Lezione 09

Federico De Sisti

2025-03-24

0.1 Esonero

L'esonero sarà (forse) 15 aprile ore $18:00-20:00$ (da confermare)

0.2 Lezione

Ricordo: abbiamo visto che per $n \geq 1$, ogni funzione $f : S^n \to \mathbb{R}$ continua ammette $x_0 \in S^n$ t.c. $f(x_0) = f(-x_0)$

Corollario 1 (Invarianza del dominio con $n = 1$, m qualsiasi)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto non vuoto, $B \subseteq \mathbb{R}$ aperto non vuoto. Se $m \geq 2$ allora A e B non sono omeomorfi.

Dimostrazione
Sia $a \in A$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(a) \subseteq A$ considero $S = \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p-a|| = \varepsilon/2\}$
Allora $S \subseteq A$ supponiamo per assurdo che esista $g : A \to B$ omeomorfismo, allora la restrizione $g|_S : S \to \mathbb{R}$
questa è un'applicazione iniettiva e continua ed S è omeomorfa a S^{m-1}, assurdo

□

Proposizione 1
Sia X spazio topologico sia $Y \subseteq X$ sottospazio connesso.
Sia $W \subseteq X$ tale che $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$(= chiusura di Y in X)
Allora W è connesso.
In particolare $\bar{Y}$ è connessa.

Dimostrazione
Per assurdo sia $W = A \cup B$ con A, B disgiunti, non vuoti, aperti in W
Segue $A \cap Y, B \cap Y$ sono disgiunti, e sono aperti in Y.
Infatti A è intersezione $A = W \cap A'$ con $A' \subseteq X$ aperto in X, e $B = W \cap B'$ con B' aperto.
Allora $A \cap Y = (A' \cap W) \cap Y = A' \cap Y$
$B \cap Y = (B' \cap W) \cap Y = B' \cap Y$
Visto che Y è connesso, $A \cap Y$ oppure $B \cap Y$ è vuoto. Senza perdita di generalità ne fisso uno.
Supponiamo $A \cap Y = \emptyset$ (se è $B \cap Y = \emptyset$ scambio i nomi)
Sia $a \in A$, sappiamo che $a \in \bar{Y}$, cioè a è adiacente a Y, quindi ogni intorno di a interseca Y, Ad esempio A'. è intorno aperto di a quindi $A' \cap Y \neq \emptyset$
Contraddice $A' \cap Y = A \cap Y = \emptyset$. Assurdo

□

Esempio(Spazio topologico connesso ma non connesso per archi)
Pettine con la pulce

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2$

$$Y = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{(\frac{1}{n}, t) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.\ t \in [0,1]\} \text{ il pettine}$$

$$X = Y \cup \{(0,1)\} \text{ (la pulce).}$$

Y è connesso per archi (quindi è connesso)
Inoltre $(0,1)$ è aderente (per ogni raggio, c'è sempre un dente dentro la palla) a Y, cioè

$$Y \subseteq X \subseteq \overline{Y}.$$

Per a proposizione precedente X è connesso, Ma X non è connesso per archi (V foglio di esercizi). Un altro esempio è il grafico di $\sin(\frac{1}{x})$, la chiusura del grafico comprende anche il segmento $\{0\} \times [-1,1]$ e non è connessa per archi. **Nota** La connessione si usa spesso per verificare che due spazi non sono omeomorfi, se è connesso uno e l'altro no, non possono esserlo.

Proposizione 2
Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici, supponiamo

1. *f suriettiva*
2. *Y è connesso*
3. *$f^{-1}(y)$ connesso $\forall y \in Y$*
4. *f aperta oppure chiusa.*

Allora X è connesso.

Esempio:
$X = \{a, b\}, Y = \{c\}$

$$\text{f:}X \to Y$$
$$a \to c$$
$$b \to c$$

Altro esempio
$f : [0,1] \cup]2,3] \to [0,2]$
$c \to \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo X sconnesso, $A \cup B = X$ con A, B aperti disgiunti, non vuoti.
Supponiamo f aperto: considero $f(A), f(B)$ che sono aperti in Y
Abbiamo $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) = f(X) = Y$
e $f(A) \neq \emptyset \neq f(B)$, cisto che Y è connesso abbiamo

$f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$
Sia $y \in f(A) \cap f(B)$, considero $f^{-1}(y)$ è connesso, l'insieme A è aperto e chiuso, interseca $f^{-1}(y)$ (poiché $y \in f(A)$) ma $f^{-1}(y) \not\subseteq A$ (perché $y \in f(B)$) assurdo
Il ragionamento con f chiusa è analogo. □

Teorema 1
Il prodotto di spazi topologici qualsiasi connessi, è connesso.
Analogamente il prodotto di spazi topologici connessi per archi è connesso per archi.

Dimostrazione
Siano P, Q spazi topologici connessi, considero $p : P \times Q \to P$

1. *p è continua e suriettiva*
2. *P è connesso*
3. *$\forall x \in P : p^{-1}(x) = \{x\}Q$ è omeomorfo a Q (quindi connesso)*
4. *p è aperta*

Per la proposizione precedente il dominio $P \times Q$ è connesso. □

Definizione 1
Sia X spazio topologico. Se un sottoinsieme $C \subseteq X$ è connesso e massimale rispetto a queste proprietà, allora C si dice componente connessa di X. Analogamente si definiscono le componenti connesse per archi.

Osservazione

1. Le componenti connesse sono sempre chiuse, perché la chiusura di un connesso è connesso.
   Attenzione, non sono sempre aperte ad esempio le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i singoli punti.
2. Due componenti connesse C_1, C_2 di X sono uguali e disgiunte (se due connessi si intersecano allora l'unione è connessa V esercizi settimanali)
   Lo stesso vale per le componenti connesse per archi.
3. Da 2. Segue che ogni spazio topologico è unione disgiunta delle sue componenti connesse e anche unione disgiunta delle sue componenti connesse per archi.

0.3 Spazi topologici compatti

Definizione 2
Sia X spazio topologico $R \subseteq 2^X$.

1. *R si dice ricoprimento se $\bigcup_{A \in R} A = X$*
   R ricoprimento si dice aperto se $A \in R$ aperto $\forall A \in R$
2. *Se $R \subseteq 2^X$ è un ricoprimento e $R' \subseteq R$ è anch'esso un ricoprimento, allora R' si dice sottoricoprimento.*

Definizione 3
Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento ha almeno un sottoricoprimento finito.

Esempi:

1. Se X è finito (con qualsiasi topologia) allora è compatto.
2. Se X ha cardinalità qualsiasi ma topologia banale è compatto.
3. Se X è infinito con topologia discreta allora X non è compatto, basta considerare.
$$R = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Teorema 2
L'intervallo $[0, 1]$ è compatto

Dimostrazione
Sia R un ricoprimento aperto di $[0, 1]$ (topologia di sottospazio indotta da R con topologia euclidea).
Per ogni $A \in R$ scegliamo $A' \subseteq \mathbb{R}$ aperto in $\mathbb{R}$ tale che $A = A' \cap [0, 1]$ e consideriamo

$$S = \{A' \mid A \in R\} = \text{ famiglia di aperti in } \mathbb{R}.$$

l'unione contiene $[0, 1]$.
Consideriamo $Y = \{t \in [0, 1] \mid$ esiste una sottofamiglia finita di S la cui unione contiene $[0, t]\}$
Chiaramente $0 \in Y$, considero $b = supY$
Dimostriamo che $b \in Y$
Scegliamo $A_0 \in R$ tale che $b \in A_0$ scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\subseteq A_0$
Visto la definizione di b esiste $t \in Y$ tale che $b - \varepsilon < t \leq b$.
Sappiamo che esistono $A_1, \ldots, A_n \in R$ tale che $A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n' \supseteq [0, t]$, allora $a_0' \cup A_1' \cup \ldots \cup A_n' \supseteq [0, b]$.
Cioè $b \in Y$. dove tutti gli A_i' sono elementi di S
Dimostriamo che $b = 1$

Supponiamo per assurdo $b < 1$. Ripetiamo la costruzione precedente richiedendo anche $b + \varepsilon < 1$. Allora $b + \frac{\varepsilon}{2} \in Y$ perché

$$A'_0 \cup A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \supset [0, b + \frac{\varepsilon}{2}].$$

Assurdo, quindi $b = 1$.
Da questo $1 \in Y$, cioè esiste una sottofamiglia finita si S la cui unione contiene $[0, 1]$, quindi R ammette un sottoricoprimento finito.

□

Osservazione:
Anche la compattezza si usa per dimostrare che due spazi topologici non sono omeomorfi, ad esempio: $\mathbb{R}$ e $[0, 1]$ non sono omeomorfi perché $[0, 1]$ è compatto e $\mathbb{R}$ no.

Proposizione 3
Sia X spazio topologico e Y sottospazio.

1. *Se X è compatto e Y è chiuso in X. Allora Y è compatto.*
2. *Se X è T2 e Y è compatto allora Y è chiuso in X.*

Esercizio:
Cercate dei controesempi alle ipotesi.
Trovare X, Y, con Y chiuso e non compatto e trovare X, Y con X con Y compatto ma non chiuso in X
Provare con controesempi facili! Magari spazi con 2 punti e Y un solo punto
Dimostrazione

1. *R ricoprimento aperto di Y.*
   Per ogni $A \in R$ scegliamo $A' \subseteq X$ aperto in X tale che $A' \cap Y = A$.
   Abbiamo $Y \subseteq \bigcup_{A \subset R} A'$ e vale
   $X = \left(\bigcup_{A \in R} A'\right) \cup (X \setminus Y)$
   Quindi $\{A' \mid A \in R\} \cup \{X \setminus Y\}$ è un aperto di X.
   Per compattezza di X esistono $A_1, \ldots, A_n \in R$ tale che

   $$X = A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \cup (X \setminus Y).$$

   Allora $A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \supseteq Y$ e quindi $A_1 \cup \ldots \cup A_n = Y$
   Segue Y compatto.

2. *Supponiamo X T2, Y compatto, dimostrare che Y è chiuso in X*
   Dimostriamo che XY è aperto.
   Dimostriamo che è intorno di ciascun suo punto.
   Scegliamo $q \in X \setminus Y$
   consideriamo un qualsiasi $p \in Y$ e applichiamo T2. Esistono intorni aperti $U \ni p, V \ni Q$ tale che $U \cap V = \emptyset$

faccio variare p in Y e consideriamo tutte le coppie di aperti $\overline{U}, V$ Usiamo però i nomi (per non fare errori) dato che dipendono da entrambi i punti

$$U_{p,q} \ni p, \quad V_{p,q} \ni q.$$

Tuttavia il nostro q è fissato, quindi possiamo chiamarli semplicemente

$$U_p \ni p, \ V_p \ni q.$$

Allora $\{U_p \mid p \in Y\}$ è una famiglia di aperti di X la unione contiene Y. Dalla compattezza di Y segue che esiste una sottofamiglia finita la cui unione contiene Y.

$$U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_n} \supseteq Y.$$

Allora

$$V = V_{p_1} \cap \ldots \cap V_{p_n}.$$

è intorno aperto di q tutto contenuto in $X \setminus Y$

$\square$