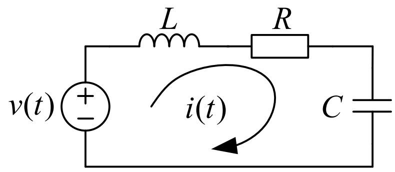
ตัวอย่างที่ 2-1

จากวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นดังรูป จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้

- แรงดันตกคร่อมที่ตัวเหนี่ยวนำ $v_L(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต
- ประจุไฟฟ้า $q(t)$ ที่ตัวเก็บประจุและกระแส $i(t)$ ที่ไหลภายในวงจรเป็นตัวแปรสเตต



รูปที่ 2-1 วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นสำหรับตัวอย่างที่ 2-1

<u>วิธีทำ</u> จากวงจรสามารถเขียนสมการโดยใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอร์ฟดังนี้

$$-v(t)+R\cdot i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$$

จากความสัมพันธ์ $i(t)=\dfrac{d}{dt}q(t)$ ดังนั้นเขียนสมการข้างต้นในรูปของตัวแปรประจุไฟฟ้า $q(t)$ ได้ดังนี้

$$v(t)=R\frac{d}{dt}q(t)+L\frac{d^2}{dt^2}q(t)+\frac{1}{C}q(t) \qquad (2\text{-}2)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}q(t)=\frac{v(t)}{L}-\frac{1}{LC}q(t)-\frac{R}{L}\frac{d}{dt}q(t) \qquad (2\text{-}3)$$

นำสมการที่ (2-2) และสมการที่ (2-3) มาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระบบควบคุมคือ $\dot{q}(t)=\dfrac{d}{dt}q(t)=i(t)$ และ $\ddot{q}(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}q(t)=\dot{i}(t)$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{q}(t)\\ \dot{i}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q(t)\\ i(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}v(t)$$

$$v_L(t)=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C} & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q(t)\\ i(t)\end{bmatrix}+[1]v(t)$$

<u>ตอบ</u>

<u>หมายเหตุ</u> เมตริกซ์ระบบ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}$ มีขนาดมิติ (2×2)

เมตริกซ์อินพุต $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1/L\end{bmatrix}^T$ มีขนาดมิติ (2×1)

เมตริกซ์เอาต์พุต $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-(1/C) & -R\end{bmatrix}$ มีขนาดมิติ (1×2)

เมตริกซ์ค่าคงที่ป้อนไปข้างหน้า **D** ในที่นี้มีค่าคงที่เท่ากับ 1 นั่นเอง

เวกเตอร์ตัวแปรสเตต $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}q(t) & i(t)\end{bmatrix}^T$ มีขนาดมิติ (2×1)

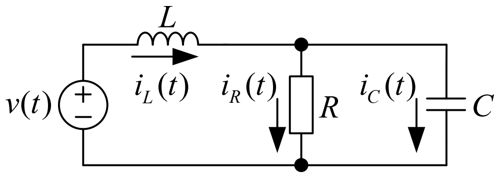
สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ คือแรงดันแหล่งจ่าย $v(t)$ (ปริมาณสเกล่าร์)

สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ คือแรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ $v_L(t)$ (ปริมาณสเกล่าร์)

ตัวอย่างที่ 2-2

จากวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นนี้ จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้

- กระแสที่ตัวต้านทาน $i_R(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต
- แรงดันที่ตัวเก็บประจุ $v_c(t)$ และอนุพันธ์แรงดันที่ตัวเก็บประจุ $\dot{v}_c(t)$ เป็นตัวแปรสเตต



รูปที่ 2-2 วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นสำหรับตัวอย่างที่ 2-2

วิธีทำ สามารถเขียนสมการโดยใช้กฎกระแสของเคอร์ชอร์ฟดังนี้

$$-i_L(t)+i_R(t)+i_C(t)=0 \tag{2-4}$$

$$-\frac{1}{L}\int v_L(t)dt+\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0 \tag{2-5}$$

$$-\frac{1}{L}\int\left[v(t)-v_C(t)\right](t)dt+\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0 \tag{2-6}$$

ทำอนุพันธ์สมการที่ (2-6); $$\frac{d^2}{dt^2}v_C(t)=\frac{1}{LC}v(t)-\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v_C(t)-\frac{1}{LC}v_C(t) \tag{2-7}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LC}\end{bmatrix}v(t)$$

$$i_R(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{R} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}v(t)$$

หมายเหตุ ด้วยความสัมพันธ์

$$v_C(t)=x_1(t)$$
$$\dot{v}_C(t)=\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\ddot{v}_C(t)=\dot{x}_2(t)$$

หรือเราอาจสามารถเขียนสมการปริภูมิสเตตได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้ (ไม่ได้กำหนดตามที่โจทย์ระบุ)

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C(t)\\ \dot{i}_L(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}v(t)$$

$$i_R(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{R} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}v(t)$$

หมายเหตุ สมการด้านขวาได้จาก

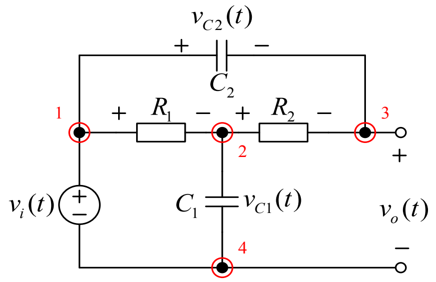
$$C\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{R}v_C(t)+i_L(t)$$
$$L\frac{di_L(t)}{dt}=-v_C(t)+v(t)$$

ข้อสังเกตุ จากตัวอย่างพบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนเดียวกันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตตได้มากกว่า 1 แบบ กล่าวคือมีความเป็นไปได้ของการเขียนสมการปริภูมิสเตตมากกว่า 1 รูปแบบ (พิจารณาเมตริกซ์ระบบ **A** เมตริกซ์อินพุต **B**) สัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ และสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ยังคงเดิมตามที่โจทย์กำหนด แต่มีการกำหนดตัวแปรสเตตที่แตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 2-3

จากวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นนี้ จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้

- แรงดันเอาต์พุต $v_o(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต
- แรงดันที่ตัวเก็บประจุ $v_{C1}(t)$ และ $v_{C2}(t)$ เป็นตัวแปรสเตต



รูปที่ 2-3 วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นสำหรับตัวอย่างที่ 2-3

<u>วิธีทำ</u> ตั้งสมการโดยใช้กฎกระแสของเคอร์ชอร์ฟที่โนด 2

$$C_1\frac{dv_2(t)}{dt}+\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_1}+\frac{v_2(t)-v_3(t)}{R_2}=0$$

ตั้งสมการโดยใช้กฎกระแสของเคอร์ชอร์ฟที่โนด 3

$$C_2\frac{d}{dt}\left[v_3(t)-v_1(t)\right]+\frac{v_3(t)-v_2(t)}{R_2}=0$$

จากสมการที่ 1;
$$\frac{dv_2(t)}{dt}=\left(\frac{1}{R_1C_1}\right)v_1(t)-\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}\right)v_2(t)+\left(\frac{1}{R_2C_1}\right)v_3(t)$$

จากสมการที่ 2;

$$C_2\frac{d}{dt}\left[v_3(t)-v_1(t)\right]+\frac{v_3(t)-v_2(t)}{R_2} = C_2\frac{d}{dt}\left[v_i(t)-v_{C2}(t)-v_i(t)\right]+\frac{v_3(t)-v_2(t)}{R_2} = 0$$

$$\frac{dv_{C2}(t)}{dt}=\frac{v_3(t)}{R_2C_2}-\frac{v_2(t)}{R_2C_2} = 0$$

โดยที่ $v_1(t)=v_i(t);$

$v_{C1}(t)=v_2(t);$

และ $v_{C2}(t)=v_1(t)-v_3(t)=v_i(t)-v_3(t) \quad \Rightarrow \quad \therefore v_3(t)=v_i(t)-v_{C2}(t)$

จากสมการที่ 3 และสมการที่ 4 นำมาเขียนเป็นสมการปริภูมิสเตตจะได้

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_{C1}(t)\\ \dot{v}_{C2}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C_1}+\dfrac{1}{R_2C_1} & -\dfrac{1}{R_2C_1}\\ -\dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C1}(t)\\ v_{C2}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C_1}+\dfrac{1}{R_2C_1}\\ \dfrac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}v_i(t)$$

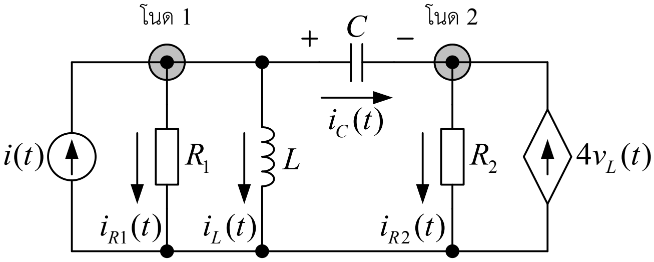
$$v_o(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C1}(t)\\ v_{C2}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}v_i(t)$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2-4

จากวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นนี้ จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้

- เวกเตอร์เอาต์พุตคือ $\mathbf{y}(t) = \left[v_{R2}(t) \quad i_{R2}(t)\right]^T$
- แรงดันที่ตัวเก็บประจุ $v_c(t)$ และกระแสที่ตัวเหนี่ยวนำ $i_L(t)$ เป็นตัวแปรสเตต



รูปที่ 2-4 วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นสำหรับตัวอย่างที่ 2-4

<u>วิธีทำ</u> จากวงจรจะได้ความสัมพันธ์ของพลังงานที่สะสมอยู่ในอุปกรณ์สะสมพลังงานดังนี้

$$L\frac{d}{dt}i_L(t) = v_L(t) \qquad \text{และ} \qquad C\frac{d}{dt}v_C(t) = i_C(t)$$

และจากวงจรสามารถหาความสัมพันธ์ของลูปแรงดันด้วยกฎแรงดันของเคอร์ชอร์ฟได้ดังนี้

$$v_L(t) = v_C(t) + v_{R2}(t) = v_C(t) + R_2 i_{R2}(t) \tag{2-8}$$

แต่

$$i_{R2}(t) = i_C(t) + 4v_L(t) \tag{2-9}$$

แทนสมการ (2-9) ลงในสมการ (2-8) จะได้

$$v_L(t) = \frac{\left[v_C(t) + R_2 i_C(t)\right]}{1 - 4R_2} \tag{2-10}$$

จากกฎกระแสของเคอร์ชอร์ฟที่โนด 1 จะได้

$$i_C(t) = i(t) - \frac{v_L(t)}{R_1} - i_L(t) \tag{2-11}$$

จัดรูปสมการที่ (2-10) จะได้

$$v_C(t) = (1 - 4R_2)v_L(t) - R_2 i_C(t) \tag{2-12}$$

จัดรูปสมการที่ (2-11) จะได้

$$i_C(t) = i(t) - i_L(t) - \frac{v_L(t)}{R_1} \tag{2-13}$$

แทน $i_C(t)$ ของสมการที่ (2-13) ลงในสมการที่ (2-12) จะได้

$$v_L(t) = \frac{1}{\Delta}\left[R_2 i_L(t) - v_C(t) - R_2 i(t)\right] \tag{2-14}$$

แทน $v_L(t)$ ของสมการที่ (2-12) ลงในสมการที่ (2-13) จะได้

$$i_C(t) = \frac{1}{\Delta}\left[(1 - 4R_2)i_L(t) + \frac{1}{R_1}v_C(t) - (1 - 4R_2)i(t)\right] \tag{2-15}$$

โดยที่ $\Delta = -\left[(1 - 4R_2) + \frac{R_2}{R_1}\right]$ จากนั้นแทนค่าสมการที่ (2-14) และสมการที่ (2-15) ลงในสมการ

$$L\frac{d}{dt}i_L(t) = v_L(t) \qquad \text{และ} \qquad C\frac{d}{dt}v_C(t) = i_C(t)$$

จากนั้นนำผลที่ได้มาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตได้ดังสมการที่ (2-16)

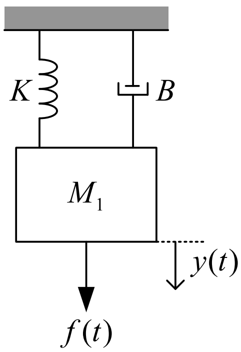
$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_L(t) \\ \frac{d}{dt} v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L\Delta} & \frac{-1}{L\Delta} \\ \frac{(1-4R_2)}{C\Delta} & \frac{1}{R_1 C\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R_2}{L\Delta} \\ \frac{-(1-4R_2)}{C\Delta} \end{bmatrix} i(t)$$

$$\begin{bmatrix} v_{R2}(t) \\ i_{R2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{\Delta} & -\left(1+\frac{1}{\Delta}\right) \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{(1-4R_1)}{\Delta R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R_2}{\Delta} \\ \frac{-1}{\Delta} \end{bmatrix} i(t) \qquad (2\text{-}16)$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2-5

จากระบบการเคลื่อนที่ทางกล จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้ระยะ $y(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต



รูปที่ 2-5 ระบบการเคลื่อนที่แนวดิ่งสำหรับตัวอย่างที่ 2-5

<u>วิธีทำ</u> นำมวลมาพิจารณาได้ดังนี้

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - B\frac{dy(t)}{dt} - Ky(t)$$

จัดรูปสมการหลังการแปลงลาปลาสจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

จะพบว่า $y(t) \to Y(s)$ คือตัวแปรเอาต์พุต และ $f(t) \to F(s)$ คือตัวแปรอินพุต จากนั้นนำความสัมพันธ์มาเขียนได้ดังนี้

กำหนด $x_1(t) = y(t)$

และ $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)$

ดังนั้นจะได้ $\dot{x}_2(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{M}f(t) - \frac{B}{M}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{K}{M}y(t)$

จากนั้นนำความสัมพันธ์ข้างต้นมาเขียนในรูปแบบสมการปริภูมิสเตตได้ดังนี้

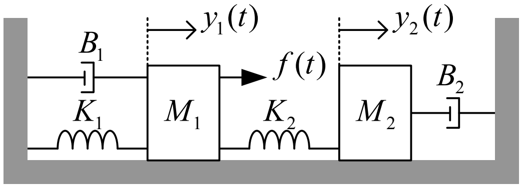
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2-6

จากระบบการเคลื่อนที่ทางกลนี้ จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้ระยะ $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต

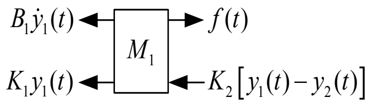


รูปที่ 2-6 ระบบการเคลื่อนที่แนวราบสำหรับตัวอย่างที่ 2-6

<u>วิธีทำ</u> นำมวลแต่ละก้อนมาพิจารณาแยกได้ดังนี้

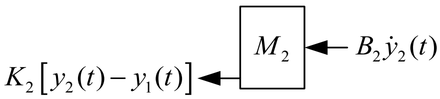
พิจารณามวล M_1 จะได้

$$M_1\ddot{y}_1(t) = f(t) - B_1\dot{y}_1(t) - K_1y_1(t) - K_2\left[y_1(t) - y_2(t)\right]$$
$$M_1\ddot{y}_1(t) = f(t) - B_1\dot{y}_1(t) - (K_1 + K_2)y_1(t) + K_2y_2(t)$$



พิจารณามวล M_2 จะได้

$$M_2\ddot{y}_2(t) = -B_2\dot{y}_2(t) - K_2y_2(t) + K_2y_1(t)$$



นำสมการทั้งสองสมการมาหาความสัมพันธ์จะได้

$$x_1(t) = y_1(t) \qquad x_3(t) = y_2(t)$$
$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}_1(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_3(t) = \dot{y}_2(t) = x_4(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}_1(t) \qquad \dot{x}_4(t) = \ddot{y}_2(t)$$

นำความสัมพันธ์ดังกล่าวมาเขียนสมการปริภูมิสเตตได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{(K_1+K_2)}{M_1} & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{K_2}{M_2} & 0 & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_2}{M_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{M_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}f(t)$$

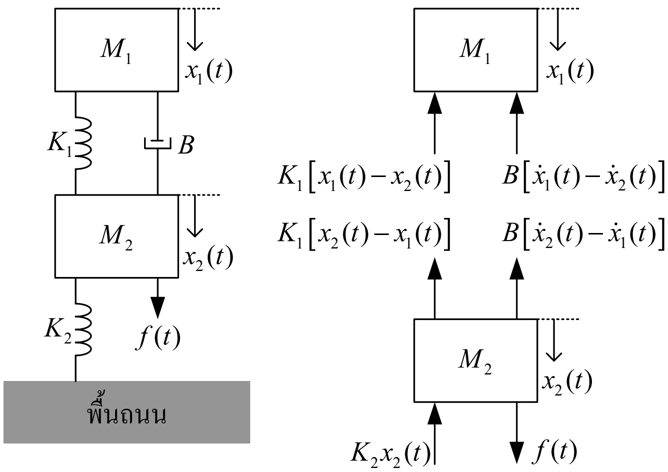
<u>ตอบ</u>

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}f(t)$$

<u>ข้อสังเกต</u> สำหรับตัวอย่างนี้ สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ มีได้มากกว่า 1 เอาต์พุต !!!

ตัวอย่างที่ 2-7

จากระบบการเคลื่อนที่ทางกลนี้ จงหาสมการปริภูมิสเตตที่ใช้ในการทำนายพฤติกรรมของระบบ โดยกำหนดให้ระยะ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ เป็นตัวแปรเอาต์พุต



รูปที่ 2-7 ระบบการเคลื่อนที่แนวดิ่งสำหรับตัวอย่างที่ 2-7

<u>วิธีทำ</u> นำมวลแต่ละก้อนมาพิจารณาแยกได้ดังนี้

คิดที่มวล M_1; $$M_1\ddot{x}_1(t) = -K_1\left[x_1(t)-x_2(t)\right] - B\left[\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)\right]$$

คิดที่มวล M_2; $$M_2\ddot{x}_2(t) = f(t) - K_2x_2(t) - K_1\left[x_2(t)-x_1(t)\right] - B\left[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\right]$$

ภายใต้ความสัมพันธ์

$$z_1(t) = x_1(t); \qquad z_3(t) = x_2(t);$$
$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) = z_2(t); \quad \text{และ} \quad \dot{z}_3(t) = \dot{x}_2(t) = z_4(t);$$
$$\dot{z}_2(t) = \ddot{x}_1(t) \qquad \dot{z}_4(t) = \ddot{x}_2(t)$$

สามารถเขียนสมการระบบในรูปสมการปริภูมิสเตตได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{B}{M_1} & \dfrac{K_1}{M_1} & \dfrac{B}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_1}{M_2} & \dfrac{B}{M_2} & -\dfrac{(K_1+K_2)}{M_2} & -\dfrac{B}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix} f(t)$$

<u>ตอบ</u>

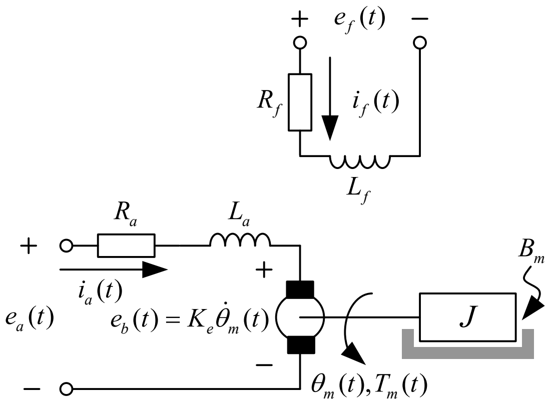
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \left[0\right] f(t)$$

<u>ข้อสังเกตุ</u> สำหรับตัวอย่างนี้ สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ มีได้มากกว่า 1 เอาต์พุต !!!

ตัวอย่างที่ 2-8

จงเขียนสมการสเตตระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงแบบแยกกระตุ้นขดลวดสนามแม่เหล็กดังแสดงในรูปข้างล่างนี้ โดยกำหนดให้

- สนามแม่เหล็กมีค่าคงที่
- แรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์ $e_a(t)$ คือตัวแปรอินพุตของระบบ
- แรงบิด $T_m(t)$ ความเร็วรอบเชิงกล $\omega_m(t)$ และมุมองศาเชิงกล $\theta_m(t)$ คือตัวแปรสเตต



จากความสัมพันธ์ทางกลและทางไฟฟ้าทำให้สามารถเชื่อมโยงสมการได้ดังนี้

$$e_b(t) = K_e\dot{\theta}_m(t) = k\phi\omega_m(t)$$
$$T_m(t) = K_t i_a(t) = k\phi i_a(t)$$

รูปที่ 2-8 ระบบมอเตอร์ไฟฟ้าสำหรับตัวอย่างที่ 2-8

<u>วิธีทำ</u> จากความสัมพันธ์ทั้งหมดข้างต้นจะได้สมการทางกล และสมการทางไฟฟ้าดังนี้

$$J\ddot{\theta}_m = T_m(t) - B_m\dot{\theta}_m = K_t i_a(t) - B_m\dot{\theta}_m$$
$$L_a\dot{i}_a(t) = e_a(t) - R_a i_a(t) - e_b(t)$$

กำหนดให้

$$x_1(t) = \theta_m(t) \qquad x_3(t) = i_a(t)$$
$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}_m(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_3(t) = \dot{i}_a(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}_m(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{B_m}{J} & \dfrac{K_t}{J} \\ 0 & -\dfrac{K_e}{L_a} & -\dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L_a} \end{bmatrix} e_a(t)$$

<u>ตอบ</u>

$$\begin{bmatrix} T_m(t) \\ \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0]e_a(t)$$

<u>ข้อสังเกตุ</u> สำหรับตัวอย่างนี้ สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ มีได้มากกว่า 1 เอาต์พุต !!!

2.2 การแปลงจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอนไปอยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตต

หัวข้อก่อนหน้านี้เป็นวิธีการหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ในรูปสมการปริภูมิสเตตจากระบบที่ต้องการควบคุมโดยตรง พบว่าการนำเสนอระบบควบคุมในรูปสมการปริภูมิสเตตนั้นให้รายระเอียดของระบบควบคุมมากกว่าการนำเสนอในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอน กล่าวคือเราสามารถเห็นพฤติกรรมด้านพลศาสตร์ของตัวแปรสเตตที่สนใจทุกตัวในระบบควบคุมนั่นเอง ซึ่งต่างกับการนำเสนอระบบควบคุมในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนที่จะเห็นเฉพาะสัญญาณควบคุมอินพุต $u(t)$ และสัญญาณเอาต์พุตของระบบ $y(t)$ เท่านั้น

ในหัวข้อนี้จะเป็นการเรียนรู้ขั้นตอนการแปลงรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมใดๆ ให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตต ซึ่งทำให้เราสามารถทราบรายละเอียดการเปลี่ยนแปลงตัวแปรสเตตทุกตัวที่สนใจของระบบควบคุมได้นั่นเอง

พิจารณาสมการอนุพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad (2\text{-}17)$$

โดยที่ n คืออันดับของสมการอนุพันธ์ สัญญาณ $y(t)$ และ $u(t)$ คือสัญญาณเอาต์พุตและสัญญาณควบคุมอินพุต ตามลำดับ ถ้าเรากำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรสเตตโดยกำหนดให้

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}$$ ซึ่งจะเขียนในรูปย่อดังนี้ $$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_3(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$ ซึ่งจะเขียนในรูปย่อดังนี้ $$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{y}(t)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t) = \frac{dx_{n-2}(t)}{dt} = \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}$$ ซึ่งจะเขียนในรูปย่อดังนี้ $$x_{n-1}(t) = \dot{x}_{n-2}(t) = \overset{n-2}{y}(t)$$

$$x_n(t) = \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$ ซึ่งจะเขียนในรูปย่อดังนี้ $$x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = \overset{n-1}{y}(t)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2-17) จะได้ว่า

$$\dot{x}_n(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t)\ldots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + b_0u(t) \qquad (2\text{-}18)$$

นำความสัมพันธ์ทั้งหมดมาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตได้ดังสมการที่ (2-19)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2-19}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

สมการที่ (2-19) นี้เป็นรูปสมการปริภูมิสเตตบัญญัติเฟส (Canonical form) รูปแบบหนึ่ง ซึ่งรายละเอียดของรูปแบบบัญญัติเฟสของสมการปรริภูมิสเตตรูปแบบต่างๆ จะกล่าวในบทต่อไป

ตัวอย่างที่ 2-9

จงแปลงสมการอนุพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตต

$$\dddot{y}(t) + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

<u>วิธีทำ</u>

ใช้การแปลงลาปลาสในบทที่ 1 แปลงสมการในโดเมนเวลา t ให้อยู่ในโดเมน s จะได้สมการฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

หาความสัมพันธ์ของตัวแปรสเตตโดยกำหนดให้

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{y}(t)$$

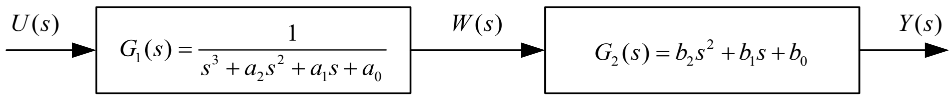
ดังนั้นจะได้ $\quad \dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + b_0 u(t)$

นำความสัมพันธ์ทั้งหมดนี้มาเขียนในรูปสมการปริภูมิสเตตได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

<u>ตอบ</u>

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$



รูปที่ 2-9 บล็อคไดอะแกรมระบบควบคุมสำหรับตัวอย่างที่ 2-10

ตัวอย่างที่ 2-10

จงแปลงสมการฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการปริภูมิสเตต

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

วิธีทำ จากความรู้เกี่ยวกับสมการฟังก์ชันถ่ายโอน ถ้าเราทำการแยกสมการฟังก์ชันถ่ายโอนออกเป็น 2 พจน์ที่ต่อแบบลำดับกัน (Cascade connection) ดังรูปที่ 2-9 ซึ่งจากรูปบล็อคไดอะแกรมจะได้ว่า

$$W(s) = G_1(s)U(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \tag{2-20}$$

และ

$$Y(s) = G_2(s)W(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)W(s) \tag{2-21}$$

จากสมการที่ (2-20) และ (2-21) นำมาทำการแปลงกลับลาปลาสจะได้

$$\dddot{w}(t) + a_2 \ddot{w}(t) + a_1 \dot{w}(t) + a_0 w(t) = u(t) \tag{2-22}$$

$$y(t) = b_2 \ddot{w}(t) + b_1 \dot{w}(t) + b_0 w(t) \tag{2-23}$$

จากสมการ (2-22) และ (2-23) กำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรสเตตได้ดังนี้

$$x_1(t) = w(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{w}(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{w}(t)$$

ดังนั้น

$$\dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + u(t)$$

จากความสัมพันธ์ตัวแปรสเตตที่กำหนดนี้สามารถเขียนสมการที่ (2-22) และสมการที่ (2-23) ในรูปสมการปริภูมิสเตตได้ดังสมการที่ (2-24)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2-24}$$

ตอบ

2.3 การแปลงสมการปริภูมิสเตตไปเป็นสมการฟังก์ชันถ่ายโอน

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้เรียนรู้วิธีการแปลงสมการฟังก์ชันถ่ายโอนให้เป็นสมการปริภูมิสเตตแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะเรียนรู้วิธีการแปลงสมการปริภูมิสเตตให้เป็นสมการฟังก์ชันถ่ายโอน

พิจารณาสมการปริภูมิสเตตดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \text{(2-25a)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad \text{(2-25b)}$$

ทำการแปลงลาปลาส (Laplace Transform) สมการข้างต้น โดยสมมุติให้ค่าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์จะได้

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad \text{(2-26a)}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \qquad \text{(2-26b)}$$

จากสมการที่ (2-26a) จะได้ $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$ (2-27)

โดยที่ $\mathbf{I}$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ จากนั้นแทนสมการที่ (2-27) ลงในสมการที่ (2-26b) จะได้

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) \qquad \text{(2-28)}$$

เรียกเมตริกซ์ $\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]$ ว่าเป็นเมตริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน เนื่องจากเมตริกซ์ดังกล่าวมีความสัมพันธ์กันอย่างชัดเจนระหว่างเอาต์พุต $\mathbf{Y}(s)$ และอินพุต $\mathbf{U}(s)$ และจากสมการที่ (2-28) ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{Y}(s) = Y(s)$ และ $\mathbf{U}(s) = U(s)$ จะได้รูปทั่วไปของสมการสำหรับการแปลงจากสมการปริภูมิสเตตให้ไปอยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุม 1 อินพุต 1 เอาต์พุตใดๆ แสดงดังสมการที่ (2-29)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad \text{(2-29)}$$

ตัวอย่างที่ 2-11

จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน $G(s) = Y(s)/U(s)$ จากสมการปริภูมิสเตตต่อไปนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \quad \text{และ} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

<u>วิธีทำ</u> คำนวณหาเทอม $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ จะได้

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} \qquad \text{(2-30)}$$

จากนั้นคำนวณหาอินเวอร์ส์เมตริกซ์ (Inverse Matrix) ของ $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ จะได้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1} \tag{2-31}$$

แทนค่าสมากรที่ (2-30) และสมการที่ (2-31) ลงในสมการที่ (2-29) จะได้

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1} + 0 = \frac{10(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+2s+1}$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2-12

จงหาสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการปริภูมิสเตตต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการที่ (2-28) คำนวณหาเทอม $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ จะได้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+4 \end{bmatrix} \tag{2-32}$$

ดังนั้นจะได้

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}}{s^2+4s+25} \tag{2-33}$$

แทนค่าสมการที่ (2-33) ลงในสมการที่ (2-29) จะได้

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s^2+4s+25} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s^2+4s+25} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & s+5 \\ -25 & s-25 \end{bmatrix}}{s^2+4s+25} \tag{2-34}$$

จากสมการที่ (2-34) จะได้

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+4s+25} & \dfrac{s+5}{s^2+4s+25} \\ \dfrac{-25}{s^2+4s+25} & \dfrac{s-25}{s^2+4s+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}35)$$

แยกสมการที่ (2-35) ออกเป็นสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ทั้งหมด 4 สมการดังนี้

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+4}{s^2+4s+25} \qquad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-25}{s^2+4s+25}$$

<u>ตอบ</u>

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+25} \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s-25}{s^2+4s+25}$$

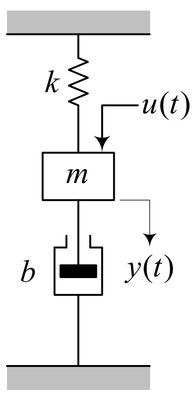
จากตัวอย่างที่ 2-12 พบว่าสมการที่ (2-29) ยังคงเป็นจริง และสามารถใช้ได้กับระบบที่มีสมการปริภูมิสเตตแบบหลายอินพุตหลายเอาต์พุต (Multi-Input-Multi-Output system: MIMO system) ซึ่งจำนวนผลลัพธ์สมการฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จะมีค่าเท่ากับผลคูณของจำนวนอินพุตกับจำนวนเอาต์พุตนั่นเอง

2.4 แบบฝึกหัดท้ายบท

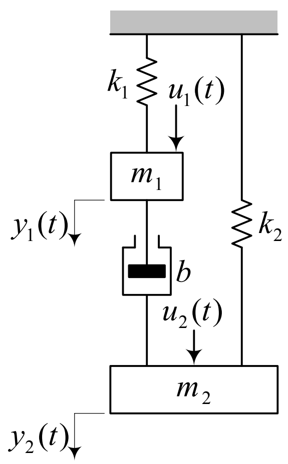
บฝ. 2-1 จากระบบการเคลื่อนที่ทางกลแนวดิ่งดังแสดงในรูปภาพข้างล่างนี้

(2-1.1) จงเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

(2-1.2) จงเขียนสมการปริภูมิสเตตของระบบ



(ก)

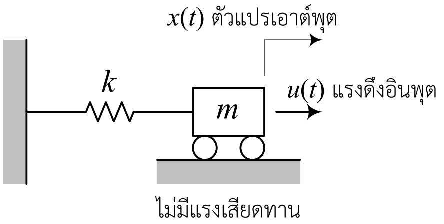


(ข)

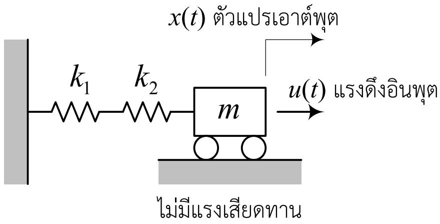
บฝ. 2-2 จากระบบการเคลื่อนที่ทางกลแนวราบดังแสดงในรูปภาพข้างล่างนี้

(2-2.1) จงเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

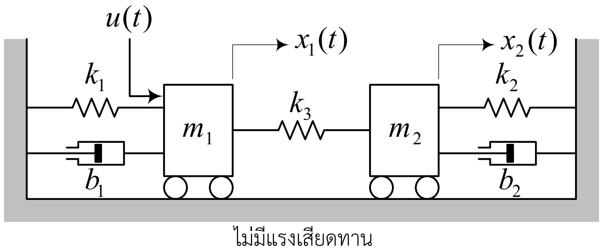
(2-2.2) จงเขียนสมการปริภูมิสเตตของระบบ



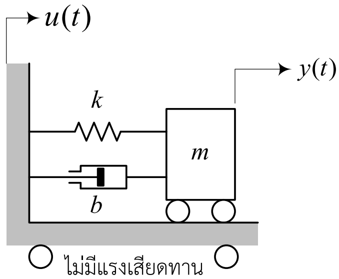
(ก)



(ข)



(ค)

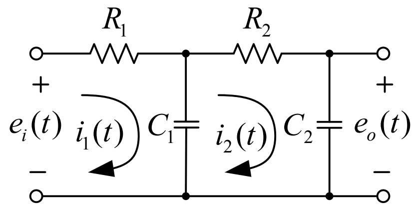


(ง)

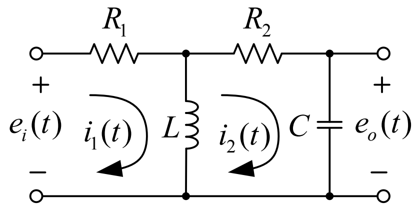
บฝ. 2-3 จากวงจรไฟฟ้าเชิงเส้นดังแสดงในรูปภาพข้างล่างนี้

(2-3.1) จงเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

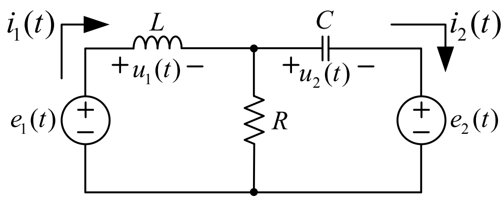
(2-3.2) จงเขียนสมการปริภูมิสเตตของระบบ



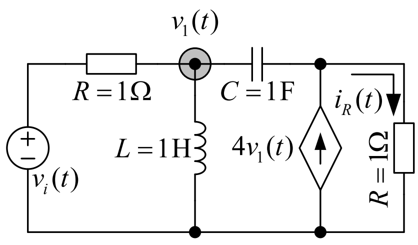
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

บฝ. 2-4 จงหาสมการถ่ายโอน $G(s)=Y(s)/R(s)$ จากสมการปริภูมิสเตตต่อไปนี้

(ก)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -2 & -5\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

(ข)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}2 & -3 & -8\\ 0 & 5 & 3\\ -3 & -5 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 6\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

(ค)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & -8 & 7\\ -3 & -6 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}5\\ -3\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

(ง)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4 & -1.5\\ 4 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1.5 & 0.625\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

บฝ. 2-5 จงเขียนสมการปริภูมิสเตตจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

(ก) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s^2+3s+7)}{(s+1)(s^2+5s+4)}$$

(ข) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10s+10}{s^3+6s^2+5s+10}$$

(ค) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{100}{s^4+20s^3+10s^2+7s+100}$$

(ง) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{30}{s^5+8s^4+9s^3+6s^2+s+30}$$

(จ) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5s+10}{s^4+2s^3+s^2+5s+10}$$

(ฉ) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^4+2s^3+12s^2+7s+3}{s^5+9s^4+10s^3+8s^2}$$

(ช) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+2s+2}{s^4+7s^3+3s^2+5s+3}$$

(ซ) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s^2+3s+7)}{(s+1)(s^2+5s+4)}$$