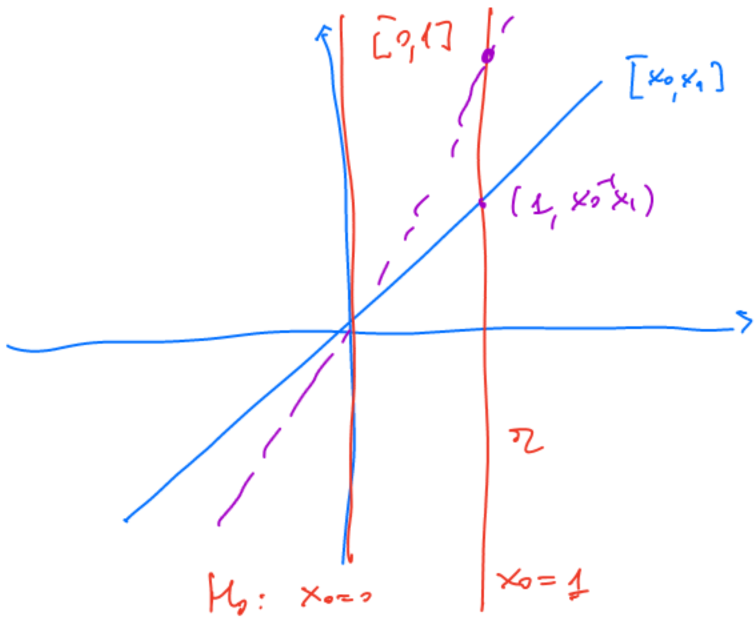
Lezione 27 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-13

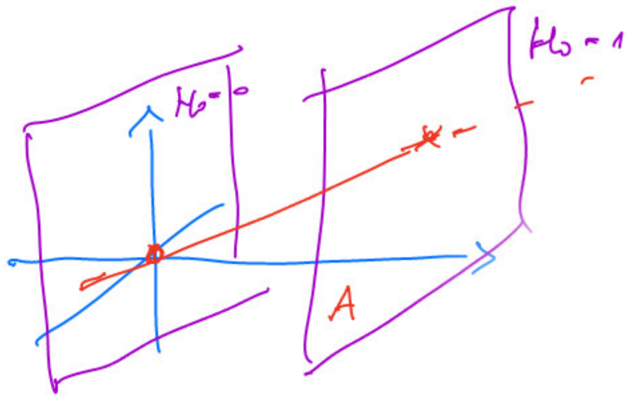
1 Significato geometrico geometria proiettiva



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = rette passanti per O $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $(\lambda x_0, \lambda x_1) \in \mathbb{A}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Osserviamo che ogni punto $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{H_0\}$ individua una retata parallela ad r (in $\mathbb{A}^2$), che interseca r nell'unico punti $(1, x_0^{-1}x_1)$
(Infatti dobbiamo imporre che $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ abbia prima coordinata 1, cioè $\lambda x_0 = 1$ cioè $\lambda = x_0^{-1}$
Viceversa ogni punto $(1.x) \in r$ appartiene ad un'unica retta per l'origine, quella che corrisponde al punti $[1, x] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$
In definitiva, abbiamo una corrispondenza biunivoca
$\mathbb{P}^1 \setminus H_0 \leftrightarrow r$

$\mathbb{P}^1 \leftrightarrow r \cup \{\infty\}$

$H_0 \leftarrow \infty$ punto all'infinito di r
La costruzione si generalizza a $\mathbb{P}^n \leftrightarrow$ rette per l'origine di $\mathbb{A}^{n+1}$
$[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \leftrightarrow$ rette $\{_0, \dots, \lambda x_{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ $\quad H_0 = \{x_0 = 0\}$
Consideriamo l'iperpiano affine $A : \{x_0 = 1\} = \{(1, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\}$



$j : A \to \mathbb{P}^n \setminus \{H_0\}$
$(1, y_1, \dots, y_n) \to [1, y_1, \dots, y_n]$
$y^{-}1([x_0, \dots, x_n] = \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$

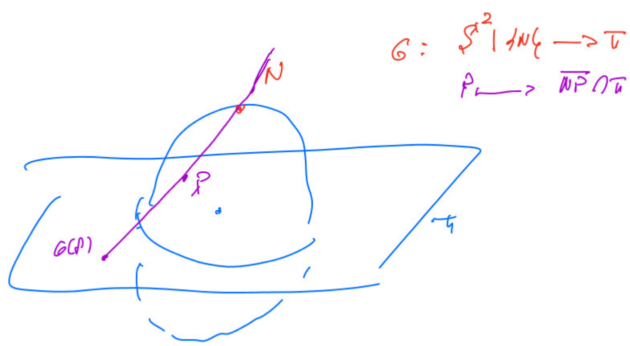
Quindi come sopra, ho una corrispondenza biunivoca

$$A \cup \{H_0\} \to \mathbb{P}^n.$$

Se nella costruzione precedente identificavamo A con $\mathbb{A}^n$ tramite $(1, y_1, \dots, y_n) \to (y_1, \dots, y_n)$ otteniamo
$j_0 : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n\{H_0\}$
$j_0(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n]$ passaggio a coordinate omogenee rispetto a x_0
$j_0^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ passaggio a coordinate non omogenee rispetto ad x_0
ci sono analoghe mappe per ogni $i \quad 0 \le i \le n$

Modello di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
E^3 spazio euclideo con coordinate x, y, z
$\pi = \{z = 0\} \quad S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 | d(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = 1\}$
$N = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

2 Proiezione stereografica



Se $P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NP} \quad \begin{cases} x = x't \\ t = y't \\ z = (z-1)t + 1 \end{cases}$

$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{1-z'} \\ \frac{y'}{1-z'} \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio

σ è invertibile con inversa

$\sigma^{-1}1 \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix} \mathrm{S}^2 \leftrightarrow \pi \cup \{\infty\}$

identifichiamo π con $\mathbb{C}$ tramite

$\pi \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} u & v & 0 \end{pmatrix} \rightarrow u + iv$

Allora abbiamo ottenuto una corrispondenza biunivoca

$$\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

$$\sigma(N) = \infty.$$

$$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{x' + iy'}{1 - z'} \quad (z \neq 1).$$

2.1 Alcuni degli esercizi svolti a lezione

Esercizio

Determinare un'equazione cartesiana del piano da $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[1, 1, 0, 1]$

e per i punti impropri delle rette

$$r = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} .$$

$$s = \begin{cases} 2x-y-2x+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} .$$

Il punto improprio di r è $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_0=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_{2x_3}=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow [0,0,-1,-1]$

Per quanto riguarda s

$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+x_0=0 \\ x_2+x_3-x_0=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

$\Rightarrow [0,1,-2,2]$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

2.2 Dualità

$\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^\star)$ $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}^V$ poichè $\dim V = \dim V^\star$
Osserviamo che $F, F' \in V^\star$ definiscono lo stesso punto in $\mathbb{P}^V$ se e solo se
$F' = \lambda F \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Ma in questo caso $\ker F = \ker F'$
Ne segue che l'iperpiano $\ker F$ dipende solo da $[F]$ Quindi si ha un'applicazione di dualità

$$\delta : \mathbb{P}^V \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}\}.$$

$$\delta([F]) = \mathbb{P}(\ker F).$$

δ è biunivoca
è iniettiva perché due funzionali non nulli che hanno lo stesso nucleo sono proporzionali.
Inoltre l'iperpiano di V è il nucleo di un funzionale, quindi δ è suriettiva

---

Diciamo che gli iperpiani $H_1, \dots, H_s$ in $\mathbb{P}$ sono linearmenete indipendenti se lo sono $\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_s)$

Sia $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$ la corrispondente base duale di $V^\star : \eta_i(e_i) = \delta_{e_i}$

$$H \subseteq \mathbb{P}^n \quad a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

$$H = \mathbb{P}(\ker F) \quad F \in V^\star \text{ definita :}$$

$$F(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i.$$

Dove le a_i sono le coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$
In particolare $H = \delta([F]) \quad H = H[a_0, \dots, a_n]$
$\mathrm{H}_0 = H_0[1, \underline{0}, \dots, \underline{0}] = \delta([\eta_0]$
$\vdots$
$H_n = H_n[0, \dots, 0, 1] = \delta([\eta_n])$

Definizione 1
$S \subset \mathbb{P}$ sottospazio, $\dim S = k \leq n-1$

$$\bigwedge_1(S) = \{ \textit{ iperpiani di } \mathbb{P} \textit{ che contengono } S\}.$$

dove $\bigwedge_1(S)$ è il sistema lineare di iperpiani di centro S

Esempi
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^2$ che contengono $Q\}$ = fascio di rette di centro Q
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{r\}$

$\bigwedge_1(r) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono $r\}$ = fascio di rette di centro r
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono $Q\}$ = stella di rette di centro Q