Lezione 11 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-31

0.1 Altro sulle identificazioni

Lemma 1 (proprietà universale delle identificaizone)
SCHEMA 3:18
Sia $f : X \to Y$ identificazione fra spazi topologici, sia Z spazio topologico e $g : X \to Z$ continua. Supponiamo che g sia costante sulle fibre di f (fibra di f = controimmagine $f^{-1}(y)$ per $y \in Y$). Allora $\exists! h : Y \to Z$ continua t.c. il diagramma commuta cioè $g = h \circ f$

Dimostrazione
Per ogni $y \in Y$ scegliamo $x \in X$ tale che $f(x) = y$ ponendo $h(y) = g(x)$ questo definisce

$$h : Y \to Z.$$

È ben definita perché g è costante sulla fibra di f, infatti se $x \in X$ soddisfa $f(x') = y$ allora $x, x' \in f^{-1}(y)$ e $g(x) = g(x') = h(y)$.
Chiara,ente questa h è unica tale che $g = h \circ f$
Verifichiamo che h è continua, sia $A \subseteq Z$ aperto. Abbiamo $g^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto, Inoltre $g^{-1}(A) = f^{-1}(h^{-1}(A))$
Quindi $h^{-1}(A)$ è un sottoinsieme di Y la controimmagine in X è aperta. Visto che f è identificazione, $h^{-1}(A)$ è aperta. □

Osservazione
Sia $f : X \to Y$ identificazione.
Sia $A \subseteq X$ aperto saturo, cioè $\forall a \in A \ \ \forall b \in X$. se $f(a) = f(b)$ allora $b \in A$.
Allora vale $f^{-1}(f(A))$ = insieme dei punti di X che vanno in punti di Y dove vanno anche punti di A
Allora $f(A)$ è aperto in Y perché la sua controimmagine è A
Cioè f è aperta sugli aperti saturi.

0.2 Topologia quoziente

Definizione 1 (Topologia quoziente)
Siano X spazio topologico, Y insieme, $f : X \to Y$ applicazione suriettiva. La famiglia

$$\{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto di } X\}.$$

questa è una topologia su Y ed è detta topologia quoziente (indotta da f)

Esercizio
Verificare che sia una topologia
Osservazione
Se su Y metto la topologia quoziente allora f è un'identificazione. Inoltre è l'unica topologia su Y che rende f un'identificazione.
Esempi

1. Sia X spazio topologico, sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su X e consideriamo $X/\sim = \{$ classi di equivalenza $[x]$ con $x \in X\}$

e l'applicazione

$$\begin{array}{c}\pi : X- > X/\sim \\ \text{x} \to [x]\end{array}.$$

Si mette su $X/\sim$ la topologia indotta da π

2. Considero $X = [0,1]$ definisco

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \text{oppure} \\ x, y \in \{0,1\} \end{cases}.$$

Le classi di equivalenza sono

$$[0] = [1], [z] \quad \forall z \in]0,1[.$$

Mettiamo su $X/\sim$ la topologia quoziente

Ad esempio $X = [0, \frac{1}{2}[\subseteq X$ è aperto in X. L'immagine $\pi(C)$ è

$$\pi(C) = \{[0] = [1]\} \cup \{[z] \mid z \in]0, \frac{1}{2}[\}.$$

è aperto in $X/\sim$?

La sua controimmagine è $\pi^{-1}(\pi(C))$ = punti di X equivalenti a qualche punto di $C = [0, \frac{1}{2}[\cup\{1\}$ non è aperto in $[0,1]$ Ad esempio invece

$$\pi([0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{4}, 1]).$$

è un aperto in $X/\sim$. Vediamo che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1.

Ricorda: $X = [0,1]$, $x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \textit{opp.} \\ x, y \in \{0,1\} \end{cases}$

Verifica che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1 (importante!)

Abbiamo le applicazioni:

AGGIUNGI GRAFICO 4:25

$g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è continua, ed è costante sulle fibre di π

Fibre di π : $\{z\} = [z] = \pi^{-1}([z]) \quad \forall z \in]0,1[$

$\pi^{-1}([0] = [1]) = [0] = [1] = \{0,1\}$

Infatti $g(0) = g(1)$

Per la proprietà universale delle identificazioni esiste $h : X/\sim \to S^1$ tale che $g(\pi(t)) = f(h([z])) = g(t)$

Inoltre h è suriettiva perché lo è g

Si verifica facilmente che h è iniettiva perché g non 'e iniettiva, solo perchè $g(0) = g(1)$

Inoltre S^1 è T2 (poiché è in $\mathbb{R}^2$) e $X/\sim$ è compatto poiché $X/sim = \pi(X)$ e X è compatto

Terzo esempio

$X = \mathbb{R}$ definisco $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
Possiamo immaginare questo quoziente come una spirale guardata dall'alto (la retta $\mathbb{R}$ proiettata sul piano x, y dove quelli sulla stessa fibra sono quelli a distanza 1,l'un l'altro)
Verifichiamo che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1. Come prima abbiamo
Inserisci immagine 4:40
Prendo $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ come prima abbiamo l'applicazione
$h([t] = g(t)$ è ben definita ($g(t+n) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$) è continua. Anche qui h è biettiva. Vorrei che $X/\sim$ compatto, ma X non è compatto.
Osservo che $\pi(X) = X/\sim = \pi([0,1])$ poiché ogni classe di equivalenza ha rappresentante in $[0,1]$
Quindi h è omeomorfismo
Esempio 4
In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$
definiamo

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \quad \textit{oppure} \\ x = x' \neq 0 \end{cases} .$$

È una relazione di equivalenza per cui
$(x,0) \sim (x,1)$ se $x \neq 0$
$(0,0) \nsim (0,1)$
$X/\sim$ è uno specie di $\mathbb{R}$ con l'origine "raddoppiata"
$X/\sim$ non è T2
Esempio di intorno aperto di $[(0,0)]$
$\pi(]-1.1[\times\{0\} \cup]-1,0[\cup]0,1[) \times \{1\}$ aperto saturo di X
Esempio 5
Dato X spazio topologico e $Y \subseteq X$ sottoinsieme, spesso si considera $\sim_Y$ su X:

$$a \sim b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \quad \textit{opp.} \\ a, b \in Y \end{cases} .$$

Lo spazio topologico $X/\sim$ è in X
dove ho contratto i sottoinsieme Y ad un singolo punto.
L'esempio 2 è ottenuto in questo modo prendendo $Y = \{0,1\}$
Esempio
$X = \mathbb{R}^2$ definiamo $Y = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid ||p||^2 \leq 1\}$ e considero $X/\sim_Y$
È omeomorfo a S^2. Possiamo anche prendere $Z = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid ||p|| > 1\}$
$X/\sim_Z$ è più strano!

Definizione 2
Sia X spazio topologico, considero $Omeo(X) = \{f : X \to X \mid f$ è omeomorfismo$\}$ è un gruppo con operazione $f \circ g$ ed è elemento neutro Id_X.
Sia $G \subseteq Omeo(X)$ un sottogruppo.
Si definisce $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \mid g(x) = g\}$ (è relazione d'equivalenza (ad esempio se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora $\exists g \in G \mid g(x) = y$ $\exists h \in G \mid h_(y) = z$ allora $z = h(y) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$ da cui $x \sim z$)

Si definisce lo spazio topologico

$$X/G = X/\sim .$$

(Le classi di equivalenza sono le orbite di G su X)

Esempio
$X = \mathbb{R}$, poniamo

$$\begin{aligned} f_n :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to x+n \end{aligned}.$$

$$G = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

è sottogruppo di $Omeo(X)$ infatti $Id_X = f_0$
$f_n \circ f_m = f_{n+m}$
la relazione è la stessa di prima

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Proposizione 1
Sia X spazio topologico sia $G \subseteq Omeo(X)$ sottogruppo.
Allora

$$\begin{aligned} \pi :&X \to X/G \\ x \to &[x] \end{aligned}.$$

è aperta.
Inoltre se G è finito allora π è anche chiusa.

Dimostrazione
Sia $A \subseteq X$ aperto, dimostriamo che $\pi(A)$ è aperto in X/G
Considero $\pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(A)\}$
$= \{x \in X \mid \exists a \in A \mid \pi(a) = \pi(x)\}$
$= \{x \in X \mid \exists g \in G \mid g(x) \in A\}$
$\bigcup_{h \in G} h(A)$ *con* $h = g^{-1}$
Quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è unione di aperti, quindi è aperto in X, quindi $\pi(A)$ è aperto in X/G
La dimostrazione con G finito è analoga prendendo $A \subseteq X$ chiuso. □

Teorema 1
Siano X spazio topologico e $G \subseteq Omeo(X)$ sottogruppo. Suppongo X T2, allora X/G è T2 $\Leftrightarrow D = \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X \ g \in G\}$ è chiuso in $X \times X$

Osservazione
In generale data una relazione d'equivalenza $X/\sim$ T2 non è equivalente a $\{(x,y)\ |x\sim y\}$ chiuso in $X\times X$
Osservazione
Siano $f:X\to Y,\ g:Z\to W$
applicazione aperta fra spazi topologici. Allora

$$\begin{aligned} f\times g :& X\times Z\to Y\times W \\ & (x,z)\to (f(x),g(x)) \end{aligned}.$$

è aperta. Ma attenzione: se f,g sono identificazioni, non è detto che lo sia $f\times g$ (V foglio di esercizi)
Dimostrazione
Considero

$$\pi\times\pi : X\times X\to X/G\times X/G.$$

Ricordo $\pi : X\to X/G$ *è aperta e suriettiva.*
quindi $\pi\times\pi$ *è aperta e suriettiva,*
quindi $\pi\times\pi$ *è un'identificazione.*
Abbiamo

$$D=(\pi\times\pi)^{-1}(\Delta_{X/G}).$$

dove $\Delta_{X/G}\subseteq X/G\times X/G$ *è la diagonale.*
Infatti $(x,y)\in X\times X$ *soddisfa* $\pi(x)=\pi(y)\Leftrightarrow [x]=[y]\Leftrightarrow ([x],[y])\in\Delta_{X/G}$
Quindi X/G *è T2* $\Leftrightarrow \Delta$ *è chiuso in* $X\times X$
In un'identificazione qualsiasi, un sottoinsieme del codominio è chiuso se e solo se la diagonale è chiusa.finisci lezione

□