Lezione 5 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-13

1 Equivalenza per affinità

Definizione 1
Equivalenza per affinità Due sottoinsiemi $F, F' \subseteq A$ spazio affine, si dicono affinamente equivalenti se esiste $f \in Aff(A)$ tale che $f(F) = F'$
Definiamo anche una proprietà ***affine*** *se è equivalente per affinità*

Proposizione 1
Se $f \in Aff\,(A)$ e F un sottospazio affine di A di dimensione k, allora $f(F)$ è un sottospazio affine di dimensione k

Dimostrazione
$F = p + W \quad dim(W) = k$ Sia φ la parte lineare di f, che è un omomorfismo $\varphi : V \to V$.
Poniamo $F' = f(p) + W'$ dove $W' = \varphi(W)$
Chiaramente, $dim(W') = dim(\varphi(W)) = k$
risulta $f(F) = F'$

$$Q \in F \qquad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che $\overrightarrow{PQ} \in W \ \Rightarrow f(F) \subseteq F'$ Viceversa, dato $R \in F$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^-1(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque F'$\subseteq f(F)$ $\square$

Teorema 1
Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e siano $\{p_0, \ldots, p_n\}$, $\{a_0, \ldots, a_n\}$ due $(n+1)$-ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità $f \in Aff(A)$ tale che $f(p_i) = q_i, \quad 0 \leq i \leq n$

Dimostrazione
Per ipotesi $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ Sono basi di V, dunque esiste un unico operatore lineare $\varphi \in GL(V)$ tale che $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = \overrightarrow{q_0q_i}) \quad 1 \leq i \leq n$
Pongo $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$
$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$
f è chiaramente biettiva $\overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) =$
$= \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(pp')$
L'unicità di f segue da quella di φ e dal fatto che $f(p_0) = q_0$ (un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto. $\square$

Esempio

Determino $f \in Aff(\mathbb{A}^2)$ *t.c.*

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\} \to \{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}\}$$

Cercherò quindi $\varphi \in GL(V)$ *tale che*

$$\varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}, \varphi(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{q_0q_2}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

$$P = \left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \varepsilon\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[\varphi]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix} \qquad [Id]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix}-3 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_\varepsilon^\varepsilon = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_\varepsilon^B = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_B^{\varepsilon\,-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-2\\x_2-1\end{pmatrix}$$

$$f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (t_V \circ L_A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

Corollario

$(A, V, +)$ *spazio affine di dimensione* n

1. per ogni $1 \leq k \leq n+1$ *due qualsiasi* k*-uple di punti sono affinamente equivalenti*

2. Due sottospazi affini sono affinamente equivalenti se e solo se hanno al stessa dimensione

Dimostrazione

1. Se $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}, \{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ *sono le* k*-ple date, completiamole a* $(n+1)$*-ple di punti indipendenti* $\{p_0, \dots, p_n\}, \{q_0, \dots, q_n\}$ *e usiamo il teorema 2.*
Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi.
Viceversa, se S, S' *sono sottospazi affini della stessa dimensione* k*, possiamo trovare* $k+1$ *punti indipendenti in* S*, e* $k+1$ *punti indipendenti in* S' *tali che*

$$S = \overrightarrow{p_0, \dots, p_k}, \quad S' = \overrightarrow{q_0, \dots, q_n}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda P_i *in* q_i*,* $0 \leq i \leq k$*, dunque*

$$f(S) = S'.$$

$\square$

2 Proiezioni e Simmetrie

Definizione 2 (Proiezioni e Simmetrie)
In $(A, V, +)$ *Sia* L *un sottospazio affine,* $L = P + W$
Sia U *un complementare di* W *in* V*, ovvero* $V = W \bigoplus U$

$$\pi_W^U(w+u) = w \qquad \pi_W^U : V \to V$$
$$\sigma_W^U(w+u) = w - u \qquad \sigma_W^U : V \to V$$
$$p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\overrightarrow{px}) \qquad \textit{proiezione su } L \textit{ parallela a } U$$
$$s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\overrightarrow{px}) \qquad \textit{simmetria di asse } L \textit{ e direzione } U$$