Ultima Lezione Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-06-04

0.1 Coordinate polari

Possiamo vedere le coordinate polari come l'effetto di una trasfomrazione

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n-1} \times (0, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \\ ((y_1, \ldots, y_{n-1}, \rho) \to \rho\phi(y_1, \ldots, y_n) \end{array}.$$

Quindi per calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0,x_n), x_n \geq 0\}} f(x)dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times (0,+\infty)} f(\rho\phi(y_1, \ldots, y_{n-1}))|detDg|dyd\rho.$$

$$Dg(y, \rho) = \begin{pmatrix} \rho\nabla\phi_1 & \ldots & \phi_1 \\ \rho\nabla\varphi_2 & \ldots & phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho\nabla\varphi_n & \ldots & \varphi_n \end{pmatrix}$$

.

$$|detDg| = |(-1)^{n-1}\varphi_1\rho^{n-1}det\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})} + \ldots + (-1)^{2n}\varphi_n\rho^{n-1}|det\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}|$$

.

$$= \rho^{n-1}\psi(y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

$$\int_{\mathbb{R}_n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\rho\varphi(y_1, \ldots, y_n))\cancel{\rho^{n-1}}\psi(y_1, \ldots, y_{n-1})dyd\rho.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}f(\rho)[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(y_1, \ldots, y_{n-1})dy]d\rho.$$

e chiamo C_n la parte tra le quadre

$$= C_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}f(\rho)d\rho.$$

$$f(x) = \chi_{B_1}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad |x| > 1 \\ 0 & se|x| \geq 1 \end{cases}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} fdx = m_n(B_1) = \omega_n.$$

$$C_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}f(\rho)d\rho = C_n \int_0^1 \rho^{n-1}d\rho = \frac{C_n}{n}.$$

$\Rightarrow C_n = n\omega_n$
quindi per qualunque funzione radiale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = n\omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} f(\rho) d\rho.$$

e $n\omega_n\rho^{n-1}$ è la misura della sfera n dimensionale

0.2 Esercizi delle schede

(X, μ) spazio di misura. $\phi : X \to Y$, abbiamo la misura "push-forward"

$$\phi_\# \mu(E) = \mu(\phi^{-1}(E)) \quad \forall E \subseteq Y.$$

questa è una misura su Y $N = \{E \subseteq Y \ : \ \phi^{-1}(E) \subseteq M_\mu\}$
prendendo $f : Y \to \mathbb{R}$ misurabile rispetto a N
Quindi la controimmagine di ogni Boreliano appartiene a N
f è $\phi_\#\mu$-misurabile

$$\int_Y f d\phi_\# \mu = \int f(\phi(x)) d\mu.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty)} f(g(y,\rho))\rho^{n-1}\psi(y) dy d\rho.$$

$$\Leftrightarrow \int_Y \chi_E d\phi_\# \mu = \int_X (\chi_E(\phi(x)) d\mu.$$

con $E \in N$

$$\int_Y \chi_E d\phi_\# \mu = \phi_\#\mu(E) = \mu(\phi^{-1}(E)) = \int_{\phi^{-1}(E)} d\mu = \int_X \chi_{\phi^{-1}(E)} d\mu.$$

$$= \int_X \chi_E(\phi(x)) d\mu.$$

Possiamo considerare $(0, \infty) \times S^{n-1}$ come spazio prodotto e possiamo quidni metterci una misura
su $(0, +\infty)$ usiamo la misura $\rho^{n-1} d\rho$
Su S^{n-1} usiamo la misura $\sigma_{n-1}(E) = nm_n(\{\rho x \mid \rho \in [0,1], \ x \in E\})$ $\forall E \subseteq S^{n-1}$
guardo quindi la funzione

$$\begin{array}{c} (0,+\infty) \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (\rho, x) \to \rho x \end{array}.$$

Con la misura push forward in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$\rho^{n-1}d\rho(E) = \int_E \rho^{n-1} d\rho$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f d\phi_\#(\rho^{n-1}d\rho \times \sigma_{n-1}) = \int_{(0,+\infty)\times S^{n-1}} f(\rho x)\rho^{n-1} d\rho \times \sigma_{n-1}.$$

$$\int_0^{+\infty} \rho^{n-1} \int_{S^n} f(\rho x) d\sigma_{n-1} d\rho = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Tesi del secondo esercizio:

$$m_n(E) = \phi_{\#}(\rho^{n-1}d\rho \times \sigma_{n-1})(E) = \rho^{n-1}d\rho \times \sigma_{n-1}(\varphi^{-1}(E)).$$

S^n caso particolare $E = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho_1 < |y| < \rho_2,\ \frac{y}{|y|} = x \in E_1\}\ \ E_1 \subset S^{n-1}$

$$\phi^{-1}(E) = \{(\rho, x)\ \ \rho_1 < \rho < \rho_2,\ X \in E_1\} = (\rho_1, \rho_2) \times E_1.$$

$$\rho^{n-1}d\rho \times \sigma_{n-1}((\rho_1,\rho_2)\times E_1) = \rho^{n-1}d\rho((\rho_1,\rho_2))\sigma_{n-1}(E_1) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{n-1}d\rho\sigma_{n-1}(E_1)$$

quindi con $\tilde{E}_1 = \{\rho x \mid x \in E_1, 0 \le \rho \le 1\}$

$$\frac{1}{n}(\rho_2^n - \rho_1^n) n m_n(\tilde{E}_1) = \rho_2^n m_n(E_1) - \rho_1^n(\tilde{E}_1)$$

$$= m_n(\rho_2\tilde{E}_1) - m_n(\rho_1\tilde{E}_1) = m_n(\rho_2\tilde{E}_1 \setminus \rho_1\tilde{E}_1) = m_n(E).$$

dove ρ sta per ρlberto ρgostinelli

AGGIUNGI IMMAGINE 5 12

$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow E$ è unione numerabile di settori di corone sferiche.

f radiale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = m\omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} f(\rho)d\rho.$$

dove $_n$ è la $\sigma_{n-1}(S^{n-1})$, ovvero il volume della sfera unitaria $= n\omega_n$

Esercizio 3

$p \ge 0$

$f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{p/2}}$

f continua $\Rightarrow f$ misurabile

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{p/2}} = \int_0^{+\infty} n\omega_n \rho^{n-1} \frac{1}{(1+|\rho|^2)^{p/2}} d\rho < +\infty.$$

Bisogna solo controllare il comportamento asintotico

$$p \to +\infty \qquad \frac{\rho^{n-1}}{(1+|\rho|^2)^{p/2}} \sim \rho^{n-1-p} = \frac{1}{\rho^{p+1-n}}.$$

che è integrabile solo se l'esponente è > 1 quindi $\Rightarrow p > n$

$$\int_0^R n\omega_n \rho^{n-1} \frac{1}{(1+|\rho|^2)^{p/2}} d\rho + \int_R^{+\infty} n\omega_n \rho^{n-1} \frac{1}{(1+|\rho|^2)^{p/2}} d\rho.$$

dove il primo membro è $< +\infty$, quindi va controllato solo il secondo.

Seconda funzione

$f(x) = \frac{e^{-|x|^2}}{|x|^p}$ f continua in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow f$ misurabile

$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \int_0^{+\infty} n\omega_n \frac{\rho^{n-1}e^{-\rho^2}}{\rho^p} d\rho$
Per $\rho \to 0$ $\frac{\rho^{n-1}}{\rho^p} e^{-\rho^2} \sim \frac{1}{\rho^{p-n+1}}$ regolarità $\Leftrightarrow p < n$
Per $\rho \to +\infty \rho^{n-1-p} e^{-\rho^2}$ è integrabile $\forall p$
Terza funzione

$$f(x) = \frac{\lg |x|}{1 + |x|^p}.$$

f continua in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow f$ misurabile

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \int_0^{+\infty} n\omega_n \frac{\rho^{n-1}|\lg \rho|}{\rho^p} d\rho.$$

$$\frac{\rho^{n-1}|\lg \rho|}{1 + \rho^p} \to 0 \quad per \quad \rho \to 0^+.$$

per $\rho \to +\infty$ $\frac{\rho^{n-1}|\lg \rho|}{1+\rho^p} \sim \rho^{n+1-p}|\lg \rho|$ per $p + 1 - n > 1 \Rightarrow p > n$
In particolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{\lg \rho}{\rho^\alpha} d\rho < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

$$\frac{1}{\rho^\alpha} \leq \frac{\lg \rho}{\rho^\alpha} \leq \frac{1}{\rho^{\alpha-\varepsilon}} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Quarta funzione
$f(x) = \dfrac{\chi_{\{|x|>2\}}}{|x||\lg |x||^p}$ prodotto di funzioni misurabili quindi è misurabile.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|dx = \int_2^{+\infty} n\omega_n \rho^{n-1} \frac{1}{\rho(\lg \rho)^p} d\rho.$$

Questo non è mai finito, se $n = 1$

$$2 \int_2^{+\infty} \frac{1}{\rho(\lg \rho)^p} d\rho = 2 \frac{(\lg \rho)^{1-p}}{1-p} |_2^{+\infty} < +\infty \quad \Leftrightarrow p > 1.$$

se $n = 2$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\lg \rho)^p} = +\infty \quad \forall p$
$n \geq 3 \quad \int_2^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(\lg \rho)^p} = +\infty \quad \forall p$
Quinta funzione
$f(x) = \frac{\chi_{\{|x|>\frac{1}{2}\}}}{|x||\lg |x||^p}$

$$\int_0^{1/2} \frac{n\omega_n \rho^{n-2}}{|\lg \rho|^p} d\rho.$$

se $n = 1$

$$2 \int_0^{1/2} \frac{1}{\rho|\lg \rho|^p} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p > 1.$$

Quindi $< +\infty \;\; \forall p \geq 0$ se $n \geq 2$, $p > 1$ se $n = 1$
Sesta funzione

$f(x) = \dfrac{\chi_{\{\frac{1}{2}<|x|<2\}}}{|x||\lg|x||^p}$
$\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{n\omega_n \rho^{n-2}}{\cancel{\rho}|\lg\rho|^p} d\rho$
$\to 1 \quad |\lg\rho| \sim |\rho - 1|$

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{|\rho-1|^p} d\rho < +\infty \quad \Leftrightarrow p < 1.$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \Leftrightarrow t > 0.$$

È un interpolazione del fattoriale. $\Gamma(n+1) = n!$ e questa quindi diverge a $+\infty$ come i fattoriali. Per la formula di ω_n compare questa funzione (forse, non sono sicuro di aver capito bene).