Lezione 8 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-26

1 Prodotti tra gruppi

1.1 Prodotto diretto di gruppi

Definizione 1
Siano $(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ *gruppi il loro prodotto diretto risulta l'insieme* $(G_1 \times G_2)$ *dotato dell'operazione:*

$$(g_1, g_2) \cdot (f_1, f_2) = (g_1 \cdot f_1, g_2 * f_2) \;\; \forall g_1, f_1 \in G_1, \quad \forall g_2, f_2 \in G_2.$$

e lo indichiamo con $(G_1 \times G_2)$

Proposizione 1
bold $(G_1 \times G_2, \cdot)$ *è un gruppo*

Dimostrazione
L'associatività segue da quella di $\cdot$ *e* $*$ *l'elemento neutro è* (e_1, e_2)
l'inverso di (g, f) *con* $g \in G_1$ *e* $f \in G_2$ *risulta* (g^{-1}, f^{-1}) $\square$

Esercizio
$(G_1, \cdot)$ e $(G_2, *)$ gruppi
Dimostrare: 1) $|G_1 \times G_2| = |G_1||G_2|$
2) $G_1 \times G_2$ è abeliano se e solo se G_1 e G_2 sono entrambi abeliani
3) Dati due sottogruppi $H \leq G_1$ e $K \leq G_2 \Rightarrow H \times K \leq G_1 \times G_2$
4) Dati $H \trianglelefteq G_1$ e $K \trianglelefteq G_2 \Rightarrow H \times K \trianglelefteq G_1 \times G_2$
5) Dati $H \trianglelefteq G_1$ e $K \trianglelefteq G_2$

$$G_1/H \times G_2/H \cong {G_1 \times G_2}\big/{H \times K}.$$

Dimostrazione (4,5)

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \frac{G_1}{H} \times \frac{G_2}{K} \\
\frac{(G_1 \times G_2)}{ker\varphi} \arrow[ur, dotted, "\exists ! \bar{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

dove

$$\varphi(g_1, g_2) = (g_1 H, g_2 K)$$

Dal primo teorema di isomorfismo

$$Im\varphi \cong \frac{G_1 \times G_2}{ker\varphi}.$$

$\cdot \varphi$ *suriettiva poichè* $\pi_H e \pi_K$ *sono suriettive*
$\cdot \;\; ker\varphi = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 | \varphi(g_1, g_2) = (H, K)\}$
$= \{(g_1, g_2) | g_1 H = H \;\; e \;\; g_2 K = K\}$

$\{(g_1, g_2)|g_1 \in H, g_2 \in K\} = H \times K$
quindi $H \times K \trianglelefteq G_1 \times G_2$

$$\frac{G_1 \times G_2}{H \times K} \cong G_1/H \times G_2/K.$$

$\square$

Esercizio (importante)
$(G_1, \cdot)$ e $(G_2, *)$ gruppi
$H, K \trianglelefteq G_1 \times G_2$ tali che $H \cap K = \{\tilde{e}\}$ dove $\tilde{e} = (e_1, e_2)$
Dimostrare che ogni elemento di H commuta con ogni elemento di K. **dimo**Consideriamo $h \in H, k \in K$ e verifichiamo che $hk = kh$
Idea:
Dimostrare che $hkh^{-1}k^{-1} = e$
Data l'ipotesi $H \cap K = \{e\}$ è sufficiente dimostrare che $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$
Sfruttare la normalità di H e K
Per l'esercizio sotto chiedi a Marco
Esercizio
$(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ gruppi

$$H := G_1 \times \{e_2\} = \{(g, e_2)|g \in G_1\} \leq G_1 \times G_2.$$

$$H := e_1 \times G_2\} = \{(e_1, g)|g \in G_2\} \leq G_1 \times G_2.$$

Verificare che H e K soddisfano le ipotesi dell'esercizio precedente

Definizione 2
$(G, \cdot)$ gruppo $H, K \leq G$
Diremo che G è
Prodotto diretto interno di H e K se:
1) $H, K \trianglelefteq G$
2) $H \cap K = \{e\}$
3) $HK = G$

Teorema 1
$(G, \cdot)$ gruppo
1) Se G è un prodotto diretto interno di $H, K \leq G$ allora $G \cong H \times K$
2) Se $G \cong G_1 \times G_2$ allora esistono $H, K \leq G$ tali che G sia prodotto diretto interno di H e K e inoltre $H \cong G_1, K \cong G_2$

Dimostrazione (1)
$\psi : H \times K \to G$
$(h, k) \to hk$
Dobbiamo verificare che ψ sia isomorfismo
1)ψ è suriettiva perchè ogni elemento di G si scrive come hk quindi $Im(\psi) = G$

2)È anche iniettiva infatti se $\psi(g_1, k_1) = \psi(h_2, k_1)$

$$\Rightarrow h_1k_1 = h_2k_2$$
$$\Rightarrow h_2^{-1}h_1k_1 = k_2$$
$$\Rightarrow h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K = \{e\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} h_2^{-1}h_1 = e \\ k_2k_1^{-1} = e \end{cases} \Rightarrow (h_1, k_1) = (h_2, k_2)$$
$$\Rightarrow \psi \text{ iniettiva}$$

Bisogna in fine dimostrare che ψ *è un omomorfismo, ovvero che*

$$\psi(h_1h_2, k_1k_2) = \psi(h_1, k_1)\psi(h_2, k_2).$$

dunque

$$\psi(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2 = h_1(h_2k_1)k_2 = h_1(k_1h_2)k_2 = \psi(h_1, k_1)\psi(h_2, k_2).$$

Ricordando che tutti gli elementi di H *commutano con quelli di* K □

Dimostrazione (2)
Per ipotesi esiste un isomorfismo $\varphi : G_1 \times G_2 \to G$
$(g_1, g_2) \to \varphi(g_1, g_2)$
considero
$H := \varphi(G_1, \{e_2\})$
$K := \varphi(\{e_1\} \times G_2)$
Abbiamo visto che
$\cdot G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G_1 \times G_2 \to H \trianglelefteq G$
$\cdot \{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2 \to K \trianglelefteq G$

$$H \cap K = \varphi((G_1 \times \{e_2\}) \cap (\{e_1\} \times G_2)) = \{e\}.$$

$$HK = \varphi((G_1 \times \{e_2\})(\{e_1\} \times G_2)) = G.$$

Le opportune restrizioni di φ *forniscono gli isomorfismi*

$$H \cong G_1 \times \{e_2\} \cong G_1.$$

$$K \cong \{e_1\} \times G_2 \cong G_2.$$

□

Esempio:
Siano $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.
$MCD(n, m) = 1$
Consideriamo $C_{nm} =< p >$

dove $ord(p) = nm$
Considero
$$H =< \rho^m > \quad K =< \rho^n > .$$
$|H| = ord(\rho^m) = n$
$|K| = ord(\rho^n) = m$
Verifichiamo che
$$C_{nm} \cong H \times K.$$
Dobbiamo mostrare:

1. H, KC_{nm}

2. $H \cap K = \{Id\}$

3. $HK = C_{nm}$

1) C_{nm} abeliano, quindi H, KC_{nm}
2) $H \cap K =?$
sia $\rho^h \in H \cap K$
Allora
$$\begin{cases} \rho^h = (\rho^m)^{t_1} \\ \rho^h = (\rho^h)^{t_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m|h \\ n|h \end{cases} .$$
Ma $h \geq mcm(m, n) = mn \Rightarrow h = mn \Rightarrow \rho^h = Id \Rightarrow H \cap K = \{Id\}$
$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{nm}{1}.$$
$\Rightarrow HK$ è tutto chiuso quindi è C_{nm}

Definizione 3 (Automorfismo)
$(G, \cdot)$ *gruppo*
Un automorfismo di G è un isomorfismo $\varphi : G \to G$

Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo
$\Rightarrow Aut(G) = \{$automorfismi di $G\}$
è un gruppo (rispetto alla composizione)
Esempio:
$(G, \cdot)$ gruppo
Fissato $g \in G$ definiamo
$I_g : G \to G$
$\quad f \to gfg^{-1}$
I_g si dice automorfismo interno
$Int(G) = \{$automorfismi interni di $G\}$

Proposizione 2
$Int(G) \trianglelefteq Aut(G)$

Dimostrazione
$If_G = I_e \in Int(G)$
dato $g \in G$ *allora*

$$I_{g^{-1}} = I_g^{-1} \to \begin{cases} I_g \in Aut(G) \\ Int(G) \text{ è chiuso rispetto agli inversi} \end{cases}.$$

$I_{g_2} \cdot I_{g_1}(f) = g_3 g_2 f g_2^{-1} g_2^{-1} = (g_2 g_1) f (g_2 g_1)^{-1} = I_{g_2 g_1}(f)$
$I_{g_2} \cdot I_{g_1} = I_{g_2 g_1}$
quindi $Int(G)$ *è chiuso rispetto alla composizione*
Quindi $Int(G) \leq Aut(G)$
Basta verificare che:
$\varphi \circ Int(G) \circ \varphi^{-1} \subseteq Int(G) \quad \forall \varphi \in Aut(G)$
ovvero dato $g \in G$

$$\varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1} \in Int(G).$$

$\forall f \in G$
$\varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1}(f) = \varphi(g \varphi^{-1}(f) g^{-1}) =$
$\varphi(g)\varphi(\varphi^{-1}(f))\varphi(g^{-1}) =$
$= \varphi(g) f \varphi(g) =$
$= I_{\varphi(g)}(f)$
$\Rightarrow \varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1} = I_{\varphi(g)} \in Int(G)$ $\square$

Definizione 4 (Centro di un gruppo)
$(G, \cdot)$ *gruppo*
Il centro di G *è*

$$Z(G) := \{g \in G | gf = fg \quad \forall f \in G\}.$$

Osservazione
$Z(G) \trianglelefteq G$
Osservazione:
$(G, \cdot)$ gruppo
Definiamo un omomorfismo
$\varphi : G \to Int(G)$
$g \to I_g$
· φ è suriettiva
· φ è omomorfismo
$\varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$
$I_{g_2 g_1} = I_{g_2} \circ I_{g_1}$
Chi è il $ker(\varphi)$

$ker(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = Id\} =$
$= \{g \in G | I_g = Id\} =$
$= \{g \in G | \forall f \in G : I_g(f) = Id(f)\} =$
$= \{g \in G | \forall f \in G : gfg^{-1} = f\} = Z(G)$

Dal I teorema di isomorfismo si ha che

$$Int(G) \cong G/Z(G).$$

1.2 Prodotto semidiretto

Consideriamo due gruppi
$(N, \cdot)$ e $(H, *)$
Fissiamo un omomorfismo
$\phi : H \to Aut(N)$
$h \to \o_n$

Definizione 5 (Prodotto semidiretto)
il prodotto semidiretto di N e H tramite $\o$ è l'insieme $N \times H$ dotato dell'operazione

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \o_{h_1}(n_2), h_1 * h_2).$$

$\forall n_1, n_2 \in N \quad \forall h_1, h_2 \in H$

Notazione 1
Indichiamo il prodotto semidiretto tra N e H con il simbolo $N \rtimes_{\o} H$

Proposizione 3
$N \rtimes_{\o} H$ è un gruppo

Dimostrazione
Dato $(n, h) \in N \rtimes_{\o} H$
l'inverso è dato da $(\o_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ $\square$

Definizione 6
$(G, \cdot)$ gruppo
$N, H \leq G$ Diremo che
G è prodotto semidiretto interno di N e H se

- $N \trianglelefteq G$
- $N \cap H = \{e\}$
- $NH = G$

Esempio
$D_n =< \rho, \sigma > \quad N =< \rho > \trianglelefteq D_n$
$H =< \sigma > \leq D_n$. Allora D_n è prodotto semidiretto interno di N e H