Lezione 13 Algebra I

Federico De Sisti

2024-11-12

1 Azione di coniugio

Definizione 1
Se G gruppo e $a, b, g \in G$ tali che:

$$a = gbg^{-1}.$$

diremo che a, b sono coniugati

Definizione 2
G gruppo. Allora G agisce su se stesso tramite l'azione di coniugio
$G \times G \to G$

$g.f = gfg^{-1}$

Esercizio
Verificare che è un'azione

Teorema 1
G gruppo
1) *elementi coniugati hanno lo stesso ordine*
2) $|O_a| = [G : C(a)]$ *dove*
$C(a) := \{g \in G | ga = ag\} \leq G$ *(centralizzatore di a)* 3) *equazione delle classi*
$|G| = |Z(G)| = \sum_{O_a \nsubseteq Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$

Dimostrazione
1) Siano $a, b, g \in G$ tali che $a = gbg^{-1}$ supponiamo che $b^k = e \quad k \in \mathbb{Z}$
Allora $a^k = (gbg^{-1}) \cdot \ldots \cdot (gbg^{-1}) = gb^k g^{-1} = e$
Quindi $ord(a) \leq ord(b)$.
Per simmetria $b = g^{-1}ag \Rightarrow ord(b) \leq ord(a)$
Allora $ord(a) = ord(b)$
2)Osserviamo che
$C(a) = g \in G | ga = ag\}$
$\quad = \{g \in G | gag^{-1} = a\}$ *Ricordiamo che :*
$\quad = Stab_a$
$|O_a| \cdot |Stab_a| = |G|$
$\Rightarrow |O_a| = \frac{|G|}{|Stab_a|} = [G : C(a)]$
3) se $a \in Z(G)$ allora $O_a = \{a\}$ poiché
$\forall g \in G$ si ha $ga = gag^{-1} = agg^{-1} = a$
Ricordiamo che G ammette una partizione in G-orbite

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{O_a \nsubseteq Z(G)} |O_a|.$$

Dal punto (2) $\Rightarrow |O_a| = \frac{|G|}{|C(a)|}$

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{O_a \not\subseteq Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}.$$

Esempio *(dalla nuova scheda)*
$n \geq 3$ *intero dispari* $G = D_n$
$Z(D_n) = \{Id\}$ *infatti* $\rho^i\sigma = \sigma\rho^{n-i}$
Quindi
$1) O_\sigma = \{Id\}$
$2) O_{\rho^i} =?$
Idea $|O_{\rho^i}| = [D_n : C(\rho^i)]$
$C(\rho') = \{\rho^i | i = 0, \ldots, n-1\}$
$\Rightarrow |C(\rho^i)| \geq n$
Dato che $C(\rho^i) \leq D_n$ *allora* $|C(\rho^i)| = n$ *oppure* $|C(\rho^i) = 2n$
Ma $\sigma\rho^i = \rho^{n-i}\sigma \neq \rho^i\sigma \quad \forall 0 < i < n$
$\Rightarrow |O(\rho^i)| = n$
Quindi
$O_{\rho^i} = [D_n : C(\rho^i)] = \frac{2n}{n} = 2$
Basta ora trovate un altro elemento coniugato a $\rho^i \quad (0 < i < n)$

$$\sigma\rho^i\sigma^{-1} = \rho^{n-i}\sigma\sigma^{-1} = \rho^{n-i}.$$

quindi $O_{\rho^i} = \{\rho^i, \rho^{n-i}\} \quad \forall 0 < i < n$
$3) O_\sigma = \{\sigma, ?\}$
Studiamo $C(\sigma)$
σ *non commuta con* $\rho^i \quad \forall 0 < i < n$
Se σ *commuta con* $\sigma\rho^i \quad con 0 < i < n$
Allora σ *commuta anche con il prodotto* $\sigma(\sigma\rho^i) = \rho^i$ *assurdo*
$C(\sigma) = \{Id, \sigma\}$
Quindi $|O|_\sigma| = [D_n : C(\sigma)] = \frac{2n}{2} = n$
$\Rightarrow O_\sigma = \{\sigma\rho^i | 0 \leq i < n\}$
Equazione delle classi.
$|D_n| = |Z(D_n)| + \sum_{O_a \not\subseteq Z(D_n)} |O_a|$

$$2n = 1 + 2 + \ldots + 2 + n.$$

$\square$

Teorema 2
G gruppo tale che $|G| = p^k \quad p$ *primo* $k > 0$.
Allora:
1) $Z(G) \neq \{e\}$
2) $[G : Z(G)] \neq p$

Dimostrazione
1) ***IDEA*** *equazioni delle classi*

$$|G| - |Z(G)| = \sum_{O_a \not\subseteq Z(G)} \frac{|G|}{C(a)}.$$

modulo (p) avremmo

$$|Z(G)| \equiv_p 0.$$

$|Z(G)| \neq 1 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$
Attenzione, $\frac{|G|}{C(a)} = 1 \Rightarrow C(a) = G \Rightarrow a \in Z(G) \Rightarrow O_a = \{a\} \subseteq Z(G)$
Supponiamo per assurdo che
$[G : Z(G)] = p$
$\Rightarrow \frac{|G|}{|Z(G)|} = p \Rightarrow |Z(G)| = p^{k-1}$
Consideriamo $g \setminus Z(G)$
$\Rightarrow C(g) \supseteq Z(G) \cup \{g\}$
$\Rightarrow\Rightarrow |C(g) = p^{k-1} + 1$
$\Rightarrow |C(g)| = p^k \Rightarrow C(g) = G$
$\Rightarrow g \in Z(G)$ *assurdo* □

Corollario 1 (Classificazione dei gruppi di oridine p^2)
G gruppo tale che $|G| = p^2$ *con p primo.*
Allora $G \cong C_{p^2}$ *oppure* $G \cong C_p \times C_p$

Dimostrazione
IDEA CHIAVE *Se* $|G| = p^2$ *allora G è abeliano.*
Infatti dal teorema:
$\cdot\ Z(G) \neq \{e\}$
$\cdot |Z(G)| \neq p$ *perché avremmo* $[G : Z(G)] = p$
allora per Lagrnage
$|Z(G)| = p^2 \Rightarrow Z(G) = G \Rightarrow G$ *abeliano*
Ora se $\exists g \in G$ *tale che* $ord(g) = p^2$ *allora* $G \sim G_{p^2}$
Se invece non esistono elementi di ordine p^2 *allora tutti gli elementi* ($\neq e$) *in G hanno ordine p*
Sia $h \in G$ *tale che* $h \neq e \Rightarrow H :=< h >$ *con* $|H| = p$
Sia $k \in G \setminus H$
$\Rightarrow K :=< k > \quad con |K| = p$
Verifichiamo che G è prodotto diretto interno di H e K
$\cdot H \trianglelefteq G$ *e* $K \trianglelefteq G$ *(poiché G abeliano)*
$H \cap K = \{e\}$ *Infatti:*

$$\begin{cases} H \cap KK \\ H \cap K \neq K \end{cases} \Rightarrow |H \cap K| = 1.$$

$HK = ?$
$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{p^2}{1} = p^2$
$\Rightarrow HK = G$
Allora $G \cong H \times K \cong C_p \times C_p$

$\square$

Osservazione (per $p = 2$)
$G = C_4$ oppure $G \cong K_4 \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$
Osservazione
$p = 3$ $|G| = 0$ allora
$G \cong C_9$ oppure $G \cong C_3 \times C_3$
Esempio(Classi di coniugio in S_n)
Due permutazioni in S_n sono coniugate se e solo se hanno stessa struttura ciclica
Dimostrazione
1) $\tau = (a_1, \ldots, a_n) \in S_n$ *un k-ciclo* $\sigma \in S_n$
Studio ora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ *e la sua azione sull'insieme* $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$
Se $\tau(j) = j$
$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(j)) = \sigma\tau(j) = \sigma(j)$
Se $j = a_i$ *per qualche* $1 \leq i \leq k \Rightarrow \tau(j) = \tau(a_i) = a_{i+1 \ mod(k)}$
$\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(a_i)) = \sigma\tau(a_i) = \sigma(a_{i+1 \ mod(k)})$
Allora
$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$
2) *Se* $\tau = \tau_1 \cdot \ldots_h$ *con* τ_i k_i*-ciclo*
Allora
$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_h\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1}) \ldots (\sigma_h\sigma^{-1})$ $\square$