Lezione 18 Algebra I

Federico De Sisti

2024-11-28

1 Altre informazioni sulle SEC

Definizione 1 (spezza)
Una successione esatta corta $H \to G \to K$ *spezza se* $\exists S : K \to G$ *omomorfismo t.c.* $\pi \circ S = Id_K$

Osservzione
Una sezione è iniettiva
Esempio:
H, K gruppi $G := H \rtimes_{\phi} K$
per qualche $\phi : K \to Aut(H) \Rightarrow$
H $\xrightarrow{r} H \rtimes_{\phi} K \xrightarrow{\pi} K$
$h \to (h, e_K)$ è una SEC che spezza
$(h, k) \to k$
$\cdot r$ è iniettiva
$\cdot \pi$ è suriettiva
$\cdot Im(r) = \{(h, e_K) | h \in H\} = ker(\pi)$
$\cdot$ spezza perchè S: $K \to H \rtimes_{\phi} K \quad k \to (e_K, k)$
è una sezione:

$$(\pi \cdot S)(k) = \pi(e_H, k) = k \quad \forall k \in K.$$

Esercizio scheda 9
Data una SEC $H \xrightarrow{r} G \xrightarrow{K}$ con $S : K \to G$ che spezza $\Rightarrow GH \rtimes_{\phi} K$
Soluzione:
Osservo che:
$\cdot r(H) \leq G \rightsquigarrow \cdot r(H) = ker(\pi) G$
$\cdot S(K) \leq G \rightsquigarrow \cdot r(H) \cap S(K) = \{e_G\}$
$\Rightarrow$ Sia $x \in r(H) \cap S(K) \Rightarrow \exists h \in H, \exists k \in K$
$t.c. x = r(h) = S(k)$
Applicando π :
$e_K = \pi(r(h)) = \pi(S(k)) = k \;\Rightarrow\; x = S(k) = S(e_K) = e_G$
$\cdot r(H) \cdot S(K) = G$
$g \in G \rightsquigarrow \pi(g) \in K \rightsquigarrow f = S(\pi(g)) \in S(K) \leq G$
Vorremmo ora scrivere g come un'elemento in $r(H)$ per f
Basta quindi mostrare che $gf^{-1} \in Im(r)$ ma $Im(r) = ker(\pi)$
Applicando π : $\pi(gf^{-1}) = \pi(g)\pi(f^{-1}) = \pi(g)\pi(S(\pi(g^{-1}))) = \pi(g) \cdot (\pi \circ S)(\pi(g^{-1})) = \pi(gg^{-1}) = e_K$
Sapendo che $f^{-1} = (S(\pi(g)))^{-1}$ e che $(\pi \circ S) = Id_K$
Quindi $gf^{-1} \in ker(\pi) = Im(r) \Rightarrow \exists h \in H$ t.c. $gf^{-1} = r(h) \Rightarrow g = r(h)g = r(h)S(\pi(g))$
$\Cap \quad \Cap$
$Im(r)\ Im(S)$
$\cdot$ Deduciamo che $G \cong r(H) \rtimes_{\phi} S(K) \cong H \rtimes_{\phi} K$
poiché r e S iniettive $\Rightarrow H \cong r(H)$ e $K \cong S(K)$

1.1 Quaternioni

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
è uno spazio vettoriale di dimensione 4.
Dalla scheda 9 segue che $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo.

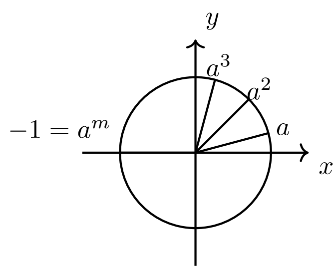
Definizione 2
$n \geq 2 \quad Dic_n := < a, j > \leq \mathbb{H}^* \ \ dove\ a = \cos(\frac{\pi}{n}) + i\sin(\frac{\pi}{n}) \in \mathbb{H}^*$

Osservazione
(a) è un gruppo ciclico di ordine $2n$
Osservazione
$n = 2 \rightsquigarrow a = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i \quad \Rightarrow \quad Dic_2 = < i, j > = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} = Q_8$

1.2 Gruppi diciclici

$Dic_n = < a, j > \leq \mathbb{H}^*$
1) $ord(a) = 2n \quad ord(j) = 4$
2) Mostrare $j^2 a^m = a^m + n = a^m j^2$
Soluzione
$j^2 = -1$ e $a^n = -1$ tutti i membri delle uguaglianze sono quindi $-a^m$
3) Mostrare $j^{\pm 1} a^m = a^{-m} j^{\pm 1}$
Soluzione
$j^-1 = -j$
$ja^m = j(cos(\frac{m\pi}{n}) + i\sin(\frac{m\pi}{n}) = \cos(\frac{m\pi}{n})) = \cos(\frac{-m\pi}{n}) + i\sin(-\frac{m\pi}{n}) = a^{-m}j$
$\Rightarrow ja^m - a^{-m}j \Rightarrow -ja^m = a^{-m}(-j) \Rightarrow j^{-1}a^m = a^{-m}j^{-1}$
6) Mostrare che ogni elemento in Dic_n può scriversi come $a^m j^k$ con $0 \leq m < 2n$
$0 \leq j \leq 1$ segue dalle relazioni precedenti $\Rightarrow Dic_n = \{a^m | 0 \leq m < 2n\} \cup \{a^m_j | 0 \leq m < 2n\}$
$\Rightarrow (6) : |Dic_n| = 4n$
8) Mostrare che esiste una SEC
$C_{2n} \xrightarrow{r} Dic_n \to \pi C_2$
$\rho \to a$
$\cdot r(\rho)L = a \Rightarrow r$ iniettiva
$\cdot \pi : Dic_n \to C_2$
Vorrei verificare proiezione al quoziente.
In effetti $r(C_{2n}) = < a > \trianglelefteq Dic_n$ perchè
$\pi : Dic_{m2} = < \sigma >$
$[Dic_n : < a >] = 2 \qquad a^m \to e \qquad$ 9) Mostrare che non si spezza
$a^m j \to \sigma$
Soluzione
Mi chiedo se esiste una sezione $S : C_2 \to Dic_n$
Se S esiste allora $S(\sigma) = a^m j$ per qualche $0 \leq m < 2n$

$ord(a^m j) = 4 \rightsquigarrow (a^m j)(a^m j) = a^{m-m} j = j^2 = -1$
$\Rightarrow ord(S(\sigma)) \neq ord(\sigma) \Rightarrow$ assurdo
10) Mostrare che esiste unna SEC
$C_n \xrightarrow{r} Dic_n \xrightarrow{\pi} C_4$ ds n dispari:



$C_n =< \rho > \xrightarrow{r} Dic_n$
$\rho \to a^2$

$\pi : Dic_n \to C_4 =< r > \quad \pi(a^m) = \begin{cases} Id & \text{se } m \equiv_2 0 \\ r^2 & \text{se } m \equiv_2 1 \end{cases}$

$\pi(a^m j) = \begin{cases} rm & \text{se } m \equiv_2 0 \\ r^3 m & \text{se } m \equiv_2 1 \end{cases}$

Osservazione

$r^2 = \pi(j^2) = \pi(a^n) = \begin{cases} Id & \text{se } n \text{ pari} \\ r^2 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

2) $n \geq 3$ dispari
Dimosrtare che $Dic_n \cong C_n \rtimes_\phi C_4$ per qualche $\phi : C_4 \to Aut(C_n)$
Soluzione:
Costruiamo $S : C_4 \to Dic_n$
$\cdot$ dobbiamo solo definire $S(r) = j$
$\cdot$ S omomorfismo
$\cdot \pi \circ S(r) = \pi(j) = r$

Definizione 3
Un gruppo G si dice semplice se i suoi unici sottogruppi normali sono $\{e\}$ e G

Esempio:
$\cdot Q_8$ non è semplice
$\cdot A_3 \cong C_3$ è semplice
$\cdot A_4$ non è semplice;
Ricordo:
per A_4 sia ha $n_3 = 4$ e $n_2 = 1 \Rightarrow A_4$ contiene un unico 2-Sylow ("sottogruppo di oridne 4") che quindi è normlae

$$V = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \rightsquigarrow V \trianglelefteq A_4.$$

Proposizione 1
A_n è semplice $\forall n \geq 5$

· Strategia: Vogliamo procedere per passi dimostrando che:
1) $\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n \Rightarrow H$ contiene un 3-ciclo
2) Se H contiene un 3-ciclo $\Rightarrow$ li contiene tutti
3) A_n con $n \geq 5$ è generato dai 3-cicli

Lemma 1
$\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n$ Allora
H contiene almeno un 3-ciclo oppure (almeno un prodtotto di trasposizioni disgiunte)

Dimostrazione
Sia $\sigma \in H, \sigma \neq Id \Rightarrow \sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k$
con σ_i cicli disgiunti.
Caso I: σ_1 è m ciclo con $m \geq 4$ $\sigma_1 = (a_1 a_2 a_3 \ldots)$
$:= (a_1 a_2 a_3)\sigma(a_1 a_2 a_3)^{-1} \in H \Rightarrow \sigma\tau^{-1} \in H$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} = \sigma(a_1 a_2 a_3 a)\sigma^{-1}(a_1 a_2 a_3)^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)\sigma(a_3))$
$= (a_2 a_3 a_4)(a_1 a_3 a_2) = (a_1 a_4 a_2)(a_3) \in H$
Caso II $m = 3$ per casa
Caso I : $m = 2$ per casa □