3.1 การหาผลเฉลยสมการปริภูมิสเตต

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบควบคุมสามารถเขียนได้ 2 รูปแบบคือในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอน และในรูปสมการปริภูมิสเตต ซึ่งสมการทั้ง 2 รูปแบบนี้สามารถใช้ทำนายพฤติกรรมทางพลศาสตร์ในโดเมนเวลาของระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Linear Time Invariant of Control System) ได้

3.1.1 วิธีการแปลงลาปลาส

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงแนวทางการแก้สมการปริภูมิสเตตเพื่อหาผลเฉลยคำตอบซึ่งเป็นผลการตอบสนองเอาต์พุตของระบบในโดเมนเวลาด้วยวิธีการแปลงลาปลาส
พิจารณารูปมาตรฐานสมการปริภูมิสเตตต่อไปนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{3-1a}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{3-1b}$$

แปลงลาปลาสสมการ (3-1a) จากนั้นจัดรูปสมการจะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ &= \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\left[\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right]\end{aligned} \tag{3-2a}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \tag{3-2b}$$

นำสมการ (3-2a) และ (3-2b) ไปแยกออกเป็นสมการย่อย จากนั้นใช้การแปลงกลับลาปลาสเข้าช่วยในการแก้สมการเพื่อหาผลการตอบสนองในโดเมนเวลา

การแก้สมการระบบควบคุมในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนจำเป็นต้องหาค่ารากของสมการที่ส่งผลต่อผลการตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) ของระบบควบคุมที่สภาวะชั่วขณะกล่าวคือรากของสมการฟังก์ชันถ่ายโอนจะเป็นตัวบอกถึงคุณลักษณะ (Characteristic) ของระบบควบคุมนั่นเอง เช่นเดียวกันกับกรณีของระบบควบคุมในรูปสมการปริภูมิสเตตที่จำเป็นต้องหาค่ารากของระบบควบคุมเพื่อหาผลการตอบสนองธรรมชาติของระบบควบคุมที่สภาวะชั่วขณะเช่นกัน เรียกค่ารากของระบบควบคุมนี้ว่า *ค่าเจาะจง* (Eigenvalues) หรือ *โพล* (Poles) โดยค่าเจาะจงของสมการปริภูมิสเตตสามารถหาได้จากการพิจารณาดิเทอร์มิแนนต์ของสมการที่ใช้ช่วยหาฟังก์ชันถ่ายโอนจากสมการปริภูมิสเตตดังนี้

ฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\begin{aligned}G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \mathbf{C}\left[\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right]\mathbf{B}+\mathbf{D} \\ &= \frac{\mathbf{C}\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}+\mathbf{D}\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\end{aligned}$$

ให้มีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 3-1

จงหาผลเฉลยคำตอบในโดเมนเวลาของระบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

โดยกำหนดให้ $u(t) = e^{-t}$ และ $\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$

<u>วิธีทำ</u> หาค่าของ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ได้ดังนี้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+9s+26) & s+9 & 1 \\ -24 & s^2+9s & s \\ -24s & -(26s+24) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}$$

โจทย์กำหนดให้สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t) = e^{-t}$ ดังนั้น $U(s) = L[u(t)] = L\left[e^{-t}\right] = \dfrac{1}{s+1}$

คำนวณหาพจน์ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)$ ได้ดังสมการที่ (3-3)

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0) = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+9s+26)+2 \\ 2s-24 \\ 2s^2-24s \end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24} \tag{3-3}$$

คำนวณหาพจน์ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)$ ได้ดังสมการที่ (3-4)

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+9s+28)+\dfrac{1}{s+1} \\ (2s-24)+\dfrac{s}{s+1} \\ (2s^2-24s)+\dfrac{s^2}{s+1} \end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24} \tag{3-4}$$

แทนสมการที่ (3-3) และ (3-4) ลงในสมการที่ (3-2a) จะได้

$$\therefore \mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix} X_1(s)\\ X_2(s)\\ X_3(s)\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{s}{s+1}\\ \frac{s^2}{s+1}\end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24}=\begin{bmatrix}\frac{(s^3+10s^2+37s+29)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{(2s^2-21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{s(2s^2-21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\therefore X_1(s)=\frac{(s^3+10s^2+37s+29)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{3-5}$$

$$\therefore X_2(s)=\frac{(2s^2-21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{3-6}$$

$$\therefore X_3(s)=\frac{s(2s^2-21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{3-7}$$

และจากสมการที่ (3-2b) จะได้

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{CX}(s)+\mathbf{DU}(s)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(s)\\ X_2(s)\\ X_3(s)\end{bmatrix}=X_1(s)+X_2(s) \tag{3-8}$$

แทนสมการที่ (3-5) ถึงสมการที่ (3-7) ลงในสมการที่ (3-8) นั่นคือ

$$Y(s)=\frac{(s^3+12s^2+16s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{-6.5}{s+2}+\frac{19}{s+3}-\frac{11.5}{s+4} \tag{3-9}$$

แปลงกลับลาปลาสสมการที่ (3-9) จะได้ผลการตอบสนองเอาต์พุต $y(t)$ ในโดเมนเวลาดังนี้

$$y(t)=-6.5e^{-2t}+19e^{-3t}-11.5e^{-4t}$$ <u>ตอบ</u>

<u>หมายเหตุ</u> กรณีถ้าต้องการหาเฉพาะค่าเจาะจงของสมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุม

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\det\begin{bmatrix} s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 24 & 26 & s+9\end{bmatrix}=s^3+9s^2+26s+24=0 \tag{3-10}$$

แยกแฟกเตอร์สมการที่ (3-10) จะได้ $(s+2)(s+3)(s+4)=0$ ดังนั้นค่าเจาะจงคือ $s=-2$, $s=-3$ และ $s=-4$ ซึ่งตรงกับเลขยกกำลังของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลแต่ละพจน์ของผลคำตอบนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3-2

จงหาผลเฉลยคำตอบของระบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

โดยกำหนดให้ $u(t)=e^{-t}$ และ $\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T$

<u>วิธีทำ</u> หาค่าของ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ได้ดังนี้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -2\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+5 & 2\\ -3 & s\end{bmatrix}}{s^2+5s+6} \tag{3-11}$$

โจทย์กำหนดให้สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)=e^{-t}$ ดังนั้น $U(s)=L\left[u(t)\right]=L\left[e^{-t}\right]=\dfrac{1}{s+1}$ จากนั้นแทนสมการที่ (3-11) และ $\mathbf{U}(s)$ ลงในสมการที่ (3-2a) จะได้

$$\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)=\frac{\begin{bmatrix}s+5 & 2\\ -3 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}}{s^2+5s+6}+\frac{\begin{bmatrix}s+5 & 2\\ -3 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}{s^2+5s+6}\times\frac{1}{s+1}$$

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+14s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s^2-4s-6}{(s+1)(s+2)(s+3)}\end{bmatrix} \tag{3-12}$$

และจากสมการที่ (3-2b) จะได้

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{CX}(s)+\mathbf{DU}(s)=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=X_1(s)+3X_2(s) \tag{3-13}$$

แทนสมการที่ (3-12) ลงในสมการที่ (3-13) จะได้

$$Y(s)=\frac{5s^2+2s-4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{-0.5}{s+1}+\frac{-12}{s+2}+\frac{17.5}{s+3} \tag{3-14}$$

จากนั้นทำการแปลงกลับลาปลาสสมการที่ (3-14) จะได้ผลการตอบสนองเอาต์พุต $y(t)$ ดังนี้

$$y(t)=-0.5e^{-t}-12e^{-2t}+17.5e^{-3t}$$ <u>ตอบ</u>

3.1.2 วิธีแก้สมการปริภูมิสเตตในโดเมนเวลา

วิธีนี้จะเหมือนวิธีการปกติที่ใช้สำหรับการแก้สมการอนุพันธ์ทั่วไป เพียงแต่การแก้สมการอนุพันธ์ที่จะกล่าวในหัวข้อนี้เป็นการแก้สมการอนุพันธ์ในรูปสมการปริภูมิสเตต โดยผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ที่หาได้จะยังคงประกอบด้วย 2 พจน์ (เช่นเดียวกับการแก้สมการอนุพันธ์ 1 สมการ) นั่นคือผลการตอบสนองบังคับ (Forcing Response) และผลการตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) โดยมีหลักการดังนี้

พิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูปสมการสเตตต่อไปนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3-15}$$

เห็นได้ว่ารูปแบบสมการที่ (3-15) มีรูปสมการคล้ายรูปทั่วไปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั่นคือ

$$\dot{x}(t) = ax(t) \tag{3-16}$$

ซึ่งผลเฉลยคำตอบที่ได้จากสมการที่ (3-16) จะอยู่ในรูปฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลดังนี้

$$x(t) = x(0)e^{at} \tag{3-17}$$

โดยที่ค่า $x(0)$ ก็คือค่าเริ่มต้น (Initial value) ซึ่งพจน์เอ็กซ์โพเนนเชียลในสมการ (3-17) อาจเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง (Power Series) ได้ดังแสดงในสมการที่ (3-18)

$$x(t) = x(0)e^{at} = x(0)\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{a^kt^k}{k!} + \frac{a^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots\right) \tag{3-18}$$

พิจารณาอนุกรมกำลังในสมการที่ (3-18) พบว่าจะมีค่าลู่เข้าหาค่าศูนย์ (กรณีที่ $a < 0$) เมื่อเวลา $t > 0$ ดังนั้นเมื่อนำสมการที่ (3-15) มาวิเคราะห์ด้วยหลักการเดียวกันเพื่อหาผลเฉลยรูปทั่วไปของ $\mathbf{x}(t)$ จะสามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ดังนี้

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \mathbf{b}_{k+1} t^{k+1} + \cdots \tag{3-19}$$

แทนค่าสมการ (3-19) ลงใน (3-15) จะได้

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + (k+1)\mathbf{b}_{k+1} t^k + \cdots \\ &\qquad = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \mathbf{b}_{k+1} t^{k+1} + \cdots) \end{aligned} \tag{3-20}$$

จากนั้นเทียบค่าสัมประสิทธิ์ทั้ง 2 ข้างของสมการที่ (3-20) จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในสมการที่ (3-19) จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b}_0 t^{k+1} + \cdots \\
&= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right)\mathbf{b}_0
\end{aligned} \qquad (3\text{-}21)$$

เมื่อเปรียบเทียบรูปสมการที่ (3-18) กับสมการที่ (3-21) จะเปรียบได้ว่า $x(0) = \mathbf{b}_0$ นั่นเอง ดังนั้น สมการที่ (3-21) สามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะของผลเฉลยสมการอนุพันธ์ได้ดังสมการที่ (3-22)

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right)\mathbf{x}(0) \qquad (3\text{-}22)$$

โดยที่ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$ คือเวกเตอร์ของค่าเริ่มต้น ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1} t^{k+1} + \cdots\right) \qquad (3\text{-}23)$$

ดังนั้นสมการที่ (3-22) ในรูปที่กระชับขึ้นคือ

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \qquad (3\text{-}24)$$

เราเรียกชื่อ $e^{\mathbf{A}t}$ ว่าเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ (State-Transition Matrix) และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ แทน ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \qquad (3\text{-}25)$$

โดยเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ $\mathbf{\Phi}(t)$ มีคุณสมบัติเฉพาะบางอย่างที่จำเป็นต้องทราบดังนี้

<u>คุณสมบัติที่ 1</u>

เมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ ณ เวลา $t = 0$ จะมีค่าเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ กล่าวคือ $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ โดยที่ $\mathbf{I}$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยกำหนด $t = 0$ ลงในสมการที่ (3-25) จะได้ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0)$ ดังนั้นสรุปจะได้ว่า

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \text{ ณ เวลา } t = 0 \tag{3-26}$$

<u>คุณสมบัติที่ 2</u>

อนุพันธ์ของเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ ณ เวลา $t = 0$ จะมีค่าเท่ากับเมตริกซ์ของระบบ กล่าวคือ $\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยการทำอนุพันธ์สมการที่ (3-25) ดังนั้นรูปสมการที่ได้จะคล้ายกับสมการที่ (3-15) นั่นคือ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3-27}$$

ซึ่งถ้าพิจารณาสมการที่ (3-27) ณ เวลา $t = 0$ จะได้ว่า

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \tag{3-28}$$

ดังนั้น
$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \tag{3-29}$$

<u>สรุป</u>

การแก้สมการปริภูมิสเตตที่มีแต่ผลการตอบสนองธรรมชาติในโดเมนเวลาจะมีคุณสมบัติ 2 ประการคือ

คุณสมบัติที่ 1:
$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \tag{3-30}$$

คุณสมบัติที่ 2:
$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \tag{3-31}$$

รายละเอียดข้างต้นเป็นการแก้สมการปริภูมิสเตตเพื่อหาผลเฉลยคำตอบ ซึ่งผลของคำตอบที่ได้เป็นผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural response) ทั้งนี้เนื่องจากสมการปริภูมิสเตตของระบบไม่ได้มีอิทธิพลของสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ ที่สภาวะสุดท้ายของการตอบสนอง ซึ่งเราเรียกสมการอนุพันธ์ลักษณะนี้ว่า *สมการเอกพันธ์* (Homogeneous equation) ดังนั้นปัญหาของสมการไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous problem) คือการแก้สมการอนุพันธ์ที่มีอิทธิพลของสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ เข้ามาในการแก้สมการนั่นเอง

พิจารณาสมการปริภูมิสเตตที่ (3-32)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3-32}$$

จัดรูปสมการ (3-32) จากนั้นคูณทั้ง 2 ของสมการด้วย $e^{-\mathbf{A}t}$ จะได้

$$e^{-\mathbf{A}t}\left[\dot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{A}\mathbf{x}(t)\right]=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3-33}$$

พิจารณาด้านซ้ายของสมการที่ (3-33) พบว่าเกิดจากการทำอนุพันธ์พจน์ $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$ นั่นเอง ดังนั้นจะได้

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right]=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3-34}$$

ทำการอินทิเกรตทั้ง 2 ข้างของสมการที่ (3-34) จะได้

$$\left[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right]\Big|_0^t=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(0)=\int_0^t e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3-35}$$

เนื่องจาก $e^{-\mathbf{A}(0)}=\mathbf{I}$ ดังนั้นสามารถแก้สมการที่ (3-35) เพื่อหาผลเฉลยคำตอบ $\mathbf{x}(t)$ จะได้

$$\mathbf{x}(t)\;=\;e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\;=\boldsymbol{\Phi}(t)\;\mathbf{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3-36}$$

คือเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}$

จากสมการที่ (3-36) พบว่าพจน์แรกด้านขวามือของสมการเป็นผลการตอบสนองธรรมชาติที่เกิดขึ้นจากสเตตค่าเริ่มต้น $\mathbf{x}(0)$ ดังนั้นพจน์นี้จะขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นของระบบเท่านั้น และจะไม่ขึ้นอยู่กับสัญญาณควบคุมอินพุตของระบบเลย เราเรียกผลการตอบสนองส่วนนี้ของระบบควบคุมว่า *ผลการตอบสนองที่อินพุตเป็นศูนย์* (Zero-input response) และจะเรียกพจน์ที่ 2 ด้านขวามือของสมการที่ (3-36) ถูกเรียกว่า *อินทิกรัลคอนโวลูชัน* (Integral convolution) ที่มีค่าขึ้นอยู่กับสัญญาณควบคุมอินพุต $\mathbf{u}(t)$ และเมตริกซ์ $\mathbf{B}$ โดยไม่ขึ้นกับค่าเริ่มต้นของตัวแปรสเตต (กรณีที่ค่าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์) เรียกผลการตอบสนองส่วนนี้ว่า *ผลการตอบสนองที่สเตตศูนย์* (Zero-state response)

อ้างอิงสมการที่ (3-2a) ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยสมการปริภูมิสเตตด้วยวิธีการแปลงลาปลาสดังนี้

$$\mathbf{X}(s)=\underline{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad \text{อ้างอิง (3-2a)}$$

อ้างอิงสมการที่ (3-39) ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยสมการปริภูมิสเตตด้วยวิธีแก้สมการปริภูมิสเตตในโดเมนเวลาดังนี้

$$\mathbf{x}(t)=\underline{\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)}+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad \text{อ้างอิง (3-36)}$$

พิจารณาทั้ง 2 สมการเฉพาะส่วนที่ขีดเส้นใต้จะได้ว่า

$$L\left[\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)\right] = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{3-37}$$

นั่นคือ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ก็คือผลของการแปลงลาปลาสของเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ $\mathbf{\Phi}(t)$ นั่นเอง ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพ สามารถหาได้จากสมการที่ (3-38) ดังนี้

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = L^{-1}\left[\frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right] \tag{3-38}$$

ตัวอย่างที่ 3-3

สำหรับสมการปริภูมิสเตตของระบบควบคุมต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

โดยกำหนดให้ $u(t) = 1u(t)$ และ $\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$

จงหาเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพพร้อมทั้งแก้สมการหาผลการตอบสนองของตัวแปรสเตต $\mathbf{x}(t)$ ของระบบ

<u>วิธีทำที่ 1</u> ใช้วิธีแก้สมการปริภูมิสเตตในโดเมนเวลา

เริ่มจากการหาค่าเจาะจงของระบบจาก $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$ จะได้ $s^2+6s+8=0$ ซึ่งเมื่อแยกแฟกเตอร์เพื่อหาค่ารากสมการจะได้ $s_1=-2$ และ $s_2=-4$ และเนื่องจากแต่ละส่วนประกอบในเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพเกิดจากผลรวม 2 พจน์ของการตอบสนองที่ได้จากรากสมการ ดังนั้นจะได้เมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพดังนี้

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix}(K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}) & (K_3e^{-2t}+K_4e^{-4t})\\ (K_5e^{-2t}+K_6e^{-4t}) & (K_7e^{-2t}+K_8e^{-4t})\end{bmatrix} \tag{3-39}$$

จากคุณสมบัติที่ 1 ของเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพนั่นคือ $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$K_1+K_2=1 \tag{3-40a}$$
$$K_3+K_4=0 \tag{3-40b}$$
$$K_5+K_6=0 \tag{3-40c}$$
$$K_7+K_8=1 \tag{3-40d}$$

จากคุณสมบัติที่ 2 ของเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพนั่นคือ $\dot{\mathbf{\Phi}}(0)=\mathbf{A}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$-2K_1-4K_2=0 \qquad (3\text{-}41a)$$
$$-2K_3-4K_4=1 \qquad (3\text{-}41b)$$
$$-2K_5-4K_6=-8 \qquad (3\text{-}41c)$$
$$-2K_7-4K_8=-6 \qquad (3\text{-}41d)$$

แก้สมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรจำนวน 4 สมการจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้ $K_1=2$, $K_2=-1$, $K_3=1/2$, $K_4=-1/2$, $K_5=-4$, $K_6=4$, $K_7=-1$ และ $K_8=2$ จากนั้นแทนค่าลงในสมการที่ (3-39) จะได้

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -4e^{-2(t-\tau)}+4e^{-4(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)}+2^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}42)$$

ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -4e^{-2(t-\tau)}+4e^{-4(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)}+2^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)}+2^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}43)$$

และ
$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 2e^{-2t}-e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t}+4e^{-4t} & -e^{-2t}+2^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-2t}-e^{-4t} \\ -4e^{-2t}+4e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}44)$$

ทำอินทิกรัลคอนโวลูชันสมการที่ (3-44) จะได้

$$\therefore \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau-\frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \\ -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau+2e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}45)$$

ดังนั้นจะได้ผลการตอบสนองตัวแปรสเตตของระบบควบคุมแสดงดังสมการที่ (3-46)

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)+\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} \frac{1}{8}+\frac{7}{4}e^{-2t}-\frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

และสัญญาณเอาต์พุตระบบดังสมการที่ (3-47)

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=x_1(t)+x_2(t) \qquad (3\text{-}47)$$

วิธีทำที่ 2 ใช้วิธีการหาเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพร่วมกับการแปลงลาปลาส

หาเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพได้จาก $\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \tag{3-48}$$

ดังนั้นจะได้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2+6s+8} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+6}{s^2+6s+8} & \dfrac{1}{s^2+6s+8} \\ \dfrac{-8}{s^2+6s+8} & \dfrac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix} \tag{3-49}$$

แปลงกลับลาปลาสสมการที่ (3-49) จะได้

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} \\ \dfrac{-8}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \dfrac{1}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2^{-4t} \end{bmatrix}$$

จากนี้ขั้นตอนที่เหลือก็เหมือนกับวิธีทำที่ 1 นั่นเอง ทั้งนี้จะเห็นว่าการได้มาซึ่งเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาพเป็นสิ่งที่มีความสำคัญต่อการแก้สมการปริภูมิสเตตอย่างมาก <u>ตอบ</u>

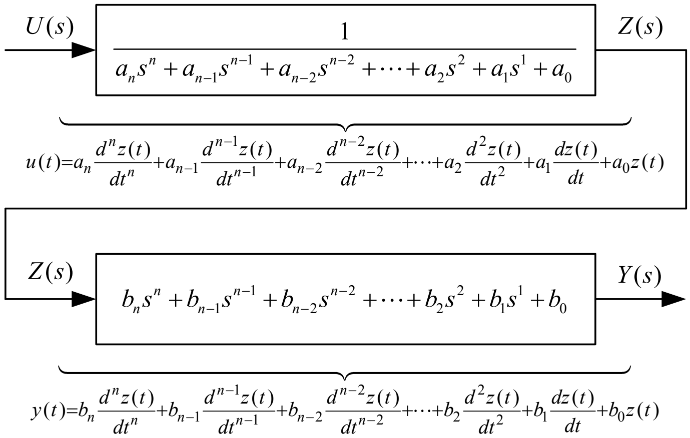
3.2 สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟส และไดอะแกรมสำหรับการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

จากบทที่ 2 ในหัวข้อที่ 2.2 พบว่าระบบจริงทางกายภาพใดๆ ที่มีการกำหนดสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ และสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ไว้อย่างชัดเจนแล้ว จะสามารถมีสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้เพียง 1 สมการเท่านั้น ซึ่งจะต่างกับการเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตที่สามารถเขียนสมการของระบบควบคุมได้หลากหลายรูปแบบ โดยขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ตัวแปรสเตตที่เรากำหนดไว้ ในหัวข้อนี้เป็นขั้นตอนการเขียนสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสรูปแบบต่างๆ ที่มีความจำเป็นและความสำคัญต่อการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุม

3.2.1 สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ (Controllable canonical form)

พิจารณารูปทั่วไปของสมการอนุพันธ์อันดับ n ดังแสดงในสมการที่ (3-50) ซึ่งเป็นสมการรูปทั่วไปที่ใช้จำลองพลศาสตร์ของระบบควบคุมฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\begin{aligned} &a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &\quad = b_n\frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{d^{n-2}u(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + b_2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{3-50}$$



รูปที่ 3-1 แยกสมการที่ (3-52) ออกเป็น 2 ส่วนที่มีการต่อแบบลำดับกัน

แปลงลาปลาสสมการที่ (3-50) จะได้

$$Y(s)\left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0\right] = U(s)\left[b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s^1 + b_0\right] \quad (3\text{-}51)$$

จัดรูปสมการที่ (3-51) ให้อยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายจะได้

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0} = \frac{Z(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Z(s)} \quad (3\text{-}52)$$

แยกสมการที่ (3-52) ออกเป็นเศษและส่วนที่มีการต่อแบบลำดับขั้น (Cascade connection) ด้วยการสมมุติตัวแปร $z(t)$ ขึ้นมาเพื่อทำการเชื่อมโยงบล็อคไดอะแกรมทั้ง 2 ส่วนเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 3-1 ดังนั้นจะได้

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0} \quad (3\text{-}53)$$

และ

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s^1 + b_0 \quad (3\text{-}54)$$

จากนั้นกำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรสเตตผ่านตัวแปร $z(t)$ ที่สมมติขึ้นดังนี้
โดยกำหนดให้

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = z(t); && \dot{x}_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) = \overset{(n-2)}{z}(t) \\
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) = \dot{z}(t); && \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) = \overset{(n-1)}{z}(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) = \ddot{z}(t); && \dot{x}_n(t) = \overset{(n)}{z}(t) \\
&\dot{x}_3(t) = x_4(t) = \dddot{z}(t); &&
\end{aligned}
$$

จากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่กำหนด จะได้สมการที่ (3-53) ในโดนเมนของเวลาดังนี้

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\dot{x}_{n-1}(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n}\dot{x}_{n-2}(t) - \ldots - \frac{a_2}{a_n}\dot{x}_2(t) - \frac{a_1}{a_n}\dot{x}_1(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t) + \frac{1}{a_n}u(t) \tag{3-55}$$

จากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่กำหนด จะได้สมการที่ (3-54) ในโดนเมนของเวลาดังนี้

$$y(t) = b_n\dot{x}_n(t) + b_{n-1}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{d^{n-2}z(t)}{dt^{n-2}} + \ldots + b_2\frac{d^2z(t)}{dt^2} + b_1\frac{dz(t)}{dt} + b_0z(t) \tag{3-56}$$

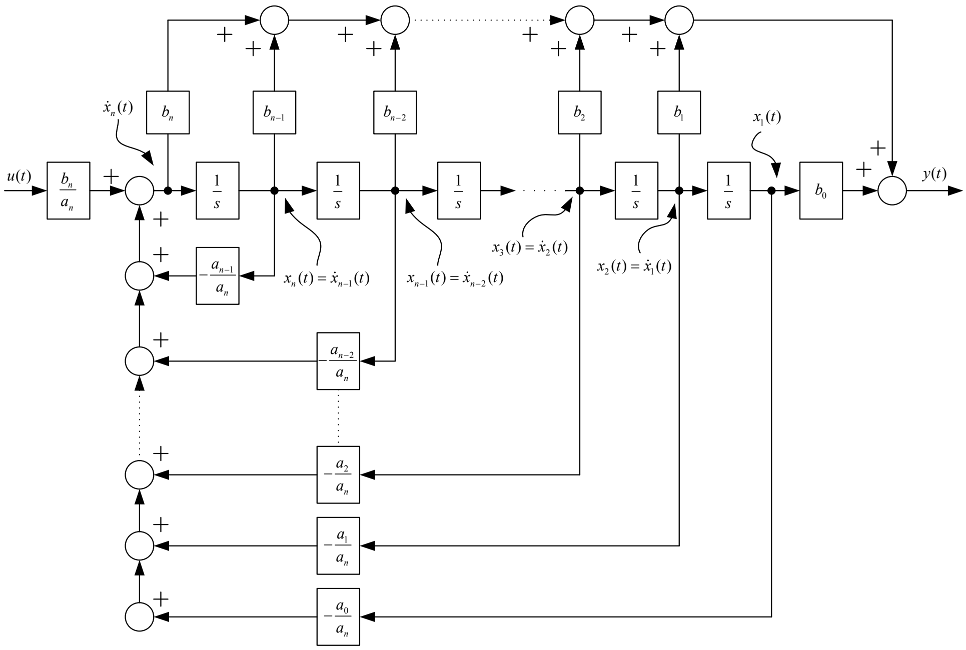
แทนความสัมพันธ์ของตัวแปรสเตตผ่านตัวแปร $z(t)$ ที่สมมุติขึ้น และแทนค่า $\dot{x}_n(t)$ ที่ได้จากสมการที่ (3-55) ลงในสมการที่ (3-66) จะได้

$$
\begin{aligned}
y(t) = b_n&\left[-\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1}(t) - \ldots - \frac{a_2}{a_n}x_3(t) - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t) + \frac{1}{a_n}u(t)\right] \\
&+ b_{n-1}x_n(t) + b_{n-2}x_{n-1}(t) + \ldots + b_2x_3(t) + b_1x_2(t) + b_0x_1(t)
\end{aligned} \tag{3-57}
$$

จัดรูปสมการที่ (3-57) ใหม่จะได้

$$
\begin{aligned}
y(t) = &\left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}b_n}{a_n}\right)x_n(t) + \left(b_{n-2} - \frac{a_{n-2}b_n}{a_n}\right)x_{n-1}(t) + \ldots + \left(b_2 - \frac{a_2b_n}{a_n}\right)x_3(t) \\
&+ \left(b_1 - \frac{a_1b_n}{a_n}\right)x_2(t) + \left(b_0 - \frac{a_0b_n}{a_n}\right)x_1(t) + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)u(t)
\end{aligned} \tag{3-58}
$$

จากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่กำหนดพร้อมทั้งสมการที่ (3-55) และสมการที่ (3-58) มาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้ดังสมการที่ (3-59) โดยสามารถแสดงรายละเอียดของสมการในรูปบล็อคไดอะแกรมสำหรับการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ได้ดังรูปที่ 3-2



รูปที่ 3-2 บล็อคไดอะแกรมสมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2}(t) \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-3}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t) \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \left[\left(b_0 - \frac{a_0 b_n}{a_n}\right) \quad \left(b_1 - \frac{a_1 b_n}{a_n}\right) \quad \left(b_2 - \frac{a_2 b_n}{a_n}\right) \quad \cdots \quad \left(b_{n-3} - \frac{a_{n-3} b_n}{a_n}\right) \quad \left(b_{n-2} - \frac{a_{n-2} b_n}{a_n}\right) \quad \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1} b_n}{a_n}\right) \right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}(t) \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \left[\frac{b_n}{a_n}\right] u(t)$$

(3-59)

สมการปริภูมิสเตตแบบบัญญัติเฟสควบคุมได้นี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับใช้เป็นรูปมาตราฐานในการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสเตต (States-feedback) ด้วยวิธีการวางโพล (Pole placement method) หรือด้วยสูตรของ Ackermann (Ackermann's formula) ซึ่งรายละเอียดการออกแบบจะกล่าวไว้ในบทที่ 4