Lezione 11 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-26

0.1 Esercitazioni, Foglio 4

Esercizio 4
$f : X \to Y$

1. se $B \subseteq 2^Y$ σ-algebra di Y
   $A = \{f^{-1}(B), B \in B\}$ è una σ-algebra in X

Svolgimento
$\emptyset \in B \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
sia $f^{-1}(C) \in A$, con $C \in B$
$(f^{-1}(C))^c = X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c)$
$C \in B \Rightarrow C^c \in B \Rightarrow (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in A$
$\{f^{-1}(C_i)\}_I \geq 1, C \in B$
$= \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A$

2. A σ-algebra in X
   $B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1})B_{\in} A\}$ è una sigma algebra in Y

Svolgimento
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \in B$
$C \in B \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A \Rightarrow f^{-1}(C)^c \in A \Rightarrow f^{-1}(C^c) \in A \Rightarrow C^c \in B$
$\{C_i\} \subset B \Leftrightarrow f^{-1}(C_i) \in A \quad \forall i$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in C$

3. $X \xrightarrow{f} Y$
   $f^{-1}(\sigma < F >) \leftarrow \sigma < F >$ con $F \subset 2^X$
   $\|$
   $\sigma < f^{-1}(F) > \leftarrow F$ con $F \subset 2^X$

Soluzione
Per il primo punto dell'esercizio la controimmagine della σ-algebra e comunque una σ-algebra.
$f^{-1}(\sigma < F >) \supset f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(\sigma < F >) \supseteq \sigma < f^{-1}(F) >$
$\sigma < f^{-1}(F) > \quad B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma < f^{-1}(F) >\}$
questa e'una σ-algebra in Y (punto 2)
$f^{-1}(B) \subseteq < f^{-1}(F) >$ quindi sono l'una contenuta nell'altra, quindi le due σ-algebre coincidono.

Esercizio 5
Sia X un insieme $(\neq)$ A una σ-algebra in X e sia $\mu : A \to [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\{E_i\} \subset A$, $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$

Osservazione
μ rimane monotona e subadditiva

Infatti :
$A, B \in A \quad A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in A$
$B = A \cup B \setminus A \cup \emptyset \cup \ldots$
$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
Inoltre $\{A_i\} \subset A$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$
$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$
Esercizio
Dimostrare che $\exists \bar{\mu} : 2^X \to [0, +\infty]$ misura
tale che $\underline{A} \subseteq \sigma$-algebra dei $\bar{\mu}$-misurabili e $\forall A \in \mathbb{A} \quad \bar{\mu}(A) = \mu(A)$
$E \subseteq X \quad \bar{(}E) = \inf\{\mu(A),\ A \in \mathbb{A}, A \supset E\}$
$\bar{\mu}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(\emptyset) = 0$
$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ se $\exists i$ t.c. $\bar{\mu}(E_i) = +\infty$
Allora $\bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) = +\infty$
se $\bar{\mu}(E_i) < +\infty \quad \forall \imath \ \forall i \exists A_i \in A$ tale che $E_i \subseteq A_i \quad \bar{\mu}(E_i) \leq \mu(A) < \bar{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in A \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$
$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i)$
Se $E \in A \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(E)$
e $\forall A \in A, A \supseteq E \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(E) \Rightarrow \bar{\mu}(E) \geq \mu(E) \Rightarrow \mu(E) = \bar{\mu}(E)$
$A \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow A \Rightarrow A$ è $\bar{\mu}$-misurabile cioè $\forall F \subseteq X$

$$\bar{\mu}(F) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A).$$

Se $F \in \mathbb{A} \Rightarrow A, F \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(F) = \mu(F)$
$= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$
se $F \notin A$, e $\bar{\mu}(F) < \infty$
$\forall k \ \exists A_k \in A \mid F \subseteq A_k$, e $\bar{\mu}(F) \leq \mu(A_k) < \bar{\mu}(F) + \frac{1}{k}$
$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathbb{A}, A \supseteq F$
$\bar{\mu}(F) \leq \mu(A) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mu(A_j) \leq \bar{\mu}(F)$
$\exists A \in \mathbb{A}$ tale che $\bar{\mu}(F) = \mu(A) \ F \subseteq A$
$\bar{\mu}(F) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$
Dato che $\exists B \in \mathbb{A}$ tale che $F \subseteq B$ è $\bar{\mu}(F) = \mu(B)$

Esercizio 6
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
$f(E) \in \eta \ \forall E \in \eta \Leftrightarrow m(f(E)) = 0 \ \forall E$ se $m(E) = 0$
$(\Rightarrow)$ sia N tale che $m(N) = 0$
per assurdo supponiamo $m(f(N)) > 0$
$\Rightarrow \exists V \subset f(N) \ V \notin \eta$ (ogni insieme di misura positiva contiene un insieme non misurabile)
$f^{-1}(V) \cap N \subset N \Rightarrow m(f^{-1}(V) \cap N) = 0$
$\Rightarrow f^{-1}(V) \cap N \in eta \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap N) = V \notin \eta$ ma dovrebbe appartenerci in quanto è immagine di un misurabile (ha misura nulla).
$(\Leftarrow)$
$E \in \eta$ tale che $f(E) \in \eta$
$E \in \eta \Leftrightarrow E = B \cup N \ m(N) = 0 \ B$ boreliano.

$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq E, C_n$ chiusi
$f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n \cup N) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(C_n) \cup f(N)$ con $m(f(N)) = 0$ per ipotesi $\Rightarrow f(N) \in \eta$
Se E è limitato $\Rightarrow C_n$ sono compatti $\forall n$
$\Rightarrow f(C_n)$ è compatto $\forall n$ (f continua)
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(C_n) \in B \subseteq \eta$ (boerliano)
$\Rightarrow f(E) \in \eta$
In generale, se $E \in \eta \Rightarrow \bigcup_{n-1}^{+\infty} E \cap [-n, n]$, limitati $\forall n$ $f(E) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(E \cap [-n, n]) \in \eta$ unione misurabile di misurabili.
Esercizio 11
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 0, x > 1, \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ n-1 \quad \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \ x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \ a_n \neq 0 \ \ a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \end{cases}.$$

le prime $n-1$ cifre sono tutte nulle, e gli a_k sono le cifre del numero irrazionale
$x \in [0,1] a_1 \neq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{a_1}{10} \geq \dfrac{1}{10}$
Se $x \in [0, \frac{1}{10}], a_2 \neq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$
$f(x) = \chi_{(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}) \setminus \mathbb{Q}}$ (tra 0,01 e 0,1)
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}}(x)$
Quindi f è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.