Lezione 23 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-23

0.1 Boh

H spazio di Hilbert $\{\varphi_k\}$ sistema ortonormale numerabile in $H \Rightarrow \forall f \in H, \sum_{k=1}^{+\infty}(f,\varphi_k)^2 \leq \|f\|^2$

$$\begin{array}{l} \gamma : H \to l^2 \\ \quad f \to \{(f,\varphi_k)\}_{l^2} \end{array} \text{ è lineare } \tau(f+g) = \{(f+g,\varphi_k)\}_{l^2} = \{(f,\varphi_k)\} + \{(g,\varphi_k)\}$$

$\|\tau(f)\|_{l^2} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}(f,\varphi_k)^2\right)^{1/2} \leq \|f\|$

τ è continua $\|\tau\|_{(H,l^2)} \leq 1$

Proposizione 1
$\forall\{\lambda_k\} \in l^2$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k$ è convergente ad un elemento f tale che $(f,\varphi_k) = \lambda_k \quad \forall k$

Osservazione
La proposizione dice che τ è iniettiva
$\forall\{\lambda_k\} \in l^2\ \exists f = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k \in H$ tale che $\tau(f) = \{\lambda_j\}$

Dimostrazione
sia $\{\lambda_k\} \in l^2(\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 < +\infty)$
sia $f_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k$ mostriamo che è di Cauchy, siano $m > n$

$$\|f_m - f_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k\varphi_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k^2 \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ *di Cauchy in Hilbert*
$\Rightarrow \exists f = \lim_{n\to+\infty} f_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_j\varphi_k$
$\forall k$ *fissato se $n > k$*

$$(f,\varphi_k) = (f - f_n,\varphi_k) + (f_n,\varphi_k) = (f - f_n,\varphi_k) + \lambda_k.$$

$\Rightarrow |(f,\varphi_k),\lambda_k| = |(f - f_n,\varphi_k)| \leq \|f - f_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
$\Rightarrow (f,\varphi_k) = \lambda_k \quad \forall k$

$\square$

Osservazione
Se $f = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k$

$\Rightarrow \|f\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\|f_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 = \|\lambda_k\|_{l^2}^2 = \|\tau(f)\|_{l^2}^2$
$\Rightarrow$
$f \in H \to \{(f,\varphi_k)\} \in l^2$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k = \hat{f}\ \hat{p}\overset{?}{=}f$ non sempre

Teorema 1
Sia H uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormale in H sono equivalenti

1. $\{\varphi_k\}$ *è completo*
2. $\forall f \in H \ f = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$
3. $\forall f \in H \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)^2 \rightarrow$ *Perseval*
4. $\forall f, g \in H \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)(g, \varphi_k)$
5. $f = 0 \Leftrightarrow (f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \geq 1$

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
se (φ_k) *è completo* $\Rightarrow d$ *è limite di una combinazione lineare finita di elementi di* $\{\varphi_k\}$ *che dista ovunque da* f *meno di* ε
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n, \ \exists\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_j\varphi_k\| < \varepsilon.$$

Ma $\forall\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\|f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\| \geq \|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\|.$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n$ *tale che* $\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\| < \varepsilon$
$\Rightarrow f = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$
2) $\Rightarrow$ 1) *ovvio*
2) $\Leftrightarrow$ 3) $\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2 \quad \forall n$
3) $\Rightarrow$ 4)
siano $f, g \in H, \|f+g\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(f_g, \varphi_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}((f+\varphi_k)^2 + (g, \varphi_k)^2 + 2(f, \varphi_k)(g, \varphi_k)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(g, \varphi_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)(f, \varphi_k)$$

$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)(g, \varphi_k)$$

4) $\Rightarrow$ 3) *per* $f = g$
2) $\Rightarrow$ 5)
$\forall f \in H, g = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$ *quindi* $f = 0 \Leftrightarrow (f, \varphi_k) = 0 \ \ \forall k$
5) $\Rightarrow$ 2) $f \in H \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k = \hat{f} \in H$
e $(\hat{f}, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \ \ \forall k$
$\Rightarrow (f - \hat{f}, \varphi_k) = 0 \quad \forall k$

5) $\Rightarrow f = \hat{f}$ $\square$

Osservazione

Il teorema dice che $\{\varphi_k\}$ completo $\Leftrightarrow \psi$ isomorfismo (quindi iniettivo poiché suriettivo lo è sempre)

Corollario 1

Ogni spazio di Hilbert H separabile di dimensione finita è isomorfo a l^2

Un esempio esplicito di sistema ortonormale completo in L^2 è il sistema trigonometrico

$L^2((-\pi,\pi))$ che contiene funzioni del tipo $\cos(kx), \sin(kx)\quad k \geq 0 \quad x \in (-\pi,\pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi & se \quad k = m \neq 0 \\ 2\pi & se \quad k = m = 0 \\ 0 & se \quad k \neq m \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(mx)dx = 0 \quad \forall k, m \geq 0.$$

sistema ortonormale detto sistema trigonometrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k\geq 1}.$$

sia $f \in L^2((-\pi,\pi))$

serie di Fourier di f associata al sistema trigonometrico:

$$(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + (f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}})\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + (f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}})\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \ldots.$$

$$\ldots = (f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}})\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + (f, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}})\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} = .$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{(} x)\cos x dx\right)\cos x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx\right)\sin x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx\right)\cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(X)\sin(kx)dx\right)\sin(kx) + \ldots.$$

Serie di Fourier di f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad \forall k$

Una somma finita del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

si dice polinomio trigonometrico
Mostriamo che questo polinomio trigonometrico converge in L^2
dimostriamo il risultato per funzioni continue su L^2 e per densità lo è anche in L^2

Teorema 2
Sia $f \in C(\mathbb{R})$ periodico di periodo 2π
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists p_n$ *polinomio trigonometrico tale che* $\|p_N - f\|_\infty < \varepsilon$

Se faccio vedere che vicino ad f esiste questo polinomio p_n che dista ε in norma infinito, allora vicino a f c'è anche il suo polinomio trigonometrico di Fourier

Lemma 1
$\exists$ *successione di polinomi trigonometrici* $\{\mathbb{Q}_n(x)\}$ *tale che*

1. $\mathbb{Q}_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)dx = 1$
3. $\forall \delta > 0 \quad \sup_{\delta<|x|<\pi} \mathbb{Q}_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Dimostrazione
Sia $Q_n(X) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \quad c_n > 0$
Q_n *è un polinomio trigonometrico di grado* n *(si dimostra per induzione su* n
c_n *viene scelto* $c_n = \dfrac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n dx}$
in modo tale che $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)dx = 1$
quindi per ora sono verificate 1. *e* 2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{2} dx$$

$$\geq 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right) \sin x dx = \frac{4}{n+1} \left| - \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{n+1} \right|_0^{\pi} = \frac{4}{n+1}\frac{1}{2^n}.$$

$c_n \leq \dfrac{2^n(n+1)}{4}$ $\square$