Lezione 17 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-30

0.1 Proprietà spazi $\mathbf{L}^p$

Ricorda:

$$L^P(X) = \{f : X \to [-\infty, +\infty], f \text{ misurabile }, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty.$$

Proposizione 1
L^p è uno spazio vettoriale

Dimostrazione
$\forall f, g \in L^p(X), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ *è misurabile*

$$\int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu \leq \int (|\alpha||f| + |\beta||g|)^p d\mu$$

$$\leq 2^{p-1}(\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu + \int_X |\beta|^p |g|^p d\mu) < +\infty.$$

$\square$

Per definizione, su $L^p(X)$ è ben definita la funzione

$$\| \ \|_p : L^p(X) \to [0, +\infty)$$
$$f \to ||f||_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Proposizione 2 (Disuguaglianza di Hölder)
Sia $p > 1$ e $p' = \frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1)$ $\forall f \in L^p(X), g \in L^{p'}(X)$
$\Rightarrow fg \in L^1(X)$ e

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |g|^{p'} d\mu)^{1/p'}$$

.

Dimostrazione
Si usa la disuguaglianza di Young se $f \neq 0, g \neq 0$
$\Rightarrow \|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} > 0$
$\|g\|_{p'} = (\int_X |g|^{p'} d\mu)^{1/p'} > 0$
Per quasi ogni (q.o.) $x \in X$

$$|f(x)| < +\infty, \quad |g(x)| < +\infty.$$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

$$\Rightarrow \int_X \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_{p'} d\mu} \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\cancel{\int_X |f|^p d\mu}} \cancel{\int_X |f|^p d\mu} + \frac{1}{p'} \frac{1}{\cancel{\int_X |g|^{p'} d\mu}} \cancel{\int_X |g|^{p'} d\mu} = 1 \qquad \square$$

Proposizione 3 (Disuguaglianza di Minkowski)
Sia $1 \leq p < +\infty$
$\forall f, g \in L^p(X) \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
$((\int_X |f+g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}))$

Dimostrazione
$\int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu = \int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu$
$\underset{Holder}{\leq} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu)^{\frac{p-1}{p}}$
$\leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$ *basta ultimamente dividere per* $\|f+g\|^{p-1}$ *entrambi i lati della disequazione* $\square$

Proposizione 4
$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ *è una norma su* $L^p(X)$

Dimostrazione
(i) $\|\|_p \geq \forall f \in L^p(X)$

$$||f||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ q.o..$$

(ii) $\|\alpha f\|_p \quad \alpha \in \mathbb{R} = |\alpha| \|f\|_p$
(iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ $\square$

Osservazione:
A rigore bisognerebbe definire $L^p(X)$ come l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza

$$[f] = \{g : X \to [-\infty, +\infty] \quad : \quad f = g \quad q.o.\}.$$

L'insieme quozientato con questa relazione ci permette di definire bene la norma, altrimenti l'elemento nullo non è unico (posso fare cambiamenti di misura nulla).

Teorema 1
Se $p \geq 1 \Rightarrow L^p(X)$ *è uno spazio vettoriale normato completo (spazio di Banach)*

Dimostrazione (La chiede all'orale)
Sia $\{f_n\} \subset L^p(X)$ *successione di Cauchy*
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \ : \ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$
Tesi: $\exists f \in L^p(X)$ *tale che* $f_n \to f$ *in* $L^p(X) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ *per* $n \to +\infty$
Usiamo la definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$
$\forall k \quad \exists n_k$ *tale che*

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

selezionando $n_{k+1} > n_k$
Si seleziona una estratta $\{f_{n_k}\}$ *tale che*

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Consideriamo la nuova successione:

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(X).$$

$\|g_j\|_p = \| \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \|_p \leq \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} < 1$
$\Rightarrow \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1 \quad \forall j$
Attenzione
Il modulo è fondamentale così g_j *è una funzione crescente!*
$g_{j+1} \geq g_j \quad \forall x \in X \Rightarrow \exists \lim_{j\to+\infty} g_j(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k-1}(x) - f_{n_k}(x)|$
Usando il teorema di B. Levi

$$\int_X |g|^p d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1.$$

$\Rightarrow g \in L^p(X) \Rightarrow g^p \in L^1(X) \Rightarrow g^p$ *(e quindi anche g) è finita quasi ovunque.*
per quasi ogni $x \in X$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)| < +\infty.$$

$\Rightarrow$ *per quasi ogni* $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \text{ è convergente.}$$

$\Rightarrow \exists \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$
$= \lim_{j\to+\infty} (\cancel{f_{n_2}} - f_{n_1} + \cancel{f_{n_3}} - \cancel{f_{n_2}} + \ldots + f_{n_j} - f_{n_{j-1}}$
$= -f_{n_1} + \lim_{j\to+\infty} f_{n_j}$
$\Rightarrow \exists \lim_{j\to+\infty} f_{n_j}(x)$ *per ogni x*
$f(x) = \lim_{j\to+\infty} f_{n_j}(x)$
$\exists$ *quasi ovunque, è misurabile*
$\forall \varepsilon > 0$

$$\int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu = \|f_m - f_{n_k}\|_p < \varepsilon \quad \forall m \geq n_e \text{ per } j \text{ suff. grande.}$$

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \underset{Fatou}{\leq} \liminf_{j\to+\infty} \int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu \leq \varepsilon^p.$$

$$\Rightarrow f_n - f \in L^p e$$

$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e$.

$$\Rightarrow f = f_n - (f_m - f) \in L_p \;\; e \; \|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \; \forall m \geq n_e.$$

$\Rightarrow \|f_m - f\|_p \xrightarrow{m\to+\infty} 0$ $\square$