Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello
3 esoneri
Con le prove di esonero possiamo essere esonerati dall'orale.
Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.
L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.
La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale
Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistemazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).
Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiattata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).
Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.
Parliamo ora di modelli "ondulosi"
Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori
$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$(x, t) \to u(x, t)$

Equazione della corda vibrante: $\begin{cases} \partial^2 u \frac{}{\partial t^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0} \\ \mathrm{u(0,t)} = \mathrm{u}(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \mathrm{u(x,0)} = \mathrm{h}_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t} = h_1(x) \ \ \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:
$u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$ variabili separate
- sovrapposizione:
u_1, u_2 soluzioni $\Rightarrow \quad u_1 + u_2$ soluzione

1.5 Onde stazionarie

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \text{costante } = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$

Spiegazione:
$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$
$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}$
$\phi(x) = A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}$

$u(x,t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \cos(mt))(\cancel{A_m \cos(mt)} + B_m \sin(mt))$
$\Rightarrow u(0,t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$
$(u(\pi,t) = 0 = \psi_m(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow u(x,t) = (a_m(\cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$ Tutti gli m interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx).$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx).$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$
Condizioni Iniziali:
$u(x,0) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x,\pi)$
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(\alpha,0) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$

Come trovare α_m, β_m
$\rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq b \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$
$\rightsquigarrow \displaystyle\int_0^{m} h_0(x)\sin(mx)dx = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\alpha_m$ (coefficienti di Fourier)

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:
La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.
Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

ma $D(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, f_n Rimeann integrabile.
Numeriamo $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n\in N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{altriment} \end{cases} .$$

Inoltre:
$D(x) = \lim_{k\to+\infty} \left(\lim_{j\to+\infty} cos(k!\pi x)^{2j}\right)$ Esercizio "facile"
Esercizio difficile:
non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro
Esempio:
$C([0,1]) \ni f, g$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$
$$||f-g||_1 = \ldots.$$

$(C([0,1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)
$||f_m - f_n||_1 \to 0$ se $n, m \to +\infty$
$f_n \to f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Teorema 1
Il completamenteo di $(C[0,1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili ***secondo Lebesgue***

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in $\mathbb{R}^n$)
Stabilire la misura è come definire un integrale.
$|E| = \int X_E$
Prerequisiti:

1. $|[a,b]| = b - a$
   $|[a,b] \times [c,d]| = (d-c) \cdot (b-a)$
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

3. $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E+\tau| = |E|$

3' $\forall E \ \ \forall\, \sigma$ isometria $|E| = |\sigma(E)|$

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski)
in $\mathbb{R}^3$ non esiste nessunna funzione che soddisfa 1,2 e 3.

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \ldots \cup A_5.$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
Troviamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ t.c.
$\sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)
Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

Assioma 1 (della scelta)
Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possbile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_x

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

0.2 Misure

X insieme non vuoto
2^X = insieme delle parti di $X = \{$ sottoinsiemi $E \subseteq X\}$
$\phi, X \in 2^X = \{\chi : X \to \{0,1\}\}$
$\chi \leftrightarrow E = \{\chi = 1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Definizione 1
Sia X non vuoto. Una misura è una funzione $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ *che soddisfa le due proprietà:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi* $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$
   $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

Commenti:
1) numerabile $\Leftrightarrow$ al più numerabile
$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ possono essere finite: $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
2) Proprietà di monotonia: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
Segue da (ii) prendendo $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \ldots$
3) Gli insiemi $\{E_i\}$ non sono necessariamente disgiunti
4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:
$E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Può accadere che $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

---

Esempi di misure:

- La misura che conta: X
  $\mathbb{H}^0 : 2^X \to [0, +\infty]$
  $$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha n elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:
  $X,\ x_0 \in X$
  $\delta_{x_0} : 2^X \to [0, +\infty]$
  $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$

Verifica
δ_{X_0} è una misura
Osservazione
Se X è infinito allora $H^0(X) = +\infty$
Viceversa δ da finire

0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$ misura su X
Osservazione
Possono esistere E, F t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

Definizione 2 (Caratheodory)
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

Commenti:
1) $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

$$E \text{ è misurabile}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

Teorema 1
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura.

1. *la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra:*
   1) $\emptyset, X \in M$
   2) $E \in M \Rightarrow E^c \in M$
   3) $\{E_{i}{}_i i \in \mathbb{N}^+ \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$
2. *μ è numerabilmente additiva su M: se $\{E_i\}_{i\in N^+}$ sono disgiunti a coppie ($E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) allora*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Commenti
1) M è chiuso anche per intersezioni numerabili: $E_i \in M$

$$\left(\bigcap_i E_i\right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

2) $\lim sup_{i\to\infty} E_i := \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq N} E_i$
$\lim inf_{i\to\infty} E_i := \bigcup_N \in \mathbb{N} \bigcap_{i\geq N} E_i$
Dimostrazione
Passo 1: M è un algebra
$\cdot \emptyset \in M, X \in M$
Vado a verificare che $\forall A \subseteq X$ vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che $(\emptyset) = 0$
Per X :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$
Vado a verificare che per ogni $A \subseteq X$ vale le proprietà di Caratheodory: $\mu(A) = \mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$
$\cdot$ $E_2, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$ *Considero un insieme test* $A \subseteq X$:
$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$

$$1) \quad \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

Passo 2: finita additività di μ in M
$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

Ottenuto sempre per Caratheodory

$$\mu(A \cap E_1) + \cap(A \cap E_2).$$

Iterando questo passaggio:
$E_1, \ldots, E_n \in M$ *allora:*

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Spiegazione passaggio precedente

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^{N} E_i) = \ldots = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Passo 3: mostriamo le proprietà di σ-algebra e numerabile additività
Siano $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$
Consideriamo gli insiemi:
$F_1 := E_1, \qquad F_2 = E_2 \setminus E_1$
$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$
quindi definiamo ricorsivamente: $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1}$
Allora F_i sono disgiunti a coppie

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i =_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$\cdot F_i \in M$
Fissiamo il test di Caratheodory $A \subseteq X$, $F_i \in M$, Passo 1: M algebra

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i).$$

Usando il passo 2: finita additività

$$= \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i).$$

Passiamo al limite $N \to \infty$

$$\mu(A) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup F_i)$$

$$\geq \mu(A \cap \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$$
$$= \mu(A \cap \textstyle\bigcup^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} E_i)$$
$$\Rightarrow \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

Se prendiamo come test $A =_{i=1}^{\infty} F_i$*, allora* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$
$\Rightarrow \mu(\bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$ — F_i *sono disgiunti a coppie* $\square$

Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebegque

1.1 Porprietà dellle afunzioen lunghezza di intervalli

I intervallo in $\mathbb{R}$

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ supI - infI \quad (b-a) & \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$\emptyset = (a,a)\ \forall a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$— $\{x\} = [x,x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà:

1. $|\emptyset| = 0$
2. monotonia
   $I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$
3. finita additività
   $$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad I_i \text{ interevallo}$$
   $I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$$

Nota

se I illimitato

$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n$ tale che I_i illimitato

$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_k|$

Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \ldots, n$

$|I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$

4. I intervallo
   $$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$$
   $$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1)| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Nota

Se I illimitato

$\Rightarrow I \cap [n, n+1] = [n, n+1)$ per infiniti indici $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum^{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$ per infiniti n

Se I limitato

$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^{k} I \cap [n, n+1]$ per $l, k \in \mathbb{Z}$

5. Numerabile subadditività
   Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$
$\Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione 5.
Si può assumere I_i limitato $\forall i$
1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$
$I = [a,b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$
I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto
$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.
si può supporre che $a_1 < a < b_1$ se $b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Reiterando trovo l'aperto contenente a_1, se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.
abbiamo quindi rinumerato $I_1, \ldots, I_n$ in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$
$\sum_{i=1}^{n} |I| = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i = b_1 - a_1 + \ldots + b_n - a_n$
notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati
$\forall \varepsilon > 0 \exists I^\varepsilon$ chiuso, $I^\varepsilon \subset I$ tale che $|I^\varepsilon| = (1-\varepsilon)|I|$
$\forall i \;\; \exists I_i^\varepsilon$ aperto tale che $I_i \subset I_i^\varepsilon$ e $|\sum_i^\varepsilon| = (1-\varepsilon)|I_i|$
$I^\varepsilon \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i^\varepsilon$
$I_i = \frac{1}{1-\varepsilon}|I^\varepsilon| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I^\varepsilon| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$
$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1))$
Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati
per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività
   $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione
$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ *vero per la 5)*
Ci basta dimostrare l'altro verso della disuguaglianza
se I *limitato, (con estremi* $a < b$*)*
$\forall k \geq 1$ *consideriamo* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *sono contenuti in* I *e disgiunti*
questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k$
$\sum_{i=1}^{k} \leq b - a$
$\sum_{i=1}^{k} |I_i| = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$
$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$
per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^{k} |I_i| \;\; \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I *illimitato*
$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \cap I_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
$I \cap [n, n+1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1)$
$\Rightarrow |I \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$
$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

$\square$

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$
   $I + x$ traslato di I
   $|I + x| = |I|$
   (invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$
Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \;:\; E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli}\}.$$

$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$

Osservazione
Se $D \subset$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili
2) Per definire m si usano ricoprimenti numerabili ma anche i ricoprimenti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimenti finiti o ricoprimenti numerabili
$E \subseteq \mathbb{R}$
$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervalli}\}$
La disuguaglianza può essere stretta
Esempio
$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$
Sia $\{I_1, \ldots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli
$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |I_i| \geq 1$
Infatti
$R = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow [0, 1] \subseteq_{i=1}^{n} I_i$
$\Rightarrow [0, 1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$
$\leq (\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i) \leq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0, 1]| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overline{I}_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
$\Rightarrow \inf\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervallo } \} \geq 1 \text{ ma } E \subseteq [0, 1]$
$\Rightarrow \inf\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervallo } \} \leq 1$
Se avessi ricoprimenti finiti $\mathbb{Q}$ avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimenti infiniti.

Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Misura di Lesbegue

Reminderi (misura di Lesbegue)

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \ : \ |I_i| \text{ intervalli} \quad E \subseteq \bigcup_{i-1}^{\infty} I_i.$$

Proposizione 1
1) $m(\emptyset) = 0$
2) $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
3) subadditività numerabile, $\{E_i\}$ *successione di insiemi*

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $\forall I$ *intervallo* $m(I) = |I|$
5) $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E+x) = m(E)$

Dimostrazione
1) $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ *dato che l'insieme vuoto è un intervallo*
2) $\forall \{I_i\}$ *intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$ *è un ricoprimento anche di* $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ *prendendo l'inf rispetto a* $\{I_i\} \quad m(E) \leq m(F)$
3) Se $\exists i$ *tale che* $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$ *tesi ovvia*
possiamo supporre $m(E_i) < +\infty \quad \forall i > 1$
Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \{I_k^i\}_k$ *intervalli tali che* $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ *e*

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$ *successione di intervalli*
$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$
quindi

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per $\varepsilon \to 0$

$$m(\bigcup_{i-1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $E = I$ $m(E) \leq |I|$ scegliendo I stesso come sottoricoprimento
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ per la numerabile additività di } |\ \ |.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5) $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i = x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$
sappiamo che $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$

$\square$

Osservazione
È vero che se $\{E_i\}$ successione di insiemi disgiunti $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.
Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n).$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \Rightarrow$ sarebbe vera anche la finita additività.
Infatti

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \quad \text{sempre vero per subadditività.}$$

Se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\forall k \geq 1$ $\ m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)$

$\Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \geq m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i) \ \Rightarrow m(\bigcup_{i=2}^{\infty}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di E_1 che di E_2 quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_{i \quad I \cap E_2} |I_i| + \sum_{i \quad I_\cap E_2} |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se $I_1, \ldots, I_n$ intervalli, $I_i \cap I_j = \emptyset$ per $i \neq j$
$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
Si può supporre gli I_i limitati (sennò misura è infinita)
$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{n-1}^{i=1} J_i$

$$m(I) = |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |J_i| \geq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) + m(\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i)$$

$$\leq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i) = m(I).$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |I_i| = m(\bigcup_{i-1}^{n} I_i).$$

se I_i intervalli con $I_i \cap I_j = \emptyset \quad i \neq j$

Definizione 1
Se X un insieme non vuoto, Una misura su X è una funzione

$$\mu : P(x) \to [0, +\infty].$$

tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *(monotonia)* $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
3. *(subadditività)* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

2.+3. $\Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (E_i)$

Esempi di misura
1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty).$$

$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$ difatti:

- $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$
- se $E \subseteq F$ se $x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$

se $x_0 \in E \rightarrow x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \ \exists i, \ \ t.c. \ \ x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_1^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$

2) misura "che conta"

$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E \text{ se } E \text{ è finito} \\ +\infty \qquad\qquad \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} .$$

Esempio di insieme di misura di Lesbegue nulla

Non misurabile, insieme di Cantor

Al passo $n = 1, I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \ C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi J e rimuovendo gli intervalli centrali.

C_n è un insieme di 2^n intervalli chiusi, disgiunti, ogniuno di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

C_n è alternato da C_{n-1} eimuovendo 2^{n-1} intervalil aperti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definita da $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$

$$m(C) \leq m(C_n) = m(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n.$$

$\forall x \in [0, 1]$

si scrive nella forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \ \ x_i \in \{0, 1, 2\}$

$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \ldots + \frac{x_i}{3^i} + \ldots$

Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Qui manca la parte precedente della lezione

$f s.c.i \Leftrightarrow f^{-1}(a,+\infty))$ aperto $\forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione
$(\Rightarrow)\ f(x) \leq \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$
$c- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \lim_{x->x_0} \inf(fx) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \inf(fx) > a\ per$
$\delta\ sufficientemente\ piccolo$
$\Rightarrow f(x) > a\ per\ |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$
$\Rightarrow \{f > a\}\ aperto$

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R}\ \ \forall a < f(x_0)\ \ x_0 \in \{f > a\}$
$\Rightarrow \exists\delta > 0\ t.c.\ f(x) > a\ \ \forall\ \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\Rightarrow \liminf_{x\to x_0|} \geq \inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x)>a$
$\Rightarrow \liminf_{x\to x_0} \geq a\ \ \forall a < f(x_0)$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$
$\Rightarrow f\quad s.c.i$

$\square$

Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Insieme di Vitali

Controesempio all'additività di m
Insieme di Vitali
In $\mathbb{R}$ consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia $[x]$ la classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

V insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in $[0,1]$ da ogni classe d'equivalenza. $V \subseteq [0,1],\; x \in V$
$\forall x \in [0,1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V$ tale che $x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q$ dove $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$
$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$
Quindi abbiamo dimostrato

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + q \subseteq [-1,2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti
siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$
se $V + q_1 \cap V + q_2 \neq$
$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che $x_1 \sim x_2$ che è assurdo dato che in V prendiamo solo un rappresentate per ogni classe di equivalenza.
Ciò vuol dire che $\cup_{i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}$ è unione numerabile di insiemi disgiunti
Vediamo la misura di questo insieme
$m([0,1]) = 1 \leq mi \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + 1 \right)$ per monotonia
Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$= \sum_{q \in Q \cap [-1,1]} m(V + q).$$

$$= \sum m(V) \leq m([-1,2]) = 3.$$

$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V) \leq 3$
Però le due disuguaglianze indicano che $m(V) > 0$ e $m(V) = 0$ (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

Definizione 1 (Caratheodory)
X insieme non vuoto μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice μ-misurabile se $\forall F \subseteq X$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero E spezza additivamente ogni altro insieme

Osservazione

1. $E \subseteq X$ è μ misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \cap(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$
   perché $\geq$ è sempre vero per la subadditività
   Quindi si può anche supporre $\mu(F) < +\infty$

2. La definizione di misurabilità è simmetrica per E e $E^c = X \setminus E$, E misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$
   che è la misura che dovrei testare per E^c
   Quindi E è μ-misurabile $\Leftrightarrow$ E^c è μ-misurabile

3. Se $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$ è μ-misurabile.
   $\forall F \subseteq X$
   $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \cancel{\mu(E)} + \mu(F) \Rightarrow E$ è μ-misurabile.

Indicheremo con η_μ la classe dei sottoinsiemi μ-misurabili
$\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \ \ \mu\text{-misurabile } \} = \{\emptyset, X, \ldots\}$

Teorema 1
Sia μ una misura su X, η_μ la classe degli insiemi μ-misurabili, Allora:

1. *se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ *tale che* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E)i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
   tale che $E_1 E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \dots$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty)\mu(E_i)}$
4. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\nu$
   tale che $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \subseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \ldots$
   e $\mu(E_1) < +\infty$
   $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$

Dimostrazione
Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \quad th: \; E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$\forall F \subseteq X$
$\mu(F) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1 \cap E_2) + \breve{(}F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \mu(F \cap E_1 \cup (F \setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2))$
per subadditività
Induttivamente:
se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$
Se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \ldots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E^c \in \eta_\mu \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^k E_i^c)^c \in \eta_\mu$
Secondo passo finita additività:
$E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \ldots, E_k$ *disgiunti*
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu(\bigcup_{i=1}^k E_i \cap E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i-1}^{k-1} E_i\right)$
terzo passo: Numerabile additività
$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Osserviamo che $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$, *disgiunti*
$F \subseteq X$
$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i-1}^k F \cap E\right.$

e $\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+} \mu(F \cap E_i)$
quarto passo
$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \eta_\mu$
$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \lim_{i \to +\infty} \mu(E_i)$
$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_{\ldots \cup 2 \setminus E_2 \ldots \cup E_k \setminus E_{k-1}}$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E - iE_{i-1}$
$\{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i \geq 2}$
successione di insiemi disgiunti e misurabili.
$E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i-1})^c$
per il passo 3 $\quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$
$= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1}))$
$E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1}$
$\Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1})$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(E_1) + \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=2}^{k} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})).$$

$$= \mu(E_2) + \lim_{k \to +\infty} (\cancel{\mu(E_2)} - \mu(E_1) + \cancel{\mu(E_3)} - \cancel{\mu(E_2)} + \ldots + \mu(E_k) - \cancel{\mu(E_{k-1})}.$$

Inoltre:
se $E_1 \subseteq \ldots \quad \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \to +\infty} \mu(F \cap E_i)$
Quinto passo
$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$E_2 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \qquad \mu(E_1) < +\infty$
$E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \ldots$
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i \to +\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i \to +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i \to +\infty} \mu(E_i)$. sesto passo
$\{E_i\} \subset \eta_\mu$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k)$
$B_j = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$
$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$
$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$
$\lim_{k \to +\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k \to +\infty} \mu(F \setminus B_k)$
$= \lim_{k \to +} (\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)$ $\square$

Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 σ-algebra

Definizione 1
X insieme non vuoto, Una famiglia $\eta \subseteq P(X)$ si dice σ-algebra su X se

1. $\emptyset, X \in \eta$
2. $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3. $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

Osservazione
Se η è σ-algebra e $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$
$E_i \in \eta \rightarrow E_i^c \in \eta \quad \forall i$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta$

Una misura individua una σ-algebra
In generale
se μ è una misura su X

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X \ : \ E \text{ e } \mu - \text{misurabile}\}.$$

è una σ-algebra
In particolare in $\mathbb{R}$ c'è la σ-algebra di Lesbegue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lesbegue

Definizione 2
Sia X un insieme non vuoto e sia $F \subset P(X)$ si chiama σ-algebra generata da F la σ-algebra data da

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

la più piccola σ-algebra che contiene F

Definizione 3
Se (X, ι) è uno spazio topologico la σ-algebra generata da ι si dice σ-algebra di Borel

Vogliamo ora indagare sulla σ-algebra di Lesbegue in $\mathbb{R}$ $\eta_m = \eta$

Proposizione 1
Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo
$\Rightarrow I \in \eta$ (è misurabile secondo Lesbegue)

Dimostrazione
$I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallo* $\Rightarrow \quad \forall F \subseteq \mathbb{R} \quad m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ ***Primo caso***

Supponiamo $I = (a, +\infty) \quad a \in \mathbb{R}$
Sia $F \subseteq \mathbb{R}$, *con* $m(F) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ *e* $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$m(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I \setminus I|)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I).$$

e per $\varepsilon \to 0$ *si ha* $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ $I_i = (\alpha_i, \beta_i) \quad |I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + I_i \cap I|$
$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$
$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$
$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$
Quindi:
Intervalli del tipo $I = (a, +\infty) \in \eta \to I = (-\infty, a] \in \eta$
$\to (a, b] \in \eta$
$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$
$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$
$\Rightarrow (a, b) \in \eta$
$\Rightarrow$ *vale anche per gli intervalli chiusi*
tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti. $\square$

Teorema 1
Ogni aperto $a \subseteq \mathbb{R}$ *è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti*

Corollario 1
σ*-algebra di Borel in* $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$*-algebra di Lesbegue*

L'inclusione puo essere stretta perché F insieme misurabili con Lesbegue e non con Borel
Quindi in $\mathbb{R}$ si ha:
$B \subseteq \eta \subsetneq P(R)$, che è stretta perché e come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perchè non vale l'additività $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lesbegue)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ *sono equivalenti*

1. $E \in \eta$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ *aperto t.c.* $E \subseteq A_\varepsilon$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3. $\exists\ F \in B$ *(F è intersezione numerabile di aperti) tali che* $E \subseteq F$ *e* $m(F \setminus E) = 0$

4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ C_\varepsilon$ *chiuso tale che* $C_\varepsilon \subseteq E$ *e* $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$

5. $\exists G \in B$ *(G è unione numerabile di chiusi) tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
Hp $E \in \eta$
Primo caso: $m(E) < +\infty$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ *successione di intervalli aperti tali che* $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$ *(l'insieme* A_ε *aperto) e* $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$
$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$
$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$
$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$
quindi
$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon$—
Secondo caso: $m(E) = +\infty$
$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$
$E \in \eta \Rightarrow\ \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$
applicando il primo caso
$\forall n,\ \forall \varepsilon$
$\exists A_n^\varepsilon$ *aperto tale che* $A_n^\varepsilon \geq E_n$ *e* $m(A_n^\varepsilon E_n) < \varepsilon$
$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$
$$m(A_\varepsilon \setminus E) = m(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n^\varepsilon \setminus E)) \leq m(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n^\varepsilon \setminus E_n)) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$$
Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

2) $\Rightarrow$ 3)
Hp $\forall > 0, \exists A_\varepsilon$ *aperto,* $A_\varepsilon \supseteq E$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$
Th $\exists F \in B$ *tale che* $F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) = 0$
Per $\varepsilon = \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1\ \ \exists A_n$ *aperto t.c.* $A_n \supseteq E$ *e* $m(A_n E) < \frac{1}{n}$
$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B,\ \ F \supseteq E$ *e* $m(F \setminus E) \leq m(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow n \to +\infty\ \ m(F \setminus E) = 0$

3) $\Rightarrow$ 1)
Hp $\exists F \in B:\ F \supseteq E$ *e* $m(FE) = 0$
$E = F(F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$
1) $\Rightarrow$ 4)
$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ *aperto*
tale che $A_\varepsilon \supseteq E^c$ *e* $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$
$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$ *è chiuso*
$E^c \subseteq A_\varepsilon\ \Rightarrow\ E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$
$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4) $\Rightarrow$ 5)
Per $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \forall \in \mathbb{N}$
$\exists C_n$ *chiuso,* $C_n \subseteq E$ *tale che* $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$
per $n \to +\infty m(E \setminus G) = 0$

5) $\Rightarrow$ 1)
Hp: $\exists G \in B$ *tale che* $G \subseteq E$ *e* $m(E \setminus G) = 0$
$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$ *perché unione di misurabili*

$\square$

Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Approccio agli integrali di Lesbegue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

Definizione 1
Sia X un insieme non vuoto e η una σ-algebra in X.
((X, η) spazio misurabile)
Sia X uno spazio topologico,
una funzione $f : X \to Y$ si dice misurabile se $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \quad A$ aperto

Esempi
1) se $\eta = P(X) \;\Rightarrow\;$ ogni funzione $f : X \to Y$ è misurabile
Se $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \to Y$ è η-misurabile $\Leftrightarrow f$ è costante.
2) Se X è spazio topologico e se $\eta \supseteq B(Borel)$
$f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f$ misurabile
3) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$E \subseteq X$
$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0, 1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A \end{cases} \quad \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

Proposizione 1
Se (X, η) spazio misurabile e $f : X \to Y$
$\Rightarrow \{F \subseteq Y \;:\; f^{-1}(F) \in \eta\} = S$ è una σ-algebra in Y
di conseguenza se Y è uno spazio topologico e f è η-misurabile
allora $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$

Dimostrazione
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$
$f^{-1}(Y) = X \in \Rightarrow Y \in S$
$F \in S$ *ovvero* $f^{-1}(F) \in \eta$
$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$
Facciamo vedere che S è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.
$\{F_I\} \subset S$ *ovvero* $f^{-1}(F_i) = \eta \quad \forall_i$
$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$ $\square$

Proposizione 2
Sia (X, η) *uno spazio misurabile* $f : X \to \mathbb{R}$
Allora f *è misurabile se e solo se*
$\{x \in X \ : \ f(x) > t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \geq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) < t\} \in \eta, \ \ \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \{x \in X \ : \ f(x) \leq t\} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

Dimostrazione
f *è misurabile* $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \ \ \forall B \subseteq \mathbb{R}$ B *boreliano*
$\Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$

□

Proposizione 3
Sia (X, η) *uno spazio misurabile*

1. *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sono misurabili*
   $\Rightarrow f + g, \lambda f \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ f \cdot g, \frac{f}{g} \quad se \ g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ *sono misurabili*

2. *Se* $\{f_k\}$ *successione di funzioni misurabili*
   $\Rightarrow \sup_k f_k, \ \inf f_k, \ \limsup_{k\to\infty} f_k, \ \liminf_{k\to+\infty} f_k$ *sono misurabili*
   In particolare, se $\exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$ *è misurabile*

Dimostrazione
$f, g : X \to \mathbb{R}$ *misurabili*

$$t \in \mathbb{R} \ \ \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q} \\ r+s=t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \ \textit{perché } f, g \textit{ misurabili}$$

se x *tale che* $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t = g(x)$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $f(x) > r > t - g(x)$
quindi $g(x) > t - r \to s \in \mathbb{Q}$ *tale che* $g(x) > s > t - r$
$f, g, X \to \mathbb{R}$ *numerabili,* $\lambda \in \mathbb{R}, f$ *misurabile*

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & se \ \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & se \ \lambda < 0 \end{cases}$$

f *misurabile*

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & se t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & se \ t \geq 0 \end{cases} \qquad sef,gmisurabili$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$ *sono misurabili*
$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$

f misurabile
$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ *Guarda sta dimsotrzione usl libro o ricopila dalle foto perchè è assolutametne insensato* $\square$

Sia (X, η) spazio misurabile
se η è la σ-algebra di misurabili di misura μ allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a η_μ

Proposizione 4
Sia (X, η, μ) spazio di misura
(μ è una misura su X e η è la σ 0algebra di μ misurabili)
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile
e sia $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f = g$ quasi ovunque (ovvero $m(\{f = g\}) = 0$)
$\Rightarrow$ anche g è μ-misurabile

Dimostrazione
$\forall t \in \mathbb{R}$
$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$
Il primo insieme è contenuto in $\{g \neq f\}$ quindi ha misura nulla
$\Rightarrow \in \eta_\mu$
il secondo insieme è $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$ perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

$\square$

Corollario 1
se $f_k : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili $k > 1$ ed esiste $\lim_{k\to\infty} f(x)$ per quasi ogni $x \in X$
$\Rightarrow$ la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

Dimostrazione
$X_1 = \{x \in X \ | \exists \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\} = \{x \in X \ | \ \limsup_{k\to+\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)$
è misurabile
$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & se\ x \in X_1 \\ 0 & se\ x \notin X_1 \end{cases} .$$

è misurabile $\forall k$ perché $\tilde{f}_j = f_j$ quasi ovunque
$\exists \lim_{k\to+\infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$
quindi è misurabile $\square$

0.2 Funzione di Lesbegue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0, 1] \to [0, 1].$$

$\forall n \ \ [0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$
gli J sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, le I sono di ampiezza $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases} .$$