Neapibrėžtis

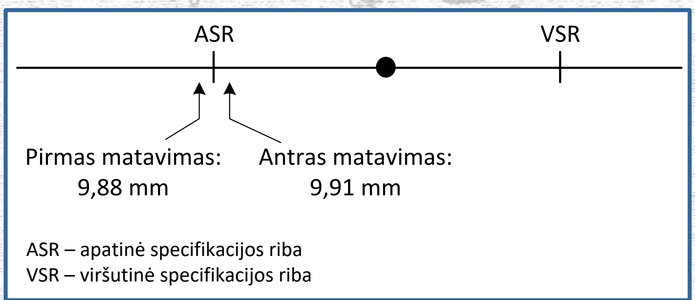
doc. dr. Paulius Kaškonas

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

- Dažniausiai matavimai atliekami nustatyti tam tikrai produkto (objekto) charakteristikos skaitinei vertei arba kontroliuoti gamybos procesą, kad produkto charakteristikos būtų tam tikrose nustatytose ribose, kurias nurodo specifikacija. Nominali vertė ir tolerancija nurodo leidžiamą matuojamos charakteristikos kitimo intervalą.

- Pavyzdžiui, gaminami 10 mm metaliniai strypeliai, naudojami kaip tarpikliai. Specifikacija nurodo, kad tolerancija – 0,2 mm, t.y., (10±0,1) mm arba (9,9 – 10,1) mm. Firmos kokybės inspektorius (metrologas) matuoja kiekvieną tarpiklį ir nustato tinkamas jis ar ne. Tarkime, kad jis slankmačiu išmatuoja vieną tarpiklį. Gautas matavimo rezultatas 9,88 mm, o pakartojus matavimą – rezultatas 9,91 mm.

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai



- Pirmuoju atveju tarpiklis turi būti atmestas, antruoju – ne.
- Ar tarpiklis turi būti atmestas ar ne? Neteisinga matavimo procedūra? Atlikti tik po vieną matavimą ir priimti spendimą?

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

- Atsakymas į klausimus būtų toks: „nebūtinai“. Kad po kelių matavimų gauti rezultatai skiriasi neturėtų stebinti. Tam gali turėti įtakos šie veiksniai: matavimai atlikti nevienodose (ne tose pačiose) tarpiklio vietose, buvo panaudotas nevienodas slankmačio spaudimas matuojant, tarpiklio ilgio pokytis dėl šilumos nuo inspektoriaus rankų ir t. t. Šie poveikiai, kurie įtakoja matavimo rezultatą ir negali būti eliminuoti ar įvertinti vadinami *įtakojančiais veiksniais* (ang. *influence quantities*).
- Supaprastinkime aptartą situaciją ir tarkime, kad įtakojančių veiksnių poveikis paneigtinai mažas. Atlikus keletą matavimų, rezultatas (vidutinė vertė) 9,92 mm. Ar inspektorius gali priimti sprendimą, kad tarpiklis tinkamas?
- Atsakymas: „nebūtinai“. Tarpiklio ilgis gali būti ne 9,92 mm.

Vertė ir vienetai

- Matavimas – tai operacijų visuma, atliekama siekiant nustatyti dydžio vertę. Dydis – tai reiškinio, objekto ar medžiagos charakteristika, kuri gali būti kokybiškai išskirta ir kiekybiškai įvertinta. *Matuojamas <u>ne objektas</u>, o kažkokia konkreti jo <u>charakteristika</u>!*
- Rezultatas – tai algebrinė skaitinės vertės, gautos matavimo procese, ir matuojamojo dydžio matavimo vienetų sandaugos išraiška

$$\boxed{rezultatas = skaitinė\ vertė \times matavimo\ vienetai}$$

- Matavimo metu gaunama kiekybinis įvertis yra santykis

$$\boxed{skaitinė\ vertė = \frac{rezultatas}{matavimo\ vienetai}}$$

Vertė ir vienetai

- Pagal duotą pavyzdį matavimo rezultatas yra 9,92 mm. T. y. 9,92 karto didesnis nei 1 mm, kuris savo ruožtu yra 1/1000 metro dalis.
- Tačiau kas yra metras? Būtinas etalonas, nurodantis koks ilgis yra vadinamas metru. Šiandien metro etalonas apibrėžiamas kaip šviesos nusklisto kelio vakuume per ~$1/(3{\cdot}10^8)$ sekundės dalį (1/299 792 458 s) ilgis.
- Praktikoje naudojami matavimo instrumentai turi būti *susieti*. T. y. periodiškai palyginami su standartu (etalonu), kurio atkuriamos vertės yra žinomos dideliu tikslumu. Šis metrologinis veiksmas vadinamas *kalibravimu*, kurio pasėkoje nustatoma matavimo priemonės rodmens *pataisa*.

Kalibravimas ir sietis

- *Kalibravimas* – tai veiksmų visuma, kuri nurodytomis sąlygomis nustato matavimo priemonės ar matavimo sistemos rodomų dydžių verčių arba verčių, kurias teikia matas ar pamatinė terpė, ryšį su etalonų sukurtomis atitinkamomis vertėmis.
- *Etalonu* gali būti matas, matavimo priemonė ar sistema, pamatinė medžiaga, skirta sukurti, saugoti ir atkurti matuojamojo dydžio vieną ar kelias vertes.
- Matavimo *sietis* – matavimo rezultatų verčių ryšys su matavimo vieneto etalono vertėmis, nustatytas nenutrūkstamuoju lyginamuoju metodu.

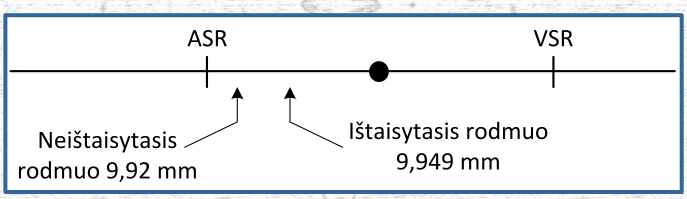
Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

- Slankmačiai kalibruojami naudojant galinio ilgio matus. Galinio ilgio matas skirtas atkurti vieną žinomą ilgio vertę.

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

- Tarkime, kad pavyzdyje naudojamas slankmatis buvo kalibruotas. Kalibravimo sertifikate nurodyta, kad 10 mm kalibravimo taške gauta paklaida yra -0,029 mm. Vadinasi, 10 mm skalės taško aplinkoje rodmuo turi būti pakoreguotas įvertinant pataisos vertę 0,029 mm. Ištaisytasis rodmuo bus

$$\boxed{9{,}92\ \text{mm} + 0{,}029\ \text{mm} = 9{,}949\ \text{mm}}$$



- Ar dabar inspektorius turi pripažinti tarpiklį tinkamu?

Matavimo neapibrėžtis

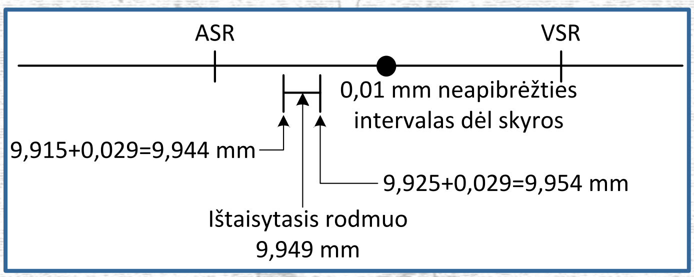
- Nors gautas ištaisytasis rodmuo (9,949 mm) patenka į specifikacijos ribas (9,9 – 10,1) mm, dar nėra aišku ar tarpiklis yra tinkamas. Tam reikia žinoti matavimo neapibrėžtį, kuri nurodys intervalą apie gautą matavimo rezultatą (9,949 mm), į kurį patenka *tikroji (nežinoma) tarpiklio ilgio vertė*.

- Kodėl toks (neapibrėžties) intervalas egzistuoja?

- Pirmiausia prisiminkime vieną matavimo priemonių charakteristiką – skyrą (ang. *resolution*). Skyra – tai mažiausias skirtumas tarp dviejų rodmenų, kurį dar gali išskirti matavimo priemonė.

Matavimo neapibrėžtis

- Slankmačio skyra – 0,01 mm. Taigi jei naudojant didesnės skyros (pvz., 0,001 mm) matavimo priemonę, gauti matavimo rezultatai patenka į intervalą (9,915 – 9,925) mm, slankmačio (neištaisytasis) rodmuo visada būtų 9,92 mm.
- Įvertinus pataisą (0,029 mm) gauname, kad tikroji tarpiklio ilgio vertė bus intervale



Pakartojamumas

- *Pakartojamumas* (ang. *repeatability*) – tai terminas, skirtas išreikšti matavimo rezultatų sąlyginiam artumui, kai tas pats operatorius trumpu laikotarpiu matuoja tą patį dydį, naudodamasis ta pačia matavimo priemone, pagal tą pačią matavimo procedūrą, tomis pačiomis sąlygomis, toje pačioje vietoje. Tai vadinamos *pakartojamumo sąlygos*, kurios užtikrina, kad įtakojančių veiksniai įtaka bus minimali.
- Įtakojantys veiksniai negali būti visiškai eliminuoti, todėl atliekant pakartotinius matavimus rezultatas nebus pastovus. Iš to seka, kad pasakyti, kuris iš atliktų matavimų yra lygus „tikrajai“ vertei yra neįmanoma. Kadangi nei vienas matavimo rezultatas nėra „geresnis“ už kitus, labiausiai tikėtina matuojamojo dydžio vertė yra aritmetinio vidurkio įvertis (neįvertinus pataisos).

Atkuriamumas

- *Atkuriamumas* (ang. *reproducibility*) – tai terminas, skirtas išreikšti matavimo rezultatų sąlyginiam artumui atliekant nuoseklius to paties dydžio matavimus pakitus sąlygoms.
- Matavimo rezultatų atkuriamumą garantuoja matavimų vienovės principas. Atkuriamumo sąlygas apima:
  - Matavimo principus (fizikinis reiškinys, kuriuo grindžiamas matavimas, pvz., galios matavimas termoefektu);
  - Matavimo metodus (būdų ir veiksmų visuma, nustatanti matavimo priemonių ir principų naudojimo tvarką, siekiant konkrečių matavimo tikslų);
  - Operatorių;
  - Matavimo priemonę;
  - pamatinį etaloną;
  - Vietą, laiką ir / ar kitas sąlygas.

Matavimo neapibrėžtis

- Vienas iš neapibrėžties šaltinių – matuojamojo dydžio *apibrėžimas*. Matuojamąjį dydį apibrėžiant kaip „tarpiklio ilgis“ turima omenyje, kad jo galų paviršiai yra idealiai plokšti ir lygiagretūs. Bet koks neatitikimas reikš, kad turime *nepilnai apibrėžtą* matuojamąjį dydį, kadangi matavimo rezultatas priklausys nuo slankmačio pridėjimo padėties.

- Taip pat būtina nurodyti kokiai temperatūrai esant turi būti atliekami tarpiklio ilgio matavimai. Vėlgi kyla klausimas – kaip tiksliai buvo matuojama ir išlaikoma temperatūra? Temperatūra yra labai dažnas įtakojantis veiksnys.

Matavimo neapibrėžtis

- Pabandykime aptarti rezultato pataisas. Viena iš jų yra matavimo priemonės kalibravimo metu nustatyta pataisa, tačiau yra ir daugiau, kurias trumpai aptarsime.
- Tarkime, kad matuojamasis dydis yra tarpiklio ilgis matuojamas prie tam tikros temperatūros T_0. Dėl kažkokių priežasčių matavimus galima atlikti tik esant temperatūrai T, kai $T \neq T_0$ (tarkime, kad matavimo priemonė nuo temperatūros nepriklauso). Tokiu atveju matavimo rezultatas turi būti padauginamas iš pataisos koeficiento

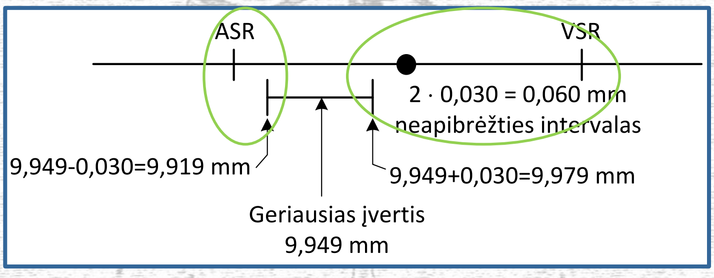
$$\boxed{F = \frac{1}{1 + \alpha(T - T_0)}}$$

čia α – tarpiklio medžiagos temperatūrinis plėtimosi koeficientas.

Matavimo neapibrėžtis

- Taigi temperatūra T ir koeficientas α turi būti matuojami ir turės savo neapibrėžtis. Šios neapibrėžtys prisidės prie pataisos koeficiento F neapibrėžties, kuri savo ruožtu prisidės prie matuojamo dydžio įverčio (įvertinto prie temperatūros T_0) neapibrėžties.
- Kalibravimo metu nustatyta pataisa turi savo neapibrėžtį (nurodoma kalibravimo sertifikate), kuri susideda iš etalono neapibrėžties ir kalibravimo proceso neapibrėžties.
- Grįžtant prie pavyzdžio, tarkime, kad įvertinus visas matavimo neapibrėžties dedamąsias buvo gauta 0,030 mm. Priimkime, kad neapibrėžties intervale 9,949±0,030 mm yra tikroji (nežinoma) tarpiklio ilgio vertė.

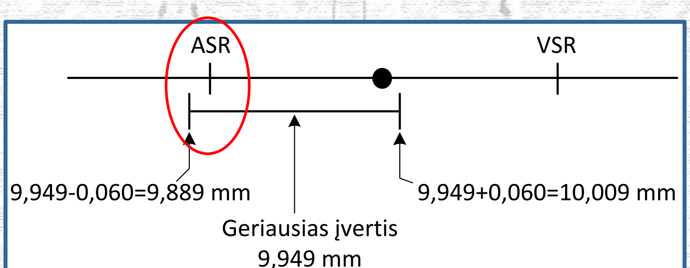
Pavyzdys: atitiktis specifikacijai



- Kadangi visas neapibrėžties intervalas patenka į specifikacijos ribas, inspektorius galiausiai gali pripažinti tarpiklį tinkamu.
- Kas būtų, jei neapibrėžties intervalas būtų platesnis?

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

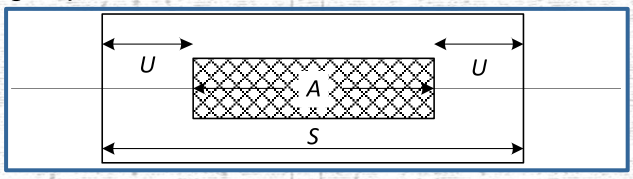
- Tarkime, kad geriausias įvertis yra tas pats – 9,949 mm, bet šiuo atveju neapibrėžtis lygi 0,060 mm.



- Nors labai tikėtina, kad „tikroji“ ilgio vertė atitinka specifikacijos reikalavimus, bet inspektorius negali būti dėl to užtikrintas. Todėl tarpiklis turi būti atmestas kaip neatitinkantis reikalavimų.

Pavyzdys: atitiktis specifikacijai

- Apibendrinant, tarkime, kad *S* yra specifikacijos intervalo plotis, o *U* yra matavimo neapibrėžtis. Tik tie matavimai, kurie patenka į priėmimo intervalą *A*, kurio plotis $S–2·U$ gali būti saugiai priimti.



- Gautas matavimo rezultatas (9,949±0,030) mm rodo, kad matuojamasis dydis labai tikėtina ne mažesnis už 9,919 mm už ne didesnis nei 9,979 mm. Tačiau tikimybė, kad „tikroji" vertė bus už šių ribų nėra lygi nuliui. Šios tikimybės sumažinimui neapibrėžties ribos yra išplečiamos, padauginant iš išplėsties koeficiento.

Matavimo modelis

- Prieš atliekant matavimus pirmiausia būtina aiškiai ir nedviprasmiškai apibrėžti matuojamąjį dydį. Priklausomai nuo apibrėžimo, matavimai gali būti:
  - Tiesioginiai,
  - Netiesioginiai.
- *Tiesioginiai matavimai* – tai tokie matavimai, kai ieškomas dydis yra tiesiogiai matuojamas matuokliu (matavimo priemone) ar matavimo sistema. Pvz., sveriama su balansinėmis svarstyklėmis, matuojamas ilgis rulete, įvertinama įtampa voltmetru ir kt.

Matavimo modelis

- *Netiesioginiai matavimai* – tai matavimai, kai ieškomas dydis yra suskaičiuojamas pagal matematinę priklausomybę ir yra priklausomas nuo kitų tiesiogiai ar netiesiogiai matuojamų dydžių.
- Netiesioginio matavimo atveju reikalingas tinkamas *matavimo modelis:*
  - matavimo modelis turi atskleisti fiziką, kuri susijusi su matavimu;
  - matavimo modelis gali būti tiek paprastas, tiek labai sudėtingas;
  - matavimo modelis gali būti užrašomas analitine išraiška, viena ar keliomis matematinėmis formulėmis, arba algoritmo forma.

Matavimo modelis

- **Pavyzdys.** Metalo tamprumo modulis *E* yra apibrėžiamas kaip įtempimų ir linijinės deformacijos santykis

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

- Tiriamas metalo mėginys patalpinamas į tempimo mašiną, kuri veikia (tempia) mėginį tiesiogiai matuojama jėga *F*. Tuo pačiu metu tiesiogiai matuojamas atstumas *L* tarp dviejų tempiamo mėginio žymų.

Matavimo modelis

- Įtempimas ir linijinė deformacija randami taip

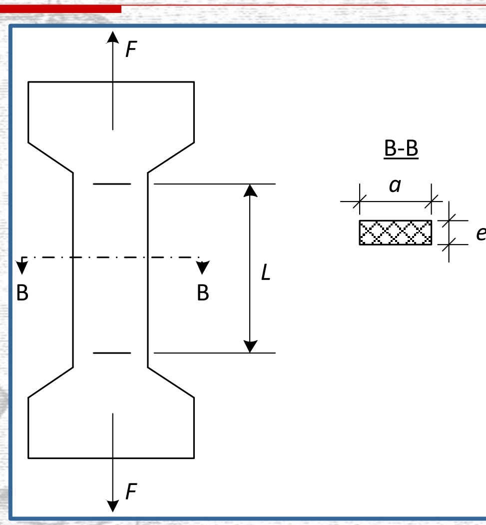
$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A}} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}}$$

čia A – mėginio skerspjūvio plotas, L_0 – pradinis atstumas tarp žymų.

- Savo ruožtu skerspjūvio plotas yra įvertinamas taip

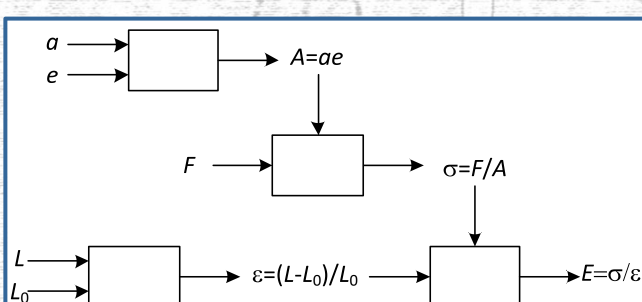
$$\boxed{A = ae}$$

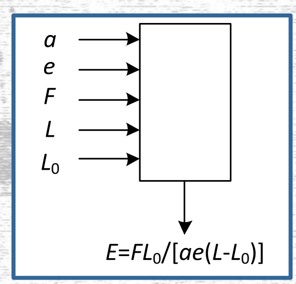
čia a ir e yra mėginio plotis ir storis atitinkamai.



Matavimo modelis

- Šiame pavyzdyje pateiktas netiesioginis tamprumo modulio E matavimas, suskaidytas į keletą tarpinių matavimų su savo matavimo modeliais; tiesiogiai matuojami dydžiai – F, L, L_0, a ir e, o netiesiogiai – A, σ, ε.
- Galima visus tarpinius modelius apjungti į vieną bendrą.





Matavimo modelis

- Bendru atveju matavimo modelis gali būti laikomas *juoda dėže*, turinčia įėjimus (įeinantys dydžiai) ir išėjimus (išeinantys dydžiai).
- *Įėjimo dydžiai* nebūtinai turi būti tiesiogiai matuojami; gali būti naudojami ankstesnių matavimų, atliktų kitų matuotojų, rezultatai, duomenys iš literatūros ir pan. Matavimo modelyje naudojami dydžiai, kurie nebuvo įvertinti matavimo proceso metu, vadinami *įtrauktais dydžiais* (ang. *imported quantities*)
- *Išėjimo dydžiai* nebūtinai yra galutiniai dominantys matuojamieji dydžiai; jie gali tapti įėjimo dydžiais kitame matavimo modelyje.

Matavimo modelis

- Net ir pats paprasčiausias matavimo modelis bus neužbaigtas, jei nebus įvertintos matavimo priemonės, naudojamos tiesioginiams matavimams, rodmenų pataisos. Iš tikrųjų kiekvienas tiesiogiai matuojamas dydis Q turi būti modeliuojamas taip

$$\boxed{Q = G + C}$$

čia G – matavimo priemonės neištaisytieji rodmenys, C – adityvioji pataisa.

- Šiuo požiūriu nei vienas matavimas negali būti griežtai laikomas tiesioginiu.
- Net jei C įvertis lygus nuliui, dėl sieties matuotojas turi nurodyti, kad ši informacija buvo naudojama skaičiavimuose, nes neapibrėžtis susijusi su C nėra lygi nuliui.

Neapibrėžtis

- Matavimo neapibrėžtis gali būti įvertinta ir išreikšta daugeliu būdų. Dėl bendro sutarimo šiuo klausimu nebuvimo, CIPM (*Comite International des Poids et Measures*) nusprendė, kad reikalingas bendras ir priimtas neapibrėžties įvertinimo metodas. To rezultate, CIPM kreipėsi į ISO organizaciją ir jos darbo grupė parengė detalią metodiką neapibrėžčiai įvertinti – *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM).

- GUM neapibrėžtį apibrėžia taip: parametras, susietas su matavimo rezultatu, charakterizuojantis verčių, kurios pagrįstai gali būti priskirtos matuojamajam dydžiui, sklaidą.

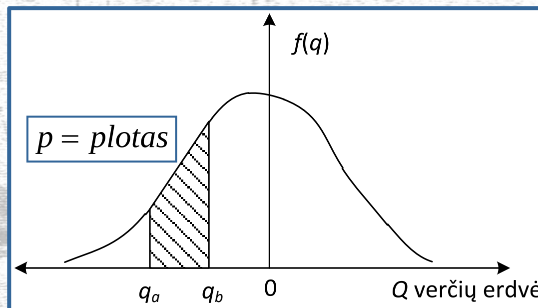
Matavimas ir tankio funkcija

- Dėl matavimo procesą veikiančių nekontroliuojamų įtakojančių veiksnių (tai atsitiktinių paklaidų šaltinis), matuojamo rezultatų imtis apibūdinama tam tikru išsibarstymo lygiu. Šis išsibarstymas paklūsta statistikos dėsniams, t.y., aprašomas tikimybiniu skirstiniu.
- Skirstinį apibūdinanti tikimybinio tankio funkcija – tai neneigiama funkcija, kuria nusakomas tolydžiojo atsitiktinio dydžio galimų verčių tikėtinumas („tikimybinis verčių įgijimo žemėlapis“).
- Tikimybė – tai funkcija, priskirianti reikšmę iš intervalo [0,1] matuojamojo dydžio įgyjamoms vertėms; kur nenulinė vertė (>0) priskiriama toms atsitiktinio dydžio vertėms, kurios gali pasirodyti matavimo metu, o 0 – vertėms, kurios žinoma, kad nepasirodys.

Tankio funkcija

- Tolydžiojo atsitiktinio dydžio Q tankio funkcija nusako tikimybę, kad Q įgis vertes iš intervalo $[q_a, q_b]$, kuri lygi plotui po kreive ribojamam to intervalo.
- Iš tankio funkcijos apibrėžimo seka, kad:

1. tikimybė tolydžiam atsitiktiniam dydžiui Q įgyti konkrečią vertę q yra lygi nuliui;
2. tikimybė tolydžiam atsitiktiniam dydžiui Q įgyti bet kokią vertę iš viso ruožo $[-\infty, +\infty]$ yra lygi 1.



Tankio funkcija

- Tarkime, kad galiausiai turime tankio funkciją. Dauguma vartotojų nežinos ką su ja daryti. Todėl dažniausiai pakanka dviejų svarbiausių charakteristikų:
  - *labiausiai tikėtina vertė* (matematinė viltis),
  - *sklaida* (dispersija).
- Jei du matuojami dydžiai yra tarpusavyje susijusę (t. y. priklausomi), juos apibūdins *jungtinė tankio funkcija*, kurios svarbi charakteristika – *kovariacija*.
- Normuota kovariacija (dalinat iš abiejų dydžių dispersijų) – *koreliacijos koeficientas*.

Standartinė neapibrėžtis

- Prisimenant neapibrėžties apibrėžimą – „... parametras, charakterizuojantis verčių sklaidą...“ nesunku pastebėti, kad jį atitinka sklaida (dispersija). Tačiau nors dispersija labai svarbi tankio funkcijos charakteristika, jos matavimo vienetai yra kvadratiniai $[Q]^2$. Dėl šio fakto dispersija yra nepatogus dydis naudoti ją kaip matavimo neapibrėžtį. Vietoje to naudojamas kita charakteristika – *standartinis nuokrypis* – tai kvadratinė šaknis iš sklaidos – $S(Q)$.
- Tuomet apibrėžkime standartinę neapibrėžtį

$$\boxed{u_q = u(Q) = S(Q)}$$

arba

$$\boxed{u_q^2 = u^2(Q) = V(Q)}$$

Standartinė neapibrėžtis

- Skaitinė vertė

$$\boxed{u_{rq} = \frac{u_q}{|q_e|}}$$

vadinama *santykine* standartine neapibrėžtimi.

- Santykinė standartinė neapibrėžtis neturi dimensijos; modulio ženklas reikalingas tam, kad išvengti neigiamos neapibrėžties vertės (pagal apibrėžimą neapibrėžtis yra visada teigiama). Akivaizdu, kad santykinės standartinės neapibrėžties skaičiavimas galimas tik tuomet, jei geriausias įvertis nėra nykstamai mažas.

Išplėstinė neapibrėžtis

- Praktikoje matavimo rezultato naudotojams nėra svarbi standartinė neapibrėžtis. Jiems reikia intervalo $I_p=(q_a,q_b)$, kuriame su sąlyginai didele tikimybe p būtų (pakliūtų) tikroji matuojamojo dydžio vertė. Ši tikimybė, dar vadinama *patikimumo lygmeniu*, atitinka plotą po skirstinio kreive, ribojamą minėto intervalo (q_a,q_b).

- Kaip jau minėta, esant centruotam apie geriausią įvertį q_e intervalui I_p, kurio pusė yra lygi standartinei neapibrėžčiai u_q, patikimumo lygmuo (tikimybė) yra pakankamai mažas (~68%). Norint didesnio patikimumo, šis intervalas turi būti padidintas.

Išplėstinė neapibrėžtis

- Patikimumo padidinimui standartinė neapibrėžtis yra padauginama iš atitinkamo, nuo tikimybės p priklausančio koeficiento k_p>1, vadinamo išplėsties (aprėpties) koeficientu (ang. *coverage factor*). Koeficientas k_p nėra laisvai pasirenkamas; tai parametras susijęs patikimumo lygmeniu (aprėpties tikimybe) ir skirstiniu.
- Taigi išplėstinė neapibrėžtis, nurodanti pusę simetriško (verčių) aprėpties intervalo, kai tikimybė 100p %

$$\boxed{U_{pq} = k_p u_q}$$

- Galutinis matavimo rezultatas turi būti pateiktas taip

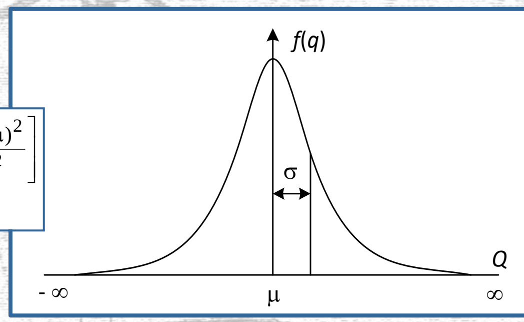
$$\boxed{q_e \pm U_{pq}} \qquad \boxed{q_e \pm U_q,\ p = ...}$$

Tikimybinio tankio funkcijos

- Normaliojo skirstinio tankio funkcija aprašoma taip

$$N(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\frac{1}{2}\frac{(q-\mu)^2}{\sigma^2}\right]}$$

čia μ – matematinė viltis,
σ^2 – sklaida (dispersija).



- Normaliojo skirstinio tankio funkcijos geriausias įvertis ir standartinė neapibrėžtis

$$q_e = \mu \qquad u_q = \sigma$$

Tikimybinio tankio funkcijos

- Apibrėžtinis normaliojo skirstinio tankio funkcijos integralas negali būti išreikštas analitinėmis funkcijomis. Bet jis gali būti sprendžiamas skaitmeniniais metodais, remiantis faktu, kad jei dydžio Q skirstinys yra normalusis, tai dydžio X

$$X = \frac{Q - q_e}{u_q}$$

skirstinys taip pat yra normalusis ir vadinamas *standartiniu normaliuoju skirstiniu*. Jo matematinė viltis lygi nuliui, o dispersija – vienetui

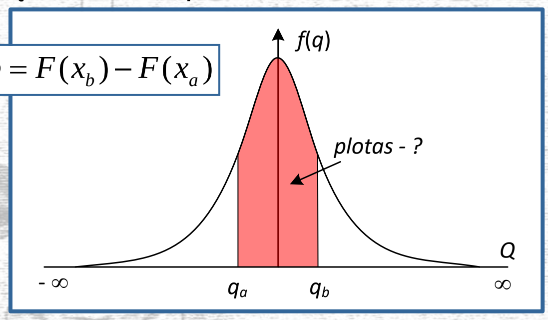
$$N(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\frac{1}{2}\frac{(q-\mu)^2}{\sigma^2}\right]} \xrightarrow{\mu=0,\ \sigma=1} Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2}x^2\right]}$$

Tikimybinio tankio funkcijos

- Normaliojo (Gauso) skirstinio ploto vertės yra pateiktos lentelėse, skaičiuojant plotą nuo -∞ iki užsiduotos x vertės. (https://www.mathsisfun.com/data/standard-normal-distribution-table.html).
- Todėl bet kokią tikimybę nesunku apskaičiuoti

$$plotas = p = F(x_b) - F(x_a)$$

$$x_a = \frac{q_a - q_e}{u_q} \qquad x_b = \frac{q_b - q_e}{u_q}$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
–3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
–3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
–3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
–3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
–3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
–2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
–2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
–2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
–2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
–2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
–2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
–2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
–2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
–2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
–2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
–1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
–1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
–1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
–1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
–1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
–1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
–1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
–1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
–1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
–1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
–0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
–0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
–0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
–0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
–0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
–0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
–0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
–0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
–0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
–0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

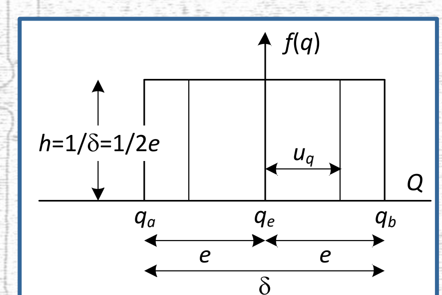
Tikimybinio tankio funkcijos

- Normalusis skirstinys yra ypač svarbus tiek statistikoje, tiek metrologijoje. Jei dydis yra matuojamas daug kartų, dėl įtakojančių veiksnių, kintančių stochastiškai, matavimų rezultatuose bus atsitiktinė paklaida, kurios dažnių skirstinys gali būti modeliuojamas kaip normalusis skirstinys su matematine viltimi, artėjančia į nulį.
- Normalusis skirstinys negali būti priskiriamas dydžiui, kai yra žinoma, kad jo galimos vertės yra apribotos tam tikrame intervale (pvz., iš fizikos žinoma, kad dydis yra tik teigiamas). Tačiau dėl matematinio skaičiavimo patogumo, šio skirstinio tankio funkcija yra naudojama, vietoj kitos sudėtingos tikimybinio tankio funkcijos.

Tikimybinio tankio funkcijos

- Stačiakampis skirstinys dar vadinamas vienodų tikimybių skirstiniu. Intervalas, kuriame gali būti dydžio vertės nurodomas vienu parametru – maksimaliu nuokrypiu *e*: $q_e \pm e$.
- Stačiakampio skirstino tikimybinio tankio funkcija aprašoma taip

$$f(q) = \begin{cases} \frac{1}{2e}, \text{ kai } q_a \le q \le q_b \\ 0, \text{ visur kitur} \end{cases}$$



Tikimybinio tankio funkcijos

- Stačiakampio skirstinio geriausias įvertis yra lygus intervalo viduriui (dėl simetrijos). Jis apskaičiuojamas taip

$$\boxed{E(Q) = q_e = \frac{q_a + q_b}{2}}$$

- Stačiakampio skirstinio dispersija (sklaida) ir standartinis nuokrypis, t.y. standartinė neapibrėžtis yra randami taip

$$\boxed{V(Q) = \frac{\delta^2}{12} = \frac{e^2}{3}} \qquad \boxed{u_q = \frac{\delta}{2\sqrt{3}} = \frac{e}{\sqrt{3}}}$$

Tikimybinio tankio funkcijos

- Matavimuose ir metrologijoje šiandien dažniausiai (intuityviai) naudojamos dvi tikimybinio tankio funkcijos (skirstiniai) – Gauso (normalusis) ir stačiakampio (lygių tikimybių).
- Iškyla toks klausimas:
  - Ar visuomet reikalingas tikimybinis tankis standartinės neapibrėžties įvertinimui?

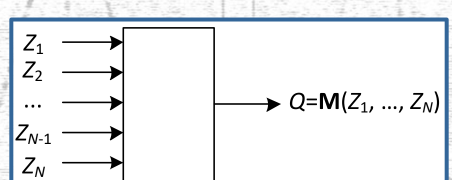
Tikimybinio tankio funkcijos

- Atsakymas į klausimą yra „ne“.
- Viena iš procedūrų – suminės neapibrėžties įvertinimas. Ji taikoma tuomet, kai matuojamasis dydis randamas pagal matavimo modelį, o visų įeinančių dydžių geriausi įverčiai, standartinės ir tarpusavio neapibrėžtys yra žinomos.
- Kitas standartinės neapibrėžties radimo būdas, skirtingas pagal savo filosofiją, yra paremtas imčių teorija: pasinaudojama dydžio verčių dažnių skirstiniu. Šis būdas, dar vadinamas standartinės neapibrėžties įvertinimo *A procedūra*, naudojama tiesiogiai matuojamiems pirminiams dydžiams.
- Jei dydžiai yra įtraukti iš šalies, jų standartinei neapibrėžčiai rasti naudojamas duotų nuokrypių (paklaidų) konvertavimas pagal skirstinį. Šis būdas vadinama *B procedūra*.

Suminė neapibrėžtis

- Tarkime, kad turime netiesiogiai matuojamą dydį Q, į kurio matavimo modelį įeina *N* (įėjimo) dydžių

$$\boxed{Q = \mathrm{M}(Z_1, \ldots, Z_N)}$$



- Kaip jau buvo išdėstyta anksčiau, geriausias įvertis q_e ir standartinė neapibrėžtis u_q turėtų būti randami iš tankio funkcijos $f(q)$, kuri gali būti išvedama iš įėjimo dydžių skirstinių. Bet dažniausiai tai būna sunku padaryti.

Suminė neapibrėžtis

- Iš tikrųjų yra daug lengvesnis kelias q_e ir u_q radimui, kai įėjimo dydžių geriausi (vidurkių) įverčiai ir standartinės neapibrėžtys yra žinomos

$$\boxed{z_{ei} = E(Z_i)} \qquad \boxed{u_{zi} = \sqrt{V(Z_i)} = S(Z_i)}$$

- Jei dydžiai yra koreliuoti, jų tarpusavio neapibrėžtys taip pat turi būti žinomos

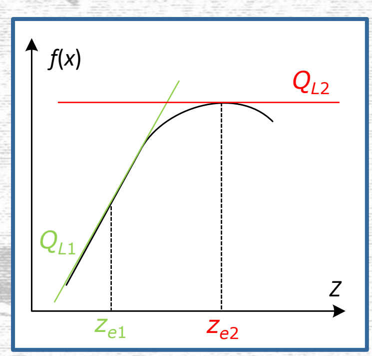
$$\boxed{u_{zi,zj} = C(Z_i, Z_j)}$$

- Suminės neapibrėžties radimas paremtas dydžio Q matavimo modelio apie geriausius įverčius (z_{e1}, ... z_{eN}) skleidimu Tayloro eilute; tai vadinama *ištiesintu modeliu*.

Suminė neapibrėžtis

- Kaip arti tikrasis matavimo modelis Q prie ištiesinto Q_L priklauso nuo modelio elgsenos įėjimo dydžio geriausio įverčio aplinkoje z_e.

- **Pavyzdys.** Matavimo modelis Q yra tiesinis įverčio z_{e1} aplinkoje, todėl Q_{L1} sutaps su Q plačiame ruože. Kalbant apie įvertį z_{e2}, gauname M'=c=0 ir u_q^2=$V(Q_{L2})$=0.



Suminė neapibrėžtis

- Apibendrinant, ištiesinto dydžio Q_L geriausias įvertis – priimamas matavimo rezultatas

$$\boxed{q_e = \mathrm{M}(z_{e1}, \ldots, z_{eN})}$$

- Standartinė suminė netiesiogiai matuojamo dydžio neapibrėžtis, kai visi įėjimo dydžiai nesusiję (nekoreliuoti)

$$\boxed{u_q = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial Z_1} u_{z1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial Z_2} u_{z2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial Z_N} u_{zN}\right)^2}}$$

Įėjimo dydžių
įtakos koeficientai

Įėjimo dydžių
standartinės neapibrėžtys

Suminė neapibrėžtis

- **Pavyzdys.** Tarkime, cilindrinės formos talpos tūrio matavimo modelis

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \to \quad V = f(r, h)}$$

čia r – talpos spindulys, h – talpos aukštis.

- Apskaičiuoti spindulio r įtakos tūrio neapibrėžčiai koeficientą, kai matavimo rezultatai: r = 0,5 m, h = 3 m.

$$\boxed{W_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)' \quad \to \quad \frac{1}{3} 2\pi r h}$$

$$\boxed{W_r = \frac{1}{3} 2\pi r h = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot 3 = \pi = 3{,}14159}$$

Suminė neapibrėžtis

- Pateiktos procedūros suminei neapibrėžčiai rasti apibendrinimas:
  - matavimo modelis tik su vienu išėjimo dydžiu;
  - matavimo modelis yra žinomas ir aiškus

$$\boxed{Q = \mathrm{M}(Z_1, \ldots, Z_N)}$$

  funkcija M(Z) nebūtinai turi būti analitinėje formoje;
  - įėjimo dydžių geriausi įverčiai, standartinės neapibrėžtys ir tarpusavio neapibrėžtys (jei dydžiai koreliuoti) turi būti žinomos ar įvertintos;
  - matavimo modelis turi būti artimas tiesiniam įėjimo dydžių geriausių įverčių aplinkoje.

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Aptarsime kitą grupę priminių įėjimo dydžių – tai tie įėjimo dydžiai, kurie matavimo proceso metu yra tiesiogiai matuojami matuokliu ar matavimo sistema. Matuojamojo dydžio Q matavimo rezultatas – rodmuo G. Matuojamasis dydis Q ir rodmuo G susieti tokia priklausomybe

$$\boxed{Q = G + C}$$

čia C – adityvioji pataisa.

- Tuomet geriausias įvertis ir standartinė neapibrėžtis

$$\boxed{q_e = g_e + c_e}$$

$$\boxed{u_q = \sqrt{u_g^2 + u_c^2}}$$

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Tarkime, kad dydis Q yra stabilus, nekintantis dydis, matuojamas tiesiogiai, kartojant matavimą daug kartų, užtikrinant pakartojamumo sąlygas, su instrumentu, kurio dreifas matavimo periodu yra paneigtinai mažas. Gausime seriją nepriklausomų matavimo rezultatų (rodmenų) $\theta=(g_1, ..., g_n)$, $n>>2$. *Standartinės neapibrėžties įvertinimo* procedūra yra vadinama *A procedūra*, kuri paremta dažnių skirstinio $f(g)$ egzistavimu, kur g yra begalinės populiacijos elementai. Nors $f(g)$ charakteristikos nėra žinomos, jų įverčiai gali būti randami remiantis atsitiktine imtimi θ.
- Geriausias įvertis ir sklaida (dispersija) bus

$$\boxed{\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i} \qquad \boxed{s(g)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(g_i-\bar{g})^2}$$

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Gautas vidurkis ir standartinis nuokrypis yra nepastumti tikrojo skirstinio parametrų – matematinės vilties μ ir standartinio nuokrypio σ – įverčiai

$$\boxed{\bar{g} = g_e \approx \mu} \qquad \boxed{s(g) \approx \sigma}$$

- Standartinis nuokrypis parodo kiek vidutiniškai kiekvienas iš matavimo rezultatų yra nukrypęs nuo vidurkio. Kadangi geriausias įvertis yra imties vidurkis, svarbu yra žinoti *vidurkio standartinį nuokrypį*: jei matavimas būtų kartojamas daug kartų ir sukaupiama m serijų po n matavimų rezultatų, galėtume suskaičiuoti m vidurkių bei jų sklaidą. Tačiau tai galima padaryti daug paprasčiau

$$\boxed{s(\bar{g}) = u_g = \frac{s(g)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(g_i-\bar{g})^2}}$$

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- **Pavyzdys.** Atlikus matavimą (10 kartų), gauti rezultatai pateikti lentelėje.
- Geriausias įvertis ir standartinė sklaidos neapibrėžtis

$$g_e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} g_i = 7{,}484\ \mathrm{mm}$$

$$u_g = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(g_i - \bar{g})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\sum_{i=1}^{10}(g_i - 7{,}484\ \mathrm{mm})^2} = 0{,}019\ \mathrm{mm}$$

Nr.	*G*, mm
1	7,489
2	7,503
3	7,433
4	7,549
5	7,526
6	7,396
7	7,543
8	7,509
9	7,504
10	7,383

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Gali būti atvejis, kai standartinė neapibrėžtis u_g bus gauta lygi nuliui (kai visi matavimo rezultatai vienodi, nėra sklaidos). Ar tokiu atveju galima teigti, kad matuojamąjį dydį Q mes žinome idealiai, t. y. tikrąją vertę? Kaip suskaičiuojant matavimo neapibrėžtį tokiu atveju? Ši situacija bus detaliau panagrinėta vėliau.
- Pateikta A standartinės neapibrėžties įvertinimo procedūra gali būti taikoma tik tuomet, kai imtis yra didelė, *n*>10. Jei imtis maža arba atliekami vienetiniai matavimai, standartinė neapibrėžtis turi būti įvertinama remiantis B procedūra.
- B procedūra apima visus neapibrėžties įvertinimo būdus, kai matavimai neatliekami arba jų kiekis per mažas, apimančius visą prieinamą informaciją apie matavimą, matavimo priemonę, patirtį ir kt.

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- **1 būdas.** Jei yra ankstesnio matavimo, atlikto ta pačia matavimo priemone, panašaus dydžio, panašiomis sąlygomis, rezultatai, kai imtis buvo didelė, įvertinta tos imties sklaida *s*'(*g*) panaudojama standartinės neapibrėžties skaičiavimui

$$\boxed{u_g = \frac{s'(g)}{\sqrt{n}}, \text{ galioja ir kai } n = 1}$$

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- **2 būdas.** Šis atvejis taikomas, kai nėra informacijos apie ankstesnius matavimus.
  - **2a**. Priimama, kad verčių skirstinys yra stačiakampis, išsidėstęs apie gautą imties vidurkį, o skirstinio intervalo plotis nustatomas remiantis bet kokia turima informacija apie matuojamąjį dydį ir priemonės charakteristikas.
  - **2b**. Jei jokios informacijos nėra, tuomet priimamos tokios stačiakampio skirstinio charakteristikos: intervalo plotis apribotas minimalios ir maksimalios stebėtos vertės, g_{min} ir g_{max}, o vidurkis (geriausias įvertis) – šio intervalo vidurys.

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- **Pavyzdys.** Galinio ilgio matas ilgio l buvo kalibruojamas mechaniniu komparatoriumi. Etaloninio ilgio mato ilgis l_s. Skirtumas $d=l-l_s$ buvo matuojamas n=5 kartus.
- Rezultatai: 215 nm, 212 nm, 211 nm, 213 nm, 213 nm.
- Pagal šiuos matavimo rezultatus gauta:
  - geriausias įvertis g_e=212,8 nm;
  - standartinis nuokrypis s=1,48 nm;
  - standartinė neapibrėžtis

$$\boxed{u_g = \frac{s(g)}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}48\,\mathrm{nm}}{\sqrt{5}} = 0{,}66\,\mathrm{nm}}$$

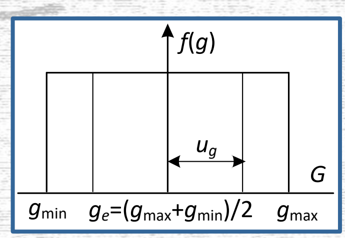
Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Anksčiau šiuo komparatoriumi buvo atliktas kito galinio ilgio mato kalibravimas, matuojant n'=25 kartus. Iš tos imties suskaičiuotas standartinis nuokrypis buvo s'=1,66 nm. Įvertinant tai, gauname:
  - geriausias įvertis g_e=212,8 nm;
  - standartinis nuokrypis s'=1,66 nm;
  - standartinė neapibrėžtis

$$\boxed{u_g = \frac{s'(g)}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}66\,\mathrm{nm}}{\sqrt{5}} = 0{,}74\,\mathrm{nm}}$$

Tiesiogiai matuojami pirminiai dydžiai

- Jei ankstesnio matavimo šiuo komparatoriumi rezultatai nėra prieinami, pasinaudosime antruoju standartinės neapibrėžties įvertinimo būdu.
- Priimame, kad skirstinys $f(g)$ yra stačiakampis. Tuomet gauname:



  - geriausias įvertis

$$g_e = \frac{g_{\min} + g_{\max}}{2} = \frac{211\,\mathrm{nm} + 215\,\mathrm{nm}}{2} = 213\,\mathrm{nm}$$

  - standartinis nuokrypis, lygus standartinei neapibrėžčiai

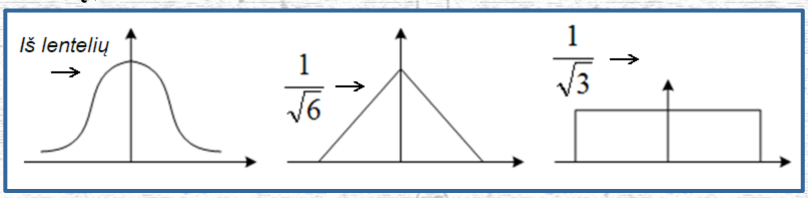
$$u_g = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{\sqrt{12}} = \frac{215\,\mathrm{nm} - 211\,\mathrm{nm}}{\sqrt{12}} = 1{,}2\,\mathrm{nm}$$

Neapibrėžties vertinimo B procedūra

- Įėjimo dydžio įverčio, kuris nebuvo gautas iš pakartotinių matavimų, standartinė neapibrėžtis yra įvertinama remiantis visa susijusia informacija apie galimą dydžio kitimą. Tai apima informaciją, susijusią su:
  - ankstesnių matavimų duomenis;
  - patirtį ar bendras žinias apie su atliekamu matavimu susijusias pamatines medžiagas ar prietaisus, jų elgseną, savybes ir charakteristikas;
  - gamintojo techninę dokumentaciją;
  - duomenis, pateikiamus kalibravimo ar kitokiuose sertifikatuose;
  - duomenis, paimtus iš specializuotų žinynų, mokslinių straipsnių ar kitų literatūros šaltinių.

Neapibrėžties vertinimo B procedūra

- Priklausomai nuo skirstinio, koeficientas, kurio dėka randama standartinė neapibrėžtis pagal duotą nuokrypio vertę, skiriasi.



- Jei dydžio įvertis imamas iš žinynų, sertifikatų, gamintojo dokumentacijos ir jo neapibrėžtis nurodyta su koeficientu, tuomet standartinė neapibrėžtis gaunama padalinant nurodytą neapibrėžtį iš to koeficiento.
- Jei įvertinant B tipo neapibrėžtį nežinoma kaip pasiskirstęs dydis, priimama, kad skirstinys yra stačiakampis.

Neapibrėžties vertinimo B procedūra

- **Pavyzdžiai**.
  - Kalibravimo sertifikatas nurodo, kad 1 kg plieninis svarstis sveria 1000,000325 g, o neapibrėžtis yra 240 μg esant trims standartiniams nuokrypiams (išplėsties koeficientas k=3). Tuomet standartinė neapibrėžtis $u(x_i)$=240/3=80 μg.
  - Tarkime, turime 100 Ω rezistorių, kurio paklaida ± 5%. Žinodami, kad paklaida pasiskirsčiusi pagal stačiakampį skirstinį, randame standartinę neapibrėžtį: u_R=5/√3.

Skyros įtaka

- Jei adityvioji pataisa C yra lygi nuliui (su paneigtinai maža neapibrėžtimi), tuomet matuojamojo dydžio Q matavimo rezultatas lygus matavimo priemonės rodmeniui G

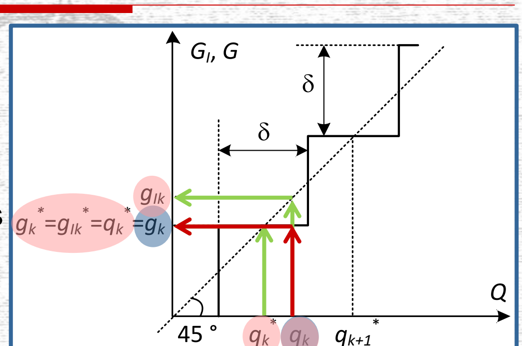
$$\boxed{Q = G + C \quad \rightarrow \quad Q = G}$$

- Tarkime, kad tomis pačiomis sąlygomis atlikome matavimų seriją. Visi rodmenys yra vienodi, kadangi matavimo priemonei nepakanka skyros atvaizduoti įtakojančių veiksnių atsitiktinį poveikį. Esant tokiai situacijai, suskaičiuota standartinė neapibrėžtis $u_q = u_g = 0$.

- Vadinasi, dydis Q yra idealiai žinomas? Tokia išvada akivaizdžiai neteisinga!

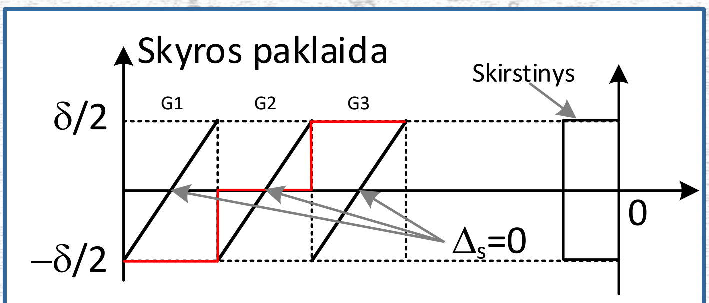
Skyros įtaka

- Skyros įtaka parodyta grafike. Idealios matavimo priemonės rodmenys $G_I = Q$, atitinka 45 ° tiesę ir nėra įtakojami skyros. Realios matavimo priemonės rodmenų charakteristika yra laiptų formos.



- Dydžiui Q įgijus vertę $q_k^* = k\delta$, čia k – sveikas skaičius, δ žingsnio dydis, abiejų matavimo priemonių rodmenys sutaps $g_k^* = g_{Ik}^* = q_k^*$. Jei Q įgis vertę q_k, $|q_k - q_k^*| < \delta/2$, idealios matavimo priemonės rodmuo bus $g_{Ik} = q_k$, tuo tarpu reali indikuos tą patį rodmenį kaip ir anksčiau $q_k = g_k$.

Skyros įtaka



- Skyros skirstinys yra stačiakampis ir matavimo rezultato neįtakoja. Neapibrėžtis u_r dėl sklaidos yra svarbi matavimo neapibrėžties dedamoji.

Skyros įtaka

- Matavimo priemonės skyra – tai mažiausias matuojamojo dydžio pokytis, kurį patikimai gali atvaizduoti matavimo priemonė. Skyra – tai jauniausios skaitmeninio indikatoriaus pozicijos vertė arba analoginio indikatoriaus padalos vertė.
- Paklaida dėl skyros yra atsitiktinio charakterio, kintanti pagal stačiakampį dėsnį (t.y. vertės iš paklaidos intervalo yra vienodai tikėtinos).
- Jei matavimo priemonės skyra δ, tuomet paklaida dėl skyros ir standartinė neapibrėžtis bus atitinkamai

$$\boxed{\Delta_s = \pm\frac{\delta}{2}} \qquad \boxed{u_r = \frac{\delta/2}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_s}{\sqrt{3}}}$$

- Skyros neapibrėžtis įvertinama taip:

(čia u_g – imties sklaidos neapibrėžtis)

$$\boxed{u_q = \sqrt{u_g^2 + u_r^2}}$$

Skyros įtaka

- **Pavyzdys.** Dydis Q buvo matuojamas keletą kartų, naudojant dvi matavimo priemones: pirmosios skyra δ_1=0,001 (dimensija pavyzdžio rėmuose nesvarbi), antrosios – δ_2=0,1.

	δ_1=0,001	δ_2=0,1
1	7,489	7,5
2	7,503	7,5
3	7,433	7,4
4	7,549	7,5
5	7,526	7,5
6	7,396	7,4
7	7,543	7,5
8	7,509	7,5
9	7,504	7,5
10	7,383	7,4

$$q_{e1} = \bar{g}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_{1i} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} g_{1i} = 7{,}4835$$

$$q_{e2} = \bar{g}_2 = 7{,}4700$$

$$u_{g1} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(g_{1i} - \bar{g}_1)^2} = 0{,}0187$$

$$u_{g2} = 0{,}0153$$

Skyros įtaka

$$u_{r1} = \frac{\delta_1/2}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}001/2}{1{,}732} = 0{,}0003 \qquad u_{r2} = \frac{\delta_2/2}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}1/2}{1{,}732} = 0{,}0289$$

$$u_{q1} = \sqrt{u_{g1}^2 + u_{r1}^2} = \sqrt{0{,}0187^2 + 0{,}0003^2} = 0{,}0187$$

$$u_{q2} = \sqrt{u_{g2}^2 + u_{r2}^2} = \sqrt{0{,}0153^2 + 0{,}0289^2} = 0{,}0327$$

- Grįžkime prie atvejo, kai visi matavimo rezultatai yra vienodi ir dėl to u_g=0. Tarkime, kad taip įvyko matuojant antrąja priemone ir visi rezultatai lygus 7,5. Tuomet gausime

$$q_{e2} = \bar{g}_2 = 7{,}5 \qquad u_{g2} = 0 \qquad u_{q2} = \sqrt{u_{g2}^2 + u_{r2}^2} = \sqrt{0^2 + 0{,}0289^2} = 0{,}0289$$

Tiesioginių matavimų suminė neapibrėžtis

- Naudojant kalibruotą matavimo priemonę kaip galutinis matavimo rezultatas yra priimamas *ištaisytasis rodmuo*.
- Suminė standartinė neapibrėžtis tiesioginiuose matavimuose randama įvertinant matavimų sklaidos u_{sk} bei kalibravimo U_c neapibrėžtis ir matavimo priemonės skyros neapibrėžtį u_r. Apibendrinta skaičiavimo formulė

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{U_c}{k_c}\right)^2 + u_{sk}^2 + u_r^2}$$

Daugkartiniai matavimai

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{U_c}{k_c}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\Delta_r^2}{3}}$$

Pavienis matavimas

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{U_c}{k_c}\right)^2 + \frac{\Delta^2}{3}}$$

čia σ – matavimo rezultatų standartinis nuokrypis; Δ – matavimo priemonės paklaida; Δ_r – paklaida dėl skyros.

Išplėstinė neapibrėžtis

- Matuojamojo dydžio Q išplėstinė neapibrėžtis apibrėžiama taip

$$\boxed{U_{pq} = k_p u_q}$$

čia u_q – standartinė neapibrėžtis, k_p – išplėsties (aprėpties) koeficientas.

- Aprėpties tikimybė p neturi būti interpretuojama kaip dydžio Q matavimo rezultatų proporcingo kiekio patekimas į intervalą (q_e–U_{kp}, q_e+U_{kp}). Šią tikimybę reikia interpretuoti kaip (pasi-) tikėjimo laipsnį, kad tikroji dydžio Q vertė yra intervale.
- k_p priklauso nuo dydžio skirstinio ir užsiduotos tikimybės p.
- Aprėpties koeficientas stačiakampio skirstinio atveju

$$\boxed{k_p = \sqrt{3}p} \qquad \boxed{k_p = \sqrt{3},\ priimant\ p = 1}$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- Aprėpties koeficientas Gauso skirstiniui, kai matavimų skaičius yra didelis (n>50), parenkamas iš šio skirstinio lentelių.
- **Pavyzdys.** 10 Ω etaloninio rezistoriaus dokumentacijoje teigiama: R=10,000742 Ω ± 129 μΩ; skirstinys yra Gauso, o p=0,99. Kokia yra standartinė neapibrėžtis?
- Iš lentelės randame, kad $k_{0,99}$=2,576. Tuomet apskaičiuojame standartinę neapibrėžtį

$$u_R = \frac{U_{0,99R}}{k_{0,99}} = \frac{129\ \mu\Omega}{2{,}576} = 50\ \mu\Omega$$

p, %	k_p
50	0,675
66,67	0,968
68,27	1
75	1,15
85	1,439
90	1,645
95	1,96
95,45	2
98	1,327
99	2,576
99,73	3

Stjudento skirstinio lentelė

- Kai matavimų skaičius yra sąlyginai mažas, matuojamojo dydžio skirstinys artėja prie Gauso skirstinio, bet yra tik apytikslė jo aproksimacija. Todėl aprėpties koeficientas yra parenkamas pagal Stjudento skirstinį (žr. lentelę) →
- Stjudento skirstinio parametras, rodantis artėjimą prie Gauso skirstinio, yra *laisvės laipsnių skaičius* ν. Jis tiesioginiams matavimams yra lygus: ν=n-1.

ν / p	0,9	0,95	0,99
1	6,314	12,706	64
2	2,920	4,303	10
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,263	3,250
10	1,812	2,228	3,169
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
20	1,725	2,086	2,845
40	1,684	2,021	2,704
80	1,671	2,000	2,660
120	1,658	1,980	2,617
∞	1,645	1,960	2,576

Normalusis (Gauso) skirstinys

Išplėstinė neapibrėžtis

- **Pavyzdys.** Buvo atlikta n=10 rezistoriaus varžos matavimų. Rezultatai: vidurkis 10,48 Ω; standartinis nuokrypis 1,36 Ω; standartinė neapibrėžtis 0,43 Ω. Iš lentelės randame: p=0,9, $t_{0,9,9}$=1,83. Išplėstinė neapibrėžtis

$$\boxed{U_{pq} = t_{p,n-1}u_q = 1{,}83 \cdot 0{,}43\,\Omega = 0{,}79\,\Omega}$$

$$\boxed{R = 10{,}48\,\Omega \pm 0{,}79\,\Omega, \text{ kai } p = 0{,}9}$$

- Tarkime, kad buvo atlikta n=200 matavimų. Tuomet standartinė neapibrėžtis bus 0,10 Ω. Galime laikyti, kad skirstinys normalusis, todėl, kai p=0,9, $k_{0,9}$=1,645. Gauname

$$\boxed{U_{pq} = t_{p,n-1}u_q = 1{,}645 \cdot 0{,}10\,\Omega = 0{,}16\,\Omega}$$

$$\boxed{R = 10{,}48\,\Omega \pm 0{,}16\,\Omega, \text{ kai } p = 0{,}9}$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- Netiesioginiuose matavimuose žinant ar padarius prielaidą, kad Q skirstinys yra normalusis, išplėsties koeficientas k_p randamas taip pat pagal Stjudento skirstinį, remiantis efektyviu laisvės laipsnių skaičiumi.

- Efektyvus laisvės laipsnių skaičius skaičiuojamas taip

$$\boxed{\nu_{ef} = \frac{u_q^4}{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(c_i u_{zi})^4}{\nu_i}\right]}}$$

- Tačiau kaip nustatyti laisvės laipsnių skaičių dydžio, kuris nebuvo matuotas, o, tarkime, paimtas iš žinyno?

Išplėstinė neapibrėžtis

- Įtrauktų dydžių, kurie nebuvo matuojami matavimo proceso metu, ir kurių neapibrėžtis buvo įvertinta pagal B procedūrą (visi kiti pirminių dydžių neapibrėžties įvertinimo būdai, išskyrus A procedūrą) laisvės laipsnių skaičius turi būti įvertintas remiantis tokia taisykle

$$\nu = \frac{1}{2(1-R)^2}$$

čia R – apibrėžiamas kaip neapibrėžties u_z patikimumas.

- **1 pavyzdys.** Nusprendus, kad informacija apie dydį yra patikima 75%, laisvės laipsnių skaičius bus

$$\nu = \frac{1}{2(1-R)^2} = \frac{1}{2(1-0{,}75)^2} = 8$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- **2 pavyzdys.** Tarkime, kad dydis Q matuojamas pagal tokį matavimo modelį

$$Q = X + Y$$

- Žinoma, kad dydžio X skirstinys yra stačiakampis, kurio maksimali riba (paklaida) e_x=2. Dydis Y matuotas tiesiogiai n=9 kartų, gautas imties standartinis nuokrypis $s_y=\sqrt{6}$.

$$u_x = \frac{e_x}{\sqrt{3}} \qquad u_y = \frac{s_y}{\sqrt{n}}$$

$$u_q = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{e_x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- Jeigu priimsime, kad žinios apie dydį *X* yra 75% patikimos, laisvės laipsnių skaičius galime rasti taip

$$\nu_x = \frac{1}{2(1-R_x)^2} = \frac{1}{2(1-0{,}75)^2} = 8$$

$$\nu_y = n-1 = 9-1 = 8$$

- Tuomet efektyvus laisvės laipsnių skaičius bus

$$\nu_{ef} = \frac{u_q^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{(W_i u_i)^4}{\nu_i}} = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{e_x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)^4}{\frac{u_x^4}{\nu_x} + \frac{u_y^4}{\nu_y}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{\frac{\left(2/\sqrt{3}\right)^4}{8} + \frac{\left(\sqrt{6}/\sqrt{9}\right)^4}{8}} = 14{,}4$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- Taigi, ν_{ef}, apvalinant mažesnio sveiko skaičiaus link, gauname

$$\nu_{ef} = 14{,}4 \quad \to \quad 14$$

- Pagal įvertintą efektyvų laisvės laipsnių skaičių galime nustatyti aprėpties koeficientą iš Stjudento skirstinio lentelių.

$$\nu_{ef} = 14 \quad \to \quad t_{0,95;14} = 2{,}14479$$

- Tad išplėstinė neapibrėžtis bus

$$U = t_{0,95;14} \cdot u_q = 2{,}14479 \cdot \sqrt{2} = 3{,}033 \quad \to \quad U = 3{,}0;\ \text{kai}\ p = 0{,}95$$

Išplėstinė neapibrėžtis

- Išplėsties koeficiento parinkimo gairės:
  - Tiesioginiai matavimai – Gauso skirstinys; išplėsties koeficientas renkamas iš Stjudento skirstinio (aproksimuojančio Gauso skirstinį) lentelių; laisvės laipsnių skaičių lemia matavimų skaičius.
  - Netiesioginiai matavimai – suminis matuojamojo dydžio skirstinys priklauso nuo įėjimo dydžių skirstinių. Jei įėjimo dydžių daug, jei jų skirstiniai yra Gauso, pagrįstai daroma prielaida, kad suminis skirstinys yra Gauso. Išplėsties koeficientas renkamas iš Stjudento skirstinio (aproksimuojančio Gauso skirstinį) lentelių; laisvės laipsnių skaičius apskaičiuojamas pagal efektyvių laisvės laipsnių skaičiaus radimo formulę.

Išplėstinė neapibrėžtis

- Išplėsties koeficiento parinkimo gairės (*tęsinys*):
  - Informacija apie paklaidas imama iš dokumentacijos, literatūros, žinynų ir kt. – stačiakampis skirstinys (jei nenurodyta kitaip), skirstinio koeficientas k paklaidos konvertavimui į standartinę neapibrėžtį lygus $\sqrt{3}$.
  - Informacija iš kalibravimo sertifikatų – Gauso skirstinys, koeficientas išplėstinės kalibravimo neapibrėžties konvertavimui į standartinę neapibrėžtį k (jei nėra nurodytas kalibravimo sertifikate) priklauso nuo tikimybės: kai p=0,95 → k=2; kai p=0,9973 → k=3.
  - Jei apie skirstinį nėra jokios informacijos – priimamas stačiakampis skirstinys, t.y. $k=\sqrt{3}$.