Lezione 4 Algebra I

Federico De Sisti

2025-03-10

0.1 Seconda parte della lezione

Domanda:
Cosa cambia in $\mathbb{K}[2]$ quando $\mathbb{K}$ è un campo?
$u_1 = \mathbb{K}$
Chi è u_2?
$p \in u_2$ se e solo se

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K}[x]/(p) \text{ è suriettiva.}$$

se e solo se $deg(p) = 1 \vee deg(p) = 0$
In generale
$\forall i \geq 1 \quad u_{i+1} \setminus u_i$ è l'insieme dei polinomi di grado i **Attenzione** $\mathbb{K}[x, y]$ non è dominio euclideo.
$u_1 = \mathbb{K}$
$u_2 =?$

Definizione 1
R anello commutativo, Dati $r_1, \ldots, r_k \in R$ chiamiamo

$$(r_1, \ldots, r_k) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i r_i \mid k \in Z_{\geq 1} \quad a_i \in R\}.$$

Ideale generato da $r_1, \ldots, r_k$ in R

Osservazione
$(r_1, \ldots, r_k)$ è il più piccolo ideale di R contenente $r_1, \ldots, r_k$

Definizione 2 (Ideale principale)
R anello commutativo $I \subseteq R$ ideale, si dice principale se $\exists\ r \in R$ tale che $I = (r)$

Definizione 3
R anello commutativo.

- *R si dice Anello a ideali principali se tutti i suoi ideali sono principali.*
- *R si dice dominio a ideali principali se è un dominio d'integrità e un anello a ideali principali.*

Esempio
$R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un dominio a ideali principali.
Esercizio
Trovare un anello a ideali principali che non sia un dominio
$n \in \mathbb{Z}$, n composto
$\Rightarrow \mathbb{Z}/(n)$ è un anello a ideali principali che non è un dominio

Proposizione 1
$\mathbb{K}$ campo. $R = \mathbb{K}[x]$ è un dominio a ideali principali

Dimostrazione
$\mathbb{K}[x]$ è dominio d'integrità poiché $\mathbb{K}$ lo è.
Sia $I \subseteq R[x]$ ideale , $I \neq \{0\}$
Sia $f \in I \setminus \{0\}$ di grado minimo in I
Vogliamo dimostrare che $I = (f)$

- *$(f) \subseteq I$, infatti se $f \in I$ allora $q \cdot f \in I \quad \forall q \in \mathbb{K}[x]$*
- *$I \subseteq (f)$, infatti $g \in I$ usiamo la divisione per f*
  $\Rightarrow g = q \cdot f + r$ con $deg(r) < deg(f) \Rightarrow r = g - q \cdot f \in I$
  $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow g = q \cdot f \in (f)$

$\square$

Esercizio
Dimostrare che se

- R dominio d'integrità
- $R[x]$ dominio a ideali principali

Allora R è un campo
Soluzione
Dobbiamo verificare che dato $a \in R \setminus \{0\}$ esiste l'inverso moltiplicativo.
Consideriamo l'ideale $(a, x) \subseteq R[x]$
$R[x]$ a ideali principali $\Rightarrow \exists p \in R[x]$ tale che $(p) = (a, x)$
Quindi:

$$\Rightarrow a = q_1 \cdot p$$
$$\Rightarrow x = q_2 \cdot p \ \rightarrow \ ax = \tilde{q}_2 \cdot p$$

Deduciamo che q_1 e p sono entrambi costanti.
Infatti il termine di grado più alto del prodotto $q_1 \cdot p$ è il prodotto dei termini direttivi di p e di q_1 (Stiamo usando il fatto che R sia dominio d'integrità)
Se p costante

$$\Rightarrow q_2 = hx \text{ con } h \cdot p = 1$$

p invertibile $\Rightarrow (p) = R[x]$
$1 \in (a, x) \Rightarrow$ esistono $s, t \in R[x]$:

$$1 = a \cdot s + t \cdot x \Rightarrow s = \sum_{i \geq 0} s_i x^i \Rightarrow as_0 = 1.$$

Esercizio/Proposizione
R dominio a ideali principali. I ideale, Se I è primo, allora I è massimale.
Soluzione

$I = (p) \subseteq R$
I primo. Supponiamo che esista un ideale $J = (q) \subseteq R$ tale che $I \subseteq J$
$I \subseteq J \Rightarrow (p) \subseteq (q) \Rightarrow p = a \cdot q$ per qualche $a \in R$
I primo $\Rightarrow a \in I$ oppure $q \in I$

$$\begin{aligned} \text{q}\in I &\Rightarrow q \in (p) \\ &\Rightarrow (q) \subseteq (p) \\ &\Rightarrow J = I \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} a \in I \Rightarrow a \in (p) \\ \Rightarrow a = k \cdot p \text{ per qualche } k \in R \\ \Rightarrow p = a \cdot q = p \cdot k \cdot q \\ \Rightarrow p \cdot (1 - k \cdot q) = 0 \\ \Rightarrow 1 + k \cdot q = 0 \Rightarrow q \text{ invertibile} \\ J = R \end{gathered}$$

Corollario 1
R dominio a ideali principali (PID) allora un ideale è primo se e solo se è massimale

Dimostrazione
Resta da verificare che I massimale $\Rightarrow I$ primo
I massimale $\Rightarrow R/I$ campo $\Rightarrow R/I$ dominio integrità $\Rightarrow I$ primo $\square$