Lezione 21 Algebra I

Federico De Sisti

2024-12-10

1 Esercizi Schede

$G = GL_2(\mathbb{C})$
$X = Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$
G$\times X \to X$
$(A, B) \to A \cdot B$ è un'azione tra gruppi
Studiare le orbite
Soluzione
$O_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$
$O_{Id} = \{$ matrici invertibili$\}$
Restano da studiare solo i casi di matrici non invertibili e non nulle
Se $det(B) = 0$ allora $B = \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix} \qquad x, y, \lambda \in \mathbb{C}$
$O_B =?$
Caso 1
Se $x = 0 \Rightarrow y \neq 0$
$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & \lambda y \end{pmatrix}$
Allora scelgo
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Dove ho messo al posto dei punti interrogativi numeri appositi per arrivare alla matrice e_{12}
Quindi se $x \neq 0 \Rightarrow O_B = O_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$
Caso II
Se $x \neq 0$
Scelgo $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ ? & 1 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$O_B = O_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$
La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Scambia le righe di B
$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} c & b \\ a & b \end{pmatrix}$

1.1 Ideali

Definizione 1 (Ideali)
$(R, +, \cdot)$ anello
Un ideale è un sottogruppo $(I, +) \leq (R, +)$ tale che

1. $\forall a \in I \quad \forall x \in R$
   $\Rightarrow x \cdot a \in I$ *[Ideale Sinistro]*
2. $\forall a \in I \;\; \forall x \in R$
   $\Rightarrow a \cdot x \in I$ *[Ideale Destro]*
3. $\forall a \in I, \forall x \in R$
   $\Rightarrow \begin{cases} x \cdot a \in I \\ a \cdot x \in I \end{cases}$ *[Ideale bilatero]*

Osservazione
Se R è commutativo allora un sottogruppo (additivo) $I \leq R$
è ideale sinistro $\Leftrightarrow$ è un ideale destro $\Leftrightarrow$ è un ideale bilatero.

Notazione 1
*R anello I ideale bilatero lo chiameremo semplicemente **ideale***

Osservazione
R anello $\Rightarrow (R, +)$ è un gruppo abeliano
$\Rightarrow I \subseteq R$ ideale è un sottogruppo additivo normale
Esercizio:
R anello $I \subseteq R$ ideale $\Rightarrow (R/I, +)$ gruppo abeliano.
Dimostrare che l'operazione
$\cdot \;:\; R/I \times R/I \to R/I$
(aI,bI) $\to (ab)I$
è ben definita e dedurre che $(R/I, +, \cdot)$ è un anello.
Esempio
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello
$(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un sottoanello
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un ideale in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
Infatti $\sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$
Esempi
R anello
$\Rightarrow I = \{0\}$ è un ideale
$\Rightarrow I = R$ è un ideale

Definizione 2
R anello commutativo. $I \subseteq R$ ideale
I si dice primo se $I \neq R$ e $ab \in I \Rightarrow a \in I$ oppure $b \in I$

Esercizio
$R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Determinare tutti gli ideali primi di R
Esercizio:
R anello $I \subseteq R$ ideale
Dimostrare che le seguenti sono equivalenti

1. R/I è un dominio d'integrità
2. Se $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I$ oppure $b \in I$

Teorema 1 (Omomorfismo per anelli)
Dato $\varphi : R \to S$ un omomorfismo di anelli abbiamo

1. *$ker(\varphi) \subseteq R$ è un ideale*
2. *esiste un unico omomorfismo di anelli $\bar{\varphi} : R/ker(\varphi) \to S$ tale che* ***TODO inserisci immagine omomorfismo schema (foto sul telefono)***
3. *Esiste un isomorfismo di anelli $R/ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$*

Dimostrazione (Esercizio)
1) Basta verificare che se $x \in ker(\varphi)$ e $y \in R$ allora $\begin{cases} x \cdot y \in ker(\varphi) \\ y \cdot x \in ker(\varphi) \end{cases}$
$x \in ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = 0$
Quindi
$\cdot\ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
$= 0 \cdot \varphi(y)$
$= 0$
$\Rightarrow x \cdot y \in Ker(\varphi)$
$\cdot\ \varphi(y \cdot x) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$
$= \varphi(y) \cdot 0$
$= 0$
$\Rightarrow y \cdot x \in ker(\varphi)$ $\square$

1.2 Caratteristica

Voglio associare ad ogni anello un numero intero che ci possa dare qualche informazione su di esso.

Definizione 3
$(R, +, \cdot)$ *anello.*
Considero l'omomorfismo di anelli
$\psi : \mathbb{Z} \to R$

$1 \to 1_R$

$n \to (1_R + \ldots + 1_R)$

Osserviamo che ψ *è un omomorfismo di anelli*

$$\psi(nm) = \psi(n) \cdot \psi(m).$$

Infatti
$\psi(n) \cdot \psi(m) =$
$= \underbrace{(1_R + \ldots + 1_R)}_{n \text{ volte}}\underbrace{(1_R + \ldots + 1_R)}_{m \text{ volte}}$
$= 1_R\underbrace{(1_R + \ldots + 1_R)}_{m \text{ volte}} + \ldots + 1_R\underbrace{(1_R + \ldots + 1_R)}_{m \text{ volte}}$
$= \psi(n \cdot m)$
Allora $ker(\psi) = (m) \subseteq \mathbb{Z}$ *per qualche* $m \geq 0$
m *si dice caratteristica di* R.

Osservazione
Supponiamo che R abbia caratteristica positiva $m > 0$ allora $m = ord_{(R,+)}(1_R)$
Esercizio:
$(R, +, \cdot)$ campo
Dimostrare che la caratteristica R è 0 oppure un numero primo
Esempi:
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$
sono campi di caratteristica 0
Mentre $\mathbb{Z}/(p)$ è un campo di caratteristica p (con p primo)
Esercizio
Un anello commutativo è un campo se e solo se non possiede ideali non banali
Soluzione
Supponiamo che R sia un campo e sia $I \subseteq R$ un ideale $I \neq \{0\}$
Allora dobbiamo mostrare che $I = R$.
Se $a \in I \neq \{0\}$ considero $a^{-1} \in R$
$a^{-1} \cdot a = 1 \in I$ [Dato che è un ideale]
Dato $b \in R$:
$b = b \cdot 1 \in I$ [Dato che 1 è nell'ideale]
Viceversa:
dato $a \in R \setminus \{0\}$ dobbiamo verificare che esiste $b \in R$ tale che $a \cdot b = 1$
Definiamo $I := \{a \cdot r | r \in R\} \subseteq R$

I è un ideale. Inoltre $I \neq \{0\}$ poiché $a \in I$
$\Rightarrow I = R \Rightarrow 1 \in I$ [Per ipotesi]
Quindi esiste $b \in R$ tale che $a \cdot b = 1$
Osservazione
Se R campo e $\psi : R \to S$ è un omomorfismo di anelli, allora ψ è iniettivo oppure ψ è l'omomorfismo nullo.
Abbiamo verificato che $ker(\psi)$ è un ideale in R.
Quindi:

- $ker(\psi) = \{0\}$
  $\Rightarrow$ iniettivo

- $ker(\psi) = R$
  $\Rightarrow \psi(r) = 0 \quad \forall r \in R$