

Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebesgue

1.1 Proprietà delle funzioni lunghezza di intervalli

I intervallo in \mathbb{R}

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ \sup I - \inf I & \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$$\emptyset = (a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) - \{x\} = [x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà:

$$1. |\emptyset| = 0$$

2. monotonia

$$I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$$

3. finita additività

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad I_i \text{ intervallo}$$

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Nota

se I illimitato

$$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n \text{ tale che } I_i \text{ illimitato}$$

$$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{k=1}^n |I_k|$$

Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \dots, n$

$$|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

4. I intervallo

$$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$$

$$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1)| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Nota

Se I illimitato

$$\Rightarrow I \cap [n, n+1) = [n, n+1) \text{ per infiniti } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| \text{ per infiniti } n$$

Se I limitato

$$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^k I \cap [n, n+1) \text{ per } l, k \in \mathbb{Z}$$

5. Numerabile subadditività

Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \\ \Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione 5.

Si può assumere I_i limitato $\forall i$

1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$

$$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$$

I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto

$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.

si può supporre che $a_1 < a < b_1$ se $b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_1| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Reiterando trovo l'aperto contenente a_1 , se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.

abbiamo quindi rinumerato I_1, \dots, I_n in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |I| = \sum_{i=1}^n b_i - a_i = b_1 - a_1 + \dots + b_n - a_n$$

notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati

$\forall \varepsilon > 0 \exists I^\varepsilon$ chiuso, $I^\varepsilon \subset I$ tale che $|I^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I|$

$\forall i \exists I_i^\varepsilon$ aperto tale che $I_i \subset I_i^\varepsilon$ e $|\sum_i I_i^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|\sum_i I_i|$

$$I^\varepsilon \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\varepsilon$$

$$|I^\varepsilon| = \frac{1}{1-\varepsilon} |I^\varepsilon| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^\varepsilon| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1])$$

Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati

per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione

$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ vero per la 5)

Ci basta dimostrare l'altro verso della disuguaglianza

se I limitato, (con estremi $a < b$)

$\forall k \geq 1$ consideriamo I_1, I_2, \dots, I_k sono contenuti in I e disgiunti

questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| \leq b - a$$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

$$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \dots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$$

per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^k |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I illimitato

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

$$I \cap [n, n+1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1)$$

$$\Rightarrow |I \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

□

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$

$I + x$ traslato di I

$$|I + x| = |I|$$

(invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli} \right\}.$$

$$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

Osservazione

Se $D \subset \mathbb{R}$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili

2) Per definire m si usano ricoprimenti numerabili ma anche i ricoprimenti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimenti finiti o ricoprimenti numerabili

$$E \subseteq \mathbb{R}$$

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervalli}\}$$

La disuguaglianza può essere stretta

Esempio

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$

Sia $\{I_1, \dots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq 1$$

Infatti

$$R = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

$$\Rightarrow [0, 1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$$

$$\leq \left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) \leq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0, 1]| \leq \sum_{i=1}^n |\overline{I_i}| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

$$\Rightarrow \inf\left\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo}\right\} \geq 1 \text{ ma } E \subseteq [0, 1]$$

$$\Rightarrow \inf\left\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo}\right\} \leq 1$$

Se avessi ricoprimenti finiti \mathbb{Q} avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimenti infiniti.