

# Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

# 1 Introduzione al corso

## 1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello

3 esoneri

Con le prove diesonero possiamo essere esonerati dall'orale.

Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.

L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

## 1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.

La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale

Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistematizzazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).

Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiattata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).

Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

## 1.3 Serie di Fourier

Già nel XIIIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.

Parliamo ora di modelli "ondulosi"

Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori

$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \rightarrow u(x, t)$

Equazione della corda vibrante: 
$$\begin{cases} \partial^2 u / \partial t^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = h_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h_1(x) \quad \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

## 1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:

$$u(x, t) = \psi(t)\phi(x) \text{ variabili separate}$$

- sovrapposizione:

$$u_1, u_2 \text{ soluzioni} \Rightarrow u_1 + u_2 \text{ soluzione}$$

## 1.5 Onde stazionarie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \text{costante} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \end{aligned}$$

**Spiegazione:**

$$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$$

$$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}$$

$$\phi(x) = A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))(A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx))$$

$$\Rightarrow u(0, t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$$

$$(u(\pi, t) = 0 = \psi_m(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow u(x, t) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$  Tutti gli  $m$  interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx). \end{aligned}$$

Dove  $\alpha_m := a_m B_m$  e  $\beta_m := b_m B_m$

**Condizioni Iniziali:**

$$u(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x, \pi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$$

**Come trovare  $\alpha_m, \beta_m$**

$$\rightarrow \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^\pi h_0(x) \sin(mx) dx = \int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \alpha_m \text{ (coefficienti di Fourier)}$$

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:

La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.

**Esempio:** Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

ma  $D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $f_n$  Riemann integrabile.

Numeriamo  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n \in N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre:

$D(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\lim_{j \rightarrow +\infty} \cos(k! \pi x)^{2j})$  Esercizio "facile"

**Esercizio difficile:**

non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro

**Esempio:**

$C([0, 1]) \ni f, g$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\|f - g\|_1 = \dots$$

$(C([0, 1], d_1)$  non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)

$\|f_m - f_n\|_1 \rightarrow 0$  se  $n, m \rightarrow +\infty$

$$f_n \rightarrow f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

### Teorema 1

Il completamento di  $(C[0, 1], d_1)$  è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili secondo Lebesgue

## 1.6 Problema della misura

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  vogliamo associare la sua misura (in  $\mathbb{R}^n$ )

Stabilire la misura è come definire un integrale.

$$|E| = \int X_E$$

**Prerequisiti:**

1.  $|[a, b]| = b - a$   
 $|[a, b] \times [c, d]| = (d - c) \cdot (b - a)$
2.  $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

3.  $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$   
 3'  $\forall E \quad \forall \sigma \text{ isometria} \quad |E| = |\sigma(E)|$

**Teorema 2** (Paradosso di Banach-Tanski)  
*in  $\mathbb{R}^3$  non esiste nessunna funzione che soddisfa 1,2 e 3.*

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \dots \cup A_5.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Troviamo  $\sigma_1, \dots, \sigma_5$  t.c.

$\sigma_1(A_1) \cup \dots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$  (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)

Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

**Assioma 1** (della scelta)

*Data una famiglia di insiemi non vuoti  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  è sempre possibile trovare un insieme  $E$  composto da uno e un solo elemento di ogni  $A_x$*

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

# Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

## 0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

## 0.2 Misure

$X$  insieme non vuoto

$2^X$  = insieme delle parti di  $X$  = { sottoinsiemi  $E \subseteq X$ }

$\phi, X \in 2^X = \{\chi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$

$\chi \leftrightarrow E = \{\chi = 1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

### Definizione 1

Sia  $X$  non vuoto. Una misura è una funzione  $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  che soddisfa le due proprietà:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2. per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi  $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

### Commenti:

1) numerabile  $\Leftrightarrow$  al più numerabile

$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  possono essere finite:  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

2) Proprietà di monotonia:  $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

Segue da (ii) prendendo  $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \dots$

3) Gli insiemi  $\{E_i\}$  non sono necessariamente disgiunti

4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:

$E = E_1 \cup E_2$  con  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Può accadere che  $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

Esempi di misure:

- La misura che conta:  $X$

$$\mathbb{H}^0 : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha } n \text{ elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:

$$X, x_0 \in X$$

$$\delta_{x_0} : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

**Verifica**

$\delta_{X_0}$  è una misura

**Osservazione**

Se  $X$  è infinito allora  $H^0(X) = +\infty$

Viceversa  $\delta$  da finire

### 0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$  misura su  $X$

**Osservazione**

Possono esistere  $E, F$  t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

**Definizione 2** (Caratheodory)

Sia  $X \neq \emptyset$  e  $\mu$  misura su  $X$

Un insieme  $E \subseteq X$  si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

**Commenti:**

1)  $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

$E$  è misurabile

$\Updownarrow$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

**Teorema 1**

Sia  $X \neq \emptyset$  e  $\mu$  misura.

1. la classe degli insiemi misurabili è una  $\sigma$ -algebra:

$$1) \emptyset, X \in M$$

$$2) E \in M \Rightarrow E^c \in M$$

$$3) \{E_i : i \in \mathbb{N}^+\} \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

2.  $\mu$  è numerabilmente additiva su  $M$ : se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$  sono disgiunti a coppie ( $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ ) allora

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

**Commenti**

1)  $M$  è chiuso anche per intersezioni numerabili:  $E_i \in M$

$$\left( \bigcap_i E_i \right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

2)  $\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq N} E_i$   
 $\liminf_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geq N} E_i$

**Dimostrazione**

Passo 1:  $M$  è un algebra

$\cdot \emptyset \in M, X \in M$

Vado a verificare che  $\forall A \subseteq X$  vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che  $(\emptyset) = 0$

Per  $X$ :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$

Vado a verificare che per ogni  $A \subseteq X$  vale le proprietà di Caratheodory:  $\mu(A) = \mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$

$\cdot E_1, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$  Considero un insieme test  $A \subseteq X$ :

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$1) \quad \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

*Passo 2: finita additività di  $\mu$  in  $M$*

$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$

*Per ogni  $A \subseteq X$ :*

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

*Ottenuto sempre per Caratheodory*

$$\mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2).$$

*Iterando questo passaggio:*

$E_1, \dots, E_n \in M$  allora:

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

*Spiegazione passaggio precedente*

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^N E_i) = \dots = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

*Passo 3: mostriamo le proprietà di  $\sigma$ -algebra e numerabile additività*

*Siano  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$*

*Consideriamo gli insiemi:*

$$F_1 := E_1, \quad F_2 = E_2 \setminus E_1$$

$$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$$

*quindi definiamo ricorsivamente:  $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$*

*Allora  $F_i$  sono disgiunti a coppie*

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$$\cdot F_i \in M$$

*Fissiamo il test di Caratheodory  $A \subseteq X, F_i \in M$ , Passo 1:  $M$  algebra*

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i).$$

*Usando il passo 2: finita additività*

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i). \end{aligned}$$

*Passiamo al limite*  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&\geq \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&= \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M
\end{aligned}$$

*Se prendiamo come test*  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ , *allora*  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$   
 $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) — F_i$  sono disgiunti a coppie  $\square$

# Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

# 1 Misura di Lebegque

## 1.1 Porprietà dellle afunzioen lunghezza di intervalli

$I$  intervallo in  $\mathbb{R}$

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ \sup I - \inf I & (b-a) \quad \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$$\emptyset = (a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) - \{x\} = [x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà:

1.  $|\emptyset| = 0$

2. monotonia

$$I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$$

3. finita additività

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad I_i \text{ interevallo}$$

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Nota

se  $I$  illimitato

$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n$  tale che  $I_i$  illimitato

$$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{i=1}^n |I_k|$$

Se  $I$  limitato  $\Rightarrow I_i$  limitato  $\forall i = 1, \dots, n$

$$|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

4.  $I$  intervallo

$$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]|$$

$$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1]| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1]|$$

Nota

Se  $I$  illimitato

$\Rightarrow I \cap [n, n+1] = [n, n+1]$  per infiniti indici  $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]|$  per infiniti  $n$

Se  $I$  limitato

$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^k I \cap [n, n+1]$  per  $l, k \in \mathbb{Z}$

5. Numerabile subadditività

Se  $I$  intervallo,  $\{I_i\}$  successione di intervalli tale che

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

**Dimostrazione 5.**

Si può assumere  $I_i$  limitato  $\forall i$

1) caso,  $I$  compatto,  $I_i$  aperti  $\forall i$

$$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$$

$I$  compatto,  $\{I_i\}$  ricoprimento aperto

$\Rightarrow \exists$  sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che  $I_1$  è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.

si può supporre che  $a_1 < a < b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Reiterando trovo l'aperto contenente  $a_1$ , se questo contiene anche  $b$  mi fermo sennò continuo.

abbiamo quindi rinumerato  $I_1, \dots, I_n$  in modo che  $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |I| = \sum_{i=1}^n b_i - a_i = b_1 - a_1 + \dots + b_n - a_n$$

notiamo che  $b_1 > a_2$  quindi  $b_1 - a_2 > 0$ , procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso  $I$  limitato,  $I_i$  limitati

$\forall \varepsilon > 0 \exists I^\varepsilon$  chiuso,  $I^\varepsilon \subset I$  tale che  $|I^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I|$

$\forall i \exists I_i^\varepsilon$  aperto tale che  $I_i \subset I_i^\varepsilon$  e  $|\sum_i^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I_i|$

$$I^\varepsilon \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\varepsilon$$

$$I = \frac{1}{1-\varepsilon}|I^\varepsilon| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^\varepsilon| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Quindi  $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

3) caso  $I$  illimitato,  $I_i$  limitati  $n \in \mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1])$$

Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati

per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I \cap [n, n+1]|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

### Dimostrazione

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ vero per la 5)}$$

Ci basta dimostrare l'altro verso della disegualanza

se  $I$  limitato, (con estremi  $a < b$ )

$\forall k \geq 1$  consideriamo  $I_1, I_2, \dots, I_k$  sono contenuti in  $I$  e disgiunti

questi possono essere rinumerati in modo che  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$

$$\sum_{i=1}^k \leq b - a$$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

$$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \dots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$$

per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^k |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se  $I$  illimitato

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$$I \cap [n, n+1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1]$$

$$\Rightarrow |I \cap [n, n+1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

□

7.  $I$  intervallo,  $x \in \mathbb{R}$

$I + x$  traslato di  $I$

$$|I + x| = |I|$$

(invarianza per traslazioni)

### Definizione 1 (Misura esterna)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di  $E$

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli} \right\}.$$

$$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

### Osservazione

Se  $D \subset \mathbb{R}$  è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili

2) Per definire  $m$  si usano ricoprimeti numerabili ma anche i ricoprimeti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimeti finiti o ricoprimeti numerabili

$$E \subseteq \mathbb{R}$$

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervalli}\}$$

La disegualanza può essere stretta

### Esempio

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

è numerabile  $\Rightarrow m(E) = 0$

Sia  $\{I_1, \dots, I_n\}$  ricoprimento finito di  $E$  con intervalli

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq 1$$

Infatti

$$R = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$$

$$\Rightarrow [0, 1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$$

$$\leq \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0, 1]| \leq \sum_{i=1}^n |\overline{I_i}| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo} \right\} \geq 1 \text{ ma } E \subseteq [0, 1]$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo} \right\} \leq 1$$

Se avessi ricoprimeti finiti  $\mathbb{Q}$  avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimeti infiniti.

# Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

## 0.1 Misura di Lesbegue

**Reminderi (misura di Lesbegue)**

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : |I_i| \text{ intervalli } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right.$$

**Proposizione 1**

- 1)  $m(\emptyset) = 0$
- 2)  $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
- 3) subadditività numerabile,  $\{E_i\}$  successione di insiemi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

- 4)  $\forall I$  intervallo  $m(I) = |I|$
- 5)  $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E+x) = m(E)$

**Dimostrazione**

- 1)  $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$  dato che l'insieme vuoto è un intervallo
- 2)  $\forall \{I_i\}$  intervalli tale che  $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$  è un ricoprimento anche di  $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$  prendendo l'inf rispetto a  $\{I_i\}$   $m(E) \leq m(F)$
- 3) Se  $\exists i$  tale che  $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$  tesi ovvia  
possiamo supporre  $m(E_i) < +\infty \quad \forall i > 1$   
Dato  $\varepsilon > 0 \exists \{I_k^i\}_k$  intervalli tali che  $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$  e

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$  successione di intervalli  
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$   
 quindi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4)  $E = I$   $m(E) \leq |I|$  scegliendo  $I$  stesso come sottoricoprimento  
 $\forall \{I_i\}$  successione di intervalli tale che  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ per la numerabile additività di } | |.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5)  $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$   
 $\forall \{I_i\}$  successione di intervalli tale che  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i + x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che  $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$   
sappiamo che  $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$$

□

### Osservazione

È vero che se  $\{E_i\}$  successione di insiemi disgiunti  $E_i \cap E_j = \emptyset$  per  $i \neq j$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.

Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \dots + m(E_n).$$

con  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j \Rightarrow$  sarebbe vera anche la finita additività.  
Infatti

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \quad \text{sempre vero per subadditività.}$$

$$\begin{aligned} & \text{Se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \text{ e } \forall k \geq 1 \quad m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) \\ & \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \end{aligned}$$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che  $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di  $E_1$  che di  $E_2$  quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_{I \cap E_2} |I_i| + \sum_{I \cap E_2} |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se  $I_1, \dots, I_n$  intervalli,  $I_i \cap I_j = \emptyset$  per  $i \neq j$   
 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^n |I_i|$

Si può supporre gli  $I_i$  limitati (sennò misura è infinita)

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i$$

$$\begin{aligned} m(I) &= |I| = \sum_{i=1}^n |I_i| + \sum_{i=n+1}^{i=1} |J_i| \geq m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) + m\left(\bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i\right) \\ &\leq m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i\right) = m(I). \end{aligned}$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| = m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right).$$

se  $I_i$  intervalli con  $I_i \cap I_j = \emptyset$   $i \neq j$

### Definizione 1

Se  $X$  un insieme non vuoto, Una misura su  $X$  è una funzione

$$\mu : P(x) \rightarrow [0, +\infty].$$

tale che

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. (monotonìa)  $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
3. (subadditività)  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$
- 2.+3.  $\Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

### Esempi di misura

1)  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty).$$

$$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \quad \text{difatti:}$$

-  $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$

- se  $E \subseteq F$  se  $x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$

se  $x_0 \in E \rightarrow x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$

se  $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$

se  $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \exists i, \text{ t.c. } x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$

2) misura "che conta"

$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E \text{ se } E \text{ è finito} \\ +\infty \quad \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} .$$

### Esempio di insieme di misura di Lesbegue nulla

Non misurabile, insieme di Cantor

Al passo  $n = 1, I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi  $J$  e rimuovendo gli intervalli centrali.

$C_n$  è un insieme di  $2^n$  intervalli chiusi, disgiunti, ognuno di ampiezza  $\frac{1}{3^n}$

$C_n$  è alternato da  $C_{n-1}$  rimuovendo  $2^{n-1}$  intervalli aperti di ampiezza  $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definita da  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$

$$m(C) \leq m(C_n) = m\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n\right) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\forall x \in [0, 1]$

si scrive nella forma  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}$

$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \dots + \frac{x_i}{3^i} + \dots$

# Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

## 1 Qui manca la parte precedente della lezione

$f$  s.c.i  $\Leftrightarrow f^{-1}(a, +\infty)$  aperto  $\forall a \in \mathbb{R}$

### Dimostrazione

$(\Rightarrow) f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$   
 $c^- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) > a$  per  
 $\delta$  sufficientemente piccolo

$\Rightarrow f(x) > a$  per  $|x - x_0| < \delta$   
 $\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$   
 $\Rightarrow \{f > a\}$  aperto

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R} \quad \forall a < f(x_0) \quad x_0 \in \{f > a\}$   
 $\Rightarrow \exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$   
 $\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) > a$   
 $\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a \quad \forall a < f(x_0)$   
 $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$   
 $\Rightarrow f$  s.c.i

□

# Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

# 1 Insieme di Vitali

**Controesempio all'additività di  $m$**

Insieme di Vitali

In  $\mathbb{R}$  consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia  $[x]$  la classe di equivalenza di un elemento  $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

$V$  insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in  $[0, 1]$  da ogni classe d'equivalenza.  $V \subseteq [0, 1]$ ,  $x \in V$

$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V$  tale che  $x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q$  dove  $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$

Quindi abbiamo dimostrato

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \subseteq [-1, 2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti

siano  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

se  $V + q_1 \cap V + q_2 \neq$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$  tale che

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che  $x_1 \sim x_2$  che è assurdo dato che in  $V$  prendiamo solo un rappresentante per ogni classe di equivalenza.

Ciò vuol dire che  $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]}$  è unione numerabile di insiemi disgiunti

**Vediamo la misura di questo insieme**

$$m([0, 1]) = 1 \leq m \left( \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \right) \text{ per monotonia}$$

Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V + q). \\ &= \sum m(V) \leq m([-1, 2]) = 3. \end{aligned}$$

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V) \leq 3$$

Però le due diseguaglianze indicano che  $m(V) > 0$  e  $m(V) = 0$  (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

**Definizione 1** (Caratheodory)

$X$  insieme non vuoto  $\mu$  misura su  $X$

Un insieme  $E \subseteq X$  si dice  $\mu$ -misurabile se  $\forall F \subseteq X$  si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero  $E$  spezza additivamente ogni altro insieme

**Osservazione**

1.  $E \subseteq X$  è  $\mu$  misurabile  $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$   
perché  $\geq$  è sempre vero per la subadditività  
Quindi si può anche supporre  $\mu(F) < +\infty$
2. La definizione di misurabilità è simmetrica per  $E$  e  $E^c = X \setminus E$ ,  $E$  misurabile  $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$   
che è la misura che dovrei testare per  $E^c$   
Quindi  $E$  è  $\mu$ -misurabile  $\Leftrightarrow E^c$  è  $\mu$ -misurabile
3. Se  $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$  è  $\mu$ -misurabile.  
 $\forall F \subseteq X$   
 $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F) \Rightarrow E$  è  $\mu$ -misurabile.

Indicheremo con  $\eta_\mu$  la classe dei sottoinsiemi  $\mu$ -misurabili  
 $\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \text{ } \mu\text{-misurabile}\} = \{\emptyset, X, \dots\}$

### Teorema 1

Sia  $\mu$  una misura su  $X$ ,  $\eta_\mu$  la classe degli insiemi  $\mu$ -misurabili, Allora:

1. se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$  tale che  $E_i \cap E_j = \emptyset$  se  $i \neq j$   
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$   
tale che  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \dots$   
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$
4. Se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\nu$   
tale che  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \dots$   
e  $\mu(E_1) < +\infty$   
 $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$

### Dimostrazione

Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \text{ th: } E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$$\forall F \subseteq X$$

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1 \cap E_2) + (F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \\ &\mu(F \cap E_1 \cup (F \setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

per subadditività

Induttivamente:

$$\text{se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$$

$$\text{Se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \dots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i^c \in \eta_\mu \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^k E_i^c)^c \in \eta_\mu$$

Secondo passo finita additività:

$$E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \dots, E_k \text{ disgiunti}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i \cap E_k\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)$$

terzo passo: Numerabile additività

$$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Osserviamo che  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ , disgiunti

$$F \subseteq X$$

$$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F \cap E_i\right)$$

$$\begin{aligned}
& e \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(F \cap E_i) \\
& \text{quarto passo} \\
& \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \eta_\mu \\
& E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \\
& \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i) \\
& \bigcup_{i=1}^k E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_{... \cup 2 \setminus E_2 ... \cup E_k \setminus E_{k-1}} \\
& \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E_i - iE_{i-1} \\
& \{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i \geq 2} \\
& \text{successione di insiemi disgiunti e misurabili.} \\
& E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i-1})^c \\
& \text{per il passo 3} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) \\
& = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})) \\
& E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1} \\
& \Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1}) \\
& \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^k (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})). \\
& = \mu(E_2) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(E_2) - \mu(E_1) + \mu(E_3) - \mu(E_2) + \dots + \mu(E_k) - \mu(E_{k-1})).
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
& \text{se } E_1 \subseteq \dots \quad \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \\
& \forall F \subseteq X \\
& \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(F \cap E_i) \\
& \text{Quinto passo} \\
& \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \\
& E_2 \supseteq E_2 \supseteq \dots \quad \mu(E_1) < +\infty \\
& E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \dots \\
& \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i). \text{ sesto passo} \\
& \{E_i\} \subset \eta_\mu \\
& \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu \\
& \forall F \subseteq X \\
& \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k) \\
& B_j = \bigcup_{i=1}^k E_i \\
& B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \\
& \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \\
& \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \setminus B_k) \\
& = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)
\end{aligned}$$

□

# Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

## 0.1 $\sigma$ -algebra

### Definizione 1

*X insieme non vuoto, Una famiglia  $\eta \subseteq P(X)$  si dice  $\sigma$ -algebra su X se*

1.  $\emptyset, X \in \eta$
2.  $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3.  $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

### Osservazione

Se  $\eta$  è  $\sigma$ -algebra e  $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

$$\begin{aligned} E_i \in \eta &\rightarrow E_i^c \in \eta \quad \forall i \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta &\Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta \end{aligned}$$

Una misura individua una  $\sigma$ -algebra

### In generale

se  $\mu$  è una misura su  $X$

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X : E \text{ e } \mu - \text{misurabile}\}.$$

è una  $\sigma$ -algebra

In particolare in  $\mathbb{R}$  c'è la  $\sigma$ -algebra di Lesbegue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lesbegue

### Definizione 2

*Sia X un insieme non vuoto e sia  $F \subset P(X)$  si chiama  $\sigma$ -algebra generata da F la  $\sigma$ -algebra data da*

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è } \sigma\text{-algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

*la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene F*

### Definizione 3

*Se  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico la  $\sigma$ -algebra generata da  $\tau$  si dice  $\sigma$ -algebra di Borel*

Vogliamo ora indagare sulla  $\sigma$ -algebra di Lesbegue in  $\mathbb{R}$   $\eta_m = \eta$

### Proposizione 1

*Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo*

$\Rightarrow I \in \eta$  (è misurabile secondo Lesbegue)

### Dimostrazione

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo  $\Rightarrow \forall F \subseteq \mathbb{R} \ m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$  **Primo caso**

Supponiamo  $I = (a, +\infty)$   $a \in \mathbb{R}$

Sia  $F \subseteq \mathbb{R}$ , con  $m(F) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$  successione di intervalli tale che  $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$  e  $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$\begin{aligned} m(F) + \varepsilon &> \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I \setminus I_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I). \end{aligned}$$

e per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha  $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$   $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$   $|I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + |I_i \setminus I|$

$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$

$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$

$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$

**Quindi:**

Intervalli del tipo  $I = (a, +\infty) \in \eta \rightarrow I = (-\infty, a] \in \eta$

$\rightarrow (a, b] \in \eta$

$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$

$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$

$\Rightarrow (a, b) \in \eta$

$\Rightarrow$  vale anche per gli intervalli chiusi

tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti.  $\square$

### Teorema 1

Ogni aperto  $a \subseteq \mathbb{R}$  è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti

### Corollario 1

$\sigma$ -algebra di Borel in  $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$ -algebra di Lesbegue

L'inclusione può essere stretta perché  $F$  insieme misurabili con Lesbegue e non con Borel

Quindi in  $\mathbb{R}$  si ha:

$B \subseteq \eta \subsetneq P(\mathbb{R})$ , che è stretta perché come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perché non vale l'additività  $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

### Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lesbegue)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  sono equivalenti

1.  $E \in \eta$

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$  aperto t.c.  $E \subseteq A_\varepsilon$  e  $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3.  $\exists F \in B$  ( $F$  è intersezione numerabile di aperti) tali che  $E \subseteq F$  e  $m(F \setminus E) = 0$
4.  $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$  chiuso tale che  $C_\varepsilon \subseteq E$  e  $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$
5.  $\exists G \in B$  ( $G$  è unione numerabile di chiusi) tale che  $G \subseteq E$  e  $m(E \setminus G) = 0$

### Dimostrazione

1)  $\Rightarrow$  2)

Hp  $E \in \eta$

Primo caso:  $m(E) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$  successione di intervalli aperti tali che  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$  (l'insieme  $A_\varepsilon$  aperto) e  $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$

$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$

$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$

$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$

quindi

$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon -$

Secondo caso:  $m(E) = +\infty$

$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$

$E \in \eta \Rightarrow \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$

applicando il primo caso

$\forall n, \forall \varepsilon$

$\exists A_n^\varepsilon$  aperto tale che  $A_n^\varepsilon \supseteq E_n$  e  $m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) < \varepsilon$

$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$

$m(A_\varepsilon \setminus E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E)\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$

Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

2)  $\Rightarrow$  3)

Hp  $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon$  aperto,  $A_\varepsilon \supseteq E$  e  $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

Th  $\exists F \in B$  tale che  $F \supseteq E$  e  $m(F \setminus E) = 0$

Per  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \geq 1 \exists A_n$  aperto t.c.  $A_n \supseteq E$  e  $m(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$

$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B$ ,  $F \supseteq E$  e  $m(F \setminus E) \leq m(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n \rightarrow +\infty m(F \setminus E) = 0$

3)  $\Rightarrow$  1)

Hp  $\exists F \in B : F \supseteq E$  e  $m(F \setminus E) = 0$

$E = F(F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$

1)  $\Rightarrow$  4)

$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$  aperto

tale che  $A_\varepsilon \supseteq E^c$  e  $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$  è chiuso

$E^c \subseteq A_\varepsilon \Rightarrow E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$

$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4)  $\Rightarrow$  5)

Per  $\varepsilon = \frac{1}{n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists C_n$  chiuso,  $C_n \subseteq E$  tale che  $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

per  $n \rightarrow +\infty m(E \setminus G) = 0$

□

5)  $\Rightarrow$  1)

Hp:  $\exists G \in B$  tale che  $G \subseteq E$  e  $m(E \setminus G) = 0$

$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$  perché unione di misurabili

# Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

## 0.1 Approccio agli integrali di Lesbegue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

### Definizione 1

*Sia  $X$  un insieme non vuoto e  $\eta$  una  $\sigma$ -algebra in  $X$ .*

*( $(X, \eta)$  spazio misurabile)*

*Sia  $X$  uno spazio topologico,*

*una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice misurabile se  $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \text{ aperto}$*

### Esempi

1) se  $\eta = P(X) \Rightarrow$  ogni funzione  $f : X \rightarrow Y$  è misurabile

Se  $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \rightarrow Y$  è  $\eta$ -misurabile  $\Leftrightarrow f$  è costante.

2) Se  $X$  è spazio topologico e se  $\eta \supseteq B(\text{Borel})$

$f : X \rightarrow Y$  continua  $\Rightarrow f$  misurabile

3)  $X = \mathbb{R}$  con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$E \subseteq X$

$A \subseteq \mathbb{R}$  aperto

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0, 1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A \end{cases} \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

### Proposizione 1

*Se  $(X, \eta)$  spazio misurabile e  $f : X \rightarrow Y$*

*$\Rightarrow \{F \subseteq Y : f^{-1}(F) \in \eta\} = S$  è una  $\sigma$ -algebra in  $Y$*

*di conseguenza se  $Y$  è uno spazio topologico e  $f$  è  $\eta$ -misurabile*

*allora  $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$*

### Dimostrazione

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$$

$$f^{-1}(Y) = X \Rightarrow Y \in S$$

$$F \in S \text{ ovvero } f^{-1}(F) \in \eta$$

$$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$$

Facciamo vedere che  $S$  è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.

$$\{F_i\} \subset S \text{ ovvero } f^{-1}(F_i) = \eta \quad \forall_i$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$$

□

### Proposizione 2

Sia  $(X, \eta)$  uno spazio misurabile  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Allora  $f$  è misurabile se e solo se

$$\begin{aligned} & \{x \in X : f(x) > t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) \geq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) < t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) \leq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} f \text{ è misurabile} & \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \subseteq \mathbb{R} \text{ boreiano} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

### Proposizione 3

Sia  $(X, \eta)$  uno spazio misurabile

1. Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sono misurabili  
 $\Rightarrow f + g, \lambda f \quad \lambda \in \mathbb{R}, f \cdot g, \frac{f}{g} \quad \text{se } g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$  sono misurabili
2. Se  $\{f_k\}$  successione di funzioni misurabili  
 $\Rightarrow \sup_k f_k, \inf f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  sono misurabili  
In particolare, se  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$  è misurabile

### Dimostrazione

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili

$$t \in \mathbb{R} \quad \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r+s=t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \text{ perch\'e } f, g \text{ misurabili}$$

se  $x$  tale che  $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t - g(x)$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$  tale che  $f(x) > r > t - g(x)$

quindi  $g(x) > t - r \rightarrow s \in \mathbb{Q}$  tale che  $g(x) > s > t - r$

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  numerabili,  $\lambda \in \mathbb{R}, f$  misurabile

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

$f$  misurabile

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{set} < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{se } f, g \text{ misurabili}$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$  sono misurabili

$$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

$f$  misurabile

$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$  Guarda sta dimsotrzione usl libro o ricopila dalle foto perchè è assolutamente insensato  $\square$

Sia  $(X, \eta)$  spazio misurabile

se  $\eta$  è la  $\sigma$ -algebra di misurabili di misura  $\mu$  allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a  $\eta_\mu$

#### Proposizione 4

Sia  $(X, \eta, \mu)$  spazio di misura

( $\mu$  è una misura su  $X$  e  $\eta$  è la  $\sigma$ -algebra di misurabili)

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile

e sia  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f = g$  quasi ovunque (ovvero  $m(\{f \neq g\}) = 0$ )

$\Rightarrow$  anche  $g$  è  $\mu$ -misurabile

#### Dimostrazione

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$$

Il primo insieme è contenuto in  $\{g \neq f\}$  quindi ha misura nulla

$\Rightarrow \in \eta_\mu$

il secondo insieme è  $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$  perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

$\square$

#### Corollario 1

se  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  sono misurabili  $k > 1$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  per quasi ogni  $x \in X$

$\Rightarrow$  la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

#### Dimostrazione

$X_1 = \{x \in X \mid \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)\} = \{x \in X \mid \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)\}$  è misurabile

$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{se } x \in X_1 \\ 0 & \text{se } x \notin X_1 \end{cases} .$$

è misurabile  $\forall k$  perché  $\tilde{f}_j = f_j$  quasi ovunque

$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$

quindi è misurabile

$\square$

## 0.2 Funzione di Lesbegue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

$\forall n \quad [0, 1] = \bigcup_{i=1}^n J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$   
 gli  $J$  sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza  $\frac{1}{3^n}$ , le  $I$  sono di ampiezza  $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases}.$$

# Lezione 9 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

## 0.1 Funzione di Lebesgue-Vitali

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad n = 1 \quad [0, 1] = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \cup (1/3, 2/3)$$

Al primo passo abbiamo questa situazione, gli intervalli restanti (chiusi) sono gli  $J_i^1$  e quelli rimossi (aperti) sono gli  $I_i^1$

$$\text{al passo } n = 2 \text{ abbiamo } [0, 1] = J_1^2 \cup J_{2,3}^2 \cup J_4^2 \cup I_1^2 \cup I_{2,1} \cup I_3^2$$

In generale al passo  $n$ -esimo abbiamo  $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{2^n-1} I_i^n$  con  $|J_i^n| = \frac{1}{3^n}$  e  $|I_i^n| = \frac{1}{2^n}$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } 3/2 \text{ su } J_1^1 \cup J_2^1 \\ \text{costante} & \text{su } I_1^1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^2 \text{ su } \bigcup_{i=1}^4 J_i^2 \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^n \text{ su } \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n.$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{3^n}]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = L_{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) - L_n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{2^n}$$

$$\forall m > n$$

$$\sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_n(x)| = \sup_{[0,1]} |L_n(x) - L_{m-1}(x) + L_{m-1}(x) - L_{m-2}(x) + \dots + L_{n+1} - L_n(x)|.$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{[0,1]} |L_{k-1}(x) - L_k(x)| \leq \sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_{m-1}(x)| + \dots + \sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \rightarrow n \rightarrow \infty.$$

$\{L_n(x)\}$  è uniformemente di Cauchy in  $[0, 1]$ .

$\Rightarrow \exists L \in C([0, 1])$  tale che  $L_n \rightarrow L$  uniformemente in  $[0, 1]$

$$L_n(x) \leq L_n(y) \quad \forall x \leq y \Rightarrow L(x) \leq L(y)$$

$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  è continua, monotona crescente

$$L(0) = 0, L(1) = 1$$

$L$  è localmente costante su  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^m$   
 $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_k^n$   
 $\Rightarrow \exists m, \exists k \ x \in I_k^n \ L = \text{costante in } I_k^n \Rightarrow L'(x) = 0$   
 $\Rightarrow L$  è derivabile quasi ovunque (in  $[0, 1] \setminus C$ ) e  $L' = 0$  quasi certamente.

$$\int_0^1 L'(x) dx = 0 \neq L(1) - L(0).$$

Integrale di Riemann perché  $L'$  è discontinua in  $C$ , non funziona quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale

### Proposizione 1

$$L(C) = [0, 1] \quad \forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 2\}$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$$

### Dimostrazione

Primo caso  $x \in C$  tale che  $\exists n \geq 1 \ x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$

Usiamo l'induzione su  $n$

se  $n = 1 \Rightarrow x = 0$  oppure  $x = \frac{2}{3} \Rightarrow L(0) = 0, L(2/3) = L_1(2/3) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ok}$

Supponiamo vero per  $L(\sum_{n=1}^{i-1} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{n=1}^{i-1} \frac{x_i/2}{2^i}$

e sia  $x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$ , con  $x_n = 2$

$L(x) = L_n(x) = L_n(x - \frac{1}{3^n}) = L_n(x - \frac{2}{3^n}) + (\frac{3}{2})^n \frac{1}{3^n}$

$L(x + \frac{2}{3^n}) + \frac{1}{2^n} = L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i} + \frac{x/2}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i/2}{2^i}$

secondo caso

$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$

è continua

$$\Rightarrow L(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i/2}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}.$$

$L(C) = [0, 1]$

Quindi  $L$  manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva.

### Consideriamo

$\phi(x) = L(x) + x$

$\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  strettamente crescente

$\exists \phi^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$  strettamente crescente, con immagine in un intervallo

$\Rightarrow$  continua

$\Rightarrow \phi$  è un omomorfismo di  $[0, 1]$  in  $[0, 2]$   $\phi([0, 1]) = \phi(C \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^n)$

$= \phi(C) \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(I_i^n)$  insiemi misurabili e disgiunti

$\phi(x) = 2 = m(\phi([0, 1])) = m(\phi(C)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(\phi(I_i^n))$

$x \in I_i^n \ \phi(x) = x + L(x) = x + a_i^n \Rightarrow \phi(I_i^n) = I_i^n + a_i^n$

$\Rightarrow m(\phi(I_i^n)) = |I_i^n| = \frac{1}{3^n}$

$= m(\phi(C)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^2$

$= m(\phi(C)) + 1$

$$\Rightarrow m(\phi(C)) = 1$$

□

$m(\phi(C)) > 0$   
 $\Rightarrow \exists V \subset \phi(C)$  tale che  $V \notin \eta$   
ma  $E = \phi^{-1}(V) \subset C \Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \eta$   
quindi  $E \in \eta$  ma  $\phi(E) \notin \eta$

**Proposizione 2**

*La  $\sigma$ -algebra  $\eta$  non è chiusa per omeomorfismi continui*

**Dimostrazione**

$E \in \eta$  ma  $\phi(E) = V \notin \eta$   
 $E \in \eta$  se  $E \in B \Rightarrow \phi(E) = (\phi^{-1})^{-1}(E)$   
 $\phi^{-1}$  è continua  $\Rightarrow \phi^{-1}$  è misurabile secondo Lesbegue  
 $\Rightarrow (\phi)^{-1}(E) \in \eta \quad \forall E \in B$   
da capire come finisce sta roba (non so manco se questa sia la dimostrazione)

□

**Proposizione 3**

$\eta \setminus B \neq \emptyset$

# Lezione 10 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-25

## 0.1 Continuando sulle funzioni misurabili

**Definizione 1** (Funzione semplice)

Sia  $(X, A, \mu)$  uno spazio di misura. Una funzione semplice in  $X$  è una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x), \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, N \geq 1, E_i \in A.$$

$$\text{con } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } \bigcup_{i=1}^N E_i = X$$

**Teorema 1**

Sia  $(X, A, \mu)$  uno spazio di misura, e  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

Allora  $f$  misurabile  $\Leftrightarrow \exists \{s_m\}$  successione di funzioni semplici tale che  $s_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$

Inoltre

1. se  $f \geq 0 \Rightarrow$  si può scegliere  $\{s_m\}$  tale che  $s_m(x) \leq s_{m+1}(x) \quad \forall x \in X, \forall m \geq 1$ .
2. se  $f$  è limitata  $\Rightarrow s_m \rightarrow f$  uniformemente in  $X$ .

**Dimostrazione**

$(\Leftarrow)$  ovvia, perché  $f$  è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili

$(\Rightarrow)$  Primo caso:  $f \geq 0$ , limitata, si può supporre  $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad [0, 1] &= \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \\ E_k^n &= \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \quad k = 1, \dots, 2^n \\ f \text{ misurabile} &\Rightarrow E_k^n \text{ misurabile } \forall k = 1, \dots, 2^n, \forall n \geq 1 \\ E_k^n \cap E_j^n &= \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } X = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_k^n \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n}(x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \forall n \geq 1 \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^n \text{ tale che } x \in E_k^n \\ \Rightarrow 0 \leq s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \\ x \in E_k^n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \\ \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ \Rightarrow \text{sono possibili due casi} \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}.$$

oppure

$$s_n(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}.$$

nel caso 1  
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = s_{n+1}(x)$   
 nel caso 2  
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$   
 $\forall x \in X \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^{n+1}$   
 tale che  $x \in E_k^n$   
 $\Leftrightarrow s_n(x) \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$   
 $0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$   
 $\sup_{x \in X} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2^n}$   
 $\Rightarrow s_m \rightarrow f$  uniformemente in  $X$

( $\Rightarrow$ ) secondo caso:  $f \geq 0$

$\forall n \geq 1$

$$E_I^n = \{f < n\}, \quad E_{II}^n = \{f \geq n\}.$$

$$E_{I,k}^n = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = E_I^n$$

$$s_n(x) = n \chi_{E_{II}^n}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k+1}{2^n} \chi_{E_{I,k}^n}(x).$$

$$E_{II}^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = X.$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x$  (come nel caso 1)  
 Se  $f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) \geq m \quad \forall m$   
 $\Leftrightarrow x \in E_{II}^n$   
 $\Rightarrow s_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$   
 Se  $f(x) < +\infty \Rightarrow \exists \bar{n}$  tale che  $f(x) \leq \bar{n}$   
 $\Rightarrow x \in E_I^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n$   
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$   
 $\Rightarrow 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$   
 la convergenza non è uniforme perché  $\bar{n}$  dipende da  $f$ .  
 $\Rightarrow s_n(x) \rightarrow f(x)$

Terzo caso

$f$  di segno variabile

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

$f$  misurabile  $\Leftrightarrow f^-, f^+$  misurabili

Per il secondo caso

$$\exists \{s_n\} \text{ funzioni semplici } s_n(x) \rightarrow f^+(x) \quad \forall x$$

$$\{t_n\} \text{ funzioni semplici } t_n(x) \rightarrow f^-(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow s_n - t_n \text{ è funzione semplice, } s_n(x) - t_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

□

**Definizione 2**

Sia  $(X, A, \mu)$  spazio di misura e sia  $s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$ ,  $c_i \geq 0$   
si definisce

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i).$$

dove si usa la convenzione  $0 \cdot (+\infty) = 0$   
e, inoltre,  $\forall E \in A$

$$\int_E s \, f \, d\mu = \int_X s \cdot \chi_E \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E \cap E_i).$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i \cap E}.$$

dato che  $\chi_{E_i} \cdot \chi_E = \chi_{E_i \cap E}$

**Definizione 3**

Sia  $(X, A, \mu)$  spazio di misura e sia  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile  
 $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X s \, d\mu \mid s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f\}$  e  $\forall E \in A$

$$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E \, d\mu.$$

**Proprietà immediate dell'integrazione**

1.  $f = 0$  quasi certamente in  $X \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$
2. Se  $N \subseteq X, \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f \, d\mu = 0$
3.  $0 \leq f \leq g, f, g$  misurabili  $\Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$
4. Se  $E, F \in A$   $E \subseteq F \quad \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$

**Esempio**

$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1 \mu(\mathbb{Q}) = 0$   
 s funzione semplice  $0 \leq s \leq f$

**Proposizione 1**

Sia  $s(x)$  funzione semplice,  $\geq 0$ , e sia  $\mu_s : A \rightarrow [0, +\infty)$  definita da

$$\mu_s(E) = \int_E s \, d\mu.$$

$\mu_s$  è una misura su  $A$  (cioè  $\mu_S(\emptyset) = 0$  ed è additiva su misurabili disgiunti)

**Dimostrazione**

$$\mu_s(\emptyset) = \int_{\emptyset} s \, d\mu = 0$$

Siano  $\{E_i\} \subset A$  disgiunti e sia  $s(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{F_k}(x)$   $F_k \in A$   $F_k \cap F_j = \emptyset$  per ogni  $k \neq j$   $\bigcup_{k=1}^N F_k = X$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^K E_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^K E_i} s \, d\mu = \int_X s \chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} \, d\mu.$$

con

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} = \sum_{i=1}^K \chi_{E_i}.$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^K E_i \Leftrightarrow \exists! i \ x \in E_i.$$

$$\int_X s \sum_{i=1}^K \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K s \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \chi_{F_j \cap E_i} \, d\mu.$$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^K \int_{E_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^K \mu_s(E_i).$$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu_S\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu_s(E_i) \Rightarrow \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i).$$

□

**Osservazione**

Se  $N \subseteq X, \mu(N) = 0$

$$\Rightarrow \int_N s \, d\mu = 0$$

$$\mu_s(N) = 0 \quad \forall N : \mu(N) = 0$$

$\mu_s << \mu$   $\mu_s$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$ .

# Lezione 11 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-26

## 0.1 Esercitazioni, Foglio 4

### Esercizio 4

$f : X \rightarrow Y$

1. se  $B \subseteq 2^Y$   $\sigma$ -algebra di  $Y$   
 $A = \{f^{-1}(B), B \in B\}$  è una  $\sigma$ -algebra in  $X$

#### Svolgimento

$$\begin{aligned} \emptyset \in B &\Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ \text{sia } f^{-1}(C) &\in A, \text{ con } C \in B \\ (f^{-1}(C))^c &= X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c) \\ C \in B &\Rightarrow C^c \in B \Rightarrow (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in A \\ \{f^{-1}(C_i)\}_I &\geq 1, C \in B \\ &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \end{aligned}$$

2.  $A$   $\sigma$ -algebra in  $X$

$B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in A\}$  è una sigma algebra in  $Y$

#### Svolgimento

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \Rightarrow \emptyset \in B \\ C \in B &\Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A \Rightarrow f^{-1}(C)^c \in A \Rightarrow f^{-1}(C^c) \in A \Rightarrow C^c \in B \\ \{C_i\} \subset B &\Leftrightarrow f^{-1}(C_i) \in A \quad \forall i \\ &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in C \end{aligned}$$

3.  $X \xrightarrow{f} Y$   

$$\begin{array}{c} f^{-1}(\sigma < F >) \leftarrow \sigma < F > \text{ con } F \subset 2^X \\ \parallel \\ \sigma < f^{-1}(F) > \leftarrow F \text{ con } F \subset 2^X \end{array}$$

#### Soluzione

Per il primo punto dell'esercizio la controimmagine della  $\sigma$ -algebra è comunque una  $\sigma$ -algebra.

$f^{-1}(\sigma < F >) \supset f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(\sigma < F >) \supseteq \sigma < f^{-1}(F) >$   
 $\sigma < f^{-1}(F) > \quad B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma < f^{-1}(F) >\}$   
 questa è una  $\sigma$ -algebra in  $Y$  (punto 2)  
 $f^{-1}(B) \subseteq < f^{-1}(F) >$  quindi sono l'una contenuta nell'altra, quindi le due  $\sigma$ -algebre coincidono.

### Esercizio 5

Sia  $X$  un insieme ( $\neq$ )  $A$  una  $\sigma$ -algebra in  $X$  e sia  $\mu : A \rightarrow [0, +\infty]$  tale che:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\{E_i\} \subset A, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$   
 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$

#### Osservazione

$\mu$  rimane monotona e subadditiva

Infatti :

$$A, B \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$B = A \cup B \setminus A \cup \emptyset \cup \dots$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

$$\text{Inoltre } \{A_i\} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

### Esercizio

Dimostrare che  $\exists \bar{\mu} : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  misura

tale che  $A \subseteq \sigma\text{-algebra dei } \bar{\mu}\text{-misurabili e } \forall A \in \mathbb{A} \quad \bar{\mu}(A) = \mu(A)$

$$E \subseteq X \quad \bar{\mu}(E) = \inf\{\mu(A), A \in \mathbb{A}, A \supseteq E\}$$

$$\bar{\mu}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(\emptyset) = 0$$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \text{ se } \exists i \text{ t.c. } \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

$$\text{Allora } \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

se  $\bar{\mu}(E_i) < +\infty \quad \forall i \quad \forall i \exists A_i \in \mathbb{A} \text{ tale che } E_i \subseteq A_i \quad \bar{\mu}(E_i) \leq \mu(A_i) < \bar{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

Se  $E \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(E)$

e  $\forall A \in \mathbb{A}, A \supseteq E \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(E) \Rightarrow \bar{\mu}(E) \geq \mu(E) \Rightarrow \mu(E) = \bar{\mu}(E)$

$A \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow A \Rightarrow A \text{ è } \bar{\mu}\text{-misurabile cioè } \forall F \subseteq X$

$$\bar{\mu}(F) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A).$$

$$\text{Se } F \in \mathbb{A} \Rightarrow A, F \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(F) = \mu(F)$$

$$= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

se  $F \notin \mathbb{A}$ , e  $\bar{\mu}(F) < \infty$

$$\forall k \exists A_k \in \mathbb{A} \mid F \subseteq A_k, \text{ e } \bar{\mu}(F) \leq \mu(A_k) < \bar{\mu}(F) + \frac{1}{k}$$

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathbb{A}, A \supseteq F$$

$$\bar{\mu}(F) \leq \mu(A) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \leq \bar{\mu}(F)$$

$\exists A \in \mathbb{A}$  tale che  $\bar{\mu}(F) = \mu(A) \quad F \subseteq A$

$$\bar{\mu}(F) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

Dato che  $\exists B \in \mathbb{A}$  tale che  $F \subseteq B$  è  $\bar{\mu}(F) = \mu(B)$

### Esercizio 6

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$f(E) \in \eta \quad \forall E \in \eta \Leftrightarrow m(f(E)) = 0 \quad \forall E \text{ se } m(E) = 0$$

( $\Rightarrow$ ) sia  $N$  tale che  $m(N) = 0$

per assurdo supponiamo  $m(f(N)) > 0$

$\Rightarrow \exists V \subset f(N) \quad V \notin \eta$  (ogni insieme di misura positiva contiene un insieme non misurabile)

$$f^{-1}(V) \cap N \subset N \Rightarrow m(f^{-1}(V) \cap N) = 0$$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \cap N \in \eta \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap N) = V \notin \eta$  ma dovrebbe appartenerci in quanto è immagine di un misurabile (ha misura nulla).

( $\Leftarrow$ )

$E \in \eta$  tale che  $f(E) \in \eta$

$E \in \eta \Leftrightarrow E = B \cup N \quad m(N) = 0$   $B$  boreliano.

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq E, C_n \text{ chiusi}$$

$$f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n \cup N) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(C_n) \cup f(N) \text{ con } m(f(N)) = 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\Rightarrow f(N) \in \eta$$

Se  $E$  è limitato  $\Rightarrow C_n$  sono compatti  $\forall n$

$\Rightarrow f(C_n)$  è compatto  $\forall n$  ( $f$  continua)

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(C_n) \in B \subseteq \eta$  (boerliano)

$\Rightarrow f(E) \in \eta$

In generale, se  $E \in \eta \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap [-n, n]$ , limitati  $\forall n$   $f(E) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(E \cap [-n, n]) \in \eta$  unione misurabile di misurabili.

### Esercizio 11

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, x > 1, x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ n-1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \text{ } a_n \neq 0 \text{ } a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \end{cases} .$$

le prime  $n-1$  cifre sono tutte nulle, e gli  $a_k$  sono le cifre del numero irrazionale

$$x \in [0, 1] a_1 \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{a_1}{10} \geq \frac{1}{10}$$

$$\text{Se } x \in [0, \frac{1}{10}], a_2 \neq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$$

$$f(x) = \chi_{(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}) \setminus \mathbb{Q}} \text{ (tra 0,01 e 0,1)}$$

$$f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}}(x)$$

Quindi  $f$  è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.

# Lezione 12 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-01

## 0.1 Boh

$$\begin{aligned}
 & (X, m, \mu) \\
 & s = \sum_{i=1}^N c_j x_{E_j}, c_j \geq 0 \quad E_j \in m \\
 & \int_X s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j) \\
 & \mu_S(E) = \int_E s d\mu = \int_X s x_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E)
 \end{aligned}$$

### Proposizione 1

Sia  $(X, m, \mu)$  spazio di misura sia  $s(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}(x)$  funzione semplice  $\geq 0$  ( $c_j \geq 0 \quad \forall j$ )  
 $\Rightarrow \mu_S : m \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu \quad \forall E \in m.$$

è una misura.

### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\emptyset) &= \int_{\emptyset} s d\mu = 0 \\
 \{F_i\} &\subset m, F_i \cap F_l = \emptyset \text{ se } i \neq l \\
 F &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \\
 \mu_S(F) &= \int_F s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) \\
 &= \sum_{j=1}^N c_j \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_j \cap F_i) \\
 &= \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_j \cap F_i) \quad \text{dato che } E_j \cap F_i \text{ sono disgiunti e misurabili} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{F_i} s d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_S(F_i)
 \end{aligned}$$

□

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono risultati che garantiscono la proprietà:

$\{f_n\}$  successione di funzioni misurabili  
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per q.o.  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

### Osservazione

Per l'integrale di Riemann la validità del passaggio al limite sotto il segno d'integrale richiede la convergenza uniforme.

### Esempio

$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_n\}$   
 $\forall n \geq 1 s_n(x) = \chi_{\{q_1, \dots, q_n\}}$   
 $s_n$  è discontinua in  $\{q_1, \dots, q_n\}$   
 $\Rightarrow s_n \in R([0, 1])$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x).$$

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

ma  $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \notin R([0, 1])$

**Teorema 1** (convergenza monotona, B. Levi)

Sia  $(X, m, \mu)$  spazio di misura e sia  $\{f_n\}$  successione di funzioni misurabili

$$f_n : X \rightarrow [0, +\infty] \quad \forall n$$

$$\text{monotona crescente } f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 1, \text{ q.o.}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x).$$

$f : X \rightarrow [0, +\infty]$  definita quasi ovunque è misurabile e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

### Dimostrazione

$\int_X f_n d\mu$  è una successione numerica monotona crescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

$$f_n \leq f \quad \forall n \quad \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Tesi:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu = \sup \{\int_X s d\mu : s \text{ semplice } 0 \leq s \leq f\}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu \quad \forall s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f$$

Sia  $s$  funzione semplice,  $0 \leq s \leq f$ . Sia  $\varepsilon > 0$  e  $\forall n$

$$E_n = \{f_n \geq (1 - \varepsilon)s\}.$$

- $E_n \in m$   $\forall n$  perché  $f_n - (1 - \varepsilon)s$  è misurabile

- $E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \geq 1$  poiché  $f_n \leq f_{n+1}$

- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$  poiché sia  $x \in X$

se  $s(x) = 0 \Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$

se  $s(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \sup_{n \geq 1} f_n(x) \quad \exists \bar{n}$  tale che

$$(1 - \varepsilon)s \leq (1 - \varepsilon)f(x) < f_{\bar{n}}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in E_{\bar{n}}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_X s d\mu = \mu_{(1-\varepsilon)s}(X) = \mu_{(1-\varepsilon)s}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{(1-\varepsilon)s}(E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} (1 - \varepsilon)s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

□

### Osservazione

1.  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile

$\Rightarrow \exists \{s_n\}$  successione di funzioni misurabili tale che

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X.$$

$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + n \chi_{\{f \geq n\}}.$$

Per il teorema di B. Levi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

2. Se  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile  $\forall n$

$$f_n(X) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq 0$$

$$\int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu$$

$$g_n = f_1 - f_n \geq 0 \quad \forall n$$

$g_n$  è monotona crescente

$$\int_X g_n \, d\mu \rightarrow \int_X (f_1 - f) \, d\mu$$

$$\int_X (f_1 - f_n) \, d\mu$$

Se  $\int_X f_1 \, d\mu < +\infty$

$$\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu$$

In generale non vale se  $\int_X f_1 \, d\mu = +\infty$

Esempio:  $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 1m([n, +\infty)) = +\infty$$

### Corollario 1

Siano  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili  $\forall n$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

### Dimostrazione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty \text{ oppure } +\infty \Rightarrow f : X \rightarrow [0, +\infty] \text{ è misurabile}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

$$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k \, d\mu$$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

dove il penultimo passaggio ( $\stackrel{?}{=}$ ) è ancora da giustificare □

### Proposizione 2

Siano  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili

$$\Rightarrow \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

### **Dimostrazione**

*primo caso:  $f, g$  funzioni semplici,  $f = s = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \chi_{E_j}$   $c_j \geq 0$   $E_j \in m$  disgiunti  $\cup E_j = X$*

$$g = t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{F_k} \quad d_k \geq 0, F_k \in m \text{ disgiunti} \cup F_k = X$$

$$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^M F_k = \bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k$$

$$s = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{\bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k} = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{k=1}^M \chi_{E_j \cap F_k}$$

*Vero poiché unione di insiemi disgiunti*

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j}.$$

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j} = \sum_{k=1}^M d_k \sum_{j=1}^N \chi_{F_k \cap E_j}.$$

*quindi*

$$\begin{aligned} \int_X (s + t) d\mu &= \int_X \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M c_j \chi_{F_k \cap E_j} + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N d_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu. \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (c_j + d_k) \mu(F_k \cap E_j) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu. \end{aligned}$$

*secondo caso  $f, g \geq 0$  misurabili*

$$\begin{aligned} \exists s_n \uparrow f \text{ e } \exists t_n \uparrow g & \quad (\uparrow = \text{tende}) \\ \Rightarrow s_n + t_n \uparrow f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X s \, d\mu + \int_X t_n \, d\mu \right). \\ &\quad \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

□

### **Esercizio**

Sia  $\{a_n\}$  una successione a termini mai negativi  $a_n \geq 0$

$\{a_n\}$  può essere pensata come una funzione

$f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$

$$n \rightarrow f(n) = a_n$$

$$(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu^*) \quad \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu^* = ? \text{ dove } \mu^* \text{ calcola la cardinalità dei sottoinsiemi}$$

# Lezione 13 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-25

## 0.1 Lemma di Fatou

**Lemma 1** (di Fatou)

Sia  $(X, M, \mu)$  uno spazio di misura e  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  successione di funzioni misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Dimostrazione**

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$  con  $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall k, \forall x$   
e sono misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

ma  $g_k \leq f_k \quad \forall k$

$$\Rightarrow \int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu \text{ e applicando il lim inf}$$

$$\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

□

**Esempio 1**

$f_n(x) = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$  funzioni misurabili  $\geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = 0$$

$$< \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

**Esempio 2**

$f_n(x) = \chi_{[n, +\infty)}(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \quad \forall n$$

**Definizione 1** (Funzioni integrabili)

Sia  $(X, M, \mu)$  spazio di misura e sia  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabile.

Se  $\int_X f^+ d\mu < +\infty$  oppure  $\int_X f^- d\mu < +\infty$  allora  $f$  si dice integrabile e

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

se  $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow f$  si dice sommabile e  $\int_X |f| d\mu < +\infty$   
questo tipo di funzioni definisce

$$L^1(X) = \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ misurabili}, \int_X |f| d\mu < +\infty\}.$$

**Proposizione 1**

Sia  $(X, M, \mu)$  spazio di misura

1. Se  $f$  è integrabile su  $X$   
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$
2. (diseguaglianza di Chebychev)  $f \in L^1(X) \Rightarrow \forall t > 0$   
 $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu$
3.  $f \in L^1(X) \Rightarrow |f(x)| < +\infty$  quasi ovunque in  $X$  (?)
4.  $f \in L^1(X), \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$  quasi ovunque
5.  $f, g \in L^1(X) \rightarrow f + g \in L^1$  ( $f + g$  è definita quasi ovunque) e  
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

**Dimostrazione**

Dimostriamo ogni punto:

1. se  $\int_X |f| d\mu = +\infty$  ovvio  
 $Se \int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty$   
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| = |\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu| \leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X |f| d\mu$
2.  $\int_X |f| d\mu \geq \int_X f |\chi_{\{|f| > t\}}| d\mu \geq \int_X t \chi_{\{|f| > t\}} d\mu$
3.  $f \in L^1(X)$   
 $se |f| = +\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\}$  chiamo  $E_n = \{|f| > n\}$   
 $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \dots \subseteq E_1$   
 $\mu(E_1) \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$   
 $\Rightarrow \mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(E_n)) \leq_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu = 0$
4.  $\int_X |f| f d\mu = 0$   
 $\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$   
 $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$   
 $\Rightarrow \mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = 0$
5.  $f + g$  è definita su  $X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})$  (dove il secondo insieme ha misura nulla)  
posso quindi calcolare il suo integrale  
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_{X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})} (f + g) d\mu$   
 $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$   
chiamiamo  $f + g = h$   
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X h^+ - \int_X h^- d\mu$   
 $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$   
 $\Rightarrow \int_X (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu$   
 $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu$

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X h^+d\mu - \int_X h^-d\mu = \int_X f^+d\mu - \int_X f^-d\mu + \int_X g^+d\mu - \\ \int_X g^-d\mu &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu\end{aligned}$$

□

**Teorema 1** (convergenza dominata o Teorema di Lebesgue)

Sia  $(X, M, \mu)$  spazio di misura e siano  $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabili tali che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  per q.o.  $x \in X$  se  $\exists g \in L^1(X)$  tale che  $|f_n| \leq g$  quasi ovunque in  $X$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Allora:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \rightarrow 0.$$

### Dimostrazione

$|f_n| \leq g \rightarrow f_n \in L^1(X)$  e  $|f| \leq g$  quasi ovunque  $\rightarrow f \in L^1(X)$   
 $\Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0$  quasi ovunque in  $X$  (perché  $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ )  
quindi puntualmente per q.o.  $x \in X$  fissato

$$2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 2g(x).$$

⇒ Usando il lemma di Fatou

$$\int_X 2gd\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)d\mu.$$

sfruttiamo la linearità dell'integrale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\int_X 2g - \int_X |f_n - f|d\mu) = \int_X 2gd\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu$$

Nota: il  $\liminf$  diventa lineare nel caso dei limiti.

siccome  $g \in L^1(X)$  posso semplificare

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu \leq 0.$$

□

# Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-09

## 0.1 Integrali dipendenti da un parametro

$(X, \mu)$  spazio di misura

$$f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty].$$

$I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , tale che

- per quasi ogni  $x \in X$   
 $t \in I \rightarrow f(t, x), f(\cdot, x)$  continua
- $\forall t \in I \quad f(t, \cdot) \in L^1(X, \mu)$

$$h(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x).$$

### Teorema 1

Sia  $(X, \mu)$  spazio di misura,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

1. se  $f(\cdot, x)$  è continua su  $I$  per quasi ogni  $x \in X$   $f(t, \cdot) \in L^1(X) \quad \forall t \in I$   
 $\exists g \in L^1(X)$  t.c.  $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$  per quasi ogni  $x \in X$   
 $\Rightarrow$  la funzione  $h(t) = \int_X f(t, x) d\mu$  è continua su  $I$
2. Se per quasi ogni  $x \in X$ ,  $f(\cdot, x)$  è derivabile su  $I$  e se  $\exists g_1 \in L^1(X)$  tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g_1(x) \quad \text{per q.o. } x \in X \quad \forall t \in I.$$

$\Rightarrow h$  è derivabile e

$$h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

stiamo dicendo che la derivata dell'integrale è l'integrale della derivata.

### Dimostrazione

Da recuperare (Chat con Alberto Agostinelli)

□

### Osservazione

$f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

nelle ipotesi del teorema continua in  $t_0 \in I$  e  $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$  quasi ovunque in  $X$ .

Posso considerare non tutti gli  $t \in I$  ma selezionar e i  $t$  in sottointervalli di  $I$  quindi in un intorno di  $t_0$  per avere la continuità in  $t_0$

## 0.2 Assoluta continuità dell'integrale

Ricordiamo che  $s$  funzione semplice  $s \geq 0$   
 $\forall E \in M$  e definiamo

$$\mu_s(E) = \int_E s d\mu \Rightarrow \mu_s \text{ è una misura.}$$

adesso se  $f \in L^1(X)$

$\mu_f(E) = \int_E |f| d\mu$  è una misura su  $X$   
 $\mu_f(E) = 0 \quad \forall E \in M$  tale che  $\mu(E) = 0$

**Teorema 2** (Assoluta continuità dell'integrale)

sia  $f \in L^1(X)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$  tale che  $\int_E |f| d\mu < \varepsilon \quad \forall E \in M, \quad \mu(E) < \delta$   
 enunciato più "suggestivo":

$$\lim_{\mu}(E) \rightarrow 0 \quad \int_E |f| d\mu = 0.$$

il punto sta nel fatto che sti cazzo di chi è  $E$  basta che la sua misura tenda a 0

**Dimostrazione**

non la scrivo, mancano 3 giorni all'esonero, parla con Alberto Agostinelli.  $\square$

**Osservazione**

Sia  $\{f_n\} \subset L^1(X)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, f_n) = \delta(\varepsilon, n)$  tale che  $\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$  se  $\mu(E) < \delta$

Se  $\exists f \in L^1(X)$  tale che

$f_n \rightarrow f$  in  $L^1(X)$  ( $\int_X |f_N - f| d\mu \rightarrow 0$ )

$\Rightarrow$  la proprietà di assoluta continuità dell'integrale è verificata uniformemente rispetto a  $n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_f(\varepsilon)$

tale che  $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$  se  $\mu(E) < \delta_f$

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu < \varepsilon + \varepsilon$$

$\Rightarrow$  per  $\delta = \min\{\delta_{f_1}, \dots, \delta_{f_{n_\varepsilon}}, \delta_f\} > 0$

$$\int_E |f| d\mu < 2\varepsilon \text{ se } \mu(E) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Piccolo conto apparentemente poco utile:

**Riscrittura delle convergenza quasi ovunque**

$(X, \mu)$  spazio di misura

$f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  finite quasi ovunque  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque

$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$  tale che  $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$

$\Leftrightarrow \exists N \subset X \quad \mu(N)$  tale che  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k = k(x, \varepsilon)$  tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus N.$$

$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$  tale che

$$X \setminus N \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$

$$\left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c \subseteq N.$$

ovvero

$$\left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \subseteq N.$$

quindi tutta sta roba ha misura nulla poiché contenuta in  $N$  che ha misura nulla.

# Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-29

## 0.1 Boh

### Proposizione 1

$(X, \mu)$  spazio di misura;  $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  finite quasi ovunque;  $f_n \rightarrow f$  q.o.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

### Dimostrazione

$(\Rightarrow)$  Già visto

$$(\Leftarrow) \forall y \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{y=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) := \mu(N) = 0$$

$$x \in X \setminus N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{y=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{y}\}$$

Vuol dire che  $\forall y \exists k_y$  (dipendente da  $y$ ) tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{y}$

$\forall n \geq k_y \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n \rightarrow f$  quasi ovunque

□

Se io so che  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$

È una condizione più forte o debole? Osserviamo che  $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$  forma una successione decrescente ( $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ )

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n^\varepsilon = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$$

Se poi diventano di misura finita (da un certo punto in poi) vale =

### Definizione 1

$f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabili finite quasi ovunque;  $f_n \rightarrow f$  in misura  
se  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

### Proposizione 2

Sia  $(X, \mu)$  spazio di misura finita ( $\mu(X) < +\infty$ ). Se  $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabili, finite quasi ovunque  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura

### Dimostrazione

Per la proposizione precedente:

$$\forall \varepsilon > 0, f_n \rightarrow f \text{ q.o.} \Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ma questo per ipotesi è uguale a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

se il  $\limsup$  = 0  $\Rightarrow \lim = 0$  Quindi  $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0$

□

### Proposizione 3

Se  $f_n, f \in L^1(X, \mu); f_n \rightarrow f$  in  $L^1(X) \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura

### Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0$

$$\varepsilon \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0. \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ in misura} \quad \square$$

$f_n \rightarrow f$  in misura  $\xrightarrow{?} f_n \rightarrow f$  quasi ovunque

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

definiamo  $g_n := |f_n - f|$ ,  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$   $\Rightarrow \mu(\{g_n > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \xrightarrow{?} g_n \rightarrow 0$  quasi ovunque

L'insieme di sopralivello può muoversi sull'asse  $x$ . Non è detto che fissata  $x$  allora le successioni di funzioni tendano a 0.

### Esempio

$\forall n$  dividiamo  $[0, 1]$  in  $2^n$  intervalli di ampiezza  $\frac{1}{2^n}$

$$I_{n,m} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \quad 1 \leq k \leq 2^n$$

$\{\chi_{I_{k,n}}\}_{1 \leq k \leq 2^n, n \geq 1}$  successione di funzioni misurabili secondo Lebesgue su  $[0, 1]$ .

Cosa succede per  $n \rightarrow +\infty$ ? C'è convergenza solo a 0

$$\forall \varepsilon > 0, n(\{\chi_{I_{k,n}} \geq \varepsilon\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon > 1 \\ \frac{1}{2^n} = m(I_{k,n}) & \text{se } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

$\Rightarrow \chi_{I_{n,k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  in misura.

$\forall x \in [0, 1], \chi_{I_{k,n}}(x) = 1$  per infiniti indici

$$\int_{[0,1)} |\chi_{I_{k,n}}| dm = m(I_{k,n}) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\chi_{I_{k,n}} \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1([0, 1]).$$

Quindi c'è anche la convergenza in  $L^1$

Quindi la convergenza in misura (e in  $L^1$ )  $\not\Rightarrow$  convergenza puntuale (quasi ovunque)

Ma  $\{\chi_{I_{n,m}}\}$  ha un'estratta che converge puntualmente a 0

$$\chi_{I_{n,m}} = \chi_{[0, \frac{1}{2^n})} \rightarrow 0 \quad \text{q.o. in } [0, 1].$$

### Teorema 1

Siano  $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabili, finite quasi ovunque. Se  $f_n \rightarrow f$  in misura  $\Rightarrow \exists$  sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque

### Dimostrazione (Errata)

$a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$  no!

$\varepsilon > 0$  fissato,  $\forall k \exists n_k$  tale che  $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} &< +\infty \\
\mu\left(\bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) &\leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0. \\
\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

*Dov'è l'errore? Qui l'estratta dipende da  $\varepsilon$ , invece io voglio un'estratta che valga  $\forall \varepsilon > 0$ . In questo caso presa un'estratta questa vale  $\forall \varepsilon' \geq \varepsilon$ . Quindi voglio sostituire  $\varepsilon$  con una cosa infinitesima. La dimostrazione è lasciata per esercizio.*

□

### Corollario 1

Se  $f_N, f \in L^1(X, \mu)$ ,  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1 \Rightarrow \exists$  estratta  $\{f_{n_k}\}$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque.

### Dimostrazione

$f_n \rightarrow$  in  $L^1 \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura (disuguaglianza di Chebychev (?) )  
 $\Rightarrow \exists \{f_{n_k}\} : f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque. □

### Osservazione

In generale non tutta  $\{f_n\}$  converge puntualmente. Per esempio  $\chi_{I_{n,k}}$

### Osservazione

Se  $\mu(X) = +\infty$ ,  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque  $\Rightarrow f_n \rightarrow$  in misura?  
 $\mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Può essere che si formino tutte misure finite e l'intersezione faccia 0.

In generale non vale per esempio  $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ma  $m(\{f_n > \varepsilon\}) = +\infty$  per  $\varepsilon < 1 \Rightarrow f_n \not\rightarrow 0$  in misura

Ma quindi bisogna che i sottoinsiemi vadano a  $+\infty$ , quindi di un ambiente di misura infinita.

Se  $\mu(X) < +\infty$ ,  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque  $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists k = k(\delta, \varepsilon)$  tale che  $\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$

$x \in X \setminus F_{\delta, \varepsilon} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$

Abbiamo trovato il  $k$  per cui l'ultima disequazione è piccola. Questo è vero  $\forall x$ .

Ma allora  $\sup_{X \setminus F_{\delta, \varepsilon}} |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \Rightarrow f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $X \setminus F_\delta$ .

### Definizione 2

Siano  $(X, \mu)$  uno spazio di misura e  $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabili finita quasi ovunque si dice  $f_n \rightarrow f$  quasi uniformemente se  $\forall \delta > 0 \ \exists F_\delta \subset X, F_\delta$  misurabile,  $\mu(F_\delta) < \delta$  tale che  $f_n \rightarrow f$  uniforme in  $X \setminus F_\delta$ .

### Esempio

$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} = f(x)$$

$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n - f| = 1$   
 Se tolgo 1,  $\sup_{[0,1)} |f_n - f| = \sup_{[0,1)} x^n = 1$  comunque le cose vanno male!  
 Dobbiamo togliere un intorno di 1  $\Rightarrow \sup_{[0,1-\delta]} |f_n - f| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1 - \delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$   
 $\Rightarrow f_n \rightarrow 0$  uniformemente in  $[0, 1 - \delta] \forall \delta > 0$

# Lezione 15 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-16

## 0.1 Convergenze varie (alberto agostinelli)

**Definizione 1** (Convergenza quasi uniforme)

$f_n \rightarrow f$  quasi uniformemente se  $\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subseteq X, F_\delta$  misurabile  $\mu(F_\delta) < \delta$  tale che  $\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \rightarrow 0$  ( $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $X \setminus F_\delta$ )

**Proposizione 1**

$f_n \rightarrow f$  quasi uniformemente  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

**Dimostrazione**

( $\Rightarrow$ )

$\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$  tale che,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$

tale che  $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$  tale che  $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$X \setminus F_\delta \subseteq \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X \mu(F_\delta) < \delta$

tale che  $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta)$

$$\left( \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq F_\delta.$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

( $\Leftarrow$ )

$\varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta)$  tale che

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$  per  $\varepsilon = \frac{1}{j}, \delta = \frac{\nu}{2^j}, \nu > 0$  fissato

$\Rightarrow \exists k_j = k_j(j, \nu)$  tale che  $\mu(\bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) < \frac{\nu}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\nu}{2^j} = \nu.$$

$x \in X \setminus F_\nu$  (dove  $F_\nu$  è l'argomento della misura precedente)

$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{j}\}$

$\Rightarrow \forall j \exists k_j$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall n \geq k_j \Rightarrow \sup_{X \setminus F_\nu} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$0 \Rightarrow f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus F_\nu$

Abbiamo caratterizzato la convergenza quasi uniforme con la misura dei sopravvivenze  $\forall \varepsilon > 0$   
conseguenza:

$$f_n \rightarrow f \text{ q.u.} \Rightarrow \begin{cases} f_n \rightarrow f & \text{q.u.} \\ f_n \rightarrow f & \text{in misura} \end{cases} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mu \left( \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

ma allora

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) = \mu \left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right).$$

$$\forall k \quad \mu(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu \left( \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \rightarrow 0.$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$  in misura

□

### Teorema 1 (Egorov)

Sia  $(X, \mu)$  spazio di misura finita ( $\mu(X) < +\infty$ )

Allora:

$$f_n \rightarrow f \quad \text{q.o.} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \quad \text{q.u..}$$

### Teorema 2 (Vitali)

Sia  $(X, \mu)$  uno spazio di misura finita e siano  $f_n, f \in L^1(X)$  tale che  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque quasi ovunque

allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1 \Leftrightarrow \{f_n\}$  equi-assolutamente integrabili

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tale che

$$\int_E |F_n| d\mu < \varepsilon \text{ se } E \in M \quad \forall n, \mu(E) < \delta.$$

### Dimostrazione

( $\Rightarrow$ ) già visto

( $\Leftarrow$ )

$f_n \rightarrow f$  quasi ovunque +  $\mu(X) < +\infty$

$\Rightarrow$  (per Egorov)

$\forall \delta > 0 \exists f_\delta \in M, \mu(F_\delta) < \delta$  tale che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $X \setminus f_\delta$

Sia  $\varepsilon > 0$  fissato

$\Rightarrow$  sia  $\delta(\varepsilon)$  dato dall'ipotesi di equi-assoluta integrabilità  
e sia  $f_\delta \in M$  dato dal teorema di Egorov

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| d\mu + \int_{F_\delta} |f_n - f| d\mu. \\ &\leq \sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \mu(X \setminus F_\delta) + \int_{F_\delta} |f_n| d\mu + \int_{F_\delta} |f| d\mu. \\ &\leq (\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f|) \mu(X) + \varepsilon + \varepsilon \quad (\text{dato che } \mu(F_\delta) < \delta). \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu &\leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \\ \Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}, m$ )

$f$  continua  $\Rightarrow f$  misurabile

$f$  continua quasi ovunque  $\Rightarrow f$  misurabile

MANCA UNA PARTE

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ è discontinua in } X\}.$$

$m\mu(D_f) = 0$   $f$  è misurabile, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \cap D_f \cup \{f > t\} \setminus D_f.$$

$\Rightarrow$  ha misura nulla  $\Rightarrow$  è misurabile

$x \in \{f > t\} \setminus D_f$

$\lim_{y \rightarrow x} f(y) \Rightarrow f(x) > t$  e  $f$  è continua in  $X$

$\Rightarrow \exists \delta_x > 0 : f(y) > t \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$

$\Rightarrow \{f > t\} \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) D_f$  aperto è misurabile

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

se  $\exists g \in C(\mathbb{R})$

tale che  $f = g$  quasi ovunque  $\Rightarrow f$  misurabile

$\exists N \subset \mathbb{R}, m(N) = 0$

tale che  $f = g$  in  $\mathbb{R} \setminus N$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \setminus N \cup \{f > t\} \setminus N$  è misurabile

$f = \chi_{\mathbb{Q}} = 0$  quasi ovunque

$f = g$  quasi ovunque  $\exists N, \mu(N) \quad f = g$  in  $\mathbb{R} \setminus N$

$x \in \mathbb{R} \setminus N \quad \lim_{y \rightarrow x} f(y)$

$f = \chi_{[0, 1]}$  è continua quasi ovunque ma non può essere uguale quasi ovunque ad una funzione continua

**Teorema 3**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow R$  misurabile  $\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists g_\delta \in C(\mathbb{R})$   
tale che  $m(\{f \neq g\}) < \delta$   
 $\text{e } \sup_{\mathbb{R}} |g_\delta| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f|$

# Lezione 16 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-01

## 0.1 altri teoremi

**Teorema 1** (Lisin)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists g_\delta \in C(\mathbb{R}) \mid m(\{f\}) < \delta \quad \sup |g_\delta| \leq \sup |f|$$

**Dimostrazione**

Procediamo per passi:

1.  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  semplice.

Tesi:  $\forall \delta \exists F \subseteq [a, b] \mid m([a, b] \setminus F) < \delta, s|_F$  continua  
 $\exists n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^n, E \subseteq M^n \mid s(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x)$  SPDG  $E_k \cap E_h = \emptyset \quad \forall h, k$   
 $\forall \delta > 0, k \in [n] \exists F_k \subseteq E_k$  chiuso  $|m(E_k \setminus F_k) < \frac{\delta}{n}|$   
 $\Rightarrow F := \bigcup_{k=1}^n F_k, \quad m([a, b] \setminus F) = m\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \bigcup_{k=1}^n F_k\right) \leq \sum_{k=1}^n m(E_k \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k) =$   
 $\sum_{k=1}^n m(E_k \setminus F_k) < \delta$   
 $s|_F$  continua pK

2.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile

Obiettivo:  $\forall \delta \in (0, +\infty) \exists F \subseteq [a, b] \mid m([a, b] \setminus F) < \delta, f|_F \in C(F)$   
La dimostrazione è poco chiara. Guarda da Spadaro.

□

## 0.2 Spazi $L^p$

$(X, \mu)$  spazio di misura

$$L^p(X) = L^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabile} \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$$

$$f(x) = \frac{\chi_{|x| \geq 1}(x)}{|x|} \in L^p(\mathbb{R})?$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu = 2 \int_1^{+\infty} \infty^{\frac{1}{x^p}} dm = 2 \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{p=1}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{2}{1-p} & p > 1 \end{cases} \Rightarrow f \in L^p \quad \forall p > 1$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \in L^p((0, 1)) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\frac{p}{2}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{2x^{\frac{2-p}{2}}}{2-p} \Big|_{x=0}^1 < +\infty \Leftrightarrow \frac{2-p}{2} > 0 \Leftrightarrow p < 2$$

**Lemma 1** (Disugualanza di convessità)

$$\forall a, b \in [0, +\infty)$$

1. (Disugualanza di Young)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall p, p' \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (p' = \frac{p}{p-1})$$

$$2. \quad a^p + b^p \leq (a + p)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \forall p \in [1, +\infty)$$

$$3. \quad a^p + b^p \geq (a + b)^p \geq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall p \in (0, 1)$$

**Dimostrazione** 1.  $\ln(x)$  concava  $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p}b^p\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{p}\ln(b^p) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\ \Rightarrow \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p}b^p &\geq ab \end{aligned}$$

2.  $p \geq 1 \Rightarrow f(x) = x^p, x \in [0, +\infty)$  convessa

$$\frac{1}{2^p}(a+b)^p\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p = \frac{1}{2}(a^p + b^p) \quad (\text{ottimale, } a = b \Rightarrow =).$$

$$b = 0 \Rightarrow a^p + b^p \leq (a + b)^p \quad \forall p \geq 1$$

$$b > 0 \Rightarrow f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = p(x+1)^{p-1} - px^{p-1} = (x+1)^{p-1} - x^{p-1} \geq 0 \quad \forall x \geq 0, p \geq 1$$

$$\Rightarrow f \nearrow, f(0) = 0 \Rightarrow f \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p - \left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 = f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \geq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1$$

□

# Lezione 17 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-30

## 0.1 Proprietà spazi $L^p$

Ricorda:

$$L^P(X) = \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty], f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty.$$

### Proposizione 1

$L^p$  è uno spazio vettoriale

**Dimostrazione**

$\forall f, g \in L^p(X), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ è misurabile}$

$$\begin{aligned} \int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu &\leq \int ((|\alpha| |f| + |\beta| |g|)^p d\mu \\ &\leq 2^{p-1} (\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu + \int_X |\beta|^p |g|^p d\mu) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Per definizione, su  $L^p(X)$  è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_p : L^p(X) &\rightarrow [0, +\infty) \\ f &\mapsto \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

### Proposizione 2 (Disuguaglianza di Hölder)

Sia  $p > 1$  e  $p' = \frac{p}{p-1}$  ( $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ )  $\forall f \in L^p(X), g \in L^{p'}(X)$   
 $\Rightarrow fg \in L^1(X)$  e

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$$

**Dimostrazione**

Si usa la diseguaglianza di Young se  $f \neq 0, g \neq 0$

$$\Rightarrow \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} > 0$$

$$\|g\|_{p'} = \left( \int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} > 0$$

Per quasi ogni (q.o.)  $x \in X$

$$|f(x)| < +\infty, |g(x)| < +\infty.$$

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

$$\Rightarrow \int_X \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_{p'} d\mu} \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\int_X |f|^p d\mu} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{p'} \frac{1}{\int_X |g|^{p'} d\mu} \int_X |g|^{p'} d\mu = 1 \quad \square$$

**Proposizione 3** (Disuguaglianza di Minkowski)

Sia  $1 \leq p < +\infty$

$$\forall f, g \in L^p(X) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$((\int_X |f + g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}))$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &= \int_X |f + g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \int_X |f||f + \\ &\quad g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \text{ basta ultimamente dividere per } \|f + g\|^{p-1} \end{aligned}$$

entrambi i lati della disequazione  $\square$

**Proposizione 4**

$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$  è una norma su  $L^p(X)$

**Dimostrazione**

$$(i) \|f\|_p \geq \forall f \in L^p(X)$$

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ q.o..}$$

$$(ii) \|\alpha f\|_p \quad \alpha \in \mathbb{R} = |\alpha| \|f\|_p$$

$$(iii) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

**Osservazione:**

A rigore bisognerebbe definire  $L^p(X)$  come l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza

$$[f] = \{g : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \mid f = g \text{ q.o.}\}.$$

L'insieme quoziato con questa relazione ci permette di definire bene la norma, altrimenti l'elemento nullo non è unico (posso fare cambiamenti di misura nulla).

**Teorema 1**

Se  $p \geq 1 \Rightarrow L^p(X)$  è uno spazio vettoriale normato completo (spazio di Banach)

**Dimostrazione** (La chiede all'orale)

Sia  $\{f_n\} \subset L^p(X)$  successione di Cauchy

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

**Tesi:**  $\exists f \in L^p(X)$  tale che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(X) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$

Usiamo la definizione di successione di Cauchy con  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$

$\forall k \exists n_k$  tale che

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

selezionando  $n_{k+1} > n_k$

Si seleziona una estratta  $\{f_{n_k}\}$  tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Consideriamo la nuova successione:

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(X).$$

$$\|g_j\|_p = \left\| \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^j \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} < 1$$

$$\Rightarrow \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1 \quad \forall j$$

**Attenzione**

Il modulo è fondamentale così  $g_j$  è una funzione crescente!

$$g_{j+1} \geq g_j \quad \forall x \in X \Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} g_j(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|$$

Usando il teorema di B. Levi

$$\int_X |g|^p d\mu = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1.$$

$\Rightarrow g \in L^p(X) \Rightarrow g^p \in L^1(X) \Rightarrow g^p$  (e quindi anche  $g$ ) è finita quasi ovunque.  
per quasi ogni  $x \in X$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)| < +\infty.$$

$\Rightarrow$  per quasi ogni  $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \text{ è convergente.}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} (\cancel{f_{n_2}} - f_{n_1} + \cancel{f_{n_3}} - \cancel{f_{n_2}} + \dots + f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \\ &= -f_{n_1} + \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j} \\ &\Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j}(x) \text{ per ogni } x \\ &f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j}(x) \\ &\exists \text{ quasi ovunque, è misurabile} \\ &\forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu = \|f_m - f_{n_j}\|_p < \varepsilon \quad \forall m \geq n_e \text{ per } j \text{ suff. grande.}$$

$$\begin{aligned}
& \int_X |f_n - f|^p d\mu_{Fatou} \underset{j \rightarrow +\infty}{\leq} \liminf \int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu \leq \varepsilon^p. \\
& \Rightarrow f_n - f \in L^p e \\
& \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e. \\
& \Rightarrow f = f_n - (f_m - f) \in L_p \quad e \quad \|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e. \\
& \Rightarrow \|f_m - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \square
\end{aligned}$$

# Lezione 20 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-13

## 0.1 manca un aparte della lezione

### 0.2 parte nuova

#### Dimostrazione

$f \in L^p(\mathbb{R}), \varepsilon > 0$

$f_n = f\chi_{[-n,n]}$  è a supporto compatto

$f_n(x) \rightarrow f(x)$  quasi ovunque

$|f_n| \leq |f|$  in  $\mathbb{R} \Rightarrow f_n \rightarrow f$  in  $L^p$

quindi  $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$ , con supporto compatto tale che  $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

$$T_j(f_1)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } |f_1| < j \\ j & \text{se } f_1(x) > j \\ -j & \text{se } f_1(x) < -j \end{cases}$$

$|T_j(f_1)| \leq j \Rightarrow T_j(f_1) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

$T_j(f_1) \rightarrow f_1$  in  $L^p(\mathbb{R})$  convergenza dominata.

primo passo  $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$  supporto compatto tale che  $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

secondo passo  $\exists f_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$  supporto compatto tale che  $\|f_2 - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

terzo passo:  $\text{supp } f_2 \subset [-k, k]$

dal teorema di Lusin (e dalla sua dimostrazione)

$\forall \delta > 0 \exists g_\delta : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$  continua

tale che  $m(\{f_2 \neq g_\delta\}) < \delta$

$\sup_{[-k, k]} |g_\delta| \leq \|f_k\|_\infty$  e  $g_\delta(k) = g_\delta(-k) = 0$

estendendo a zero  $g_\delta$  fuori di  $[-k, k]$  si ottiene  $g \in C_1(\mathbb{R})$

tale che  $\|f_2 - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_2 - g|^p dm = \int_{[-k, k] \cap \{f_2 \neq g\}} |f_2 - g|^p dm \leq (\|g\|_\infty +$

$\|f_2\|_\infty)^p m(\{f_2 \neq g\}) \leq 2^p \|f_2\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$  per  $\delta$  sufficientemente piccolo.

Quindi  $\exists g \in C_0(\mathbb{R})$  tale che

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_2\|_p + \|f_2 - f\|_p + \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

□

#### Domanda:

Potrebbe esserci un risultato analogo in  $L^\infty$ ?

#### Osservazione

Il risultato di densità si scrive in simboli

$$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}) \quad 1 \leq p < +\infty$$

$$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua e } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$$

Dimostrazione per esercizio

#### Definizione 1

Uno spazio metrico  $Y$

si dice separabile se ammette un sottoinsieme denso numerabile (esempio  $\mathbb{R}$  è separabile,  $R^n$  è separabile  $\forall n \in \mathbb{N}$ )

**Teorema 1**

$L^p(\mathbb{R})$  è separabile per  $1 \leq p < +\infty$

$L^\infty(\mathbb{R})$  non è separabile

**Dimostrazione**

$D = \{s(x) = \sum_{i=1}^N q_i x_{(a_i, b_i)}, a_i < b_i, a_i, b_i, q_i \in \mathbb{Q}\}$  è numerabile

Sia  $f \in L^p(\mathbb{R})$  con  $1 \leq p < +\infty$  e sia  $\varepsilon > 0$

$\exists g \in C_c(\mathbb{R})$  (continua a supporto compatto) tale che  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$

sia  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\text{supp } g \subset (-k, k)$

$g$  è uniformemente continua (supporto compatto + continua)

$\forall \eta > 0 \exists \delta_\eta > 0$  tale che

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \eta \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta_\eta.$$

suddividiamo  $[-k, k]$  in sottointervalli di ampiezza  $\frac{1}{j} < \delta_\eta$  mediante i punti

$$-k + \frac{i}{j} \quad 0 \leq i \leq 2kjA$$

$$\forall 0 \leq i \leq 2kj - 1$$

Scegliamo  $x \in (-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j})$  e  $q_i \in \mathbb{Q}$  tale che  $|q - g(x)| < \eta$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{2kj-1} q_i \chi_{(-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j})}(x) \in D$$

$$\|g - s\|_p^p = \int_{[-k, k]} |g - s|^p dm = \sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p$$

$\exists x \in [2k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}]$  tale che  $|g(x) - q_i| < \eta$

$$\forall y \in [-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}] \quad |y - x| < \frac{1}{j} < \delta_\eta$$

$$\Rightarrow |g(y) - q_i| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - q_i| < 2\eta$$

Tornando quindi all'equazione precedente

$$\begin{aligned} \|g - s\|_p^p &= \int_{[-k, k]} |g - s|^p dm = \\ &\sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p \leq (2\eta)^p \frac{i}{j} 2kj < \left(\frac{e}{2}\right)^p \text{ per } \eta \text{ sufficientemente piccolo.} \end{aligned}$$

□

**Osservazione**

$L^\infty(\mathbb{R})$  non è separabile, sia  $\{\omega_r\}_r$  famiglia più che numerabile di sottoinsiemi tali che  $r \subset \mathbb{R}$ ,  $\omega_r \in \eta$  per  $r \neq s$

$m(\omega_r \setminus \omega_s)$  oppure  $m(\omega_s \setminus \omega_r) > 0$

esempio

$$\omega_r = (-r, r) \quad r > 0$$

se  $r < s$   $m(\omega_s \setminus \omega_r) = ([-s, -r] \cup [r, s]) > 0$

$$\{\chi_{\omega_r}\}_{r>0} \subset L^\infty(\mathbb{R})$$

$$\|\chi_{\omega_r} - \chi_{\omega_s}\|_\infty = 1$$

$\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})\}$  sono disgiunte in  $L^\infty(\mathbb{R})$

Sia  $D$  denso in  $L^\infty(\mathbb{R})$

$\forall r \exists f_r \in D \cap B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})$  se  $r \neq s \Rightarrow f_s \neq f_r$

$\Rightarrow D$  è più che misurabile  $(V_0, \|\cdot\|_{V_1}), (V_2, \|\cdot\|_{V_2})$  spazi vettoriali normati

$L : V_1 \rightarrow V_2$  operatore lineare.

### Definizione 2

$L$  si dice limitato se  $\exists C \geq 0$  tale che  $\|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$

### Teorema 2

Sia  $L$  operatore lineare  $L$  è limitata  $\Leftrightarrow L$  è continua.

#### Dimostrazione

( $\Rightarrow$ ) Sia  $L$  limitato  $\forall v_1, v_2 \in V_1 \quad \|L(v_1) - L(v_2)\|_{V_2} = \|L(v_1 + v_2)\|_{V_2} \leq C\|v_1 + v_2\|_{V_1} \leq C\|v_1\|_{V_1} + C\|v_2\|_{V_1} \Rightarrow L$  è lipschitziano.

( $\Leftarrow$ ) sia  $L$  continuo.

Poiché  $L(0) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$  se  $\|v\|_{V_1} < \delta$

$$\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \in V_1 \text{ e } \left\| \frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \right\|_{V_2} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Rightarrow \|L(\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} < \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$$

$\Rightarrow L$  è limitato

□

$$L(V_1, V_2) = \{L : V_1 \rightarrow V_2 : L \text{ lineare e continuo}\}$$

spazio vettoriale

$$L \in L(V_1, V_2)$$

$$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} \leq C \quad \forall v \in V_1 \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} < +\infty$$

$$\|L\| = \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}}$$

$$= \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \|L(\frac{v}{\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} = \sup_{\substack{v \in V_1 \\ \|v\|_{V_1}=1}} \|L(v)\|_{V_2}$$

### Teorema 3

$(L(V_1, V_2), \| \|)$  è uno spazio vettoriale normato

se  $(V_2, \| \|_{V_2})$  è di Banach  $\Rightarrow (L(V_1, V_2), \| \|)$  è di Banach.

#### Dimostrazione

per esercizio

□

In particolare  $L(V_1, \mathbb{R}) = \{L : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare continua}\}$  è uno spazio di Banach  
 $V'_1 = V_1^*$  spazio dueale di  $V_1$

# Lezione 21 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-14

## 0.1 boh

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$g \in L^{p'}(X)$  questa induce un funzionale lineare continuo  $L_g : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f \in L^p(X) \rightarrow L_f(g) = \int_X f g \, d\mu$   
 $|L_g(f)| = |\int_X f \cdot g \, d\mu| \leq \int_X |f| |g| \, d\mu \leq \|g\|_{p'} \|f\|_p$  Per Holder  
 $\Rightarrow L_g$  è limitato, quindi continuo.

$$\|L_g\| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p=1}} |L_f(g)| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ f \neq 0}} \frac{|L_g(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_{p'}.$$

$$f = |g|^{\frac{p'}{p}-1} g$$

$$|f| = |g|^{\frac{p'}{p}}$$

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |g|^{p'} \, d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow d \in L^p$$

$$\|f\|_p = (\int_X |g|^{p'} \, d\mu)^{1/p} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}} = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}}.$$

$$L_g(f) = \int_X f g \, d\mu = \int_X |g|^{\frac{p'}{p}} \, d\mu.$$

$$\int_X |g|^{\frac{p'}{p}+1} \, d\mu = \int_X |g|^{\frac{1}{p'}+1} \, d\mu = \int_X |g|^{p'} \, d\mu$$

$$= \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_p \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{p'-1}$$

$$= \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{p'} \|f\|_p$$

$$\Rightarrow \frac{|L_g(f)|}{\|f\|_{p'}} = \|g\|_{p'} \Rightarrow \|L_g\| = \|g\|_{p'}$$

$$i : L^{p'}(X) \rightarrow (L^p(X))' \quad \|i(g)\| = \|L_g\| = \|g\|_{p'} \text{ (isometria)}$$

$$g \rightarrow L_g$$

Il teorema di rappresentazione di Resz dice che  $i$  è suriettiva ( $\forall p \in [1, +\infty)$ ), ovvero

$$(L^p(X))' = i(L^{p'}(X)).$$

con isomorfismo isometrico

$$\Rightarrow (L^p(X))' \equiv L^{p'}(X)$$

per  $p = 2 \quad g \in L^2(X) \Rightarrow g$  induce un funzionale su  $L^2(X)$

$$f \in L^2(X) \rightarrow \int_X g f \, d\mu.$$

Per  $p = 2$  abbiamo in realtà una funzione

$$L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \rightarrow \int_X f g \, d\mu.$$

che è bilineare, simmetrica e definita positiva.  $((f, f) \rightarrow \int_X f^2 d\mu \geq 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.o.})$

$\Rightarrow$  la forma bilineare

$$(f, g) \rightarrow \int_X fg d\mu.$$

è un prodotto scalare che indicheremo come  $(f, g)$

**Ricordo:**

$V$  spazio vettoriale con prodotto scalare  $(\cdot, \cdot) \Rightarrow V$  si dice spazio euclideo e  $\sqrt{(f, f)} = \|f\|$  è una norma

Se  $V$  è completo rispetto alla norma indotta da  $(\cdot, \cdot) \Rightarrow V$  si dice spazio di Hilbert.

**Osservazione**

$$\sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_X f d\mu} = (\int_X f^2 d\mu)^{1/2} = \|f\|_2$$

$\Rightarrow L^2(X)$  è uno spazio di Hilbert (già dimostrato che con questa norma è completo)

**Teorema 1** (Identità del parallelogramma)

Sia  $(V, \|\cdot\|)$  uno spazio normato, Allora  $V$  è uno spazio euclideo  $\Leftrightarrow f, g \in V$

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

**Dimostrazione**

Idea:  $(f, g) := \frac{1}{2}(\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2)$

è un prodotto scalare.

□

**Osservazione**

Per gli spazi  $L^p(X)$   $L^2$  è l'unico spazio di Hilbert perché  $\|\cdot\|_p$  non verifica l'identità del parallelogramma per  $p \neq 2$

**Teorema 2** (della proiezione)

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $C \subseteq H$  un convesso, chiuso, non vuoto.

$\Rightarrow \forall f \in H \exists! u \in C$  tale che  $\|u - f\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$  ( $u := p_C(f)$ ) Inoltre

$$u = p_C(f) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in C \\ (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C \end{cases}$$

**Dimostrazione**

esistenza:

se  $f \in C \Rightarrow u = f$

se  $f \notin C$  Th:  $\inf_{v \in C} \|f - v\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$

$d = \inf_{v \in C} \|f - v\|$

Esiste una successione minimizzante  $\{v_n\} \subset C$  tale che  $\|f - v_n\| \rightarrow d$

Dimostriamo che  $\{v_n\}$  è di Cauchy.

$v_n, v_m \in C$  convesso

$$\Rightarrow \frac{v_n + v_m}{2} \in C \Rightarrow d^2 \leq \|f - \frac{v_m + v_n}{2}\|^2 = \left\| \frac{f - v_n}{2} + \frac{f - v_m}{2} \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| \frac{f - v_n}{2} - \frac{f - v_m}{2} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - d^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$$

dato che  $\|f - v_n\| \rightarrow d$  e  $\|f - v_m\| \rightarrow d$

$\Rightarrow \{v_n\}$  di Cauchy

*H Hilbert*  $\Rightarrow \exists u = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \quad \{v_n\} \subset C, C$  chiuso  $\Rightarrow u \in C$

$$\|u - f\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - f\| = d$$

**Unicità:**

Siano  $u_1, u_2 \in C$  tale che  $\|u_1 - f\| = \|u_2 - f\| = d = \min_{v \in C} \|f - v\|$

$$\Rightarrow \frac{u_1+u_2}{2} \in C \text{ e } d^2 \leq \|f - \frac{u_1+u_2}{2}\|^2 = \left\| \frac{f-u_1}{2} + \frac{f-u_2}{2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\|f - u_1\|^2 + \|f - u_2\|^2) = \left\| \frac{f-u_1}{2} - \frac{f-u_2}{2} \right\|^2$$

$$d^2 - \frac{\|u_2 - u_1\|^2}{4} \Rightarrow \frac{\|u_1 - u_2\|^2}{4} \leq 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

**Caratterizzazione:**

Sia  $u = p_C(f) \Leftrightarrow \|u - f\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$  con  $u \in C$

$$\Rightarrow \forall v \in C \quad \|u - f\|^2 \leq \|f - ((1-\lambda)u + \lambda v)\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\|f - u + \lambda(u - v)\|^2 = \|f - u\|^2 + \lambda^2\|u - v\|^2 + 2\lambda(f - u, u - v)$$

Quindi

$$\|u - f\|^2 \leq \|f - u\|^2 + \lambda^2\|u - v\|^2 + 2\lambda(f - u, u - v).$$

$$\Rightarrow \lambda(f - u, u - v) \leq \lambda^2\|u - v\|^2 \quad \forall \lambda \in (0, 1]$$

per  $\lambda \rightarrow 0^+$

$$\Rightarrow (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C$$

Viceversa, sia  $u \in C$  tale che  $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C$

$$\Rightarrow \|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 \text{ con } v \in C$$

$$\|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 = \|u^2\| - 2(f, u) - \|v\|^2 + 2(f, v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(f, v - u)$$

$$\|u\|^2 - \|v\|^2(f - u, v - u) + 2(u, v + u) \leq -\|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(u, v) = -\|u - v\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \|f - u\|^2 \leq \|f - v\|^2 \quad \forall v \in C$$

□

### Corollario 1

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $M \subset H$  un sottospazio vettoriale chiuso.

$$\Rightarrow \forall f \in H \quad \exists! u \in M \text{ tale che } \|u - f\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

$$\text{e } u = p_M(f) \Leftrightarrow u \in M, (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M (f - u \in M^\perp)$$

### Dimostrazione

Dal teorema della proiezione  $\exists u \in M \quad u = p_M(f)$  e  $u = p_M(f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M \\ \forall v \in M \end{cases}$$

$\Rightarrow u + v \in M$  perché  $M$  sottospazio

$\Rightarrow (f - u, v) \leq 0 \quad \forall v \in M$  ma anche  $-v \in M$

$-(f - u, v) \geq 0 \quad \forall v \in M$

$\Rightarrow (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

Viceversa

se  $u \in M$  tale che  $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \Rightarrow v - u \in M \quad \forall v \in M$

$(f - u, v - u) = 0 \quad \forall v \in M \Rightarrow u = p_M(f)$

□

**Osservazione**

Se ci chiede la proiezione e non riusciamo bene a trovare la proiezione, ci si fa un'idea e si verifica se soddisfa la caratterizzazione

# Lezione 22 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-20

## 0.1 boh

### Definizione 1

$S \subset H$  sottoinsieme

$$S^\perp = \{f \in H \mid (f, g) = 0 \quad \forall g \in S\}.$$

questo viene anche chiamato complemento ortogonale di  $S$

### Proposizione 1

Sia  $S \subset H \Rightarrow S^\perp$  è un sottospazio vettoriale chiuso

### Osservazione

In dimensione infinita esistono sottospazi non chiusi

### Esempio

$$C([0, 1]) \subset L^2((0, 1))$$

$C([0, 1])$  non è chiuso in  $L^2([0, 1])$

Quindi dire "chiuso" non è una banalità

Se  $f_1, f_2 \in S^\perp, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g) = 0 \quad \forall g \in S$$

Se  $\{f_n\} \subset S^\perp, f_n \rightarrow f$  in  $H$

$$\Rightarrow (f_n, g) = 0 \quad \forall n, \forall g \in S$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (f, g)$$

$| (f_n, g) - (f, g) | = | (f_n - f, g) | \leq \| f_n - f \| \| g \| \rightarrow 0$  se converge uniformemente.

### Corollario 1

Sia  $M \subset H$  un sottospazio chiuso proprio  $\Rightarrow \exists g \in M^\perp \setminus \{0\}$

### Dimostrazione

Sia  $f \in H \setminus M$  e sia  $u = pr_M(f) \in M$

$$\Rightarrow f \neq u \text{ e } (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

$$\Rightarrow f \cdot u \neq 0 \text{ e } f - u \in M^\perp$$

□

### Osservazione

$M = C([0, 1]) \subset L^2((0, 1))$  sottospazio proprio non chiuso

$$\text{Sia } g \in M^\perp \Leftrightarrow \int_{[0,1]} g f dm = 0 \quad \forall f \in C([0, 1]) \Rightarrow g = 0$$

### Teorema 1 (Riesz) (rappresentazione del duale per uno spazio di Hilbert)

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert

$\forall L \in H'$  (spazio duale = {funzionali su  $H$  lineari e continui})

$\exists! g \in H$  tale che  $L(f) = (f, g) \quad \forall f \in H$

$$\text{e } \|L\|_{H'} = \|g\|_H$$

### Dimostrazione

Se  $L0 \rightarrow g = 0 \quad L(f) = (f, 0) = 0 \quad \forall f \in H$

Se  $L \neq 0 \Rightarrow \ker(L) = \{f \in H : L(f) = 0\}$  è un sottospazio proprio ( $L \neq 0$ ) è chiuso (perché  $L$  continuo)

$\Rightarrow \exists \tilde{g} \in \ker(L)^\perp \setminus \{0\}$

Osserviamo che  $L(\tilde{g}) \neq 0$  perché

se  $L(\tilde{g}) = 0 \Rightarrow \tilde{g} \in \ker(L) \cap \ker(L)^\perp \Rightarrow g^{\perp 0}$

$\forall f \in H$

$$L(f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g})) = L(f) - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}L(\tilde{g}) = 0$$

$$\Rightarrow f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g} \in \ker(L)$$

$$\Rightarrow (f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g}, \tilde{g}) = 0 \text{ perché } \tilde{g} \in \ker(L)^\perp$$

$$\Rightarrow (f, \tilde{g}) = \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\|g\|^2$$

$$\Rightarrow (f, \frac{L(\tilde{g})}{\|\tilde{g}\|^2}\tilde{g}) = L(f) \quad \forall f \in H$$

se  $g_1, g_2 \in H$

tale che  $L(f) = (f, g_1) = (f, g_2) \quad \forall f \in H$

$$\Rightarrow (f, g_1 - g_2) = 0 \quad \forall f \in H \Rightarrow g_1 = g_2$$

Isometria:

$$L(f) = (f, g) \quad f \in H \Rightarrow |L(f)| = |(f, g)| \leq \|f\|\|g\| \Rightarrow \|L\|_{H'} = \sup_{f \in H \setminus \{0\}} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|} \leq \|g\|$$

Ma  $L(g) = \|g\|^2$

$$\Rightarrow \frac{L(g)}{\|g\|} = \|g\|$$

$$\Rightarrow \|L\|_{H'} = \|g\| \quad \square$$

## Definizione 2

Un sottoinsieme  $S \subset H$

si dice linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è composto da vettori linearmente indipendenti.

Un sottoinsieme  $S$  linearmente indipendente si dice sistema ortogonale se  $(f, g) = 0 \forall f, g \in S$

$S$  si dice sistema ortonormale se  $S$  è un sistema ortogonale e  $\|f\| = 1 \quad \forall f \in S$

## Proposizione 2

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert separabile e sia  $S$  un sistema ortonormale di  $H$

$\Rightarrow S$  è al più numerabile

## Dimostrazione

$$S = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = (\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \|\varphi_\beta\|^2 + \|\varphi_\beta\|^2 = 2$$

$$B_{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha) = \{f \in H : \|f - p\varphi_\alpha\| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

Sia  $D \subset H$ ,  $\bar{D} = H$

$D$  numerabile

$$D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)} \neq \emptyset \quad \forall \alpha$$

$$\forall \alpha \exists v_\alpha \in D$$

$$S \rightarrow D$$

$$\varphi_\alpha \in S \rightarrow v_\alpha \in D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)}.$$

$\Rightarrow$  è iniettiva  $\Rightarrow \text{card}(S) \leq \text{cord}(D)$

□

### Definizione 3

Sia  $\{\varphi_k\}$  un sistema ortonormale numerabile in  $H$  spazio di Hilbert.

$\{\varphi_k\}$  si dice completo (o base hilbertiana) se l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di  $\{\varphi_k\}$  è denso in  $H$

$$(se \forall f \in H \quad f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R})$$

### Teorema 2

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert separabile

$\Rightarrow H$  ammette un sistema ortonormale completo

### Dimostrazione

Sia  $D = \{f_n\}$  sottoinsieme numerabile e denso

da  $D$  si togliano gli elementi che sono della forma  $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k f_k$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$   
si ottiene un sottoinsieme di  $S$  linearmente indipendente

$\Rightarrow D \subseteq S$  insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di  $S$

$\Rightarrow H = \overline{D} \subseteq \overline{S} = H$

$S$  si ortonormalizza mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Alberto-Agostinelli (Gram-Schmidt)

□

### Proposizione 3

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $\{\varphi_k\}$  un sistema ortonormale numerabile  
 $\forall n \geq 1$  sia  $M_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \rangle = \{\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$  (sottospazio vettoriale chiuso)

$\forall f \in H$  si ha

$$p_{M_n}(f) \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

e

$$\|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2.$$

### Dimostrazione

Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $f \in H$

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\|^2 &= (f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_k \lambda_i (\varphi_k, \varphi_i) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2. \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 - 2\lambda_k (f, \varphi_k)) = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k - (f, \varphi_k))^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 \\ &\geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2. \end{aligned}$$

$$se \lambda_k = (f, \varphi_k) \Rightarrow \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2$$

□

### Corollario 2 (Disuguaglianza di Bessel)

$H$  spazio di Hilbert  $\{\varphi_k\}$  sistema fondamentale numerabile

$\Rightarrow f \in H$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f, f_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

### Dimostrazione

$\forall n$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 = \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 \geq 0.$$

□

**Definizione 4**

Se  $\{\varphi_k\}$  è un sistema ortonormale, i numeri  $(f, \varphi_k)$  si dicono coefficienti di Fourier di  $f$   
 $\Rightarrow \{(f, \varphi_k)\} \in l^2$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k = f.$$

si chiama serie di Fourier di  $f$