

# Lezione 7 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-14

# 1 Esercizi Vari

## Piccola definizione per esercizio

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \text{ Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n) = \{f_{a,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}$$

$$f_{A,b}(X) = AX + b$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right)$$

## Esercizio 1

---

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = e_1 + e_3, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2$$

e chiamiamo

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove  $\varphi$  è la parte lineare di  $f$ .

Trovare l'espressione di  $f$  in coordinate affini canoniche

e trovare i punti fissi di  $f$ .

### Svolgimento

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(\overrightarrow{p_0 p_1}) = \overrightarrow{q_0 q_1}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se  $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$  è la stessa base standard di  $\mathbb{R}^3$

$$[\varphi]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2-1 \\ -x_2+x_3+1 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix}$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che  $F(p) = f(p_0) + \varphi(\overrightarrow{p_0 p}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0 p})$

**Cerchiamo ora i punti fissi**

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

### Esercizio 2

Dimostrare che un'affinità di piano affine che ha tre punti fissi non allineati è l'identità

#### Svolgimento

Osservo che in un piano affine tre punti  $p_0, p_1, p_2$  sono non allineati se e solo se  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}$  sono linearmente indipendenti, ovvero  $p_0, p_1, p_2$  sono affinamente indipendenti. D'altra parte, un'affinità è univocamente determinata dall'immagine di tre punti indipendenti. L'identità è un'affinità con (almeno) tre punti fissi. Per l'unicità si ha  $f = Id$ .

### Esercizio 3

In  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  consideriamo la retta  $r : x + y = 1$

- Determinare le affinità che fissano tutti i punti di  $r$
- Tra le affinità determinate in (i), trovare quelle che mandano  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  in  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Tra le affinità determinate in i, trovare le traslazioni

#### Svolgimento

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0.$$

Basta scegliere  $f(p) = p$  per due punti distinti  $p \in r$ . Posso scegliere  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} a + \alpha = 1 \\ c + \beta = 0 \\ d + \alpha = 0 \\ d + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - \alpha \\ b = -\alpha \\ c = -\beta \\ d = 1 - \beta \end{cases} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta = 1 - \alpha - \beta \neq 0 \quad \alpha + \beta \neq 1$$

$$\text{ii} \quad \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha + \alpha = 2 \\ -\beta + 3 - 3\beta + \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3\alpha = 1 \\ -3\beta = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{iii} \quad \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 - \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta & 1 - \beta \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

e quindi l'unica traslazione è l'identità

---

**Nota**

$$f_{A,b} = AX + b \quad f_{A,b} \circ f_{C,b} = f_{AC, Ad+b}$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right) \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{K}) \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ d & C \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ Ad + b & AC \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 + a_{11}d_1 + a_{12}d_2 & a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ b_2 + a_{21}d_1 + a_{22}d_2 & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{array} \right) \end{aligned}$$

---

**Esercizio 4**

$$\text{In } \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^4 \quad L : \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Scrivere le matrici delle proiezioni su  $L$  parallela a  $W$  e la matrice della simmetria di asse  $L$  e direzione  $W$

**Svolgimento**

$$L = P + W_1 \quad V = W_1 \oplus W_2$$

$$p_L^{W_2}(X) = P + \pi_L^{W_2}(\vec{p\hat{x}}) \quad \text{Cerco ora l'equazione parametrica di } L$$

$$s_L^{W_2}(X) = P + \sigma_L^{W_2}(\vec{p\hat{x}})$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V + W : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qui il professore utilizza la sacra formula di Antani per giungere al seguente risultato

$$\gamma = -2 + x_1 - 2x_3$$

$$\delta = -2 + 2x_2 + x_4 \quad p_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & - & -2 \end{array}$$

$$s_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$