Lezione 13 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-25

0.1 Lemma di Fatou

Lemma 1 (di Fatou)
Sia (X, M, μ) uno spazio di misura e $f_n : X \to [0, +\infty]$ successione di funzioni misurabili

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione
$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k(x)$ *con* $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall k, \forall x$
e sono misurabili
$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu$
ma $g_k \leq f_k \quad \forall k$
$\Rightarrow \displaystyle\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$ *e applicando il* $\liminf$
$\Rightarrow \displaystyle\liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$
$\displaystyle\liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu$
$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$ □

Esempio 1
$f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ funzioni misurabili ≥ 0

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = 0$
$< \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

Esempio 2
$f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x) \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \quad \forall n$

Definizione 1 (Funzioni integrabili)
Sia (X, M, μ) spazio di misura e sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabile.
Se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int_X f^- d\mu < +\infty$ allora f si dice integrabile e

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

se $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow f$ si dice sommabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$ questo tipo di funzioni definisce

$$L^1(X) = \{f : X \to [-\infty, +\infty] \textit{ misurabili, } \int_X |F| d\mu < +\infty\}.$$

Proposizione 1
Sia (X, M, μ) spazio di misura

1. *Se f è integrabile su X*
   $\Rightarrow |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$
2. *(disuguaglianza di Chebychev)* $f \in L^1(X) \Rightarrow \forall t > 0$
   $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu$
3. $f \in L^1(X) \Rightarrow |f(x)| < +\infty$ *quasi ovunque in X (?)*
4. $f \in L^1(X), \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ *quasi ovunque*
5. $f, g \in L^1(X) \to f + g \in L^1$ *($f + g$ è definita quasi ovunque) e*
   $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione
Dimostriamo ogni punto:

1. *se* $\int_X |f| d\mu = +\infty$ *ovvio*
   Se $\int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X f^+ f\mu, \int_X f^{-1} < +\infty$
   $\Rightarrow |\int_X f d\mu| = |\int_X f^+ d\mu - \int_X f^{-1} d\mu| \leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X |f| d\mu$
2. $\int_X |f| d\mu \geq \int_X f|\chi_{\{|f|>t\}} d\mu \geq \int_X t\chi_{(\{|f|>t\})}$
3. $f \in L^1(X)$
   se $|f| = +\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\}$ *chiamo* $E_n = \{|f| > n\}$
   $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \ldots \subseteq E_1$
   $\mu(E_1) \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$
   $$\Rightarrow \mu(\{|f| = -\infty\}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mu(E_n)) \leq_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu = 0$$
4. $\int_X |f| f\mu = 0$
   $\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$
   $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$
   $\Rightarrow \mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = 0$
5. $f + g$ *è definita su* $X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})$ *(dove il secondo insieme ha misura nulla*
   posso quindi calcolare il suo integrale
   $\int_X (f + g) d\mu = \int_{X \setminus (\{|f|=+\infty\} \cup \{|g|=+\infty\})} (d + g) d\mu$
   $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$
   chiamiamo $f + g = h$
   $\int_X (f + g) d\mu = \int_X h^+ - \int_X h^- d\mu$
   $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$
   $\Rightarrow \int_x (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu$
   $\|$
   $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ + \int_X h^-$

$\int_X (f+g)d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

$\square$

Teorema 1 (convergenza dominata o Teorema di Lebesgue)
Sia (X, M, μ) *spazio di misura e siano* $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ *misurabili tali che* $\lim_{n\to+\infty} f_n$ *per q.o.* $x \in X$ *se* $\exists g \in L^1(X)$ *tale che* $|f_n| \leq g$ *quasi ovunque in* X $\forall n \in \mathbb{N}$ *Allora:*

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$

Dimostrazione
$|f_n| \leq g \to f_n \in L^1(X)$ *e* $|f| \leq g$ *quasi ovunque* $\to f \in L^1(X)$
$\Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0$ *quasi ovunque in* X *(perché* $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$*)*
quindi puntualmente per q.o. $x \in X$ *fissato*

$$2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \to 2g(x).$$

$\Rightarrow$ *Usando il lemma di Fatou*

$$\cancel{\int_X 2g d\mu} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu.$$

sfruttiamo la linearità dell'integrale
$\liminf_{n\to+\infty} (\int_X 2g - \int_X |f_n - f| d\mu) = \cancel{\int_X 2g d\mu} - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu$
Nota: il $\liminf$ *diventa lineare nel caso dei limiti.*
siccome $g \in L^1(X)$ *posso semplificare*

$$\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

$\square$