Lezione 18 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-06

0.1 Inclusione sugli spazi L^p

Proposizione 1
Sia (X, μ) uno spazio di misura finito ($\mu(X) < +\infty$) se $p, q \geq 1$ con $p > q$
$\Rightarrow L^p(X) \subsetneq L^q(X)$
e $\exists c > 0 t.c. \|f\|_q \leq c\|f\|_p \quad \forall f \in L^p(X)$
Inoltre se $f : X \to [-\infty, +\infty]$ è misurabile ed è tale che $\exists M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per quasi ogni $x \in X \Rightarrow f \in L^p(X) \quad \forall p \geq 1$

Dimostrazione
f misurabile
$f \in L^p \Leftrightarrow \int_X |f|^p < +\infty$
$f \in L^q \Leftrightarrow \int_X |f|^q < +\infty$
$p > q \quad |f|^q \leq |f|^p \Leftrightarrow 1 \leq |f|^{p-q}$ *vero se* $|f| \geq 1$
La dimostrazione segue ma è costruttiva, la hai nella chat con alberto.

□

Osservazione
$\mu(X) < +\infty$
$\{f_n\}, f \in L^p(X) \mid f_n \to f \text{ in } L^p(X) \Rightarrow f_n \to f \text{ in } L^q(X) \quad \forall 1 \leq q < p$
Usando Holder come nella dimostrazione

$$\|f_n - f\|_q^q = \int_X |f_n - f|^q d\mu \leq \left(\int_X |f_n - f|^{q-\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \cdot \left(\int_X (1)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}$$

$$= \|f_n - f\|_p^q \cdot \mu(X)^{\frac{p-q}{p}} < +\infty.$$

$f_n \to f$ in L^q
Esercizio
$\mu(X) < +\infty$ $f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabile tale che f essenzialmente limitata $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid |f| < M$ q.o. in
$X = [0, 1], \mu = m$

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & se \quad x = 0 \\ 1 & se \quad x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f \text{ è essenzialmente limitata}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f \text{ non è essenzialmente limitata}$$

$\exists \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$?

$$\left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\left(\frac{\int_X |f|^q d\mu}{\mu(X)}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\int_X |f|^p d\mu}{\mu(X)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad con \quad p > q.$$

la funzione $\varphi(p) = \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

è monotona crescente quindi $\exists \lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(p) = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\|f\|_p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} = \lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p$

Esempio
definiamo $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid |f| \le M \quad q.o.\}$

- $f =$ costante su $X \mid \mu(X) < +\infty$
  $\Rightarrow \|f\|_\infty = |c|\,(\mu(X))^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{\to+\infty} c = \|f\|_\infty$
  se f è limitata in generale
- $|f| \le M \Rightarrow \|f\|_p \le M(\mu(X))^{\frac{1}{p}} \to M \Rightarrow \|f\|_p \le< \mu(X)^{\frac{1}{p}}$

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \le \inf\{M \in \mathbb{R}^+ \mid |f| < M \quad q.o.\} = \|f\|_\infty.$$

Disuguaglianza opposta:
sia $\alpha < \|f\|_\infty$ quindi
$\mu(\{x \mid |f| > \alpha\}) > 0$ perché se per assurdo non valesse, quindi $= 0$
$|f(x)| \le \alpha$ quasi ovunque ma è assurdo perchè $\alpha < \|f\|_\infty$che è un inf

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_{|f|>\alpha} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ge \alpha\mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p\to+\infty} \alpha.$$

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \ge \alpha \quad \forall\alpha < \|f\|_\infty \Rightarrow \liminf_{p\to+\infty} \ge \|f\|_\infty \Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Definizione 1
(X, μ) spazio di misura

$$L^\infty = \{f : X \to [-\infty, +\infty] \text{ misur.} \mid \exists M \ge 0 \mid |f| \le M \quad q.o.\}.$$

Lemma 1
$f \in L^\infty(X) \Rightarrow |f| \le \|f\|_\infty$ q.o. su X

Dimostrazione
Appunti di Alberto □

Proposizione 2
$L^(X)$ è uno spazio vettoriale, $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su L^∞

Osservazione
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato
$C([a, b]) \subset L^\infty((a, b), m) \quad f \in C([a, b])$
$\|f\|_{C([a,b])} = \sup_{[a,b]} |f(x)|$
$\|f\|_\infty = \inf\{M : \|f\| \le M \ q.o.\}$
$|f(x)| \le \|f\|_{C([a,b])} \quad \forall x \in [a, b]$
$\Rightarrow \|f\|_\infty \le \|f\|_{C([a,b])}$
$|f(x)| \le \|f\|_\infty$ $q.o.$ in $[a, b]$
$\Rightarrow f(x) \le \|f\|_\infty \quad \forall x \in [a, b]$
$\|f\|_{C([a,b])} = \|f\|_\infty$

Proposizione 3
Siano $f \in L^\infty(X), g \in L^p(X) \quad 1 \leq p > +\infty$
$\Rightarrow fg \in L^p(X)$
e $\|fg\|_p \leq \|f\|_\infty \|g\|_p$