Lezione 19 Algebra I

Federico De Sisti

2024-12-03

1 Gruppi

Obiettivo
Dimostrare A_n è semplice per $n \geq 5$
Osservazione:
A_4 non è semplice
A_2 e A_3 sono semplici
Strategia
$n \geq 5$
1) $\{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ allora H contiene almeno un 3-ciclo
2) $\{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ se H contiene un 3-ciclo allora li contiene tutti
3) A_n è generato dai suoi 3-cicli
Ricordo:

Lemma 1
$n \geq 3 \quad \{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$
Allora H contiene almeno un 3-ciclo oppure un prodotto di trasposizioni disgiunte

Proposizione 1
$n \geq 5, \quad \{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ *allora H contiene almeno un 3-ciclo*

Dimostrazione
Basta verificare che se $\sigma = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \in H$, allora esiste un e-ciclo in H.
Dato che $H \trianglelefteq A_n$ abbiamo

$$gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in A_n.$$

Definiamo $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_5\}$
$\tau := (a_3 a_4 a_5)\sigma(a_3 a_4 a_5)^{-1} \in H$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} \in H$ *Studiamo* $\sigma\tau^{-1}$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} = \sigma(a_3 a_4 a_5)\sigma^{-1}(a_3 a_4 a_5)^{-1}$
Dove $\sigma(a_3 a_4 a_5) = (\sigma(a_3)\sigma(a_4)\sigma(a_5))$
$\sigma\tau^{-1} = (a_4 a_3 a_5)(a_3 a_5 a_4) = (a_3 a_4 a_5) \in H$ $\square$

Teorema 1
$n \geq 5$ $\{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$
Allora H contiene tutti i 3-cicli

Dimostrazione
Basta verificare che dato
$\sigma = (a_1 a_2 a_3) \in H$
Allora H contiene tutti i 3-cicli

Sfruttiamo $H \trianglelefteq A_n$
$\Rightarrow \tau = (a_3a_4a_5)\sigma(a_3a_4a_5)^{-1}$
$\tau \in H$
dove $a_4, a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3\}$
Studiamo τ :
$\tau = (a_3a_4a_5)(a_1a_2a_3)(a_3a_4a_5)^{-1} = (a_1a_2a_4) \in H$
Abbiamo dimostrato che se $(a_1a_2a_3) \in H$ *allora* $(a_1a_2a_4) \in H \quad \forall a_4 \notin \{a_1, a_2\}$
Dunque mostriamo che il 3*-ciclo arbitrato* $(b1, b_2, b_3) \in H$ *per qualunqe* $b_1, b2, b_3$
$(a_1a_2a_3) \in H$
$\Rightarrow (a_1a_2a_3) \in H$
$\Rightarrow (b_1b_2b_3) \in H$

$\square$

Definizione 1
Un gruppo di dice semplice se gli unici sottogruppi normali sono banali

Corollario 1
$n \geq 5$ A_n *è semplice*

Dimostrazione
Sia $\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n$, *dimostriamo che* $H = A_n$
Per il teorema H *contiene tutti i* 3*-cicli, quindi basta verificare che* A_n *è generato dai* 3*-cicli, Sia* $\sigma \neq Id, \sigma \in A_n \subseteq S_n$
Ricordando che S_n *è generato da trasposizioni*
$\Rightarrow \sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_{2i-1}\tau_{2i} \dots \tau_{2k-1}$
L'idea è verificare che $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$ *si ottiene come prodotto di* 3*-cicli* $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
Caso 1 $\tau_{2i-1} = \tau_{2i}$
$\tau_{2i-1}\tau_{2i} = Id = (123)(132)$
Caso 2 $\tau_{2i-1} = \tau_{2i}$
hanno un indice in comune
Allora:
$\tau_{2i-1} = (ab)$
$\tau_{2i} = (bc)$
$\Rightarrow \tau_{2i-1}\tau_{2i} = (ab)(bc) = (abc)$
Caso 3:
τ_{2i-1}, τ_{2i} *non hanno indici in comune.*
$\Rightarrow \tau_{2i-1} = (ab), \; \tau_{2i} = (cd)$
$\tau_{2i-1}\tau_{2i} = (ab)(cd)$
Ma
$(abc)(bcd) = (ab)(cd)$
Quindi: $\tau_{2i-1}\tau_{2i} = (abc)(bcd)$
Allora σ *è prodotto di* 3*-cicli* $\Rightarrow \sigma \in H \Rightarrow H = A_n$ $\square$

Esercizio
$n \geq 5$ dimostrare che gli unici sottogruppi normali di S_n sono $\{e\}, A_n, S_n\{e\}, A_n, S_n$
Soluzione
Osserviamo che se $H \trianglelefteq S_n$ allora $H \cap A_n \trianglelefteq A_n$ poichè $H \trianglelefteq S_n$ significa
$gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in S_n$
Quindi $\{Id\} \neq H \trianglelefteq S_n$
Studio $H \cap A_n$
1) $H \subseteq A_n$
$\Rightarrow H = H \cap A_n \trianglelefteq A_n$
$\xrightarrow{A_n \text{semplice}} H = \{Id\}$ oppure $H = A_n$
2) $H \not\subseteq A_n$
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$ e $H \cap A_n \trianglelefteq A_n$
A_n semplice$H \cap A_n = \{Id\}$ oppure $H \cap A_n = A_n$
Se $H \cap A_n = \{Id\}$
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow |H| = 2 & \\ & \text{con } ord(\sigma) = 2 \\ \Rightarrow H = \{Id, \sigma\} & \end{array}$$

Se tale H fosse normale allora avremmo
$g^{-1} = \sigma \ \ \forall g \in S_n$
$\Rightarrow$ Assurdo perchè σ è coniugato a tutti gli elementi con la sua stessa struttura ciclica. $\cdot$ Allora $H \cap A_n = A_n$.
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$
$\Rightarrow |H| = n! \Rightarrow H = S$
ricordando che $H \cap A_n = A_n$

2 Classi di coniugio in A$_n$

Obiettivo:
Studiare le azioni

$$\left.\begin{array}{l} S_n \times A_n \to A_n \\ (\tau, \sigma) \to \tau\sigma\tau^{-1} \end{array}\right| \begin{array}{l} A_n \times A_n \to A_n \\ (\tau, \sigma) \to \tau\sigma\tau^{-1} \end{array}$$

Ricordo:
Data $\sigma \in A_n$
$O_\sigma^{S_n} = \{$ permutazioni con la stessa struttura ciclica di $\sigma\}$
Domanda: $O_\sigma^{A_n} = ?$
A priori abbiamo $O_\sigma^{A_n} \subseteq O_\sigma^{S_n}$
Esempio: n = 3
$O_{(123)}^{S_3} = \{(123), (132)\}$
infatti $(23)(123)(23)^{-1} = (132)$
$A_3 = \{Id, (123), (132)\}$
$O_{123}^{A_3} = \{(123)\}$

Ricordo:
Data $\sigma \in A_n$
$\cdot C_{A_n}(\sigma) = \{\tau \in A_n | \tau\sigma\tau^{-1}\} = Stab_\sigma^{A_n}$
$\cdot C_{S_n}(\sigma) = \{\tau \in S_n | \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\} = Stab_\sigma^{S_n}$
Osservazione
$C_A = (\sigma) = C_{S_n}(\sigma) \cap A_n$

Teorema 2
$n \geq 2 \quad \sigma \in A_n$
1) Se $C_{S_n}(\sigma) \nsubseteq A_n$ *allora* $O_\sigma^{A_n} = O_\sigma^{S_n}$
2) $C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$ *allora* $|O_\sigma^A n| = \frac{1}{2}|O_\sigma^{S_n}$

Dimostrazione
Supponiamo che $C_{S_n}(\sigma) \nsubseteq A_n$
Allora $C_{S_n}(\sigma) \leq S_n$
$|C_{S_n}(\sigma) : C_{S_n}(\sigma) \cap A_n] = 2$
notando che $C_{S_n}(\sigma) \cap A_n = C_{A_n}(\sigma)$
$\Rightarrow |C_{A_n}(\sigma)| = \frac{1}{2}|O_{S_n}(\sigma)|$
$\Rightarrow \begin{cases} n! = |S_n| = |C_{S_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{S_n}| \\ \frac{n!}{2} = |A_n| = |C_{A_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{A_n} \end{cases}$
$\Rightarrow |O_\sigma^{S_n}| = |O_\sigma^{A_n}$
$\Rightarrow O_\sigma^{S_n} = O_\sigma^{A_n}$
2) Se $C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$
$\Rightarrow C_{S_n}(\sigma) = C_{A_n}(\sigma)$
$\Rightarrow \begin{cases} n! = |S_n| = |C_{S_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{S_n}| \\ \frac{n!}{2} = |A_n| = |C_{A_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{A_n}| \end{cases}$
$\Rightarrow |O_\sigma^{A_n}| = \frac{1}{2}|O_\sigma^{S_n}|$

$\square$

Esempio:
$\sigma = (123) \quad n = 5$
$\Rightarrow O_{(123)}^{S_n} = O_{(123)}^{A_n}$
perché $(45) \in C_{S_n}(\sigma)$ MA $(45) \notin A_5$
Esercizio
$\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ disgiunti.
σ_i è m_i-ciclio
1) se $\sum_{i=1}^k m_i \leq n - 2$
allora $O_\sigma^{S_n} = O_\sigma^{A_n}$
IDEA:
dall'ipotesi segue che $\exists a, b \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $\sigma(a) = a, \sigma(b) = b$
$\Rightarrow (ab) \in C_{S_n}(\sigma)$ e $sgn(ab) = -1$