Lezione 4 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-16

1 Formula di Grassmann affine

Richiami dalla scorsa lezione
Dati $\Sigma_i = p_i + W_i, \quad i = 1,2$ sottospazi affini (di $(A, V, +)$) allora:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p_1p_2} \in W_1 + W_2.$$

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} >).$$

Inoltre Σ_1, Σ_2 si dicono:
incidenti se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
paralleli se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$
sghembi se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Proposizione 1 (Fromula Grassmann per spazi affini)
Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di A, Allora

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq dim\Sigma_1 + dim\Sigma_2 - dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

e vale l'uguaglianza se Σ_1, Σ_2 sono incidenti o sghembi
si usa la notazione $dim(\emptyset) = -1$

Dimostrazione
- *Supponiamo Σ_1, Σ_2 incidenti, allora esiste*

$$p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$
$$\Sigma_1 = p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2$$
$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale
- *Sia ora $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ allora $\Sigma_i = p_i + W_i \quad i = 1,2$*
risulta $\overrightarrow{p_1p_2} \notin W_1 + W_2$ (per lemma)

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = dim(W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2}) = dim(W_1 + W_2) + 1 \leq$$
$$\leq dim(W_1) + dim(W_2) - (-1) = dim(W_1) + dim(W_2) + dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $dim(W_1) + dim(W_2) = dim(W_1 + W_2)$ ovvero $W_1 \cap W_2 = 0$ ovvero se Σ_1, Σ_2 sono sghembi $\square$ $\square$

Proposizione 2
siano Σ_1, Σ_2 *sottospazi affini di* $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ *definiti dai sistemi lineari*

$$A_i X = b_i \;\; i = 1, 2.$$

Allora:
(a) Σ_1, Σ_2 *sono incidenti se e solo se*

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) = rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right).$$

detto r *tale rango,* $dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$
(b) Σ_1, Σ_2 *sono sghembi se e solo se*

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = n.$$

(c) Se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = r < n.$$

allora Σ_1 *(rispetto a* Σ_2*) contiene un sottospazio affine di dimensione* $n-r$ *parallelo a* Σ_2 *(rispetto a* Σ_1*)*

Dimostrazione
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli*

(b) la disuguaglianza tra i ranghi dice che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$*;*
il fatto che $rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = n$ *implica che* $W_1 \cap W_2 = 0$
(c) Di nuovo la disuguaglianza dei ranghi implica $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$*;*
Se ora $W_1 \cap W_2 = W$ *allora* $dim(W_1 \cap W_2) = n - r$
Scelto $p_1 \in \Sigma_1$ *risulta*
$p_1 + W \subset \Sigma_1$ *(*$W_1 \cap W_2 = W$ *sottospazio di* W_1*)*
e $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$ *è parallelo a* Σ_2 *e* $dim(p_1 + W) = dim(W) = n - r \square \;\; \square$

Esempio
$\mathbb{A}$ π_1, π_2 *piani distinti*
A_1, A_2 *vettori riga* $(A_1 = (a_{11} \; a_{12} \; a_{13})$
$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$
piani distinti $\Rightarrow \;\; rk(C) = 2$
$rg\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = 2 \;\; \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2$ *è una retta*
$rg\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = 1 \;\; \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ *piani paralleli poiché* $W_1 = W_2$

$\mathbb{A}^4, \pi_1\pi_2$ piani distinti tali che $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \in M_{45} \quad rk(C) \leq 4.$$

rk $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$	rk(C)	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	{p}
3	4	$\emptyset$ e W_1, W_2 hanno una direzione in comune
3	3	r
2	3	$\emptyset$