Lezione 25 Analisi Realae

Federico De Sisti

2025-05-27

0.1 Prodotto di spazi di Misura

$(X, \mu), (Y, \nu)$ spazi di misura (μ, ν misure esterne)
M_μ misurabili in X rispetto a μ
M_ν misurabili in Y rispetto a ν
Vogliamo definire una misura in $X \times Y$
che sia il prodotto delle due misure $\mu \times \nu$
ovvero si vuole che:
se $A \in M_\mu, B \in M_\nu$
$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$
Nota
Non ci basta questo perché non tutti gli insiemi in $X \times Y$ sono di forma $A \times B$. Si può pensare ad una circonderenza in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che non è il prodotto delle proiezioni.

Definizione 1
La misura prodotto $\mu \times \nu$ su $X \times Y$ è definita da: $\forall E \subseteq X \times Y$

$$\mu \times \nu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i),\ A_i \in M_\mu,\ B_i \in M_\nu,\ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i \right\}.$$

Se $A \in M_\mu, B \in M_\nu \Rightarrow R = A \times B$ rettangolo (misurabile) e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i$ si dice plurirettangolo.

Osservazione

1. $\mu \times \nu$ è una misura (esterna), infatti:
   - $\mu \times \nu : X \times Y \to [0, +\infty]$
   - $0 \leq \mu \times \nu(\emptyset) \leq \sum_i \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$
   - Se $E \subseteq \sum_{j=1}^{+\infty} E_j$
     Se $\exists j$ tale che $\mu \times \nu(E_j) = +\infty \Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j)$
     Se $\mu \times \nu(E_j) < +\infty \ \ \forall j$
     $\Rightarrow \forall j, \forall \varepsilon \ \ \exists \{A_i^j \times B_i^j\}_i$
     tale che $E_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^j \times B_i^j$
     $\mu \times \nu(E_j) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i^j)\nu(B_i^j) < \mu \times \nu(E_j + \frac{\varepsilon}{2}^i$
     $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^j \times B_i^j$ è un plurirettangolo
     $\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \sum_{jj=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \mu(A_i^j) \times \nu(B_i^j)$
     $\leq \sum_{j=1}^{+\infty} (\mu \times \nu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j})$
     $= \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j) + \varepsilon$ per $\varepsilon \to 0$
     $\mu \times \nu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j)$
2. La famiglia dei plurirettangoli è chiusa per unioni numerabili e per intersezioni finite, siano A_i, B_i, C_i, D_i misurabili rispettivamente per μ e per

$\nu \quad \forall i$

$$P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i, \ Q = \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_j \times D_j.$$

$$P \cap Q = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_i \times B_i \cap C_j \times D_j = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j).$$

3. La differenza di due rettangoli è un plurirettangolo
   $R = A \times B, \quad S = C \times D$
   $R \setminus S = A \setminus C \times B \cup A \cap C \times V \setminus D$

4. Ogni plurirettangolo si può scrivere come unione numerabile di rettangoli disgiunti. $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i = A_1 \times B_1 \cup (A_2 \times B_2 \setminus A_1 \times B_1) \cup A_3 \times B_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i \times B_i)$
   $P = A_1 \times B_1 \cup \displaystyle\bigcup_{i=2}^{+\infty} (A_i \times B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \setminus B_j)$

P plurirettangolo
$P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i$
$\chi_P(x, y)$
$\forall y \in Y$ fissato

$$x \in X \to \chi_P(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad (x,y) \in P \\ 0 & se \quad (x,y) \notin P \end{cases} = \begin{cases} 0 & se \quad y \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \\ 1 & se \quad x \in A_i \quad \forall i \ \text{ tale che } y \in B_i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & se \quad y \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \\ \chi_{\bigcup_{\substack{i \\ y \in B_i}} A_i}(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall y \in Y \ \chi_P(\cdot, y)$ è μ-misurabile
Se $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i$ disgiunti
$\forall y \notin \bigcup_i B'_i \Rightarrow \chi_p(\cdot, y) \equiv 0$
Se $y \in \bigcup_i B'_i \Rightarrow \exists! i$ tale che $y \in B_i$ e $\chi_p(\cdot, y) = \chi_{A'_i}$

$$\Rightarrow \int_X \chi_p(x,y) d\mu = \begin{cases} 0 & se \quad y \notin \bigcup_{i=1}^{+\infty} B'_i \\ \mu(\bigcup_{\substack{i \\ y \in B'_i}} A'_i) \end{cases} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i) \chi_{B'_i}(y) \text{ è } \nu\text{-misurabile}$$

$y \in B'_i \cap B'_j \Rightarrow A'_i \cap A'_j = \emptyset$

Proposizione 1
Se $P \subset X \times Y$ plurirettangolo
$\Rightarrow \mu \times \nu(P) = \int_Y \left(\int_X \chi_P(x,y) d\mu \right) d\nu = \int_X \left(\int_Y \chi_P(x,y) d\nu \right) d\mu$

Dimostrazione
$P \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i, A_i \in M_\mu, B_i \in M_\nu$
$\Rightarrow \chi_P(x,y) \le \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i}(x,y)$ *e sono funzioni caratteristiche di plurirettangoli*

$$\int_Y \left(\int_X \chi_P(x,y) d\mu \right) d\nu \le \int_Y \left(\int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i}(x,y) d\mu \right) d\nu$$

$$\leq \int_Y \left(\int_X \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i \times B_i}(x,y) d\mu \right) d\nu$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}(y) d\mu \right) d\nu$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)$$
$$\Rightarrow \int_Y \left(\int_X \chi_P(x,y) d\mu) d\nu \leq \inf\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i), P \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i \} = \mu \times \nu(P)\right.$$
$$P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i$$
$A'_i \times B'_i \cap A'_j \times B'_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
$$\int_Y \left(\int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu$$
$$= \int_Y \left(\int_X \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i)\nu(B'_i) \geq \mu \times \nu(P) \qquad \square$$

Lemma 1
Se $E \subseteq X \times Y$

$$\mu \times \nu(E) = \inf\{\mu \times \nu(P), P \text{ plurirettangolo } E \subseteq P\}.$$

Dimostrazione
$E \subseteq P \Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \mu \times \nu(P)$
$\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \mu \times \nu(P)$
$\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \inf\{\mu \times \nu(P),\ P \ \text{ plurirettangolo } E \subseteq P\}$
Se $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i$ *disgiunti*
$\Rightarrow \mu \times \nu(P) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i)\nu(B'_i) \geq \mu \times \nu(E)$ $\square$

Proposizione 2
$P \subseteq X \times Y$ *plurirettangolo* $\Rightarrow P$ *è* $\mu \times \nu$*-misurabile*

Dimostrazione
Basta dimsotrare che $A \in M_\mu, B \in M_\nu \Rightarrow A \times B \in M_{\mu \times \nu}$
Th. $\forall E \subseteq X \setminus Y \quad \mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B) = \mu \times \nu(E)$
Sia Q *plurirettangolo,* $Q \geq E$

$$\mu \times \nu(Q \cap A \times B) + \mu \times \nu(Q \setminus A \times B).$$

$= \int_Y \left(\int_X \chi_{Q\cap A\times B}(x,y) d\mu \right) d\nu + \int_Y \left(\int_X \chi_{Q\setminus A\times B} \right) d\nu$
$= \int_Y \int_X (\chi_{Q\cap A\times B} + \chi_{Q\setminus A\times B}) d\mu = \int_Y \int_X \chi_Q d\mu = \mu \times \nu(Q)$
$\mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B)$
Prendendo l'inf rispetto a Q

$$\Rightarrow \mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B) \leq \mu \times \nu(E) \Rightarrow A \times B \text{ misurabile.}$$

□

Proposizione 3
$\mu \times \nu$ *è regolare, ovvero* $\forall E \subset X \times Y \quad \exists F \in M_{\mu\times\nu}$ *tale che* $E \subseteq F$ *e* $\mu \times \nu(E) = \mu \times \nu(F) \Rightarrow A \times B$ *misurabile.*

Dimostrazione
per esercizio. □