Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Approccio agli integrali di Lesbegue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

Definizione 1
Sia X un insieme non vuoto e η una σ-algebra in X.
((X, η) spazio misurabile)
Sia X uno spazio topologico,
una funzione $f : X \to Y$ si dice misurabile se $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \quad A$ aperto

Esempi
1) se $\eta = P(X) \;\Rightarrow\;$ ogni funzione $f : X \to Y$ è misurabile
Se $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \to Y$ è η-misurabile $\Leftrightarrow f$ è costante.
2) Se X è spazio topologico e se $\eta \supseteq B(Borel)$
$f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f$ misurabile
3) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$E \subseteq X$
$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0,1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0,1 \notin A \end{cases} \quad \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

Proposizione 1
Se (X, η) spazio misurabile e $f : X \to Y$
$\Rightarrow \{F \subseteq Y \;:\; f^{-1}(F) \in \eta\} = S$ *è una σ-algebra in Y*
di conseguenza se Y è uno spazio topologico e f è η-misurabile
allora $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$

Dimostrazione
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$
$f^{-1}(Y) = X \in\Rightarrow Y \in S$
$F \in S$ *ovvero* $f^{-1}(F) \in \eta$
$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$
Facciamo vedere che S è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.
$\{F_I\} \subset S$ *ovvero* $f^{-1}(F_i) = \eta \;\; \forall_i$
$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$ $\square$

Proposizione 2
Sia (X, η) *uno spazio misurabile* $f : X \to \mathbb{R}$
Allora f *è misurabile se e solo se*
$\{x \in X \ : \ f(x) > t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \geq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) < t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \leq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

Dimostrazione
f *è misurabile* $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \ \ \forall B \subseteq \mathbb{R}$ B *boreliano*
$\Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$

□

Proposizione 3
Sia (X, η) *uno spazio misurabile*

1. *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sono misurabili*
   $\Rightarrow f + g, \lambda f \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ f \cdot g, \frac{f}{g}$ *se* $g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ *sono misurabili*

2. *Se* $\{f_k\}$ *successione di funzioni misurabili*
   $\Rightarrow \sup_k f_k, \ \inf f_k, \ \limsup_{k \to \infty} f_k, \ \liminf_{k \to +\infty} f_k$ *sono misurabili*
   In particolare, se $\exists \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$ *è misurabile*

Dimostrazione
$f, g : X \to \mathbb{R}$ *misurabili*

$$t \in \mathbb{R} \ \ \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s=t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \text{ perché } f, g \text{ misurabili}$$

se x *tale che* $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t = g(x)$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $f(x) > r > t - g(x)$
quindi $g(x) > t - r \to s \in \mathbb{Q}$ *tale che* $g(x) > s > t - r$
$f, g, X \to \mathbb{R}$ *numerabili,* $\lambda \in \mathbb{R}, f$ *misurabile*

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & se\ \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & se\ \lambda < 0 \end{cases}$$

f *misurabile*

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & set < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & se\ t \geq 0 \end{cases} \qquad sef{,}gmisurabili$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$ *sono misurabili*
$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$

f misurabile
$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ *Guarda sta dimsotrzione usl libro o ricopila dalle foto perchè è assolutametne insensato* $\square$

Sia (X, η) spazio misurabile
se η è la σ-algebra di misurabili di misura μ allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a η_μ

Proposizione 4
Sia (X, η, μ) spazio di misura
(μ è una misura su X e η è la σ 0algebra di μ misurabili)
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile
e sia $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f = g$ quasi ovunque (ovvero $m(\{f = g\}) = 0$)
$\Rightarrow$ anche g è μ-misurabile

Dimostrazione
$\forall t \in \mathbb{R}$
$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$
Il primo insieme è contenuto in $\{g \neq f\}$ quindi ha misura nulla
$\Rightarrow \in \eta_\mu$
il secondo insieme è $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$ perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

$\square$

Corollario 1
se $f_k : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili $k > 1$ ed esiste $\lim_{k\to\infty} f(x)$ per quasi ogni $x \in X$
$\Rightarrow$ la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

Dimostrazione
$X_1 = \{x \in X \mid \exists \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\} = \{x \in X \mid \limsup_{k\to+\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)$
è misurabile
$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & se\ x \in X_1 \\ 0 & se\ x \notin X_1 \end{cases} .$$

è misurabile $\forall k$ perché $\tilde{f}_j = f_j$ quasi ovunque
$\exists \lim_{k\to+\infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$
quindi è misurabile $\square$

0.2 Funzione di Lesbegue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0,1] \to [0,1].$$

$\forall n \;\; [0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$
gli J sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, le I sono di ampiezza $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases} .$$