Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello
3 esoneri
Con le prove di esonero possiamo essere esonerati dall'orale.
Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.
L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.
La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale
Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistemazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).
Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiattata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).
Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.
Parliamo ora di modelli "ondulosi"
Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori
$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$(x, t) \to u(x, t)$

Equazione della corda vibrante: $\begin{cases} \partial^2 u \frac{}{\partial t^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0} \\ \mathrm{u(0,t)} = \mathrm{u}(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \mathrm{u(x,0)} = \mathrm{h}_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t} = h_1(x) \ \ \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:
$u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$ variabili separate
- sovrapposizione:
u_1, u_2 soluzioni $\Rightarrow \quad u_1 + u_2$ soluzione

1.5 Onde stazionarie

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \text{costante } = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$

Spiegazione:
$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$
$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}$
$\phi(x) = A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}$

$u(x,t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \cos(mt))(\cancel{A_m \cos(mt)} + B_m \sin(mt))$
$\Rightarrow u(0,t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$
$(u(\pi,t) = 0 = \psi_m(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow u(x,t) = (a_m(\cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$ Tutti gli m interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx).$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx).$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$
Condizioni Iniziali:
$u(x,0) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x,\pi)$
$\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,0) = \sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$

Come trovare α_m, β_m
$\rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq b \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$
$\rightsquigarrow \displaystyle\int_0^{m} h_0(x)\sin(mx)dx = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\alpha_m$ (coefficienti di Fourier)

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:
La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.
Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

ma $D(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad f_n$ Rimeann integrabile.
Numeriamo $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n\in N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{altriment} \end{cases} .$$

Inoltre:
$D(x) = \lim_{k\to+\infty} \left(\lim_{j\to+\infty} cos(k!\pi x)^{2j}\right)$ Esercizio "facile"
Esercizio difficile:
non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro
Esempio:
$C([0,1]) \ni f, g$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$||f-g||_1 = \ldots.$$

$(C([0,1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)
$||f_m - f_n||_1 \to 0$ se $n, m \to +\infty$
$f_n \to f_\infty = \begin{cases} 0 & x \le \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Teorema 1
Il completamenteo di $(C[0,1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili ***secondo Lebesgue***

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in $\mathbb{R}^n$)
Stabilire la misura è come definire un integrale.
$|E| = \int X_E$
Prerequisiti:

1. $|[a,b]| = b - a$
   $|[a,b] \times [c,d]| = (d-c) \cdot (b-a)$
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

3. $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$

3' $\forall E \;\; \forall \; \sigma$ isometria $|E| = |\sigma(E)|$

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski)
in $\mathbb{R}^3$ non esiste nessunna funzione che soddisfa 1,2 e 3.

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \ldots \cup A_5.$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
Troviamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ t.c.
$\sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)
Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

Assioma 1 (della scelta)
Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possbile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_x

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \;\; \forall \lambda \in \Lambda.$$

Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

0.2 Misure

X insieme non vuoto
2^X = insieme delle parti di $X = \{$ sottoinsiemi $E \subseteq X\}$
$\phi, X \in 2^X = \{\chi : X \to \{0,1\}\}$
$\chi \leftrightarrow E = \{\chi = 1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Definizione 1
Sia X non vuoto. Una misura è una funzione $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ che soddisfa le due proprietà:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$*
   $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

Commenti:
1) numerabile $\Leftrightarrow$ al più numerabile
$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ possono essere finite: $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
2) Proprietà di monotonia: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
Segue da (ii) prendendo $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \ldots$
3) Gli insiemi $\{E_i\}$ non sono necessariamente disgiunti
4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:
$E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Può accadere che $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

---

Esempi di misure:

- La misura che conta: X
  $\mathbb{H}^0 : 2^X \to [0, +\infty]$
  $$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha n elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:
  $X,\ x_0 \in X$
  $\delta_{x_0} : 2^X \to [0, +\infty]$
  $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$

Verifica
δ_{X_0} è una misura
Osservazione
Se X è infinito allora $H^0(X) = +\infty$
Viceversa δ da finire

0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$ misura su X
Osservazione
Possono esistere E, F t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

Definizione 2 (Caratheodory)
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

Commenti:
1) $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

$$E \text{ è misurabile}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

Teorema 1
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura.

1. *la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra:*
   1) $\emptyset, X \in M$
   2) $E \in M \Rightarrow E^c \in M$
   3) $\{E_i{}_i i \in \mathbb{N}^+ \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$
2. *μ è numerabilmente additiva su M: se $\{E_i\}_{i \in N^+}$ sono disgiunti a coppie ($E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) allora*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Commenti
1) M è chiuso anche per intersezioni numerabili: $E_i \in M$

$$\left(\bigcap_i E_i\right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

2) $\lim sup_{i \to \infty} E_i := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq N} E_i$
$\lim inf_{i \to \infty} E_i := \bigcup_N \in \mathbb{N} \bigcap_{i \geq N} E_i$
Dimostrazione
Passo 1: M è un algebra
$\cdot \emptyset \in M, X \in M$
Vado a verificare che $\forall A \subseteq X$ vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che $(\emptyset) = 0$
Per X :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$
Vado a verificare che per ogni $A \subseteq X$ vale le proprietà di Caratheodory: $\mu(A) = \mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$
$\cdot$ $E_2, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$ *Considero un insieme test $A \subseteq X$:*
$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$

$$1) \quad \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

Passo 2: finita additività di μ in M
$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

Ottenuto sempre per Caratheodory

$$\mu(A \cap E_1) + \cap(A \cap E_2).$$

Iterando questo passaggio:
$E_1, \ldots, E_n \in M$ *allora:*

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Spiegazione passaggio precedente

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^{N} E_i) = \ldots = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Passo 3: mostriamo le proprietà di σ-algebra e numerabile additività
Siano $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$
Consideriamo gli insiemi:
$F_1 := E_1, \qquad F_2 = E_2 \setminus E_1$
$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$
quindi definiamo ricorsivamente: $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1}$
Allora F_i sono disgiunti a coppie

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i =_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$\cdot F_i \in M$
Fissiamo il test di Caratheodory $A \subseteq X$, $F_i \in M$, Passo 1: M algebra

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i).$$

Usando il passo 2: finita additività

$$= \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i).$$

Passiamo al limite $N \to \infty$

$$\mu(A) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup F_i)$$

$$\geq \mu(A \cap \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$$
$$= \mu(A \cap \textstyle\bigcup^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} E_i)$$
$$\Rightarrow \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

Se prendiamo come test $A =_{i=1}^{\infty} F_i$, *allora* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$
$\Rightarrow \mu(\bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$ — F_i *sono disgiunti a coppie* $\square$

Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebegque

1.1 Porprietà dellle afunzioen lunghezza di intervalli

I intervallo in $\mathbb{R}$
$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ supI - infI \quad (b-a) & \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$
Esempi di intervallo
$\emptyset = (a,a)\ \forall a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$— $\{x\} = [x,x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Proprietà:

1. $|\emptyset| = 0$
2. monotonia
   $I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$
3. finita additività
   $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad I_i$ interevallo
   $I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$

Nota
se I illimitato
$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n$ tale che I_i illimitato
$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_k|$
Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \ldots, n$
$|I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$

4. I intervallo
   $|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$
   $= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1)| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1)|$

Nota
Se I illimitato
$\Rightarrow I \cap [n, n+1] = [n, n+1)$ per infiniti indici $n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum^{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$ per infiniti n
Se I limitato
$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^{k} I \cap [n, n+1]$ per $l, k \in \mathbb{Z}$

5. Numerabile subadditività
   Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$
$\Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione 5.
Si può assumere I_i limitato $\forall i$
1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$
$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$
I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto
$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.
si può supporre che $a_1 < a < b_1$ se $b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Reiterando trovo l'aperto contenente a_1, se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.
abbiamo quindi rinumerato $I_1, \ldots, I_n$ in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$
$\sum_{i=1}^{n} |I| = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i = b_1 - a_1 + \ldots + b_n - a_n$
notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati
$\forall \varepsilon > 0 \exists I^{\varepsilon}$ chiuso, $I^{\varepsilon} \subset I$ tale che $|I^{\varepsilon}| = (1 - \varepsilon)|I|$
$\forall i \ \ \exists I_i^{\varepsilon}$ aperto tale che $I_i \subset I_i^{\varepsilon}$ e $|\sum_i^{\varepsilon}| = (1 - \varepsilon)|I_i|$
$I^{\varepsilon} \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i^{\varepsilon}$
$I_i = \frac{1}{1-\varepsilon}|I^{\varepsilon}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I^{\varepsilon}| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$
$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1))$
Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati
per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività
   $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione
$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ vero per la 5)
Ci basta dimostrare l'altro verso della disuguaglianza
se I limitato, (con estremi $a < b$)
$\forall k \geq 1$ consideriamo $I_1, I_2, \dots, I_k$ sono contenuti in I e disgiunti
questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k$
$\sum_{i=1}^{k} \leq b - a$
$\sum_{i=1}^{k} |I_i| = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$
$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$
per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^{k} |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I illimitato
$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$
$I \cap [n, n+1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1)$
$\Rightarrow |I \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$
$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

□

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$
   $I + x$ traslato di I
   $|I + x| = |I|$
   (invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$
Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \ : \ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli}\}.$$

$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$

Osservazione
Se $D \subset$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili
2) Per definire m si usano ricoprimenti numerabili ma anche i ricoprimenti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimenti finiti o ricoprimenti numerabili
$E \subseteq \mathbb{R}$
$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervalli}\}$
La disuguaglianza può essere stretta
Esempio
$E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$
è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$
Sia $\{I_1, \dots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli
$E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |I_i| \geq 1$
Infatti
$R = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow [0,1] \subseteq_{i=1}^{n} I_i$
$\Rightarrow [0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$
$\leq (\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i) \leq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0,1]| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overline{I}_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
$\Rightarrow \inf\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervallo } \} \geq 1$ ma $E \subseteq [0,1]$
$\Rightarrow \inf\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervallo } \} \leq 1$
Se avessi ricoprimenti finiti $\mathbb{Q}$ avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimenti infiniti.

Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Misura di Lesbegue

Reminderi (misura di Lesbegue)

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \ : \ |I_i| \text{ intervalli} \quad E \subseteq \bigcup_{i-1}^{\infty} I_i.$$

Proposizione 1
1) $m(\emptyset) = 0$
2) $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
3) subadditività numerabile, $\{E_i\}$ *successione di insiemi*

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $\forall I$ *intervallo* $m(I) = |I|$
5) $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E + x) = m(E)$

Dimostrazione
1) $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ *dato che l'insieme vuoto è un intervallo*
2) $\forall \{I_i\}$ *intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$ *è un ricoprimento anche di* $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ *prendendo l'inf rispetto a* $\{I_i\}$ $\ m(E) \leq m(F)$
3) Se $\exists i$ *tale che* $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$ *tesi ovvia*
possiamo supporre $m(E_i) < +\infty \quad \forall i > 1$
Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \{I_k^i\}_k$ *intervalli tali che* $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ *e*

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$ *successione di intervalli*
$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$
quindi

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per $\varepsilon \to 0$

$$m(\bigcup_{i-1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $E = I$ $m(E) \leq |I|$ scegliendo I stesso come sottoricoprimento
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \textit{ per la numerabile additività di } |\ \ |.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5) $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i = x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$
sappiamo che $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$

$\square$

Osservazione
È vero che se $\{E_i\}$ successione di insiemi disgiunti $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.
Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n).$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \Rightarrow$ sarebbe vera anche la finita additività.
Infatti

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \quad \text{sempre vero per subadditività.}$$

Se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\forall k \geq 1$ $m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)$
$\Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \geq m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i) \ \Rightarrow m(\bigcup_{i=2}^{\infty}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di E_1 che di E_2 quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_{i \quad I \cap E_2} |I_i| + \sum_{i \quad I_\cap E_2} |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se $I_1, \ldots, I_n$ intervalli, $I_i \cap I_j = \emptyset$ per $i \neq j$
$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
Si può supporre gli I_i limitati (sennò misura è infinita)
$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{n-1}^{i=1} J_i$

$$m(I) = |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |J_i| \geq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) + m(\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i)$$

$$\leq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i) = m(I).$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |I_i| = m(\bigcup_{i-1}^{n} I_i).$$

se I_i intervalli con $I_i \cap I_j = \emptyset \quad i \neq j$

Definizione 1
Se X un insieme non vuoto, Una misura su X è una funzione

$$\mu : P(x) \to [0, +\infty].$$

tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *(monotonia)* $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
3. *(subadditività)* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

2.+3. $\Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (E_i)$

Esempi di misura
1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty).$$

$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$ difatti:

- $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$
- se $E \subseteq F$ se $x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$

se $x_0 \in E \rightarrow x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$
se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$
se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \ \exists i, \ \ t.c. \ \ x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_1^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$
2) misura "che conta"
$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E \text{ se } E \text{ è finito} \\ +\infty \qquad\qquad\quad \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}.$$

Esempio di insieme di misura di Lesbegue nulla
Non misurabile, insieme di Cantor
Al passo $n = 1, I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \ C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi J e rimuovendo gli intervalli centrali.
C_n è un insieme di 2^n intervalli chiusi, disgiunti, ogniuno di ampiezza $\frac{1}{3^n}$
C_n è alternato da C_{n-1} eimuovendo 2^{n-1} intervalil aperti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$
L'insieme di Cantor è definita da $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$

$$m(C) \leq m(C_n) = m(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n.$$

$\forall x \in [0, 1]$
si scrive nella forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \ \ x_i \in \{0, 1, 2\}$
$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \ldots + \frac{x_i}{3^i} + \ldots$

Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Qui manca la parte precedente della lezione

$f s.c.i \Leftrightarrow f^{-1}(a,+\infty))$ aperto $\forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione
$(\Rightarrow)\ f(x) \leq \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$
$c- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \lim_{x->x_0} \inf(fx) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \inf(fx) > a$ *per*
δ *sufficientemente piccolo*
$\Rightarrow f(x) > a$ *per* $|x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$
$\Rightarrow \{f > a\}$ *aperto*

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R}\ \ \forall a < f(x_0)\ \ x_0 \in \{f > a\}$
$\Rightarrow \exists\delta > 0\ t.c.\ f(x) > a\ \ \forall\ \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\Rightarrow \liminf_{x\to x_0|} \geq \inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x) > a$
$\Rightarrow \liminf_{x\to x_0} \geq a\ \ \forall a < f(x_0)$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$
$\Rightarrow f \quad s.c.i$

$\square$

Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Insieme di Vitali

Controesempio all'additività di m
Insieme di Vitali
In $\mathbb{R}$ consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia $[x]$ la classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

V insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in $[0,1]$ da ogni classe d'equivalenza. $V \subseteq [0,1], \; x \in V$
$\forall x \in [0,1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V$ tale che $x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q$ dove $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$
$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$
Quindi abbiamo dimostrato

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + q \subseteq [-1,2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti
siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$
se $V + q_1 \cap V + q_2 \neq$
$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che $x_1 \sim x_2$ che è assurdo dato che in V prendiamo solo un rappresentate per ogni classe di equivalenza.
Ciò vuol dire che $\cup_{i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}$ è unione numerabile di insiemi disgiunti
Vediamo la misura di questo insieme
$m([0,1]) = 1 \leq mi \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + 1 \right)$ per monotonia
Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$= \sum_{q \in Q \cap [-1,1]} m(V + q).$$

$$= \sum m(V) \leq m([-1,2]) = 3.$$

$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V) \leq 3$
Però le due disuguaglianze indicano che $m(V) > 0$ e $m(V) = 0$ (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

Definizione 1 (Caratheodory)
X insieme non vuoto μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice μ-misurabile se $\forall F \subseteq X$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero E spezza additivamente ogni altro insieme

Osservazione

1. $E \subseteq X$ è μ misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \cap(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$
   perché $\geq$ è sempre vero per la subadditività
   Quindi si può anche supporre $\mu(F) < +\infty$

2. La definizione di misurabilità è simmetrica per E e $E^c = X \setminus E$, E misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$
   che è la misura che dovrei testare per E^c
   Quindi E è μ-misurabile $\Leftrightarrow$ E^c è μ-misurabile

3. Se $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$ è μ-misurabile.
   $\forall F \subseteq X$
   $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \cancel{\mu(E)} + \mu(F) \Rightarrow E$ è μ-misurabile.

Indicheremo con η_μ la classe dei sottoinsiemi μ-misurabili
$\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \ \ \mu\text{-misurabile } \} = \{\emptyset, X, \dots\}$

Teorema 1
Sia μ una misura su X, η_μ la classe degli insiemi μ-misurabili, Allora:

1. *se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ *tale che* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E)i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
   tale che $E_1 E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \ldots$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty)\mu(E_i)}$
4. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\nu$
   tale che $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \subseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \ldots$
   e $\mu(E_1) < +\infty$
   $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$

Dimostrazione
Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \quad th: \; E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$\forall F \subseteq X$
$\mu(F) = \mu(F\cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F\cap E_1) + \mu(F\setminus E_1 \cap E_2) + \breve{(}F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \mu(F\cap E_1 \cup (F\setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F\cap(E_1\cup E_2)) + \mu(F\setminus(E_1\cup E_2))$
per subadditività
Induttivamente:
se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$
Se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \ldots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} E^c \in \eta_\mu \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c)^c \in \eta_\mu$
Secondo passo finita additività:
$E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \ldots, E_k$ *disgiunti*
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \mu(\bigcup_{i=1}^{k} E_i \cap E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i-1}^{k-1} E_i\right)$
terzo passo: Numerabile additività
$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Osserviamo che $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$, *disgiunti*
$F \subseteq X$
$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i-1}^{k} F \cap E\right.$

e $\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+} \mu(F \cap E_i)$
quarto passo
$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \eta_\mu$
$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \lim_{i\to+\infty} \mu(E_i)$
$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_{\dots\cup 2\setminus E_2\dots\cup E_k\setminus E_{k-1}}$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E - iE_{i-1}$
$\{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i\geq 2}$
successione di insiemi disgiunti e misurabili.
$E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i-1})^c$
per il passo 3 $\quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$
$= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1}))$
$E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1}$
$\Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1})$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(E_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=2}^{k} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})).$$

$$= \mu(E_2) + \lim_{k\to+\infty} (\cancel{\mu(E_2)} - \mu(E_1) + \cancel{\mu(E_3)} - \cancel{\mu(E_2)} + \dots + \mu(E_k) - \cancel{\mu(E_{k-1})}.$$

Inoltre:
se $E_1 \subseteq \dots \quad \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(F \cap E_i)$
Quinto passo
$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$E_2 \supseteq E_2 \supseteq \dots \qquad \mu(E_1) < +\infty$
$E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \dots$
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i\to+\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i\to+\infty} \mu(E_i)$. sesto passo
$\{E_i\} \subset \eta_\mu$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k)$
$B_j = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$
$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$
$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$
$\lim_{k\to+\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(F \setminus B_k)$
$= \lim_{k\to+} (\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)$ $\square$

Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 σ-algebra

Definizione 1
X insieme non vuoto, Una famiglia $\eta \subseteq P(X)$ si dice σ-algebra su X se

1. $\emptyset, X \in \eta$
2. $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3. $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

Osservazione
Se η è σ-algebra e $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$
$E_i \in \eta \to E_i^c \in \eta \ \ \forall i$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta$

Una misura individua una σ-algebra
In generale
se μ è una misura su X

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X \ : \ E \text{ e } \mu - \text{misurabile}\}.$$

è una σ-algebra
In particolare in $\mathbb{R}$ c'è la σ-algebra di Lesbegue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lesbegue

Definizione 2
Sia X un insieme non vuoto e sia $F \subset P(X)$ si chiama σ-algebra generata da F la σ-algebra data da

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

la più piccola σ-algebra che contiene F

Definizione 3
Se (X, ι) è uno spazio topologico la σ-algebra generata da ι si dice σ-algebra di Borel

Vogliamo ora indagare sulla σ-algebra di Lesbegue in $\mathbb{R}$ $\eta_m = \eta$

Proposizione 1
Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo
$\Rightarrow I \in \eta$ (è misurabile secondo Lesbegue)

Dimostrazione
$I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallo* $\Rightarrow \quad \forall F \subseteq \mathbb{R} \ \ m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ ***Primo caso***

Supponiamo $I = (a, +\infty) \quad a \in \mathbb{R}$
Sia $F \subseteq \mathbb{R}$, *con* $m(F) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ *e* $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$m(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I \setminus I|)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I).$$

e per $\varepsilon \to 0$ *si ha* $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I) \;\; I_i = (\alpha_i, \beta_i) \quad |I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + I_i \cap I|$
$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$
$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$
$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$
Quindi:
Intervalli del tipo $I = (a, +\infty) \in \eta \to I = (-\infty, a] \in \eta$
$\to (a, b] \in \eta$
$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$
$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$
$\Rightarrow (a, b) \in \eta$
$\Rightarrow$ *vale anche per gli intervalli chiusi*
tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti. $\square$

Teorema 1
Ogni aperto $a \subseteq \mathbb{R}$ *è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti*

Corollario 1
σ*-algebra di Borel in* $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$*-algebra di Lesbegue*

L'inclusione puo essere stretta perché F insieme misurabili con Lesbegue e non con Borel
Quindi in $\mathbb{R}$ si ha:
$B \subseteq \eta \subsetneq P(R)$, che è stretta perché e come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perchè non vale l'additività $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lesbegue)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ *sono equivalenti*

1. $E \in \eta$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ *aperto t.c.* $E \subseteq A_\varepsilon$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3. $\exists\ F \in B$ *(F è intersezione numerabile di aperti) tali che* $E \subseteq F$ *e* $m(F \setminus E) = 0$

4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ C_\varepsilon$ *chiuso tale che* $C_\varepsilon \subseteq E$ *e* $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$

5. $\exists G \in B$ *(G è unione numerabile di chiusi) tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$

Dimostrazione
$1) \Rightarrow 2)$
Hp $E \in \eta$
Primo caso: $m(E) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli aperti tali che* $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$ *(l'insieme* A_ε *aperto) e* $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$
$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$
$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$
$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$
quindi
$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon$—
Secondo caso: $m(E) = +\infty$
$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$
$E \in \eta \Rightarrow\ \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$
applicando il primo caso
$\forall n,\ \forall \varepsilon$
$\exists A_n^\varepsilon$ *aperto tale che* $A_n^\varepsilon \geq E_n$ *e* $m(A_n^\varepsilon E_n) < \varepsilon$
$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$
$$m(A_\varepsilon \setminus E) = m(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E)) \leq m(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E_n)) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$$
Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

$2) \Rightarrow 3)$
Hp $\forall > 0, \exists A_\varepsilon$ *aperto,* $A_\varepsilon \supseteq E$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$
Th $\exists F \in B$ *tale che* $F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) = 0$
Per $\varepsilon = \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1\ \ \exists A_n$ *aperto t.c.* $A_n \supseteq E$ *e* $m(A_n E) < \frac{1}{n}$
$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B,\quad F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) \leq m(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow n \to +\infty\quad m(F \setminus E) = 0$

$3) \Rightarrow 1)$
Hp $\exists F \in B:\ F \supseteq E$ *e* $m(FE) = 0$
$E = F(F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$
$1) \Rightarrow 4)$
$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ *aperto*
tale che $A_\varepsilon \supseteq E^c$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$
$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$ *è chiuso*
$E^c \subseteq A_\varepsilon\ \Rightarrow\ E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$
$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4) $\Rightarrow$ 5)
Per $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \forall \in \mathbb{N}$
$\exists C_n$ *chiuso,* $C_n \subseteq E$ *tale che* $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$
per $n \to +\infty m(E \setminus G) = 0$

5) $\Rightarrow$ 1)
Hp: $\exists G \in B$ *tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$
$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$ *perché unione di misurabili*

$\square$

Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Approccio agli integrali di Lesbegue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

Definizione 1
Sia X un insieme non vuoto e η una σ-algebra in X.
((X, η) spazio misurabile)
Sia X uno spazio topologico,
una funzione $f : X \to Y$ si dice misurabile se $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \quad A$ aperto

Esempi
1) se $\eta = P(X) \;\Rightarrow\;$ ogni funzione $f : X \to Y$ è misurabile
Se $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \to Y$ è η-misurabile $\Leftrightarrow f$ è costante.
2) Se X è spazio topologico e se $\eta \supseteq B(Borel)$
$f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f$ misurabile
3) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$E \subseteq X$
$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0, 1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A \end{cases} \quad \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

Proposizione 1
Se (X, η) spazio misurabile e $f : X \to Y$
$\Rightarrow \{F \subseteq Y \;:\; f^{-1}(F) \in \eta\} = S$ è una σ-algebra in Y
di conseguenza se Y è uno spazio topologico e f è η-misurabile
allora $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$

Dimostrazione
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$
$f^{-1}(Y) = X \in \Rightarrow Y \in S$
$F \in S$ *ovvero* $f^{-1}(F) \in \eta$
$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$
Facciamo vedere che S è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.
$\{F_I\} \subset S$ *ovvero* $f^{-1}(F_i) = \eta \;\; \forall_i$
$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$ $\square$

Proposizione 2
Sia (X, η) *uno spazio misurabile* $f : X \to \mathbb{R}$
Allora f *è misurabile se e solo se*
$\{x \in X \ : \ f(x) > t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \geq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) < t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \leq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

Dimostrazione
f *è misurabile* $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \ \ \forall B \subseteq \mathbb{R}$ B *boreliano*
$\Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$

□

Proposizione 3
Sia (X, η) *uno spazio misurabile*

1. *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sono misurabili*
   $\Rightarrow f + g, \lambda f \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ f \cdot g, \frac{f}{g} \quad se \ g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ *sono misurabili*
2. *Se* $\{f_k\}$ *successione di funzioni misurabili*
   $\Rightarrow \sup_k f_k, \ \inf f_k, \ \limsup_{k\to\infty} f_k, \ \liminf_{k\to+\infty} f_k$ *sono misurabili*
   In particolare, se $\exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$ *è misurabile*

Dimostrazione
$f, g : X \to \mathbb{R}$ *misurabili*

$$t \in \mathbb{R} \ \ \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s=t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \text{ perché } f, g \text{ misurabili}$$

se x *tale che* $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t = g(x)$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $f(x) > r > t - g(x)$
quindi $g(x) > t - r \to s \in \mathbb{Q}$ *tale che* $g(x) > s > t - r$
$f, g, X \to \mathbb{R}$ *numerabili*, $\lambda \in \mathbb{R}, f$ *misurabile*

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & se \ \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & se \ \lambda < 0 \end{cases}$$

f *misurabile*

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & se t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & se \ t \geq 0 \end{cases} \qquad sef,gmisurabili$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$ *sono misurabili*
$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$

f misurabile
$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ *Guarda sta dimsotrzione usl libro o ricopila dalle foto perchè è assolutametne insensato* $\square$

Sia (X, η) spazio misurabile
se η è la σ-algebra di misurabili di misura μ allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a η_μ

Proposizione 4
Sia (X, η, μ) spazio di misura
(μ è una misura su X e η è la σ 0algebra di μ misurabili)
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile
e sia $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f = g$ quasi ovunque (ovvero $m(\{f = g\}) = 0$)
$\Rightarrow$ anche g è μ-misurabile

Dimostrazione
$\forall t \in \mathbb{R}$
$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$
Il primo insieme è contenuto in $\{g \neq f\}$ quindi ha misura nulla
$\Rightarrow \in \eta_\mu$
il secondo insieme è $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$ perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

$\square$

Corollario 1
se $f_k : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili $k > 1$ ed esiste $\lim_{k\to\infty} f(x)$ per quasi ogni $x \in X$
$\Rightarrow$ la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

Dimostrazione
$X_1 = \{x \in X \ | \exists \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\} = \{x \in X \mid \limsup_{k\to+\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)$
è misurabile
$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & se\ x \in X_1 \\ 0 & se\ x \notin X_1 \end{cases} .$$

è misurabile $\forall k$ perché $\tilde{f}_j = f_j$ quasi ovunque
$\exists \lim_{k\to+\infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$
quindi è misurabile $\square$

0.2 Funzione di Lesbegue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0,1] \to [0,1].$$

$\forall n \quad [0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$
gli J sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, le I sono di ampiezza $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases} \quad .$$

Lezione 9 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

0.1 Funzione di Lebesgue-Vitali

$L : [0,1] \to [0,1]$ $n = 1$ $[0,1] = [0,1/3] \cup [2/3,1] \cup (1/3,2/3)$
Al primo passo abbiamo questa situazione, gli intervalli restanti (chiusi) sono gli J_i^1 e quelli rimossi (aperti) sono gli I_i^1
al passo $n = 2$ abbiamo $[0,1] = J_1^2 \cup J_2^2{}_3^2 \cup J_4^2 \cup I_1^2 \cup I_{{}^2 1^2 \cup I_3^2}$
In generale al passo n-esimo abbiamo $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{2^n-1} I_i^n$ con $|J_i^n| = \frac{1}{3^n}$ e $|J_i^n| = \frac{1}{2^n}$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} 3/2 \text{ su } J_1^1 \cup J_2^1 \\ \text{ costante } \quad \text{su} I_1^1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} (3/2)^2 \text{ su } \bigcup_{i=1}^4 J_i^2 \\ \text{ costante } \quad \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} (3/2)^n \text{ su } \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{ costante } \quad \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) \quad \forall x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n.$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{3^n}]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = L_{n+1}(\frac{1}{3^{n+1}}) - L_n(\frac{1}{3^{n+1}}).$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{2^n}$$

$\forall m > n$

$$\sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_n(x)| = \sup_{[0,1]} |L_n(x) - L_{m-1}(x) + L_{m-1}(x) - L_{m-2}(x) + \ldots + L_{n+1} - L_n(x)|.$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{[0,1]} |L_{k-1}(x) - L - k(x)| \leq \sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_{m-1}(x)| + \ldots + \sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \to n \to \infty 0.$$

$$\{L_n(x)\} \text{ è uniformemente di Cauchy in } [0,1].$$

$\Rightarrow \exists L \in C([0,1])$ tale hce $L_n \to L$ uniformemente in $[0,1]$
$L_n(x) \leq L_n(y) \quad \forall x \leq y \;\Rightarrow\; L(x) \leq L(y)$
$L : [0,1] \to [0,1]$ è continua, monotona crescente
$L(0) = 0, L(1) = 1$

L è localmente costante su $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^m$
$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_k^n$
$\Rightarrow \exists m, \exists k \; x \in I_k^n \quad L =$ costante in $I_k^n \Rightarrow L'(x) = 0$
$\Rightarrow L$ è derivabile quasi ovunque (in $[0,1] \setminus C$) e $L' = 0$ quasi certamente.

$$\int_0^1 L'(x)dx = 0 \neq L(1) - L(0).$$

Integrale di Riemann perché L' è discontinua in C, non funziona quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale

Proposizione 1
$L(C) = [0,1] \; \forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0,2\}$
$L(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$

Dimostrazione
Primo caso $x \in C$ *tale che* $\exists n \geq 1 \quad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{e^i}$
Usiamo l'induzione su n
se $n = 1 \Rightarrow x = 0$ *oppure* $x = \frac{2}{3} \Rightarrow L(0) = 0 L(2/3) = L_1(2/3) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ *ok*
Supponiamo vero per $L(\sum_{n-1}^{i=1} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{n-1}^{i=1} \frac{x^i/2}{2^i}$
e sia $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}$, *con* $x_n = 2$
$L(x) = L_n(x) = L_n(x - \frac{1}{3^n} = L_n(x - \frac{2}{3^n}) + (\frac{3}{2})^n \frac{1}{3^n}$
$L(x + \frac{2}{3^n}) + \frac{1}{2^n} = L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i} + \frac{x/2}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x/2}{2^i}$
secondo caso
$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}$
è continua

$$\Rightarrow L(x) = \lim_{n \to +\infty} L(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i/2}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}.$$

$L(C) = [0,1]$
Quindi L *manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva.*
Consideriamo
$\phi(x) = L(x) + x$
$\phi : [0,1] \to [0,2]$ *strettamente crescente*
$\exists \phi^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ *strettamente crescente, con immagine in un intervallo* $\Rightarrow$ *continua*
$\Rightarrow \phi$ *è un omomorfismo di* $[0,1]$ *in* $[0,2]$ $\phi([0,1]) = \phi(C \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^n)$
$= \phi(C) \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(I_i^n)$ *insiemi misurabili e disgiunti*
$\phi(x) = 2 = m(\phi([0,1]) = m(\phi(C)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(\phi(I_i^n))$
$x \in I_i^n \; \phi(x) = x + L(x) = x + a_i^n \Rightarrow \phi(I_i^n)) = I_i^n + a_i^n$
$\Rightarrow m(\phi(I_i^n)) = |I_i^n| = \frac{1}{3^n}$
$= m(\phi(C)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^2$
$= m(\phi(C)) + 1$

$\Rightarrow m(\phi(C)) = 1$

$\square$

$m(\phi(C)) > 0$
$\Rightarrow \exists V \subset \phi(C)$ tale che $V \notin \eta$
ma $E = \phi^{-1}(V) \subset C \Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \eta$
quindi $E \in \eta$ ma $\phi(E) \notin \eta$

Proposizione 2
La σ-algebra η non è chiusa per omeomorfismi continui

Dimostrazione
$E \in \eta$ *ma* $\phi(E) = V \notin \eta$
$E \in \eta$ *se* $E \in B \Rightarrow \phi(E) = (\phi^{-1})^{-1}(E)$
ϕ^{-1} *è continua* $\Rightarrow \phi^{-1}$ *è misurabile secondo Lesbegue*
$\Rightarrow (\phi)^{-1}(E) \in \eta \quad \forall E \in B$
da capire come finisce sta roba (non so manco se questa sia la dimostrazione)

$\square$

Proposizione 3
$\eta \setminus B \neq \emptyset$

Lezione 10 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-25

0.1 Continuando sulle funzioni misurabili

Definizione 1 (Funzione semplice)
Sia (X, A, μ) uno spazio di misura. Una funzione semplice in X è una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}(x), \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, N \geq 1, E_i \in A.$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = X$

Teorema 1
Sia (X, A, μ) uno spazio di misura, e $f : X \to [-\infty, +\infty]$
Allora f misurabile $\Leftrightarrow \exists \{s_m\}$ successione di funzioni semplici tale che $s_m(x) \xrightarrow{m \to +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$
Inoltre

1. *se $f \geq 0 \Rightarrow$ si può scegliere $\{s_m\}$ tale che $s_m(x) \leq s_{m+1}(x) \quad \forall x \in X, \forall m \geq 1$.*
2. *se f è limitata $\Rightarrow s_m \to f$ uniformemente in X.*

Dimostrazione
$(\Leftarrow)$ *ovvia, perché f è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili*

$(\Rightarrow)$ *Primo caso: $f \geq 0$, limitata, si può supporre $0 \leq f(x) \leq 1 \; \forall x \in X$*

$\forall n \geq 1 \; [0,1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$
$E_k^n = \{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\} \quad k = 1, \ldots, 2^n$
f *misurabile* $\Rightarrow E_k^n$ *misurabile* $\forall k = 1, \ldots, 2^n, \; \forall n \geq 1$
$E_k^n \cap E_j^n = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *e* $X = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_k^n$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n}(x)$$

$\forall x \in X, \forall n \geq 1 \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^n$ *tale che* $x \in E_k^n$
$\Rightarrow 0 \leq s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x)$
$x \in E_k^n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2^n} f(x), \frac{k}{2^n}$
$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$
$\Rightarrow$ *sono possibili due casi*

$$s_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \Leftarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}.$$

oppure

$$s_n(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \Leftarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}.$$

nel caso 1
$s_n(x) = \frac{k_-1}{2^n} = s_{n+1}(x)$
nel caso 2
$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$
$\forall x \in X \quad \exists ! 1 \leq k \leq 2^{n+1}$
tale che $x \in E_k^n$
$\Leftrightarrow s_n(x) \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$
$\sup_{x \in X} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2^n}$
$\Rightarrow s_m \to f$ *uniformemente in* X

$(\Rightarrow)$ *secondo caso:* $f \geq 0$
$\forall n \geq 1$

$$E_I^n = \{f < n\}, \qquad E_{II}^n = \{f \geq n\}.$$

$E_{I,k}^n = \{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}$
$\bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = E_I^n$

$$s_n(x) = n\chi_{E_{II}^n}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k+1}{2^n} \chi_{E_{I,k}^n}(x).$$

$$E_{II}^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = X.$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x$ *(come nel caso 1)*
Se $f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) \geq m \quad \forall m$
$\Leftrightarrow x \in E_{II}^n$
$\Rightarrow s_n(x) = n \to +\infty = f(x)$
Se $f(x) < +\infty \Rightarrow \exists \bar{n}$ *tale che* $f(x) \leq \bar{n}$
$\Rightarrow x \in E_I^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n$
$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
$\Rightarrow 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$
la convergenza non è uniforme perché $\bar{n}$ *dipende da* f.
$\Rightarrow s_n(x) \to f(x)$

Terzo caso
f *di segno variabile*
$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$
$f^+(x) = max\{f(x), 0\}$
$f^-(x) = -min\{f(x), 0\}$
f *misurabile* $<=>$ f^-, f^+ *misurabili*
Per il secondo caso
$\exists \{s_n\}$ *funzioni semplici* $s_n(x) \to f^+(x) \quad \forall x$
$\{t_n\}$ *funzioni semplici* $t_n(x) \to f^-(x) \quad \forall x$
$\Rightarrow s_n - t_n$ *è funzione semplice,* $s_n(x) - t_n(x) \to f(x) \quad \forall x$ $\square$

Definizione 2
Sia (X, A, μ) *spazio di misura e sia* $s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}(x),\ c_i \geq 0$
si definisce

$$\int_X s\ d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i).$$

dove si usa la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$
e, inoltre, $\forall E \in A$

$$\int_E s\ f\mu = \int_X s \cdot \chi_E\ d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E \cap E_i).$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i \cap E}.$$

dato che $\chi_{E_i} \cdot \chi_e = \chi_{E_i \cap E}$

Definizione 3
Sia $(X, A, \mu$ *spazio di misura e sia* $f : X \to [0, +\infty]$ *misurabile*
$\Rightarrow \int_X f\ d\mu = \sup\{\int_X s\ d\mu$ *s funzione semplice* $0 \leq s \leq f\}$ *e* $\forall E \in A$

$$\int_E f\ d\mu = \int_X \chi_E\ d\mu.$$

Proprietà immediate dell'integrazione

1. $f = 0$ quasi certamente in $X \Rightarrow \int_X f\ d\mu = 0$
2. Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f\ d\mu = 0$
3. $0 \leq f \leq g, \quad f, g$ misurabili $\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g\ du$
4. Se $E, F \in A\ E \subseteq F \quad \int_E f\ d\mu =\leq \int_F f\ d\mu$

Esempio
$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = 1\mu(\mathbb{Q}) = 0$
s funzione semplice $0 \leq s \leq f$

Proposizione 1
Sia $s(x)$ funzione semplice, ≥ 0, e sia $\mu_s : A \to [0, +\infty)$ definita da

$$\mu_s(E) = \int_E s \; d\mu.$$

μ_s è una misura su A (cioè $\mu_S(\emptyset) = 0$ ed è additiva su misurabili disgiunti)

Dimostrazione
$\mu_s(\emptyset) = \int_s \; d\mu = 0$
Siano $\{E_i\} \subset A$ disgiunti e sia $s(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{F_k}(x)$ $F_k \in A$ $F_k \cap F_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$ $\bigcup_{k=1}^{N} F_k = X$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i-1}^{K} E_i\right) = \int_{\bigcup_{i-1}^{K} E_i} s \; d\mu = \int_X s\chi_{\bigcup_{i=1}^{K} E_i} \; d\mu.$$

con

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{+K} E_i} = \sum_{i=1}^{K} \chi_{E_i}.$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{K} E_i \Leftrightarrow \exists! i \; x \in E_i.$$

$$\int_X s \sum_{i=1}^{K} \chi_{E_i} \; d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{K} s\chi_{E_i} \; d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j \cap E_i} \; d\mu.$$

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} s \; d\mu = \sum_{i=1}^{K} \mu_s(E_i).$$

$$\mu_s(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \geq \mu_S\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{K} \mu_s(E_i) \Rightarrow \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i).$$

$\square$

Osservazione
Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0$
$\Rightarrow \int_N S \; d\mu = 0$
$\mu_s(N) = 0 \;\; \forall N : \mu(N) = 0$
$\mu_s << \mu$ μ_s è assolutamente continua rispetto a μ.

Lezione 11 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-26

0.1 Esercitazioni, Foglio 4

Esercizio 4
$f : X \to Y$

1. se $B \subseteq 2^Y$ σ-algebra di Y
   $A = \{f^{-1}(B), B \in B\}$ è una σ-algebra in X

Svolgimento
$\emptyset \in B \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
sia $f^{-1}(C) \in A$, con $C \in B$
$(f^{-1}(C))^c = X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c)$
$C \in B \Rightarrow C^c \in B \Rightarrow (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in A$
$\{f^{-1}(C_i)\}_I \geq 1, C \in B$
$= \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A$

2. A σ-algebra in X
   $B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1})B_{\in} A\}$ è una sigma algebra in Y

Svolgimento
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \in B$
$C \in B \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A \Rightarrow f^{-1}(C)^c \in A \Rightarrow f^{-1}(C^c) \in A \Rightarrow C^c \in B$
$\{C_i\} \subset B \Leftrightarrow f^{-1}(C_i) \in A \ \ \forall i$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in C$

3. $X \xrightarrow{f} Y$
   $f^{-1}(\sigma < F >) \leftarrow \sigma < F >$ con $F \subset 2^X$
   $\Vert$
   $\sigma < f^{-1}(F) > \leftarrow F$ con $F \subset 2^X$

Soluzione
Per il primo punto dell'esercizio la controimmagine della σ-algebra e comunque una σ-algebra.
$f^{-1}(\sigma < F >) \supset f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(\sigma < F >) \supseteq \sigma < f^{-1}(F) >$
$\sigma < f^{-1}(F) >$ $\quad B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma < f^{-1}(F) >\}$
questa e'una σ-algebra in Y (punto 2)
$f^{-1}(B) \subseteq < f^{-1}(F) >$ quindi sono l'una contenuta nell'altra, quindi le due σ-algebre coincidono.

Esercizio 5
Sia X un insieme $(\neq)$ A una σ-algebra in X e sia $\mu : A \to [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\{E_i\} \subset A$, $E_i \cap E_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$
   $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$

Osservazione
μ rimane monotona e subadditiva

Infatti :
$A, B \in A \quad A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in A$
$B = A \cup B \setminus A \cup \emptyset \cup \ldots$
$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
Inoltre $\{A_i\} \subset A$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$
$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$
Esercizio
Dimostrare che $\exists \bar{\mu} : 2^X \to [0, +\infty]$ misura
tale che $\underline{A} \subseteq \sigma$-algebra dei $\bar{\mu}$-misurabili e $\forall A \in \mathbb{A} \quad \bar{\mu}(A) = \mu(A)$
$E \subseteq X \quad \bar{(E)} = \inf\{\mu(A),\ A \in \mathbb{A}, A \supset E\}$
$\bar{\mu}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(\emptyset) = 0$
$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ se $\exists i$ t.c. $\bar{\mu}(E_i) = +\infty$
Allora $\bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) = +\infty$
se $\bar{\mu}(E_i) < +\infty \quad \forall \imath\ \forall i \exists A_i \in A$ tale che $E_i \subseteq A_i \quad \bar{\mu}(E_i) \leq \mu(A) < \bar{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in A \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$
$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i)$
Se $E \in A \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(E)$
e $\forall A \in A, A \supseteq E \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(E) \Rightarrow \bar{\mu}(E) \geq \mu(E) \Rightarrow \mu(E) = \bar{\mu}(E)$
$A \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow A \Rightarrow A$ è $\bar{\mu}$-misurabile cioè $\forall F \subseteq X$

$$\bar{\mu}(F) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A).$$

Se $F \in \mathbb{A} \Rightarrow A, F \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(F) = \mu(F)$
$= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$
se $F \notin A$, e $\bar{\mu}(F) < \infty$
$\forall k\ \exists A_k \in A \mid F \subseteq A_k$, e $\bar{\mu}(F) \leq \mu(A_k) < \bar{\mu}(F) + \frac{1}{k}$
$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathbb{A}, A \supseteq F$
$\bar{\mu}(F) \leq \mu(A) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mu(A_j) \leq \bar{\mu}(F)$
$\exists A \in \mathbb{A}$ tale che $\bar{\mu}(F) = \mu(A)\ F \subseteq A$
$\bar{\mu}(F) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$
Dato che $\exists B \in \mathbb{A}$ tale che $F \subseteq B$ è $\bar{\mu}(F) = \mu(B)$

Esercizio 6
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
$f(E) \in \eta\ \forall E \in \eta \Leftrightarrow m(f(E)) = 0\ \forall E$ se $m(E) = 0$
$(\Rightarrow)$ sia N tale che $m(N) = 0$
per assurdo supponiamo $m(f(N)) > 0$
$\Rightarrow \exists V \subset f(N)\ V \notin \eta$ (ogni insieme di misura positiva contiene un insieme non misurabile)
$f^{-1}(V) \cap N \subset N \Rightarrow m(f^{-1}(V) \cap N) = 0$
$\Rightarrow f^{-1}(V) \cap N \in eta \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap N) = V \notin \eta$ ma dovrebbe appartenerci in quanto è immagine di un misurabile (ha misura nulla).
$(\Leftarrow)$
$E \in \eta$ tale che $f(E) \in \eta$
$E \in \eta \Leftrightarrow E = B \cup N\ m(N) = 0\ B$ boreliano.

$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq E, C_n$ chiusi
$f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n \cup N) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(C_n) \cup f(N)$ con $m(f(N)) = 0$ per ipotesi $\Rightarrow f(N) \in \eta$
Se E è limitato $\Rightarrow C_n$ sono compatti $\forall n$
$\Rightarrow f(C_n)$ è compatto $\forall n$ (f continua)
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(C_n) \in B \subseteq \eta$ (boerliano)
$\Rightarrow f(E) \in \eta$
In generale, se $E \in \eta \Rightarrow \bigcup_{n-1}^{+\infty} E \cap [-n, n]$, limitati $\forall n$ $f(E) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(E \cap [-n, n]) \in \eta$ unione misurabile di misurabili.
Esercizio 11
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 0, x > 1, \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ n-1 \quad \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \ x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \ a_n \neq 0 \ \ a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \end{cases} .$$

le prime $n-1$ cifre sono tutte nulle, e gli a_k sono le cifre del numero irrazionale
$x \in [0,1] a_1 \neq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{a_1}{10} \geq \dfrac{1}{10}$
Se $x \in [0, \frac{1}{10}], a_2 \neq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$
$f(x) = \chi_{(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}) \setminus \mathbb{Q}}$ (tra 0,01 e 0,1)
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}}(x)$
Quindi f è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.

Lezione 12 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-01

0.1 Boh

(X, m, μ)
$s = \sum_{i=1}^{N} c_j x_{E_j}, c_j \geq 0 \quad E_j \in m$
$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j)$
$\mu_S(E) = \int_E s d\mu = \int_X s x_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{N} c_i \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap E)$

Proposizione 1
Sia (X, m, μ) spazio di misura sia $s(x) = \sum_{j-1}^{N} c_j \chi_{E_j}(x)$ funzione semplice $\geq 0 \quad (c_j \geq 9 \quad \forall j)$
$\Rightarrow \mu_S : m \to [0, +\infty]$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu \qquad \forall E \in m.$$

è una misura.

Dimostrazione
$\mu_S(\emptyset) = \int_\emptyset s \ d\mu = 0$
$\{F_i\} \subset m, F_i \cap F_l = \emptyset$ *se* $i \neq l$
$F = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$
$\mu_S(F) = \int_F s \ d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i)$
$= \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_j \cap F_i)$
$= \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_j \cap F_i)$ *dato che* $E_j \cap F_i$ *sono disgiunti e misurabili*
$= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap F_i)$
$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{F_i} s \ d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_S(F_i)$ □

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono risultati che garantiscono la proprietà:
$\{f_n\}$ succesione di funzioni misurabili
$f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \ d\mu = \int_x \lim_{n \to +\infty} f_n \ d\mu = \int_X f \ d\mu$$

Osservazione
Per l'integrale di Riemann la validità del passaggio al limite sotto il segno d'integrale richiede la convergenza uniforme.
Esempio
$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_n\}$
$\forall n \geq 1 s_n(x) = \chi_{\{q_1, \ldots, q_n\}}$
s_n è discontinua in $\{q_1, \ldots, q_n\}$
$\Rightarrow s_n \in R([0, 1])$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x).$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0,1]$
ma $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin R([0,1])$

Teorema 1 (convergenza monotona, B. Levi)
Sia (X, m, μ) spazio di misura e sia $\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili
$f_n : X \to [0, +\infty] \quad \forall n$
monotona crescente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \geq,$ *q.o.*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq1} f_n(x).$$

$f : X \to [0, +\infty]$ *definita quasi ovunque è misurabile e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu = \int_X f \ d\mu.$$

Dimostrazione
$\int_X f_n \ d\mu$ *è una successione numerica monotona crescente*
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \leq \int_X f \ d\mu$
$f_n \leq f \quad \forall n \quad \int_X f_n \ d\mu \leq \int_X f \ d\mu$
Tesi: $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \geq \int_X f \ d\mu = \sup\{\int_X s \ d\mu . s \text{ Semplice } 0 \leq s \leq f\}$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \geq \int_X s \ d\mu \quad \forall s$ *funzione semplice* $0 \leq s \leq f$
Sia s funzione semplice, $0 \leq s \leq f$ *Sia* $\varepsilon > 0$ *e* $\forall n$

$$E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)s\}.$$

- $E_n \in m \quad \forall n$ *perché* $f_n - (1-\varepsilon)s$ *è misurabile*
- $E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ *poiché* $f_n \leq f_{n+1}$
- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$ *poiché sia* $x \in X$
  se $s(x) = 0 \Rightarrow x \subseteq E_n \quad \forall n$
  se $s(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \sup_{n\geq1} f_n(x) \quad \exists \bar{n}$ *tale che*
  $(1-\varepsilon)s \leq (1-\varepsilon)f(x) < f_{\bar{n}}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in E_{\bar{n}}$
  $(1-\varepsilon)\int_X s \ d\mu = \mu_{(1-\varepsilon)s}(X) = \mu_{(1-\varepsilon)s}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$
  $= \lim_{n\to+\infty} \mu_{(1-\varepsilon)s}(E_n)$
  $= \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{E_n} (1-\varepsilon)s \ d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{E_n} f_n \ d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$
  Per $\varepsilon \to 0$
  $\Rightarrow \int_X d \ d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \quad \forall s$
  $\Rightarrow \int_X f \ d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu$

$\square$

Osservazione

1. $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile
   $\Rightarrow \exists\{s_n\}$ successione di funzioni misurabili tale che

$$s_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \in X.$$

$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + n\chi_{\{f \geq n\}}.$$

Per il teorema di B. Levi
$\lim_{n\to+\infty} \int_X s_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu$

2. Se $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabile $\forall n$
   $f_n(X) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n$
   $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{n1} f_n \geq 0$
   $\int_X f_n \; d\mu \to \int_X f \; d\mu$
   $g_n = f_1 - f_n \geq 0 \quad \forall n$
   g_n è monotona crescente
   $\int_X g_n \; d\mu \to \int_X \; (f_1 - f) d\mu$
   $\int_X (f_1 - f_n) d\mu$
   Se $\int_X f_1 d\mu < +\infty$
   $\Rightarrow \int_X f_n \; d\mu \to \int_X f d\mu$
   In generale non vale se $\int_X f_1 \; d\mu = +\infty$
   Esempio: $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$
   $\int_{\mathbb{R}} f_n \; dm = 1m([n, +\infty]) = +\infty$

Corollario 1
Siano $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabili $\forall n$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X d_n \; d\mu.$$

Dimostrazione
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty$ *oppure* $+\infty \Rightarrow f : X \to [0, +\infty]$ *è misurabile*
$= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$
$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall x$
$\Rightarrow \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k \; d\mu$
$= \int_x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu \doteq \lim_{k\to+\infty} \int_X \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$
dove il penultimo passaggio ($\doteq$) è ancora da giustificare □

Proposizione 2
Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ misurabili
$\Rightarrow \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione
primo caso: f, g *funzioni semplici,* $f = s = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \chi_{E_j}$ $\quad c_j \geq 0$ $E_j \in m$ *disgiunti* $\cup E_j = X$
$g = t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{F_k}$ $d_k \geq 0, F_k \in m$ *disgiunti* $\cup F_k = X$
$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^{M} F_k = \bigcup_{k=1}^{M} E_j \cap F_k$

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{\bigcup_{k=1}^{M} E_j \cap F_k} = \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{k=1}^{M} \chi_{E_j \cap F_k}$$

Vero poiché unione di insiemi disgiunti

$$t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^{N} F_k \cap E_j}.$$

$$t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^{N} F_k \cap E_j} = \sum_{k=1}^{M} d_k \sum_{j=1}^{N} chi_{F_k \cap E_j}.$$

quindi

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} c_j \chi_{F_k \cap E_j} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} d_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu.$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} (c_j + d_k) \mu(F_k \cap E_j) = \int_X s \ d\mu + \int_X t \ d\mu.$$

secondo caso $f, g \geq 0$ *misurabili*
$\exists s_n \uparrow f$ *e* $\exists t_n \uparrow g$ $\qquad$ ($\uparrow =$ *tende*)
$\Rightarrow s_n + t_n \uparrow f + g$

$$\int_X (f+g) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_X s \ d\mu + \int_X t_n d\mu \right).$$

$$\int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu.$$

□

Esercizio
Sia $\{a_n\}$ una successione a termini mai negativi $a_n \geq 0$
$\{a_n\}$ può essere pensata come una funzione
f:$\mathbb{N} \to [0, +\infty]$
$\quad n \to f(n) = a_n$
$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu^*)$ $\quad \int_{\mathbb{N}} f \ d\mu^* =?$ dove μ^* calcola la cardinalità dei sottoinsiemi

Lezione 13 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-25

0.1 Lemma di Fatou

Lemma 1 (di Fatou)
Sia (X, M, μ) uno spazio di misura e $f_n : X \to [0, +\infty]$ successione di funzioni misurabili

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione
$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k(x)$ *con* $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall k, \forall x$
e sono misurabili
$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu$
ma $g_k \leq f_k \quad \forall k$
$\Rightarrow \displaystyle\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$ *e applicando il* $\liminf$
$\Rightarrow \displaystyle\liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$
$\displaystyle\liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu$
$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$ $\square$

Esempio 1
$f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ funzioni misurabili ≥ 0

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = 0$
$< \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

Esempio 2
$f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x) \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \quad \forall n$

Definizione 1 (Funzioni integrabili)
Sia (X, M, μ) spazio di misura e sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabile.
Se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int_X f^- d\mu < +\infty$ allora f si dice integrabile e

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

se $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow f$ si dice sommabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$ questo tipo di funzioni definisce

$$L^1(X) = \{f : X \to [-\infty, +\infty] \textit{ misurabili, } \int_X |F| d\mu < +\infty\}.$$

Proposizione 1
Sia (X, M, μ) spazio di misura

1. *Se f è integrabile su X*
   $\Rightarrow |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$
2. *(disuguaglianza di Chebychev)* $f \in L^1(X) \Rightarrow \forall t > 0$
   $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu$
3. $f \in L^1(X) \Rightarrow |f(x)| < +\infty$ *quasi ovunque in* X *(?)*
4. $f \in L^1(X), \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ *quasi ovunque*
5. $f, g \in L^1(X) \rightarrow f + g \in L^1$ *($f + g$ è definita quasi ovunque) e*
   $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione
Dimostriamo ogni punto:

1. *se* $\int_X |f| d\mu = +\infty$ *ovvio*
   Se $\int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X f^+ f\mu, \int_X f^{-1} < +\infty$
   $\Rightarrow |\int_X f d\mu| = |\int_X f^+ d\mu - \int_X f^{-1} d\mu| \leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X |f| d\mu$
2. $\int_X |f| d\mu \geq \int_X f|\chi_{\{|f|>t\}} d\mu \geq \int_X t\chi_{(\{|f|>t\})}$
3. $f \in L^1(X)$
   se $|f| = +\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\}$ *chiamo* $E_n = \{|f| > n\}$
   $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \ldots \subseteq E_1$
   $\mu(E_1) \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$
   $$\Rightarrow \mu(\{|f| = -\infty\}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mu(E_n)) \leq_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu = 0$$
4. $\int_X |f| f\mu = 0$
   $\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$
   $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$
   $\Rightarrow \mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = 0$
5. $f + g$ *è definita su* $X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})$ *(dove il secondo insieme ha misura nulla*
   posso quindi calcolare il suo integrale
   $\int_X (f+g) d\mu = \int_{X \setminus (\{|f|=+\infty\} \cup \{|g|=+\infty\})} (d+g) d\mu$
   $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$
   chiamiamo $f + g = h$
   $\int_X (f+g) d\mu = \int_X h^+ - \int_X h^- d\mu$
   $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$
   $$\Rightarrow \underset{\shortparallel}{\int_x (h^+ + f^- + g^-) d\mu} = \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu$$
   $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ + \int_X h^-$

$\int_X (f+g)d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

□

Teorema 1 (convergenza dominata o Teorema di Lebesgue)
Sia (X, M, μ) spazio di misura e siano $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili tali che $\lim_{n\to+\infty} f_n$ per q.o. $x \in X$ se $\exists g \in L^1(X)$ tale che $|f_n| \leq g$ quasi ovunque in X $\forall n \in \mathbb{N}$ Allora:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

Dimostrazione
$|f_n| \leq g \to f_n \in L^1(X)$ *e* $|f| \leq g$ *quasi ovunque* $\to f \in L^1(X)$
$\Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0$ *quasi ovunque in* X *(perché* $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$*)*
quindi puntualmente per q.o. $x \in X$ *fissato*

$$2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \to 2g(x).$$

$\Rightarrow$ *Usando il lemma di Fatou*

$$\cancel{\int_X 2g d\mu} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu.$$

sfruttiamo la linearità dell'integrale
$\liminf_{n\to+\infty} (\int_X 2g - \int_X |f_n - f| d\mu) = \cancel{\int_X 2g d\mu} - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu$
Nota: il $\liminf$ *diventa lineare nel caso dei limiti.*
siccome $g \in L^1(X)$ *posso semplificare*

$$\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

□

Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-29

0.1 Boh

Proposizione 1
(X,μ) spazio di misura; $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque; $f_n \to f$ q.o. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Dimostrazione
$(\Rightarrow)$ *Già visto*
$(\Leftarrow)$ $\forall y \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) = 0$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{y=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{\ |f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) := \mu(N) = 0$
$x \in X \setminus N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{y=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{y}\}$
Vuol dire che $\forall y \quad \exists k_y$ *(dipendente da* y*) tale che* $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{y}$
$\forall n \geq k_y \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n \to f$ *quasi ovunque* □
Se io so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$
È una condizione più forte o debole? Osserviamo che $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ forma una successione decrescente $(F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots)$
$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n^\varepsilon = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n \to +\infty} \ \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$
Se poi diventano di misura finita (da un certo punto in poi) vale $=$

Definizione 1
$f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili finite quasi ovunque; $f_n \to f$ in misura se $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Proposizione 2
Sia (X,μ) spazio di misura finita ($\mu(X) < +\infty$). Se $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunque $\Rightarrow f_n \to f$ in misura

Dimostrazione
Per la proposizione precedente:
$\forall \varepsilon > 0, f_n \to f$ *q.o.* $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$
ma questo per ipotesi è uguale a

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{k \to +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

se il $\limsup = 0 \Rightarrow \lim = 0$ *Quindi* $\mu(\{f_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$ □

Proposizione 3
Se $f_n, f \in L^1(X,\mu)$; $f_n \to f$ in $L^1(X) \Rightarrow f_n \to f$ in misura

Dimostrazione
$\forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \int_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu \to 0. \Rightarrow f_n \to f$ *in misura* □

$f_n \to f$ in misura $\overset{?}{\Rightarrow} f_n \to f$ quasi ovunque
$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$
definiamo $g_n := |f_n - f|$, $f_n : X \to [0, +\infty] \Rightarrow \mu(\{g_n > \varepsilon\}) \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} g_n \to 0$ quasi ovunque
L'insieme di sopralivello può muoversi sull'asse x. Non è detto che fissata x allora le successioni di funzioni tendano a 0.
Esempio
$\forall n$ dividiamo $[0, 1]$ in 2^n intervalli di ampiezza $\frac{1}{2^n}$
$I_{n,m} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\ \ 1 \leq k \leq 2^n$
$\{\chi_{I_{k,n}}\}_{1\leq k\leq 2^n, n\geq 1}$ successione di funzioni misurabili secondno *Lebesgue* su $[0, 1]$.
Cosa succede per $n \to +\infty$ C'è convergenza solo a 0
$\forall \varepsilon > 0, n(\{X_{I_{n,k}} \geq \varepsilon\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon > 1 \\ \frac{1}{2^n} = m(I_{k,n}) & \text{se } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases} \xrightarrow{n\to+\infty}$
$\Rightarrow \chi_{I_{n,k}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ in misura.
$\forall x \in [0, 1), \chi_{I_{k,n}}(x) = 1$ per infiniti indici

$$\int_{[0,1)} |\chi_{I_k,n}| dm = m(I_{k,n}) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

.

$$\chi_{I_{k,n}} \to 0 \quad \text{in } L^1([0, 1]).$$

Quindi c'è anche la convergenza in L^1
Quindi la convergenza in misura (e in L^1) $\not\Rightarrow$ convergenza puntuale (quasi ovunque)
Ma $\{\chi_{I_{n,m}}$ ha un'estratta che converge puntualmente a 0

$$\chi_{I_{n,m}} = \chi_{[0,\frac{1}{2^n})} \to 0 \ \text{ q.o. in } [0, 1).$$

Teorema 1
Siano $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunqe. Se $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow \exists$ sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque

Dimostrazione (Errata)
$a_n \geq 0, a_n \to 0\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ *no!*
$\varepsilon > 0$ *fissato,* $\forall k\ \exists n_k$ *tale che* $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^k}$
$\Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} < +\infty$$

$$\mu(\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \to 0.$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{j=1}^{+\infty}\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) = \lim_{j\to+\infty} \mu(\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Dov'è l'errore? Qui l'estratta dipende da ε, invece io voglio un'estratta che valga $\forall\varepsilon > 0$. In questo caso presa un'estratta questa vale $\forall\varepsilon' \geq \varepsilon$. Quindi voglio sostituire ε con una cosa infinitesima. La dimostrazione è lasciata per esercizio.
□

Corollario 1
Se $f_N, f \in L^1(X,\mu), f_n \to f$ in $L^1 \Rightarrow \exists$ estratta $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque.

Dimostrazione
$f_n \to$ in $L^1 \Rightarrow f_n \to f$ in misura *(disuguaglianza di Chebychev (?))*
$\Rightarrow \exists\{f_{n_k}\} : f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. □

Osservazione
In generale non tutta $\{f_n\}$ converge puntualmente. Per esempio $\chi_{I_{n,k}}$

Osservazione
Se $\mu(X) = +\infty, f_n \to f$ quasi ovunque $\Rightarrow f_n \to$ in misura?
$\mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$
Può essere che si formino tutte misure finite e l'intersezione faccia 0.
In generale non vale per esempio $f_n = \chi_{[n,+\infty)}, f_n(x) \to 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
Ma $m(\{f_n > \varepsilon\}) = +\infty$ per $\varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad f_n \not\to 0$ in misura
Ma quindi bisogna che i sottoinsiemi vadano a $+\infty$, quindi di un ambiente di misura infinita.
Se $\mu(X) < +\infty, f_n \to f$ quasi ovunque $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$
$\Rightarrow \forall\delta > 0 \ \exists k = k(\delta, \varepsilon)$ tale che $\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$
$x \in X \setminus F_{\delta,\varepsilon} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| < \varepsilon\} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq k$
Abbiamo trovato il k per cui l'ultima disequazione è piccola. Questo è vero $\forall x$.
Ma allora $\sup_{X\setminus F_{\delta,\varepsilon}} |f_n - f| < \varepsilon \ \ \forall n \geq k \Rightarrow f_n \to f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$

Definizione 2
Siano (X,μ) uno spazio di misura e $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili finita quasi ovunque si dice $f_n \to f$ quasi uniformemente se $\forall\delta > 0 \ \ \exists F_\delta \subset X, F_\delta$ misurabile, $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $f_n \to f$ uniforme in $X \setminus F_\delta$.

Esempio
$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$

$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} = f(x)$
$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{0\le x\le 1} |f_n - f| = 1$
Se tolgo $1, \sup_{[0,1)} |f_n - f| = \sup_{[0,1)} x^n = 1$ comunque le cose vanno male!
Dobbiamo togliere un intorno di $1 \Rightarrow \sup_{[0,1-\delta]} |f_n - f| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1 - \delta)^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
$\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente in $[0, 1-\delta] \forall \delta > 0$

Lezione 15 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-16

0.1 Convergenze varie (alberto agostinelli)

Definizione 1 (Convergenza quasi uniforme)
$f_n \to f$ quasi uniformemente se $\forall \delta > 0 \ \ \exists F_\delta \subseteq X, F_\delta$ misurabile $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \to 0$ ($f_n \to f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$)

Proposizione 1
$f_n \to f$ quasi uniformemente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

Dimostrazione
($\Rightarrow$)
$\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_s) < \delta$ *tale che,* $f_n \to f$ *uniformemente in* $X \setminus F_\delta$
$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$
tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta) \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X F_\delta$
$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ *tale che* $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$X \setminus F_\delta \subseteq \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \ \exists F_\delta \subset X \ \ \ \mu(F_\delta) < \delta$
tale che $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k = k(\varepsilon, \delta)$

$$\Big(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \{f_n - f| < \varepsilon\})^c = \bigcup_{n=k}^{+} \{f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq F_\delta.$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k \to +\infty} 0.$$

($\Leftarrow$)
$\varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists k = k(\varepsilon, \delta)$ *tale che*

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ *per* $\varepsilon = \frac{1}{j}, \quad \delta = \frac{\nu}{2^j}, \nu > 0$ *fissato*
$\Rightarrow \exists k_j = k_j(j, \nu)$ *tale che* $\mu(\bigcup_{n=k_j}^{+\infty} (\{f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) < \frac{\nu}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\nu}{2^j} = \nu.$$

$x \in X \setminus F_\nu$ *(dove F_ν è l'argomento della misura precedente)*
$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{j}\}$
$\Rightarrow \forall j \quad \exists k_j$ *tale che* $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall n \geq k_j — \Rightarrow \sup_{X \setminus F_\nu} |f_n - f| \xrightarrow{n \to +\infty}$

$0 \Rightarrow f_n \to f$ *uniformemente su* $X \setminus F_\nu$
Abbiamo caratterizzato la convergenza quasi uniforme con la misura dei sopralivelli $\forall \varepsilon > 0$
conseguenza:

$$f_n \to f \ q.u. \Rightarrow \begin{cases} f_n \to f & q.u. \\ f_n \to f & in\ misura \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq e\}\right) \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

ma allora

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f|\} \geq \varepsilon\}).$$

$$\forall k \quad \mu(\{f_k - f| \geq \varepsilon\} \leq \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

$\Rightarrow f_n \to f$ *in misura*

$\square$

Teorema 1 (Egorov)
Sia (X, μ) *spazio di misura finita (* $\mu(X) < +\infty$ *)*
Allora:

$$f_n \to f \quad q.o. \quad \Leftrightarrow \quad f_n \to f \quad q.u..$$

Teorema 2 (Vitali)
Sia (X, μ) *uno spazio di misura finita e siano* $f_n, f \in L^1(X)$ *tale che* $f_n \to f$ *quasi ovunque quasi ovunque*
allora $f_n \to f$ *in* $L^1 \Leftrightarrow \{f_n\}$ *equi-assolutamente integrabili*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tale che*

$$\int_E |F_n| d\mu < \varepsilon \ se\ E \in M \quad \forall n, \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione
$(\Rightarrow)$ *già visto*
$(\Leftarrow)$
$f_n \to f$ *quasi ovunque* + $\mu(X) < +\infty$
$\Rightarrow$ *(per Egorov)*
$\forall \delta > 0 \exists f_\delta \in M, \mu(F_\delta) < \delta$ *tale che* $f_n \to f$ *uniformemente in* $X \setminus f_\delta$

Sia $\varepsilon > 0$ *fissato*
$\Rightarrow$ *sia* $= \delta(\varepsilon)$ *dato dall'ipotesi di equi-assoluta integrabilità*
e sia $f_\delta \in M$ *dato dal teorema di Egorov*

$$\Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| d\mu + \int_{F_\delta} |f_n - f| d\mu.$$

$$\leq \sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \mu(X \setminus F_\delta) + \int_{F_\delta} |f_n| d\mu + \int_{F_\delta} |f| d\mu.$$

$$\leq (\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f|)\mu(X) + \varepsilon + \varepsilon \quad (\textit{dato che } \mu(F_\delta) < \delta).$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

□

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, m)$
f continua $\Rightarrow f$ misurabile
f continua quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile
MANCA UNA PARTE

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,| f \text{ è discontinua in } X\}.$$

$m\mu(D_f) = 0$ f è misurabile, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \cap D_f \cup \{f > t\} \setminus D_f.$$

$\Rightarrow$ ha misura nulla $\Rightarrow$ è misurabile
$x \in \{f > t\} \setminus D_f$
$\lim_{y->x} f(y) \Longrightarrow f(x) > t$ e f è continua in X
$\Rightarrow \exists \delta_x > 0 \;:\; f(y) > t \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$
$\Rightarrow \{f > t\} \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f>t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f>t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) D_f$ aperto è misurabile
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
se $\exists g \in C(\mathbb{R})$
tale che $f = g$ quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile
$\exists N \subset \mathbb{R}, m(N) = 0$
tale che $f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$
$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \setminus N \cup \{f > t\} \setminus N$ è misurabile
$f = \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ quasi ovunque
$f = g$ quasi ovunque $\exists N, \mu(N) \quad f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$
$x \in \mathbb{R} \setminus N \quad \lim_{y \to x} f(y)$
$f = \chi_[0, 1]$ è continua quasi ovunque ma non può essere ugguale quasi ovunque ad una funzione continua

Teorema 3
Sia $f : \mathbb{R} \to R$ *misurabile* $\Rightarrow \forall \delta > 0 \;\; \exists g_\delta \in C(\mathbb{R})$
tale che $m(\{f \neq g\}) < \delta$
e $\sup_{\mathbb{R}} |g_\delta| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f|$

Lezione 16 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-01

0.1 altri teoremi

Teorema 1 (Lisin)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *misurabile* $\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists g_\delta \in C(\mathbb{R}) \mid m(\{f\}) < \delta \quad \sup|g_\delta| \leq \sup|f|$

Dimostrazione
Procediamo per passi:

1. $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *semplice.*
   Tesi: $\forall \delta \exists F \subseteq [a,b] \mid m([a,b] \setminus F) < \delta, s|_F$ *continua*
   $\exists n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^n, E \subseteq M^n \mid s(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_n}(x)$ *SPDG* $E_k \cap E_h = \emptyset \quad \forall h,k$
   $\forall \delta > 0, k \in [n] \exists F_k \subseteq E_k$ *chiuso* $\mid m(E_k \setminus F_k) < \frac{\delta}{n}$
   $\Rightarrow F := \bigcup_{k=1}^n F_k, \quad m([a,b] \setminus F) = m(\bigcup_{k=1}^n E_k \bigcup_{k=1}^n F_k) \leq \sum_{k=1}^n m(E_k \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k) = \sum_{k=1}^n m(E_k \setminus F_k) < \delta$
   $s|_F$ *continua pK*

2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *misurabile*
   Obiettivo: $\forall \delta \in (0,+\infty) \exists F \subseteq [a,b] \mid m([a,b] \setminus F) < \delta, f)_F \in C(F)$
   La dimostrazione è poco chiara. Guarda da Spadaro.

□

0.2 Spazi L^p

(X,μ) spazio di misura
$L^p(X) = L^p(X,\mu) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabile} \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$
$f(x) = \frac{\chi_{|x|\geq 1}(x)}{|x|} \in L^p(\mathbb{R})$?

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu = 2\int_1^+ \infty \frac{1}{x^p} dm = 2\frac{x^{1-p}}{1-p}|_{p=1}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{2}{1-p} & p > 1 \end{cases} \Rightarrow f \in L^p \quad \forall p > 1$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \in L^p((0,1)) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\frac{p}{2}} dx < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^{\frac{2-p}{2}}}{2-p}|_{x=0}^1 < +\infty \quad \Leftrightarrow \frac{2-p}{2} > 0 \Leftrightarrow p < 2$$

Lemma 1 (Disugualgianza di convessità)
$\forall a, b \in [0, +\infty)$

1. *(Disuguaglianza di Young)*
   $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall p, p' \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (p' = \frac{p}{p-1})$

2. $a^p + b^p \leq (a+p)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p) \forall p \in [1,+\infty)$

3. $a^p + b^p \geq (a+b)^p \geq 2^{p-1}(a^p+b^p) \quad \forall p \in (0,1)$

Dimostrazione *1.* $\ln(x)$ *concava* $\forall x \in (0,+\infty)$

$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{}{1}p' b^{p'}) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{p'}\ln(b^p) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$\Rightarrow \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \geq ab$

2. $p \geq 1 \Rightarrow f(x) = x^p, x \in [0,+\infty)$ *convessa*

$$\frac{1}{2^p}(a+b)^p(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p = \frac{1}{2}(a^p+b^p) \quad (ottimale, a = b \Rightarrow =).$$

$b = 0 \Rightarrow a^p + b^p \leq (a+b)^p \quad \forall p \geq 1$

$b > 0 \Rightarrow f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$

$\Rightarrow f'(x) = p(x+1)^{p-1} - px^{p-1} = (x+1)^{p-1} - x^{p-1} \geq 0 \quad \forall x \geq 0, p \geq 1$

$\Rightarrow f \nearrow, f(0) = 0 \Rightarrow f \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow (\frac{a}{b}+1)^p - (\frac{a}{b})^p - 1 = f(\frac{a}{b}) \geq 0$

$\Rightarrow (\frac{a}{b}+1)^p \geq (\frac{a}{b})^p + 1$

$\square$

Lezione 17 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-30

0.1 Proprietà spazi L^p

Ricorda:

$$L^P(X) = \{f : X \to [-\infty, +\infty], f \text{ misurabile }, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty.$$

Proposizione 1
L^p è uno spazio vettoriale

Dimostrazione
$\forall f, g \in L^p(X), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ *è misurabile*

$$\int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu \leq \int (|\alpha||f| + |\beta||g|)^p d\mu$$
$$\leq 2^{p-1}(\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu + \int_X |\beta|^p |g|^p d\mu) < +\infty.$$

□

Per definizione, su $L^p(X)$ è ben definita la funzione

$$\| \ \|_p : L^p(X) \to [0, +\infty)$$
$$f \to ||f||_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Proposizione 2 (Disuguaglianza di Hölder)
Sia $p > 1$ e $p' = \frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1)$ $\forall f \in L^p(X), g \in L^{p'}(X)$
$\Rightarrow fg \in L^1(X)$ e

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |g|^{p'} d\mu)^{1/p'}$$

.

Dimostrazione
Si usa la disuguaglianza di Young se $f \neq 0, g \neq 0$
$\Rightarrow \|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} > 0$
$\|g\|_{p'} = (\int_X |g|^{p'} d\mu)^{1/p'} > 0$
Per quasi ogni (q.o.) $x \in X$

$$|f(x)| < +\infty, \quad |g(x)| < +\infty.$$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$
$$\Rightarrow \int_X \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_{p'} d\mu} \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\cancel{\int_X |f|^p d\mu}} \cancel{\int_X |f|^p d\mu} + \frac{1}{p'} \frac{1}{\cancel{\int_X |g|^{p'} d\mu}} \cancel{\int_X |g|^{p'} d\mu} = 1$$

□

Proposizione 3 (Disuguaglianza di Minkowski)
Sia $1 \leq p < +\infty$
$\forall f, g \in L^p(X) \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
$((\int_X |f+g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}))$

Dimostrazione
$\int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu = \int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu$
$\underset{Holder}{\leq} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu)^{\frac{p-1}{p}}$
$\leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$ *basta ultimamente dividere per* $\|f+g\|^{p-1}$ *entrambi i lati della disequazione* □

Proposizione 4
$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ *è una norma su* $L^p(X)$

Dimostrazione
(i)$|||_p \geq \forall f \in L^p(X)$

$$||f||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ q.o..$$

(ii) $\|\alpha f\|_p \quad \alpha \in \mathbb{R} = |\alpha| \|f\|_p$
(iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ □

Osservazione:
A rigore bisognerebbe definire $L^p(X)$ come l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza

$$[f] = \{g : X \to [-\infty, +\infty] \quad : \quad f = g \quad q.o.\}.$$

L'insieme quozientato con questa relazione ci permette di definire bene la norma, altrimenti l'elemento nullo non è unico (posso fare cambiamenti di misura nulla).

Teorema 1
Se $p \geq 1 \Rightarrow L^p(X)$ *è uno spazio vettoriale normato completo (spazio di Banach)*

Dimostrazione (La chiede all'orale)
Sia $\{f_n\} \subset L^p(X)$ *successione di Cauchy*
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \ : \ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$
Tesi: $\exists f \in L^p(X)$ *tale che* $f_n \to f$ *in* $L^p(X) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ *per* $n \to +\infty$
Usiamo la definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$
$\forall k \quad \exists n_k$ *tale che*

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

selezionando $n_{k+1} > n_k$
Si seleziona una estratta $\{f_{n_k}\}$ *tale che*

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Consideriamo la nuova successione:

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(X).$$

$$\|g_j\|_p = \| \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \|_p \leq \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} < 1$$

$\Rightarrow \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1 \quad \forall j$
Attenzione
Il modulo è fondamentale così g_j *è una funzione crescente!*
$g_{j+1} \geq g_j \quad \forall x \in X \Rightarrow \exists \lim_{j \to +\infty} g_j(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k - 1}(x) - f_{n_k}(x)|$
Usando il teorema di B. Levi

$$\int_X |g|^p d\mu = \lim_{j \to +\infty} \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1.$$

$\Rightarrow g \in L^p(X) \Rightarrow g^p \in L^1(X) \Rightarrow g^p$ *(e quindi anche g) è finita quasi ovunque.*
per quasi ogni $x \in X$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)| < +\infty.$$

$\Rightarrow$ *per quasi ogni* $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \text{ è convergente.}$$

$\Rightarrow \exists \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$
$= \lim_{j \to +\infty} (\cancel{f_{n_2}} - f_{n_1} + \cancel{f_{n_3}} - \cancel{f_{n_2}} + \ldots + f_{n_j} - f_{n_{j-1}}$
$= -f_{n_1} + \lim_{j \to +\infty} f_{n_j}$
$\Rightarrow \exists \lim_{j \to +\infty} f_{n_j}(x)$ *per ogni x*
$f(x) = \lim_{j \to +\infty} f_{n_j}(x)$
$\exists$ *quasi ovunque, è misurabile*
$\forall \varepsilon > 0$

$$\int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu = \|f_m - f_{n_k}\|_p < \varepsilon \quad \forall m \geq n_e \text{ per } j \text{ suff. grande.}$$

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \underset{Fatou}{\leq} \liminf_{j\to+\infty} \int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu \leq \varepsilon^p.$$

$$\Rightarrow f_n - f \in L^p e$$

$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e$.

$$\Rightarrow f = f_n - (f_m - f) \in L_p \;\; e \; \|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \; \forall m \geq n_e.$$

$\Rightarrow \|f_m - f\|_p \xrightarrow{m\to+\infty} 0$ $\square$