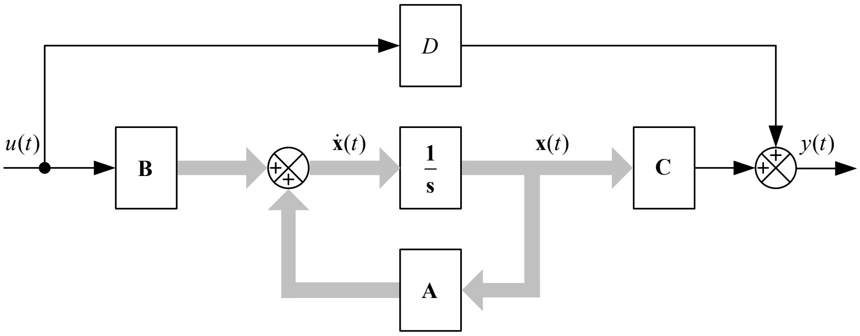
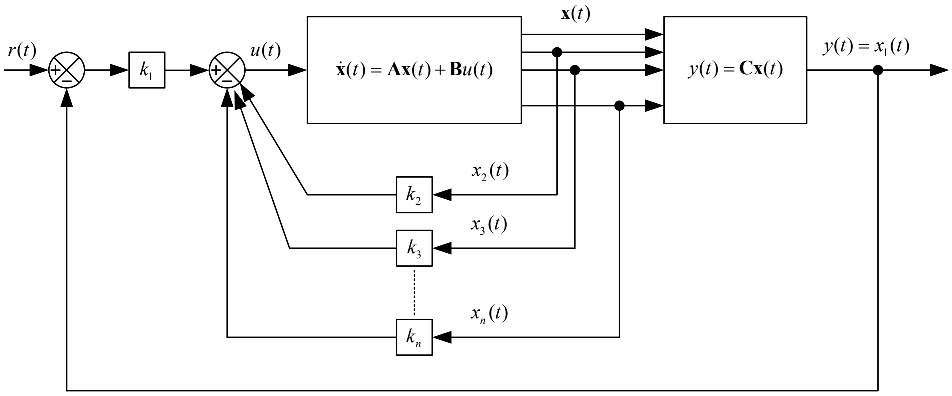


รูปที่ 4-1 บล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมทั่วไปในรูปสมการปริภูมิสเตต



รูปที่ 4-2 ระบบควบคุมที่มีการป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยวิธีการวางโพลในรูปสมการปริภูมิสเตต

สมการที่ (4-2a) และสมการที่ (4-2b) เป็นสมการของระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่มี 1 อินพุต 1 เอาต์พุต สังเกตุได้จากสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ และสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ จะใช้อักษรตัวเล็ก เพื่อแสดงถึงปริมาณสเกล่าร์ (ไม่ใช่ปริมาณเวกเตอร์ที่เป็นตัวหนา) ซึ่งจะสอดคล้องกับรูปที่ 4-1 กล่าวคือบล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมจะอยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตต ที่ใช้เส้นบางสำหรับสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ และสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ เพื่อแสดงถึงปริมาณสเกล่าร์ และจะใช้เส้นทึบหนาเพื่อแสดงถึงสัญญาณที่เป็นเวกเตอร์ โดยในที่นี้กำหนดให้เวกเตอร์ป้อนไปข้างหน้า (Feed forward vector) **D** เป็นปริมาณสเกล่าร์ (นั่นคือ $\mathbf{D} = D$) ดังนั้นเส้นที่ใช้ในรูปที่ 4-1 จึงเป็นเส้นบางปกติ

ถ้ากำหนดให้สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ ในที่นี้จะเรียกว่า “กฎการควบคุม” (Control law) คือ

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t) \tag{4-3}$$

แทนค่าสมการที่ (4-3) ลงในสมการที่ (4-2a) ทำให้สมการที่ (4-2a) กลายเป็นผลรวมที่ได้จากค่าพารามิเตอร์ของระบบกับค่าสัมประสิทธิ์ k_i ใดๆ ดังแสดงในสมการที่ (4-4) ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\left[-\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)\right] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \qquad (4\text{-}4a)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (4\text{-}4b)$$

หมายเหตุ ในที่นี้การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับจะไม่พิจาณาสัญญาณป้อนไปข้างหน้า (นั่นคือ $D = 0$)

จากนั้นทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ตำแหน่งโพลที่ต้องการกับตำแหน่งโพลที่ได้จาก $\left|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\right| = 0$ ก็จะสามารถหาค่าอัตราขยาย k_i สำหรับทุกตัวแปรสเตต เพื่อให้ระบบมีผลการตอบสนองด้านเอาต์พุต $y(t)$ ตามที่ต้องการ โดยรูปแบบทั่วไปของระบบควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4-2

4.2.2 ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยวิธีการวางโพล

ขั้นตอนที่ 1 สมการของระบบที่ต้องการควบคุมจะต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ (Controllable canonical form) ดังนั้นเมตริกซ์ระบบ **A** เวกเตอร์อินพุต **B** และเวกเตอร์เอาต์พุต **C** ในสมการที่ (4-1) จะต้องมีองค์ประกอบ (Elements) ดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}5)$$

ดังนั้นสมการคุณลักษณะของระบบจะมีรูปสมการเช่นเดียวกับสมการที่ (4-1) คือ

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

ขั้นตอนที่ 2 ทำการป้อนกลับสัญญาณตัวแปรสเตตแต่ละตัวที่ต้องการควบคุมกลับไปยังอินพุตของระบบผ่านอัตราขยาย k_i ดังแสดงในสมการที่ (4-7)

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \qquad \text{โดยที่} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}7)$$

แทนค่าสมการ (4-7) ลงในสมการ (4-2a) ทำให้สมการที่ (4-2a) กลายเป็นผลรวมที่ได้จากค่าพารามิเตอร์ระบบกับค่าสัมประสิทธิ์ k_i ใดๆ นั่นคือเมตริกซ์ระบบ **A** จะเปลี่ยนรูปไปเป็นเมตริกซ์ $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ ดังนี้

$$\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0+k_1) & -(a_1+k_2) & -(a_2+k_3) & \cdots & -(a_{n-1}+k_n) \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาสมการคุณลักษณะสำหรับระบบควบคุมวงรอบปิดที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 นั่นคือ

$$\begin{aligned} \left|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK})\right| &= s^n+(a_{n-1}+k_n)s^{n-1}+(a_{n-2}+k_{n-1})s^{n-2}+\ldots+(a_1+k_2)s+(a_0+k_1) \\ &=0 \end{aligned} \tag{4-9}$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> กำหนดตำแหน่งโพลที่ต้องการของระบบควบคุมวงรอบปิด เพื่อให้ได้ผลการตอบสนองของเอาต์พุต $y(t)$ ตามที่ต้องการ ดังนั้นกำหนดให้สมการคุณลักษณะของระบบควบคุมวงรอบปิดที่ต้องการคือ

$$s^n+d_{n-1}s^{n-1}+d_{n-2}s^{n-2}+\ldots+d_2s^2+d_1s+d_0=0 \tag{4-10}$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> เทียบค่าสัมประสิทธิ์สมการคุณลักษณะที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 และขั้นตอนที่ 4 จากนั้นแก้สมการเพื่อหาค่าอัตราขยาย k_i กล่าวคือทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการที่ (4-9) และสมการที่ (4-10) นั่นเอง

$$d_i=a_i+k_{i+1} \quad \text{โดยที่} \quad i=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{4-11}$$

ดังนั้นสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ k_i เพื่อระบุในเวกเตอร์ $\mathbf{K}$ ได้ตามสมการที่ (4-12) ดังนี้

$$k_{i+1}=d_i-a_i \tag{4-12}$$

ตัวอย่างที่ 4-1

จากฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้ $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$ จงออกแบบการป้อนกลับตัวแปรสเตต (State-feedback) ด้วยวิธีการวางโพล (Pole placement) โดยกำหนดให้ระบบควบคุมวงรอบปิดมีผลการตอบสนองเอาต์พุต $y(t)$ มีเปอร์เซ็นต์การชูตเกิน (Percent overshoot) อยู่ที่ 9.5% และมีช่วงเวลาการเข้าสู่สภาวะคงตัว (Settling time) ที่ 0.74 วินาที

<u>วิธีทำ</u>

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> สมการของระบบที่ต้องการควบคุมจะต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ (Controllable canonical form) นั่นคือจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}=\frac{20s+100}{s^3+5s^2+4s}$$

นำไปเขียนเป็นสมการปริภูมิสเตตแบบรูปบัญญัติเฟสควบคุม (เนื้อหาในบทที่ 3) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)&=\begin{bmatrix}100&20&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4-13}$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> ป้อนกลับสัญญาณแต่ละตัวแปรสเตตที่ต้องการควบคุมกลับไปยังอินพุต $u(t)$ ของระบบผ่านอัตราขยาย k_i ดังแสดงในสมการ (4-7) ดังนั้นสามารถกำหนด “กฎการควบคุม” (Control law) คือ

$$u(t)=-\mathbf{K}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}r(t)=\begin{bmatrix}-k_1&-k_2&-k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r(t)\tag{4-14}$$

แทนสมการที่ (4-14) ลงในสมการที่ (4-13) จะได้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_1&-(4+k_2)&-(5+k_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)&=\begin{bmatrix}100&20&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4-14}$$

จากสมการที่ (4-14) จะได้

$$\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_1&-(4+k_2)&-(5+k_3)\end{bmatrix}\tag{4-15}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาสมการคุณลักษณะสำหรับระบบควบคุมวงรอบปิดที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ดังนี้

$$\left|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK})\right|=s^3+(5+k_3)s^2+(4+k_2)s+k_1=0\tag{4-16}$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> กำหนดตำแหน่งโพลที่ต้องการของระบบควบคุมวงรอบปิด เพื่อให้ได้ผลการตอบสนองของสัญญาณเอาต์พุตตามที่ต้องการ (กำหนดสมการคุณลักษณะของระบบควบคุมป้อนกลับตามที่ต้องการ) ซึ่งจากโจทย์กำหนดให้ระบบควบคุมวงรอบปิดมีเปอร์เซ็นต์การชูตเกิน (Overshoot) อยู่ที่ 9.5% และมีช่วงเวลาเข้าสู่สภาวะคงตัว (Settling time) อยู่ที่ 0.74 วินาที ดังนั้นจากความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งโพล และผลการตอบสนองระบบในโดเมนเวลาจะได้ว่า $\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$ ดังนั้นจะได้ $\zeta = 0.6$ และจากความสัมพันธ์ $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ ดังนั้น $\omega_n = \dfrac{4}{\zeta t_s} = \dfrac{4}{0.6 \times 0.74} = 9$ ซึ่งจะได้สมการคุณลักษณะอันดับสองของระบบควบคุมวงรอบปิด และรากสมการคุณลักษณะ (ตำแหน่งของโพลวงรอบปิด) ที่ต้องการดังนี้คือ

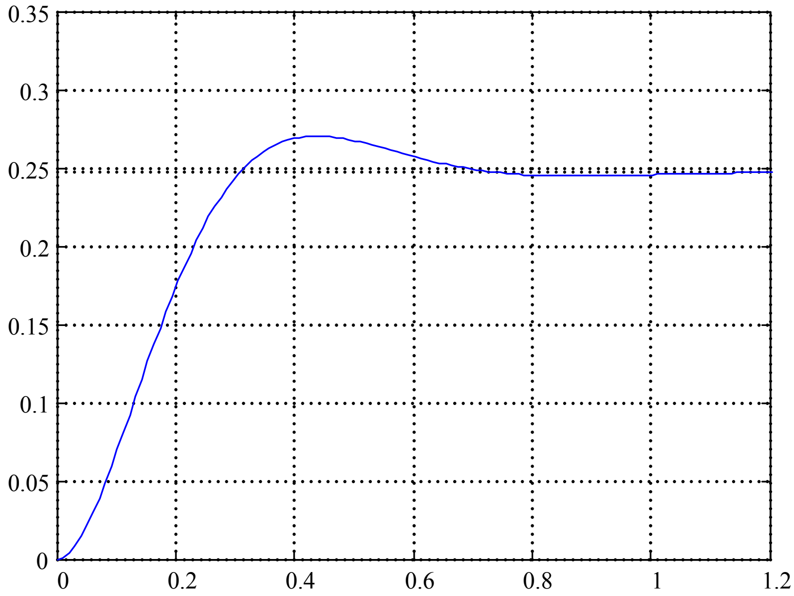
$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= s^2 + (2 \times 0.6 \times 9)s + (9)^2 \\ &= s^2 + 10.8s + 81 \\ &= (s + 5.4 + j7.2)(s + 5.4 - j7.2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4-17}$$

จากสมการที่ (4-17) จะได้ตำแหน่งโพลวงรอบปิดที่ต้องการจำนวน 2 โพล อย่างไรก็ดีระบบที่ต้องการควบคุมมีอันดับเท่ากับ 3 (3^{rd} order system) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดตำแหน่งโพลที่ต้องการเพิ่มขึ้นอีก 1 โพล ในที่นี้เราทำการกำหนดตำแหน่งโพลที่ 3 ไว้ที่ –5 ทั้งนี้เนื่องจากเราต้องการนำโพลตัวสุดท้ายที่กำหนดนี้ไปกำจัดซีโร่ของระบบ (ซีโร่ของระบบที่ต้องการควบคุมอยู่ที่ตำแหน่ง –5) ดังนั้นสรุปได้ว่าระบบควบคุมวงรอบปิดมีโพลทั้ง 3 โพลอยู่ที่ตำแหน่ง $-5.4 + j7.2$, $-5.4 - j7.2$ และ –5 ตามลำดับ ซึ่งจะสามารถหาสมการคุณลักษณะของระบบควบคุมวงรอบปิดได้คือ

$$(s + 5.4 + j7.2)(s + 5.4 - j7.2)(s + 5.1) = s^3 + 15.9s^2 + 136.08s + 413.1 = 0 \tag{4-18}$$

เทียบค่าสัมประสิทธิ์สมการที่ (4-16) กับสมการที่ (4-18) จะได้ $k_1 = 413.1$, $k_2 = 132.08$ และ $k_3 = 10.9$ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าลงในสมการที่ (4-14) จะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -413.1 & -136.08 & -15.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-19}$$



รูปที่ 4-3 ผลการตอบสนองที่ต้องการของระบบควบคุมวงปิดที่ได้ออกแบบไว้ในตัวอย่างที่ 4-1

เมื่อนำสมการที่ (4-19) ไปหาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังสมการที่ (4-20) ซึ่งเป็นสมการฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีการป้อนกลับตัวแปรสเตตผ่านอัตราขยาย k_i แล้วนั่นเอง รูปที่ 4-3 แสดงผลการตอบสนองที่ต้องการของระบบควบคุมวงรอบปิดที่ได้ออกแบบไว้

$$T(s) = \frac{20(s+5)}{s^3 + 15.8s^2 + 135s + 405} = \frac{20}{s^2 + 10.8s + 81} \tag{4-20}$$

จากตัวอย่างที่ 4-1 พบว่าเราสามารถหาการวางตำแหน่งของโพลระบบควบคุมวงรอบปิดได้ตามที่ต้องการ (แม้ว่าระบบควบคุมวงเปิดจะมีอันดับมากกว่า 2 ก็ตาม) ซึ่งการออกแบบด้วยวิธีดังกล่าวนี้จำเป็นต้องเขียนสมการระบบที่ต้องการควบคุมให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ก่อนเท่านั้น อย่างไรก็ดีสมการของระบบทางกายภาพที่ต้องการควบคุมอาจจะไม่ได้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ หรืออาจเรียกไม่มีคุณสมบัติ *ความสามารถการควบคุมได้* (Controllability) ดังนั้นก่อนการประยุกต์ใช้หลักการออกแบบการควบคุมป้อนกลับด้วยวิธีการวางโพลจึงมีความจำเป็นต้อง <u>ตรวจสอบเบื้องต้นก่อน</u> ว่าระบบควบคุมดังกล่าวมีคุณสมบัติ *ความสามารถการควบคุมได้* หรือไม่

4.3 ความสามารถการควบคุมได้ (Controllability)

ความเข้าใจถึงความสามารถการควบคุมได้ของระบบควบคุมนั้น จะอธิบายได้โดยง่ายด้วยการพิจารณาบล็อคไดอะแกรมดังรูปที่ (4-4) ซึ่งเห็นว่าสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ จะมีอิทธิพลโดยตรงต่อการเปลี่ยนแปลงตัวแปรสเตต $x_1(t)$, $x_2(t)$ และ $x_3(t)$ กล่าวคือสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ มีความสามารถในการควบคุมพฤติกรรมของตัวแปรสเตต $x_1(t)$, $x_2(t)$ และ $x_3(t)$ นั่นเอง เราเรียกระบบในรูปที่ (4-4a) นี้ว่า *ระบบที่มีความสามารถการควบคุมได้* (Controllability system) ในทางกลับกัน พิจารณารูปที่ (4-4b) พบว่าสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ จะไม่มีอิทธิพลต่อตัวแปรสเตต $x_1(t)$ เราเรียกระบบในรูปที่ (4-4b) นี้ว่า *ระบบที่ไม่มีความสามารถการควบคุมได้* (Uncontrollability system)

<u>สรุป</u> ระบบที่ *มีความสามารถการควบคุมได้* คือระบบที่สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ มีอิทธิพลต่อการควบคุมพฤติกรรมตัวแปรสเตต $x_i(t)$ ทุกตัวของระบบนั่นเอง

การตรวจสอบว่าระบบควบคุมมี *ความสามารถการควบคุมได้* หรือไม่นั้น สามารถทำได้ 2 วิธีหลักๆ คือ วิธีการวิเคราะห์สมการระบบ และวิธีการคำนวณหาเมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้

4.3.1 วิธีการวิเคราะห์สมการระบบ

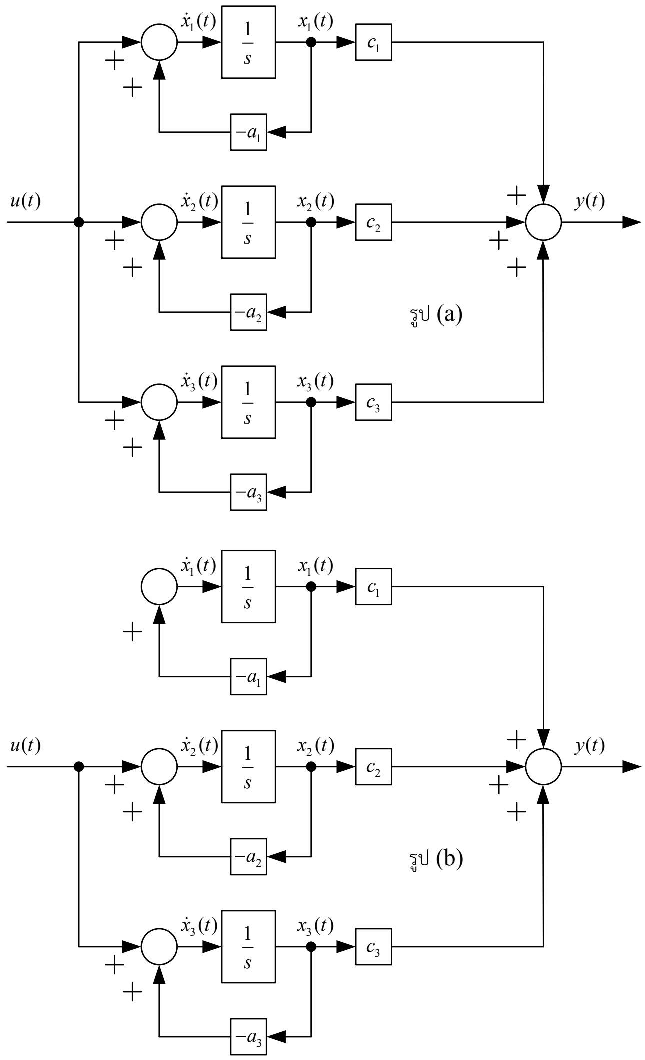
วิธีนี้จำเป็นต้องการแปลงสมการปริภูมิสเตตของระบบให้อยู่ในรูปบัญญัติเฟสแนวทแยงมุม (Diagonal canonical form) ดังแสดงในรูปที่ (4-4a) ถ้านำบล็อคไดอะแกรมระบบมาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตจะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{4-21}$$

แยกกระจายสมการ (4-21) ออกมาจะได้

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t) + u(t) \tag{4-21a}$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + u(t) \tag{4-21b}$$
$$\dot{x}_3(t) = -a_3 x_3(t) + u(t) \tag{4-21c}$$

พบว่าตัวแปรสเตตแต่ละตัวจะไม่ส่งผลกระทบถึงกัน (Decoupling) กล่าวคือสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมของตัวแปรสเตต $x_1(t)$, $x_2(t)$ และ $x_3(t)$ ทุกตัวในลักษณะแยกโดดออกจากกันอย่างชัดเจนนั่นเอง สรุปได้ว่าระบบ **<u>มี</u>** คุณสมบัติ *ความสามารถการควบคุมได้*



รูปที่ 4-4 บล็อคไดอะแกรมแสดงนิยาม

(a) *ระบบควบคุมที่มีความสามารถการควบคุมได้* (Controllability system)

(b) *ระบบควบคุมที่ไม่มีความสามารถการควบคุมได้* (Uncontrollability system)

พิจารณาบล็อคไดอะแกรมในรูปที่ (4-4b) ให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{4-22}$$

เมื่อทำการแยกกระจายสมการ (4-22) ออกมาจะได้

$$\dot{x}_1(t) = -a_4 x_1(t) \qquad (4\text{-}22a)$$
$$\dot{x}_2(t) = \qquad -a_5 x_2(t) \qquad +u(t) \qquad (4\text{-}22b)$$
$$\dot{x}_3(t) = \qquad\qquad -a_6 x_3(t) + u(t) \qquad (4\text{-}22c)$$

พิจารณาสมการ (4-22) พบว่าสัญญาณอินพุต $u(t)$ ไม่มีอิทธิพลใดๆ ต่อตัวแปรสเตต $x_1(t)$ เลยนั่นเอง สรุปได้ว่าระบบ **ไม่มี** คุณสมบัติ *ความสามารถการควบคุมได้*

4.3.2 วิธีการคำนวณหา เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้ (Controllability matrix)

จากหัวข้อ 4.3.1 พบว่าสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสแนวทแยงมุมเป็นรูปแบบของสมการที่แสดงให้เห็นได้ด้วยตัวเองว่าระบบควบคุมใดๆ *มีความสามารถการควบคุมได้* หรือไม่ กล่าวคือสมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุมใดๆ ที่อยู่ในรูปแบบรูปบัญญัติเฟสแนวทแยงมุมจะ *มีความสามารถการควบคุมได้* ก็ต่อเมื่อไม่มีแถวใดเลยของอินพุตเมตริกซ์ **B** มีค่าเป็นศูนย์ อย่างไรก็ดีข้อสังเกตุนี้ **ไม่เป็นจริงเสมอไป** ดังจะพิสูจน์ให้เห็นในตัวอย่างที่ 4-2

การวิเคราะห์ในหัวข้อที่ 4.3.1 เป็นการไม่สะดวกที่จะบอกได้ว่าระบบควบคุมใดๆ ในทางปฏิบัติ *มีความสามารถการควบคุมได้* หรือไม่ (โดยเฉพาะระบบควบคุมที่มีความซับซ้อนมากๆ) เนื่องจากต้องทำการแปลงสมการปริภูมิสเตตของระบบให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติเฟสแนวทแยงมุมก่อนนั่นเอง ดังนั้นจึงมีการเสนอแนวทางในการตรวจสอบสมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุมใดๆ ด้วยวิธีการคำนวณหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* ดังสมการที่ (4-23)

$$\mathbf{C_M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}23)$$

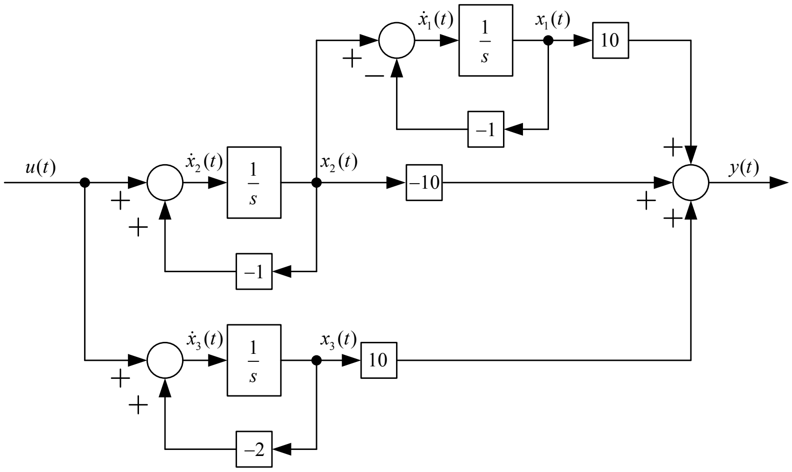
> ระบบควบคุมใดๆ จะมี *ความสามารถการควบคุมได้* ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ $\mathbf{C_M}$ จะต้องมี ***ค่าลำดับชั้น*** (Rank) ของเมตริกซ์ $\mathbf{C_M}$ เท่ากับอันดับ n ของระบบ กล่าวคือ $\mathbf{C_M}$ ต้องไม่เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่างที่ 4-2

จงวิเคราะห์สมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุมต่อไปนี้ว่ามี *ความสามารถการควบคุมได้* หรือไม่

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$



รูปที่ 4-5 บล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมสำหรับตัวอย่างที่ 4-2

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการปริภูมิสเตตของระบบพบว่า ถ้าเราใช้วิธีการวิเคราะห์สมการระบบในหัวข้อที่ 4.3.1 เราอาจจะ <u>สรุปอย่างรวดเร็ว</u> ว่าระบบควบคุมดังกล่าวนี้เป็น *ระบบควบคุมที่ไม่มีความสามารถการควบคุมได้* (Uncontrollability system) เนื่องจากสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ ไม่ได้มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงตัวแปรสเตต $x_1(t)$ ดังจะเห็นได้จากแถวแรกของเวกเตอร์ **B** มีค่าเท่ากับ “0” นั่นเอง ซึ่งเป็น <u>ข้อสรุปที่ผิด</u> ทั้งนี้เราพิจารณาโดยละเอียดด้วยการวาดบล็อคไดอะแกรมของระบบดังกล่าว (รูปที่ 4-5) พบว่าสัญญาณอินพุต $u(t)$ ยังคงมีอิทธิพลต่อพฤติกรรมตัวแปรสเตต $x_1(t)$ ผ่านตัวแปรสเตต $x_2(t)$ นั่นเอง และเมื่อนำวิธีการคำนวณหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* ในหัวข้อที่ 4.3.2 มาประยุกต์ใช้จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{C_M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

เมื่อนำเมตริกซ์ $\mathbf{C_M}$ ไปหาค่าดีเทอร์มิแนนต์พบว่ามีค่าเท่ากับ –1 กล่าวคือเมตริกซ์ $\mathbf{C_M}$ ไม่ได้เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Singularity matrix) ดังนั้นระบบควบคุมดังกล่าวนี้เป็นระบบที่มี *ความสามารถการควบคุมได้* นั่นคือ *ระบบดังกล่าวนี้สามารถถูกนำไปออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยวิธีการวางโพลได้นั่นเอง*

ตัวอย่างนี้มีข้อสังเกตุที่น่าสนใจคือถึงแม้ว่าสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสแนวทแยงมุมของระบบควบคุมมีส่วนประกอบแถวที่ 1 ของเวกเตอร์ **B** เป็นศูนย์ก็ตาม ระบบก็ยังคงมี *ความสามารถการควบคุมได้* โดยยืนยันได้จากการนำเอาสมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุมมาเขียนเป็นบล็อคไดอะแกรมดังรูปที่ 4-5 ซึ่งจากรูปพบว่าสัญญาณอินพุต $u(t)$ มีอิทธิพลโดยตรงต่อพฤติกรรมของตัวแปรสเตต $x_2(t)$, $x_3(t)$ และมีอิทธิพลต่อพฤติกรรมของตัวแปรสเตต $x_1(t)$ ผ่านตัวแปรสเตต $x_2(t)$ จึงสรุปได้ว่า <u>สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมของตัวแปรสเตตทุกตัวในระบบควบคุม</u> ดังนั้นระบบควบคุมนี้มีคุณสมบัติ *ความสามารถการควบคุมได้* นั่นเอง

4.4 การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยการใช้ Ackermann’s formula

การออกแบบอัตราขยายตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตในตัวอย่างที่ 4-1 สามารถใช้วิธีการวางโพลในรูปของสูตรสำเร็จที่มีชื่อว่า Ackermann’s formula ซึ่งเป็นวิธีการออกแบบที่สมการระบบต้องอยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้เช่นกัน โดยเวกเตอร์อัตราขยายตัวควบคุม **K** สามารถหาได้จากสมการที่ (4-24)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \alpha_C(\mathbf{A}) \qquad (4\text{-}24)$$

โดยที่ $\alpha_C(\mathbf{A})$ เมตริกซ์พหุนามแสดงดังสมการที่ (4-25)

$$\alpha_C(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} \qquad (4\text{-}25)$$

การคำนวณหาเวกเตอร์อัตราขยายตัวควบคุม **K** ในสมการที่ (4-24) อาจใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ ซึ่งทำให้สะดวกในการออกแบบซ้ำ (กรณีที่ต้องการปรับแต่งค่าของตัวควบคุมให้เหมาะสม) โดยสมการที่ (4-24) และ (4-25) นี้จะสามารถใช้ได้กับระบบควบคุมที่มี 1 อินพุต 1 เอาต์พุต (SISO system) เท่านั้น อย่างไรก็ดีจะพบว่าเป็นการยากที่ระบบจริงทางกายภาพจะถูกเขียน หรือสามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ ตัวอย่างที่ 4-3 จะเป็นตัวอย่างง่ายๆ ที่แสดงการประยุกต์ใช้ Ackermann’s formula สำหรับการวางโพลของระบบควบคุมวงรอบปิด

ตัวอย่างที่ 4-3

จงออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยการใช้ Ackermann’s formula สำหรับระบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

โดยกำหนดให้สมการคุณลักษณะของระบบควบคุมวงรอบปิดที่ต้องการคือ

$$\alpha_C(s) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

<u>วิธีทำ</u> จาก Ackermann's formula ในสมการที่ (4-24) จะได้

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ (4-25) หาเมตริกซ์พุนามได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_C(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{A} + (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_1 + \lambda_2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_1\lambda_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จาก Ackermann's formula ในสมการที่ (4-24) จะได้เมตริกซ์อัตราขยาย **K** ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [k_1 \quad k_2] \\ &= [0 \quad 1][\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1\lambda_2 \quad \lambda_1 + \lambda_2] \end{aligned}$$

จากผลลัพธ์ที่ได้สรุปได้ว่า $k_1 = \lambda_1\lambda_2$ และ $k_2 = \lambda_1 + \lambda_2$

4.5 การออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตในรูปแบบอื่นๆ

ในหัวข้อที่ 4.2 และ 4.4 เป็นรายละเอียดเกี่ยวกับวิธีการออกแบบอัตราขยายตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยวิธีการวางโพล (Pole placement) และวิธี Ackermann's formula ซึ่งสมการของระบบควบคุมจะต้องถูกเขียนหรือแปลงให้เป็น *สมการปริภูมิสเตตในรูปบัญญัติเฟสแบบควบคุมได้* ก่อนทำการออกแบบเท่านั้น อย่างไรก็ดีในทางปฏิบัติพบว่าระบบควบคุมไม่ได้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้เสมอไป ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการออกแบบอัตราขยายตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตสำหรับระบบควบคุมกรณีที่สมการของระบบควบคุมไม่ได้อยู่ในรูป *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้* ดังนั้นจึงต้องเพิ่มขั้นตอนการแปลงสมการปริภูมิสเตตแบบใดๆ ของระบบควบคุมเดิมให้อยู่ในรูป *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสแบบควบคุมได้* ก่อน จากนั้นจึงสามารถทำการออกแบบตัวควบคุมตัวแปรสเตตต่อไป หลังจากนั้นจึงค่อยทำการแปลงกลับไปสู่สมการปริภูมิสเตตของระบบเดิม

จากที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าขั้นตอนที่เพิ่มขึ้นมาก่อนการออกแบบตัวควบคุมคือการแปลงสมการปริภูมิสเตตใดๆ ให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ ซึ่งจำเป็นต้องใช้การแปลงด้วย *เมตริกซ์การแปลง* (Transformation matrix)

สมมุติให้สมการของระบบควบคุมอยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตใดๆ <u>ที่ไม่ได้</u> อยู่ในรูปแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{Az}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{Cz}(t) \end{aligned} \qquad (4\text{-}26)$$

ซึ่งจะสามารถหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* (Controllability matrix) ได้คือ

$$\mathbf{C_{Mz}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}27)$$

สมมติว่าระบบที่ต้องการควบคุมมีคุณสมบัติที่สามารถถูกแปลงให้อยู่ในรูป *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้* ดังนั้นตัวแปรสเตตจะเปลี่ยนจาก $\mathbf{z}(t)$ ไปเป็นตัวแปร $\mathbf{x}(t)$ ด้วยเมตริกซ์การแปลง **P** ดังนี้

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Px}(t) \qquad (4\text{-}28)$$

แทนค่าสมการที่ (4-28) นี้ลงในสมการที่ (4-26) จะได้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APx}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t) \qquad (4\text{-}29a)$$

$$y(t) = \mathbf{CPx}(t) \qquad (4\text{-}29b)$$

พิจารณาสมการที่ (4-29) พบว่าสมการดังกล่าวนี้คือ *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้* นั่นเอง ดังนั้นเราสามารถหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{C_{Mx}} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^2(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) & \ldots & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^{n-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (4\text{-}30)$$

แทนสมการที่ (4-27) ลงในสมการที่ (4-30) จากนั้นแก้สมการหาค่าเมตริกซ์การแปลง **P** ซึ่งจะพบว่าเมตริกซ์การแปลง P นี้สามารถหาได้จากผลคูณของ *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* ของระบบก่อนการแปลง และระบบหลังการแปลง นั่นเองดังแสดงในสมการที่ (4-31)

$$\mathbf{P} = \mathbf{C_{Mz}}\mathbf{C_{Mx}^{-1}} \qquad (4\text{-}31)$$

หลังจากทำการแปลงสมการระบบที่ต้องการควบคุมให้อยู่ในรูป *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้* แล้วเราก็สามารถออกแบบตัวควบคุมการป้อนกลับตัวแปรสเตตได้ตามปกติด้วยการแทนสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t) = -\mathbf{K_x x}(t) + r(t)$ ลงในสมการที่ (4-29) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APx}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\left[-\mathbf{K_x x}(t) + r(t)\right] \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APx}(t) - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BK_x x}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}r(t) \\ &= \left[\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BK_x}\right]\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}r(t) \\ y(t) &= \mathbf{CPx}(t) \end{aligned} \tag{4-32}$$

เมื่อทำการออกแบบตัวควบคุมการป้อนกลับเสร็จแล้ว ขั้นตอนต่อไปก็คือการแปลงจาก *สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้* กลับไปสู่สมการปริภูมิสเตตของระบบเดิม ได้ด้วยความสัมพันธ์ $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t)$ ซึ่งจะได้สมการระบบเดิมดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{Az}(t) - \mathbf{BK_x P}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ &= \left[\mathbf{A} - \mathbf{BK_x P}^{-1}\right]\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}r(t) \end{aligned} \tag{4-33a}$$

$$y(t) = \mathbf{Cz}(t) \tag{4-33b}$$

เปรียบเทียบสมการที่ (4-33a) และ (4-4a) จะได้เวกเตอร์อัตราขยายตัวควบคุมการป้อนกลับของระบบควบคุมเดิมคือ

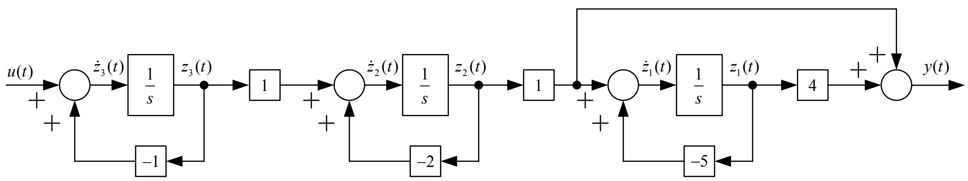
$$\mathbf{K_z} = \mathbf{K_x P}^{-1} \tag{4-34}$$

ถ้าทำการตรวจสอบจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากสมการที่ (4-32) กับสมการที่ (4-33) จะพบว่า <u>มีค่าเท่ากัน</u> ทั้งนี้เนื่องจากเป็นระบบเดียวกันที่อยู่ในรูปแบบของสมการปริภูมิสเตตที่แตกต่างกันนั่นเอง ดังนั้นซีโร่ของระบบควบคุมก่อนการป้อนกลับ และหลังการป้อนกลับ <u>ก็ยังคงมีค่าเท่าเดิม</u> อยู่เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 4-4

จงออกแบบอัตราขยายตัวควบคุมการป้อนกลับตัวแปรสเตตของระบบควบคุมต่อไปนี้ โดยให้ระบบมีผลการตอบสนองการชูตเกิน (Percent overshoot) ที่เอาต์พุต 20% และมีช่วงเวลาเข้าสู่สภาวะคงตัว (Settling time) ที่ 4 วินาที

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



รูปที่ 4-6 บล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมสำหรับตัวอย่างที่ 4-4

<u>วิธีทำ</u>

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> วิเคราะห์ระบบควบคุมเดิมที่ได้มาเพื่อหาเมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้

จากฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถวาดบล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมได้ดังรูปที่ 4-6 และสมการปริภูมิสเตตได้ดังสมการที่ (4-35)

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \qquad (4\text{-}35a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t) \qquad (4\text{-}35b)$$

จากสมการที่ (4-35a) สามารถหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* ได้คือ

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Mz}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{z}} & \mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{B}_{\mathbf{z}} & \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^2\mathbf{B}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}36)$$

เมตริกซ์ $\mathbf{C}_{\mathbf{Mz}}$ มีค่า Determinant เท่ากับ –1 ดังนั้นสรุปได้ว่าระบบมี *ความสามารถการควบคุมได้* แสดงว่าระบบสามารถถูกออกแบบอัตราขยายตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยวิธีการวางโพลได้นั่นเอง

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> วิเคราะห์ระบบควบคุมเดิมในรูปแบบสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้

หาสมการคุณลักษณะของระบบได้จาก $\left|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{z}}\right| = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากสมการคุณลักษณะนี้เอง สามารถนำไปสู่การจัดรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \qquad (4\text{-}37a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t) \qquad (4\text{-}37b)$$

จากสมการที่ (4-37a) สามารถหา *เมตริกซ์ความสามารถการควบคุมได้* ได้คือ

$$\mathbf{C_{Mx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_x} & \mathbf{A_x B_x} & \mathbf{A_x^2 B_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix} \tag{4-38}$$

จากสมการที่ (4-36) และ (4-38) สามารถหาเมตริกซ์การแปลง (Transformation matrix) ได้ดังนี้

$$\mathbf{P} = \mathbf{C_{Mz}} \mathbf{C_{Mx}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-39}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> กำหนดตำแหน่งโพลของระบบควบคุมวงรอบปิด เพื่อให้ได้ผลการตอบสนองของตัวแปรเอาต์พุตตามที่ต้องการ กล่าวคือถ้าสมมติให้สมการคุณลักษณะของระบบควบคุมป้อนกลับที่ต้องการ ซึ่งจากโจทย์กำหนดให้ระบบควบคุมวงรอบปิดมีเปอร์เซ็นต์การชูตเกิน (Overshoot) อยู่ที่ 20% และมีช่วงเวลาเข้าสู่สภาวะคงตัว (Settling time) อยู่ที่ 4 วินาที ดังนั้นจากความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งโพลและผลการตอบสนองระบบในโดเมนเวลา จะได้ว่า $\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$ ดังนั้นจะได้ $\zeta = 0.45$ และจากความสัมพันธ์ $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ ดังนั้น

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.45 \times 4} = 2.22$$

จากค่า ζ และ ω_n ที่คำนวณจะได้สมการคุณลักษณะอันดับสองที่ต้องการของระบบควบคุมวงรอบปิด

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (2 \times 0.45 \times 2.22)s + (2.22)^2 = s^2 + 2s + 5 = 0 \tag{4-40}$$

ดังนั้นรากสมการคุณลักษณะหรือตำแหน่งของโพลวงรอบปิดที่ต้องการได้คือ

$$s_{1,2} = -1 \pm j2 \tag{4-41}$$

ระบบควบคุมมีอันดับเท่ากับ 3 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดตำแหน่งโพลเพิ่มขึ้นอีก 1 ตำแหน่ง ซึ่งในที่นี้เรากำหนดค่าโพลไว้ที่ –4 เพื่อให้ตำแหน่งโพลตัวนี้ตัดกับตำแหน่งของซีโร่ของระบบควบคุมเดิมนั่นเอง ดังนั้นสามารถหาค่าสมการคุณลักษณะของระบบควบคุมวงรอบปิด $D(s)$ ได้ดังนี้

$$D(s) = (s+4)(s^2 + 2s + 5) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20 = 0 \tag{4-42}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x K_x})\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(10+k_{1x}) & -(17+k_{2x}) & -(8+k_{3x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{(4-43a)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{(4-43b)}$$

จากสมการที่ (4-43a) สามารถหาสมการคุณลักษณะได้ดังนี้

$$\left| s\mathbf{I} - (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x K_x}) \right| = s^3 + (8+k_{3x})s^2 + (17+k_{2x})s + (10+k_{1x}) = 0 \quad \text{(4-44)}$$

เทียบค่าสัมประสิทธิ์สมการที่ (4-42) และสมการที่ (4-44) จะได้

$$\mathbf{K_x} = \begin{bmatrix} k_{1x} & k_{2x} & k_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(4-45)}$$

จากสมการที่ (4-39) และสมการที่ (4-45) จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์อัตราขยายของระบบควบคุมวงรอบปิดสำหรับสมการปริภูมิสเตตระบบเดิมได้ดังนี้

$$\mathbf{K_z} = \mathbf{K_x P}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(4-46)}$$

เมื่อทำการแทนค่า $\mathbf{K_z}$ ผ่านอินพุต $u(t)$ ของระบบควบคุม เราจะได้สมการระบบควบคุมวงรอบปิดคือ

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A_z} - \mathbf{B_z K_z})\mathbf{z}(t) + \mathbf{B_z} r(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad \text{(4-47a)}$$

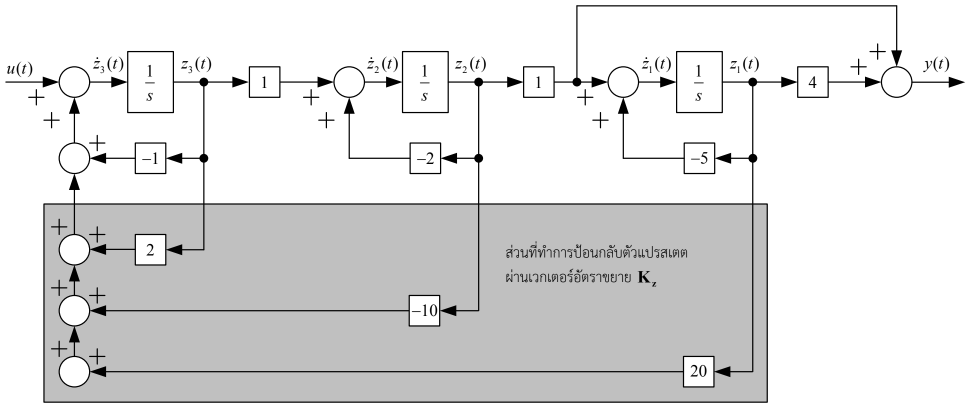
$$y(t) = \mathbf{C_z z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{(4-47b)}$$

โดยสามารถหาสมการฟังก์ชันถ่ายโอนหลังจากที่ระบบมีการป้อนกลับตัวแปรสเตตได้ดังสมการที่ (4-48)

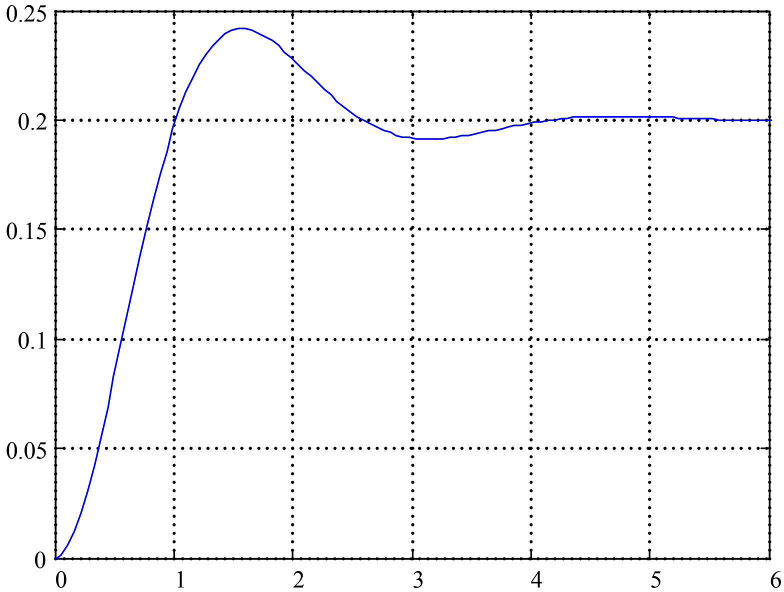
$$T(s) = \frac{(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 13s + 20} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad \text{(4-48)}$$

ซึ่งจะพบว่าหลังจากทำการป้อนกลับตัวแปรสเตตแล้ว ระบบจะมีอันดับเท่ากับ 2 และมีผลการตอบสนองเอาต์พุตของระบบตามที่ต้องการ (ตำแหน่งโพลวงรอบปิดอยู่ในตำแหน่งที่กำหนด) รูปที่ 4-7 แสดงบล็อค

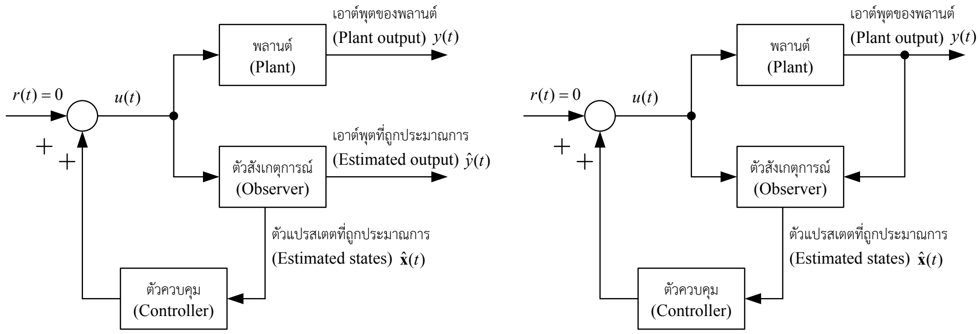
ไดอะแกรมของระบบควบคุมวงรอบปิดที่มีการป้อนกลับตัวแปรสเตตตามที่ออกแบบไว้ และรูปที่ 4-8 แสดงผลการตอบสนองของสัญญาณเอาต์พุตระบบควบคุมวงปิดที่ได้



รูปที่ 4-7 ระบบควบคุมที่มีการป้อนกลับตัวแปรสเตตผ่านอัตราขยาย **K** (ตัวอย่างที่ 4-4)



รูปที่ 4-8 ผลการตอบสนองที่ต้องการของระบบควบคุมวงปิดที่ได้ออกแบบไว้ในตัวอย่างที่ 4-4



(ก) (ข)

รูปที่ 4-9 แสดงการป้อนกลับตัวแปรสเตตด้วยการใช้ตัวสังเกตุการณ์ในการประมาณการตัวแปรสเตต

(ก) ตัวสังเกตุการณ์แบบวงรอบเปิด (Open-loop observer)

(ข) ตัวสังเกตุการณ์แบบวงรอบปิด (Closed-loop observer)

4.6 การออกแบบตัวสังเกตุการณ์ (Observer design)

ในระบบควบคุมอัตโนมัติมีความจำเป็นที่ต้องใช้ตัวตรวจจับ (Sensors) สำหรับวัดปริมาณทางฟิสิกส์ เช่นแรงดัน อุณหภูมิ แสง สี ฯลฯ ก่อนทำการแปลงให้เป็นปริมาณทางไฟฟ้าขนาดต่ำๆ เพื่อป้อนเข้าสู่ตัวควบคุม อย่างไรก็ดีบางครั้งในการออกแบบระบบควบคุม เราไม่สามารถวัดปริมาณทางฟิสิกส์ผ่านตัวตรวจจับได้โดยตรง ตัวอย่างเช่น การวัดปริมาณฟลักซ์แม่เหล็กไฟฟ้า (Magnetic flux) ในมอเตอร์ไฟฟ้าเหนี่ยวนำเพื่อทำการควบคุมแบบเวกเตอร์ (Vector control) ฯลฯ เป็นต้น

นอกจากนี้อาจเป็นเหตุผลด้านเศรษฐศาสตร์ เนื่องจากตัวตรวจจับบางขนิดมีราคาสูงมาก ซึ่งอาจจะไม่คุ้มค่าต่อการลงทุน ดังนั้นจึงมีแนวคิดในการใช้ตัวสังเกตุการณ์ (Observer) หรือบางครั้งอาจเรียกว่าตัวประมาณการ (Estimator) เพื่อให้ได้มาซึ่งปริมาณทางฟิสิกส์เหล่านั้น สำหรับใช้ในระบบควบคุมอัตโนมัติ

รูปที่ 4-9 แสดงรูปแบบของตัวสังเกตุการณ์ จากบล็อคไดอะแกรมทั้ง 2 จะเห็นว่าตัวสังเกตุการณ์มีหน้าที่ประมาณการปริมาณตัวแปรสเตตที่เราต้องการ เพื่อป้อนกลับเข้าสู่ตัวควบคุม ดังนั้นถ้าระบบควบคุมในรูปสมการปริภูมิสเตตคือ (สมการที่ 4-2a และสมการที่ 4-2b)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad \text{อ้างอิง(4-2a)}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \text{อ้างอิง(4-2b)}$$