Lezione 20 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-22

1 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

Lemma 1
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$
Siano $P, Q \in End(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P, risulta

$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione
Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)
$\dim(V) < +\infty$

Teorema 1
Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in End(V)$ operatore, sono equivalenti

- *L è normale (rispetto ad h)*
- *esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L*

Lemma 2
(V, h) spazio hermitiano, $L \in End(V)$ normale
sono equivalenti

- *$Lv = \lambda v$*
- *$L^\star v = \overline{\lambda} v$*

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per $L^\star$

$$V_\lambda(L) = V_{\overline{\lambda}}(L^\star).$$

Dimostrazione
Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\overline{\lambda}}(L^\star)$. L'inclusione contraria segue da $L^{\star t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$\begin{aligned} h(L^\star(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \overline{\lambda} h(v, w) = h(\overline{\lambda} v, w) \\ h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, w) &= 0 \quad \circledast \end{aligned}$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$L^\star(v) \in V_\lambda(L), \quad \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

$$\Rightarrow \quad L^\star(v) - \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

Quindi nella $\circledast$ posso prendere $w = L^\star(v) - \overline{\lambda} v$, ottenendo

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, L^\star(v) - \overline{\lambda} v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$L^\star(v) - \overline{\lambda} v = 0$$

cioè $\qquad L^\star(v) = \overline{\lambda} v$

□

Osservazione
Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v,w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^\star w) = h(v, \overline{\mu} w) = \mu h(v,w) \Rightarrow h(v,w) = 0$$

Dato che $\lambda \neq \mu$
Dimostrazione (Teorema Spettrale)
1) $\Rightarrow$ 2) *Procediamo per induzione su* $\dim V$*,con base ovvia* $\dim V = 1$
Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ e sia $\dim_{\mathbb{C}} V = n$
Sia $v_1 \in V$ un autovettore per L, che possiamo assumere di norma 1. Sia $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^perp$.
Allora $V = V_1 \oplus W$.
Poiché V_1 è L-invariante (per costruzione) e $L^\star$-invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per W.
Inoltre $L|_W \in End(V)$ è normale.
Per induzione, esiste una base $h|_W$-ortonormale formata da autovettori per $L|_W$, sia $\{v_2, \dots, v_n\}$. Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base h-ortonormale di V formata da autovettori per L.
2) $\Rightarrow$ 1). *Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base h-ortonormale di autovettori per L. Allora*

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[L^\star]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$

$$[L \circ L^\star]_B^B = [L]_B^B [L^\star]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^\star]_B^B [L]_B^B = [L^\star \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \to [A]_B^B$ è un isomorfismo tra $End(V)$ e $M_{nn}(\mathbb{C})$, segue

$$L \circ L^\star = L^\star \circ L.$$

cioè L è normale $\square$

Osservazioni

1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x,y) = x^t H \overline{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y)$$
$$(L_A X)^t H \overline{Y} = X^t H \overline{L_A Y}$$
$$X^t A^t H \overline{Y} = X^t H \overline{A Y} \quad \forall X, Y$$
$$A^t H = H \overline{A}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$\det \begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) + 1 = (t+1)^2.$$