

Appunti completi Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

[12px]article
Lezione 1 Analisi Reale 2025-02-26 Federico De Sisti
amsmath tikz-cd amsthm mdframed amssymb nicematrix amsfonts tcolor-
box theorems xcolor cancel graphicx rotating color soul imakeidx wrapfig blind-
text tikz hyperref mathrsfs enumitem unicode-math [mathscr]euscript
colorlinks, citecolor=black, filecolor=black, linkcolor=black, urlcolor=black
./images/ break 1px1px
break break break break break break break break break Dimostrazione
break Esempio

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello

3 esoneri

Con le prove di esonero possiamo essere esonerati dall'orale.

Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.

L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.

La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale

Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistemazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).

Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiantata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).

Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.

Parliamo ora di modelli "ondulosi"

Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori

$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \rightarrow u(x, t)$

Equazione della corda vibrante: $\left\{ \partial_t^2 u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \right.$

$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

$u(x, 0) = h_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = h_1(x) \quad \forall x \in (0, \pi)$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:

$u(x, t) = \psi(t)\phi(x)$ variabili separate

- sovrapposizione:

u_1, u_2 soluzioni $\Rightarrow u_1 + u_2$ soluzione

1.5 Onde stazionarie

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \text{costante} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}\end{aligned}$$

Spiegazione:

$$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$$

$$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in R$$

$$\phi(x) = A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx) \quad A_m, B_m \in R$$

$$u(x, t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))(A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx))$$

$$\Rightarrow u(0, t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$$

$$(u(\pi, t) = 0 = \psi(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in N$$

$\Rightarrow u(x, t) = (a_m(\cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$ Tutti gli m interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx). \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx).\end{aligned}$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$

Condizioni Iniziali:

$$u(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x, \pi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$$

Come trovare α_m, β_m

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \quad m = n$$

$$\int_0^{\pi} h_0(x) \sin(mx) dx = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \alpha_m \quad (\text{coefficienti di})$$

Fourier)

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:

La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.

Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ma $D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, f_n Riemann integrabile.

Numeriamo $Q \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre:

$$D(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\lim_{j \rightarrow +\infty} \cos(k! \pi x)^{2j} \right) \text{ Esercizio "facile"}$$

Esercizio difficile:

non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro

Esempio:

$$C([0, 1]) \ni f, g$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\|f - g\|_1 = \dots$$

$(C([0, 1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)

$$\|f_m - f_n\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n, m \rightarrow +\infty$$

$$f_n \rightarrow f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1 \text{ se } x > \frac{1}{2} \quad [\text{linecolor=red, backgroundcolor=red!10}]$$

Teorema 1 Il completamento di $(C[0, 1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili **secondo Lebesgue**

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in \mathbb{R}^n)

Stabilire la misura è come definire un integrale.

$$|E| = \int X_E$$

Prerequisiti:

- $|[a, b]| = b - a$
 $|[a, b] \times [c, d]| = (d - c) \cdot (b - a)$
- $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$
- $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$
- $\forall E \quad \forall \sigma \text{ isometria} \quad |E| = |\sigma(E)|$

[linecolor=red, backgroundcolor=red!10]

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski) *in R^3 non esiste nessuna funzione che soddisfa 1,2 e 3.*

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in R^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \dots \cup A_5.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Troviamo $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ t.c.

$\sigma_1(A_1) \cup \dots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)

Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

[linecolor=orange, backgroundcolor=orange!10]

Assioma 1 (della scelta) *Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possibile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_x*

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$