ตารางที่ 1-1 ตารางการแปลงลาปลาส

การแปลงลาปลาส $F(s)$	ฟังก์ชันในโดเมนเวลา $f(t)$
1	ฟังก์ชันอิมพัลส์ 1 หน่วย $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	ฟังก์ชันขั้นบันได 1 หน่วย $u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	ฟังก์ชันลาดเอียง 1 หน่วย $tu(t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (n เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มบวก)
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ (n เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มบวก)
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$ (โดยที่ $\alpha \neq \beta$)
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t})$ (โดยที่ $\alpha \neq \beta$)
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[t-\frac{2}{\alpha}+\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right]$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	$\sin\omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos\omega_n t$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$1-\cos\omega_n t$

ตารางที่ 1-1 (ต่อ) ตารางการแปลงลาปลาส

การแปลงลาปลาส $F(s)$	ฟังก์ชันในโดเมนเวลา $f(t)$
$\dfrac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+\omega_n^2}$	$\left[\omega_n\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}\right]\sin(\omega_n t+\theta)$ โดยที่ $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_n}{\alpha}\right)$
$\dfrac{\omega_n}{(s+\alpha)(s^2+\omega_n^2)}$	$\dfrac{\omega_n}{\alpha^2+\omega_n^2}e^{-\alpha t}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}}\sin(\omega_n t-\theta)$ โดยที่ $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_n}{\alpha}\right)$
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\left(\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1+\zeta^2}}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1+\zeta^2}\right)t\right]$ โดยที่ $(\zeta<1)$
$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\theta\right]$ โดยที่ $\theta=\cos^{-1}\zeta$ และ $(\zeta<1)$
$\dfrac{s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\left(\dfrac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t-\theta\right]$ โดยที่ $\theta=\cos^{-1}\zeta$ และ $(\zeta<1)$
$\dfrac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\dfrac{\alpha^2-2\alpha\zeta\omega_n+\omega_n^2}{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\theta\right]$ โดยที่ $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha-\zeta\omega_n}$ และ $(\zeta<1)$
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\left(t-\dfrac{2\zeta}{\omega_n}+\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\theta\right]$ โดยที่ $\theta=\cos^{-1}(2\zeta^2-1)$ และ $(\zeta<1)$

ตัวอย่างที่ 1-1

จงหาการแปลงลาปลาสของ $f(t)=Ae^{-at}u(t)$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการการแปลงลาปลาส (สมการที่ 1-1) จะได้

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt$$

$$= A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

<u>ตอบ</u>

ตารางที่ 1-2 ตารางทฤษฎีการแปลงลาปลาส

ทฤษฎี			คุณสมบัติ
$L[f(t)]$	=	$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
$L[kf(t)]$	=	$kF(s)$	Linearity theorem
$L[f_1(t)+f_2(t)]$	=	$F_1(s)+F_2(s)$	Linearity theorem
$L[e^{-at}f(t)]$	=	$F(s+a)$	Frequency shift theorem
$L[f(t-T)]$	=	$e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
$L[f(at)]$	=	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
$L\left[\frac{df}{dt}\right]$	=	$sF(s)-f(0-)$	Differentiation theorem
$L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]$	=	$s^2F(s)-sf(0-)-f(0-)$	Differentiation theorem
$L\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right]$	=	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Differentiation theorem
$L\left[\int_{0-}^{1} f(\tau)d\tau\right]$	=	$\frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
$f(\infty)$	=	$\lim_{s\to 0} sF(s)$	Final value theorem
$f(0+)$	=	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	Initial value theorem

ตัวอย่างที่ 1-2

จงหาการแปลงกลับลาปลาสของ $F_1(s)=1/(s+3)^2$

<u>วิธีทำ</u> อาศัยทฤษฎีการเลื่อนความถี่ (Frequency shift theorem) ในตารางที่ 1-2 และการแปลงลาปลาส $f(t)=tu(t)$ ในตารางที่ 1-1 ได้ว่าการแปลงกลับของ $F(s)=\frac{1}{s^2}$ คือ $tu(t)$ ดังนั้นการแปลงกลับของ $F(s+a)=\frac{1}{(s+a)^2}$ ก็ควรมีค่าเป็น $e^{-at}tu(t)$ ดังนั้นก็ควรจะได้ว่า $f_1(t)=e^{-3t}tu(t)$ นั่นเอง

<u>ตอบ</u>

จากตัวอย่างที่ 1-2 พบว่าการแปลงกลับลาปลาสคือการแปลงสมการฟังก์ชันของโดเมน s กลับไปอยู่ในรูปสมการฟังก์ชันโดเมนเวลา การแปลงกลับลาปลาสนี้มีประโยชน์อย่างมากในการแก้สมการอนุพันธ์เพื่อหาฟังก์ชันผลเฉลยในโดเมนเวลา ซึ่งเป็นคำตอบในรูปทั่วไปของสมการอนุพันธ์นั่นเอง