Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 σ-algebra

Definizione 1
X insieme non vuoto, Una famiglia $\eta \subseteq P(X)$ si dice σ-algebra su X se

1. $\emptyset, X \in \eta$
2. $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3. $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

Osservazione
Se η è σ-algebra e $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$
$E_i \in \eta \to E_i^c \in \eta \ \ \forall i$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta$

Una misura individua una σ-algebra
In generale
se μ è una misura su X

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X \ : \ E \text{ e } \mu - \text{misurabile}\}.$$

è una σ-algebra
In particolare in $\mathbb{R}$ c'è la σ-algebra di Lesbegue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lesbegue

Definizione 2
Sia X un insieme non vuoto e sia $F \subset P(X)$ si chiama σ-algebra generata da F la σ-algebra data da

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

la più piccola σ-algebra che contiene F

Definizione 3
Se (X, ι) è uno spazio topologico la σ-algebra generata da ι si dice σ-algebra di Borel

Vogliamo ora indagare sulla σ-algebra di Lesbegue in $\mathbb{R}$ $\eta_m = \eta$

Proposizione 1
Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo
$\Rightarrow I \in \eta$ (è misurabile secondo Lesbegue)

Dimostrazione
$I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallo* $\Rightarrow \quad \forall F \subseteq \mathbb{R} \ \ m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ ***Primo caso***

Supponiamo $I = (a, +\infty) \quad a \in \mathbb{R}$
Sia $F \subseteq \mathbb{R}$, *con* $m(F) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ *e* $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$m(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I \setminus I|)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I).$$

e per $\varepsilon \to 0$ *si ha* $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ $I_i = (\alpha_i, \beta_i) \quad |I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + I_i \cap I|$
$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$
$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$
$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$
Quindi:
Intervalli del tipo $I = (a, +\infty) \in \eta \to I = (-\infty, a] \in \eta$
$\to (a, b] \in \eta$
$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$
$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$
$\Rightarrow (a, b) \in \eta$
$\Rightarrow$ *vale anche per gli intervalli chiusi*
tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti. $\square$

Teorema 1
Ogni aperto $a \subseteq \mathbb{R}$ *è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti*

Corollario 1
σ*-algebra di Borel in* $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$*-algebra di Lesbegue*

L'inclusione puo essere stretta perché F insieme misurabili con Lesbegue e non con Borel
Quindi in $\mathbb{R}$ si ha:
$B \subseteq \eta \subsetneq P(R)$, che è stretta perché e come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perchè non vale l'additività $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lesbegue)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ *sono equivalenti*

1. $E \in \eta$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ *aperto t.c.* $E \subseteq A_\varepsilon$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3. $\exists\ F \in B$ (*F è intersezione numerabile di aperti*) *tali che* $E \subseteq F$ *e* $m(F \setminus E) = 0$

4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ C_\varepsilon$ *chiuso tale che* $C_\varepsilon \subseteq E$ *e* $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$

5. $\exists G \in B$ (*G è unione numerabile di chiusi*) *tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
Hp $E \in \eta$
Primo caso: $m(E) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli aperti tali che* $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$ *(l'insieme* A_ε *aperto) e* $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$
$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$
$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$
$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$
quindi
$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \le \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon$—
Secondo caso: $m(E) = +\infty$
$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$
$E \in \eta \Rightarrow\ \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$
applicando il primo caso
$\forall n,\ \forall \varepsilon$
$\exists A_n^\varepsilon$ *aperto tale che* $A_n^\varepsilon \ge E_n$ *e* $m(A_n^\varepsilon E_n) < \varepsilon$
$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$

$$m(A_\varepsilon \setminus E) = m(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E)) \le m(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E_n)) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

2) $\Rightarrow$ 3)
Hp $\forall > 0, \exists A_\varepsilon$ *aperto,* $A_\varepsilon \supseteq E$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$
Th $\exists F \in B$ *tale che* $F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) = 0$
Per $\varepsilon = \frac{1}{n},\ \forall n \ge 1\ \ \exists A_n$ *aperto t.c.* $A_n \supseteq E$ *e* $m(A_n E) < \frac{1}{n}$
$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B,\ \ F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) \le m(A_n \setminus E) \le \frac{1}{n}$
$\Rightarrow n \to +\infty\ \ m(F \setminus E) = 0$

3) $\Rightarrow$ 1)
Hp $\exists F \in B:\ \ F \supseteq E$ *e* $m(FE) = 0$
$E = F(F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$
1) $\Rightarrow$ 4)
$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ *aperto*
tale che $A_\varepsilon \supseteq E^c$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$
$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$ *è chiuso*
$E^c \subseteq A_\varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$
$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4) $\Rightarrow$ 5)
Per $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \forall \in \mathbb{N}$
$\exists C_n$ *chiuso,* $C_n \subseteq E$ *tale che* $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$
per $n \to +\infty m(E \setminus G) = 0$

5) $\Rightarrow$ 1)
Hp: $\exists G \in B$ *tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$
$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$ *perché unione di misurabili*

$\square$