$

i dla każdego $\varepsilon > 0$ nierówność

$$(3) \quad e^{-Ay} < \varepsilon$$

jest spełniona dla wszystkich $A > A_0(y)$, gdzie $A_0(y) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{y}$ jest zależne od y .

Jeżeli y zmienia się tylko w przedziale $\langle c, d \rangle$, $c > 0$, to można znaleźć niezależną od y liczbę A_0 taką, że dla $A > A_0$ nierówność (3) jest spełniona od razu dla wszystkich y . Wystarczy bowiem za A_0 wziąć $A_0(c)$, bo dla $A > A_0$ będzie wówczas

$$e^{-Ay} \leq e^{-Ac} < \varepsilon \quad (c \leq y \leq d).$$

Innymi słowy, badana całka jest zbieżna jednostajnie w przedziale $\langle c, d \rangle$.

Inaczej jest, gdy parametr y zmienia się w przedziale $\langle 0, d \rangle$, $d > 0$. Teraz nie istnieje już takie A_0 , przy najmniej w przypadku $\varepsilon < 1$. Widać to chociażby z tego, że dla dowolnie dużej wartości A wyrażenie e^{-Ay} dąży do 1, gdy $y \rightarrow 0$. Tym samym dla dostatecznie małych y jest ono większe od dowolnej liczby $\varepsilon < 1$. Zbieżność rozpatrywanej całki w przedziale $\langle 0, d \rangle$ nie jest zatem jednostajna względem y .

514. Kryterium zbieżności jednostajnej. Związek z szeregami. Ogólne kryterium zbieżności jednostajnej funkcji [504, 1°] można sformułować w zastosowaniu do rozpatrywanego przypadku w następujący sposób.

Na to, aby całka (1) była zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} , potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można było znaleźć taką liczbę A_0 niezależną od y , żeby dla $A' > A > A_0$ nierówność

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

była spełniona jednocześnie dla wszystkich y z obszaru \mathcal{Y} .

Jak zwykle, tutaj także rzecz cała sprowadza się do tego, że zwykły warunek zbieżności musi być spełniony jednostajnie dla wszystkich wartości y [por. ustęp 475].

Całki niewłaściwe z nieskończonymi granicami zestawiliśmy już w ustępie 475 z szeregami nieskończonymi. Całki zbieżne jednostajnie także wiążą się szeregami nieskończonymi.

Jak wiemy już z ustępu 504, 2°, funkcja $F(A, y)$ (patrz (2)) dla $A \rightarrow \infty$ dąży jednostajnie względem y do całki (1) wtedy i tylko wtedy, gdy do tej całki dąży jednostajnie każdy ciąg funkcji $\{F(A_n, y)\}$ dla dowolnego ciągu $A_n \rightarrow \infty$.

Przechodząc od „języka ciągów” do „języka szeregów nieskończonych” otrzymujemy ostatecznie następujący wniosek.

Zbieżność jednostajna całki (1) względem y jest równoważna ze zbieżnością jednostajną wszystkich szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y) dx \quad (A_0 = a, \quad A_n \geq a),$$

gdzie A_n jest dowolnym ciągiem dążącym do ∞ .

515. Warunki dostateczne zbieżności jednostajnej. Podamy teraz pewne kryteria, którymi się zazwyczaj posługujemy w praktyce przy badaniu zbieżności jednostajnej całek.

Kryteria te są zbudowane na wzór kryteriów Weierstrassa, Abela i Dirichleta dla zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych [430], są one także zbliżone do kryteriów zbieżności całek niewłaściwych [476], które także związałyśmy z nazwiskami Abela i Dirichleta.

1º *Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna względem x w każdym skończonym przedziale $\langle a, A \rangle$, $A \geq a$. Jeżeli istnieje taka, zależna tylko od x , funkcja $\varphi(x)$, całkowalna w przedziale nieskończonym $\langle a, +\infty \rangle$, że dla wszystkich y z obszaru \mathcal{Y}*

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad (\text{dla } x \geq a),$$

to całka (1) jest zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} .

Wynika to bezpośrednio z nierówności

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \int_a^{A'} \varphi(x) dx$$

i z kryterium z poprzedniego ustępu.

Funkcję $\varphi(x)$ nazywa się często całkowalną *majorantą* funkcji $f(x, y)$, mówi się też, że całka (1) jest *zmajoryzowana* zbieżną całką

$$\int_a^{\infty} \varphi(x) dx,$$

nie zawierającą parametru.

2º Bardziej subtelne kryteria otrzymamy podobnie jak w ustępie 476 stosując drugie twierdzenie o wartości średniej.

Rozpatrzmy całkę z iloczynu dwu funkcji

$$(4) \quad I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx,$$

zakładając przy tym, że funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna względem x w dowolnym przedziale $\langle a, A \rangle$, a funkcja $g(x, y)$ jest monotoniczna względem x .

Jeżeli całka

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} i funkcja $g(x, y)$ jest jednostajnie ograniczona, tzn.

$$|g(x, y)| \leq L \quad (L = \text{const}, x \geq a, y \in \mathcal{Y}),$$

to całka (4) jest także zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} .

Zamiast wzoru (6) z ustępu 476, z którego korzystaliśmy wówczas, mamy teraz równość

$$\int_a^{A'} f(x, y) g(x, y) dx = g(A, y) \int_a^{\xi} f(x, y) dx + g(A', y) \int_{\xi}^{A'} f(x, y) dx.$$

Jeżeli korzystając z kryterium 514 weźmiemy A_0 tak duże, żeby dla $A' > A > A_0$ było

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

dla wszystkich y jednocześnie, to — podobnie jak w ustępie 476 — łatwo otrzymamy oszacowanie

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Z oszacowania tego wynika już [514] dowodzone twierdzenie.

3° Analogicznie jak w ustępie 476 można wziąć jeszcze inny układ założeń dotyczących funkcji f i g .

Jeżeli całka

$$\int_a^A f(x, y) dx$$

jest ograniczona jako funkcja A i y :

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| \leq K \quad (K = \text{const}, A \geq a, y \in \mathcal{Y})$$

i przy tym dla $x \rightarrow \infty$ funkcja $g(x, y)$ dąży do zera jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} to całka (4) jest zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} .

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

4° Na zakończenie zauważymy jeszcze, że w praktyce najczęściej zdarza się, że z dwóch czynników f i g jeden tylko zawiera parametry y . Tym samym każde z kryteriów 2° i 3° daje dwa szczególne kryteria w zależności od tego, który z tych czynników zawiera y . Sformułujemy jedno z nich, wynikające z kryterium 2°, i szczególnie często stosowane w praktyce.

Jeżeli całka

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

jest zbieżna, a funkcja $g(x, y)$ jest monotoniczna względem x i jednostajnie ograniczona, to całka

$$\int_a^\infty f(x) g(x, y) dx$$

jest jednostajnie zbieżna względem y .

Wynika stąd na przykład, że całki typu

$$\int_a^\infty e^{-xy} f(x) dx, \quad \int_a^\infty e^{-x^2 y} f(x) dx \quad (a > 0)$$

są jednostajnie zbieżne względem y dla $y > 0$ przy założeniu, że całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna. Obie funkcje e^{-xy} i $e^{-x^2 y}$ są bowiem monotonicznie malejące względem x i ograniczone np. liczbą 1.

Uwaga ta będzie nierzaz użyteczna w dalszych rozważaniach.

516. Drugi przypadek zbieżności jednostajnej. Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x, y)$ określoną dla wartości x ze skończonego przedziału $\langle a, b \rangle$ i wartości y z pewnego zbioru \mathcal{Y} . Założymy, że przy $y = \text{const}$ ma ona całkę względem x w granicach od a do b ; może to być przy tym zarówno całka właściwa jak i niewłaściwa. Przy tych założeniach całka

$$(5) \quad I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

— niezależnie od tego, czy jest właściwa czy niewłaściwa — jest granicą przy $\eta \rightarrow 0$ całki

$$(6) \quad \varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx.$$

Jeżeli przy $\eta \rightarrow 0$ zbieżność całki (6) do granicy $I(y)$ jest jednostajna względem y w obszarze \mathcal{Y} , to mówimy, że całka (5) jest jednostajnie zbieżna względem y w tym obszarze.

Zbieżność jednostajna całki (5) oznacza więc, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$ niezależną od y , że jeśli tylko $\eta < \delta$, to nierówność

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

jest spełniona od razu dla wszystkich wartości y z obszaru \mathcal{Y} .

Łatwo jest sformułować w tym przypadku warunek konieczny i wystarczający dla zbieżności jednostajnej — tutaj także sprowadza się on do równomiernego spełnienia zasady zbieżności.

Dla liczby $\varepsilon > 0$ musi się znaleźć taka liczba $\delta > 0$ niezależna od y , żeby dla $0 < \eta' < \eta < \delta$ spełniona była nierówność

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

i to dla wszystkich y ze zbioru \mathcal{Y} równocześnie.

Dokładnie tak samo jak w ustępie 514 można sprowadzić badanie zbieżności jednostajnej całki (5) do badania zbieżności jednostajnej szeregu nieskończonego

$$\int_a^b f(x, y) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (a_0 = a, \quad a \leq a_n \leq b)$$

utworzonego dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ zbieżnego do b .

Można też przenieść na rozpatrywany przypadek warunki dostateczne z ustępu 514. Pozostawiamy to czytelnikowi.

Rozpatrywaliśmy całkę (5) (z przedziałem całkowania od a do b) jako granicę całki (6) (z przedziałem całkowania od a do $b - \eta$) interesując się przy tym charakterem zbieżności całki (6) do jej granicy. Wyróżnioną rolę grał punkt $x = b$, podobnie jak w ustępie 513 punkt $x = \infty$. Okazuje się często, że w pewnych okolicznościach, które wyjaśnimy dalej, wygodnie jest przypisać podobną rolę innemu punktowi przedziału. Na przykład tę samą całkę (5) można rozpatrywać jako granicę przy $\eta \rightarrow 0$ całki

$$\int_{a+\eta}^b f(x, y) dx.$$

Jeżeli całka powyższa przy $\eta \rightarrow 0$ dąży do swojej granicy jednostajnie względem y , to również mówimy, że całka (5) jest *zbieżna jednostajnie*. Wszystko co powiedzieliśmy wyżej przenosi się oczywiście na ten przypadek.

W przypadku gdy mogą powstać wątpliwości, o jaką zbieżność jednostajną chodzi, będziemy mówili, że całka jest zbieżna jednostajnie (względem y w obszarze I_f) dla $x = +\infty$, dla $x = b$, dla $x = a$ itd.

Zauważmy, że z reguły zbieżność jednostajna całki (5) np. dla $x = b$, będzie nas interesowała wtedy, gdy właśnie punkt b będzie punktem osobliwym (w sensie wyjaśnionym w ustępie 479) całki (5) dla pewnych wartości y . Sama jednak definicja zbieżności jednostajnej całki nie tylko formalnie zachowuje swą moc w przypadku, gdy całka (5) jest całką właściwą dla wszystkich wartości y , ale — jak zobaczymy — nawet i w takich przypadkach może się okazać pożyteczna.

Na przykład całka

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2} dx$$

dla każdej wartości y z przedziału $(0, d)$, gdzie $d > 0$, jest całką właściwą. Jednak dla tego przedziału zmienności y zbieżność jej nie jest jednostajna w punkcie $x = 0$. Istotnie, jeżeli $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, to nierówność

$$\int_0^\eta \frac{y}{x^2+y^2} dx = \arctg \frac{\eta}{y} < \varepsilon$$

nie może być spełniona jednocześnie dla wszystkich $y > 0$. Niezależnie od tego jak małe weźmiemy η , lewa strona nierówności dąży do $\frac{1}{2}\pi$, gdy $y \rightarrow 0$ i dla dostatecznie małych wartości y będzie z pewnością większa od ε .

517. Przykłady

1) Udowodnić bezpośrednio, że całka

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y dla wszystkich wartości y .

Jest tutaj

$$\left| \int_A^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right| = \frac{A}{A^2+y^2} < \frac{1}{A}.$$

Stąd wynika już żądana własność całki.

2) Udowodnić za pomocą majorant, że całki

$$(a) \int_0^\infty e^{-tx^2} dx, \quad (b) \int_0^\infty e^{-tx} x^a \cos x dx \quad (a > 0)$$

są zbieżne jednostajnie względem t dla $t > t_0 > 0$.

Wskazówka. Majorantami są:

$$(a) e^{-t_0 x^2}, \quad (b) e^{-t_0 x} x^a.$$

3) Dowieść bezpośrednio, że całka

$$\int_1^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2} dx$$

dla wartości $n = 1, 2, 3, \dots$ nie jest zbieżna jednostajnie względem n .

Wynika to stąd, że dla każdego $A = \text{const}$

$$\int_A^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2} dx = e^{-n/2x^2} \Big|_A^{\infty} = 1 - e^{-n/2A^2} \rightarrow 1, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

4) Dowieść bezpośredni, że całka $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ jest zbieżna jednostajnie względem a w obszarze $a > a_0 > 0$ i niejednostajnie w obszarze $a > 0$.

Weźmy dowolną liczbę $\epsilon > 0$. Jeżeli A_0 jest tak duże, że dla $A > A_0$

$$\left| \int_A^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \epsilon,$$

to całka

$$(7) \quad \int_A^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_{Aa}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

ma dla wszystkich $a > a_0 > 0$ wartość bezwzględną mniejszą od ϵ , jeżeli tylko $A > \frac{A_0}{a}$. To dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Druga część wynika z tego, że gdy $a \rightarrow 0$, wówczas granicą całki (7) przy dowolnym $A = \text{const}$ jest

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2}\pi.$$

5) Udowodnić, że całka

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem a w dowolnym przedziale zamkniętym nie zawierającym ± 1 .

Wskazówka. Przekształcić całkę do postaci

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} dx.$$

6) Zbadać jednostajność względem t zbieżności całki

$$\int_0^{\infty} x \sin x^3 \sin tx dx.$$

Wskazówka. Całkując dwukrotnie przez części sprowadzamy całkę \int_A^{∞} do postaci

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos x^3 \sin tx}{3x} + \frac{t}{3} \cdot \frac{\sin x^3 \cos tx}{3x^3} \Big|_A^{\infty} - \frac{1}{3} \int_A^{\infty} \frac{\cos x^3 \sin tx}{x^2} dx + \\ & + \frac{t}{3} \int_A^{\infty} \frac{\sin x^3 \cos tx}{x^4} dx + \frac{t^2}{9} \int_A^{\infty} \frac{\sin x^3 \sin tx}{x^3} dx. \end{aligned}$$

Stąd już widać, że badana całka jest zbieżna jednostajnie w dowolnym przedziale skończonym.

7) Wykazać, że całki

$$(a) \int_0^1 x^{p-1} dx, \quad (b) \int_0^1 x^{p-1} \ln^m x dx$$

(m jest liczbą naturalną) są dla $x = 0$ zbieżne jednostajnie względem p w obszarze $p > p_0 > 0$ i niejednostajnie w obszarze $p > 0$.

Majorantami w obszarze $p > p_0 > 0$ są: (a) x^{p_0-1} , (b) $x^{p_0-1} |\ln x|^m$. Z drugiej strony, dla każdej liczby $\eta = \text{const}$

$$\int_0^\eta x^{p-1} dx = \frac{\eta^p}{p} \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } p \rightarrow 0.$$

8) Analogicznie można wykazać, że całka

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

jest przy $x = 0$ zbieżna jednostajnie względem p dla $p > p_0 > 0$ i (przy $x = 1$) względem q dla $q > q_0 > 0$.

9) Udowodnić, że zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y} dx$$

przy $x = 0$ jest jednostajna względem y dla $y < y_0 < 2$ i nie jest jednostajna dla $y < 2$.

Dla przypadku $y < y_0 < 2$ majorantą jest $\frac{1}{x^{y_0-1}}$. Weźmy teraz liczbę $\eta > 0$ taką małą, żeby dla $x < \eta$ spełniona była nierówność $\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$. Wówczas

$$\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y} dx > \frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)} \eta^{2-y} \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } y \rightarrow 2.$$

10) Dowieść, że całka

$$\int_0^1 (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$$

dla $x = 0$ i dla $x = 1$ jest zbieżna jednostajnie względem n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Ponieważ $1+x+x^2+\dots+x^{n-1} < \frac{1}{1-x}$, majorantą jest funkcja $\frac{1}{1-x} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}$, która w przedziale $(0, 1)$ jest całkowalna.

11) Wykazać bezpośrednio, że zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

(dla $x = 0$) nie jest jednostajna względem y w przedziale $(0, 1)$.

Dla dowolnego $\eta = \text{const}$ jest

$$\int_0^\eta \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=\eta} = \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} \rightarrow \frac{1}{\eta},$$

gdy $y \rightarrow 0$.

12) Wykazać to samo dla całki

$$\int_0^1 \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

Tutaj całka

$$\int_0^\eta \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{4\eta^2y}{(\eta^2 + y^2)^2}$$

dla $y = \eta$ jest równa $-1/\eta$.

13) Udowodnić, że całka

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\cos x}{x^a} dx \quad (0 < a < 1)$$

w punktach $x = 0$ i $x = \infty$ jest zbieżna jednostajnie względem y dla $y > 0$.

Dla $x = 0$ wynika to od razu z istnienia majoranty $1/x^a$, a dla $x = \infty$ ze zbieżnością całki

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx$$

[476 i uwaga końcowa z ustępu 515].

14) Niech $f(t)$ będzie funkcją ciągłą dla $t > 0$. Jeżeli całka

$$\int_0^\infty t^\lambda f(t) dt$$

jest zbieżna dla $\lambda = \alpha$ i $\lambda = \beta$ ($\alpha < \beta$), to jest ona też zbieżna dla wszystkich wartości λ z przedziału (α, β) i przy tym jest jednostajnie zbieżna względem λ w punktach $t = 0$ i $t = \infty$.

Dowód. Całka $\int_0^1 t^\lambda f(t) dt$ jest zbieżna, a $t^{\lambda-\alpha}$ jest dla wartości $\lambda > \alpha$ funkcją monotoniczną zmiennej t i jest ograniczona przez 1. Wobec tego całka

$$\int_0^1 t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^{\lambda-\alpha} \cdot t^\alpha f(t) dt$$

jest dla tych wartości λ zbieżna jednostajnie przy $t = 0$. Analogicznie można się przekonać o tym, że całka

$$\int_1^\infty t^\lambda f(t) dt = \int_1^\infty t^{\lambda-\beta} \cdot t^\beta f(t) dt$$

jest zbieżna jednostajnie względem λ dla $\lambda < \beta$ przy $t = \infty$.

15) Dowieść, że całka

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^a} dx \quad (0 < a < 1)$$

jest przy $x = \infty$ zbieżna jednostajnie dla $y > y_0 > 0$, a nie jest zbieżna jednostajnie, gdy y jest ograniczone tylko nierównością $y > 0$.

Pierwszą część tego twierdzenia można by było otrzymać za pomocą kryterium 3^e z ustępu 515, ponieważ dla dowolnych $A > 0$ i $y > y_0$ jest

$$\left| \int_0^A \cos xy dx \right| = \left| \frac{\sin Ay}{y} \right| < \frac{1}{y_0},$$

i przy $x \rightarrow \infty$ funkcja $1/x^a$ dąży do zera malejąc monotonicznie.

To samo można też wykazać rozpatrując bezpośrednio wyrażenie

$$\int_A^\infty \frac{\cos xy}{x^a} dx = y^{a-1} \int_{Ay}^\infty \frac{\cos z}{z} dz.$$

Druga część twierdzenia wynika z tego, że wyrażenie powyższe rośnie nieograniczenie, gdy $A = 1/y$ i $y \rightarrow 0$.

Łatwo dostrzec, że przy $x = 0$ badana całka jest zbieżna jednostajnie względem y w dowolnym obszarze zmienności y .

16) Dowieść, że całka

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

jest zbieżna jednostajnie względem β dla $\beta > \beta_0 > 0$.

Wynika to z kryterium 3° z ustępu 515. Istotnie, dla $\beta > \beta_0$

$$\left| \int_0^\infty \sin \beta x dx \right| = \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} < \frac{2}{\beta_0}.$$

Ponadto wyrażenie

$$\frac{x}{\alpha^2 + x^2},$$

nie zawierające β , maleje wraz z wzrostaniem x (przynajmniej dla $x > \alpha$) i dąży do zera, gdy $x \rightarrow +\infty$.

§ 3. Wykorzystanie zbieżności jednostajnej całek

518. Przejście do granicy pod znakiem całki. Zajmiemy się teraz przede wszystkim zagadnieniami związanymi z przejściem do granicy pod znakiem całki rozciagniętej na przedział nieskończony. Twierdzenie 1 z ustępu 506 na ten przypadek nie przenosi się — jeżeli nawet w całym przedziale nieskończonym funkcja $f(x, y)$ przy $y \rightarrow y_0$ dąży jednostajnie do funkcji granicznej $\varphi(x)$, to może się okazać, że nie można przejść do granicy pod znakiem całki.

Rozpatrzmy na przykład funkcję

$$f_n(x) = \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} \quad (x > 0),$$

$$f_n(0) = 0$$

($n = 1, 2, 3, \dots$). Łatwo jest stwierdzić zwykłymi metodami rachunku różniczkowego, że w punkcie $x = \sqrt{n/3}$ funkcja ta osiąga swoją największą wartość równą $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-3/2}$. Ponieważ przy $n \rightarrow \infty$ wartość ta dąży do zera, więc stąd już wynika, że funkcja $f_n(x)$ przy

$n \rightarrow \infty$ dąży jednostajnie do $\varphi(x) = 0$ w całym przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$. Mimo to całka

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = 1$$

przy $n \rightarrow \infty$ wcale nie dąży do zera.

Następujące twierdzenie podaje warunki wystarczające na to, aby dopuszczalne było przejście do granicy pod znakiem całki.

TWIERDZENIE 1. *Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ dla $y \in \mathcal{Y}$ jest całkowalna względem x w zwykłym sensie w każdym przedziale $\langle a, A \rangle$, gdzie A jest dowolną liczbą większą od a . Założymy dalej, że gdy $y \rightarrow y_0$, to funkcja ta w każdym takim przedziale dąży jednostajnie względem x do funkcji granicznej $\varphi(x)$. Jeżeli oprócz tego całka*

$$(1) \quad I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathcal{Y} , to zachodzi równość

$$(2) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dx.$$

Weźmy, jak wyżej, funkcję

$$(3) \quad F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx.$$

Dla tej całki spełnione są założenia twierdzenia 1 z ustępu 506 i wobec tego

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} F(A, y) = \int_a^A \varphi(x) dx.$$

Z drugiej strony, oczywiście

$$(5) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} F(A, y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

i przy tym, jak wiemy, funkcja $F(A, y)$ dąży tutaj do swojej granicy jednostajnie względem y . Możemy się zatem powołać na ogólne twierdzenie z ustępu 505 o przestawieniu dwu przejść do granicy. Z twierdzenia tego wynika istnienie i równość granic iterowanych, co już bezpośrednio prowadzi do równości (2).

Z udowodnionego twierdzenia można otrzymać następujący wniosek stosując uogólnione twierdzenie Diniego [504, 4°].

WNIOSEK. *Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ dla $y \in \mathcal{Y}$ jest nieujemna i ciągła względem x w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$ i przy $y \rightarrow y_0$ ($y < y_0$) dąży rosnąc wraz z y , do funkcji granicznej $\varphi(x)$ także ciągłej w przedziale $\langle a, +\infty \rangle$. Przy tych założeniach z istnienia całki*

$$(6) \quad \int_a^\infty \varphi(x) dx$$

wynika istnienie całki (1) dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$ oraz równość (2).

Na podstawie uogólnionego twierdzenia Diniego zbieżność funkcji $f(x, y)$ do $\varphi(x)$ musi być jednostajna względem x w dowolnym przedziale skończonym. Dalej, ponieważ $f(x, y) \leq \varphi(x)$, więc funkcja $\varphi(x)$ jest majorantą dla funkcji $f(x, y)$ i wobec tego istnieje całka (1) (twierdzenie 1 z ustępu 474) i jest zbieżna jednostajnie względem y (kryterium z ustępu 515). Spełnione są zatem wszystkie założenia twierdzenia 1.

Czytelnik sam łatwo sprawdzi, że założenie istnienia całki (6) z funkcji granicznej może być tutaj zastąpione założeniem, że istnieje skończona granica

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx .$$

Z tego wynika bowiem istnienie całki (6) i równość (2).

Rozwijając dalej naszą myśl możemy otrzymać pewne uogólnienie twierdzenia 1 z ustępu 506 dotyczące całek niewłaściwych w przedziale skończonym.

TWIERDZENIE 1'. *Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ dla $y \in \mathbb{Y}$ jest całkowalna w zwykłym sensie względem y w przedziale $(a, b - \eta)$, gdzie η jest dowolną liczbą spełniającą nierówność $0 < \eta < b - a$. Założymy dalej, że gdy $y \rightarrow y_0$, wówczas funkcja ta w każdym takim przedziale jest zbieżna jednostajnie względem x do funkcji granicznej $\varphi(x)$. Jeżeli oprócz tego całka*

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

jest w punkcie $x = b$ zbieżna jednostajnie względem y w obszarze \mathbb{Y} , to zachodzi równość

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx .$$

Dowód niczym nie różni się od dowodu twierdzenia 1. Łatwo jest również rozciągnąć podany wyżej wniosek na przypadek przedziału skońzonego.

Rolę punktu b może odgrywać dowolny punkt przedziału. Poza tym podobnych punktów może być w przedziale kilka.

Jak już wspominaliśmy wyżej, przejście graniczne pod znakiem całki najczęściej występuje w zastosowaniu do ciągów funkcyjnych $\{f_n(x)\}$. Przechodząc od ciągów do szeregów nieskończonych otrzymujemy tą drogą twierdzenia o całkowaniu szeregu wyraz za wyrazem. Na przykład wniosek z twierdzenia 1 otrzymuje następującą postać:

Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) ,$$

utworzony z funkcji dodatnich i ciągłych dla $x \geq a$ (lub dla $a \leq x < b$) ma dla tychże wartości x ciągłą sumę $\varphi(x)$. Jeżeli ponadto suma ta jest w przedziale $(a, +\infty)$ (lub (a, b)) całkowalna, to w tym przedziale szereg można całkować wyraz za wyrazem.

Zamiast całkowalności sumy szeregu można — podobnie jak wyżej — założyć zbieżność szeregu całek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x) dx \quad (\text{lub } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx) .$$

Twierdzenie powyższe pozostaje oczywiście prawdziwe, gdy wszystkie wyrazy szeregu są ujemne. Przypadek ten sprowadza się do poprzedniego po prostu przez zmianę znaku.

519. Przykłady

1) Za pomocą rozwinięcia w szereg obliczyć całki

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx.$$

Rozwiązanie. (a) Rozwijamy funkcję podcałkową w szereg

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \dots,$$

którego wszystkie wyrazy mają znak minus. Zbieżność przestaje być jednostajna w otoczeniu punktu $x = 1$. Punkt ten jest dla sumy szeregu punktem osobliwym, mimo to w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ suma jest całkowalna. Powołując się na ostatnie twierdzenie poprzedniego ustępu całkujemy wyraz za wyrazem

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

[patrz 440, (4)].

(b) Druga całka przez podstawienie $x = 1-z$ sprowadza się do pierwszej. Mimo to obliczymy ją dla wprawy niezależnie, rozwijając w szereg funkcję $1/(1-x)$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x.$$

Wszystkie wyrazy tego szeregu są znowu ujemne. Zbieżność przestaje być jednostajną w pobliżu dwóch punktów: $x = 0$ i $x = 1$. Wobec tego stosujemy dwukrotnie ostatnie twierdzenie — oddzielnie do przedziałów $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ i $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Ostatecznie

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n \ln x dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2) (a) Obliczyć sumę szeregu

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots,$$

korzystając z tego, że

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Rozwiązanie. Mamy

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2}) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} (1+x^2) dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi \sqrt{2}}{4}.$$

Chociaż suma szeregu nie ma osobliwości, jednak zbieżność przestaje być jednostajna w pobliżu punktu $x = 1$.

Ponieważ dla sum częściowych szeregu zachodzą nierówności

$$0 < \sum_0^{n-1} (-1)^r x^{4r} (1+x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1+x^{4n}} (1+x^2) < 2 \frac{1+x^2}{1+x^4} < 4,$$

więc majorantą jest po prostu stała i całka sumy jest w punkcie $x = 1$ zbieżna jednostajnie względem n . Całkowanie szeregu wyraz za wyrazem jest zatem dopuszczalne (twierdzenie 1').

(b) Analogicznie

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \dots = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

3) Korzystając ze wzoru

$$\frac{1}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^p x^{p-1} dx,$$

obliczyć sumę szeregu

$$(a) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$(b) \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots,$$

$$(c) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots$$

Odpowiedzi:

$$(a) \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}, \quad (b) \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2} dx = \frac{3}{4} - \ln 2,$$

$$(c) \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3} dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

4) Obliczyć całki Eulera

$$(a) I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1), \quad (b) K = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx \quad (a, b > 0).$$

Rozwiązanie. (a) Rozbijemy całkę na dwie

$$I = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2,$$

obliczymy je oddzielnie.

Dla $0 < x < 1$ mamy następujące rozwinięcie w szereg:

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v x^{a+v-1}.$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie tylko, gdy $0 < x < 1 - \varepsilon' < 1$. Suma częściowa ma jednak całkowalną w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ majorantę

$$0 < \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v x^{a+v-1} = \frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x} < x^{a-1}.$$

Wobec tego całka z tej sumy jest zbieżna jednostajnie w punktach $x = 0$ i $x = 1$. Całkując wyraz za wyrazem otrzymujemy na podstawie twierdzenia 1

$$I_1 = \sum_{v=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^v x^{a+v-1} dx = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{a+v}.$$

Całkę I_2 za pomocą podstawienia $x = 1/z$ sprowadzamy do postaci

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x} dx.$$

Stosując to samo rozwinięcie w szeregu znajdujemy

$$I_2 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{a-v}.$$

Wobec tego

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right).$$

W szeregu tym rozpoznajemy rozkład na ułamki proste funkcji $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ [441, 9)]. Ostatecznie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(b) Rozbijając znowu całkę na dwie i stosując w drugiej to samo podstawienie otrzymujemy

$$K = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{1-x} dx = K_1 - K_2 \text{ (1).}$$

Wystarczy oczywiście obliczyć K_1 . Stosując rozwinięcie funkcji podcałkowej na szereg znajdujemy jak poprzednio

$$K_1 = \frac{1}{a} + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right).$$

Ten szereg jest znowu rozkładem na ułamki proste funkcji $\pi \operatorname{ctg} \pi a$ [441, 9)]. Zatem

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx = \pi (\operatorname{ctg} \pi a - \operatorname{ctg} \pi b).$$

5) Znaleźć wartości całek ($|r| < 1$)

$$(a) I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1-r \cos \beta x}{(1+x^2)(1-2r \cos \beta x+r^2)} dx, \quad (b) I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1-2r \cos \beta x+r^2)}{1+x^2} dx.$$

(1) Dla obu całek punktem osobliwym jest $x = 0$; w punkcie $x = 1$ nie ma osobliwości; całki są zbieżne.

Przy tym w obu zadaniach można przyjąć za znaną całkę

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-k} \quad (k > 0)$$

[patrz 522, 4° oraz 523, 9)].

Rozwiązanie. (a) Rozpoczynamy od rozwinięcia w szereg

$$\frac{1-r \cos \beta x}{1-2r \cos \beta x+r^2} = \sum_{v=0}^{\infty} r^v \cos v \beta x \quad (1).$$

Mnożymy dwustronnie przez $\frac{1}{1+x^2}$ i całkujemy szereg wyraz za wyrazem

$$I_1 = \sum_{v=0}^{\infty} r^v \int_0^\infty \frac{\cos v \beta x}{1+x^2} dx.$$

Całkowanie takie jest tu dozwolone, bo szereg jest zbieżny jednostajnie nawet w całym przedziale nieskończonym; jego sumy częściowe mają majorantę postaci $\frac{C}{1+x^2}$ [twierdzenie 1].

Jeżeli skorzystamy teraz z wartości podanej wyżej całki, to otrzymamy ostatecznie

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \sum_{v=0}^{\infty} r^v e^{-v\beta} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-re^{-\beta}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^\beta}{e^\beta - r}.$$

(b) Wskazówka. Skorzystać z rozwinięcia [461, 6) (b)]

$$\ln(1-2r \cos \beta x + r^2) = -2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{r^v}{v} \cos v \beta x.$$

Odpowiedź. $I_2 = \pi \ln(1-re^{-\beta})$.

6) Całki

$$(a) \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx, \quad (b) \int_0^\infty e^{-x^2} \cosh 2bx dx, \quad (c) \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx$$

(Laplace'a) rozwinąć na szeregi według potęg b ($b > 0$), przyając przy tym za znaną całkę

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[patrz 492, 2°].

Rozwiązanie. (a) Rozwijając $\cos 2bx$ w szereg i całkując wyraz za wyrazem otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (2bx)^{2v}}{2v!} dx = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (2b)^{2v}}{2v!} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2v} dx.$$

Całkowany szereg jest oczywiście zbieżny jednostajnie w dowolnym przedziale skończonym $\langle 0, A \rangle$, a jego sumy częściowe mają majorantę

$$e^{-x^2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(2bx)^v}{2v!} = e^{-x^2} \cosh 2bx$$

całkowalną od 0 do ∞ ; można go zatem całkować wyraz za wyrazem.

(1) Łatwo je otrzymać z rozwinięć w zadaniach 10) i 11) z ustępu 440.

Pozostaje obliczyć całkę $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2v} dx = I_v$. Całkując przez części wyprowadzamy z łatwością wzór redukcyjny

$$I_v = \frac{2v-1}{2} I_{v-1}; \quad \text{stąd} \quad I = \frac{(2v-1)!!}{2^{v+1}} \sqrt{\pi}.$$

Podstawiając ten wynik do znalezioneego rozwinięcia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v (2b)^{2v}}{2v!} \cdot \frac{(2v-1)!!}{2^v} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-b^2)^v}{v!} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad (1). \end{aligned}$$

(b) Odpowiedź: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

(c) Analogicznie otrzymujemy rozwinięcie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx = b \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)!!} (-2b^2)^{v-1},$$

które do „skońzonego” wzoru nie prowadzi. Później na innej drodze zbadamy własności nowej – już nieelementarnej – funkcji, za pomocą której można by było przedstawić tę całkę [523, 5) (b)].

7) Znaleźć wartość całki

$$I_k = \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x} - 1} dx$$

($k = 1, 2, 3, \dots$).

Rozwiązanie. Rozwijamy funkcję

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}$$

w szereg geometryczny i po pomnożeniu przez x^{2k-1} otrzymujemy szereg

$$\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2k-1} e^{-2n\pi x}.$$

Wyrazy tego szeregu są dodatnie i jest on zbieżny jednostajnie w dowolnym przedziale $\langle \eta, A \rangle$ ($0 < \eta < A < +\infty$). Ponieważ suma tego szeregu jest przy tym całkowalna w przedziale od 0 do $+\infty$, więc możemy go całkować wyraz za wyrazem (2). A więc

$$I_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2k-1} e^{-2n\pi x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k}} = \frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Wprowadzimy tu liczby Bernoulliego B_k [449]. Przypominamy, że

$$B_k = \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

(1) Posłużyliśmy się tu oczywistą równością

$$(2v)! = (2v)!! (2v-1)!! = 2^v v! (2v-1)!!$$

(2) W tym i kolejnym zadaniu korzystamy jednocześnie z twierdzeń 1 i 1' z poprzedniego ustępu stosując je odpowiednio do przedziałów $\langle 1, +\infty \rangle$ i $\langle 0, 1 \rangle$.

jest zatem ostatecznie

$$I_k = \frac{B_k}{4k}.$$

8) Obliczyć całki (Legendre'a)

$$(a) \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1} dx \quad (m > 0).$$

Rozwiązanie. (a) Rozwinięcie

$$\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1} = \sum_{v=1}^{\infty} e^{-2v\pi x} \sin mx$$

jest także zbieżne jednostajnie w dowolnym przedziale $\langle \eta, A \rangle$; sumy częściowe szeregu mają jako majorantę funkcję $\frac{|\sin mx|}{e^{2\pi x}-1}$. Możemy wobec tego całkować szereg wyraz za wyrazem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1} dx &= \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-2v\pi x} \sin mx dx = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + 4v^2\pi^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{1}{2m} \quad (1) \end{aligned}$$

(b) Analogicznie otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1} dx = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{m}{m^2 + 4v^2\pi^2} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{m/2} - e^{-m/2}} \quad (1).$$

Uwaga. Naturalną drogą rozwiązania tego zadania byłoby także rozwinięcie w szereg funkcji $\sin mx$. W przypadku (a) na przykład, doszlibyśmy wówczas do całek rozpatrzonych w zadaniu 7 i dla uzyskania wyników w postaci skończonej można by było skorzystać ze znanego rozwinięcia

$$\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k!} m^{2k-1}$$

[449]. Ta droga jednak ma zasadniczą wadę — należałyby założyć, że $m < 2\pi$, podczas gdy wynik jest prawdziwy dla dowolnego m .

9) Jeżeli w elementarnej równości [492, 2°]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

podstawimy $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$, to otrzymamy

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(1) Te wyniki zadań (a) i (b) otrzymuje się korzystając z rozwinięcia na ułamki proste funkcji $\operatorname{ctgh} x / \sinh x$ [441, 10].

Gdy n rośnie nieograniczenie, to funkcja $\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-n}$ maleje monotonicznie dążąc przy tym do funkcji granicznej e^{-z^2} . Opierając się na podanym w ustępie 518 wniosku, który pozostaje prawdziwy dla funkcji malejącej monotonicznie, możemy przejść do granicy pod znakiem całki. Granicę prawej strony wyznaczamy przy tym posługując się wzorem Wallisa [317]. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dz}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[por. 492, 2°].

10) Znana całka Fejeraq [309, 5) (b)]

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nz}{\sin z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2},$$

może być przez podstawienie $z = \frac{x}{n}$ sprowadzona do postaci

$$\int_0^{n \cdot \pi/2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin \frac{x}{n}} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Przejście do granicy dla $n \rightarrow \infty$ jest tu utrudnione przez to, że od parametru n zależy nie tylko funkcja podcałkowa, ale i górną granicą.

Przyjmując jednak

$$f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin \frac{x}{n}} \right)^2 \quad \text{dla } 0 < x < n \cdot \frac{1}{2}\pi$$

oraz

$$f_n(x) = 0 \quad \text{dla pozostałych wartości } x,$$

możemy napisać

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Oczywiście dla każdego $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2,$$

przy czym funkcja $f_n(x)$ dąży do swej granicy jednostajnie w dowolnym przedziale skończonym $(0, A)$.
Poza tym wiemy, że dla $0 < z < \frac{1}{2}\pi$ jest

$$\frac{\sin z}{z} > \frac{2}{\pi},$$

a więc dla $0 < x < n \cdot \frac{1}{2}\pi$ jest

$$f_n(x) < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

Nierówność ta jest tym bardziej prawdziwa dla $x > n \cdot \frac{1}{2}\pi$, bo wówczas jest $f_n(x) = 0$.

Stosując twierdzenie 1 z ustępu 518 możemy w równości (7) przejść pod znakiem całki do granicy dla $n \rightarrow \infty$. Prowadzi to do następującego rezultatu:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

[por. 494, 4); 497, 15)].

11) Inny przykład tego samego rodzaju. Wiadomo [por. 440, 10)], że

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \pi \frac{r^m}{1 - r^2},$$

gdzie m jest liczbą naturalną i $|r| < 1$. Podstawmy tu $x = \frac{z}{m}$ i $r = 1 - \frac{h}{m}$ ($h > 0$). Przyjmując, że $m > h$ otrzymujemy

$$\int_0^{m\pi} \frac{\cos z dz}{h^2 + 2m^2 \left(1 - \cos \frac{z}{m}\right) \left(1 - \frac{h}{m}\right)} = \int_0^{m\pi} \frac{\cos z dz}{h^2 + z^2 \left(\frac{\sin(z/2m)}{z/2m}\right)^2 \left(1 - \frac{h}{m}\right)} = \frac{\pi}{h} \cdot \frac{\left(1 - \frac{h}{m}\right)^m}{2 - \frac{h}{m}}.$$

Przejdzmy tu pod znakiem całki do granicy dla $m \rightarrow \infty$ nie krępując się tym, że górną granicą całki rośnie wraz z m — zastąpimy ją przez ∞ . Otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{h^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2h} e^{-h}.$$

Czy otrzymana równość jest prawdziwa? Postaramy się uzasadnić taki sposób przejścia do granicy.

Wprowadźmy funkcję

$$f_m(z) = \begin{cases} \frac{\cos z}{h^2 + z^2 \left(\frac{\sin(z/2m)}{z/2m}\right)^2 \left(1 - \frac{h}{m}\right)} & \text{dla } 0 < z < m\pi, \\ 0 & \text{dla } z > m\pi. \end{cases}$$

Lewa strona interesującej nas równości jest zatem równa całce

$$\int_0^\infty f_m(z) dz.$$

Oczywiście

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2 + z^2},$$

przy czym w skończonym przedziale zbieżność jest jednostajna. Dalej, majorantą może być funkcja

$$\frac{1}{h^2 + \frac{4}{\pi^2} z^2 \left(1 - \frac{h}{m_0}\right)},$$

jeżeli weźmiemy $m_0 > h$ i ograniczymy się do $m > m_0$. Pozostaje powołać się na twierdzenie 1 z ustępu 518.

12) Następujący przykład podkreśla, że w zadaniach 10) i 11) konieczne było sprawdzenie, czy przejście graniczne jest dopuszczalne. Teraz analogiczny sposób przejścia do granicy nie będzie uzasadniony, a wynik jego okaże się fałszywy.

Rozpatrzmy całkę

$$I_n = \int_0^n \frac{n}{n^2 + x^2} dx.$$

Jeżeli przy $n \rightarrow \infty$ postąpimy z tą całką tak samo jak w poprzednich przykładach, to otrzymamy

$$\lim I_n = \int_0^\infty 0 dx = 0.$$

W rzeczywistości zaś, jak łatwo się przekonać podstawiając $x = nt$, całka I_n ma wartość stałą, równą $\pi/4!$. Podamy jeszcze dwa nieszablonowe przykłady, interesujące jak się przekonamy z innych jeszcze powodów.

13) Obliczyć całkę

$$I = \int_0^\infty e^{a \cos x} \sin(a \sin x) \frac{dx}{x},$$

gdzie a jest dowolną liczbą [por. 478, 8) (a)], przyjmując za znaną całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

[por. 492, 3^o; 494, 5)].

Wygodnie będzie wprowadzić tu zmienną zespoloną

$$z = a(\cos x + i \sin x).$$

Wówczas [457, (6)] funkcja

$$e^z = e^{a \cos x} [\cos(a \sin x) + i \sin(a \sin x)]$$

rozwija się w szereg

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (\cos nx + i \sin nx)}{n!}.$$

Przyrównując części urojone otrzymujemy rozwinięcie w szereg pierwszego czynnika iloczynu występującego pod całką

$$e^{a \cos x} \sin(a \sin x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sin nx.$$

Zatem

$$I = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Gdyby tu wolno było całkować wyraz za wyrazem, to od razu otrzymalibyśmy wynik

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\pi}{2} (e^a - 1).$$

Ale uzasadnienie, że można tak całkować, wymaga w tym przypadku nietypowego rozumowania.

Ponieważ szereg stojący pod znakiem całki ma jako majorantę szereg

$$a \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{v!},$$

o wyrazach stałych, to w skończonym przedziale $\langle 0, A \rangle$ wolno całkować wyraz za wyrazem:

$$(8) \quad \int_0^A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^A \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{nA} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Pozostaje przejść do granicy przy $A \rightarrow \infty$. Łatwo jest dostrzec, że z istnienia całki $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ wynika,

że całka $\int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t} dt$ jest dla wszystkich wartości $t_0 > 0$ jednostajnie ograniczona.

$$\left| \int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t} dt \right| < L.$$

Szereg (8), którego wyrazy zależą od A , jest wobec tego majoryzowany przez szereg o wyrazach stałych

$$L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!},$$

a więc jest zbieżny jednostajnie względem A . Na podstawie znanego twierdzenia [433] można zatem w tym szeregu, przy $A \rightarrow \infty$, przejść do granicy wyraz za wyrazem. Dowód jest tym samym zakończony.

14) Inny przykład tego samego rodzaju. Dany jest szereg zbieżny

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Tworzymy dla $x > 0$ nowy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} = g(x).$$

Szereg ten jest także zbieżny i przy tym jest zbieżny jednostajnie w dowolnym skończonym przedziale $\langle 0, A \rangle$ — wynika to z kryteriów Abela i Dirichleta [430], bo czynnik $x^n/n!$ maleje wraz ze wzrostem n przynajmniej dla $n > A$.

Dowieść, że

$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x) dx = s.$$

Wynik ten otrzymamy od razu całkując szereg wyraz za wyrazem

$$\int_0^\infty e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

ponieważ $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$ [489, 4)]. Pokażemy teraz, że całkowanie takie jest tu dozwolone.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, w skończonym przedziale możemy tu całkować wyraz za wyrazem

$$(10) \quad \int_0^A e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} x^n dx.$$

Całkując przez części stwierdzamy łatwo, że

$$\frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} \cdot x^n dx < \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A e^{-x} x^{n-1} dx < 1.$$

Wobec tego czynniki

$$\frac{1}{n!} \int_0^A e^{-x} x^n dx,$$

zależne od A i n , są wspólnie ograniczone dla wszystkich A i n oraz — przy stałym A — maleją monotonicznie wraz ze wzrostem n . Szereg z prawej strony równości (10) jest zatem, na podstawie wspomnianego wyżej kryterium Abela, zbieżny jednostajnie względem A . Można tym samym przy $A \rightarrow \infty$ przejść w nim do granicy wyraz za wyrazem.

Przytoczymy dwa przykłady zastosowania eleganckiego wzoru (9).

(a) Rozpatrzmy tak zwany sinus całkowy

$$-\operatorname{si} x = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3! 3} - \frac{x^5}{5! 5} + \dots \quad (1)$$

Szereg ten możemy utworzyć tak jak szereg $g(x)$ wychodząc z szeregu

$$\frac{\pi}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \dots$$

Z wzoru (9) otrzymujemy teraz

$$-\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{si} x dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(1) Łatwo jest wyprowadzić to rozwinięcie pisząc

$$-\operatorname{si} x = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

zastępując następnie w drugiej całce sinus jego rozwinięciem na szereg i całkując wyraz za wyrazem.

(b) Inna interesująca funkcja — funkcja Bessela pierwszego rodzaju $J_0(x)$, ma rozwinięcie [441, 4], 5)]

$$J_0(x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(v!)^2 \cdot 2^{2v}},$$

które może być też utworzone w ten sam sposób jak rozwinięcie funkcji $g(x)$. Weźmy mianowicie

$$a_0 = 1, \quad a_{2v} = (-1)^v \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!}, \quad a_{2v-1} = 0.$$

Wzór (9) daje teraz

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot J_0(x) dx = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Skorzystaliśmy tu z rozwinięcia funkcji $1/\sqrt{1+x}$ w szereg dwumienny, w którym przyjęliśmy $x = 1$.

Uwaga. Pouczające będzie zanalizowanie, czym się w istocie różnią rozumowania z ostatnich dwóch przykładów od rozumowań z innych przykładów, w których też całkowaliśmy szeregi wyraz za wyrazem w przedziale nieskończonym.

Wróćmy do ogólnego zagadnienia przejścia do granicy pod znakiem całki w przedziale nieskończonym [518]. Okazuje się ono równoważne istnieniu i równości obu granic iterowanych dla funkcji $F(A, y)$ dwóch argumentów [patrz wzór (13)]. Zgodnie z ogólnym twierdzeniem z ustępu 505, warunkiem wystarczającym dla takiej równości granic iterowanych przy założeniu, że istnieją granice pojedyncze, jest zbieżność jednostajna funkcji do jednej z tych granic — do granicy (4) (jednostajna względem A) lub do granicy (5) (jednostajna względem y), obojętnie przy tym do której.

Zazwyczaj zakładaliśmy, że jednostajna jest zbieżność do granicy (5), co odpowiadało zbieżności jednostajnej całki, której górną granicą całkowania była ∞ . Jednak teza twierdzenia 1 pozostaje w pełni prawdziwa, gdy zamiast tego założymy, że funkcja F dąży jednostajnie do granicy (4)!

W przypadku szeregu $\sum_1^\infty u_n(x)$, którego sumami częściowymi są $f_n(x)$, mamy zatem dwie możliwości. Możemy mianowicie wykazać, że przy $A \rightarrow \infty$ funkcja

$$F_n(A) = \int_a^A f_n(x) dx$$

dąży do granicy $\int_a^\infty f_n(x) dx$ jednostajnie względem n , czyli że całki te są zbieżne jednostajnie — tak właśnie postępowaliśmy zazwyczaj. Zamiast tego możemy też wykazać, że przy $n \rightarrow \infty$ funkcja $F_n(A)$ dąży do granicy $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ jednostajnie względem A , czyli że jest zbieżny jednostajnie względem A szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^A u_n(x) dx = \int_a^A \varphi(x) dx.$$

Ta droga okazała się wygodniejsza w przykładach 13 i 14!

520. Ciągłość i różniczkowalność całki względem parametru. Tutaj też zajmiemy się najpierw przeniesieniem twierdzeń 2 i 3 z ustępów 506 i 507 na przypadek przedziału nieskończonego.

TWIERDZENIE 2. Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona i ciągła jako funkcja dwóch zmiennych dla wartości $x \geq a$ i y z przedziału $\langle c, d \rangle$. Jeżeli całka

$$(1) \quad I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y w przedziale $\langle c, d \rangle$, to jest ona funkcją ciągłą parametru w tym przedziale.

Twierdzenie to wynika z twierdzenia 1. Istotnie, jak widzieliśmy w ustępie 506, w przypadku gdy obszarem zmienności x jest skończony przedział $\langle a, A \rangle$, to funkcja $f(x, y)$ przy $y \rightarrow y_0$ (y_0 jest dowolną wartością y) dąży jednostajnie względem x do funkcji granicznej $f(x, y_0)$. Zatem na podstawie twierdzenia 1 można w całce (1) przejść do granicy pod znakiem całki

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

Stąd wynika już dowodzone twierdzenie.

W ustępie 485 opisując metody, za pomocą których całkom rozbieżnym przypisujemy „uogólnione wartości”, pozostawiliśmy otwarte zagadnienie regularności drugiej z tych metod. Za pomocą udowodnionego wyżej twierdzenia możemy teraz uzupełnić tę lukę. Jeżeli całka $\int_0^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, to całka

$\int_0^{\infty} e^{-kx} f(x) dx$ jest zbieżna jednostajnie względem parametru k dla $k > 0$ (patrz uwaga na końcu ustępu 515), i wobec tego jest funkcją ciągłą parametru k dla $k > 0$ przynajmniej wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła. Tym samym

$$\lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-kx} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Ciąka zbieżna jest zatem równa swojej uogólnionej wartości, a to dowodzi regularności wspomnianej metody.

Uwaga. W przypadku gdy funkcja $f(x, y)$ jest nieujemna, prawdziwe jest twierdzenie w pewnym sensie odwrotne do twierdzenia 2: z ciągłością całki (1) jako funkcji parametru wynika jej zbieżność jednostajna.

W przypadku tym bowiem funkcja ciągła zmiennej y

$$(3) \quad F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

rośnie wraz ze wzrostem A i wobec tego — zgodnie z uogólnionym twierdzeniem Diniego 504, 4° — dąży do swej granicy (1) jednostajnie względem y .

TWIERDZENIE 3. Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona i ciągła względem x dla $x \geq a$ i y z przedziału $\langle c, d \rangle$ i niech ponadto ma dla tych wartości zmiennych pochodną $f_y(x, y)$ ciągłą względem obu zmiennych. Założmy jeszcze, że całka (1) jest zbieżna dla wszystkich wartości y z $\langle c, d \rangle$ i całka

$$(11) \quad \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y w tym samym przedziale. Wówczas przy dowolnym y z przedziału $\langle c, d \rangle$ prawdziwy jest wzór

$$I'(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx \quad (1).$$

Weźmy dowolną wartość $y = y_0$ i rozpatrzmy wyrażenie

$$(12) \quad \frac{I(y_0+k) - I(y_0)}{k} = \int_a^{\infty} \frac{f(x, y_0+k) + f(x, y_0)}{k} dx.$$

Pokażemy, że dopuszczalne jest tutaj przejście do granicy przy $k \rightarrow 0$ pod znakiem całki.

Widzieliśmy już w ustępie 507, że jeżeli obszarem zmienności x jest przedział skończony $\langle a, A \rangle$, to przy $k \rightarrow 0$ funkcja podcałkowa $\frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}$ dąży do funkcji granicznej $f_y(x, y)$ jednostajnie względem x . Aby móc stosować twierdzenie 1, musimy się jeszcze upewnić, że całka (12) jest zbieżna jednostajnie względem k .

Ponieważ całka (11) jest zbieżna jednostajnie, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $A_0 \geq a$, że jeśli $A' > A > A_0$, to

$$(13) \quad \left| \int_A^{A'} f_y(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

od razu dla wszystkich y [514]. Pokażemy, że jednocześnie jest też

$$(14) \quad \left| \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} dx \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich wartości k .

W tym celu ustalając A i A' weźmy funkcję

$$\Phi(y) = \int_A^{A'} f(x, y) dx.$$

Z twierdzenia 3 z ustępu 507 wynika, że pochodną tej funkcji można obliczyć według reguły Leibniza

$$\Phi'(y) = \int_A^{A'} f_y(x, y) dx.$$

Pochodna ta jak widać z (13) ma wartość bezwzględną mniejszą od ε i wobec tego wyrażenie

$$\frac{\Phi(y_0+k) - \Phi(y_0)}{k} = \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} dx,$$

które zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a jest równe $\Phi'(y_0 + \theta k)$, ma także wartość bezwzględną mniejszą od ε . Nierówność (14) jest zatem spełniona i zgodnie z kryterium z ustępu 514 całka (12) jest zbieżna jednostajnie. Dowód jest tym samym zakończony.

(1) Wzór ten także nazywa się *regułą Leibniza*.

Łatwo jest również otrzymać uogólnienia twierdzeń 2* i 3* z ustępu 510 dotyczące przedziału skońzonego $\langle a, b \rangle$. Trzeba tylko, podobnie jak przy przejściu od twierdzenia 1 do twierdzenia 1', zastąpić punkt $x = \infty$ przez punkt $x = b$ nie wprowadzając żadnych istotnych zmian w sformułowaniach i rozumowaniach.

Uwaga. W przedstawionej tu teorii nie korzystamy ze związku między całkami a szeregami, starając się uwydatnić wszędzie to pojęcie, które jest w rzeczywistości podstawą tej teorii — pojęcie zbieżności jednostajnej do funkcji granicznej. W wielu przypadkach jednak odwołanie się do rozwiniętej już teorii szeregów mogłoby formalnie uprościć rozumowania. Pokażemy to na przykładzie dowodu twierdzenia 3, w którym uproszczenie to będzie bardzo znaczne.

Zastąpmy całkę $I(y)$ przez szereg [por. 477]

$$I(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \quad (A_n \rightarrow \infty).$$

Wyrazy tego szeregu

$$u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx$$

są na podstawie twierdzeń 2 i 3 z ustępów 506 i 507 funkcjami ciągłymi i mają ciągłe pochodne

$$u'_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y(x, y) dx.$$

Co więcej, ze zbieżności jednostajnej całki (11) wynika, że szereg utworzony z tych pochodnych jest zbieżny jednostajnie względem y w przedziale $\langle c, d \rangle$ [514]. Wobec tego na mocy twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz za wyrazem [435] istnieje pochodna

$$I'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y(x, y) dx = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$$

i twierdzenie jest udowodnione.

W ten sam sposób można udowodnić twierdzenia 1 i 2 z ustępów 518 i 520, a także twierdzenie 4 z następnego ustępu, powołując się przy tym na odpowiednie twierdzenia z teorii szeregów funkcyjnych. Pozostawiamy to czytelnikowi.

521. Całkowanie całki względem parametru. Udoskonalimy najpierw następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4. *Przy założeniach twierdzenia 2 prawdziwy jest wzór*

$$(15) \quad \int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Istotnie, z twierdzenia 4 z ustępu 508 wynika, że dla dowolnej liczby skończonej $A \geq a$ zachodzi równość

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y) dy = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Funkcja (3) jest z założenia ciągła względem y i przy $A \rightarrow \infty$ dąży do swej granicy (1) jednostajnie względem y . Wobec tego na podstawie twierdzenia 1 z ustępu 506 w całce z le-

wej strony można przejść do granicy przy $A \rightarrow \infty$ pod znakiem całki, a więc

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx .$$

Istnieje tym samym granica przy $A \rightarrow \infty$ całki z prawej strony, tzn. całka

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy ,$$

i ma tę samą wartość.

Korzystając z uwagi do twierdzenia 2 z ustępu 520 można wyprowadzić stąd następujący wniosek.

Wniosek. W przypadku funkcji nieujemnej $f(x, y)$ sama ciągłość całki (1) względem y pociąga za sobą równość (15).

Okazuje się więc, że — przy znanych nam założeniach — można przedstawiać dwie całki, z których tylko jedna jest rozciągnięta na przedział nieskończony, a druga — na skończony.

W wielu przypadkach jednak potrzebne jest przedstawienie dwu całek rozciągniętych na przedział nieskończony według wzoru

$$(16) \quad \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy .$$

Uzasadnienie takiej zmiany kolejności całek jest często skomplikowane i trudne — czytelnik będzie się o tym mógł przekonać dalej na wielu przykładach.

Jedynie dla wąskiej klasy przypadków można udowodnić wzór (16) ogólnymi rozważaniami.

TWIERDZENIE 5. Zalóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła dla $x \geq a$ i $y \geq c$ i że obie całki

$$(17) \quad \int_a^\infty f(x, y) dx \quad i \quad \int_c^\infty f(x, y) dy$$

są zbieżne jednostajnie — pierwsza względem y , druga względem x — w dowolnym przedziale skończonym. Wówczas jeśli istnieje co najmniej jedna z dwu całek iterowanych

$$(18) \quad \int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)| dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)| dy ,$$

to istnieją i są równe całki iterowane (16).

Przypuśćmy, że istnieje druga z całek (18). Wobec jednostajnej zbieżności całki $\int_a^\infty f dx$ dla dowolnego skończonego $C > c$ zachodzi — zgodnie z poprzednim twierdzeniem — równość

$$\int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy .$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że w całości z prawej strony wolno jest przejść do granicy dla $C \rightarrow \infty$ pod znakiem całki. Wówczas bowiem będzie istnieć całka

$$\begin{aligned} \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx &= \lim_{C \rightarrow \infty} \int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \lim_{C \rightarrow \infty} \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy = \\ &= \int_a^\infty dx \cdot \lim_{C \rightarrow \infty} \int_c^C f(x, y) dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Opierając się na twierdzeniu 1 z ustępu 518 można uzasadnić potrzebne nam przejście graniczne.

Mianowicie, funkcja

$$\int_c^C f(x, y) dy$$

zmiennych x i C jest ciągła względem x [patrz twierdzenie 2 z ustępu 506] i dla $C \rightarrow \infty$ dąży jednostajnie względem x w dowolnym przedziale skończonym do funkcji granicznej

$$\int_c^\infty f(x, y) dy.$$

Całka zaś

$$\int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y) dy$$

jest zbieżna jednostajnie względem C , bo jest zmajoryzowana przez drugą z całek (18), ponieważ

$$\left| \int_c^C f(x, y) dy \right| \leq \int_c^\infty |f(x, y)| dy.$$

Tym samym wszystkie założenia twierdzenia 1 są spełnione i powołanie się na to twierdzenie kończy nasz dowód.

Trochę prościej jest, gdy funkcja $f(x, y)$ nie zmienia znaku. Na przykład dla funkcji nieujemnej (a wystarczy ograniczyć się do tego przypadku) prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek. Jeżeli dla nieujemnej i ciągłej funkcji $f(x, y)$ obie całki (17) są także funkcjami ciągłymi — pierwsza zmienną x , a druga zmienną y — to istnienie jednej z całek iterowanych (16) pociąga za sobą istnienie drugiej, która przy tym musi być równa pierwszej.

Z twierdzenia 2 i uwagi do niego wynika, że założenie ciągłości całek (17) jest równoważne założeniu ich zbieżności jednostajnej. Wystarczy więc zastosować ostatnie twierdzenie, ponieważ w tym przypadku $|f(x, y)| = f(x, y)$.

Rozważania tego ustępu także mogą być przeniesione na przypadek przedziałów skończonych, trzeba przy tym tylko punkt osobliwy $x = \infty$ zastąpić przez punkt osobliwy skończony $x = b$ oraz — jeżeli to jest potrzebne — punkt $y = \infty$ przez punkt $y = d$.

522. Zastosowanie do obliczania niektórych całek. Zastosujemy teraz wyłożoną teorię do obliczenia niektórych ważnych całek.

1^o *Calki Eulera*

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1), \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx \quad (0 < a, b < 1),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} \quad (0 < a < 1, -\pi < \theta < \pi).$$

Z przykładu 1) z ustępu 496 otrzymujemy od razu

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad (m < n).$$

Przyjmując tu $z = x^{1/2n}$ znajdujemy pierwszą z całek eulerowskich dla wartości szcze- gólnej $a = \frac{2m+1}{2n}$.

$$(19) \quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}.$$

Aby otrzymać wartość tej całki dla dowolnego a spełniającego nierówności $0 < a < 1$ wykażemy, że dla tych wartości całka ta jest funkcją ciągłą parametru a .

Dla $0 < x < +\infty$ i $0 < a < 1$ funkcja podcałkowa jest ciągła względem obu zmien- nych. Dalej, rozpatrywana całka jest zbieżna jednostajnie względem a przy $x = 0$ dla $a \geq a_0 > 0$ i przy $x = \infty$ dla $a < a_1 < 1$. Istotnie, rozbijając całkę \int_0^∞ na sumę dwu całek $\int_0^1 + \int_1^\infty$ można z łatwością dostrzec, że są one zmajoryzowane przez całki

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x} dx \quad i \quad \int_1^\infty \frac{x^{a_1-1}}{1+x} dx.$$

Stosując do całki \int_1^∞ twierdzenie 2 i do całki \int_0^1 analogiczne do niego twierdzenie dla prze- diału skończonego stwierdzamy, że są one ciągłymi funkcjami parametru.

Do każdej wartości a ($0 < a < 1$) możemy się dowolnie przybliżyć za pomocą ułam- ków postaci $(2m+1)/2n$, w których m i n są liczbami naturalnymi i $m < n$. Przechodząc po,

obu stronach równości (19) do granicy przy $\frac{2m+1}{2n} \rightarrow a$ i korzystając przy tym z ciągłości całki znajdujemy ostatecznie

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

[por. 519,4]. Z przykładów 2 i 3 z ustępu 496 otrzymujemy w analogiczny sposób

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx = \pi (\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi)$$

oraz

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} = \pi \frac{\sin (1-a) \theta}{\sin \theta \sin a\pi}.$$

2º Obliczymy całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

[por. 492, 3º].

Rozpatrzmy całkę

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a > 0).$$

Obliczymy ją za pomocą różniczkowania względem parametru a . Bezpośrednie zastosowanie reguły Leibniza prowadzi tu jednak do całki rozbieżnej

$$\int_0^\infty \cos ax dx.$$

Wprowadzimy wobec tego czynnik uzbieżniający e^{-kx} ($k > 0$) i będziemy szukać wartości całki

$$I = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a \geq 0).$$

Tutaj różniczkowanie względem a pod znakiem całki jest już dopuszczalne, bo spełnione są założenia twierdzenia 3 — funkcja podcałkowa i jej pochodna cząstkowa względem a są ciągle względem x i a dla $x \geq 0$ i $a \geq 0$, a całka otrzymana w wyniku różniczkowania

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos ax dx = \frac{k}{a^2 + k^2}$$

jest zbieżna jednostajnie względem a , ponieważ majorzyuje ją całka $\int_0^\infty e^{-kx} dx$ nie zawierająca a .

Zatem dla $a \geq 0$ jest

$$\frac{dI}{da} = \frac{k}{a^2 + k^2}.$$

Całkując względem a otrzymujemy

$$I = \arctg \frac{a}{k}.$$

Stalej całkowania nie trzeba tutaj wprowadzać, bo obie strony są równe zeru, gdy $a = 0$.

Otrzymaliśmy ten wzór przy założeniu, że $k > 0$. Ale jeżeli $a = \text{const}$, to całka I jest funkcją k ciągłą także w punkcie $k = 0$ — wynika to na podstawie twierdzenia 2 ze zbieżności jednostajnej względem k całki I przy $k \geq 0$ [patrz 515, 4°]. Innymi słowy

$$I_0 = \lim_{k \rightarrow +0} I.$$

Jeśli $a > 0$, to

$$I_0 = \lim_{k \rightarrow +0} \arctg \frac{a}{k} = \arctg (+\infty) = \frac{1}{2}\pi.$$

W szczególności dla $a = 1$ jest

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

3° *Ciąga Eulera-Poissona* [por. 492, 2°]

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Podstawmy tu $x = ut$, gdzie u jest dowolną liczbą dodatnią. Otrzymamy

$$J = u \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

Pomnożmy teraz obie strony tej równości przez e^{-u^2} i scałkujmy względem u od 0 do ∞ .

$$J \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^\infty e^{-u^2} u du \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

Łatwo dostrzec, że przestawienie całek prowadzi tu od razu do wyniku. Otrzymujemy w ten sposób

$$J^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ponieważ oczywiście jest $J > 0$, więc

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aby wykazać, że mieliśmy prawo zmienić kolejność całkowania spróbujmy odwołać się do wniosku z twierdzenia 5 z ustępu 521. Całka

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

jest ciągłą funkcją t dla wszystkich $t \geq 0$, ale całka

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, dt = e^{-u^2} \cdot J$$

jest ciągła tylko dla $u > 0$, a w punkcie $u = 0$, w którym jest równa zeru, ma skok. Nie możemy więc korzystać z tego wniosku w całym prostokącie $\langle 0, \infty ; 0, \infty \rangle$ i ograniczymy się do prostokąta $\langle u_0, \infty ; 0, \infty \rangle$ ($u_0 > 0$). Sprawdzamy jeszcze, że całka

$$\int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} e^{-(1+t^2)u_0}$$

jest funkcją ciągłą t dla wszystkich $t \geq 0$. Ostatecznie mamy równość

$$\int_{u_0}^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, dt = \int_0^\infty dt \int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u \, du.$$

Pozostaje tylko zmniejszając u_0 przejść do granicy dla $u_0 \rightarrow 0$. Na podstawie wniosku z ustępu 518 można to z prawej strony wykonać pod znakiem całki.

4° Całki Laplace'a

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad z = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Podstawiając w pierwszej z nich

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt,$$

otrzymujemy

$$y = \int_0^\infty \cos \beta x \, dx \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt.$$

Zmieńmy teraz na podstawie twierdzenia 5 kolejność całkowania względem x i t . Otrzymujemy

$$y = \int_0^\infty e^{-x^2 t} dt \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x \, dx.$$

Wewnętrzną całkę znamy już [519, 6] (a)]

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\beta^2/4t},$$

zatem

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t - \beta^2/4t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2 - \beta^2/4z^2} dz \quad (t = z^2).$$

Korzystając jeszcze z wyniku przykładu 8) z ustępu 497 otrzymujemy ostatecznie

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Drugą całkę Laplace'a otrzymujemy z pierwszej różniczkując względem parametru β

$$z = -\frac{dy}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

Stosowanie reguły Leibniza jest tu dozwolone, bo całka jest zbieżna jednostajnie względem β dla $\beta \geq \beta_0 > 0$ [517, 16].

5° Całki Fresnela

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx, \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx.$$

Podstawiając $x^2 = t$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Będziemy szukali wartości pierwszej z tych całek w postaci przekształconej.

Zastępując wyrażenie $1/\sqrt{t}$ pod znakiem całki przez równą mu całkę

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tu^2} du,$$

nadamy obliczanej całce następującą postać:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du.$$

Zmiana kolejności całkowania pozwoliłaby obliczyć tę całkę od razu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-tu^2} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ (1).} \end{aligned}$$

(1) Patrz ustęp 472, zad. 2) lub ustęp 491, zad. 7).

Bezpośrednie uzasadnienie tej zmiany wymaga jednak kłopotliwych przekształceń i oszacowań, wobec tego posłużymy się znów czynnikiem uzbieżniającym e^{-kt} ($k > 0$) (por. punkt 2 tego ustępu).

Będzie teraz

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} \sin t dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}. \end{aligned}$$

Tym razem możemy zmienić kolejność całkowania na podstawie twierdzenia 5. Pozostaje jeszcze przejść do granicy przy $k \rightarrow 0$, co jak łatwo sprawdzić może być przeprowadzone pod znakiem całki.

Ostatecznie

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Tę samą wartość otrzymamy dla całki $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$. Zatem

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$$

523. Przykłady różniczkowania pod znakiem całki.

1) Różniczkując względem parametru $a > 0$ znane całki

$$(a) \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad (c) \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

znajdziemy nowe, interesujące całki.

Rozwiązanie. (a) Różniczkując n -krotnie według reguły Leibniza otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Stosowanie tej reguły jest tu dozwolone, ponieważ wszystkie otrzymane w ten sposób całki są zbieżne jednostajnie względem a dla $a > a_0 > 0$; na przykład dla napisanej całki majorantą jest $\int_0^\infty e^{-a_0 x^2} x^{2n} dx$.

$$(b) \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}},$$

$$(c) \int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

2) Za pomocą różniczkowania względem parametru obliczyć całki ($\alpha, \beta, k > 0$)

$$(a) J = \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx, \quad (b) H = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} \cdot e^{-kx} dx.$$

Rozwiązanie. (a) Pochodna J względem α wyraża się całką

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2},$$

która jest zbieżna jednostajnie względem α . Stąd

$$J = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + k^2) + C.$$

Ponieważ dla $\alpha = 0$ całka J jest równa zeru, więc $C = \frac{1}{2} \ln k^2$ i ostatecznie

$$J = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2} \right).$$

(b) Różniczkując H względem α pod znakiem całki otrzymujemy

$$\frac{dH}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \beta x \cos \alpha x}{x} dx.$$

Stosowanie reguły Leibniza jest tu dozwolone, bo spełnione są, jak łatwo sprawdzić, założenia twierdzenia 3.

Przekształcając iloczyn $\sin \beta x \cos \alpha x$ na różnicę dwu sinusów sprowadzamy otrzymaną całkę do znanych nam już całek [522, 2°]:

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx - \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \right] = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc tg} \frac{\alpha + \beta}{k} - \operatorname{arc tg} \frac{\alpha - \beta}{k} \right).$$

Całkujemy teraz względem α

$$H = \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{arc tg} \frac{\alpha + \beta}{k} - \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{arc tg} \frac{\alpha - \beta}{k} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha - \beta)^2}{k^2 + (\alpha + \beta)^2} + C.$$

Stała $C = 0$, bo dla $\alpha = 0$ jest $H = 0$.

3) Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t dt.$$

Wskazówka. Wprowadzić parametr i rozpatrzyć ogólniejszą całkę

$$\int_1^\infty \frac{1 - e^{-at}}{t} \cos t dt;$$

obliczyć tę całkę za pomocą różniczkowania i następnie przyjąć $a = 1$.

Odpowiedź. $\ln \sqrt{2}$.

4) Obliczyć całki

$$(a) J_1 = \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} dx \quad (a, b > 0),$$

$$(b) J_2 = \int_0^\infty \frac{\arctg rx}{x(1+x^2)} dx \quad (r > 0),$$

$$(c) J_3 = \int_0^\infty \frac{\arctg ax \arctg bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0).$$

(a) Wskazówka. Całka J_1 jest ciągła względem a dla $a > 0$; majorantą jest $\frac{\ln(1+a_1^2 x^2)}{b^2+x^2}$ dla $0 < a < a_1$. Pochodna dla $a > 0$:

$$\frac{dJ_1}{da} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)} dx = \frac{\pi}{ab+1};$$

majorantą dla $0 < a_0 < a < a_1$ jest $\frac{2a_1 x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2 x^2)}$.

Odpowiedź. $J_1 = \frac{\pi}{b} \ln(ab+1)$.

(b) Wskazówka. Pochodna dla $r > 0$

$$\frac{dJ_2}{dr} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+r};$$

majorantą jest $1/(1+x^2)$.

Odpowiedź. $J_2 = \frac{1}{2}\pi \ln(1+r)$.

(c) Wskazówka. Różniczkowanie względem a prowadzi do całki typu J_2

$$\frac{dJ_3}{da} = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} \cdot \frac{\arctg bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\arctg \frac{b}{a}t}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a+b}{a} \quad (a > 0).$$

Odpowiedź. $J_3 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$.

Uwaga. Z całki J_2 przy $r = 1$ otrzymujemy przez podstawienie $x = \tg t$ całkę

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tg t} dt = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Całkując przez części otrzymujemy stąd znowu [por. 492, 1°]

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

5) (a) Obliczyć całkę $J = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx$.

Rozwiązanie. Różniczkujemy

$$\frac{dJ}{db} = - \int_0^\infty e^{-x^2} 2x \sin 2bx dx .$$

Całkując przez części otrzymujemy teraz

$$\frac{dJ}{db} = - 2b \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = - 2bJ .$$

Otrzymaliśmy w ten sposób dla funkcji J równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych [358]. Całkując znajdujemy

$$J = Ce^{-b^2} .$$

Ponieważ dla $b = 0$ musi być $J = \sqrt{\pi}/2$, więc $C = \sqrt{\pi}/2$. Ostatecznie

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

[por. 519, 6) (a)].

(b) Jeżeli w ten sam sposób będziemy obliczali całkę $H = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx$, to dojdziemy do równania różniczkowego

$$\frac{dH}{db} + 2bH = 1 .$$

Mnożąc obie strony tego równania przez e^{b^2} otrzymujemy z lewej strony pochodną iloczynu $e^{b^2}H$ względem b . Całkując obustronnie od 0 do b znajdujemy

$$e^{b^2}H = \int_0^b e^{t^2} dt$$

(skorzystaliśmy z tego, że $H = 0$ dla $b = 0$). Stąd

$$H = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt .$$

Całka ta wyraża się zatem przez nową funkcję nieelementarną

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

[por. 519, 6) (c)].

6) Obliczyć całkę ($a, b > 0$)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2 - b/x^2} dx .$$

Rozwiązanie. Szukana całka tylko czynnikiem $1/\sqrt{a}$ różni się od całki

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2 - c^2/y^2} dy ,$$

gdzie $c^2 = ab$ (podstawienie $y = \sqrt{ax}$). Obliczamy:

$$\frac{dJ}{dc} = - 2c \int_0^\infty e^{-y^2 - c^2/y^2} \frac{dy}{y^2} = - 2 \int_0^\infty e^{y^2 - c^2/s^2} dz = - 2J$$

(podstawienie $y = c/z$). Stąd

$$J = Ae^{-2c}, \quad A = \sqrt{\pi}/2.$$

Odpowiedź. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$ [por. 497, 8)].

7) Obliczyć całkę

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-a_1 t} \cos b_1 t}{t} dt \quad (a, a_1 > 0).$$

Rozwiązanie. Różniczkując względem a i względem b otrzymujemy

$$\frac{\partial J}{\partial a} = - \int_0^\infty e^{-at} \cos bt dt = - \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = - \int_0^\infty e^{-at} \sin bt dt = - \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Nietrudno z tych pochodnych cząstkowych odtworzyć samą funkcję ⁽¹⁾

$$J = -\frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + C,$$

gdzie C nie zależy ani od a , ani od b . Ponieważ dla $a = a_1$ i $b = b_1$ jest $J = 0$, więc

$$C = \frac{1}{2} \ln(a_1^2 + b_1^2),$$

zatem

$$J = \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}.$$

8) Obliczyć całki ($a > 0, b > 0$)

$$u = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2 dx, \quad v = \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx.$$

Rozwiązanie. Obliczymy pochodne tych całek względem parametru b posługując się regułą Leibniza.

$$\frac{du}{db} = - \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \sin bx^2 dx, \quad \frac{dv}{db} = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos bx^2 dx.$$

Całkując przez części obliczamy łatwo

$$\frac{du}{db} = -\frac{1}{2a} v - \frac{b}{a} \cdot \frac{dv}{db}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{1}{2a} u + \frac{b}{a} \cdot \frac{du}{db}$$

i rozwiązując te równania względem pochodnych otrzymujemy

$$(20) \quad \frac{du}{db} = -\frac{bu + av}{2(a^2 + b^2)}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{au - bv}{2(a^2 + b^2)}.$$

Dla szukanych funkcji u i v zmiennej b otrzymaliśmy w ten sposób układ równań różniczkowych.

Łatwo jest ten układ sprowadzić do jednego równania o rozdzielonych zmiennych wprowadzając funkcję zespoloną $w = u + iv$ zmiennej rzeczywistej b . Mianowicie, jeżeli drugie z równań (20) pomnożymy przez i i dodamy stronami do pierwszego, to otrzymamy równanie

$$\frac{dw}{db} = \frac{-b + ai}{2(a^2 + b^2)} w = \frac{i}{2} \cdot \frac{w}{a - bi}.$$

⁽¹⁾ Później zajmiemy się tym zagadnieniem systematycznie; tutaj „funkcję pierwotną” można odradnąć.

Można je scałkować w zwykły sposób rozdzielając zmienne. Aby uniknąć posługiwania się logarytmami liczb zespolonych, można sprawdzić bezpośrednio, że

$$\frac{d}{db} (w \cdot \sqrt{a-bi}) = 0,$$

jeżeli funkcja w spełnia dane równanie. Stąd

$$w \sqrt{a-bi} = c = \text{const.}$$

Przyjmując $b = 0$ znajdujemy $c = \sqrt{\pi}/2$, a więc

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-bi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a-bi}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Przez $\sqrt{a \pm bi}$ oznaczamy tu tę gałąź pierwiastka, która dla $b = 0$ jest pierwiastkiem arytmetycznym z a .

Wiadomo, że ⁽¹⁾

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

tym samym

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}} + i \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}} \right).$$

Przyrównując oddzielnie części rzeczywiste i urojone otrzymujemy

$$u = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}},$$

$$v = \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}.$$

Wzory te wyprowadziliśmy przy istotnym założeniu, że $a > 0$. Ponieważ jednak obie całki są funkcjami ciągłymi a w punkcie $a = 0$ (łatwo się o tym przekonać za pomocą twierdzenia 2 [patrz też 515, 4^o]), to przechodząc w otrzymywanych równościach do granicy przy $a \rightarrow 0$ znajdujemy (jeżeli $b > 0$)

$$\int_0^\infty \cos bx^2 dx = \int_0^\infty \sin bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Są to całki Fresnela (por. 522, 5^o).

9) Pokażemy, że za pomocą równania różniczkowego mogą być łatwo obliczone całki Laplace'a (por. 522, 4^o):

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx, \quad z = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2+x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Widzieliśmy już, że

$$\frac{dy}{d\beta} = -z.$$

⁽¹⁾ Pisząc $\sqrt{a+bi} = x+yi$, obliczamy $a = x^2-y^2$, $b = 2xy$. Stąd

$$x = \pm \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

W obydwu pierwiastkach zostawiamy znak +, bo $xy = \frac{1}{2}b > 0$ i przy tym dla $b = 0$ ma być $x = +\sqrt{a}$.

Dalsze różniczkowanie względem β pod znakiem całki jest niedopuszczalne, bo w wyniku takiego różniczkowania powstałaby całka rozbieżna. Jednak jeżeli do powyższej równości dodamy stronami równość

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

[522, 2^o] (¹), to otrzymamy z prawej strony całkę

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx,$$

która można już różniczkować pod znakiem całki. Różniczkując dostajemy

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx,$$

a więc

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 y.$$

To proste równanie rzędu drugiego o stałych współczynnikach ma równanie charakterystyczne o pierwiastkach $\pm \alpha$. Zatem

$$y = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta},$$

C_1 i C_2 są stałymi. Ponieważ dla wszystkich wartości β całka y jest ograniczona:

$$|y| < \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

więc stała C_1 musi być równa zeru (bo w przeciwnym przypadku przy $\beta \rightarrow +\infty$ całka y rosłaby nieograniczenie).

Dla wyznaczenia C_2 przyjmijmy $\beta = 0$. Oczywiście

$$C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Ostatecznie

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Stąd przez różniczkowanie znajdujemy z.

10) Obliczyć całki

$$u = \int_0^\infty e^{-x} \cos \frac{\alpha^2}{x^2} dx, \quad v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx.$$

(¹) Wartość tej całki nie jest zresztą potrzebna dla dalszych rachunków; wystarczy wiedzieć, że dla wszystkich $\beta > 0$ zachowuje ona stałą wartość. O tym zaś łatwo się przekonać za pomocą podstawienia $t = \beta x$.

Istnienie i ciągłość całek dla wszystkich wartości α wynika z istnienia majoranty e^{-x^2} . Według reguły Leibniza

$$\frac{du}{d\alpha} = - \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} \cdot \frac{2\alpha}{x^2} dx = -2 \int_0^\infty e^{-x^2/y^2} \sin y^2 dy \quad (y = \frac{\alpha}{x}).$$

Druga całka jest dla wszystkich wartości α zbieżna jednostajnie w punktach $y = 0$ i $y = \infty$ i wobec tego pierwsza całka jest zbieżna jednostajnie w punktach $x = \infty$ i $x = 0$ dla α spełniających nierówność $0 < \alpha_0 < \alpha < A < +\infty$. Wobec tego stosowanie reguły Leibniza jest przy $\alpha > 0$ dozwolone.

Dalsze różniczkowanie względem α (dopuszczalność uzasadnimy analogicznie) prowadzi do równości

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = -2 \int_0^\infty e^{-x^2/y^2} \sin y^2 \frac{-2\alpha}{y^2} dy = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx = 4v.$$

Dokładnie tak samo otrzymujemy

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} = -4u.$$

Przyjmując $w = u + iv$ otrzymujemy dla w równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 w}{d\alpha^2} = -4iw.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 4i = 0$ ma pierwiastki $\lambda = \pm \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i$. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego ma zatem postać

$$w = u + iv = Ae^{-\alpha\sqrt{2}} (\cos \alpha \sqrt{2} + i \sin \alpha \sqrt{2}) + Be^{i\alpha\sqrt{2}} (\cos \alpha \sqrt{2} - i \sin \alpha \sqrt{2}).$$

Ponieważ funkcja w jest ograniczona dla wszystkich wartości α , to $B = 0$. Dalej, dla $\alpha = 0$ powinno być $w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, skąd $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ostatecznie

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos \alpha \sqrt{2}, \quad v = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2}.$$

11) Udowodnić tożsamość

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0).$$

Oznaczmy całkę z lewej strony przez u , a całkę z prawej przez v . Podstawiając $x^2 + a^2 = y^2$ w całce u doprowadzamy ją do postaci

$$u = e^{a^2} \cdot \int_a^\infty e^{-y^2} dy.$$

W całce v wprowadzamy nową zmienną podstawiając $x = az$; otrzymujemy

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 z^2} dz}{z^2 + 1}.$$

Różniczkujemy teraz całkę v względem a według reguły Leibniza i pochodną $\frac{dv}{da}$ przedstawiamy w postaci

$$\frac{dv}{da} = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{-a^2 z^2} dz - \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 z^2}}{z^2+1} dz \right\}.$$

Stąd dla v otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dv}{da} - 2a \cdot v = -1.$$

Mnożąc je obustronnie przez czynnik całkujący e^{-a^2} dostajemy równość

$$\frac{d}{da} [v e^{-a^2}] = -e^{-a^2},$$

która całkujemy względem a od 0 do a . Otrzymujemy w ten sposób

$$v e^{-a^2} = v_0 - \int_0^a e^{-t^2} dt,$$

przez v_0 oznaczona jest wartość graniczna

$$v_0 = \lim_{a \rightarrow 0} v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ponieważ tę samą wartość ma całka $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, więc dla v otrzymujemy wyrażenie

$$v = e^{a^2} \cdot \int_a^\infty e^{-t^2} dt$$

identyczne z otrzymanym wyżej dla całki u .

12) Udowodnić tożsamość (przy $k > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x-k)}{x} dx.$$

Obie całki jako funkcje k spełniają równanie różniczkowe

$$y'' + y = \frac{1}{k}.$$

Dla pierwszej całki sprawdzamy to od razu, różniczkując ją dwukrotnie według reguły Leibniza; dla drugiej wygodniej jest skorzystać z przedstawienia jej w postaci

$$\cos k \int_k^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \sin k \int_k^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

Różnica $z = z(k)$ całek stojących po obu stronach tożsamości spełnia zatem równanie jednorodne $z'' + z = 0$, a więc musi mieć postać

$$z = C_1 \sin(k+C_2),$$

C_1 i C_2 są stałymi. Obie całki, a wraz z nimi ich różnica z , dążą do 0, gdy $k \rightarrow \infty$. Stąd $C_1 = 0$, $z(k) \equiv 0$ i tożsamość jest udowodniona.

524. Przykłady całkowania pod znakiem całki.**1) Obliczyć**

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0)$$

całkując pod znakiem całki.

Rozwiązanie. (a) Całka

$$\int_0^\infty e^{-yx} dy = \frac{1}{y} \quad (y > 0)$$

Jest zbieżna jednostajnie względem y dla $y > y_0 > 0$. Całkując tę równość względem y w przedziale od a do b (z lewej strony można całkować pod znakiem całki) otrzymujemy

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}$$

[por. 495, 1)].

(b) Analogicznie, wychodząc z całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (y > 0),$$

która także jest zbieżna jednostajnie względem y dla $y > y_0 > 0$, otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_a^b \sin yx dy = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (b-a)$$

[por. 497, 10(a)].

2) Rozpatrzymy całkę eliptyczną zupełną rodzaju pierwszego

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

jako funkcję modułu k i znajdziemy całkę tej funkcji w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Mamy

$$\int_0^1 K(k) dk = \int_0^1 dk \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi,$$

i stosując podstawienie $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$, dochodzimy do podwojonej całki

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc tg} x}{x} dx = G = 0,915965 \dots$$

[G jest stałą Catalana, por. 328, 6) i 440, 6a)]. Zmiana kolejności całkowania była tu dozwolona na podstawie (zmodyfikowanego) wniosku z twierdzenia 5. Funkcja podcałkowa jest bowiem ciągła i dodatnia w całym prostokącie $\langle 0, \pi/2; 0, 1 \rangle$ z wyjątkiem punktu $(\pi/2, 1)$, gdzie staje się nieskończona. Dalej, całka

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

jest funkcją ciągłą argumentu k dla $k < 1$, a całka

$$\int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

jest funkcją ciągłą argumentu φ dla $\varphi < \pi/2$. Wreszcie istnieje oczywiście druga z całek iterowanych. Spełnione są zatem wszystkie założenia wspomnianego wniosku.

W kilku najbliższych przykładach będziemy mieli znowu do czynienia ze znaną nam już funkcją Bessela o zerowym wskaźniku [440, 12); 441, 4)]

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta .$$

Podstawą dla naszych rozumowań będzie jednak wzór asymptotyczny dla J_0 , który przyjmiemy bez dowodu. Oto ten wzór

$$(21) \quad J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}} ;$$

funkcja $\varphi_0(x)$ pozostaje ograniczona, gdy x rośnie nieograniczenie:

$$|\varphi_0(x)| < L .$$

3) Obliczyć całkę

$$A = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot J_0(x) dx \quad (a > 0) .$$

Jest teraz

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} . \end{aligned}$$

Zmiana kolejności całkowania jest dozwolona, ponieważ całka

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem θ (majorantą jest e^{-ax}).

Ze wzoru (21) widać, że całka

$$\int_0^\infty J_0(x) dx$$

jest zbieżna ⁽¹⁾ i tym samym całka A jest funkcją ciągłą argumentu a również w punkcie $a = 0$ [twierdzenie 2; 515, 4°].

Można wobec tego obliczyć tę całkę ze wzoru dla A , przechodząc do granicy przy $a \rightarrow 0$. Otrzymamy w ten sposób

$$\int_0^\infty J_0(x) dx = 1 .$$

⁽¹⁾ Będzie to od razu jasne, jeśli pierwszy składnik prawej strony wzoru (21) napiszemy w postaci

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) .$$

4) Obliczyć całkę

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot J_0(x) dx \quad (a > 0).$$

Obliczamy

$$B = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx.$$

Ciągka wewnętrzna jest nieciągły czynnikiem Dirichleta [497, 11])]

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \sin \theta < a, \\ 0 & \text{dla } \sin \theta > a. \end{cases}$$

Wobec tego

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot J_0(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{dla } a > 1, \\ \arcsin a & \text{dla } a < 1. \end{cases}$$

Uzasadnimy teraz, że wolno tu było zmienić kolejność całkowania. Mamy następującą równość:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^A \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx.$$

Ciągka wewnętrzna możemy napisać w postaci

$$(22) \quad \int_0^A \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^A \frac{\sin(a + \sin \theta)x}{x} dx + \int_0^A \frac{\sin(a - \sin \theta)x}{x} dx \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{A(a+\sin\theta)} \frac{\sin z}{z} dz + \int_0^{A(a-\sin\theta)} \frac{\sin z}{z} dz \right\}.$$

Jeśli $a > 1$, czyli $a - \sin \theta > a - 1 > 0$, to przy $A \rightarrow \infty$ napisane wyrażenie dąży do granicy jednostajnie względem θ , tym samym całka

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

jest zbieżna jednostajnie i możemy wobec tego zmienić kolejność całkowania. Gdy $a < 1$, zbieżność przestaje być jednostajna w otoczeniu wartości $\theta = \arcsin a$. Ponieważ jednak wyrażenie (22) jest dla wszystkich wartości A i θ wspólnie ograniczone (jest zmajoryzowane przez stałą!), więc całka zewnętrzna jest dla $\theta = \arcsin a$ zbieżna jednostajnie względem A , można zatem przy $A \rightarrow \infty$ przejść do granicy pod znakiem całki i dopuszczalna jest tym samym zmiana kolejności całkowania.

5) Różniczkując całkę B względem parametru a otrzymujemy inną interesującą całkę

$$C = \int_0^\infty J_0(x) \cos ax dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } a > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} & \text{dla } a < 1. \end{cases}$$

Aby uzasadnić dopuszczalność różniczkowania pod znakiem całki, zauważmy, że całka C jest zbieżna jednostajnie względem a w dowolnym przedziale domkniętym wartości zmiennej a nie zawierającym jedności. Wynika to ze wzoru asymptotycznego (21) (1). Napiszemy go mianowicie w postaci

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}$$

i pomnożymy obustronnie przez $\cos ax$

$$J_0(x) \cos ax = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(1+a)x + \cos(1-a)x + \sin(1+a)x + \sin(1-a)x}{\sqrt{x}} + \frac{\varphi_0(x) \cos ax}{x^{3/2}}.$$

Drugi składnik ma jako majorantę funkcję $L/x^{3/2}$. Całka z pierwszego składnika jest dla $|1-a| > \delta > 0$ także zbieżna jednostajnie.

Ten sam wzór pokazuje, że dla $a = 1$ całka C jest rozbieżna.

6) Obliczyć całkę

$$D = \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} \cdot J_0(x) dx \quad (a > 0).$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\ln \sqrt{|a^2 - \sin^2 \theta|} - \ln \sin \theta] d\theta \end{aligned}$$

[por. 497, 16 (b)]. Wobec tego [497, 7] i 511, 7):

$$D = \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} \cdot J_0(x) dx = \begin{cases} \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) & \text{dla } a > 1, \\ 0 & \text{dla } a < 1. \end{cases}$$

Dla uzasadnienia zmiany kolejności całkowania napiszemy najpierw następującą równość prawdziwą dla A skońzonego:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{1-\cos ax}{x} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^A \frac{1-\cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx.$$

Idzie teraz o to, czy przy $A \rightarrow \infty$ wolno po prawej stronie przejść do granicy pod znakiem całki.

(1) Por. notkę na stronie 630.

Aby zbadać zbieżność całki wewnętrznej, rozważmy całkę

$$\begin{aligned} \int_A^{A'} \frac{1-\cos ax}{x} \cos(x \sin \theta) dx &= \frac{1}{2} \int_A^{A'} \frac{dx}{x} [2 \cos(x \sin \theta) - \cos(a + \sin \theta)x - \cos|a - \sin \theta|x] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \int_{A \sin \theta}^{A' \sin \theta} - \int_{A(a + \sin \theta)}^{A'(a + \sin \theta)} - \int_{A|a - \sin \theta|}^{A'|a - \sin \theta|} \right] \frac{\cos z}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{A(a + \sin \theta)}^{A(a + \sin \theta)} - \int_{A' \sin \theta}^{A' \sin \theta} + \int_{A|a - \sin \theta|}^{A|a - \sin \theta|} - \int_{A'|a - \sin \theta|}^{A'|a - \sin \theta|} \right] \frac{\cos z}{z} dz. \end{aligned}$$

Ponieważ całka $\int_{z_0}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz$ ($z_0 > 0$) istnieje, więc dla dostatecznie dużych A i A' napisana suma jest oczywiście dowolnie mała dla wszystkich wartości θ z dowolnego przedziału domkniętego nie zawierającego ani punktu 0, ani $\arcsin a$ (jeżeli $a < 1$). Tym samym zbieżność całki wewnętrznej przy $A \rightarrow \infty$ przestaje być jednostajna jedynie w pobliżu tych wartości θ . Z drugiej jednak strony, ta całka wewnętrzna ma majorantę w postaci funkcji $[\ln \sqrt{|a^2 - \sin^2 \theta|} - \ln \sin \theta]$ całkowalnej w przedziale $(0, \pi/2)$; oznacza to, że całka zewnętrzna jest zbieżna jednostajnie zarówno dla $\theta = 0$, jak i dla $\theta = \arcsin a$ (dla $a < 1$). Zatem zgodnie z twierdzeniem 1' z ustępu 518, potrzebne nam przejście graniczne jest dozwolone.

7) Różniczkując względem parametru całkę D z poprzedniego zadania otrzymujemy całkę

$$E = \int_0^{\infty} J_0(x) \sin ax dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} & \text{dla } a > 1, \\ 0 & \text{dla } a < 1. \end{cases}$$

Uzasadnienie przebiega podobnie jak w przykładzie 5) w oparciu o wzór (21). Dla $a = 1$ całka jest rozbieżna.

8) (a) Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, czy wolno zmienić kolejność całkowania w następującej całce:

$$J = \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

Obliczamy:

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = -\frac{1}{1+y^2},$$

a więc

$$J = - \int_1^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = -\arctg y \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi.$$

Dla drugiej całki iterowanej

$$\tilde{J} = - \int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

otrzymujemy analogicznie $\tilde{J} = \frac{1}{4}\pi$. Zmiana kolejności całkowania jest zatem niedozwolona.

Warto zauważyć, że całka

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

jest zbieżna jednostajnie względem y dla wszystkich $y > 1$ — stwierdziliśmy to w ustępie 517, 1). Analogicznie wykazujemy zbieżność jednostajną całki

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

względem x (dla $x > 1$). Twierdzenia 5 nie można jednak tutaj stosować, gdyż obie całki

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

są rozbieżne, co łatwo jest sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

(b) Łatwo się przekonać, że nie można również zmienić kolejności całkowania w następującym przypadku:

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy = -1, \quad \int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}.$$

Tutaj całka

$$\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dx$$

nie jest rozbieżna jednostajnie w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ — wynika to z twierdzenia 4; można się też przekonać o tym bezpośrednio.

(c) A oto inny interesujący przykład podobnego typu (Hardy)

$$\int_0^1 dx \int_1^\infty (pe^{-pxy} - qe^{-qxy}) dy - \int_1^\infty dy \int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy}) dx = \int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} dx = \ln \frac{q}{p} \text{ (1)},$$

wynik jest różny od zera, jeżeli weźmiemy $p > 0, q > 0$ i $p \neq q$.

9) Podamy dwa nowe sposoby obliczenia całki Laplace'a

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{2+x^2} dx$$

[por. 522, 4°].

(1) Całka Froullaniego [495, 1]).

Ponieważ

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy,$$

więc podstawiając tę całkę za $\frac{1}{1+x^2}$ nadamy całce J postać

$$J = \int_0^\infty \cos \beta x dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

Zmieniając kolejność całkowania otrzymujemy

$$J = \int_0^\infty \sin y dy \int_0^\infty e^{-xy} \cos \beta x dx = \int_0^\infty \frac{y \sin y}{\beta^2 + y^2} dy = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{1+x^2} dx.$$

Ale ostatnia całka różni się od $dJ/d\beta$ jedynie znakiem, a więc J spełnia proste równanie różniczkowe

$$\frac{dJ}{d\beta} = -J, \quad \text{skąd} \quad J = Ce^{-\beta}.$$

Ponieważ dla $\beta = 0$ jest $J = C = \frac{1}{2}\pi$, więc ostatecznie $J = \frac{1}{2}\pi e^{-\beta}$.

Trzeba jeszcze tylko uzasadnić, że wolno było zmienić kolejność całkowania. Jeśli $0 < a < A < +\infty$, to łatwo przekonać się, że zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx &= \int_a^A \cos \beta x dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy = \int_0^\infty \sin y dy \int_a^A e^{-xy} \cos \beta x dx = \\ &= \int_0^\infty \sin y \left[\frac{\beta \sin \beta A - y \cos \beta A}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay}, \frac{\beta \sin \beta a - y \cos \beta a}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} \right] dy = \\ &= \beta \sin \beta A \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay} dy - \cos \beta A \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-Ay} dy - \beta \sin \beta a \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} dy + \\ &\quad + \cos \beta a \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} e^{-ay} dy. \end{aligned}$$

Wszystkie całki są zbieżne jednostajnie — odpowiednio względem a i A , można zatem przechodzić do granicy dla $a \rightarrow 0$ i $A \rightarrow \infty$ pod znakiem całki. Widać, że przy tym podwójnym przejściu do granicy rozpatrywane wyrażenie rzeczywiście dąży do $\int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2 + x^2} dy$.

10) Opierając się na innej tożsamości

$$\frac{x}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-xy} \sin xy dy$$

możemy napisać

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{x} dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin xy dy.$$

Zmieniając tu kolejność całkowania

$$J = \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx,$$

otrzymujemy jako całkę wewnętrzną nieciągły czynnik Dirichleta (497, 11)

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < y < \beta, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{dla } 0 < \beta < y. \end{cases}$$

Wobec tego

$$J = \frac{1}{2}\pi \int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{1}{2}\pi e^{-\beta}.$$

Aby uzasadnić zmianę kolejności całkowania, zauważmy, że całka

$$\int_\beta^\infty e^{-y} \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dy$$

jest zbieżna jednostajnie względem x (majoranta ye^{-y}). Zatem

$$\int_0^A \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx = \int_0^A \frac{\cos \beta x}{x} dx \int_0^\infty e^{-y} \sin xy dy = \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx.$$

Zbadajmy, czy wolno w ostatniej całce (względem y) przejść do granicy pod znakiem całki przy $A \rightarrow \infty$. Funkcja podcałkowa jest iloczynem e^{-y} przez

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{\sin(y+\beta)x + \sin(y-\beta)x}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{(y+\beta)A} \frac{\sin z}{z} dz + \int_0^{(y-\beta)A} \frac{\sin z}{z} dz \right\} \end{aligned}$$

i przy $A \rightarrow \infty$ dąży do swej granicy jednostajnie względem y wyjawszy otoczenie punktu $y = \beta$. Ponieważ drugi czynnik jest ograniczony dla wszystkich wartości A oraz y , więc funkcja podcałkowa ma majorantę postaci Ce^{-y} i tym samym całka zewnętrzna jest zbieżna jednostajnie względem A dla $y = \beta$ i $y = \infty$. Wobec tego można przejść do granicy pod znakiem całki; a to znaczy, że można zmienić kolejność całkowania.

11) Na zakończenie podamy jeszcze jeden elegancki przykład obliczenia całki

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy,$$

więc

$$I = \int_0^\infty \sin x dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Zbadamy dopuszczalność zmiany kolejności całkowania. Łatwo jest sprawdzić, że dla $0 < a < A < +\infty$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_a^A \sin x dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \int_0^\infty dy \int_a^A e^{-xy} \sin x dx = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2} e^{-ay} - \frac{y \sin A + \cos A}{1+y^2} e^{-Ay} \right\} dy = \\ &= \sin a \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy + \cos a \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-ay} dy - \sin A \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-Ay} dy - \cos A \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-Ay} dy. \end{aligned}$$

Dwie ostatnie całki są zbieżne jednostajnie względem A (dla $A > A_0 > 0$). Przechodząc w nich pod znakiem całki do granicy przy $A \rightarrow \infty$ widzimy, że obie one dążą do 0. Druga całka, zbieżna jednostajnie względem a (dla $a > 0$), dąży oczywiście do $\pi/2$, gdy $a \rightarrow 0$. Pozostaje do sprawdzenia, że pierwsza całka, pomnożona przez $\sin a$ dąży przy tym przejściu granicznym do 0. Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy &= \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2} e^{-at} dt = \int_0^1 + \int_1^\infty, \\ \int_0^1 < \int_0^1 \frac{t dt}{a^2+t^2} &= \frac{1}{2} \ln(1+a^2) - \ln a, \quad \int_1^\infty < \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} = C. \end{aligned}$$

Stąd już wynika potrzebny wniosek.

§ 4. Uzupełnienia

525. Lemat Arzeli. Wprawdzie dla obliczeń wystarcza najczęściej materiał wyłożony w pierwszych trzech paragrafach, to jednak przy rozważaniach teoretycznych potrzebne są czasami pewne subtelniejsze twierdzenia, które zresztą pozwalają podać prostsze warunki stosowności rozpatrzonych operacji.

Zaczniemy od udowodnienia pewnego pomocniczego twierdzenia o układach przedziałów; autorem jego jest Arzela.

Lemat. *Niech w skończonym przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ będą zawarte rodziny $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$ przedziałów, z których każda składa się ze skończonej liczby przedziałów domkniętych nie zachodzących na siebie. Jeśli suma długości przedziałów każdej rodziny D_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) jest większa od pewnej liczby dodatniej δ , to istnieje co najmniej jeden punkt $x = c$ należący do nieskończonego zbioru rodzin D_k .*

Dowód. Jeżeli jakiś przedział pewnej rodziny D_k ($k > 1$) zachodzi na przedziały rodzin poprzedzających D_1, \dots, D_{k-1} i ich końce dzielą go na części, to część i te będziemy też uważali za przedziały rodzin D_k . W ten sposób, jeśli d' jest przedziałem rodzin $D_{k'}$, a d'' przedziałem rodzin $D_{k''}$ i jeśli $k' < k''$, to albo d' i d'' nie zachodzą na siebie, albo d'' jest zawarte w d' .

Rodzina D_{k+1} może oczywiście nie zawierać się w rodzinie poprzedniej D_k . Ponieważ jest to okoliczność niewygodna, więc zastąpimy rodzinę D_k przez inne rodzinę przedziałów domkniętych Δ_k według następującej reguły: aby otrzymać Δ_k dołączamy do rodziny D_k przedziały rodzin D_{k+1} nie zawarte w D_k , następnie przedziały rodzin D_{k+2} nie zawarte w D_k i w D_{k+1} , itd. do nieskończoności.

Zbudowana w taki sposób rodzina Δ_k może już zawierać nieskończoną liczbę przedziałów. Za to jednak 1) każdy z przedziałów rodzin Δ_{k+1} jest na pewno zawarty w jednym z przedziałów rodzin Δ oraz 2) suma długości (ściślej mówiąc, suma szeregu długości) przedziałów tworzących Δ_k jest nadal większa od δ , tak jak to było dla D_k .

Następny krok będzie polegał na tym, że rodzinę Δ_k zastąpimy przez ich części skończone $\Delta^{(k)}$, zachowując jednak przy tym pierwszą z wymienionych własności rodzin Δ_k . Zrobimy to w sposób następujący.

Jeżeli liczba przedziałów rodziny Δ_1 jest skończona, to przyjmiemy po prostu $\Delta' = \Delta_1$. W przeciwnym wydzielamy z Δ_1 podrodzinę skończoną Δ' przedziałów d'_1, d'_2, \dots, d'_r w ten sposób, aby suma długości pozostałych przedziałów $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \dots$ rodziny Δ_1 była mniejsza od δ (1).

Co najmniej niektóre z przedziałów rodziny Δ_2 są zawarte w przedziałach rodziny Δ' ; gdyby bowiem były one wszystkie zawarte w przedziałach $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \dots$, to suma ich długości byłaby mniejsza od δ wbrew własności 2) rodzin Δ_k . Jeśli w Δ' zawiera się skończona liczba przedziałów rodziny Δ_2 , to przyjmujemy je za rodzinę Δ'' . W wypadku przeciwnym wydzielimy spośród nich rodzinę skończoną Δ''' w ten sposób, aby suma długości wszystkich pozostałych przedziałów rodziny Δ_2 (łączącą w to przedziały nie zawarte w Δ') była mniejsza od δ . Przedłużamy to postępowanie do nieskończoności wydzielając z Δ_3 rodzinę skończoną Δ'''' , ... z Δ_k – rodzinę skończoną $\Delta^{(k)}$, ... Przy tym każdy z przedziałów rodziny $\Delta^{(k+1)}$ jest zawarty w jednym z przedziałów rodziny $\Delta^{(k)}$. Własność 2) rodzin Δ_k nie przysługuje już rodzinom $\Delta^{(k)}$, ale za to są one znów skończone (podobnie jak rodzinie D_k).

Wreszcie, ostatni etap polega na wydzieleniu z rodzin $\Delta^{(k)}$ po jednym przedziale $d^{(k)}$ w ten sposób, aby każdy z nich zawierał się w poprzednim.

Mianowicie, wśród przedziałów rodziny Δ' istnieje co najmniej jeden taki przedział d' , w którym zawarte są przedziały nieskończonego zbioru rodzin następnych.

Istotnie, przyopuszcmy, że jest przeciwnie, tj. że w każdym przedziale rodziny Δ' zawierają się przedziały należące tylko do skończonego zbioru rodzin następnych; wówczas to samo zachodziłoby dla całej rodzinie Δ' , gdyż składa się ona ze skończonej ilości przedziałów. Innymi słowy, istniałaby tak duża liczba k_0 , że żaden z przedziałów rodziny $\Delta^{(k_0)}$ nie byłby zawarty w Δ' , co przeczy własności 1) rodzin $\Delta^{(k)}$.

W przedziale d' są zawarte pewne przedziały rodziny Δ'' , bo w przeciwnym przypadku nie zawierałby on żadnych przedziałów rodziny Δ''' itd. Co więcej, jeden z przedziałów rodziny Δ'' zawierający się w d' musi mieć tę samą własność, co przedział d' , tj. musi zawierać przedziały z nieskończonego zbioru rodzin następnych, bo inaczej również przedział d' nie miałby tej własności (tu znów istotną rolę odgrywa skończoność rodziny Δ''). Oznaczmy ten przedział rodzinie Δ'' przez d'' . Przedłużając ten proces do nieskończoności wybieramy z każdej rodziny $\Delta^{(k)}$ przedział $d^{(k)}$ zawarty w poprzednio wybranym przedziale $d^{(k-1)}$.

Stwierdzamy teraz, tak jak w dowodzie elementarnego lematu z ustępu 38, że monotoniczne ciągi $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ muszą mieć granice i że

$$\lim a_k = \alpha < \beta = \lim b_k.$$

Nie możemy tutaj udowodnić równości obu granic, gdyż nic nie wiemy o długościach przedziałów $d^{(k)}$. Jednak każdy punkt c spełniający warunek $\alpha < c < \beta$ należy oczywiście do wszystkich przedziałów $d^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) i tym samym należy do każdej rodziny Δ_k (dla $k = 1, 2, 3, \dots$). To zaś oznacza, że dla każdego k punkt c należy do pewnej rodzinie $D_{k'}$, gdzie $k' > k$ (widać to z reguły budowania rodzin Δ_k). Stąd już wynika, że punkt c należy do zbioru nieskończonego rodzin D_k .

526. Przejście do granicy pod znakiem całki. Udosowimy obecnie twierdzenie analogiczne do twierdzenia 6* z ustępu 436. Założenie o jednostajnej zbieżności funkcji $f_n(x)$ zastąpimy jednak przez słabsze założenie jej ograniczoności.

TWIERDZENIE 1 (Arzeli). *Niech będzie dany ciąg funkcji*

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

całkowalnych (w sensie właściwym) w przedziale (a, b) i wspólnie ograniczonych:

$$|f_n(x)| < L \quad (L = \text{const}, \quad a < x < b, \quad n = 1, 2, 3, \dots).$$

Jeżeli dla każdego x z przedziale (a, b) istnieje granica

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

(1) Można to zrobić w oparciu o własność reszty szeregu zbieżnego.

i funkcja $\varphi(x)$ jest również całkowalna, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Dowód. Przyjmiemy na razie dodatkowe założenie, że funkcje $f_n(x)$ są nieujemne

$$f_n(x) > 0$$

że ich granicą jest zero:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Przy tym założeniu trzeba udowodnić, że

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

Weźmy ciąg liczb dodatnich $\{\eta_n\}$ zbieżny do zera. Dla każdego n rozkładamy przedział (a, b) na części $d_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, h_n$) w taki sposób, aby odpowiednia suma dolna Darboux

$$s_n = \sum_{i=1}^{h_n} m_i^{(n)} d_i^{(n)} \quad (1)$$

spełniała nierówność

$$0 < \int_a^b f_n(x) dx - s_n < \eta_n.$$

Teraz oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx - s_n \right] = 0$$

i dla udowodnienia (2) wystarczy stwierdzić, że

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

W tym celu pokażemy, że dla dowolnie małych liczb $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje taka liczba N , że dla $n > N$ suma długości tych przedziałów $d_i^{(n)}$ n -tego rozkładu, którym odpowiadają kresy dolne $m_i^{(n)} > \varepsilon$ będzie nie większa niż δ .

Przypuśćmy mianowicie, że jest przeciwnie. Wtedy dla ciągu nieskończonego wartości n

$$n = n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

suma długości tych przedziałów $d_i^{(n)}$, dla których $m_i^{(n)} > \varepsilon$ byłaby większa od δ . Do rodzin D_k tych przedziałów można zastosować lemat z poprzedniego ustępu. Zgodnie z tym lematem istniałby w przedziale (a, b) punkt c należący do nieskończonego zbioru rodzin D_k . Zatem nierówność

$$f_n(c) > \varepsilon$$

zachodziłaby dla nieskończonego zbioru wartości n , co przeczy założeniu (1), które ma być spełnione również dla $x = c$. Tak więc liczba N istnieje; niech teraz będzie $n > N$. Oznaczmy przez i' i i'' numery tych przedziałów n -tego rozkładu, dla których

$$m_{i'}^{(n)} < \varepsilon \quad \text{lub} \quad m_{i''}^{(n)} > \varepsilon.$$

(1) Przez $d_i^{(n)}$ oznaczamy zarówno sam przedział, jak i jego długość; $m_i^{(n)}$ oznacza kres dolny funkcji $f(x)$ w przedziale $d_i^{(n)}$.

Odpowiednio do tego rozbijmy i sumę

$$s_n = \sum_i m_i^{(n)} d_i^{(n)} = \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} + \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)}.$$

Teraz już łatwo spostrzec, że

$$\sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \sum_{i'} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon (b-a),$$

$$\sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} < L \sum_{i''} d_{i''}^{(n)} < L \delta,$$

gdyż zgodnie z założeniem jest $m_i^{(n)} < L$. Stąd

$$s_n < \varepsilon (b-a) + L \delta;$$

ponieważ ε i δ wybraliśmy dowolnie, więc nierówność ta dowodzi równości (3).

Przypadek ogólny sprowadza się łatwo do tego przypadku szczególnego, w którym twierdzenie udowodniliśmy. Mianowicie, ponieważ zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| < \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)| dx,$$

więc wystarczy zastosować otrzymany wynik do funkcji nieujemnej $|f_n(x) - \varphi(x)|$ dążącej do zera.

Wniosek. Jeśli spełnione są wszystkie założenia prócz założenia o całkowalności funkcji granicznej, to zawsze istnieje skończona granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Dla dowodu wystarczy (39) stwierdzić, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla $n'' > n' > N$ jest

$$\left| \int_a^b f_{n''}(x) dx - \int_a^b f_{n'}(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_{n''}(x) - f_{n'}(x)] dx \right| < \varepsilon.$$

Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wówczas istnieje taka liczba ε_0 i takie dwa rosnące nieograniczenie ciągi liczb n'_m i n''_m ($m = 1, 2, 3, \dots$; $n''_m > n'_m$), że zawsze spełniona jest nierówność

$$(4) \quad \left| \int_a^b [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] dx \right| > \varepsilon_0.$$

Z drugiej strony, mamy

$$|f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)| < 2L \quad \text{i} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] = 0.$$

Jeśli do funkcji

$$f_m^*(x) = f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)$$

zastosujemy twierdzenie Arzeli, to otrzymamy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m^*(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] dx = 0,$$

co przeczy nierówności (4). Ze sprzeczności tej wynika dowodzone twierdzenie.

Łatwo jest przejść od parametru naturalnego n do dowolnego parametru y [por. twierdzenie 1 z ustępu 506].

TWIERDZENIE 2. Założmy, że funkcja $f(x, y)$ określona dla x z przedziału $\langle a, b \rangle$ i y z obszaru \mathcal{Y} jest ograniczona

$$|f(x, y)| < L \quad (L = \text{const})$$

całkowalna względem x w przedziale $\langle a, b \rangle$ przy ustalonym y . Jeżeli dla wszystkich x istnieje funkcja graniczna

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad (1)$$

również całkowalna w $\langle a, b \rangle$, to

$$(5) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx .$$

Wystarczy zastosować twierdzenie 1 do funkcji $f_n(x) = f(x, y_n)$, gdzie $\{y_n\}$ jest dowolnym ciągiem wartości y z \mathcal{Y} dającym do y_0 . Otrzymujemy wtedy równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \int_a^b \varphi(x) dx ,$$

równoważną z równością (5).

527. Różniczkowanie pod znakiem całki. Opierając się na twierdzeniu Arzeli łatwo można otrzymać następujące twierdzenie, które jest odpowiednikiem i uogólnieniem twierdzenia 3, z ustępu 507.

TWIERDZENIE 3. Założmy, że funkcja $f(x, y)$ określona w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$ jest całkowalna względem x w $\langle a, b \rangle$ dla dowolnego, ustalonego y z $\langle c, d \rangle$. Założmy dalej, że w całym prostokącie istnieje pochodna cząstkowa $f'_y(x, y)$ również całkowalna względem x i pochodna ta traktowana jako funkcja dwóch zmiennych jest ograniczona

$$|f'_y(x, y)| < L \quad (L = \text{const}, \quad a < x < b, \quad c < y < d) .$$

Wówczas dla funkcji

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

prawdziwa jest równość

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

dla dowolnego y z przedziale $\langle c, d \rangle$.

Dowód. Biorąc – podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3 z ustępu 507 [por. (11)] – ustaloną wartość $y = y_0$, mamy

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx .$$

Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta k) ,$$

a więc wartość bezwzględna funkcji podcałkowej, zależnej od x i k , jest dla wszystkich wartości tych zmiennych ograniczona przez stałą L . Stosując tu twierdzenie 2 możemy pod znakiem całki przejść do granicy przy $k \rightarrow 0$, otrzymując w ten sposób dowodzoną równość.

(1) Zakłada się przy tym, rzecz jasna, że w obszarze \mathcal{Y} możliwe jest przejście graniczne przy $y \rightarrow y_0$.

528. Całkowanie pod znakiem całki. Prawdziwe jest tutaj twierdzenie uogólniające w znacznym stopniu twierdzenie 4 z ustępu 508.

TWIERDZENIE 4. *Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$, określona w prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$ jest całkowalna względem x w przedziale $\langle a, b \rangle$ przy ustalonym y oraz względem y w przedziale $\langle c, d \rangle$ (przy ustalonym x). Jeśli ponadto funkcja $f(x, y)$ jest ograniczona*

$$|f(x, y)| < L \quad (L = \text{const})$$

w całym prostokącie $\langle a, b; c, d \rangle$, to istnieją obie całki iterowane

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

i są równe.

Dowód. Oznaczamy

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad K(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Weźmy teraz dowolny ciąg rozkładów przedziału $\langle c, d \rangle$ na części o długościach

$$\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{h_n}^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

spełniających jedynie ten warunek, że $\max_i \{\delta_i^{(n)}\}$ dąży do zera wraz ze wzrostaniem n . Wybierzmy w każdym i -tym przedziale ($i = 1, 2, \dots, h_n$) n -tego rozkładu dowolną wartość $y = y_i^{(n)}$ i zbudujmy sumę całkową dla funkcji $I(y)$:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{h_n} I(y_i^{(n)}) \delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{h_n} \left\{ \int_a^b f(x, y_i^{(n)}) dx \right\} \delta_i^{(n)} = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}) \delta_i^{(n)} \right\} dx.$$

Jeśli oznaczymy

$$\sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}) \delta_i^{(n)} = f_n^*(x),$$

to σ_n możemy napisać w postaci

$$\sigma_n = \int_a^b f_n^*(x) dx.$$

Ponieważ istnieje oczywiście granica

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x) = \int_c^d f(x, y) dy = K(x)$$

i ponadto dla wszystkich wartości x i n jest

$$|f_n^*(x)| < L(d - c),$$

zgodnie z wnioskiem z ustępu 526 istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n.$$

Tak więc granica ta istnieje niezależnie od sposobu rozkładania przedziału na części (byłyby tylko największa ich długość dążyła do zera) i od wyboru wartości $y_i^{(n)}$. Stąd już wynika, że we wszystkich przypadkach granica musi być ta sama, a zatem istnieje całka

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^*(x) dx.$$

W zupełnie podobny sposób można udowodnić istnienie całki $\int_a^b K(x) dx$, tj. całkowalność funkcji granicznej dla $f_n^*(x)$ [por. (6)]. Wówczas, stosując do $f_n^*(x)$ twierdzenie 1 otrzymamy ostatecznie

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^*(x) dx = \int_a^b K(x) dx,$$

czyli

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Rozważaliśmy tutaj jedynie całki właściwe. Przyjmując za podstawę udowodnione dla nich twierdzenia, można by odpowiednio uogólnić wyniki dotyczące całek niewłaściwych, nie będącym się jednak tym zajmowali.

§ 5. Całki Eulera

529. Całka Eulera pierwszego rodzaju. Tak nazywamy (za Legendre'em) całkę postaci

$$(1) \quad B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx,$$

gdzie $a, b > 0$. Przedstawia ona funkcję dwóch parametrów a i b — tak zwaną *funkcję B* („beta”).

Wiemy [483, 3) (a)], że całka ta jest zbieżna ⁽¹⁾ dla dodatnich wartości a i b (nawet mniejszych od jedności), a zatem może być przyjęta za definicję funkcji B . Zbadamy niektóre jej własności.

1º Przede wszystkim podstawiając $x = 1-t$ otrzymujemy od razu

$$B(a, b) = B(b, a);$$

a więc *funkcja B jest symetryczna względem a i b*.

2º Całkując przez części otrzymujemy z (1) dla $b > 1$ ⁽²⁾

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1} d \frac{x^a}{a} = \\ &= \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-2} dx = \\ &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \\ &= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Jeśli wartość choćby jednego z parametrów a, b jest ujemna lub zero, to całka jest rozbieżna.

⁽²⁾ Opieramy się tutaj na tożsamości

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x).$$

Stąd

$$(2) \quad B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Stosując ten wzór możemy tak dugo zmniejszać b , jak dugo b jest większe od 1. W ten sposób zawsze można doprowadzić do tego, żeby drugi argument funkcji był nie większy od 1.

To samo można osiągnąć również dla pierwszego argumentu, ponieważ wobec symetryczności funkcji B prawdziwy jest również drugi wzór redukcyjny ($a > 1$)

$$(2') \quad B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b).$$

Jeżeli b jest liczbą naturalną n , to stosując wzór (2) odpowiednią ilość razy otrzymamy

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} \cdot B(a, 1).$$

Ale

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie następujące wyrażenie dla $B(a, n)$ i jednocześnie $B(n, a)$

$$(3) \quad B(n, a) = B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)}.$$

Jeśli a jest liczbą naturalną m , to

$$B(m, n) = \frac{(n-1)! (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Wzór ten można zastosować również dla $m = 1$ i $n = 1$, jeśli przez $0!$ będziemy rozumieli 1.

3º Podamy inne przedstawienie analityczne funkcji B , które często bywa użyteczne.

Podstawmy mianowicie w całce (1) $x = \frac{y}{1+y}$, gdzie y jest nową zmienną przebiegającą wartości od 0 do ∞ . Otrzymamy w ten sposób

$$(4) \quad B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

Przyjmijmy we wzorze (4) $b = 1-a$, gdzie $0 < a < 1$. Otrzymamy teraz

$$B(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy.$$

Rozpoznajemy tu obliczoną już dawniej całkę, również związaną z nazwiskiem Eulera [por. 519, 4 (a) lub 522, 1°]. Podstawiając jej wartość dochodzimy do wzoru

$$(5) \quad B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1).$$

Jeśli, w szczególności, przyjmiemy $a = 1 - a = \frac{1}{2}$, to dostaniemy

$$(5a) \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Poprzestaniemy na tych własnościach funkcji B , gdyż — jak to zaraz zobaczymy — wyraża się ona bardzo prosto przez inną funkcję — „gamma”, która będzie głównym tematem rozważań niniejszego paragrafu.

530. Całka Eulera drugiego rodzaju. Tę nazwę nadał Legendre godnej uwagi całce

$$(6) \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx,$$

która jest zbieżna dla dowolnego $a > 0$ [483, 5 (c)] ⁽¹⁾ i określa funkcję Γ („gamma”). Funkcja Γ , obok funkcji elementarnych, jest jedną z najważniejszych dla analizy i jej zastosowań. Dokładne zbadanie własności funkcji Γ biorące za podstawę jej całkową definicję (6) będzie zarazem pięknym przykładem zastosowania wyłożonej wyżej teorii całek zależnych od parametru.

W ustępach 402, 10), 408 i 441, 11) z rozdziałów XI i XII spotykaliśmy już funkcję Γ , ale określaliśmy ją inaczej, wykażemy więc przede wszystkim tożsamość obu definicji (oczywiście dla $a > 0$).

Przyjmując w (6) $x = \ln \frac{1}{z}$ otrzymamy

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\ln \frac{1}{z} \right)^{a-1} dz.$$

Jak wiadomo [77, 5) (b)]:

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - z^{1/n}),$$

przy czym wyrażenie $n (1 - z^{1/n})$ przy wzrastaniu n dąży do swej granicy rosnąc ⁽²⁾. Tak więc na podstawie 518 zachodzi równość

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1} dz,$$

⁽¹⁾ Dla $a < 0$ całka jest rozbieżna.

⁽²⁾ Można się o tym przekonać metodami rachunku różniczkowego rozpatrując wyrażenie $\frac{1 - z^a}{a}$ jako funkcję a .

lub — jeśli dokonać podstawienia $z = y^n$ — równość

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{a-1} dy.$$

Jednak, zgodnie z (3),

$$\int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{a-1} dy = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}.$$

W ten sposób dochodzimy ostatecznie do słynnego wzoru Eulera-Gaussa

$$(7) \quad \Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)},$$

który poprzednio był dla nas punktem wyjścia [402 (14)].

W dalszym ciągu, jak już zapowiedzieliśmy, własności funkcji Γ będziemy wyprowadzali z jej przedstawienia całkowego (6).

531. Najprostsze własności funkcji Γ . 1º Funkcja $\Gamma(a)$ jest ciągła dla każdej wartości $a > 0$ i ma ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

Wystarczy wykazać istnienie pochodnych wszystkich rzędów. Różniczkując całkę (6) (różniczkujemy pod znakiem całki) otrzymamy

$$(8) \quad \Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \ln x e^{-x} dx.$$

Zastosowanie reguły Leibniza jest tu dozwolone, bo obie całki

$$\int_0^1 x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx$$

są zbieżne jednostajnie względem a , pierwsza przy $x = 0$ dla $a \geq a_0 > 0$ (majorantą jest $x^{a_0-1} |\ln x|$), a druga przy $x = \infty$ dla $a \leq A < \infty$ (majorantą jest $x^A e^{-x}$ (1)).

W ten sam sposób można przekonać się o istnieniu drugiej pochodnej

$$(8*) \quad \Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx$$

i wszystkich pochodnych wyższych rzędów.

2º Całkując wzór (6) przez części otrzymujemy

$$a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = x^a e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a e^{-x} dx,$$

a więc [por. 402, (15)]

$$(9) \quad \Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$$

(1) Dla $x > 0$ jest, oczywiście, $\ln x < x$.

Stosując ten wzór wielokrotnie, otrzymujemy

$$(10) \quad \Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a).$$

W ten sposób obliczenie wartości funkcji Γ dla dowolnie dużej wartości argumentu można sprowadzić do obliczenia wartości tej funkcji dla wartości argumentu mniejszej od 1.

Jeśli we wzorze (10) przyjmiemy $a = 1$ i skorzystamy z tego, że

$$(11) \quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

to okaże się, że

$$(12) \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

Funkcja Γ jest zatem naturalnym uogólnieniem na zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych funkcji $n!$ określonej jedynie dla naturalnych wartości argumentu n .

3º Przebieg zmienności funkcji Γ . Obecnie możemy zbadać przebieg zmienności funkcji $\Gamma(a)$, gdy a wzrasta od 0 do ∞ .

Z (11) i (12) mamy: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, a więc zgodnie z twierdzeniem Rolle'a między liczbami 1 i 2 powinien leżeć pierwiastek a_0 pochodnej $\Gamma'(a)$.

Pochodna ta jest stale rosnąca, ponieważ druga pochodna $\Gamma''(a)$ jest — jak widać z wzoru (8*) — stale dodatnia. Wobec tego dla $0 < a < a_0$ pochodna $\Gamma'(a)$ jest ujemna i funkcja $\Gamma(a)$ maleje, natomiast dla $a_0 < a < \infty$ jest $\Gamma'(a) > 0$, tym samym $\Gamma(a)$ rośnie; w punkcie $a = a_0$ jest minimum. Obliczenia, których tutaj nie przytoczymy, dają

$$a_0 = 1,4616\dots, \quad \min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0,8856\dots$$

Warto jeszcze znaleźć granicę funkcji $\Gamma(a)$, gdy a dąży do 0 lub do ∞ . Z (11) [oraz z 1º] wynika, że

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \rightarrow +\infty$$

dla $a \rightarrow +0$. Z drugiej strony, wobec (12)

$$\Gamma(a) > n!, \quad \text{jeśli tylko } a > n+1,$$

a więc $\Gamma(a) \rightarrow +\infty$, gdy $a \rightarrow +\infty$.

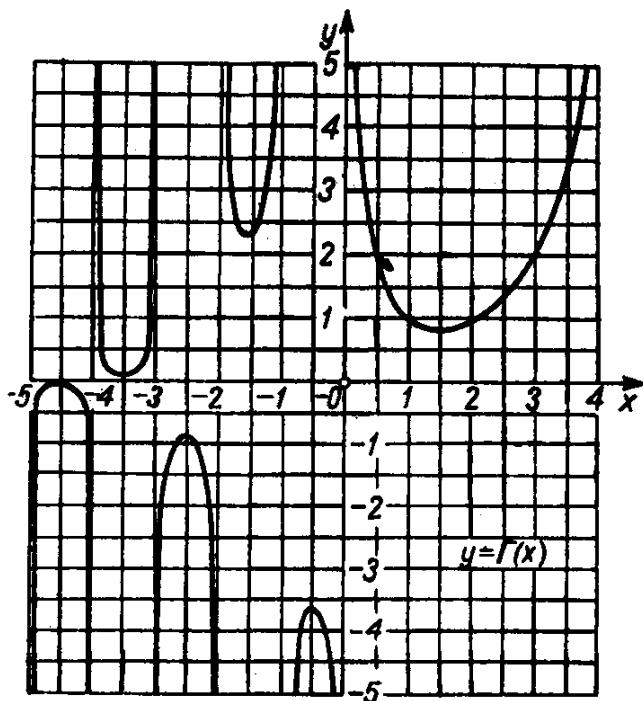
Wykres funkcji $\Gamma(a)$ jest przedstawiony na rysunku 64. na str. 648. (W chwili obecnej interesuje nas ta część wykresu, która leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).

4º Związek między funkcjami B i Γ . Aby ustalić ten związek, dokonamy podstawienia $x = ty$ ($t > 0$) przekształcając (6) do postaci

$$(13) \quad \frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-ty} dy.$$

Pisząc w tym wzorze $a+b$ zamiast a oraz $1+t$ zamiast t otrzymujemy

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$



Rys. 64

Pomnożymy teraz obie strony tej równości przez t^{a-1} i scałkujmy względem t w granicach od 0 do ∞ , otrzymamy

$$\Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^\infty t^{a-1} dt \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Całka z lewej strony jest funkcją $B(a, b)$ [por. (4)]. Z prawej strony zmienimy kolejność całkowania, otrzymując w rezultacie [uwzględniamy (13) i (6)]

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) B(a, b) &= \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt = \\ &= \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a) \int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a) \Gamma(b), \end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$(14) \quad B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Podany tu piękny dowód tego wzoru Eulera zawdzięczamy Dirichletowi. Zauważmy, że na to, aby ten dowód był kompletny, trzeba jeszcze uzasadnić dopuszczalność zmiany kolejności całkowania.

Zrobimy to ograniczając się najpierw do przypadku, gdy $a > 1$, $b > 1$. Wtedy dla funkcji

$$t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}$$

spełnione są wszystkie warunki podane we wniosku z ustępu 521; funkcja ta jest ciągła (i przy tym dodatnia) dla $y \geq 0$ i $t \geq 0$, i całki

$$t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(a+b) \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

oraz

$$y^{a+b-1} e^{-y} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt = \Gamma(a) y^{b-1} e^{-y}$$

również są funkcjami ciągłymi: pierwsza — zmiennej t dla $t \geq 0$, druga — zmiennej y dla $y \geq 0$. Powołanie się na wspomniany wniosek uzasadnia zmianę kolejności całkowania, a zatem i wzór (14) w przypadku gdy $a > 1$ i $b > 1$.

Jeżeli zaś wiemy tylko, że $a > 0$ i $b > 0$, to — zgodnie z tym co udowodniliśmy — jest

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

Stąd wykorzystując wzory redukcyjne (2), (2') dla funkcji B i (9) dla funkcji Γ — łatwo można znów otrzymać wzór (14) bez żadnych ograniczeń.

5º Wzór na dopełnienie. Jeśli we wzorze (14) przyjmiemy $b = 1 - a$ (dla $0 < a < 1$), to wobec (5) i (11) otrzymamy związek [por. 408 (30)]

$$(15) \quad \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Wzór ten nazywa się wzorem na dopełnienie.

Ponieważ $\Gamma(a) > 0$, więc dla $a = \frac{1}{2}$ otrzymujemy stąd

$$(16) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Jeśli w całce

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}$$

podstawimy $z = x^2$, to ponownie otrzymamy wartość całki Euler-Poissona

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6º Jako zastosowanie wzoru na dopełnienie obliczymy, za Eulerem, wartość iloczynu

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.

Przepiszmy ten iloczyn w odwrotnej kolejności

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

i przemnóżmy oba wyrażenia

$$E^2 = \prod_{v=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{v}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-v}{n}\right).$$

Do każdej pary czynników $\Gamma\left(\frac{v}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-v}{n}\right)$ zastosujmy teraz wzór na dopełnienie.

Otrzymamy

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \sin 2 \frac{\pi}{n} \dots \sin (n-1) \frac{\pi}{n}}.$$

Dla obliczenia iloczynu sinusów [por. str. 621] rozpatrzmy tożsamość

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{v=1}^{n-1} \left(z - \cos \frac{2v\pi}{n} - i \sin \frac{2v\pi}{n} \right).$$

Jeżeli z dąży do jedności, to w granicy dostaniemy

$$n = \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2v\pi}{n} - i \sin \frac{2v\pi}{n} \right).$$

Porównując moduły, mamy

$$n = \prod_{v=1}^{n-1} \left| 1 - \cos \frac{2v\pi}{n} - i \sin \frac{2v\pi}{n} \right| = 2^{n-1} \prod_{v=1}^{n-1} \sin \frac{v\pi}{n},$$

a więc

$$\prod_{v=1}^{n-1} \sin \frac{v\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Podstawiając to do wyrażenia na E^2 otrzymamy ostatecznie

$$(17) \quad E = \prod_{v=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{v}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}.$$

7º Całka Raabego. Z wzorem na dopełnienie związane jest obliczenie ważnej całki

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(a) da.$$

Całka ta, rzecz jasna, istnieje, ponieważ [por. (9)].

$$\ln \Gamma(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln a.$$

Zamieniając a na $1-a$ możemy napisać

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(1-a) da .$$

Dodając stronami otrzymamy

$$\begin{aligned} 2R_0 &= \int_0^1 \ln \Gamma(a) \Gamma(1-a) da = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin a\pi} da = \\ &= \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin x dx = \ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx . \end{aligned}$$

Podstawiając do tego wzoru wartość znanej nam już całki [492, 1°] znajdziemy:

$$(18) \quad R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(a) da + \ln \sqrt{2\pi} .$$

Raabe rozważał całkę (przy $a > 0$)

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da = \int_0^{a+1} - \int_0^a .$$

Ponieważ oczywiście jest

$$R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln a$$

[por. (9)], więc całkując znajdziemy dla $a > 0$

$$R(a) = a(\ln a - 1) + C .$$

Ponieważ funkcja $R(a)$ jest ciągła i dla $a = 0$, więc przechodząc tutaj do granicy przy $a \rightarrow 0$ otrzymamy $C = R_0$. Podstawiając wartość (18) dochodzimy do wzoru Raabego

$$(19) \quad R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi} .$$

8° Wzór Legendre'a. Jeśli w całce

$$\begin{aligned} B(a, a) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx \end{aligned}$$

podstawiamy $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$, to otrzymamy

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right) .$$

Zamieńmy po obu stronach funkcję B przez wyrażenie (14) przedstawiając ją za pomocą funkcji Γ . Dostaniemy

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Uproszczając przez $\Gamma(a)$ i podstawiając w miejsce $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ jej wartość $\sqrt{\pi}$ [por. (16)] dochodzimy do wzoru Legendre'a

$$(20) \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \Gamma(a).$$

532. Jednoznaczne określenie funkcji Γ na podstawie własności. Wiemy, że funkcja $\Gamma(a)$ jest ciągła wraz ze swoją pochodną dla dodatnich wartości argumentu. Ponadto [patrz (9), (20) i (15)] spełnia ona równania funkcyjne

$$(I) \quad \Phi(a+1) = a\Phi(a), \quad (II) \quad \Phi(a)\Phi\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Phi(2a), \quad (III) \quad \Phi(a)\Phi(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Wykażemy, że te własności łącznie charakteryzują całkowicie funkcję Γ , innymi słowy — każda funkcja mająca te własności jest identyczna z funkcją Γ .

Same własności (I) i (II) nie wystarczają do tego, ponieważ oprócz funkcji Γ ma je też funkcja

$$\Phi(a) = \Gamma(a)[4\sin^2 a\pi]^\mu \quad (\text{dla } \mu > 0).$$

Podobnie, nie wystarczają własności (II) i (III), bo ma je również funkcja

$$\Phi(a) = \Gamma(a) \cdot z^{a-1/2} \quad (\text{dla } z > 0).$$

Wreszcie, własności (I) i (III) pozwalają, oczywiście, dowolnie określić wartości funkcji $\Phi(a)$ dla $0 < a < \frac{1}{2}$. Inaczej jest, gdy funkcja ma mieć wszystkie trzy własności. Własność (III) może być zresztą zastąpiona przez warunek słabszy, mianowicie przez warunek, aby funkcja $\Phi(a)$ dla $a > 0$ nie przybierała wartości równej 0, co właśnie wynika z (III) (¹).

A więc, niech funkcja $\Phi(a)$ będzie ciągła dla $a > 0$ wraz ze swoją pochodną, niech będzie różna od zera i niech spełnia warunki (I) i (II). Udowodnimy, że $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$.

Przymijmy $\Phi(a) = M(a)\Gamma(a)$; funkcja $M(a)$ jest, rzecz jasna, również ciągła wraz ze swoją pochodną i różna od 0. Oprócz tego, ponieważ $\Phi(a)$ i $\Gamma(a)$ spełniają warunki (I) i (II), więc $M(a)$ czyni zadość warunkom

$$(I') \quad M(a+1) = M(a) \quad \text{i} \quad (II') \quad M(a)M\left(a+\frac{1}{2}\right) = M(2a).$$

Z (I') widać, że funkcja $M(a)$ ma przy $a \rightarrow +0$ granicę skońzoną. Jeśli tę granicę przyjmiemy za wartość $M(0)$, to funkcja $M(a)$ będzie ciągła wraz ze swoją pochodną aż do punktu $a = 0$ włącznie.

Zauważmy, że z (II') dla $a = \frac{1}{2}$ wynika, iż $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; znaczy to, że $M(a) > 0$ dla wszystkich wartości $a > 0$. Możemy więc rozważać funkcję

$$L(a) = \ln M(a),$$

która jest również ciągła wraz ze swoją pochodną dla $a > 0$ i czyni zadość warunkom

$$(I'') \quad L(a+1) = L(a) \quad \text{i} \quad (II'') \quad L(a) + L\left(a+\frac{1}{2}\right) = L(2a).$$

(¹) Dla $0 < a < 1$; dla pozostałych wartości a warunek ten wynika już z (I).

Wreszcie, wprowadźmy jeszcze funkcję ciągłą

$$\Delta(a) = L'(a);$$

Spełnia ona warunki

$$(I'') \quad \Delta(a+1) = \Delta(a) \quad \text{i} \quad (II'') \quad \Delta(a) + \Delta\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2a).$$

Pisząc $a/2$ zamiast a otrzymamy z (II'')

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta\left(\frac{a}{2}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{2}\right) \right\} = \Delta(a).$$

Jeśli w tym wzorze znów weźmiemy najpierw $a/2$, a następnie $(a+1)/2$, zamiast a i dodamy otrzymane równości, to będziemy mieli

$$\frac{1}{4} \left\{ \Delta\left(\frac{a}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+3}{4}\right) \right\} = \Delta(a).$$

Łatwo jest udowodnić indukcyjnie ogólny związek

$$\frac{1}{2^n} \sum_{v=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+v}{2^n}\right) = \Delta(a).$$

Dla każdej wartości a sumę po lewej stronie można uważać za sumę całkową dla całki

$$\int_0^1 \Delta(x) dx \quad (1).$$

Zatem

$$\Delta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{v=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+v}{2^n}\right) = \int_0^1 \Delta(x) dx = L(1) - L(0) = 0$$

[na mocy (I'')]. Wobec tego, $L(a) = \text{const}$, a więc również $M(a) = \text{const}$. Widzieliśmy jednak, że $M(\frac{1}{2}) = 1$, tak że $M(a) \equiv 1$ i $\Gamma(a) \equiv \Phi(a)$, c.b.d.o.

Zauważmy na zakończenie, że założenie różniczkowalności jest tutaj istotne i nie można go pominąć. Jeżeli np. przyjmiemy

$$L(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n \pi a),$$

to funkcja $L(a)$ będzie ciągła i będzie spełniała warunki (I'') i (II''). Będzie przy tym $L(0) = 0$ i $L(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, tak że $L(a)$ nie zredukuje się do stałej!

533. Inna charakterystyka funkcyjna funkcji Γ . W poprzednim ustępie zdefiniowaliśmy funkcję $\Gamma(a)$ jako jedyną funkcję ciągłą wraz z pochodną spełniającą równania funkcyjne (I) i (II) i nie równą zeru (dla $a > 0$). Obecnie podamy prostszą definicję funkcji $\Gamma(a)$ za pomocą jednego tylko równania funkcyjnego (I), dodając jednak jeszcze warunek „wypukłości logarytmicznej”, którego sens zaraz wyjaśnimy.

W ustępie 141 podaliśmy definicję funkcji wypukłej $f(x)$. Funkcja dodatnia $f(x)$ określona w przedziale \mathcal{X} nazywa się *logarytmicznie wypukła* w tym przedziale, jeżeli funkcja $\ln f(x)$ jest funkcją wypukłą. Ponieważ

$$f(x) = e^{\ln f(x)},$$

(1) Uwzględniając przy tym okresowość funkcji $\Delta(a)$ wynikającą z (I'').

więc na mocy 142, 3° z wypukłości logarytmicznej funkcji $f(x)$ wynika jej zwykła wypukłość, teza odwrotna jest na ogół fałszywa. W ten sposób funkcje wypukłe logarytmicznie są częścią klasy funkcji wypukłych.

Opierając się na twierdzeniu 2 z ustępu 143, można podać warunek *wypukłości logarytmicznej*:

Niech funkcja dodatnia $f(x)$ ciągła wraz ze swoją pierwszą pochodną $f'(x)$ w przedziale \mathfrak{X} ma we wnętrzu przedziału skończoną drugą pochodną $f''(x)$, wtedy na to, aby funkcja $f(x)$ była logarytmicznie wypukła w \mathfrak{X} , potrzeba i wystarcza, aby we wnętrzu \mathfrak{X} było

$$f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 \geq 0.$$

Dowód polega na zastosowaniu wspomnianego twierdzenia do funkcji $\ln f(x)$.

Wróćmy teraz do funkcji $\Gamma(x)$. Pierwsza i druga pochodna tej funkcji wyrażają się wzorami (8) i (8*). Zgodnie z nierównością Buniakowskiego [321, (13'); 483, 7)] jest

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [\psi(x)]^2 dx - \left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \geq 0.$$

Jeżeli przyjmiemy tu

$$a = 0, \quad b = \infty; \quad \varphi(x) = \sqrt{x^{a-1} e^{-x}}, \quad \psi(x) = \sqrt{x^{a-1} e^{-x}} \ln x,$$

to otrzymamy

$$\Gamma(a)\Gamma''(a) - [\Gamma'(a)]^2 \geq 0.$$

Stąd, zgodnie z dopiero co podanym warunkiem, funkcja $\Gamma(a)$ jest w przedziale $(0, \infty)$ wypukła logarytmicznie. Ta oto własność łącznie z równaniem (I) określa funkcję Γ z dokładnością do czynnika stałego. Inaczej mówiąc:

Jeśli 1) $\Phi(a)$ spełnia w przedziale $(0, \infty)$ równanie (I)

$$\Phi(a+1) = a\Phi(a),$$

2) $\Phi(a)$ jest wypukła logarytmicznie i 3) $\Phi(1) = 1$, to $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$.

Przypuśćmy, że funkcja $\Phi(a)$ spełnia wszystkie te trzy warunki.

Stosując wielokrotnie równanie (I) dochodzimy do ogólnej równości

$$(21) \quad \Phi(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1)a\Phi(a),$$

n jest dowolną liczbą naturalną. Stąd przyjmując $a = 1$ [por. 3)] i pisząc $n-1$ zamiast n otrzymujemy

$$(22) \quad \Phi(n) = (n-1)!.$$

Zauważmy, że wystarczy wykazać tożsamość $\Phi(a)$ i $\Gamma(a)$ w przedziale $(0, 1)$ bo na mocy (I) obie te funkcje będą wówczas identyczne wszędzie. Niech więc $0 < a \leq 1$.

Przypomnijmy sobie nierówność (6) z ustępu 143

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

prawdziwą dla funkcji wypukłej $f(x)$, jeśli tylko $x_1 < x_2$ ⁽¹⁾. Stosując dwukrotnie tę nierówność do funkcji $\ln \Phi(a)$, wypukłej na mocy 2), dla dowolnego $n \geq 2$ otrzymujemy

$$\frac{\ln \Phi(-1+n) - \ln \Phi(n)}{(-1+n) - n} < \frac{\ln \Phi(a+n) - \ln \Phi(n)}{(a+n) - n} < \frac{\ln \Phi(1+n) - \ln \Phi(n)}{(1+n) - n}$$

⁽¹⁾ Co prawda, w miejscu, na które się powołujemy, zakładaliśmy, że $x_1 < x < x_2$, łatwo jednak stwierdzić, że ta nierówność jest prawdziwa dla każdej wartości x , byle tylko była ona różna od x_1 i od x_2 .

lub, uwzględniając równość (22),

$$\ln(n-1) < \ln \frac{\Phi(a+n)-\ln(n-1)!}{a} < \ln n.$$

Wynika stąd, że

$$\ln(n-1)^a \cdot (n-1)! < \ln \Phi(a+n) < \ln n^a \cdot (n-1)!,$$

a więc

$$(n-1)^a \cdot (n-1)! < \Phi(a+n) < n^a \cdot (n-1)!$$

Przechodząc teraz, za pomocą wzoru (21), do wartości $\Phi(a)$ dochodzimy do nierówności

$$\frac{(n-1)^a(n-1)!}{a(a+1)\dots(a+n-1)} < \Phi(a) < \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}.$$

Wreszcie, zastępując w pierwszej z tych nierówności n przez $n+1$, otrzymujemy oszacowanie

$$\Phi(a) < n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} < \Phi(a) \cdot \frac{a+n}{n}.$$

Stąd już wynika, że

$$\Phi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} = \Gamma(a)$$

— na mocy wzoru (7) Eulera-Gaussa.

534. Przykłady

1) Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0).$$

Wskazówka. Podstawiając $x^m = y$ sprowadzimy ją do całki Eulera pierwszego rodzaju.

$$\text{Odpowiedź. } \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m} + q\right)}.$$

Należy udowodnić — na podstawie tego wyniku — że np. przy wszelkim naturalnym n

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[2n]{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt[2n]{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad (\text{Euler}).$$

2) Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} dx \quad (\alpha, \beta > 0; \gamma, p, q > 0).$$

Za pomocą podstawienia

$$\frac{(\alpha+\gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t, \quad \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = 1-t, \quad \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) dx}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^2} = dt$$

całka ta sprowadza się do

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{B(p, q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}.$$

3) Obliczyć całki

$$(a) \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}} dx \quad (a, b, p > 0), \quad (b) \int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{2m+1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx \quad (m, n > 0).$$

Wskazówki. (a) Podstawienie $y = (1+p) \frac{x}{x+p}$. (b) Podstawienie $u = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

Odpowiedź. (a) $\frac{1}{(1+p)^a p^b} B(a, b)$; (b) $2^{m+n-2} B(m, n)$.

Stąd można otrzymać z kolejni wiele interesujących całek. Na przykład w (b) przyjmiemy $n = 1 - m$, $2m - 1 = \cos 2\alpha$ i podstawimy $x = \tan \varphi$, to otrzymamy

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \right)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 \alpha)}.$$

4) Obliczyć całki

$$(a) \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi \quad (a, b > 0);$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} \varphi d\varphi \quad (a > 0);$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \tan^c \varphi d\varphi \quad (|c| < 1).$$

Rozwiązanie. (a) Podstawiając $x = \sin \varphi$ sprowadzimy tę całkę do całki

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2} b-1} dx,$$

korzystając teraz z zadania 1) dostaniemy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

(b) W szczególności, dla $b = 1$, otrzymamy stąd

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \quad (1).$$

Stosując wzór Legendre'a można przepisać ten wynik w postaci

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = 2^{a-2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

(1) Łatwo jest sprawdzić, że w tym wzorze jako szczególne przypadki zawarte są obydwa wzory (8) z ustępu 312.

(c) Wreszcie, przyjmując w (c) $a = 1+c$ i $b = 1-c$, gdzie $|c| < 1$, otrzymamy stosując wzór na dopełnienie

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{c\pi}{2}}.$$

5) Obliczyć pole $|P|$ figury ograniczonej krzywą

$$r^4 = \sin^3 \theta \cos \theta.$$

Rozwiązanie. Krzywa ma dwie pętle — w pierwszej i trzeciej ćwiartce, wystarczy podwoić pole jednej z nich. Zgodnie z wzorem na pole we współrzędnych biegunowych [338 (9)] mamy

$$|P| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} \theta \cos^{1/2} \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{8}$$

[por. zad. 4) (a) i związki (9), (12), (15)].

6) Obliczyć (a) pole $|P|$ figury ograniczonej jedną gałęzią krzywej

$$r^m = a^m \cos m\theta \quad (m — liczba naturalna)$$

i (b) długość $|S|$ tej gałęzi.

Rozwiązanie. (a)

$$\begin{aligned} |P| &= 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2m} \cos^{2/m} m\theta d\theta = \frac{a^2}{m} \int_0^{\pi/2} \cos^{2/m} \varphi d\varphi = \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} = \\ &= \frac{\pi a^2}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2} \end{aligned}$$

[por. zad. 4) (b) i związki (9), (20)].

(b) Zgodnie z wzorem na długość łuku we współrzędnych biegunowych [329 (4b)]

$$|S| = 2a \int_0^{\pi/2m} \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta d\theta = \frac{2a}{m} \int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{1}{m}-1} \varphi d\varphi = \frac{a}{m} \cdot 2^{\frac{1}{m}-1} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

[por. zad. 4) (b)].

7) Obliczyć całki

$$(a) \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos \theta}}, \quad (b) \int_0^\pi \left(\frac{\sin \varphi}{1+k \cos \varphi}\right)^{a-1} \frac{d\varphi}{1+k \cos \varphi} \quad (a > 0, \quad 0 < k < 1).$$

(a) Wskazówka. Podstawić: $\cos \theta = 1 - 2\sqrt{x}$.

Odpowiedź. $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$.

(b) Wskazówka. Podstawić $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$.

Odpowiedź. $\frac{2^{a-1}}{(1-k^2)^{a/2}} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)}.$

8) Udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-1/2} dx = \sqrt{3} \int_1^\infty (x^3-1)^{-1/2} dx.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy

$$\int_0^1 (1-x^3)^{1/2} dx = I_1, \quad \int_1^\infty (x^3-1)^{-1/2} dx = I_2,$$

$$\int_{-\infty}^0 (1-x^3)^{-1/2} dx = \int_0^\infty (1+x^3)^{-1/2} dx = I_3.$$

Należy udowodnić równość

$$I_1 + I_3 = \sqrt{3} I_2.$$

Stosując do tych całek odpowiednio podstawienia $x = t^{1/3}$, $x = t^{-1/3}$, $x = (t^{-1}-1)^{1/3}$ sprowadzimy je do całek Eulera pierwszego rodzaju. Następnie trzeba tylko kilkakrotnie zastosować wzór na dopełnienie.

9) Udowodnić wzór (wyrowadzony przez Dirichleta)

$$\Gamma(r) \int_0^\infty \frac{e^{-fx} x^{s-1}}{(g+x)^r} dx = \Gamma(s) \int_0^\infty \frac{e^{-gy} y^{r-1}}{(f+y)^s} dy \quad (f, s, g, r > 0).$$

Wskazówka. Podstawić

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^r} = \int_0^\infty e^{-(s+x)y} y^{r-1} dy, \quad \frac{\Gamma(s)}{(f+y)^s} = \int_0^\infty e^{-(s+y)x} x^{s-1} dx$$

i zmienić kolejność całkowania względem x i y (przypadek funkcji dodatniej).

10) W zadaniu 12) z ustępu 511 udowodniliśmy tożsamość

$$EK' + E'K - KK' = c = \text{const}$$

(oznaczenia podane są w cytowanym miejscu). Następnie, stosując pewne przejście graniczne pokazaliśmy, że $c = \pi/2$. Ten sam wynik można uzyskać obliczając wartość lewej strony dla jakiejkolwiek wartości szczególnej k .

Niech $k = 1/\sqrt{2}$, wtedy $k' = k$, $E' = E$ i $K' = K$ i tożsamość przybiera postać

$$2EK - K^2 = (2E - K) \cdot K = c.$$

Całki

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

można sprowadzić przez kolejne podstawienia $\cos \varphi = t$, $t^4 = x$ do całek Eulera pierwszego rodzaju;

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-3/4} (1-x)^{-1/2} dx$$

$$E = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \int_0^1 x^{-3/4} (1-x)^{-1/2} dx + \int_0^1 x^{-1/4} (1-x)^{-1/2} dx \right\},$$

tak że

$$2E-K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-1/4} (1-x)^{-1/2} dx.$$

Stąd szukana wartość stałej

$$c = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{\pi}{2}.$$

11) Rozwinąć w szereg całki:

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (s > 1), \quad (b) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \quad (s > 0).$$

Rozwiązanie:

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \Gamma(s) \cdot \zeta(s),$$

gdzie $\zeta(s)$ (funkcja dzeta Riemanna) oznacza, jak zwykle, sumę ostatniego szeregu. Posłużyliśmy się tutaj twierdzeniem o całkowaniu szeregu o wyrazach dodatnich [518] i wzorem (13).

$$(b) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad (\text{majoranta: } \frac{2x^{s-1}}{e^x + 1}).$$

Jeśli $s > 1$, to wynik powyższy można przedstawić w postaci

$$\Gamma(s) (1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s),$$

gdyż

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} (1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

12) Pewnym uogólnieniem zadania poprzedniego są rozwinięcia

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx = \Gamma(s) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a+n)^s} \quad (s > 1, a > 0),$$

[jeśli $a = 1$, to otrzymujemy stąd 11) (a)] i

$$(b) \int_0^\infty \frac{zx^{s-1} dx}{e^x - z} = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \quad (-1 \leq z < 1 \text{ i } s > 0 \quad \text{lub} \quad z = 1, s > 1)$$

[można stąd otrzymać 11) (a) przy $z = 1$ i 11) (b) przy $z = -1$].

13) Oznaczając sumę szeregu hipergeometrycznego [por. 441, 6)]

$$1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n$$

przez $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, udowodnić związek

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

(Gauss).

Biorąc $\alpha > 0$ i $\gamma - \alpha > 0$ rozpatrzmy całkę

$$I(x) = \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} (1-zx)^{-\beta} dz$$

dla $0 < x < 1$. Ponieważ przy ustalonym x szereg

$$(1-zx)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n z^n$$

jest zbieżny jednostajnie względem z w przedziale $(0, 1)$, więc mnożąc go przez funkcję $z^{\alpha-1} (1-z)^{\gamma-\alpha-1}$ całkowalną w tym przedziale, możemy całkować otrzymany w ten sposób szereg wyraz za wyrazem. Otrzymujemy rozwinięcie

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cdot x^n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n) \cdot \Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \end{aligned}$$

[patrz (10)]. Wobec tego

$$I(x) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Aby otrzymać wzór Gaussa, wystarczy przejść tu do granicy, dla $x \rightarrow 1$ (przyjmując, że $\gamma - \alpha - \beta > 0$). To przejście graniczne można w szeregu przeprowadzić wyraz za wyrazem zgodnie z twierdzeniem Abela [437, 6°]. Pod całką zaś można przejść do granicy, bo istnieją majoranty

$$z^{\alpha-1} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} \quad (\text{dla } \beta < 0) \quad \text{lub} \quad z^{\alpha-1} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \quad (\text{dla } \beta > 0).$$

W rezultacie [por. (14)]

$$\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, 1);$$

stąd wynika już dowodzony związek. Możemy z niego otrzymać w szczególności dla $\gamma = 1$, $\beta = -\alpha$, uwzględniając [(11), (9), (15)], interesujące rozwinięcie

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} = 1 - \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \quad (0 < \alpha < 1) \text{ (1)}.$$

535. Pochodna logarytmiczna funkcji Γ . Kontynuując badanie własności funkcji Γ przejdziemy do rozpatrzenia jej *pochodnej logarytmicznej*, to znaczy wyrażenia

$$\frac{d \ln \Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

9° Różne przedstawienia tego wyrażenia w postaci całek można uzyskać ze wzoru (8).

(1) Można je też otrzymać przez przekształcenie znanego iloczynu nieskończonego przedstawiającego funkcję sinus [408].

Najprościej jednak jest przyjąć za punkt wyjścia następujące rozważania. Jest

$$\begin{aligned}\Gamma(b) - B(a, b) &= \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b} = \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b};\end{aligned}$$

jeżeli przejdziemy tu do granicy przy $b \rightarrow 0$, to dostaniemy

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} [\Gamma(b) - B(a, b)].$$

Weźmy teraz wzory [patrz (6) i (4)]:

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx, \quad B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

Zatem

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^\infty x^{b-1} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right] dx$$

i przechodząc pod znakiem całki do granicy otrzymamy wzór Cauchy'ego

$$(23) \quad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}.$$

Aby uzasadnić dopuszczalność takiego przejścia do granicy, zauważymy, że w otoczeniu punktu $x = 0$, $b = 0$ wyrażenie

$$\frac{1}{x} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right]$$

jest funkcją ciągłą zmiennych x i b i $x^b < 1$. Dla dostatecznie dużych wartości x i $b \leq b_0$ istnieje majoranta

$$x^{b_0-1} \left[\frac{1}{(1+x)^a} - e^{-x} \right].$$

Jeżeli w wyrażeniu dla B podstawimy $x = e^{-t}$, otrzymamy

$$B(a, b) = \int_0^\infty e^{-at} (1 - e^{-t})^{b-1} dt$$

i będziemy mieli

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^\infty [e^{-x} x^{b-1} - e^{-ax} (1 - e^{-x})^{b-1}] dx.$$

Przechodząc tu do granicy pod znakiem całki (dopuszczalność takiego przejścia uzasadnia się analogicznie) dochodzimy do innego wzoru

$$(24) \quad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right) dx .$$

Można też, na odwrót, usunąć całkowicie wyrażenia wykładnicze z funkcji podcałkowej. Przyjmijmy w tym celu w (23) $a = 1$:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{1+x} \right] \frac{dx}{x} = -C ,$$

gdzie C jest tzw. *stałą Eulera* ⁽¹⁾. Odejmując stronami tę równość od równości (23) otrzymamy

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x} .$$

Wreszcie, podstawienie $t = \frac{1}{1+x}$ prowadzi nas do *wzoru Gaussa*:

$$(25) \quad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt .$$

536. Twierdzenie o mnożeniu funkcji Γ . 10° Korzystając z przedstawienia (25) pochodnej logarytmicznej wprowadzimy teraz następujący, interesujący wzór znaleziony również przez Gaussa:

$$(26) \quad \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^{na-\frac{1}{2}}} \Gamma(na)$$

(n jest dowolną liczbą naturalną). Przedstawia on tzw. *twierdzenie o mnożeniu funkcji Γ* .

Podstawiając w (25) $t = u^n$ otrzymujemy

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na-1}}{1-u^n} du .$$

Stąd, zastępując a przez $a + \frac{v}{n}$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$), mamy

$$\frac{\Gamma'\left(a + \frac{v}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{v}{n}\right)} + C = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na+v-1}}{1-u^n} du .$$

⁽¹⁾ W rozdziale XI [367, 10)] podaliśmy inną definicję tej stałej. Niżej przekonamy się, że obie te definicje są równoważne.

Sumując teraz względem v od $v = 0$ do $v = n - 1$, dostajemy

$$\sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Gamma' \left(a + \frac{v}{n} \right)}{\Gamma \left(a + \frac{v}{n} \right)} + nC = n \int_0^1 \left[\frac{n u^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{na-1}}{1-u} \right] du .$$

Zestawmy tę równość z następującą:

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + C = \int_0^1 \frac{1-u^{na-1}}{1-u} du .$$

Mnożąc ostatnią równość przez n i odejmując od poprzedniej znajdziemy, że

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Gamma' \left(a + \frac{v}{n} \right)}{\Gamma \left(a + \frac{v}{n} \right)} - n \frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} &= n \int_0^1 \left[\frac{n u^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u} \right] du = \\ &= -n \ln \frac{1-u^n}{1-u} \Big|_0^1 = -n \ln n . \end{aligned}$$

Można to napisać w postaci

$$\frac{d}{da} \ln \frac{\Gamma(a) \Gamma \left(a + \frac{1}{n} \right) \dots \Gamma \left(a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = -n \ln n .$$

Całkując otrzymujemy stąd

$$\ln \frac{\Gamma(a) \Gamma \left(a + \frac{1}{n} \right) \dots \Gamma \left(a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = -an \ln n + \ln C {}^1 ,$$

czyli

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma \left(a + \frac{1}{n} \right) \dots \Gamma \left(a + \frac{n-1}{n} \right)}{\Gamma(na)} = \frac{C}{n^{na}} .$$

Dla wyznaczenia stałej C przyjmijmy tu $a = 1/n$. Oczywiście, $C = nE$, gdzie E jest iloczynem Eulera, który obliczyliśmy w ustępie 531, 6°. Podstawiając jego wartość w (17) dojdziemy do wzoru (26).

⁽¹⁾ Przewidując, że trzeba będzie przejść do funkcji wykładniczej od razu bierzemy dowolną stałą w postaci $\ln C$.

Przypadkiem szczególnym wzoru Gaussa jest wyprowadzony wcześniej i niezależnie od niego wzór Legendre'a (20). Istotnie, jeśli w (26) weźmiemy $n = 2$, to otrzymamy wzór

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a - \frac{1}{2}}} \Gamma(2a),$$

równoważny ze wzorem (20).

537. Niektóre rozwinięcia w szeregi i iloczyny. 11° Podstawą ich będzie wzór (25). Rozwińmy wyrażenie podcałkowe w szereg:

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t} = (1-t^{a-1}) \sum_{v=0}^{\infty} t^v = \sum_{v=0}^{\infty} (t^v - t^{a+v-1}).$$

Wszystkie wyrazy tego szeregu mają ten sam znak. Całkowanie wyraz za wyrazem daje

$$(27) \quad D \ln \Gamma(a) + C = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{a+v} \right).$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie dla $0 < a \leq a_0$, majorzyuje go bowiem szereg

$$(a_0+1) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}.$$

Jeśli zróżniczkujemy ten szereg wyraz za wyrazem względem a , to otrzymamy interesujące z powodu swej prostoty rozwinięcie

$$(28) \quad D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(a+v)^2}.$$

Mieliśmy tu prawo różniczkować wyraz za wyrazem, bo szereg był zbieżny jednostajnie dla $a > 0$ (majorantą jest szereg $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$).

12° Całkując wyraz za wyrazem szereg (27) w granicach od 1 do a ($a > 0$) otrzymujemy

$$(29) \quad \ln \Gamma(a) + C(a-1) = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{v+1} - \ln \frac{a+v}{v+1} \right).$$

Całkowanie takie jest dozwolone wobec jednostajnej zbieżności szeregu. Zastępując teraz a przez $a+1$ (dla $a > -1$) przepiszemy to rozwinięcie w postaci

$$\ln \Gamma(a+1) + Ca = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} - \ln \frac{a+n}{n} \right)$$

lub

$$\ln \frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \frac{a}{n} \right].$$

Otrzymujemy stąd znany nam już wzór Weierstrassa [por. 402, (16)], dający rozwinięcie $1/\Gamma(a+1)$ w iloczyn nieskończony

$$(30) \quad \frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-a/n} \quad (a > -1).$$

13° Wróćmy do wzoru (29) przyjmując w nim $a = 2$. Ponieważ $\ln \Gamma(2) = \ln 1 = 0$, dostaniemy więc

$$(31) \quad C = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+1} - \ln \frac{v+2}{v+1} \right).$$

Zauważmy teraz, że wynika stąd, iż

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right].$$

W ten sposób dochodzimy do znanej już nam definicji stałej Eulera [367, 10)].

Wreszcie, mnożąc (31) przez $a-1$ i odejmując stronami od (29) wyrugujemy C

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(a) &= \sum_{v=0}^{\infty} \left[(a-1) \ln \frac{v+2}{v+1} - \ln \frac{a+v}{v+1} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[n^{a-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-2)} \right] \end{aligned}$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$\ln \Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-1)} \right].$$

Pozbywając się logarytmów dochodzimy znowu do wzoru (7) Eulera-Gaussa, który wyprowadziliśmy poprzednio w inny sposób.

538. Przykłady i uzupełnienia

1) Korzystając z tego, że

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

udowodnić, że (dla $a > 0$)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{a-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt,$$

i wyprowadzić stąd wzór (7).

Wskazówka. Granicę całki z prawej strony można obliczyć podobnie jak w zadaniach 10) i 11) z ustępu 519. Za pomocą podstawienia $\tau = t/n$ przekształcimy całkę

$$\int_0^1 t^{a-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^a \int_0^1 \tau^{a-1} (1-\tau)^n d\tau = n^a \cdot B(a, n+1)$$

i posłużymy się wzorem (3).

2) Ze wzoru (23)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}$$

wyprowadzić bezpośrednio wzór (24)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du.$$

Zauważmy, że trudność leży w tym, że całki (24) nie można traktować jako różnicy dwu całek. W przeciwnym przypadku przekształcenie drugiej całki za pomocą podstawienia $x = e^u - 1$ dawałoby od razu żądany wynik.

Obchodząc tę trudność obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_\epsilon^\infty \frac{dx}{(1+x)^a x} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-u} du}{u} - \int_{\ln(1+\epsilon)}^\infty \frac{e^{-u} du}{1-e^{-u}} \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du, \end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\epsilon)}^\epsilon \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} du = 0.$$

To zaś wynika z oszacowania tej całki przez

$$\frac{\epsilon - \ln(1+\epsilon)}{\epsilon(1+\epsilon)^{a-1}} < \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)^{a-1}}.$$

3) Wychodząc z następującej definicji stałej Eulera:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \ln n \right),$$

udowodnić następujące wzory całkowe:

$$(a) C = \int_0^1 (1-e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}, \quad (b) C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u} - e^{-u} \right) \frac{du}{u}.$$

Ponieważ

$$\sum_1^n \frac{1}{v} = \int_0^1 \sum_1^n t^{v-1} dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s} ds$$

oraz

$$\ln n = \int_1^n \frac{ds}{s},$$

więc

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s} ds - \int_1^n \frac{ds}{s} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right] \cdot \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Przejście graniczne w drugiej całce wykonujemy tak, jak w 1).

Jeśli idzie o przekształcenia (a) i (b) — patrz 2).

4) Przyjmując (dla $a > 0$ i $s > 1$)

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s},$$

wykazać, że

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \left[\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} \right] = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Widzieliśmy [534, 12) (a)], że

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx.$$

Wobec tego

$$\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx - \Gamma(s-1) \right\} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left[\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right] dx.$$

Przejście graniczne można wykonać pod znakiem całki, bo dla $s \rightarrow 1$, wyrażenie podcałkowe dąży monotonicznie do swej granicy w każdym z przedziałów $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$ [518]. Następnie trzeba zastosować wzór (24).

Dla $a = 1$ otrzymujemy stąd w szczególności

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] = C$$

[porównaj 375, 1)].

5) Obliczyć wartość iloczynu nieskończonego

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

gdzie

$$u_n = \frac{(n+a_1)(n+a_2) \dots (n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2) \dots (n+b_k)} \quad (a_i, b_i > -1)$$

(Euler). Ponieważ

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) \left(1 + \frac{b_1}{n}\right)^{-1} \dots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)^{-1} = \\ &= 1 + \frac{(a_1 + \dots + a_k) - (b_1 + \dots + b_k)}{n} + \frac{A_n}{n^2} \quad (|A_n| < A < +\infty), \end{aligned}$$

więc iloczyn jest zbieżny jedynie wówczas, gdy

$$a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_k.$$

Należy obliczyć P przy tym właśnie założeniu.

Wskaźówka. Przedstawić u_n w postaci

$$u_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-a_1/n} \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-a_k/n}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-b_1/n} \dots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right) e^{-b_k/n}}$$

i posłużyć się wzorem Weierstrassa (30).

Odpowiedź.

$$P = \frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\dots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\dots\Gamma(1+a_k)}.$$

6) Zakładając, że

$$0 < |a_i|, \quad |b_i| < 1$$

wyprowadzić z 5) inny wynik Eulera

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \frac{\sin b_1 \pi \sin b_2 \pi \dots \sin b_k \pi}{\sin a_1 \pi \sin a_2 \pi \dots \sin a_k \pi}.$$

Wskaźówka. Oprzeć się na wzorze

$$\Gamma(1+c) \cdot \Gamma(1-c) = \frac{\pi c}{\sin \pi c} \quad (0 < |c| < 1),$$

który wynika z (9) i (15).

7) Wróćmy do wzoru Gaussa

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)},$$

który wyprowadziliśmy w ustępie 534, 13) przy założeniu, że

$$\alpha > 0, \quad \gamma - \alpha > 0 \quad \text{i} \quad \gamma - \alpha - \beta > 0.$$

Proponujemy teraz udowodnić ten wzór na innej drodze — zakładając jedynie, że argumenty funkcji Γ po prawej stronie wzoru są dodatnie, a pomijając zbędne założenie $\alpha > 0$.

Naszkicujemy plan dowodu. Oznaczmy przez a_n, b_n i c_n , odpowiednio, wyrazy ogólne szeregów hipergeometrycznych

$$A = F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \quad B = F(\alpha-1, \beta, \gamma, 1), \quad C = F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1).$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić związki

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) c_n - b_{n+1},$$

$$(\gamma - \alpha)(a_n - b_n) = \beta a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - n a_n$$

i udowodnić, że $n a_n \rightarrow 0$. Dodając te równości przy wskaźniku zmieniającym się od 1 do n i przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\gamma B = (\gamma - \beta) C, \quad (\gamma - \alpha)(A - B) = \beta A.$$

Stąd

$$A = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} C.$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenie

$$(32) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \frac{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)} ;$$

poprzednia równość, wobec (9), pokazuje, że wartość tego wyrażenia nie ulegnie zmianie, gdy zamiast γ napiszemy $\gamma + m$. A więc

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \frac{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)} = F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1) \frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m) \cdot \Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)}.$$

Przejdzmy w prawej stronie tej równości do granicy przy $m \rightarrow \infty$. Z tego, że szereg $F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1)$ jest zbieżny jednostajnie względem m , wynika [433], że suma jego dąży do 1. Równa 1 jest także granica czynnika

$$\frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m) \cdot \Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)},$$

ponieważ jest on równy iloczynowi otrzymanemu przez odrzucenie $m - 1$ początkowych czynników zbieżnego na mocy 5) iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha + n)(\gamma - \beta + n)}{(\gamma + n)(\gamma - \alpha - \beta + n)}.$$

Tak więc wyrażenie (32) jest równe 1, a to jest równoważne z wzorem Gaussa.

Przyjmując w tym wzorze $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ można otrzymać rozwinięcie

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \dots = \frac{1}{[\Gamma(\frac{3}{2})]^2} = \frac{4}{\pi}$$

Można też otrzymać ogólniejszy wynik, a mianowicie można udowodnić, że suma współczynników dwumiennych w przypadku, gdy m jest wykładnikiem potęgi dwumianu, jest dla $m > -\frac{1}{2}$ równa

$$\frac{\Gamma(1+2m)}{[\Gamma(1+m)]^2} \quad (\gamma = 1, \alpha = \beta = -m).$$

Przedtem nie mogliśmy uzyskać tego wyniku, ponieważ krępował nas warunek $\alpha > 0$.

8) Rozszerzenie funkcji $\Gamma(a)$ na ujemne wartości a . Zgodnie z wzorem (9) jest

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a},$$

a więc wartość $\Gamma(a)$ jest określona przez wartość $\Gamma(a+1)$. Jeśli $-1 < a < 0$, to $a+1 > 0$ i symbol $\Gamma(a+1)$ ma sens. Niech teraz powyższy wzór będzie określeniem wartości $\Gamma(a)$; w ten sposób określenie funkcji $\Gamma(a)$ będzie rozszerzone na przypadek $-1 < a < 0$. Ogólnie, jeśli $-n < a < -(n-1)$, to rozszerzając zakres wzoru (10) na te wartości zdefiniujemy $\Gamma(a)$ przez równości

$$(33) \quad \Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-1)}.$$

Napiszmy dla większej przejrzystości $a = -n + \alpha$, gdzie $0 < \alpha < 1$; teraz powyższą definicję możemy napisać tak

$$(34) \quad \Gamma(\alpha - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

Widać stąd od razu, że znak $\Gamma(a)$ dla $-n < a < -(n-1)$ jest taki sam, jak znak czynnika $(-1)^n$. Gdy a dąży do $-n$ lub do $-(n-1)$ (tzn. gdy α dąży do zera lub do 1), to $\Gamma(a)$ dąży do ∞ (pierwszego rzędu!).

9) Korzystając z zadania 8) uogólnić wzory (7), (9), (15), (20), (26), (30) na przypadek dowolnych rzeczywistych wartości argumentu (z wyjątkiem wartości całkowitych ujemnych oraz zera).

Wskazówka. Przy uogólnianiu wzoru (30) należy wziąć pod uwagę wzór (33).

Przy uogólnieniu $\Gamma(a)$ na przypadek ujemnych wartości a wzór Gaussa, o którym była mowa w zadaniu 7), pozostanie prawdziwy przy jedynym zastrzeżeniu, że $\gamma - x - \beta > 0$. Jest ono konieczne dla zbieżności szeregu $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ [378, 4].

10) Wychodząc z wzoru (34) udowodnić, że jeśli α przebiega od 0 do 1, to $\Gamma'(\alpha - n)$ raz tylko przechodzi przez wartość 0 zmieniając przy tym znak z $(-1)^{n+1}$ na $(-1)^n$. Oznaczmy tę wartość α przez α_n . Dla wartości a , równej $\alpha_n - n$, funkcja $\Gamma(a)$ ma zatem minimum dodatnie, (gdy n jest parzyste) lub maksimum ujemne (gdy n jest nieparzyste). Porównaj wykres funkcji Γ na rysunku 64 (str. 648).

Proponujemy również udowodnić, że przy rosnącym n zarówno α_n , jak i $\Gamma_n = |\Gamma(\alpha_n - n)|$ maleją monotonicznie do 0.

Wskazówka. Należy tutaj oprzeć się na następujących równościach ($0 < \alpha < 1$):

$$|\Gamma(\alpha - (n+1))| = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{n+1-\alpha},$$

$$|\Gamma(\alpha - (n+1))'| = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|'}{n+1-\alpha} + \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{(n+1-\alpha)^2}$$

oraz

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)} = - \sum_{v=1}^n \frac{1}{v - \alpha_n}.$$

11) Udosowdzić, że przy $-n < a < -(n-1)$ funkcja $\Gamma(a)$ wyraża się całką

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \left(e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx.$$

Wskazówka. Całkować przez części; patrz 8).

12) W rozdziale XI [402, 10)] zdefiniowaliśmy funkcję $\Gamma(a)$ za pomocą wzoru Eulera-Gaussa (7) dla dowolnych rzeczywistych wartości argumentu (z wyjątkiem zera i wartości całkowitych ujemnych) i posługując się tą definicją znaleźliśmy niektóre najprostsze własności tej funkcji [por. też 408]. Podobnie można znaleźć również i inne własności.

Innym punktem wyjścia dla zbadania funkcji $\Gamma(a)$ dla dowolnych rzeczywistych wartości argumentu (z tymi samymi wyjątkami) może być szereg

$$D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2},$$

z dodatkowymi warunkami $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

13) Zaznaczmy jeszcze na zakończenie, że funkcja $\Gamma(a)$ może być określona również jako jednowartościowa funkcja analityczna na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej a ⁽¹⁾. Można to zrobić wychodząc z definicji całkowej (6), jeżeli się rozbię całość na dwie

$$\int_0^1 + \int_1^\infty = P(a) + Q(a).$$

⁽¹⁾ Ta uwaga o rozszerzaniu funkcji Γ będzie zrozumiała jedynie dla czytelników zaznajomionych z podstawowymi pojęciami i terminami teorii funkcji zmiennej zespolonej.

Wówczas funkcja

$$\begin{aligned} P(a) &= \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{a+n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{a+n} \end{aligned}$$

daje się w sposób naturalny rozszerzyć na całą płaszczyznę zmiennej zespolonej jako funkcja meromorficzna, mająca biegunki jednokrotne w punktach $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$. Punktom tym odpowiadają residua $1, -1, \frac{1}{2}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n!}, \dots$

Druga funkcja

$$Q(a) = \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

ma sens również dla zespolonych wartości a i jest funkcją całkową.

Właściwości funkcji $\Gamma(a)$ udowodnione dla rzeczywistych dodatnich wartości argumentu przenoszą się automatycznie na całą płaszczyznę na podstawie znanego twierdzenia o funkcjach analitycznych (mamy tu na myśli właściwości wyrażające się za pomocą równości między funkcjami analitycznymi). W szczególności z wzoru na dopełnienie (15), który można napisać w postaci

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)} = \frac{1}{\pi} \sin \alpha \pi \cdot \Gamma(a) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha \pi [P(a) + Q(a)] \quad (1),$$

widac od razu, że funkcja $1/\Gamma(a)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie. Tak więc $\Gamma(a)$ nie ma miejsc zerowych.

Wspomnijmy na zakończenie, że zarówno wzór Eulera-Gaussa (7), jak i wzór Weierstrassa (30) można z powodzeniem przyjąć za podstawę dla zdefiniowania funkcji $\Gamma(a)$ od razu w całej płaszczyźnie.

539. Obliczanie pewnych całek oznaczonych. Zajmiemy się teraz kilkoma całkami, przy obliczaniu których korzysta się z właściwości funkcji $\Gamma(a)$.

1) Różniczkując względem a wzór

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

otrzymaliśmy w 531, 1^o wzór (8)

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx.$$

Dla $a = 1$ otrzymamy stąd

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -C,$$

ponieważ $\Gamma'(1) = -C$.

Podstawienie $x = -\ln u$ daje interesującą całkę

$$\int_0^1 \ln(-\ln u) du = -C.$$

(1) W punktach, w których $P(a)$ ma biegunki, $\sin \alpha \pi$ przyjmuje wartość 0.

Jeśli przyjmiemy $a = \frac{1}{2}$ i podstawimy $x = t^2$, to będziemy mieli

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \ln t dt = \frac{1}{4} \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} (C + 2 \ln 2),$$

co z łatwością możemy obliczyć z rozwinięcia (27), korzystając przy tym z własności szeregu logarytmicznego.

Różniczkując powtórnie względem a doszliśmy do równości (8'):

$$\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx.$$

Dla $a = 1$ daje ona:

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x dx = \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Ten wynik można otrzymać z (28), jeżeli się posłużyć przy tym znanym szeregiem

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wreszcie, przyjmując i tutaj $a = \frac{1}{2}$ i podstawiając $x = t^2$, otrzymamy taką jeszcze całkę

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \ln^2 t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[(C + 2 \ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \right],$$

i tak dalej.

2) Obliczyć całkę

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x} dx,$$

gdzie p jest ułamkiem o nieparzystym liczniku i mianowniku.

Wskazówka. Posłużyć się wzorem Łobaczewskiego [497, 14)]; zgodnie z nim

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x dx$$

[por. 532, 4 (b)]. Odpowiedź:

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = 2^{p-2} \frac{[\Gamma(p/2)]^2}{\Gamma(p)}.$$

3) Obliczyć całki ($b > 0$):

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s} dx \quad (0 < s < 1), \quad B = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s} dx \quad (0 < s < 2).$$

Jest [por. (13)]

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx} dz,$$

zatem

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \cos bx dx \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx} dz.$$

Zmieniając kolejność całkowania otrzymujemy

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} dz \int_0^\infty e^{-zx} \cos bx dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^s dz}{z^2 + b^2}$$

lub podstawiając $b^2 t = z^2$

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{(s-1)/2}}{1+t} dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) = \\ &= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{s+1}{2}\pi} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2}} \end{aligned}$$

[por. (4), (5)]. Analogicznie

$$B = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}.$$

Dopuszczalność zmiany kolejności całkowania uzasadnia się tak samo, jak przy obliczaniu całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

w ustępie 524, 11).

4) Obliczyć całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x dx.$$

Zgodnie z 3) jest dla $0 < s < 2$

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}.$$

Różniczkując tę całkę względem parametru s według reguły Leibniza otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \ln x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left[\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}\right]^2} \left\{ \Gamma'(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2} \right\}.$$

Regułę Leibniza można tu stosować, ponieważ całka jest zbieżna jednostajnie względem s zarówno dla $x = \infty$ (dla $s > s_0 > 0$ [por. 515, 4^o]), jak i dla $x = 0$ (dla $s < s_1$ majorantą jest $|\ln x|/x^{s_1-1}$).

Różniczkując otrzymaną równość powtórnie (różniczkowanie pod znakiem całki uzasadnia się jak wyżej) dostaniemy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \cdot \ln^2 x \, dx &= \frac{\pi}{\left[\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2} \right]^3} \left\{ \Gamma'(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2} \right\}^2 - \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left[\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2} \right]^2} \left\{ \Gamma''(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \pi \Gamma'(s) \cos \frac{s\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Przyjmując w obu nierównościach $s = 1$ obliczamy szukane całki

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x \, dx &= \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma'(1), \\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x \, dx &= \pi [\Gamma'(1)]^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma''(1) + \frac{\pi^3}{8}. \end{aligned}$$

Ponieważ [por. 1)]

$$\Gamma'(1) = -C, \quad \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

więc ostatecznie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x \, dx = -\frac{\pi}{2} \cdot C, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot C^2 + \frac{\pi^3}{24}.$$

5) Poznaliśmy już [por. 534, (b)] wzór

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a + \frac{1}{2})} \quad (a > 0).$$

Różniczkując go względem a według reguły Leibniza [520] otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \varphi \cdot \ln \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a + \frac{1}{2})} \left[\frac{d \ln \Gamma(a)}{da} - \frac{d \ln \Gamma(a + \frac{1}{2})}{da} \right].$$

Posługując się wzorem Gaussa (25), wyrażenie w nawiasie możemy napisać w postaci

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{a-1}{2}} - t^{a-1}}{1-t} \, dt.$$

Przyjmijmy teraz $2a-1 = 2n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną lub zerem, i podstawmy $t = u^2$. Otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u} \, du.$$

Gdy $n = 0$, otrzymujemy stąd znany już nam wzór

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Gdy $n > 1$, otrzymujemy nową całkę

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} - \ln 2 \right).$$

6) Obliczyć całki ($a > 0, p > 0$)

$$u = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx, \quad v = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \sin bx dx.$$

Zadanie to rozwiązuje się tak samo, jak zadanie 8) z ustępu 533. Dla funkcji $w = u + vi$ zmiennej b otrzymuje się, podobnie jak i tam, równanie różniczkowe

$$\frac{dw}{db} = -\frac{p}{a^2 + b^2} (b - ai) w,$$

które można napisać w postaci

$$\frac{dw}{db} = pw \frac{i}{a - bi}.$$

Łatwo sprawdzić, że z tego równania wynika, że

$$w(a - bi)^p = c = \text{const } (1)$$

Przyjmując tu $b = 0$ znajdujemy $c = \Gamma(p)$. Wobec tego

$$w = \frac{\Gamma(p)}{(a - bi)^p} = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} (a + bi)^p = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \left\{ \cos \left(p \arctg \frac{b}{a} \right) + i \sin \left(p \arctg \frac{b}{a} \right) \right\}.$$

Przyrównując teraz odpowiednio części rzeczywiste i urojone otrzymujemy wreszcie

$$u = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \cos p\theta, \quad v = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \sin p\theta,$$

gdzie dla skrócenia oznaczyliśmy $\arctg \frac{b}{a} = \theta$.

Zastępując $\sqrt{a^2 + b^2}$ przez $b/\sin \theta$ lub przez $a/\cos \theta$ można otrzymanym wynikom nadać następującą postać.

$$u = \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \cos p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cos p\theta, \quad v = \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \sin p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \sin p\theta.$$

Proponujemy czytelnikowi obliczyć stąd całki A i B z zadania 3) przyjmując $p = 1 - s$ i przechodząc z a do granicy 0 (przy $b > 0$ kąt $\theta = \arctg \frac{b}{a}$ będzie wtedy dążył do $\frac{\pi}{2}$).

Różniczkując całki u, v względem p można uzyskać wiele nowych całek; pozostawiamy to czytelnikowi.

(1) Przez $(a + bi)^p$ rozumiemy tutaj (i w dalszym ciągu) tę gałąź funkcji potęgowej, która dla $b = 0$ jest równa dodatniej liczbie rzeczywistej a^p .

7) Znalezione całki u i v pozwolą nam obliczyć inne ciekawe całki. Pomnożmy mianowicie obie strony równości

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cos p\theta = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx$$

przez

$$a^q \operatorname{tg}^{q-1} \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = b^{q-1} db$$

(przyjmując $0 < q < p$ i $q < 1$) i scałkujmy po lewej stronie względem θ od 0 do $\pi/2$, a po prawej stronie względem b od 0 do ∞ (¹). W wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1} \theta \sin^{q-1} \theta \cos p\theta d\theta = \\ &= \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty b^{q-1} db \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx. \end{aligned}$$

Zmieniając po prawej stronie kolejność całkowania, otrzymujemy

$$J_1 = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_0^\infty \frac{\cos bx}{b^{1-q}} db.$$

Łatwo stwierdzić na podstawie 3), że całka wewnętrzna jest równa $\Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2} x^{-q}$, a więc

$$J_1 = \frac{a^{p-q} \Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1} dx$$

i ostatecznie

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1} \theta \sin^{q-1} \theta \cos p\theta d\theta = \frac{\Gamma(q) \Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos \frac{q\pi}{2}$$

Analogicznie można obliczyć

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1} \theta \sin^{q-1} \theta \sin p\theta d\theta = \frac{\Gamma(q) \Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin \frac{q\pi}{2}.$$

Pokażemy teraz jak uzasadnić zmianę kolejności całkowania, bez czego, rzecz jasna, uzyskany wynik nie może być uznany za prawdziwy. Ponieważ całka

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} b^{q-1} \cos bx dx$$

jest zbieżna jednostajnie dla $0 < b_0 < b < B < +\infty$, więc jest

$$\begin{aligned} \int_{b_0}^B b^{q-1} db \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos bx dx &= \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_{b_0}^B b^{q-1} \cos bx db = \\ &= \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1} dx \int_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cos u du. \end{aligned}$$

(¹) Związek między zmiennymi b i θ dany jest prostym wzorem $b = a \operatorname{tg} \theta$ ($a = \text{const}$).

Z istnienia całki $\int_0^\infty u^{q-1} \cos u du$ wynika, że całka wewnętrzna dąży do niej, gdy $b_0 \rightarrow 0$ i $B \rightarrow +\infty$, i pozostaje ograniczona:

$$\left| \int_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cdot \cos u du \right| < L.$$

Tym samym całe wyrażenie podcałkowe jest zmajoryzowane przez funkcję $Le^{-ax}x^{p-q-1}$ i przejście graniczne przy $b_0 \rightarrow 0$ i $B \rightarrow +\infty$ może być dokonane pod znakiem całki itd.

8) Rozpatrzmy funkcję

$$\psi(t) = D \ln \Gamma(t) = \int_0^1 \frac{1-x^{t-1}}{1-x} dx - C$$

[por. (25)]. Z jej określenia wynika, że

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{1-x} dx = \psi(q+1) - \psi(p+1)$$

(dla $p+1>0, q+1>0$).

Korzystając z tego zbadajmy teraz całkę

$$J = \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x) \ln x} dx \quad (\alpha > -1, \beta > -1, \alpha+\beta > 1).$$

Obliczmy jej pochodną względem α

$$\frac{dJ}{d\alpha} = - \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)}{1-x} dx = \psi(\alpha+1) - \psi(\alpha+\beta+1) = \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Zatem

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + C.$$

Ponieważ dla $\alpha = 0$ jest $J = 0$, więc $C = \ln \Gamma(\beta+1)$ i ostatecznie

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Podobnie można obliczyć całki

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x) \ln x} dx = \\ &= \ln \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1) \Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} \quad (\alpha > -1, \alpha+\beta > -1, \alpha+\gamma > -1, \alpha+\beta+\gamma > -1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x) \ln x} dx = \\ &= \ln \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \Gamma(\gamma+1) \Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+\gamma+1) \Gamma(\beta+\gamma+1)} \\ &\quad (\alpha > -1, \alpha+\beta > -1, \alpha+\gamma > -1, \alpha+\beta+\gamma > -1). \end{aligned}$$

itd.

Jeżeli w całce K przyjmiemy $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{a}{2} - 1$, $\beta = \frac{b-a}{2}$ i podstawimy $x = t^2$, to otrzymamy całkę

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{(1+t) \ln t} dt = \ln \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} \quad (a, b > 0).$$

Dla $b = 1-a$ dostajemy stąd ciekawą całkę

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{(1+t) \ln t} dt = \ln \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} \quad (0 < a < 1).$$

Omówione przykłady wystarczają na to, aby pokazać, jak dalece rozszerzyły się nasze możliwości przedstawiania całek za pomocą wzoru skończonego dzięki wprowadzeniu funkcji Γ . Nawet w tych przypadkach, kiedy wzór skończony zawiera jedynie funkcje elementarne, otrzymanie tego wzoru jest ułatwione przez posługiwanie się funkcją Γ choćby tylko w rachunkach pośrednich.

540. Wzór Stirlinga. Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem dogodnych wzorów przybliżonych dla $\ln \Gamma(a)$ i obliczeniem wartości tego logarytmu oraz samej funkcji Γ .

Za punkt wyjścia przyjmiemy wzór (24) dla pochodnej logarytmicznej funkcji Γ :

$$D \ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right) dx.$$

Wyrażenie podcałkowe jest funkcją ciągłą obu argumentów x i a , dla $x > 0$ i $a > 0$ (dla $x = 0$ można się o tym przekonać rozwijając w szereg), a dla $x = \infty$ całka jest zbieżna jednostajnie względem a dla $a > a_0 > 0$ — majorantą jest

$$\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-a_0 x}}{1-e^{-x}}.$$

Można zatem całkować pod znakiem całki względem a w granicach od 1 do a :

$$\ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1) e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right] \frac{dx}{x} \quad (a > 0).$$

Zmieniając znak zmiennej całkowania przejdźmy do przedziału $(-\infty, 0)$

$$(35) \quad \ln \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax} - e^{-x}}{e^x - 1} - (a-1) e^x \right] \frac{dx}{x}.$$

Również ta całka jest zbieżna jednostajnie przy $x = -\infty$ dla $0 < a_0 < a < A < +\infty$; całkujmy więc ponownie pod znakiem całki względem a w przedziale od a do $a+1$:

$$(36) \quad R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a) da = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax} - e^{-x}}{e^x - 1} - \left(a - \frac{1}{2} \right) e^x \right] \frac{dx}{x}.$$

Dla znalezienia prostszej postaci wzoru (35) skorzystamy z otrzymanej całki oraz z elementarnej całki Froullaniego [495]

$$(37) \quad \frac{1}{2} \ln a = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^x}{2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Odejmując mianowicie od równości (35) równość (36) i dodając (37) otrzymujemy

$$\ln \Gamma(a) - R(a) + \frac{1}{2} \ln a = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{ax} dx}{x}.$$

Wyprowadzimy oznaczenie

$$(38) \quad \omega(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{ax} dx}{x}.$$

Podstawiając zamiast $R(a)$ znane już nam wyrażenie (19) dla całki Raabego otrzymujemy

$$(39) \quad \ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2} \right) \ln a - a + \omega(a).$$

W rozdziale XII [441, 10] znaleźliśmy rozkład kotangensa hiperbolicznego na ułamki proste

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2 \pi^2},$$

prawdziwy dla wszystkich wartości $x \neq 0$. Pisząc tutaj $x/2$ zamiast x można rozkład ten przedstawić w postaci [por. 449]

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4k^2 \pi^2}.$$

Stąd

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4k^2 \pi^2}.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x)$ występuje w wyrażeniu pod całką (38).

Weźmy dowolną, nieujemną liczbę m i zastąpmy każdy wyraz szeregu przez równą mu tożsamościowo sumę

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 4k^2 \pi^2} &= \frac{1}{4k^2 \pi^2} - \frac{x^2}{(4k^2 \pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4k^2 \pi^2)^2} - \dots \\ &\dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(4k^2 \pi^2)^m} + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(4k^2 \pi^2)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4k^2 \pi^2}}. \end{aligned}$$

Znajdziemy teraz oddzielnie sumę składników postaci

$$(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(4k^2 \pi^2)^n} \quad (1 < n < m)$$

dla $k = 1, 2, 3, \dots$ Oznaczając, jak zwykle,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = s_{2n}$$

otrzymamy jako sumę tych składników wyrażenie

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n} \cdot x^{2n-2}.$$

Jeżeli użyjemy tu symbolu n -tej liczby Bernoulliego [449]

$$(40) \quad B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n},$$

to znalezioną sumę będziemy mogli napisać tak:

$$(-1)^{n-1} \frac{B_n}{2 \cdot (2n)!} \cdot x^{2n-2}.$$

Obliczymy teraz sumę pozostałych składników, z których każdy ma czynnik postaci $\left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^{-1}$ będący dodatnim ułamkiem właściwym. Dodając je otrzymujemy wyraz

$$(-1)^m \tilde{\theta} \frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!} \cdot x^{2m},$$

gdzie $\tilde{\theta}$ jest również dodatnim ułamkiem właściwym.

Funkcję $f(x)$ możemy zatem przedstawić następująco:

$$f(x) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!} x^2 + \frac{B_3}{6!} x^4 - \dots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} x^{2m-2} + (-1)^m \tilde{\theta} \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!} x^{2m} \quad (0 < \tilde{\theta} < 1).$$

Podstawmy to wyrażenie do (36) i całkujmy wyraz za wyrazem. Ponieważ

$$\int_{-\infty}^0 e^{ax} x^{2n} dx = \int_0^\infty e^{-ax} x^{2n} dx = \frac{(2n)!}{a^{2n+1}}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^0 e^{ax} \cdot \tilde{\theta} \cdot x^{2m} dx = \theta \int_{-\infty}^0 e^{ax} x^{2m} dx = \theta \cdot \frac{2m!}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1) \text{ (1)},$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} \omega(a) = & \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{a^5} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1) 2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} + \\ & + (-1)^m \theta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Podstawmy wreszcie ten wynik do wzoru (39) zamiast $\omega(a)$; otrzymamy wzór

$$\begin{aligned} (41) \quad \ln \Gamma(a) = & \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \dots \\ & \dots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1) 2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} + (-1)^m \theta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

noszący nazwę wzoru Stirlinga.

(1) Zwracamy uwagę, że θ zależy od x , natomiast $\tilde{\theta}$ nie zależy.

W najprostszym przypadku dla $m = 0$ przybiera on postać

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{\theta}{12a} \quad (0 < \theta < 1).$$

Jeżeli we wzorze (41) odrzucimy resztę zawierającą jako czynnik θ i przedłużymy przy tym sumę do szeregu nieskończonego, to otrzymamy tzw. szereg Stirlinga:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(a) \sim \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \dots \\ \dots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1) \cdot 2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Szereg ten jest rozbieżny. Istotnie, na mocy (40) wartość bezwzględna wyrazu ogólnego szeregu Stirlinga

$$\frac{B_n}{(2n-1) \cdot 2n} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}} s_{2n} \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Mimo to jednak szereg ten jest bardzo przydatny do obliczania wartości przybliżonych funkcji $\ln \Gamma(a)$, gdyż jest on jej rozwinięciem asymptotycznym i jednocześnie oscyluje wokół niej.

Spotkaliśmy się już zarówno z wzorem, jak i szeregiem Stirlinga dla $\ln(n!)$ [por. 469, (26) i (27)]. Otrzymane przed chwilą rozwinięcia są ogólniejsze. Gdybyśmy chcieli otrzymać z nich poprzednie wyniki, należałyby przyjąć $a = n$ i ponadto dodać jeszcze $\ln n$, ponieważ $\Gamma(n) \approx (n-1)!$ a nie $n!$. Również w rozpatrywanym przypadku ogólnym można otrzymać rozwinięcie asymptotyczne dla samej funkcji $\Gamma(a)$ podnosząc e do potęgi $\ln \Gamma(a)$ [464, 3°; por. 469].

541. Obliczenie stałej Eulera. Wróćmy do wzoru (39) i zróżniczkujmy go względem a

$$D \ln \Gamma(a) = \ln a - \frac{1}{2a} + \omega'(a),$$

gdzie $\omega'(a) = \int_{-\infty}^0 x e^{ax} f(x) dx$. Powtarzając poprzednie rachunki dostaniemy

$$(42) \quad \begin{aligned} \omega'(a) = -\frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{a^4} - \dots - (-1)^m \frac{B_m}{2m} \cdot \frac{1}{a^{2m}} + \\ + (-1)^{m+1} \theta' \frac{B_{m+1}}{2m+2} \cdot \frac{1}{a^{2m+2}} \quad (0 < \theta' < 1). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy rozwinięcie asymptotyczne

$$D \ln \Gamma(a) \sim \ln a + \frac{1}{2a} - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{a^4} - \dots + (-1)^m \frac{B_m}{2m} \cdot \frac{1}{a^{2m}} + \dots$$

Można je było otrzymać formalnie różniczkując szereg Stirlinga wyraz za wyrazem (1).

Korzystając z wzoru (42) można podać łatwy sposób obliczania stałej Eulera C . Przyjmując we wzorze Gaussa (25), że a jest liczbą naturalną k będziemy mieli

$$C = \int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t} dt - D \ln \Gamma(k),$$

ale

$$\frac{1-t^{k-1}}{1-t} = 1+t+\dots+t^{k-2},$$

(1) Tak więc okazało się, że w tym przypadku dopuszczalne jest różniczkowanie wyraz za wyrazem rozwinięcia asymptotycznego [por. uwagę w ustępie 464].

zatem

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t} dt = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1}.$$

Z wzoru (42) dla $a = k$ otrzymujemy ostatecznie

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} - \ln k + \frac{1}{2k} + \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{120k^4} + \frac{1}{252k^6} - \frac{1}{240k^8} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \cdot \frac{1}{k^{2n}} + (-1)^{n+1} \theta' \frac{B_{n+1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{k^{2n+2}} \quad (0 < \theta' < 1).$$

Posługując się tym wzorem przy $k = 10$ i uwzględniając wyrazy aż do wyrazu zawierającego k^{12} , Euler obliczył C z dokładnością do 15 cyfr

$$C = 0,577 215 664 901 532\dots$$

542. Układanie tablicy logarytmów dziesiętnych funkcji Γ . Naszkicujemy pokrótce metodę obliczania logarytmów dziesiętnych funkcji Γ .

Wróćmy do wzoru (27); pisząc w nim $1+a$ zamiast a przepiszemy ten wzór w postaci

$$\frac{d \ln \Gamma(1+a)}{da} = -C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{a+k} \right).$$

Różniczkując kolejno dojdziemy do wzoru.

$$\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^n}$$

na n -tą pochodną (różniczkowanie wyraz za wyrazem jest tu dopuszczalne wobec zbieżności jednostajnej szeregu).

Obliczamy teraz współczynniki szeregu Taylora

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} \right]_{a=0} = (-1)^n \frac{s_n}{n},$$

gdzie

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Dla $|a| < 1$ mamy więc

$$\ln \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2}s_2 a^2 - \frac{1}{3}s_3 a^3 + \frac{1}{4}s_4 a^4 - \dots$$

Ponieważ liczby s_k (szczególnie dla dużych k) są bliskie 1, wygodniej jest dodać tutaj stronami rozwinięcie

$$\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \dots,$$

również prawdziwe dla $|a| < 1$. Dostaniemy w ten sposób

$$\ln \Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + (1-C)a + \frac{1}{2}(s_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(s_3-1)a^3 + \dots$$

Mnożąc przez moduł H i wprowadzając oznaczenia

$$M(1-C) = C_1, \quad \frac{1}{2}M(s_2-1) = C_2, \quad \frac{1}{3}M(s_3-1) = C_3, \dots,$$

otrzymujemy

$$(43) \quad \log \Gamma(1+a) = -\log(1+a) + C_1 a + C_2 a^2 - C_3 a^3 + C_4 a^4 - \dots$$

Zmieniając tu a na $-a$ dostaniemy rozwinięcie

$$\log \Gamma(1-a) = -\log(1-a) - C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

Odejmując je teraz od poprzedniego rozwinięcia. Ponieważ zgodnie z regułą dopełnienia jest

$$\Gamma(1-a) \Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

oraz

$$\log \Gamma(1-a) = -\log \Gamma(1+a) + \log \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

więc ostatecznie

$$(44) \quad \log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} \log \frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} + C_1 a - C_3 a^3 - C_5 a^5 - \dots$$

Legendre podał wartości współczynników C_n dla ($n < 15$) i ich logarytmy oraz obliczył na podstawie wzorów (43) i (44) logarytmy dziesiętne funkcji $\Gamma(a)$ dla a od 1 do 2 w odstępach co 0,001 z dokładnością do siedmiu, a następnie do dwunastu miejsc dziesiętnych.

Kończymy w ten sposób badanie funkcji gamma. Wychodząc z jej przedstawienia w postaci całki z parametrem a nie tylko poznaliśmy jej głębokie własności, ale również nauczyliśmy się obliczać jej wartości. Opanowaliśmy tę nową funkcję w tym samym stopniu, co funkcje elementarne.

SKOROWIDZ

- Abela* całki 70
— kryterium 487
— metoda 344
— podstawienie 56
— twierdzenie 308, 344, 446
- d'Alemberta* ciąg 234
— kryterium 234, 256
- addytywność* pola 162
- adiabatyczny* proces 202
- analytyczna* funkcja 389, 423
- anomalia mimośrodowa* 438
— średnia 438
- Archimedesa* spirala 151
- argument* liczby zespolonej 440
- asteroida* 150
- Bernoulliego* liczby 428
- Bertranda* kryterium 241
- Bessela* funkcja o wskaźniku n 298
— funkcje 401
— równanie różniczkowe 405, 579
- bezwzględnie zbieżny* iloczyn nieskończony 307
- Bonneta* wzory 102
- Borela* metoda 356
— suma uogólniona 356
- brzeg* (czyli kontur) 161
- Calka* 5, 81
— bezwzględnie zbieżna 486, 505
— Eulera 526
— Eulera-Poissona 526, 617
— Fejera 604
— funkcji $f(x)$ w granicach od a do ∞ 478
— nieoznaczona 5
— niewłaściwa 244, 478, 490, 499
— oznaczona 82
— — w przedziale zorientowanym 93
— Poissona 105, 120
— rozbieżna 478, 499
— zbieżna 478, 499
- calka zbieżna jednostajnie* 586, 591
— zmajoryzowana 588
- całki Abela* 70
— eliptyczne 72, 78
— — I, II i III rodzaju postaci Legendre'a 78
— Eulera 615
— Fresnela 619, 625
— Froulianiego 534
— Laplace'a 618, 634
— pseudoeliptyczne 72
- całkowa nierówność* Jensea 132
- całkowanie* 5
— równania 209
- całkowe* kryterium 243
- Catalana* stała 144, 397
- Cauchy'ego* iloczyn szeregów 278, 352
— kryterium 233, 485, 504
— reszta szeregu 316
- Cauchy-Höldera* nierówność 253
- Cesary* uogólniona metoda 353
— — suma 347
- ciąg d'Alemberta* 234
— Cauchy'ego 234
— podziałów normalny 82
— Raabego 235
— zbieżny jednostajnie 365
- Clapeyrona* wzór 219
- cykloida* 150, 158
- Czebyszewa-Laguerra* n -ty wielomian 520
- część rzeczywista* 439
— urojona 439
- czop* 202
- Darboux* dolna całka 85
— górna całka 85
— sumy 83
- Dirichleta* funkcja 90
— kryterium 488
— nieciągły czynnik 544

- Dirichleta* szeregi 267
długość łuku krzywej przestrzennej 160
dolna całka Darboux 85
 — granica całki 82
 — suma całkowa 83
drugie twierdzenie Guldina 198
 — — o wartości średniej 102
- Elipsa* 152
energia potencjalna 482
Eulera całka 526
 — całki 615
 — metoda 356
 — podstawienie 44
 — przekształcenie 333, 356
 — stała 232, 662
Eulera-Maclaurina wzór 469
Eulera-Poissona całka 526, 617
ewoluta 159
ewolwenta koła 150, 158, 159
 — krzywej 154
- Fejera całka* 604
Fresnela całki 619, 625
Frobeniusa twierdzenie 354
Froullaniego całki 634
funkcja analityczna 389, 423
 — *B* 643
 — Bessela o wskaźniku n 298, 401
 — bezwzględnie całkowalna 486, 505
 — całkowalna 82, 499
 — — z kwadratem 509
 — ζ Riemanna 280, 405, 659
 — Dirichleta 90
 — Γ 645
 — generująca funkcje Bessela 298
 — — wielomianów Legendre'a 424
 — graniczna ciągu 362
 — logarytmiczna wypukła 653
 — pierwotna 5
 — podcałkowa 6
 — zmiennej zespolonej 443
funkcje Bessela 401
 — eliptyczne 216
- Gałąz główna wieloznacznej funkcji logarytmicznej* 450
Gaussa kryterium 241
 — wzór 122, 662
gęstość powierzchniowa p 197
gładka krzywa 165
 — powierzchnia 175
- górną całkę Darboux* 85
 — granica całki 82
 — suma całkowa 83
granica ciągu liczb zespolonych 441
Guldina drugie twierdzenie 198
 — twierdzenie 196
- Hipergeometryczne równanie różniczkowe* 406
Höldera metody 355
- Iloczyn Cauchy'ego szeregów* 278, 352
 — częściowy 302
 — nieskończony 302
 — szeregów 277
interpolacja paraboliczna 134
izotermiczny proces 201
- Jensena całkowa nierówność* 132
Jermakowa kryterium 246
Jordana miara 161
- Kardioida* 153
kontur (czyli brzeg) 161
kosinus całkowy 69, 560
kryterium Abela 487
 — d'Alemberta 234, 256
 — Bertranda 241
 — całkowe 243
 — Cauchy'ego 233, 485, 504
 — Dirichleta 488
 — Gaussa 241
 — Jermakowa 246
 — Kummera 239
 — Raabego 235
krzywa gładka 165
 — jednobieżna 71
 — łańcuchowa 154
 — Vivianiego 160
Kummera kryterium 239
kwadratura 9
kwadrwalna (czyli mierzalna) figura 161
- Lagrange'a szereg* 437
 — reszta szeregu 316
 — wzór interpolacyjny 135
Lamberta szereg 268
Landaua twierdzenie 267
Landena przekształcenie 123
Laplace'a całki 618, 634
Legendre'a całki eliptyczne I, II i III rodzaju 78
 — wielomiany 129
 — wzór 652
Leibniza reguła 568

- Leibniza* szereg 318
lemniskata 153
liczba zespolona 439
liczby algebraiczne 126
 - Bernoulliego 428
 - przestępne 126*linia łańcuchowa* 149
śrubowa 160
liniowa metoda sumowania szeregu 342
logarytm całkowy 69, 512, 558
 - naturalny 449
Machina wzór 328
Maclaurina szereg 315
majoranta funkcji 588
 - szeregu 369*Markowa* przekształcenie 340
metoda Abela 344
 - Borela 356
 - Eulera 356
 - majorant 433
 - Poissona-Abela 344
 - prostokątów 133
 - sprowadzenia wyrażenia podcałkowego do postaci wymiernej 38
 - współczynników nieoznaczonych 32*metody* Höldera 355
 - Woronoja 353*miara* Jordana 161
 - wewnętrzna 161
 - zewnętrzna 161*mierzalna* (czyli kwadrowalna) figura 161
mimośród 438
Minkowskiego nierówność 253
moduł 78
 - liczby zespolonej 440*mol* 214
Moivre'a wzór 323, 441
moment bezwładności (kwadratowy) 205

Newtona-Leibniza twierdzenie 8
 - wzór 106*nieciągły* czynnik Dirichleta 544
nierówność Cauchy-Höldera 353
 - Minkowskiego 253*nieskończona* macierz prostokątna o dwu wejściach 284
n-ty wielomian Czebyszewa-Laguerra 520

Obszar wielokątny 161
 - zbieżności szeregu potęgowego dwu zmiennych 298
oscylowanie szeregu 462
Ostrogradskiego wzór 34
oś rzeczywista 440
 - urojona 440
Parabola 150
plaszczyzna zmiennej zespolonej 440
pochodna logarytmiczna 660
podstawienie Abela 56
 - Eulera 44
 - liniowe 17
 - , zamiana zmiennej 15*podstawowe* twierdzenie algebry 584
podstawowy wzór rachunku całkowego 106
Poissona całka 105, 120
 - suma uogólniona 342
 - wzór 219, 220*Poissona-Abela* metoda 344
pole 162, 189
potencjal 482
postać kanoniczna 74
powierzchnia obrotowa 184
 - walcowa 188*prawo stygnięcia* 212
 - zachowania energii kinetycznej 200*prąd* indukcyjny 213
prądy dodatkowe 213
prędkość reakcji chemicznej 214
promień zbieżności szeregu 259
przedział zbieżności 259
 - zorientowany 93*przekształcenie* Landena 123
 - Markowa 340*przekształcenia* Eulera 333, 356
przystępna liczba 126
punkt niejednostajności 367
 - osobliwy 499, 501, 502
 - rozgraniczający 299
Quasi-jednostajna zbieżność 374

Raabego ciąg 235
 - kryterium 235
 - wzór 651*reguła* całkowania przez części 22
 - Leibniza 568*regularna* metoda sumowania szeregu 342, 361
reszta szeregu 224
 - — w postaci Cauchy'ego 316
 - — — Lagrange'a 316*Riemanna* funkcja ζ 280, 405, 659
 - suma 82

rozbieżny iloczyn nieskończony 302
 — — podwójny 287
 — szereg podwójny 287
rozdzielenie zmiennych 211
rozwiązywanie ogólne 209
 — szczegółowe 209
rozwinięcie asymptotyczne $\ln(n!)$ 476
równania różniczkowe 209
równanie Bessela 579
 — naturalne krzywej 155
 — pierwszego rzędu 209
 — reakcji chemicznej 214
 — różniczkowe Bessela 405
różniczka dwumienna 40

Samoindukcja 213

Simpsona wzór 137

Sinus amplitudy (lub eliptyczny) 216
 — całkowy 69, 560

skończona granica 82

spirala Archimedesa 151
 — logarytmiczna 151, 159

stała Catalana 144, 397
 — Eulera 232, 662
 — Eulera-Maclaurina 475

Stirlinga szereg 476, 681
 — wzór 319, 321, 680

suma całkowa 82
 — częściowa lub odcinek szeregu 221
 — — szeregu podwójnego 287
 — Riemanna 82
 — szeregu 221, 302
 — — iterowanego 285
 — — o wyrazach zespolonych 442
 — — podwójnego 287
 — — wielokrotnego 302
 — — uogólniona 342, 361
 — — — w sensie Borela 356
 — — — — Cesary 347
 — — — — Poissona 342
 — — — — Woronoja 353

sumy Darboux 83

szereg bezwzględnie zbieżny 290, 443
 — dodatni 225
 — dwumienny 321
 — Eulera-Maclaurina 475
 — geometryczny 222
 — harmoniczny 226, 227
 — hipergeometryczny 241, 257
 — iterowany 284
 — jednostajnie zbieżny 366

szereg Lagrange'a 437
 — Lamberta 268
 — Leibniza 318
 — Maclaurina 315
 — naprzemienny 261
 — nieskończony 221
 — oscylujący 462
 — podwójny 287
 — potęgowy 257
 — — dwóch zmiennych 298
 — Stirlinga 476, 681
 — Taylora 315, 389
 — wielokrotny 301
 — zbieżny jednostajnie 366
 — — quasi-jednostajnie 374
 — — warunkowo 290
 — wolniej zbieżny 252
 — — rozbieżny 252
 — zespolony bezwzględnie zbieżny 443

szeregi Dirichleta 267

śzybkość zbieżności 327

Ślimak 152

średnia harmoniczna 226

środek ciężkości 198

Tarcie lin i pasów 218

Taylora szereg 315, 389
 — współczynniki 315,
 — wzór z resztą w postaci całki oznaczonej 126

Torricellego wzór 207

traktrysa 155, 212

trapez krzywoliniowy 8, 166

twierdzenie Abela 308, 344, 446
 — Frobeniusa 354
 — Guldina 196
 — Landaua 267
 — Newtona i Leibniza 8
 — o mnożeniu funkcji Γ 662

twierdzenie tauberowskie 347

Ulamki proste 27

uogólnione metody Cesary 353

uogólniony wzór na całkowanie przez części 23

Wahadło matematyczne 214

Wallisa wzór 126

wartość bezwzględna liczby zespolonej 440
 — funkcji wykładniczej 448
 — główna argumentu 440
 — — całki niewłaściwej 510, 512
 — — logarytmu 450

wartość iloczynu 302
 — początkowa 7
 — uogólniona całki 513
 — — — rozbieżnej 514
warunek mierzalności 164
Weierstrassa wzór 312, 665
wewnętrzna miara 161
 — objętość bryły 174
wewnętrzne pole figury 161
wielokąt 161
wielomiany Legendre'a 129
Woronoja metody 353
 — suma uogólniona 353
współczynnik samoindukcji 213
współczynniki dwumienne 321
 — *Taylora* 315
wydzielenie osobliwości 552
wypukłość logarytmiczna 654
wyraz szeregu 221
wyrażenie podcałkowe 6
wzory Bonneta 102
wzór barometryczny 217
 — *Clapeyrona* 219
 — *Eulera-Maclaurina* 469
 — *Gaussa* 122, 662
 — interpolacyjny *Lagrange'a* 135

wzór Legendre'a 652
 — *Machina* 328
 — *Moivre'a* 323, 441
 — *Newtona-Leibniza* 106
 — *Ostrogradskiego* 34
 — *Poissona* 219, 220
 — *Raabego* 651
 — *Simpsona* 137
 — *Stirlinga* 319, 321, 476, 680
 — *Taylora z resztą w postaci całki oznaczonej* 126
 — *Torricellego* 207
 — trapezów 133
 — *Wallisa* 126
 — *Weierstrassa* 312, 665

Vivianiego krzywa 160

Zbieżny iloczyn nieskończony 302
 — jednostajnie ciąg 365
 — szereg 222
 — — iterowany 284
 — — podwójny 287
 — — wielokrotny 302
zewnętrzna miara 161
 — objętość bryły 174
zewnętrzne pole figury 161

SPIS RZECZY

Rozdział VIII

FUNKCJA PIERWOTNA (CAŁKA NIEOZNACZONA)

§ 1. Całka nieoznaczona i najprostsze sposoby jej obliczania

263. Pojęcie funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej)	5
264. Całka i obliczanie pola	8
265. Tablica całek podstawowych	10
266. Najprostsze reguły całkowania	11
267. Przykłady	12
268. Całkowanie przez podstawienie	15
269. Przykłady	18
270. Całkowanie przez części	22
271. Przykłady	23

§ 2. Całkowanie funkcji wymiernych

272. Sformułowanie zagadnienia o całkowaniu w postaci skończonej	26
273. Ułamki proste i ich całkowanie	27
274. Rozkład ułamków właściwych na ułamki proste	28
275. Wyznaczenie współczynników	31
276. Wydzielenie części wymiernej całki	33
277. Przykłady	36

§ 3. Całkowanie pewnych wyrażeń zawierających pierwiastki

278. Całkowanie wyrażeń postaci $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\alpha x + \delta}}\right)$	38
279. Całkowanie różniczek dwumiennych. Przykłady	40
280. Wzory redukcyjne	42
281. Całkowanie wyrażeń postaci $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Podstawienia Eulera	44
282. Geometryczna interpretacja podstawień Eulera	47
283. Przykłady	48
284. Inne sposoby obliczania	53
285. Przykłady	59

§ 4. Całkowanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne i funkcję wykładniczą

286. Całkowanie różniczek $R(\sin x, \cos x) dx$	61
287. Całkowanie wyrażeń $\sin^v x \cos^u x$	63
288. Przykłady	65
289. Przegląd innych przypadków	69

§ 5. Całki eliptyczne

290. Uwagi ogólne i definicje	70
291. Przekształcenia pomocnicze	72
292. Sprowadzenie do postaci kanonicznej	74
293. Całki eliptyczne, pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju	76

Rozdział IX**CAŁKA OZNACZONA****§ 1. Definicja i warunki istnienia całki oznaczonej**

294. Inne podejście do zadania o polu	80
295. Definicja	81
296. Sumy Darboux	83
297. Warunek istnienia całki	85
298. Klasy funkcji całkowalnych	87
299. Własności funkcji całkowalnych	88
300. Przykłady i uzupełnienia	90
301. Całki górną i dolną jako granice	91

§ 2. Własności całek oznaczonych

302. Całka w przedziale zorientowanym	93
303. Własności całek wyrażające się równościami	94
304. Własności wyrażające się nierównościami	95
305. Całka oznaczona jako funkcja górnej granicy	99
306. Drugie twierdzenie o wartości średniej	101

§ 3. Obliczanie i przekształcanie całek oznaczonych

307. Obliczenie za pomocą sum całkowych	103
308. Podstawowy wzór rachunku całkowego	106
309. Przykłady	107
310. Inne wyprowadzenie wzoru podstawowego	110
311. Wzory redukcyjne	111
312. Przykłady	112
313. Wzór na zamianę zmiennej w całce oznaczonej	115
314. Przykłady	116
315. Wzór Gaussa. Przekształcenie Landena	121
316. Inne wyprowadzenie wzoru na zamianę zmiennej	124

§ 4. Niektóre zastosowania całek oznaczonych

317. Wzór Wallisa	125
318. Wzór Taylora z resztą w postaci całki	126
319. Przestępność liczby e	126
320. Wielomiany Legendre'a	128
321. Nierówności całkowe	130

§ 5. Przybliżone obliczanie całek oznaczonych

322. Postawienie zadania. Metoda prostokątów i metoda trapezów	132
323. Interpolacja paraboliczna	134

324. Rozdrobnienie przedziału całkowania	136
325. Błąd dla wzoru prostokątów	137
326. Błąd dla wzoru trapezów	139
327. Błąd dla wzoru Simpsona	139
328. Przykłady	141

Rozdział X

ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO DO GEOMETRII, MECHANIKI I FIZYKI

1. Długość krzywej

329. Obliczanie długości krzywej	145
330. Inne podejście do definicji długości krzywej i jej obliczania	147
331. Przykłady	149
332. Równania naturalne krzywej płaskiej	155
333. Przykłady	157
334. Długość łuku krzywej przestrzennej	160

2. Pole i objętość

335. Definicja pola. Własność addytywności	161
336. Pole jako granica	162
337. Klasy obszarów mierzalnych	164
338. Wyrażenie pola za pomocą całki	166
339. Przykłady	168
340. Definicja i własności pojęcia objętości	173
341. Klasy brył mających objętości	175
342. Wyrażenie objętości za pomocą całki	176
343. Przykłady	179
344. Pole powierzchni obrotowej	184
345. Przykłady	186
346. Pole powierzchni walcowej	188
347. Przykłady	189

3. Obliczanie wielkości mechanicznych i fizycznych

348. Schemat stosowania całki oznaczonej	192
349. Znajdowanie momentów statycznych i środka ciężkości krzywej	194
350. Przykłady	196
351. Wyznaczanie momentów statycznych i środka ciężkości figury płaskiej	197
352. Przykłady	198
353. Praca	199
354. Przykłady	200
355. Praca siły tarcia czopa płaskiego	202
356. Zadania na sumowanie elementów nieskończoność małych	204

4. Najprostsze równania różniczkowe

357. Pojęcia podstawowe. Równania pierwszego rzędu	208
358. Równanie stopnia pierwszego względem pochodnej. Rozdzielanie zmiennych	209
359. Zadania	212
360. Uwagi o układaniu równań różniczkowych	216
361. Zadania	217

Rozdział XI
SZEREGI NIESKOŃCZONE O WYRAZACH STAŁYCH

§ 1. Wstęp

362. Pojęcia podstawowe	221
363. Przykłady	222
364. Podstawowe twierdzenia	224

§ 2. Zbieżność szeregów o wyrazach dodatnich

365. Warunek zbieżności szeregu o wyrazach dodatnich	225
366. Twierdzenia o porównywaniu szeregów	227
367. Przykłady	229
368. Kryteria zbieżności Cauchy'ego i d'Alemberta	233
369. Kryteria Raabe'go	234
370. Przykłady	236
371. Kryterium Kummera	239
372. Kryterium Gaussa	241
373. Kryterium całkowe Maclaurina-Cauchy'ego	242
374. Kryterium Jermakowa	246
375. Uzupełnienia	248

§ 3. Zbieżność szeregów dowolnych

376. Ogólny warunek zbieżności szeregu	253
377. Zbieżność bezwzględna	254
378. Przykłady	256
379. Szereg potęgowy i jego przedział zbieżności	257
380. Wyrażenie promienia zbieżności przez współczynniki	259
381. Szeregi naprzemienne	261
382. Przykłady	262
383. Przekształcenie Abela	264
384. Kryteria Abela i Dirichleta	265
385. Przykłady	266

§ 4. Własności szeregów zbieżnych

386. Prawo łączności	270
387. Prawo przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych	272
388. Przypadek szeregów zbieżnych warunkowo	273
389. Mnożenie szeregów	276
390. Przykłady	278
391. Ogólne twierdzenie z teorii granic	280
392. Dalsze twierdzenia o mnożeniu szeregów	282

§ 5. Szeregi iterowane i podwójne

393. Szeregi iterowane	284
394. Szeregi podwójne	287
395. Przykłady	291
396. Szereg potęgowy dwóch zmiennych; obszar zbieżności	298
397. Przykłady	300
398. Szeregi wielokrotne	301

§ 6. Iloczyny nieskończono

399. Pojęcia podstawowe	302
400. Przykłady	303
401. Twierdzenia podstawowe. Związek z szeregami	304
402. Przykłady	307

§ 7. Rozwinięcia funkcji elementarnych

403. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Szereg Taylora	314
404. Rozwinięcie w szereg funkcji wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i innych	316
405. Szereg logarytmiczny	318
406. Wzór Stirlinga	319
407. Szereg dwumienny	321
408. Rozwinięcie kosinusa i sinusa w iloczyn nieskończony	323

§ 8. Rachunki przybliżone za pomocą szeregów. Przekształcanie szeregów

409. Uwagi ogólne	327
410. Obliczenie liczby π	328
411. Obliczanie logarytmów	329
412. Obliczanie pierwiastków	331
413. Przekształcanie szeregów potęgowych według Eulera	333
414. Przykłady	334
415. Przekształcanie Kummera	336
416. Przekształcanie Markowa	339

§ 9. Sumowanie szeregów rozbieżnych

417. Wstęp	341
418. Metoda szeregów potęgowych	342
419. Twierdzenie Taubera	345
420. Metoda średnich arytmetycznych	347
421. Wzajemny stosunek metod Poissona-Anela i Cesary	348
422. Twierdzenie Hardy'ego-Landaua	350
423. Zastosowanie sumowania uogólnionego do mnożenia szeregów	351
424. Inne metody sumowania uogólnionego szeregów	353
425. Przykłady	357
426. Ogólna klasa liniowych, regularnych metod sumowania	359

Rozdział XII

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

§ 1. Zbieżność jednostajna

427. Uwagi wstępne	362
428. Zbieżność jednostajna i niejednostajna	364
429. Warunek jednostajnej zbieżności	368
430. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów	369

§ 2. Własności funkcyjne sumy szeregu

431. Ciągłość sumy szeregu	371
432. Uwaga o zbieżności quasi-jednostajnej	374
433. Przejście do granicy wyraz za wyrazem	375

434. Całkowanie szeregów wyraz za wyrazem	376
435. Różniczkowanie szeregów wyraz za wyrazem	378
436. Przeniesienie wyników na ciągi	381
437. Ciągłość sumy szeregu potęgowego	383
438. Całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych	386
§ 3. Zastosowania	
439. Przykłady na ciągłość sumy szeregu i przejście do granicy wyraz za wyrazem	389
440. Przykłady całkowania szeregów	394
441. Przykłady na różniczkowanie szeregu wyraz za wyrazem	403
442. Metoda kolejnych przybliżeń w teorii funkcji uwikłanych	409
443. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych	411
444. Przykład funkcji ciągłej bez pochodnej	413
§ 4. Dodatkowe wiadomości o szeregach potęgowych	
445. Działania na szeregach potęgowych	415
446. Superpozycja szeregów	418
447. Przykłady	420
448. Dzielenie szeregów potęgowych	424
449. Liczby Bernoulliego i rozwinięcia, w których występują	426
450. Rozwiązywanie równań za pomocą szeregów	430
451. Odwrócenie szeregu potęgowego	433
452. Szereg Lagrange'a	436
§ 5. Elementarne funkcje zmiennej zespolonej	
453. Liczby zespolone	439
454. Ciąg liczb zespolonych i jego granica	441
455. Funkcje zmiennej zespolonej	443
456. Szeregi potęgowe	445
457. Funkcja wykładnicza	448
458. Funkcja logarytmiczna	449
459. Funkcje trygonometryczne i ich funkcje odwrotne	451
460. Funkcja potęgowa	455
461. Przykłady	456
§ 6. Szeregi oscylujące i szeregi asymptotyczne. Wzory Eulera-Maclaurina	
462. Przykłady	459
463. Definicje	462
464. Podstawowe własności rozwinięć asymptotycznych	464
465. Wyprowadzenie wzoru Eulera-Maclaurina	467
466. Badanie reszty	469
467. Przykłady obliczeń z zastosowaniem wzoru Eulera-Maclaurina	471
468. Inna postać wzoru Eulera-Maclaurina	474
469. Wzór i szereg Stirlinga	476

Rozdział XIII CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

§ 1. Całki niewłaściwe o granicach nieskończonych

470. Definicja całki o granicach nieskończonych	478
471. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego	480

472. Przykłady	480
473. Analogia z szeregami. Najprostsze twierdzenia	483
474. Zbieżność całki w przypadku funkcji dodatniej	484
475. Zbieżność całki w przypadku ogólnym	486
476. Kryteria Abela i Dirichleta	487
477. Srowadzenie całki niewłaściwej do szeregu nieskończonego	490
478. Przykłady	492

§ 2. Całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych

479. Definicja całki z funkcji nieograniczonej	499
480. Uwaga o punktach osobliwych	501
481. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego. Przykłady	502
482. Warunki i kryteria istnienia całki	504
483. Przykłady	507
484. Wartości główne całek niewłaściwych	510
485. Uwaga o wartościach uogólnionych całek rozbieżnych	513

§ 3. Własności i przekształcanie całek niewłaściwych

486. Najprostsze własności	515
487. Twierdzenie o wartości średniej	517
488. Całkowanie przez części w przypadku całek niewłaściwych	518
489. Przykłady	519
490. Zamiana zmiennych w całkach niewłaściwych	520
491. Przykłady	521

§ 4. Specjalne metody obliczania całek niewłaściwych

492. Pewne ważne całki	526
493. Obliczenie całek niewłaściwych za pomocą sum całkowych. Przypadek skończonych granic całkowania	529
494. Całki w przedziale nieskończonym	530
495. Całki Froullaniego	534
496. Całki z funkcji wymiernych w granicach nieskończonych	536
497. Mieszane przykłady i ćwiczenia	541

§ 5. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych

498. Całki o skończonych granicach całkowania; wydzielenie osobliwości	552
499. Przykłady	552
500. Uwaga o przybliżonym obliczaniu całek właściwych	555
501. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych w przedziale nieskończonym	556
502. Wykorzystanie rozwinięć asymptotycznych	558

Rozdział XIV
CAŁKI ZALEŻNE OD PARAMETRU

§ 1. Teoria elementarna

503. Sformułowanie zagadnienia	562
504. Zbieżność jednostajna do funkcji granicznej	562
505. Przedstawienie dwóch przejść do granicy	565
506. Przejście do granicy pod znakiem całki	566
507. Różniczkowanie pod znakiem całki	568

508. Całkowanie pod znakiem całki	570
509. Przypadek, gdy granice całki także zależą od parametru	572
510. Wprowadzenie czynnika zależnego tylko od x	573
511. Przykłady	575
512. Dowód Gaussa podstawowego twierdzenia algebry	584
§ 2. Zbieżność jednostajna całek	
513. Definicja całki zbieżnej jednostajnie	586
514. Kryterium zbieżności jednostajnej. Związek z szeregami	587
515. Warunki dostateczne zbieżności jednostajnej	588
516. Drugi przypadek zbieżności jednostajnej	590
517. Przykłady	591
§ 3. Wykorzystanie zbieżności jednostajnej całek	
518. Przejście do granicy pod znakiem całki	595
519. Przykłady	598
520. Ciągłość i różniczkowalność całki względem parametru	609
521. Całkowanie całki względem parametru	612
522. Zastosowanie do obliczania niektórych całek	615
523. Przykłady różniczkowania pod znakiem całki	620
524. Przykłady całkowania pod znakiem całki	629
§ 4. Uzupełnienia	
525. Lemat Arzeli	637
526. Przejście do granicy pod znakiem całki	638
527. Różniczkowanie pod znakiem całki	641
528. Całkowanie pod znakiem całki	642
§ 5. Całki Eulera	
529. Całka Eulera pierwszego rodzaju	643
530. Całka Eulera drugiego rodzaju	645
531. Najprostsze własności funkcji Γ	646
532. Jednoznaczne określenie funkcji Γ na podstawie własności	652
533. Inna charakterystyka funkcyjna funkcji	653
534. Przykłady	655
535. Pochodna logarytmiczna funkcji Γ	660
536. Twierdzenie o mnożeniu funkcji Γ	662
537. Niektóre rozwinięcia w szeregi i iloczyny	664
538. Przykłady i uzupełnienia	665
539. Obliczanie pewnych całek oznaczonych	671
540. Wzór Stirlinga	678
541. Obliczenie stałej Eulera	681
542. Układanie tablicy logarytmów dziesiętnych funkcji Γ	682
Skorowidz	684