Lezione N Geometria 2

Federico De Sisti

2025-05-12

0.1 Rivestimenti e svestimenti di alberto agostinelli

Esempi:

1. Sia $p : E \to X$ un omeomorfismo, allora p è un rivestimento. Infatti dato $x \in X$ prendiamo $V \ni x$ aperto banalizzante mettendo $V = X$, Allora:

$$p^{-1}(V) = E = U_1.$$

infatti $p|_{U_1} : U_1 \to V$ è semplicemente $p : E \to X$ omeomorfismo.

2. in $\mathbb{R}^2$ prendiamo $E = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
$p : E \to \mathbb{R}$
$(x, n) \to x$
proiezione sulla prima coordinata.
È un rivestimento.
Qui posso prendere $V = \mathbb{R}$ allora $p^{-1}(V) = E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{R} \times \{n\}$
$U_n := \mathbb{R} \times \{n\}$ è aperto in E e $p|_{U_n} : U_n \to V$ è omeomorfismo

3. p : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(x,y) $\to x$
non è un rivestimento, infatti prendendo $V \ni x(\in \mathbb{R})$ intorno aperto in $\mathbb{R}$ è vero che

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} V \times \{y\}.$$

con $p|_{V\times\{y\}} V \times \{y\} \to V$ è omeomorfismo
però $V \times \{y\}$ non è aperto in $\mathbb{R}^2$

4. p: $\mathbb{R} \to S^1$
t $\to$ (cos$(2\pi t$, sin$(2\pi t)$)
È un rivestimento.
Non è rivestimento banale poiché se $V = S^1$ fosse aperto banalizzante la sua controimmagine $\mathbb{R}$ sarebbe unione disgiunta di aperti, ciascuno omeomorfo a S^1non è vero perché $\emptyset$ è l'unico compatto aperto di $\mathbb{R}$
preso $(x_0, y_0) \in S^1$ scegliamo $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\rho(t_0) = (x_0, y_0)$
l'intervallo $]t_0 = \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}[$ va nella semicirconferenza che contiene (x_0, v_0) nel mezzo.
Allora $\rho^{-1}(V) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]t_0 - \frac{1}{4} + n, t_0 + \frac{1}{4} + n[$ con $U_n =]t_0 - \frac{1}{5} + n, t_0 + \frac{1}{4} + n[$ sono aperti e disgiunti, ciascuno va omeomorficamente in V tramite ρ (esercizi settimanali)

5. La restrizione $\rho|_{]-2,2[} :]-2, 2[\to S^1$ non è un rivestimento
Scegliendo V intorno di $(1, 0)$ dato da $V = \rho(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ con $\varepsilon > 0$ piccolo.
allora

$p|_{]-2.2[})^{-1}(V) =]-2, 2+\varepsilon[\cup]-1-1\varepsilon, -1+\varepsilon[\cup]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\cup]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\cup]2-\varepsilon, 2[$

.

dove il primo e l'ultimo non vanno omomeorficamente su V tramite ρ

Proposizione 1
Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Supponiamo X connesso. Allora $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)| \quad \forall x, y \in X$

Dimostrazione
Scegliamo $x_0 \in X$ definiamo

$$A = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}.$$

chiaramente $x_0 \in A$
Sia $V \subseteq X$ aperto banalizzante contenente x_0
Scriviamo

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

come nella definizione di rivestimetno allora ciascuna U_i contiene almeno 1 punto che va in x_0
Cioè $|I| = |p^{-1}(x_0)|$
La stessa cosa vale per ogni punto di V. Segue $V \subseteq A$
lo stesso vale con $y \in X$ al posto di x_0 e un aperto canonizzante W contenente y al posto di V, se $y \in A$. Quindi A intorno di ogni punto, cioè A aperto. Se invece $y \notin A$ allora $\subseteq X \setminus A$ per lo stesso ragionamento.
Cioè $X \setminus A$ è aperto, segue $A \in \{X, \emptyset\}$ ma A è non vuoto, quindi $A = X$ □

Esempio
$E = \{a, b, c\}$ topologia discreta
$X = \{d, e\}$ topologia discreta
$p(a) = p(b) = d \;\; p(c) = e$
$p^{-1}(V) = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} := U_1 \cup U_2$
$\forall i \in I = \{1, 2\}$ i U_i è omeomorfo a V tramite p
$e \in X$ ha aperto banalizzante W
$p^{-1}(W) = \{e\} = U_1$ è omeomorfo a W.

Esercizio [ha chiesto all'esame in passato roba simile]
Esempio analogo con meno di 5 punti in totale.

Definizione 1
Sia $p : E \to X$ rivestimento.
Supponiamo X connesso e $|p^{-1}(x)| = d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall x \in X$. Allora p si dice di grado d.

Esempio

1. $\rho : \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento non ha grado finito

2. p: $\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) & \to & (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) \end{array}$ Un modo per dimostrare che p è continua e osservare che

$$p(z) = z^2 \quad se \quad z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

analogamente si definiscono rivestimenti $S^1 \to S^1$ di grado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ qualsiasi, ponendo $p(z) = z^n$

0.2 azioni propriamente discontinue

Ogni rivestimento suriettivo è un'identificazione (perchè è aperto) quindi possiamo costruire un rivestimento usando i quozienti.

Definizione 2
Sia E spazio topologico, $G \subseteq Omeo(E)$ sottogruppo. Si dice che G agisca in modo propriamente discontinuo se $\forall e \in E \quad \exists U \subseteq E$ aperto $U \ni e, t.c.$ $U \cap g(U) = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{Id_E\}$

Esempio

1. $E = \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f_n : &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to x + n \end{aligned}.$$

$G = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ abbiamo visto E/G è omeomorfo a S^1, Qui G agisce in modo propriamente discontinuo, sia $e \in \mathbb{R}$
Basta prendere $U =]e - \frac{1}{2}, e + \frac{1}{2}[$ e avere
$f_n(U) \cap U = \emptyset \quad \forall n \neq 0$

Teorema 1
Sia E spazio topologico, sia $G \subseteq Omeo(E)$ sottogruppo che agisce in modo propriamente discontinuo, Allora il quoziente $p : E \to E/G$ è un rivestimento.

Dimostrazione
Sappiamo che p è aperta (vale $\forall G$)
Sia $e \in E$ e considero $[e] \in E/G$
Sia $U \subseteq E$ aperto contenente e come nella definizione precedente, poniamo $V = p(U)$, è aperto in E/G
Dimostriamo che V è aperto banalizzante.
$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U) =$ *(tutti i punti equivalenti a qualche punto di U)*
Verifichiamo che i sottoinsiemi $g(U)$ sono aperti (ok perché $U \subseteq E$ aperto e $q : E \to E$ è omeomorfismo) e disgiunti cioè $g(U) \cap h(U) = \emptyset$ se $g \neq h$

Abbiamo
$g(U) \cap h(U) = h((h^{-1} \circ g)(U) \cap U)$
$= h(\emptyset) = \emptyset$
Quindi ho scritto $p^{-1}(V)$ *come unione disgiunta di aperti di* E.
Fissiamo $g \in G$ *e considero.*

$$p|_g(U) : g(U) \to V.$$

Questa restrizione è continua, ed è aperta perché p *è aperta e* $g(U)$ *è aperta in* E.
Inoltre $p|_{g(U)} : g(U) \to V$ *è iniettiva. Infatti* U *non ha coppie di punti distinti in relazione, quindi* $g(U)$ *neppure (verifica per casa).*
Inoltre $p|_{g(U)} : g(U) \to V$ *è suriettiva, infatti sia* $[u] \in V$ *punto qualsiasi di* V, *con* $u \notin U$ *Allora* $g(u) \in g(U)$ *e*

$$p(g(u)) = [g(u)] = [u].$$

Quindi p *è un rivestimento.* □

0.3 Sollevamento di cammini e omotopie

Definizione 3
Sia $f : X \to Y$ *applicazione fra insiemi qualsiasi. Una sezione di* f *è un'applicazione* $s : Y \to X$ *tale che* $f \circ s = Id_Y$

Osservazione:
Se f ha almeno una sezione, allora f è suriettiva e ogni sua sezione s è iniettiva
Esempio:
La solita $\rho : \mathbb{R} \to S^1$ non ha sezioni continue, perché una sezione continua sarebbe $s : S^1 \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, che non esiste.

Definizione 4
Sia $p : E \to X$ *rivestimento su* $V \subseteq X$ *aperto banalizzante,* $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ *come nella definizione di rivestimento,* $q = p|_U : U \to V$ *è omeomorfismo , l'inversa* $q^{-1} : V \to U$ *è detta sezione locale di* p.

Definizione 5
Sia $p : E \to X$ *rivestimento, sia* Y *spazio topologico e* $f : Y \to X$ *continua.*
INSERISCI IMMAGINE 17: 27
Un sollevamento q *di* f *è un applicazione continua* $g : Y \to E$ *tale che* $f = p \circ g$

Teorema 2
Siano $p: E \to X, f: Y \to X$ *come nella definizione, siano* $g, h: Y \to E$ *sollevamento di* f. *Supponiamo* Y *connesso, allora* $g(y) = h(y) \quad \forall y \in Y$ *oppure* $g(y) \neq h(y) \quad \forall y \in Y$

Dimostrazione
Sia $A = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$
Dimostriamo che A *è sia aperto che chiuso. Sia* $y \in Y$
Sia $V \subseteq X$ *aperto banalizzante,* $V \ni f(y)$, *scriviamo* $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ *come nella definizione.*
Visto che $f = p \circ g$ *e anche* $f = p \circ h$ *abbiamo* $g(y), h(y) \in p^{-1}(V)$
Siano $i, j \in I$ *tale che*

$$U_i \ni g(y), \quad U_j \ni h(y).$$

(eventualmente $i = j$*)*
Sia $W = g^{-1}(U_i) \cap h^{-1}(U_j)$
è aperto in Y *e contiene* g
Supponiamo $g(y) = h(y)$ *cioè* $y \in A,\ i = j$.
Allora $w \in W$ *abbiamo*

$$p(g(w)) = p(h(w)) = f(w).$$

Allora $g(w), h(w)$ *sono punti dello stesso* U_i *che vanno entrami in* $f(W)$ *tramite* p.
Ma $p|_{U_i} U_i \to V$ *è iniettiva, quindi* $g(w) = h(w)$. *Segue* $W \subseteq A$ *intorno aperto di* y
Quindi A *è aperto*
Supponiamo $g(y) \neq h(y)$, *cioè* $y \notin A$
Allora $U_i \neq U_j$ *e* $i \neq j$, *perché* U_i *ha solo il punto* $g(y)$ *che va in* $f(y)$ *tramite* p
Ma allora $U_i \cap U_j = \emptyset$, *da cui* $g(w) \in U_i, h(w) \in U_j$ *devono essere diversi* $\forall w \in W$.. *Quindi* $W \subseteq Y \setminus A$, *cioè* A *è chiuso*
Y *è connesso, quindi* $A = Y$ *oppure* $A = \emptyset$ $\square$

Teorema 3 (Sollevameto dei cammini)
Siano $p: E \to X$ *un rivestimento*
$\alpha: [0,1] \to X$ *cammino, sia* $e \in E$ *tale che* $p(e) = \alpha(0)$ *Allora* $\exists!$ *sollevamento*

$$\alpha_e^{\uparrow}: [0,1] \to E.$$

di α *tale che* $\alpha_e^{\uparrow}(0) = e$

Dimostrazione
Sia $R = \{V \subseteq X,$ *aperto banalizzante* $\}$
è ricoprimento aperto di X. *Applichiamo il corollario al teorema del numero di Lebesgue otteniamo* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *e aperti* $V_1, \ldots, V_n$ *banalizzanti tali che*

$$\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset V_i.$$

Considero $s_1 : V \to p^{-1}(V_1)$
se locale tale che $s_1(\alpha(0)) = e$ *definisco* $\alpha_1 : [0, \frac{1}{n}] \to E$
come $\alpha_1 = s_1 \circ \alpha$
Chiaramente α_1 *solleva* $\alpha|_{[0,\frac{1}{n}]}$ *ricoperto da* $e_2 = \alpha_1(\frac{1}{n}) \in E$ *uso la sezione locale* $s_2 : V_2 \to p^{-1}(V_2)$ *tale che* $s(\alpha(\frac{1}{n})) = e_2$
e definisco $\alpha_2 : [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \to E$ *come* $a\alpha_2 = s_2 \circ \alpha$
Iterando ottengo

$$\alpha : [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \to E.$$

che si incollano per costruzione al cammino $\alpha_e^{\uparrow}$ $\square$