Lezione 21 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-24

1 Nuove informazioni sulle forme bilineari

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Ricordiamo che una forma bilineare è un'applicazione

$$b : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che se $A = [b]_B$
$X = [v]_B, \quad Y = [w]_B$

$$b(v, w) = X^t AY.$$

Come cambia $[b]_B$ se cambio B
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ X=[v]$_B$ $X' = [v]'_B$
B' = {v$'_1, \ldots, v'_n\}$ Y = [w]$_B$ $Y' = [w]'_B$
A = [b]$_B$ $A' = [b]_{B'}$

$$b(v, w) = X^t AY = X'^T A'Y'$$

$X = MX', \quad Y = MY' \quad M = [Id_V]^B_B$
(MX')$^t A(MY') = X'^t A'Y'$
$X' M^t AMY' = X'^t A'Y'$
$A' = M^t AM$

Definizione 1
Diciamo che due matrici A, B sono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^t AM$

Proposizione 1
Due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diversi se e solo se sono congruenti

Osservazione
1. La congruenza è una relazione di equivalenza
2. Il rango è invariante per la congruenza
3. Per matrici reali invertibili, il segno del determinante è invariante
4. Se M è ortogonale

$$M^t AM = M^{-1} AM.$$

Se ho una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ posso definire due applicazioni $V \to V^\star$ nel modo seguente.

Fissato $v \in V$, prendo $\begin{array}{l} b_v(w) = b(v, w) \\ b'_v(w) = b(w, v) \end{array}$

È chiaro che $b_v, b'_v \in V^\star$ (usiamo il fatto che b è bilineare)
Dunque ho due applicazioni $V \to V^\star$

$$\delta_b(v) = b_v \quad \delta'_b(v) = b'_v.$$

Definizione 2
Il rango di una funzione bilineare è il rango di una qualsiasi matrice che la rappresenta

Definizione 3
Una forma bilineare è non degenere se ha rango (massimo) $\dim V$

Proposizione 2
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita,

$$b : V \times V \to \mathbb{K} \text{ una forma bilineare.}$$

Sono equivalenti

- b *è non degenere ovvero* $b(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\forall v \in V, v \neq 0 \;\; \exists w \in V : \quad b(v, w) \neq 0$
- $\forall w \in V, \; w \neq 0 \;\; \exists v \in V : b(v, w) \neq 0$
- $\delta_b : V \to V^\star$ *è un isomorfismo*
- $\delta_b' : V \to V^*$ *è un isomorfismo*

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base di* V *e sia* $A = [b]_B$
1) $\Rightarrow$ 2) *per ipotesi* $\det A \neq 0$ *se* $X = [v]_B \quad X \neq 0 \Rightarrow X^t A \neq 0$
quindi esiste $Y \in \mathbb{K}^n : X^t AY \neq 0$.
Se $w \in V$ *è tale che* $[w]_B = Y$ *ho dimostrato che* $b(v, w) = X^t AY \neq 0$
2) $\Rightarrow$ 1) *Riscrivendo l'ipotesi in coordinate abbiamo*

$$\forall X \neq 0 \; \exists Y : \quad X^t AY \neq 0$$

$$\Rightarrow X^t A \neq 0 \quad \forall X \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

1) $\Leftrightarrow$ 3) *è come sopra*
2) $\Rightarrow$ 4) *Poiché* $\dim V = \dim V^\star$ *basta vedere che* δ_b *è iniettava, cioè* $\ker \delta_b = \{0\}$
$v \in \ker \delta_b \quad \Rightarrow \quad \delta_b(v) = b_v$ *è il funzionale nullo, cioè*
$b_v(w) = 0 \quad \forall w \in V$
$b_v(w) = b(v, w) \Rightarrow v = 0$
4) $\Rightarrow$ 2) *Dato* $v \neq 0$, $\delta_b(v) = b_v \neq 0$ *perché* δ_b *è un isomorfismo,*
quindi esiste $w \in V$:

$$b(v, w) = b_v(w) \neq 0$$

3) $\Leftrightarrow$ 5) *è simile a* 2) $\Leftrightarrow$ 4) $\square$

2 Caso Simmetrico

$$b(v, w) = b(w, v).$$

Osservazione
b è simmetrica se e solo se lo è qualsiasi matrice che la rappresenta. **Dato** $S \subset V$ definiamo

$$S^{\perp} = \{v \in V | b(v, s) = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

Esercizio $S^{\perp}$ è un sottogruppo e, $S^{\perp} =< s >^{\perp}$

Definizione 4
Due sottospazi U, W si dicono ortogonali se

$$Y \subseteq W^p erp \ \Leftrightarrow W \subset U^{\perp})$$

Definizione 5
$v \in V$ *si dice isotropo se* $b(v, v) = 0$

Definizione 6
$\ker b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \ \ \forall w \in V\} = V^{\perp}$

Osservazione
b è non degenere se e solo se $\ker b = \{0\}$

Proposizione 3
Sia b non degenere, $W \subseteq V$ sottospazio,
Allora, se $\delta_b : V \to V^{\star}$ è l'isomorfismo canonico indotto da b, $\delta_b(W^t) = W^{\star}$. In particolare risulta sempre $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

Nota
Non è vero, anche nel caso non degenere, che $V = W \oplus W^{\perp}$

Dimostrazione
$w \in W^{\perp} \quad \delta_b(w) = b_w$ *Voglio vedere che*
$b_w \in W^{\#} \quad b_w(w') = b(w, w') = 0 \ \ \forall w' \in W$
Quindi $\delta_b(W^{\perp}) \subseteq W^{\#}$
Prendo ora $f \in W^{\#}$; poiché b è non degenere, δ_b è un isomorfismo, quindi esiste $v \in V$

$$f = \delta_b(v) = b_v \quad b(v, w) = b_v(w) = 0 \ \ \forall w \Rightarrow v \in W^{\perp}.$$

quindi $f = \delta(b_v)$ con $v \in W^{\perp}$ $\square$

Proposizione 4
Sia V spazio vettoriale, $W \subset V$ sottospazio, $b \in Bi(V)$. Sono equivalenti:

- $V = W \oplus W^{\perp}$
- $b|_W$ *è non degenere*

Lemma 1
$\ker b|_W = W \cap W^{\perp}$

Dimostrazione (lemma)
$w \in \ker b|_W \Leftrightarrow b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W \Leftrightarrow w \in W \cap W'$ □

Dimostrazione (proposizione)
1) $\Rightarrow$ 2)*segue dal lemma perché dall'ipotesi* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$
2) $\Rightarrow$ 1) *Sia* $\{w_1, \ldots, w_s\}$ *una base di* W
Per ipotesi $A = (b(w_i, w_j))$ *è invertibile, in particolare dato* $v \in V$*, il sistema lineare*

$$* \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, w_1 \\ \vdots \\ b(v, w_s) \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica. Poniamo

$$w = v - \sum_{h=1}^{s} x_j w_j.$$

*Notiamo che * significa*

$$\sum_{h=1}^{s} b(v_h, w_j) x_h = b(v, w_j) \quad 1 \leq j \leq s.$$

Calcoliamo
$b(w, w_i) = b(v - \sum_{h=1}^{s} x_h w_h, w_j) = b(v, w_j) - \sum_{h=1}^{s} x_h b(w_h, w_j) = b(v, w_j) =$
$= b(v, w_i) - b(v, w_i) = 0$
Poiché i $\{w_i\}$ *sono una base di* W*, risulta* $b(w, u) = 0 \quad \forall u \in W$*, cioè* $w \in W^{\perp}$
Allora

$$v = w + \sum_{h=1}^{s} x_h w_h.$$

Pertanto $V = W + W^{\perp}$*, per ipotesi* $W \cap W^{\perp} = \ker b|_W = \{0\}$*, quindi* $V = W \oplus W^{\perp}$

□