# Lezione 13 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-04-28

## 0.1 Successioni di Cauchy

**Definizione 1** (Successione di Cauchy)
*Sia $X$ spazio metrico, $a$ successione in $X$. $a$ è di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ N \mid d(a_m, a_n) < \varepsilon \ \ \forall n, m \geq N.$$

**Osservzioni:**

1. Se una successione è convergente allora è di Cauchy.
2. Se una successione di Cauchy $a$ ha una sottosuccessione di Cauchy, allora $a$ è convergente. (verifica per esercizio)

**Definizione 2** (Spazio metrico completo)
*Uno spazio metrico è completo se ogni successione di Cauchy è convergente.*

**Teorema 1**
*$\mathbb{R}^n$ è completo*

**Dimostrazione**
*Sia $a$ successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, scegliamo $N \in \mathbb{Z}$*
*tale che $d(a_n, a_m) < 1 \quad \forall n, m \geq N$*
*Sia $\{||a(1)||, ||a(2)||, \ldots, ||a(N)||\}$ e sia $R$ il massimo di quest'insieme.*
*Allora $D = \overline{B_{R+1}(0)} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p|| \leq R + 1\}$*
*contiene $a(n) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$*
*Sappiamo che $D$ è compatto, è anche spazio metrico $\Rightarrow$ è $1^o$ è primo numerabile, quindi $D$ è compatto per successioni.*
*Segue: $a$ ha una sottosuccessione convergente per l'osservazione 2), la successione converge.* □

## 0.2 Compattezza in spazi metrici

**Definizione 3**
*Uno spazio metrico $X$ si dice totalmente limitato se $\forall r \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists \ x_1, \ldots, x_n \in X$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$ ($n$ e i punti $x_1, \ldots, x_n$ possono dipendere da $r$)*

**Lemma 1**
*Ogni spazio metrico totalmente limitato è separabile. (quindi è anche $2^o$-numerabile)*

**Dimostrazione**
*Dato $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ considero $E_m \subseteq X$ sottoinsieme finito tale che $X$ è ricoperto da palle aperte di centro i punti di $E_n$ e raggio $\frac{1}{m}$.*
*Considero $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$*
*$E$ è numerabile ed è denso perchè ogni $x \in X$ è a distanza $< \frac{1}{m}$ da qualceh punto doi $E$ e questo vale $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$* □

**Teorema 2**
*Sia $X$ spazio metrico. Sono equivalenti:*

1. *$X$ compatto*
2. *$X$ compatto per successioni*
3. *$X$ completo e totalmente limitato*

**Dimostrazione**
*Dimostriamo ogni impliazione*

1) $\Rightarrow$ 2) *$X$ è $1^o$-numerabile, quindi se è compatto allora è compatto per successioni*

2) $\Rightarrow$ 3) *Supponiamo $X$ compatto per successioni, ogni successione di Cauchy ammette sottosuccessione convergente, quindi $X$ è completo. Dimostriamo che $X$ è totalmente limitato per assurdo, cioè $\exists r > 0$ tale che $X$ non è unione di un numero finito di palle aperte di raggio $r$.*
*Costruiamo una successione $a$ in $X$:*
*$a(1) \in X$ a piacere*
*$a(2) \in X \setminus B_r(a(1)) \neq \emptyset$*
*$a(3) \in X \setminus (B_r(a(1)) \cup B_r(a(2)))$*
*$a(n) \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_r(a(k)) \neq \emptyset$ per ipotesi*
*Abbiamo $d(a(n), a(m)) \geq r \quad \forall n, m$ quindi $a$ non è di Cauchy e non lo è nessuna sottosuccessione $\Rightarrow$ Allora nessuna sottosuccessione è convergente: assurdo.*

3) $\Rightarrow$ 1) *$X$ completo e totalmente limitato. Per il lemma $X$ è separabile e $2^o$-numerabile*
*Dimostriamo 2) e seguirà anche 1).*
*Sia $a$ successione in $X$, consideriamo per ogni $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un insieme finito $E_m \subseteq X$ tale che*
$$X = \bigcup_{e \in E_m} B_{2^{-m}}(e).$$
*Per $m = 1$ scelgo una $e_1 \in E_1$ tale che $B_{2^{-1}}(e)$ contiene $a(n)$ per infiniti valori di $n$.*
*Scelgo anche $k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $a(k_1) \in B_{2^{-1}}(e_1)$*
*Per $m = 2$ scelgo $e_2 \in E_2$ tale che $B_{2^{-1}}(e) \cap B_{2^{-2}}(e_2)$ contiene $a(n)$ per*

*infiniti valori di $n$ e scelgo $k_2 > k_1$ tale che $a(k_2) \in B_{2^{-1}}(e_1) \cap B^{2^{-2}}(e_2)$*
*Iterando ottengo una sottosuccessione $a(k_l)$ che è di Cauchy (esercizio con la disuguaglianza triangolare)*
*quindi la sottosuccessione converge.*
*Segue 2) e anche 1).*

□

# 1 Topologia Algebrica

**Obiettivo**
associarea ogni spazio topologico oggetti algebrici (gruppi, spazi vettoriali, moduli, anelli, ecc..) in modo che prorietà topologiche corrispondano a proprietà algebriche.
Esempi di applicazioni:

1. $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non sono omeomorfi: dimostrazione?

2. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e $S^1 \times S^1$ non sono omeomorfi, dimostrazione?

3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $A, B : U \to \mathbb{R}$ di classe $C^\infty$.
   Supponiamo, $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$
   Domanda: esiste $f$ di classe $C^\infty$ tale che $A = \frac{\partial f}{\partial x},\ B = \frac{\partial f}{\partial y}$?
   Risposta: dipende da $U$ (e anche da $A, B$).
   Ad esempio se $U = \mathbb{R}^2$ f esiste $\forall A, \forall B$
   se $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ allora no
   ad esempio $A = \frac{y}{x^2+y^2}, B = \frac{-x}{x^2+y^2}$
   non sono derivate parziali di alcuna $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
   ($f$ esiste localmente ma non globalmente)

## 1.1 Gruppo fondamentale

**Definizione 4**

1. *Sia $X$ spazio topologico, siano $a, b \in X$. Denotiamo con* $\Omega(X, a, b) = \{\alpha : [0, 1] \to X \mid \alpha$ *continua,* $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b\}$ *l'insieme dei cammini in $X$ da $a$ a $b$*

2. *Dati $a, b, c \in X$ e cammini $\alpha \in (X, a, b)$ e $\beta \in \Omega(X, b, c)$ è definita la giunzione* $\alpha \star \beta \in \Omega(X, a, c)$ *con la formula*

$$(a \star b)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

*Inoltre si definisce l'inversione $i(\alpha \in \Omega(X, b, a)$ ponendo $i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$*

**Definizione 5**
*Siano $X$ spazio topologico, $a, b \in X$ Due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ sono equivalenti se esiste $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ continua tale che*

1. $F(t, 0) = \alpha(t) \quad \forall t$

2. $F(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t$

3. $F(0, s) = a, \qquad F(1, s) = b \quad \forall s \in [0, 1]$

*In tal caso si scrive $\alpha \sim \beta$ e una tale $F$ si dice omotopia di cammini da $\alpha$ a $\beta$.*

**Osservazione:**
L'equivalenza di cammini è una relazione di equivalenza.
Verifica:

1. $\alpha \sim \alpha$ basta prendere $F(t, s) = \alpha(t)$

2. se $\alpha \sim \beta$ con omotopia di cammini $F$ da $\alpha$ a $\beta$ allora $\tilde{F}(t, s) = F(t, 1-s)$ è un'omotopia di cammini da $\beta$ a $\alpha$, quindi $\beta \sim \alpha$.

3. Se $\alpha \sim \beta$ tramite $F$, e $\beta \sim \gamma$ tramite $G$ allora

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(t, 2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

   è un'omotopia di cammini da $\alpha$ a $\gamma$

**Esempio:**
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme convesso non vuoto
AGGIUNGI IMMAGINE 4:54

Siano $a, b \in X$ qualsiasi e $\alpha, \beta \in \Omega(X, \alpha, \beta)$ qualsiasi.
Allora $\alpha \sim \beta$, $F(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$
(è ben definita e ha valori in $X$ perché $X$ è convesso)
**Osservazione**
L'equivalenza di cammini è compatibile con la giunzione:
se $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ $\alpha \star \beta$ è definita,
Allora $(\alpha \star \beta) \sim (\alpha' \star \beta')$
Siano $F$ omotopia di cammini da $\alpha$ a $\alpha'$ e $G$ da $\beta$ a $\beta'$, allora:

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,s) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

è omotopia di cammini da $\alpha \star \beta$ a $\alpha' \star \beta'$
Analogamente $i(\alpha) \sim i(\alpha')$

**Lemma 2**
*Siano $X$ spazio topologico $a, b \in X$ $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, sia $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ continua tale che $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$. Allora $\beta = \alpha \circ \Phi$ è equivalente ad $\alpha$*

**Dimostrazione**
$\alpha(\Phi(t)) = \beta(t)$ *Un'omotopia di cammini da $\alpha$ a $\beta$ è $F(t,s) = \alpha((1-s)t + s\Phi(t))$*
□

In generale la giunzione di cammini non è associativa

$$(\alpha \star (\beta \star \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$((\alpha \star \beta) \star \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Lemma 3**
*Sia $X$ spazio topologico, siano $a, b, c, d \in X$, $\alpha \in \Omega(X, a, b), \beta \in \Omega(X, b, c), \gamma \in \Omega(X, c, d)$ allora*

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma \sim \alpha \star (\beta \star \gamma).$$

**Dimostrazione**
*Basta usare il lemma, con*

$$\Phi(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ t + \frac{1}{4} & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{t+1}{2} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

*è continua e soddisfa:*

$$((\alpha \star \beta) \star \gamma)(t) = (\alpha \star (\beta \star \gamma))(\phi(t)).$$

$\square$

**Definizione 6** (Cammino costante)
*Siano $X$ spazio topologico e $a \in X$, definiamo il cammino costante*

$$1_a : [0,1] \to X t \to a.$$

$1_a \in \Omega(X, a, a)$

**Lemma 4**
*Siano $X$ spazio topologico, $a, b \in X$, $a \in \Omega(X, a, b)$. Allora sono definite le giunzioni $1_a \star \alpha$ e $\alpha \star 1_b$ e valgono*

$$1_a \star \alpha \sim \alpha \sim \alpha \star 1_b.$$

$\alpha \star i(\alpha) \sim 1_a$
$i(\alpha) \star \alpha \sim 1_a$

**Dimostrazione**
*Le prime due equivalenze si ottengono con riparametrizzazioni*
$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\Phi(t))$ *con* $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$
$(\alpha \star 1_b)(t) = \alpha(\psi(t))$ *con* $\psi(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$
*Dimostriamo la terza equivalenza*
*Scelgo $s \in [0,1]$ percorro $\alpha$ fino ad un certo punto (che dipende da $s$) poi sto fermo per un po', poi torno indietro lungo $i(\alpha)$*
*AGGIUNGI IMMAGINE 5 42*
*Con quest'idea la formula è*

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}s] \\ \alpha(s) & t \in [\frac{1}{2}s, 1 - \frac{1}{2}s] \\ \alpha(2-2t) & t \in [1 - \frac{1}{2}s, 1] \end{cases} .$$

*Questa è omotopia di cammini da $1_a$ a $\alpha \star i(\alpha)$.*
*L'ultima equivalenza segue dalla terza, scambiando $\alpha$ con $i(\alpha)$ $a$ con $b$ e usando $i(i(\alpha)) = \alpha$* $\square$

**Definizione 7** (Gruppo fondamentale)
*Sia $X$ spazio topologico e $a \in X$. Il quoziente $\Omega(X, a, a)/\sim = \pi_1(X, a)$ è detto gruppo fondamentale di $X$ con punto base $a$.*

*Dato $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ useremo la solita notazione*
$[\alpha] \in \pi_1(X, a)$

**Teorema 3**
*Nella definizione precedente $\pi_1(X, a)$ è un gruppo con operazione*

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \star \beta].$$

*elemento neutro $[1_a]$ e inverso $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$*

**Dimostrazione**
*Già fatta.* $\square$

**Notazione 1**
*Scriveremo semplicemente $[\alpha \star \beta \star \gamma]$ invece di $[(\alpha \star \beta) \star \gamma]$ (l'ordine è importante per i cammini ma non per le classi)*

**Esempi:**

1. $X = \{a\}$, c'è un solo cammino ed è $1_a \in \Omega(X, a, a)$ quindi $\pi_1(X, a) = \{[1_a]\}$ è il gruppo banale.

2. $X = \mathbb{R}^n, a = \text{qualsiasi} \in \mathbb{R}^n$
   Ci sono tanti cammini chiusi con punto base $a$, ma sono tutti equivalenti dato che $\mathbb{R}^n$ è convesso, quindi

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, a) = \{[1_a]\}.$$

   è banale.

3. Analogamente, se $X \in \mathbb{R}^n$ è convesso, allora $\pi_1(X, a)$ è banale