

Lezione 3 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Nella lezione precedente...

Abbiamo introdotto i sottospazi affini di (A, V) come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

2 Nuova lezione

Osservazione

Se $\Sigma_1 = p_1 + W_1$, $\Sigma_2 = p_2 + W_2$ sono sottospazi affini, la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_1 \cap W_2.$$

Lemma 1

$$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$$

$$H_p = \{\overrightarrow{px} \mid x \in S\} \quad H_q = \{\overrightarrow{qy} \mid y \in S\}$$

$$\text{Allora } \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle \text{ e } p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle$$

(sottospazio generato da S)

Dimostrazione

$$v_0 = \overrightarrow{pq} \quad v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$$

$$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in \langle H_q \rangle$$

$$H_p \subseteq \langle H_q \rangle \Rightarrow \langle H_p \rangle \subseteq \langle H_q \rangle$$

$$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in \langle H_p \rangle \Rightarrow \langle H_q \rangle \subseteq \langle H_p \rangle$$

$$\text{Quindi } \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$\overrightarrow{pq} \in \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle$$

□

Nomenclatura 1

Σ_1, Σ_2 sottospazi affini

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \text{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Lemma 2

Siano $\Sigma_i = p_i + W_i$, $i = 1, 2$ sottospazi affini. Allora

- (a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2$
 (b) $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle)$

Dimostrazione

(a) $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ allora $\Sigma_1 = p_0 + W_1$ $\Sigma_2 = p_0 + W_2$

$\exists w_i \in W_i$, $i = 1, 2$ t.c

$p_1 = p_0 + W_1, p_2 = p_0 + W_2$

$\overrightarrow{p_1 p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$

Viceversa, se $\overrightarrow{p_1 p_2} = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$

$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1 p_2} = p_1 + w_1 + w_2$ (2) Dato $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, risulta

$p_2 - w_2 = p_1 + w_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$\overrightarrow{p_1 x} \in W_1$ se $x \in \Sigma_1$

oppure

$$\overrightarrow{p_1 x} \in \overrightarrow{p_1 p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1 x} = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 x}).$$

Dunque la giacitura di $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ è

$$W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle.$$

□

3 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

Definizione 1

Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di (A, V) di giacitura rispettivamente W_1, W_2

Diciamo che

- 1) Σ_1, Σ_2 sono **incidenti**, se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
- 2) Σ_1, Σ_2 sono **paralleli** se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$
- 3) Σ_1, Σ_2 sono **sghembi** se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Osservazione

Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

4 Esercizi Elementari

Esercizio 1

Dire se $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Svolgimento**
Scriviamo l'equazione parametrica della retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \end{cases}.$$

alternativamente avrei potuto cercare le coordinate cartesiane

Esercizio 2

Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + s \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Esercizio 3

Scrivere equazioni per il piano identificato dalla retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e dal punto } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

modo 1, scelgo due punti distinti sulla retta e riduco al punto precedente

$$\text{modo 2, sia } q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

considero il piano $P = q + tv + s\overrightarrow{Oq}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x_1 - 1) - (x_3 - 3) = 0$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

Fascio di piani di asse una retta r è l'insieme dei piani che contengono r

$$r = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \end{cases}.$$

Equazione del fascio

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ogni piano del fascio si ottiene con una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Coppie proporzionali per un fattore non nulla individuano lo stesso piano