

# Lezione 31 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-22

# 1 Due Teoremi Classici

**Teorema 1** (Desargues)

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$  piano proiettivo,  $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}$  punti distinti tali che le tre rette

$$L(P_1, P_4) \quad L(P_2, P_4) \quad L(P_3, P_6).$$

abbiano in comune un punto  $P_0 \neq P_i \quad 1 \leq i \leq 6$  Allora

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6), L(P_2, P_5) \cap L(P_5, P_6), L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5).$$

sono allineati

**Dimostrazione**

**TODO AGGIUNGI DISEGNO**

Siano  $v_i \in V, \quad 1 \leq i \leq 6$ , t.c.  $[v_i] = P_i$  Per ipotesi

$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6.$$

Inoltre poiché  $P_0 \neq P_i, i > 1$ , tutti gli  $\alpha_i$  sono non nulli. I punti

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$$

$$L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$$

$$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5) \text{ sono associati ai vettori}$$

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$$

$$= \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_5 v_4 - \alpha_6 v_6$$

$$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 - \alpha_5 v_5 \text{ la loro somma è zero. Dunque i punti corrispondenti sono allineati}$$

**TODO Non ho capito se sta cosa deve terminare così (rivedere)**  $\square$

**Teorema 2** (Pappo)

$A_1, \dots, A_6$  distinti  $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \dots, L(A_6, A_1)$  distinte

esistono  $r, s$  rette con  $A_i \in r$ ,  $i$  dispari,  $A_i \in s$   $i$  pari

Supponiamo poi  $0 = r \cap s \neq A_i$ . Allora

$$L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5), \quad L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6), \quad L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1).$$

sono allineati

**TODO AGGIUNGI DISEGNO**

**Dimostrazione**

Poiché  $r = L(A_1, A_3)$ ,  $s = L(A_2, A_4)$  sono distanti e  $0 \neq A_i$

$A_1, A_2, A_3, A_4$  è un riferimento proiettivo. Ma

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)b(1-1+a) + ab(1-a) = 0$$

□

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$  spazio proiettivo di dimensione  $n$   $S = \mathbb{P}(U)$ ,  $H = \mathbb{P}(W)$  sottospazi proiettivi tali che

$$S \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad L(S, H) = \mathbb{P}.$$

Se  $\dim S = k, \dim H = h$  per le formule di Grassmann

$$k + h = n - 1.$$

$$\forall P \in \mathbb{P} \setminus H, \quad \dim L(H, \{p\}) = h + 1$$

Quindi  $S \cap L(H, \{0\})$  è un punto

Posso definire la proiezione su  $S$  di centro  $H$  come

$$\pi_S^H : \mathbb{P} \setminus H \rightarrow \mathbb{P}.$$

$$P \rightarrow S \cap L(H, \{0\}).$$

$\pi_S^H$  è una trasformazione proiettiva degenera indotta da  $\mathbb{P}_U^W : V \rightarrow V$  proiezione su  $U$  parallela ad  $H$

**TOOD AGGIUNGI DISEGNO**

## 2 Proiettività

Siano in  $\mathbb{P}^2$   $r, s$  rette distinte con  $A = r \cap s$

### Definizione 1

*Dato  $O \notin r \cup s$ , la restrizione ad  $r$  della proiezione su  $s$  di centro  $O$  è detta **proiettività** di centro  $O$*

### TODO UN ALTRA IMMAGINE

$f$  è un isomorfismo proiettivo. La notazione si generalizza a  $\mathbb{P}^n$  nel modo seguente.

$S_1, S_2$  sottospazi di dimensione  $k$ ,  $H$  sottospazio tale che

$$H \cap S_1 = H \cap S_2 = \emptyset.$$

$$\dim H = n - k - 1.$$

Allora la restrizione a  $S_1$  della proiezione su  $S_2$  di centro  $H$  è un isomorfismo proiettivo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  detto **prospettività** di centro  $H$

**Definizione 2**

Una curva algebrica in  $\mathbb{A}^2(K)$  è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di  $\mathbb{K}[x, y]$ . Se  $f(x, y)$  è un rappresentante della classe, l'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

si dice equazione della curva

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2 \mid f(x, y) = 0 \right\}.$$

è il supporto della curva  
deg  $f$  grado della curva

**Caso affine**

Sia  $T : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  l'affinità  $T(X) = AX + C$

$$A = (a_{ij}) \in GL(2, \mathbb{L}) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sia  $l$  una curva di equazioni  $f(x, y) = 0$  La curva  $D$  di equazione

$$g(x, y) = 0.$$

ove  $g(x, y) = f(a_{11}x_1 + a_{12}y + c_1, a_{21}x + a_{22}y + c_2)$   
è detta la trasformata di  $l$  tramite  $T^{-1}$

$$D = T^{-1}(l).$$

Se  $T^{-1}X = BX + d \quad (B = A^{-1}, \dots)$

allora  $g(b_{11}x + b_{12}y + d_1, b_{21}x + b_{22}y + d_2) = A(x, y)$  quindi  $l = T(D)$

è chiaro che se  $p(x, y) \in D$  allora  $T(p) \in l$  e viceversa.

quindi i supporti si dicono affinamente equivalente

**Definizione 3**

Data  $l$  curva affine, una curva affine  $D$  si dice affinamente equivalente a  $l$  se esiste un'affinità  $T$  tale che  $l = T(D)$