Lezione 2 Fisica 1

Federico De Sisti

2024-09-27

1 Derivata di un vettore

$$\frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{u}(t+\Delta t) - \overrightarrow{u}(t)}{\Delta t}.$$

$$\Delta \overrightarrow{u} : \overrightarrow{u}(t+\Delta t) - \overrightarrow{u}(t).$$

$$\overrightarrow{u}(t) = u(t)\hat{u}(t) = \frac{du(t)\hat{u}(t)}{dt} + u(t)\frac{d\hat{u}(t)}{dt}.$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t)\hat{u}(t+\Delta t) - u(t)\hat{u}(t) - u(t)\hat{u}(t+\Delta t) + u(t)\hat{u}(t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}(t+\Delta t)[u+\Delta t) - u(t)] + u(t)[\hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)]}{\Delta t}.$$

$$= \frac{du(t)}{dt}\hat{u}(t) + u(t)\frac{d\hat{u}(t)}{dt}.$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}] = \left(\frac{du_x(t)}{dt}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{du_y(t)}{dt}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{du_z(t)}{dt}\right)\hat{k}.$$

Tutto sto bordello per dire che la derivata del vettore è uguale alla somma delle derivate delle cooridnate

$$0 = \frac{d}{dt}(\hat{u}(t)\cdot\hat{u}(t)) = \hat{u}(t)\frac{d\hat{u}(t)}{dt} + \frac{d\hat{u}}{dt}\hat{u}(t) = 2\hat{u}(t)\frac{d\hat{u}}{dt} = 0.$$

$$\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_1}\right)\overrightarrow{v_2} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_2}\right)\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1}\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_2}\right).$$

da dimostrare con le coordinate cartesiane
sta troia usa il prodotto scalare con il punto mannaggia la troia

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} \times \frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} + \overrightarrow{v_2} \times \frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}.$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}u(t) + u(t)\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}\hat{u}(t) + u(t)\hat{u}(t).$$

$$\frac{\overrightarrow{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{u}}{\Delta t}.$$

Discorso sull'angolo (aggiungi figura di albert)

$$|\Delta\overrightarrow{u}| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\overrightarrow{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \text{ Velocità angolare.}$$

moltiplicando sopra e sotto per $\frac{\Delta\theta}{2}$ e ricordandoci che con l'aumentare del tempo l'angolo tende a $+\infty$

$$\frac{du(t)}{dt}\hat{u}(t) + u(t)\omega(t)\hat{u}(t)_\perp.$$

con

$$\overrightarrow{u}_{\perp}(t) = \frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt}.$$

$$\frac{du(t)}{dt}\hat{u}(t) + \overrightarrow{\omega}(t) \times \overrightarrow{u}(t)$$

Definizione 1

$$\overrightarrow{\omega}(t).$$

$$|\overrightarrow{\omega}(t)| = \omega(t) = \frac{d\theta}{dt}.$$

il verso è quello che permette al vettore u di ruotare in senso antiorario (entrante o uscente se si prende un piano bidimensionale

2 Introduzione sulla cinematica

Dipendentemente dal problema possiamo descrivere un oggetto come punto materiale o meno

Definizione 2
Grado di libertà: numero di parametri necessari per descrivere il moto di un corpo

Esempi:
In un moto circolare è presente un solo Grado di libertà
$x_p^2 + y_p^2 = r^2 = |r|^2$
$\begin{cases} \mathrm{x}_p = r\cos\theta \\ \mathrm{y}_p = r\sin\theta \end{cases}$

Possiamo anche scrivere

$\begin{cases} r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \\ \theta = \arctan(\frac{x_p}{y_p}) \end{cases}$

Ogni punto può essere descitto dal modulo di un vettore e dall'angolo che forma con l'angolo che forma con l'asse x, la coppia (r, a) forma le coordinate polari o sferiche
TODO ci sono un po di disegni da aggiungere volendo
nel caso del piano tridmensionale si può utilizzare l'angolo tra il vettore e l'asse delle z e quello formato con l'asse x e la proiezione del vettore sul piano sottostante
TODO aggiungi disgeno

$$\begin{cases} x_p = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y_p = \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z_p = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

$x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = r^2$
Caso in cui abbiamo due punti in uno spazio di dim 3 distanti un valore fissato
5 gradi di libertà, fissato uno l'altro può solo muoversi su una sfera
Caso in cui abbiamo un corpo rigido nello spazio
6 gradi di libertà, 3 per la posizione e 3 per la rotazione (1 in più della sbarra dell'esempio precedente)