Dispense Di Geometria I

Federico De Sisti

2024-06-06

1 Geometria Affine

1.1 Spazi Affini

Definizione 1 (Spazio affine)
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$ i cui elementi si dicono punti di A tale che sia data un'applicazione

$$A \times A \to V \quad [1.1].$$

che associa ad ogni $(P, Q) \in A \times A$ un vettore di V, denotato con $\overrightarrow{PQ}$ e chiamato vettore di punto iniziale P e punto Q, in modo che i seguenti due assiomi siano soddisfatti.

- *Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ e per ogni vettore $v \in V$ esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che*
$$\overrightarrow{PQ} = v.$$
- *Per ogni terna P, Q, R di punti di $\mathbb{A}$ è soddisfatta la seguente identità*
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

L'applicazione [7.1] definisce una struttura di spazio affine sull'insieme $\mathbb{A}$

Definizione 2 (Rifermineto affine)
Siano V su $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Un sistema di coordinate affine (ovvero un riferimento affine) nello spazio $\mathbb{A}$ è assegnato una volta fissati un punto $O \in A$ e una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V; esso viene denotato con $Oe_1, \dots, e_n$

Definizione 3 (Coordinate affini)
Per ogni punto $P \in A$ si ha $\overrightarrow{OP} = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$ per opportuni $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
Gli scalari $a_1, \dots, a_n$ si dicono coordinate affini. Il punto O si dice origine del sistema di coordinate $(0, \dots, 0)$

Definizione 4 (Giacitura)
La giacitura di uno spazio affine è lo spazio vettoriale sul quale lo spazio affine è definito

Proposizione 1
1) Un sottospazio affine è individuato dalla sua giacitura e da uno qualsiasi dei suoi punti
2) Sia S un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ avente giacitura W, Associando ad ogni coppia di punti P, Q di S il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si definisce su S una struttura di spazio affine su W

Dimostrazione
1) Sia S il sottospazio affine di $\mathbb{A}$ passante per Q ed avente giacitura W. Sia $M \in S$ e sia T il sottospazio affine passante per M ed avente giacitura W. Se $P \in S$ allora si ha

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QP}.$$

che è un vettore di W perché entrambe gli addendi vi appartengono, quindi $P \in T$.
Se viceversa $P \in T$, allora

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MQ} \in W.$$

e quindi $P \in S$. In conclusione $S = T$
2) Se $P, Q \in S$ allora $\overrightarrow{PQ} \in W$ perché, per la (1), S coincide con il sottospazio affine passante per P e parallelo a W. Otteniamo quindi un'applicazione

$$S \times S \to W$$
$$(P, Q) \to \overrightarrow{PQ}$$

la quale soddisfa le proprietà dell'applicazione che definisce la struttura di spazio affine, perché sono verificate in $\mathbb{A}$ $\square$

Osservazioni
1) Possiamo quindi definire sottospazi affini di (A, V) come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

2) Se $\Sigma_1 = p_1 + W_1, \quad {}_2 = p_2 + W_2$ sono sottospazi affini , la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_1 \cap W_2.$$

Lemma 1
$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$
$H_p = \{\overrightarrow{px} \ \mid \ x \in S\}$ $H_q = \{\overrightarrow{qy} \ \mid \ y \in S\}$
Allora $< H_p > = < H_q >$ *e* $p + < H_p > = q + < H_q >$
(sottospazio generato da S)

Dimostrazione
$v_0 = \overrightarrow{pq}\ \ v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$
$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in < H_q >$
$H_p \ \subseteq < H_q > \ \Rightarrow \ \ < H_p > \subseteq < H_q >$
$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in < H_q > \Rightarrow < H_q > \subseteq < H_p >$
Quindi ¡$H_p > = < H_q >$
$\overrightarrow{pq} \in < H_p > = < H_q >$
$p + < H_p > = q + < H_q >$ □

Nomenclatura 1
Σ_1, Σ_2 *sottospazi affini*

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \textit{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Lemma 2
Siano $\Sigma_i = p_i + W_i, \quad i = 1,2$ *sottospazi affini. Allora*
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in W_1 + W_2$
(b) $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} >)$

Dimostrazione
(a) $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *allora* $\Sigma_1 = p_0 + W_1 \quad _2 = p_0 + W_2$
$\exists w_i \in W_i, \quad i = 1,2 \quad t.c$
$p_1 = p_0 + W_1, p_2 = p_0 + W_2$
$\overrightarrow{p_1p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$
Viceversa, se $\overrightarrow{p_1p_2} = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$
$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} = p_1 + w_1 + w_2$
$p_2 - w_2 = p_1 + w_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
(2) Dato $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$*, risulta*
$\overrightarrow{p_1x} \in W_1$ *se* $x \in \Sigma_1$
oppure

$$\overrightarrow{p_1x} \in \overrightarrow{p_1p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1x} = \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2x}).$$

Dunque la giacitura di $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ *è*

$$W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} > .$$

□

1.2 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

Definizione 5
Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di (A, V) di giacitura rispettivamente W_1, W_2
Diciamo che
*1) Σ_1, Σ_2 sono **incidenti**, se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$*
2) Σ_1, Σ_2 *sono **paralleli** se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$*
*3) Σ_1, Σ_2 sono **sghembi** se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$*

Osservazione
Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

Proposizione 2 (Fromula Grassmann per spazi affini)
Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di A, Allora

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq dim\Sigma_1 + dim\Sigma_2 - dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

e vale l'uguaglianza se Σ_1, Σ_2 sono incidenti o sghembi
si usa la notazione $dim(\emptyset) = -1$

Dimostrazione
- Supponiamo Σ_1, Σ_2 incidenti, allora esiste

$$p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$
$$\Sigma_1 = p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2$$
$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale
- Sia ora $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ allora $\Sigma_i = p_i + W_i \quad i = 1, 2$
risulta $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin W_1 + W_2$ (per lemma)

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = dim(W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1 p_2}) = dim(W_1 + W_2) + 1 \leq$$
$$\leq dim(W_1) + dim(W_2) - (-1) = dim(W_1) + dim(W_2) + dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $dim(W_1) + dim(W_2) = dim(W_1 + W_2)$ ovvero $W_1 \cap W_2 = 0$ ovvero se Σ_1, Σ_2 sono sghembi $\square$ $\square$

Proposizione 3
siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ definiti dai sistemi lineari

$$A_i X = b_i \ \ i = 1, 2.$$

Allora:
(a) Σ_1, Σ_2 sono incidenti se e solo se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) = rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

detto r tale rango, $dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$
(b) Σ_1, Σ_2 sono sghembi se e solo se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n.$$

(c) Se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = r < n.$$

allora Σ_1 (rispetto a Σ_2) contiene un sottospazio affine di dimensione $n-r$ parallelo a Σ_2 (rispetto a Σ_1)

Dimostrazione
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli

(b) la disuguaglianza tra i ranghi dice che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;
il fatto che $rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n$ implica che $W_1 \cap W_2 = 0$
(c) Di nuovo la disuguaglianza dei ranghi implica $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;
Se ora $W_1 \cap W_2 = W$ allora $dim(W_1 \cap W_2) = n - r$
Scelto $p_1 \in \Sigma_1$ risulta
$p_1 + W \subset \Sigma_1$ ($W_1 \cap W_2 = W$ sottospazio di W_1)
e $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$ è parallelo a Σ_2 e $dim(p_1 + W) = dim(W) = n - r$ $\square$ $\square$

Esempio
$\mathbb{A}$ *π_1, π_2 piani distinti*
A_1, A_2 vettori riga ($A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$
$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$
piani distinti $\Rightarrow$ $rk(C) = 2$
$rg\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 2 \ \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2$ *è una retta*
$rg\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 1 \ \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ *piani paralleli poiché $W_1 = W_2$*

$\mathbb{A}^4, \pi_1\pi_2$ piani distinti tali che $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \in M_{4\times 5} \quad rk(C) \leq 4.$$

rk $\binom{A_1}{A_2}$	rk(C)	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	{p}
3	4	$\emptyset$ e W_1, W_2 hanno una direzione in comune
3	3	r
2	3	$\emptyset$

1.3 Applicazioni affini

V, V' spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $(A, V, +), (A', V', +)$ spazi affini

Definizione 6
$f : A \to A'$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che:

$$f(p+v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left(ovvero \quad \begin{array}{ll} f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

Nomenclatura
Se f è biunivoca, f è detto isomorfismo affine
Un isomorfismo affine $A \to A$ è detto affinità.
Osservazione
vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come Aff(A)
Esempio
$Ov_1...v_n$ rifermento affine in A

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Dico che f è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare
$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$
Verifichiamo che $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$
$\varphi(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

3 Esempi di affinità
I traslazioni
Fissato $v \in V$ definiamo
$t_v : A \to A, \;\; t_v(P) = p + v$ Dico che t_v è un'affinità con associato isomorfismo Id_V dato che:
$t_V(p + w) = (p + w) + v = p + (w + v) = p + (v + w) = (p + v) + w =$
$= t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V$
la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto
$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$
Dico che σ_C è un'affinità con parte lineare $\varphi = -Id$
$\sigma_C(p + v) = c - \overrightarrow{CQ} \;\; Q = p + v \;\; v = \overrightarrow{PQ}$
$\sigma_C(p) + \phi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$
III Otetia di centro O e fattore $\gamma \in R \backslash \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma\overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare $\phi = \gamma Id_V$
$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O+\gamma\overrightarrow{OQ} = O+\gamma(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = (O+\gamma\overrightarrow{OP})+\gamma\overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) = \varphi(v)$

Lemma 3
Fissato $O \in \mathbb{A}$, per ogni $O' \in \mathbb{A}$ e per ogni $\varphi \in GL(V)$ esiste un'unica affinità tale che $f(O) = O'$ e che ha φ come isomorfismo associato

Dimostrazione
Esistenza
Pongo $f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + O = O'$
$f(p+v) = O'+\varphi(\overrightarrow{OQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP})+\varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p)+\varphi(v)$
dove abbiamo usato $Q = p + v \quad v = \overrightarrow{PQ}$
Unicità
Supponiamo che g abbia le stesse proprietà di f, allora
$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$
$\Rightarrow f = g$ $\square$

Definizione 7
Definiamo $\mathit{Aff}_O(A) = \{f \in \mathit{Aff}(A) | f(O) = O\} \leq Aff(A)$
tale gruppo è anche isomorfo a $GL(V)$

Lemma 4
Sia $O \in A, f \in \mathit{Aff}(A)$ *Esistono* $v, v' \in V$ *e* $g \in \mathit{Aff}_O(A)$, *univocamente determinate da* f *tale che*

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

Dimostrazione

poniamo $v = -\overrightarrow{Of^{-1}(O)}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v'}, \quad g' = t_{-v} \circ f$
Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_v) = f.$$

quindi vale $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che $g = g'$, *per cui ho dimostrato anche* $f = t_{v'} \circ g$

$$g(O) = (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) =$$
$$= f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0$$

$$g'(O) = t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0.$$

d'altra parte g, g' *hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi* O *in* O, *dunque coincidono* $\square$

Descrizione in coordinate delle affinità di $\mathbb{A}^n$

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$b = f(O) \quad \varphi = L_A \qquad \begin{aligned} L_A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ X &\to AX \end{aligned}$$

con $det(A) \neq 0$ ovviamente
Viceversa, per $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$ è un'affinità con parte lineare L_A

$$f_{A,b}(x + v) = f_{A,b}(x) + \varphi(v)$$
$$f_{A,b}(x + y)) = f_{A,b}(x) + L_A y$$

$f_{A,b}(x+y) = A(x+y)+b = AX+AY+b = (AX+b)+AY = f_{A,b}(x)+L_A(y)$.

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n = \{f_{A,b} | A \in GL(n,\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

Osservazione
Aff $\mathbb{A}^n$ è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned}(f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX+d) = \\ &= A(CX+d)+b = \\ &= ACX+Ad+b = f_{AC,Ad+b}(x)\end{aligned}$$

Osservo che $f_{I,O}$ è l'elemento neutro

$$\begin{aligned}&(f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) = f_{A,b}(Ix+O) = f_{A,b}(x) \\ &(f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) = f_{A,b}(x)\end{aligned}$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di $f_{A,b}$,
ovvero che esiste $f_{C,d}$ tale che $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned}(f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) = f_{I,O}(x) = x \\ ACX + Ad + b + X \quad \forall\ X \in \mathbb{K}^n \\ \Rightarrow AC = Id \quad Ad + b = 0 \\ C = A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\ (f_{A,b})^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}b}\end{aligned}$$

Definizione 8
Equivalenza per affinità Due sottoinsiemi $F, F' \subseteq A$ spazio affine, si dicono affinamente equivalenti se esiste $f \in Aff(A)$ tale che $f(F) = F'$
Definiamo anche una proprietà ***affine*** *se è equivalente per affinità*

Proposizione 4
Se $f \in Aff\ (A)$ e F un sottospazio affine di A di dimensione k, allora $f(F)$ è un sottospazio affine di dimensione k

Dimostrazione
$F = p + W \quad dim(W) = k$ *Sia φ la parte lineare di f, che è un omomorfismo* $\varphi : V \to V$.
Poniamo $F' = f(p) + W'$ dove $W' = \varphi(W)$
Chiaramente, $dim(W') = dim(\varphi(W)) = k$

risulta $f(F) = F'$

$$Q \in F \qquad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che $\overrightarrow{PQ} \in W \ \Rightarrow f(F) \subseteq F'$ *Viceversa, dato* $R \in F$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^{-}1(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque $F' \subseteq f(F)$ □

Teorema 1
Sia $(A, V, +)$ *uno spazio affine di dimensione* n *e siano* $\{p_0, \ldots, p_n\}$, $\{a_0, \ldots, a_n\}$ *due* $(n+1)$*-ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità* $f \in$*Aff*(A) *tale che* $f(p_i) = q_i, \quad 0 \leq i \leq n$

Dimostrazione
Per ipotesi $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ *Sono basi di* V*, dunque esiste un unico operatore lineare* $\varphi \in GL(V)$ *tale che* $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = \overrightarrow{q_0q_i}) \ \ 1 \leq i \leq n$
Pongo $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$
$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$
f *è chiaramente biettiva* $\overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) =$
$= \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(pp')$
L'unicità di f *segue da quella di* φ *e dal fatto che* $f(p_0) = q_0$ *(un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto).* □

Esempio

Determino $f \in Aff(\mathbb{A}^2)$ *t.c.*

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\} \to \{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}\}$$

Cercherò quindi $\varphi \in GL(V)$ *tale che*

$$\varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}, \varphi(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{q_0q_2}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

$$P = \left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \varepsilon\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[\varphi]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix} \qquad [Id]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix}-3 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_\varepsilon^\varepsilon = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_\varepsilon^B = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_B^{\varepsilon\,-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-2\\x_2-1\end{pmatrix}$$

$$f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (t_V \circ L_A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

Corollario 1

$(A, V, +)$ *spazio affine di dimensione* n

1. per ogni $1 \le k \le n+1$ *due qualsiasi* k*-uple di punti sono affinamente equivalenti*

2. Due sottospazi affini sono affinamente equivalenti se e solo se hanno al stessa dimensione

Dimostrazione

1. Se $\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}, \{q_0, \ldots, q_{k-1}\}$ *sono le* k*-ple date,*
completiamole a $(n+1)$*-ple di punti indipendenti* $\{p_0, \ldots, p_n\}, \{q_0, \ldots, q_n\}$ *e usiamo il teorema 2. Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi.*
Viceversa, se S, S' *sono sottospazi affini della stessa dimensione* k*, possiamo trovare* $k+1$ *punti indipendenti in* S*, e* $k+1$ *punti indipendenti in* S' *tali che*

$$S = \overline{p_0, \ldots, p_k}, \quad S' = \overline{q_0, \ldots, q_n}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda P_i *in* q_i*,* $0 \le i \le k$*, dunque*

$$f(S) = S'.$$

$\square$

1.4 Proiezioni e Simmetrie

Definizione 9 (Proiezioni e Simmetrie)
In $(A, V, +)$ *Sia* L *un sottospazio affine,* $L = P + W$
Sia U *un complementare di* W *in* V*, ovvero* $V = W \bigoplus U$

$$\begin{array}{ll} \pi_W^U(w+u) = w & \pi_W^U : V \to V \\ \sigma_W^U(w+u) = w - u & \sigma_W^U : V \to V \\ p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{proiezione su } L \textit{ parallela a } U \\ s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{simmetria di asse } L \textit{ e direzione } U \end{array}$$

1.5 Complementi

$\mathbb{A}$ spazio affine reale con associato spazio vettoriale V

Definizione 10 (Semiretta)
Possiamo definire la semiretta di origine $Q \in \mathbb{A}$ *e direzione* $v \in V \setminus \{0\}$

$$P = Q + tv, t \geq 0 \quad (\overrightarrow{QP} = tv, t \geq 0).$$

Definizione 11 (Segmento)
Possiamo definire il segmento di estremi $A, B \in \mathbb{A}$ $(A \neq B)$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

i punti $p_1, \ldots, p_t$ che dividono il segmento AB in t parti uguali sono dati, cioè

$$\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_3} = \ldots = \overrightarrow{p_{t-1}B}.$$

sono dati da

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{i}{t}\overrightarrow{AB} \quad 1 \leq i \leq t-1.$$

In un riferimento affine $Oe_1 \ldots, e_n$, in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i - a_1 \\ \vdots \\ x_n^i - a_n \end{pmatrix} = \frac{i}{t} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n = a_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} ib_1(t-i)a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

in particolare, il punto medio del segmento AB ha coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

A, B, C non allineati

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

se $t, n \geq 0$ e $t + n \leq 1$ allora abbiamo un triangolo ABC
se $0 \leq t, n \leq 1$ abbiamo il parallelogramma individuato da A, B, C **Osservazione**
Questo procedimento funziona in ogni dimensione, Ad esempio se A,B,C,D sono quattro punti indipendenti

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}.$$

se $0 \leq, t, n, v \leq 1$ tetraedro di vertici ABCD
se $n, t, v \geq 0$ e $n + t + v \leq 1$ si ha un parallelogramma
in generale dati $p_0, \ldots, p_k$ punti indipendenti:

$$\overrightarrow{p_0 p} = \sum_{i=1}^{k} t_i p_0 p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1.$$

definisce il k**-simplesso di vertici** $p_0, \ldots, p_k$

Definizione 12 (Sottosineime Convesso)
$S \subseteq \mathbb{A}$ si dice Convesso se per ogni $A, B \in S$ il segmento AB è contenuto in S

1.6 Cambiamenti di riferimento affine

Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine n-dimensionale

$$R = Ee_1, \ldots, e_n; \qquad R' = Ff_1, \ldots, f_n \quad \text{due riferimenti affini.}$$

$$\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}, \quad \Gamma = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

$$\overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \overrightarrow{FE} = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \quad \overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i.$$

$$A = (e_{ij}) = \varepsilon(Id_V)_\Gamma.$$

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EP} = -\sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{1}$$

$$\overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1,j=1}^{n} y_i a_{ij} - e_i \tag{2}$$

Comparando (1), (2) troviamo

$$X = AY + b.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline Y \end{pmatrix}.$$

$$Y = A^{-1}X - A^{-1}b.$$

1.7 Forme Bilineari e Simmetriche

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Definizione 13
Una funzione $g : VxV \to \mathbb{K}$ Si dice ***Forma bilineare*** *se è lineare in ciascuna variabile fissata l'altra*

in altre parole:

$$g(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha g(v_1, v_3) + \beta g(v_2, v_3) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Definizione 14
g si dice ***simmetrica*** *se*

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esempio
Sia A una matrice quadrata nxn

$$\textit{Allora} \quad g_A(x, y) = X^t AY.$$

è una forma bilineare su K^n
Esempio
g_A è bilineare con

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 x_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{smallmatrix}\right) = x_1(2y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + ey_2) =$$
$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Osservazione
g_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica

Esempio (Importante)
in $\mathbb{K}^n$ prendiamo $A = I_n$

$$g_{I_m}(X, Y) = X^t Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se g è una forma bilineare simmetrica su V e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, definisco la matrice di g rispetto a B come

$$[g]_B \to a_{ij} = g(v_i, v_j) \quad 1 \le i, j \le n.$$

$$g(v, w) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \ \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i g(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i a_{ij} = X^t AY.$$

Ricorda: X^t è la matrice trasposta di X

1.8 Prodotto Scalare

V spazio vettoriale Reale

Definizione 15 (Prodotto Scalare)
Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica
$<,>: VV \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$< v, v > \ge 0 \quad \forall v \in V$$
$$< v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Nomenclatura 2
1.$v, w \in V$ *si dicono* ***ortogonali*** *se*

$$< v, w >= 0.$$

2. $||v|| = \sqrt{< v, v >}$ *è la norma di* v
3. *In* $\mathbb{R}^n$, $< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *è detto* ***prodotto scalare standard***

$$|| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} || = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Proposizione 5 (Disuguaglianza di Schwarz)

$$v, w \in V \qquad < v, w >^2 \le < v, V >< w, w > .$$

e vale l'uguaglianza se e solo se v,w sono dipendenti

Dimostrazione
Se w=0 la disuguaglianza è ovvia, quindi possiamo assumere $w \neq 0$. *Per* $v, w, a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \leq < av + bw, av + bw > &= a < v, av + bw > + b < w, av + bw > = \\ &= a(a < v, v > + b < v, w >) + b(a < w, v > + b < w, w >)i = \\ &= a^2 < v, v > + 2ab < v, w > + b^2 < w, w > \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la simmetria del prodotto scalare $< v, w > = < w, v >$
Notiamo che vale l'uguaglianza solo se $av + bw = 0$, *cioè* v, w *sono paralleli.*
La relazione

$$a^2 < v, v > + 2ab < v, w > + b^2 < w, w > \geq 0.$$

vale per ogni scelta di a, b.
Prendo $a = < w, w >$ *e* $b = - < v, w >$

$$0 \leq < w, w >^2 < v, v > - 2 < w, w > < v, w >^2 + < v, w >^2 < w, w > .$$

Poiché $W \neq 0$, $< w, w >> 0$ *quindi posso dividere la relazione precedente per* $< w, w >$, *per altro senza cambiare verso dato che il prodotto scalare è definito positivo*

$$0 \leq < w, w > < v, w > - < v, w >^2 .$$

ovvero

$$< v, w >^2 \leq < v, v > < w, w > .$$

$\square$

Osservazione
$| < v, w > | \leq ||v|| ||w||$
Proprietà della lunghezza
1. $\forall v \in V \quad ||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V$

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

Lemma 5

$$1.\ \ ||v|| \geq 0 \ \ e \ ||v|| = 0 \ \ se \ e \ solo \ se \ v = 0..$$

$$2.\ \ ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v|| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$$

$$3.\ \ ||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V.$$

Dimostrazione
1. segue dalla definizione
2. $||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = |\alpha| \cdot ||v||$
3. $||v + w||^2 =< v + w, v + w >=$
$=< v, v > + < w, v > + < v, w > + < w, w >=$
$= ||v||^2 + 2 < v, w > +||w||^2 \leq ||v||^2 + 2||v||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$
Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi □

Definizione 16
Sia E uno spazio affine con associato spazio vettoriale V, Diremo che E è uno spazio vettoriale euclideo se in V è associato un prodotto scalare definito positivo, cioè se V è uno spazio vettoriale euclideo

Definizione 17 (Versore)
Sia $v \in V$ tale che $||v|| = 1$ allora v è un versore

Oss
Dat $u \neq 0$, $\frac{u}{||u||}$ è un versore

$$\left|\left|\frac{u}{||u||}\right|\right| = \frac{1}{||u||} \cdot ||u|| = 1.$$

Proposizione 6
Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un insieme ortogonale allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti. In particolare se $dim(V) = n$, un insieme ortogonale di n vettori è una base

Dimostrazione
Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k = 0$
$< \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k, v_i >=< 0, v_i >= 0$
$= \alpha_1 < v_1, v_i > + \ldots + \alpha_k < v_k, v_i >$
$= \alpha_i < v_i, v_i >$

Dato che $< v_i, v_i >> 0$ *poiché* $v_i \neq 0$ *per ipotesi, dunque* $\alpha_i = 0$*,*
dato che posso scegliere qualunque v_i $\square$

Osservazioni

1. La base standard di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
2. Sia $g =<,>$ un prodotto scalare su V, Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g-ortonormale allora $[g]_B = Id_n$ ovvero $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$

Inoltre, se $X = [v]_B, \quad Y = [Id]_B$

$g(v, w) = X^t[g]_B Y = X^t Y$ (sempre con B ortonormale)

Proposizione 7

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, per ogni $v \in V$ risulta

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i.$$

Dimostrazione

(1) *Sia* $\quad v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

$$< v, v_i >=< \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_i >= \sum_{j=1}^{n} a_j < v_j, v_i >= \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1) a_j *con* $< v, v_j >$ $\square$

Nomenclatura 4

Dato $v \neq 0$ viene detto coefficiente di Fourier di $w \in V$ risptto a v

$$a_v(w) = \frac{< v, w >}{< v, v >}.$$

Nota

In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di w rispetto a v (moltiplicato quindi per il versore di v otteniamo il vettore della proiezione)

Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.

$< w - a_v(w)v, v >=< w - \dfrac{< v, w >}{< v, v >} v, v >=< w, v > - \dfrac{< v, w >}{\cancel{< v, v >}} \cdot \cancel{< v, v >}$

1.9 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Lemma 6
Sia $v_1, v_2, \dots$ una successione di vettori in V spazio vettoriale euclideo. Allora:
1. Esiste una successione $w_1, w_2, \dots$ in V tale che per ogni $k \geq 1$

$$a) \quad < v_1, \dots, v_K >=< w_1, \dots, w_k > .$$

$$b) \quad < w_i, w_j >= 0 \text{ se } i \neq j.$$

2. Se $u_1, u_2, \dots$ è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Dimostrazione
Costruiamo i w_i per induzione su k.
Base $k = 1$

$$v_1 \to w_1 = v_1 \text{ verifica } a, b.$$

Supponiamo per induzione di aver costruito $w_1, \dots w_t$, $t > 1$ verificanti a e b e costruiamo w_{t+1}

$$\o w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

per induzione $v_i \in< w_1, \dots, w_t >\subseteq< w_1, \dots, w_{t+1} > \quad 1 \leq i \leq t$
dunque

$$< v_1, \dots, v_{t+1} > \ \subseteq \ < w_1, \dots, w_{t+1} > .$$

D'altra parte $w_{t+1} \ \in< \ w_{1,t}, v_{t+1} \ >=< \ v_1, \dots, v_{t+1} \ >$ perché per induzione $w_i \in< v_1, \dots, v_t > \quad 1 \leq i \leq t$
Quindi $< w_1, \dots, w_{t+1} > \ \subseteq \ < v_1, \dots, v_{t+1} >$ e quindi le proprietà a è verificata.
Verifichiamo ora b, sia $w_i \neq 0$

$$< w_{t+1}, w_i >=< v_{t+1} - \sum_{j=1}^{t} a_{w_j}(v_{t+1}) w_j, w_i >=$$

$$=< v_{t+1}, w_i > -a_{w_j} < (v_{t+1}) w_j, w_j >=$$

$$=< v_{t+1}, w_i > - \frac{< v_{t+1}, w_i >}{\cancel{< w_i, w_i >}} \cancel{< w_i, w_i >} = 0$$

2. Di nuovo procedo per induzione su k, con base ovvia $k = 1$
Supponiamo $t > 1$ e apponiamo che esistano $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ con $u_k = \delta_k w_k$ per ogni $k \leq t$. per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \qquad z \in < w_1, \ldots, w_t > = < u_1, \ldots, u_t > .$$

D'altra parte, $< u_{t+1}, z > = < w_{t+1}, z > == 0$
Quindi $< u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w > = 0$ ovvero $< z, z >$
$\Rightarrow z = 0$ *e* $u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$ □

Proposizione 8
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale dello spazio euclideo V, la base $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$ è ortonormale se e solo se $M = [Id_V]_L^B$ è ortogonale $(MM^t = Id_v)$

Dimostrazione
Sia $M = (m_{ij})$ per definizione di M $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \quad 1 \leq i \leq n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n m_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj} v_h \rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki} m_{kj} \langle v_k, v_h \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (M^t M)_{i,j}$$ □

Osservazione
Sia $V = \mathbb{R}[x]$ $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$ è un prodotto scalare

Definizione 18 (Angolo non orientato tra vettori)
$|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| ||w|| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| ||w||} \leq 1 \qquad (v, w \neq 0)$
allora
$\exists! \in [0, \pi] : \cos = \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| ||w||}$
è detto angolo non orientato tra v, w

Definizione 19
Sia $S \subseteq V$ con V spazio euclideo, $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Osservazione
$S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.
Siano $v_1, v_2 \in S^\perp$ e $\alpha_{1,2} \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

Proposizione 9
Sia V uno spazio vettoriale euclideo e W un sottospazio di V allora

$$V = W + W^{\perp}$$

Dimostrazione
Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortogonale di W
consideriamo $\pi : V \to W$ con $\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$, dobbiamo mostrare che $V = W + W^{\perp}$ e che $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ ma la seconda è ovvia poiché se $w \in W \cap W^t$ è ortogonale a se stesso $\Rightarrow \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$
Osserviamo inoltre che se $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ la richiesta è dunque $v - \pi(v) \in W^{\perp}$. Basta verificare che $\langle v - \pi(v), w_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\cancel{\langle w_j, w_j \rangle}} \cancel{\langle w_j, w_j \rangle} = 0.$$

□

Osservazione
1- Se V è spazio euclideo e W è sottospazio di V,
$(W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ è uno spazio euclideo
2- Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è base ortogonale di W risulta:
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h||$
e vale l'uguaglianza se se solo se $a_h = \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle}$
Dimostrazione (Punto 2)
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_k|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h||$;
$||v - w||^2 = \langle v - u, v - u \rangle =$
$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u \rangle = \langle v - w, v - w \rangle + \langle w - u, w - u \rangle \geq ||v - w||^2$
□

1.10 Prodotto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo per cui $dim(V) = 3$ sia $\{v, j, k\}$ una base ortonormale di V

Definizione 20 (Prodotto vettoriale)
Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ pongo $v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

B_1, B_2 si dicono concordemente orientate se $det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$, questa è inoltre una relazione di equivalenza.
Di fatti se $B_1 \sim B_2,\ B_2 \sim B_3 \ \ det([Id]_{B_1}^{B_3}) = det([Id]_{B_2}^{B_3}[Id]_{B_1}^{B_2}) =$
$= det([Id]_{B_2}^{B_3}) det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_2$

1.11 Operatori Lineari Unitari

Sia V uno spazio vettoriale euclideo

Definizione 21
Un operatore lineare $T : V \to V$ si dice unitario se
$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V$

Proposizione 10
Sia V spazio vettoriale euclideo $n-$ dimensionale e sia $T : V \to V$ un applicazione, le seguenti sono equivalenti
1. *T è unitario*
2. *T è lineare e$||T(w)|| = ||v|| \quad \forall v \in V$*
3. *$T(O) = O, ||T(v) - T(w)|| = ||v - w|| \quad \forall v, w \in V$*
4. *T è lineare e manda basi ortonormali in basi ortonormali*
5. *T è lineare ed esiste una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale di V tale che $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ è una base ortonormale*

Dimostrazione
$1 \Rightarrow 2$. *Unitario* $\Rightarrow \langle T_(v), T(v)\rangle = ||T(v)||^2 = \langle v, v\rangle = ||v||^2$

$2 \Rightarrow 3$ *T lineare* $\Rightarrow T(O) = O \quad ||T(v) - T(w)|| = ||T(v - w)|| = ||v - w||$

$3 \Rightarrow 1||T(v)|| = ||T(v) - O|| = ||T(v) - T(O)|| = ||v - O|| = ||v||$
Esplicitiamo $||T(v) - T(w)||^2 = ||v - w||^2$
$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w)\rangle = \langle v - w, v - w\rangle$
$\Rightarrow \cancel{||T(v)||^2} - 2\langle T(v), T(w)\rangle + \cancel{||T(w)||^2} = \cancel{||v||^2} - 2\langle v, w\rangle + \cancel{||w||^2}$
Dunque $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$
Resta da vedere che T è lineare.
Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V allora $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale per quanto dimostrato prima.

$$\langle T(e_j), T(e_i)\rangle = \langle e_j, e_i\rangle = \delta_{ij}.$$

$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (\Rightarrow x_i = \langle v, e_i\rangle)$
$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v), T(e_i)\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_j)$
Dunque $T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$ *quindi T è lineare*

$1 \Rightarrow 4\{e_1, \dots, e_n\}$ *è una base ortonormale*

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

$4 \Rightarrow 5$ *Ovvio*

$5 \Rightarrow 1$ *Sia* $e_1, \dots, e_n$ *la base ortonormale dell'enunciato. Considero* $u, v \in V$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(w)\rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, T(\sum_{j=1}^{n} y_i e_i)\rangle = \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_i T(e_i)\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \langle T(e_i), T(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle u, w\rangle\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \delta_{ij}$ □

Proposizione 11

$\alpha \in V\{0\} \qquad S_\alpha = v - 2\dfrac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$ *riflessione rispetto ad* α^2

1. S_α *è unitaria*
2. $S_\alpha^2 = Id$
3. *Esiste una base* B *di* V *tale che* $(S_\alpha)_B = diag(1, \dots, 1, -1)$

Dimostrazione

1. $\langle S_\alpha(v), S_\alpha(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

$\langle v - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha, w - 2\frac{\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\rangle =$

$\langle v, w\rangle - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle \alpha,w\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} + 4\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle\cancel{\langle \alpha,\alpha\rangle}}\cancel{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \langle v, w\rangle$

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp.$$

Quindi presa una base $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ *di* $\alpha^\perp$,
$B = \{w_1, \dots, w_{n-1}, \alpha\}$ *è una base di* V *e*
$S_\alpha(w_i) = w_i, i = 1, \dots, n-1$

$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$

$(S_\alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = M$

In particolare $S_\alpha = Id$ poiché $M^2 = Id$ $\square$

1.12 Osservazioni sugli operatori unitari

1. Se T è unitario, e $v \in Ker(T)$, allora

$$0 = ||T(v)|| = ||v|| \Rightarrow v = 0.$$

Dunque T è invertibile.
È facile vedere che se T_1, T_2 sono unitarie, lo è anche $T_1 T_2^{-1}$, quindi, posto

$$O(V) = \{T \in End(V) | T \text{ è unitario}\}.$$

$$O(V) \leq GL(V).$$

e $O(V)$ viene chiamato gruppo ortogonale di V.

2. Se fissiamo in V una base ortonormale B, e $T \in O(V), [T]_B^B$ è ortogonale. Infatti sia $A = [T]_B^B,\ B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Le colonne di A sono le coordinate di $T(e_i)$ rispetto a B, quindi T è unitario se e solo se

$$\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}.$$

dove A^i, A^j rappresentano la riga i-esima e j-esima della matrice A

3. Se $T \in O(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora $\lambda = \pm 1$
Se λ è autovalore, esiste $v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$

$$||v|| = ||T(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Poiché $v \neq 0, ||v|| \neq 0$ quindi $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

4. Se V è uno spazio euclideo di dimensione n, ogni $T \in O(V)$ è composizione di al più n riflessioni S_n

Dimostrazione
per induzione su n, con base ovvia $n = 1$.
Supponiamo il teorema valga per ogni spazio euclideo di dimensione $n-1$ e dimostriamo per uno spazio euclideo di dimensione n. Sia $f \in O(V)$
Primo caso
f ha un punto fisso non nullo

$$v \in V, \quad v \neq 0, \quad f(v) = v.$$

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^\perp.$$

$W = v^\perp, \quad (W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ è euclideo di dimensione $n-1$
$F|_W : W \to W$, infatti, se $u \in W$

$$\langle f(u), v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0.$$

Per induzione $f|_W = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n-1$
e quindi $f = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n-1$
Secondo caso
Sia $v \neq 0$ *tale che* $f(v) \neq v$. *Allora*

$$S_{f(v)-v}(f(v)) = v.$$

Infatti $S_{f(v)-v}(f(v)) = f(v) - 2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(f(v)-v)$
Ma $\qquad = f(w) = +2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(v-f(v))$
Ora $\langle f(v), f(v)-v\rangle = ||v||^2 - \langle f(v), v\rangle$
$\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle = 2||v||^2 - 2\langle f(v), v\rangle.$
Dunque $(S_{f(v)-v} \circ f)$ *ha un punto fisso. Per il primo caso* $S_{f(v)-v} \circ f = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r} \quad r \leq n-1$
Dunque $S_{f(v)-v} \circ S_{f(v)-v} \circ f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \ldots \circ S_{\alpha_r}$
$\Rightarrow f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}$
quindi f è composizione di al più n riflessioni □

2 Geometria Euclidea

Uno spazio affine euclideo è uno spazio affine $(E, V, +)$ dove V è uno spazio euclideo.
Si può definire una distanza tra punti di E

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}||.$$

Un riferimento cartesiano per uno spazio affine euclideo è il dato $Oe_1 \ldots e_n$ di un punto e di una base ortonormale di V
In particolare se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 22
Siano S, T sottospazi affini in uno spazio euclideo δ di dimensione n. Diciamo che S, T sono ortogonali se, posto $S = p+U, \quad T = q+W, \quad p \in S, q \in T$ U, W sottospazi vettoriali di V,

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad se\ dim(S) + dim(T) < n.$$

$$\langle U^\perp, W^\perp \rangle = 0 \quad se\ dim(S) + dim(T) \geq n.$$

2.1 Definizioni su operatori

Definizione 23
$T \in End(V)$ è
· Simmetrico o Autoaggiunto se

$$T = T^t.$$

· Antisimmetrico se

$$T = -T^t.$$

Proposizione 12
T è unitario se e solo se $T^t \circ T = Id_V$

Definizione 24
Sia E uno spazio euclideo. Un'affinità $f : E \to E$ si dice Isometria se la sua parte lineare $\varphi : V \to V$ è un operatore unitario

Osservazione
Le isometrie formano un gruppo denotato con $Isom(E)$ (difatti, $Isom(E) \leq Aff(E)$)
Infatti la composizione di isometrie è un isometria.
se φ_1, φ_2 sono le parti lineari di $f_1, f_2 \in Isom(E)$
Per ipotesi $\varphi_1^t \circ \varphi_1 = Id, \quad \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^t \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_2^t \circ \varphi_1^t \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id.$$

Inoltre, dalla definizione, l'inversa di un operatore unitario è unitario.
In effetti, ho dimostrato che

$$O(V) = \{f \in End(V) | f^t \circ f = Id\}.$$

è un gruppo, e un sottogruppo di $GL(V)$

Nomenclatura 5
Data $f \in Isom(E)$ diciamo che:
f è diretta se $det(\varphi) = 1$
f è inversa se $det(\varphi) = -1$

Le isometrie dirette formano un sottogruppo

$$Isom^+(E) \leq Isom(E).$$

Osservazione
1. Sia $O \in E$

$$Isom^+(E)_O \leq Isom(E)_O = \{f \in Isom(E) | f(O) = O\} \leq Isom(E).$$

Dove $Isom^+(E)_O$ sono le rotazioni di centro O
2. Se nello spazio euclideo E è assegnato con riferimento cartesiano $R = Oe_1, \ldots, e_n$, ogni isometria $f \in Isom(E)$ con parte lineare $\varphi \in O(V)$ si scrive in coordinate rispetto al riferimento nella forma

$$Y + AX + c \qquad A \in O(n).$$

dove $p \in E, \quad X = [P]_R, \quad Y + [f(P)]_R$
$A = [\varphi]^{\{e_1,\ldots,e_n\}}_{\{e_1,\ldots,e_n\}}, \quad c = [f(O)]_R$

Teorema 2
Sia E uno spazio euclideo, Un'applicazione $f : E \to E$ è un isometria se e solo se

$$\circledast d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \qquad \forall P, Q \in E.$$

Dimostrazione
supponiamo che f sia un'isometria, con parte lineare φ

$$d(f(P), f(Q)) = ||\overrightarrow{f(P)f(Q)}|| = ||\varphi(\overrightarrow{PQ})|| = ||\overrightarrow{PQ}|| = d(P, Q).$$

Viceversa se $f : E \to E$ un'affinità verificante l'equazione $\circledast$, fissiamo $O \in E$ e definiamo $\varphi : V \to V$ ponendo

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Poiché ogni vettore $v \in V$ è del tipo $\overrightarrow{OP}$ per qualche $P \in E$, φ è definita, e tale che se $\underline{O}$ è il vettore nullo in V

$$\varphi(\underline{O}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{O}.$$

Inoltre se $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$
$||\varphi(v) - \varphi(w)|| = ||\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})|| =$
$= ||\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(q)}|| = ||\overrightarrow{f(Q)f(P)}|| =$
$= d(f(Q), f(P)) = d(Q, P) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||v - w||$

Quindi, per una delle caratterizzazioni già dimostrati, φ è un operatore unitario. Dimostro ora che f è un'affinità con parte lineare φ

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O) - f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

□

2.2 Isometrie di piani e spazi euclidei di dimensione 3

$A \in SO(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che: $\begin{array}{l} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{array}$

$a^2 + c^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta$
altre condizioni $\rightsquigarrow \quad b = -\sin\theta, \quad d = \cos\theta$
Dunque

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che se $det(A) = det(B) = -1$ allora $det(AB) = 1$, quindi se $A \in O(2) \setminus SO(2)$

$$A = (AB)B^{-1} = (AB)B^t.$$

con $B \in O(2) \setminus SO(2)$ fissato.
Scegliendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tutti gli elementi di $O(2) \setminus SO(2)$ sono del tipo

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lemma 7
1) $A_\theta = R_\theta A_O = A_O R_{-\theta}$
2) $A_\varphi \circ A_\theta = R_{\varphi-\theta}$
3) A_θ *ha autovalori* 1 *e* -1 *con autospazi ortogonali*

Dimostrazione
1. ovvio
2. $A_\varphi A_\theta = R_\varphi A_O R_\theta A_O = R_\varphi A_O A_O R_{-\theta} = R_\varphi R_{-\theta} = R_{\varphi-\theta}$
3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_φ*:*

$$det \begin{pmatrix} T-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & T+\cos\theta \end{pmatrix} = (T-\cos\theta)(T+\cos\theta) - \sin^2\theta = T^2 - 1.$$

quindi A_θ *ha autovalori* 1*. Si capisce direttamente che gli autospazi sono ortogonali. In realtà*

$$V_1 = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta-1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right), \quad V_{-1} - \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta+1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right).$$

$\square$

Sia $c \in E \quad \sigma : E \to E$ rotazione di centro c.
La parte lineare di σ appartiene a $SO(2)$, quindi è del tipo R_θ. Se Oe_1e_2 è un riferimento cartesiano

$$R_{c,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OC}}.$$

Nomenclatura 6
riflessione: isometria diretta che fissa tutti i punti di una retta, detta asse di riflessione

Osservazione
Riflessioni per $O \Leftrightarrow O(w) \setminus SO(2)$

Lemma 8
1. $r \subset E$ retta, $C \in r$, $\quad R_{C,\theta}$ rotazione di centro C. Esistono rette s, t contenenti C tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette r, s passanti per C $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro C e

$$\rho_r \circ \rho_s = Id \Leftrightarrow r = s.$$

2. $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ è una rotazione di angolo $\theta + \varphi$ a meno che $\theta + \varphi = 2k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, in tal caso è una traslazione che è diversa dall'identità se e solo se $C \neq D$
3. Se $C, D \in E$, $C \neq D$ e r è la retta per C e D. Se $R_{C,\theta}, R_{D,\varphi}$ sono non banali e $\theta + \varphi \neq 2k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, allora $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ e $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\varphi}$ hanno centri distinti e simmetrici rispetto ad r.

$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$

$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 25 (Riflessione)
Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"
Possiamo fissare $c = 0 \;\; p_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$
Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \quad \to \quad \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

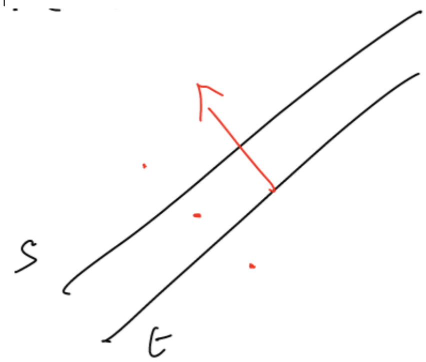
altrimenti è una traslazione (che è l'identità $= D$)
Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$
Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \qquad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$



$\rho_s \circ \rho_t = t_v$

con v ortogonale alla comune direzione di s, t

In coordinate rispetto ad un riferimetno cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv \binom{x_1}{x_2}$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \quad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d)+d-x)+x.$$

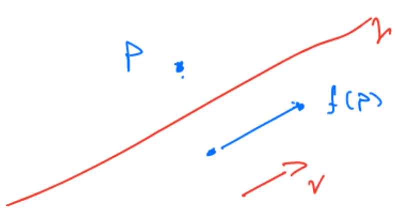
dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente
$\underbrace{R_{\theta+\varphi}(x-d)}_{\text{parte lineare}} + R_\theta(d-c) + c$

T T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

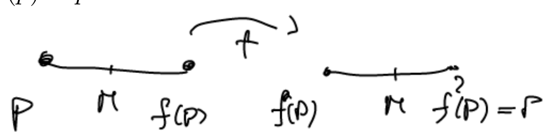
che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 26 (Glissoriflessione)
Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ di una riflessione di asse r con una traslazione $t_v \neq Id$ con $v \neq 0, v \parallel r$

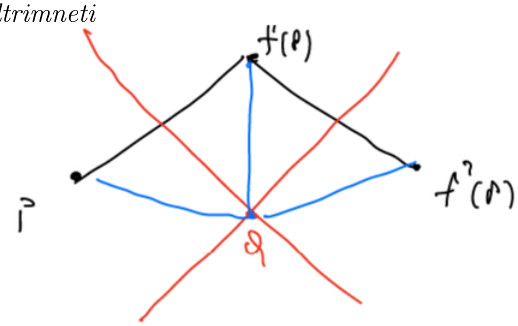


Teorema 3 (Charles, 1831)
Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione
Sia $f \in Isom(E)$
Se f *ha un punto fisso abbiamo già visto che* f *è una rotazione se è diretta o una riflessione se* f *è inversa*
se f *diretta priva di punti fissi. Allora anche* f^2 *non ha punti fissi, perché se* $f^2(p) = p$



Dunque $f(M) = M$ *escluso.*
DIco che $p, f(p), f^2(p)$ *che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati, Altrimneti*

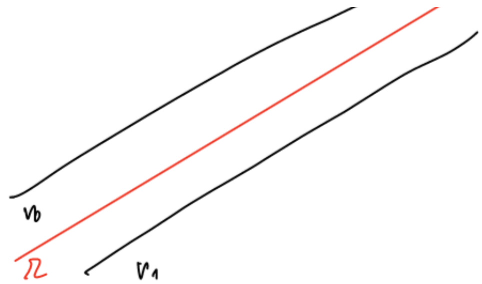


$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p))(\text{ poichè } f \text{ è un'isometria}).$$

$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché f *preserva l'orientazione, il triangolo* $QPf(P)$ *viene trasformato in* $Q, f(P), f^2(P)$ *da cui* $f(Q) = Q$
Dunque tutti i punti $f^i(P), \quad i \geq 0$ *sono allineati, quindi se* r *è la retta che li contiene,* f *agisce su* r *come una traslazione.*
Poiché f *è diretta,* f *agisce su tutto il piano come una traslazione.*

Sia ora f *inversa senza punti fissi,*
Allora f^2 *è diretta e come prima* $f^2 = t_v$ *per qualche* v
Sia $P \in E$ *un punto* $r_0 = \overrightarrow{Pf^2(P)}, \quad r_1 = \overrightarrow{f(P)f^2(P)}$
sono rette parallele che sono scambiate tra loro da f



Sia r la retta equidistante da r_0 e r_1.
Allora $f(r) \subseteq r$ Ma $f^2 = t_v$ $f|_r = t_{v/2}$
Se ora consideriamo $t_{-v/2} \circ f$
questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente r,
quindi è una riflessione che indichiamo con ρ. Dunque

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

$\square$

2.3 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Ricorda
$f \in End(V)$ diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f
$\Leftrightarrow A = [f]_B^B$ B base $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$ è diagonale

Lemma 9
Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ha solo radici reali

Dimostrazione
$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C})$ $\;L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore e $x \neq 0$ un corrispondente autovettore

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t(Ax) = \overline{x}^t(\lambda x) = \lambda \overline{x}^t x$
$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda}\overline{x}^t x$
$\overline{x}^t x = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i \leftarrow$ *è un numero reale positivo poiché $x \neq 0$*

$$\lambda \overline{x}^t x = \overline{\lambda} x^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda.$$

$\square$

Teorema 4 (Teorema Spettrale)
Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $T \in End(V)$ un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per T

Corollario 2
Per ogni matrice reale simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $N \in O(n)$ tale che

$$N^{-1}AM = N^tAN \qquad \text{è ortogonale.}$$

Dimostrazione (Teorema)
Per induzione su $n = dim(V)$. Base $n = 1$ ovvia
Supponiamo $n = dim(v) \geq 2$. Poichè T è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi T ammette un autovalore λ d sia e_1 il suo corrispondente autovettore di lunghezza 1

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp.$$

Chiamo $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^\perp$
Dico che $T|_U : U \to$, per cui $T|_U \in End(U)$
Infatti, dimostro che $u \in U \to T(u) \in U$
ipotesi: $\langle u, e_1\rangle = 0$
Tesi: $\langle Tu, e_1\rangle = \langle u, T^te_1\rangle = \langle u, Te_1\rangle = \langle u, \lambda e_1\rangle = \lambda\langle u, e_1\rangle = 0$
dove abbiamo usato la simmetria di T
Chiaramente $T|_U$ è simmetrico, quindi per induzione U ha una base ortonormale di autovettori $\{e_2, \ldots, d_n\}$.
Ne segue che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale di V formata da autovettori per T □

2.4 Prodotto Hermitiano

V spazio vettoriale complesso

Definizione 27 (Funzione sesquilineare)
Una funzione sesquilineare su V è un'applicazione $h : V \times V \to \mathbb{C}$ che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$\begin{aligned} &h(v + v', w) = h(v, w) + g(v', w) \\ &h(\alpha v, w) = \alpha h(v, w) \\ &h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w') \\ &h(v, \alpha w) = \overline{\alpha} h(v, w) \end{aligned}$$

per ogni scelta di $v, w, v', w' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

Definizione 28 (Forma hermitiana)
Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

Osservazione
Se h è hermitiana, $h(v, v) \in \mathbb{R}$, infatti deve risultare $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

Definizione 29 (Forma antihermitiana)
Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

Osservazione
In questo caso $h(v, v) \in \sqrt{1}\mathbb{R}$

Definizione 30
Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Definizione 31
Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

Esempio
$V = \mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

Dato V, consideriamo una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V Se h è una forma heritiana, diciamo che $(h_{ij}) = h(v_i, v_j)$ è la matrice che rappresenta h nella base B e la denoto come $(h)_B$
se $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(v,w) &= h(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h_i(v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \overline{y} \end{aligned}$$

Poiché h è hermitiana, $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$

$$\begin{aligned} X^t HY &= \overline{Y^t HX} \\ &= \overline{Y}^t \overline{HX} \\ &= (\overline{Y}^t \overline{HX})^t \\ &= \overline{X}^t \overline{H}^t \overline{Y} \qquad \Rightarrow \qquad H = \overline{H}^t \end{aligned}$$

Definizione 32
Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$

Esercizio
le matrici hermitiane 2×2 sono un $\mathbb{R}$-sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ di dimensione 4

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 & a_3 - ib_3 \\ a_2 - ib_2 & a_4 - ib_4 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} &a_1 + ib_1 = a_1 - ib_1 \Rightarrow b_1 = 0 \\ &a_2 + ib_2 = a_3 - ib_3 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ &a_3 + ib_3 = a_2 - ib_2 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ &a_4 + ib_4 = a_4 - ib_4 \Rightarrow b_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{M}_2 = \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Si definiscano allo stesso modo del caso reale simmetrico S^t
coefficiente di Fourier

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||||w||.$$

disuguaglianza triangolare $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$
Operatore unitario: $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ t.c.

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Verifichiamo le caratteristiche degli operatori unitari dati nel caso reale
Gram Schmidt
$T \in End(V)$ operatore unitario
1. Gli autovalori hanno modulo 1
2. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali
1. Sia v un autovettore di autovalore λ

$$\langle v, v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \langle tv, tv\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \quad |\lambda|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

2. Sia $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$

$$\langle v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle.$$

Se $\langle v, w\rangle \neq 0 \neq 0 \Rightarrow \lambda\overline{\mu} = 1$. Per il punto 1

$$\lambda\overline{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \overline{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \quad \text{assurdo.}$$

Definizione 33
Diciamo che $U \in M_n(\mathbb{C})$ è unitaria se

$$U\overline{U}^t = Id.$$

Proposizione 13
$T \in End(V)$ è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \langle Tv_i, Tv_j\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = e_i^t A^t \overline{A} e_j = A_i^t \overline{A}_j$$

dove abbiamo posto $A = (T)_B$ e $\{e_i\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$
w dove A_i, A_j sono la i-esima e la j-esima colonna di A
($A_i^t \overline{A}_j$ è il prodotto hermitiano standard) □

Come nel caso reale si dimostra

Teorema 5
Sia $T \in End(V)$ un operatore unitario Esiste una base standard di autovettori per T

In particolare, per ogni matrice unitaria $A \in U(n)$ esiste $M \in U(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale a volte si pone

$$A^* = \overline{A}^t.$$

A unitario $AA^* = Id$
A hermitiano $A = A^*$
A antihermitiano $A = -A^*$

Definizione 34 (Operatore Aggiunto)
Dato $T \in End(V)$, esiste unico $S \in End(V)$ tale che

$$\langle Tu, w\rangle = \langle u, Sw\rangle \quad \forall u, w \in V.$$

Tale operatore è detto aggiunto hermitiano di T e denotato con T^*

Definizione 35 (operatore normale)
Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto hermitiano (forma hermitiana definita positiva), un operatore $L \in End(V)$ è normale se

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

Osservazione
L unitario, hermitiano, antihermitiano $\Rightarrow$ L diagonale

Teorema 6
Sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) *L è normale*
2) *esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di L*

2.5 Diangonalizzazione unitaria di operatori normali

($\mathbb{C}^n$, prodotto hermitiano standard) $M^\star = \overline{M}^t$
M è normale se $MM^\star = M^\star M$
siano normali le matrici

unitarie	$MM^\star = Id$
hermitiane	$M = M^\star$
antihermitiane	$M = -M^\star$

Teorema 7 (Spettrale)
M è normale se e solo se $\exists U \in U(n) :\ U^t M U$ è ortogonale

Nota
$U(n)$ spazio delle matrici unitarie

2.6 Classificazioni delle isometrie

Nomenclatura 7
· *rotazioni*
· *riflessioni*
· *traslazioni*
· *glissoriflessione* $= t_v \circ s_\alpha$ *con* $v \parallel \alpha^t$ *(disegno de li mortacci sua)*
· *glissorotazioni* $= t \circ R$ *dove* $v \parallel a$, a *asse di* R *(altro disegno)*
· *riflessioni rotatorie* $s_a \circ R$ R *rotazione di asse* $\underline{a}$, $s_{\underline{a}}$ *è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad* $\underline{a}$

Teorema 8 (Eulero 1776)
Ogni isometria di $\mathbb{E}^3$ è di uno dei sei tipi sopra descritti

2.7 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

Lemma 10
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$
Siano $P, Q \in End(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P, risulta

$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione
Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)
$\dim(V) < +\infty$

Teorema 9
Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in End(V)$ operatore, sono equivalenti

- *L è normale (rispetto ad h)*
- *esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L*

Lemma 11
(V, h) spazio hermitiano, $L \in End(V)$ normale
sono equivalenti

- *$Lv = \lambda v$*
- *$L^\star v = \overline{\lambda} v$*

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per $L^\star$

$$V_\lambda(L) = V_{\overline{\lambda}}(L^\star).$$

Dimostrazione
Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\overline{\lambda}}(L^\star)$. L'inclusione contraria segue da $L^{\star t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$\begin{aligned} h(L^\star(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \overline{\lambda} h(v, w) = h(\overline{\lambda} v, w) \end{aligned}$$

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, w) = 0 \quad \circledast$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$L^\star(v) \in V_\lambda(L), \quad \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

$$\Rightarrow \quad L^\star(v) - \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

Quindi nella $\circledast$ posso prendere $w = L^\star(v) - \overline{\lambda} v$, ottenendo

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, L^\star(v) - \overline{\lambda} v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$L^\star(v) - \overline{\lambda} v = 0$$

cioè $\quad L^\star(v) = \overline{\lambda} v$

□

Osservazione
Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v, w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^\star w) = h(v, \overline{\mu} w) = \mu h(v, w) \Rightarrow h(v, w) = 0$$

Dato che $\lambda \neq \mu$

Dimostrazione (Teorema Spettrale)
1) $\Rightarrow$ 2) *Procediamo per induzione su* $\dim V$*,con base ovvia* $\dim V = 1$
Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ *e sia* $\dim_{\mathbb{C}} V = n$
Sia $v_1 \in V$ *un autovettore per* L*, che possiamo assumere di norma* 1*. Sia* $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^p erp$.
Allora $V = V_1 \oplus W$.
Poiché V_1 *è* L*-invariante (per costruzione) e* $L^\star$*-invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per* W.
Inoltre $L|_W \in End(V)$ *è normale.*
Per induzione, esiste una base $h|_W$*-ortonormale formata da autovettori per* $L|_W$*, sia* $\{v_2, \ldots, v_n\}$*. Allora* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è una base* h*-ortonormale di* V *formata da autovettori per* L.
2) $\Rightarrow$ 1)*. Sia* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base* h*-ortonormale di autovettori per* L*. Allora*

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[L^\star]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$

$$[L \circ L^\star]_B^B = [L]_B^B [L^\star]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^\star]_B^B [L]_B^B = [L^\star \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \to [A]_B^B$ *è un isomorfismo tra* $End(V)$ *e* $M_{nn}(\mathbb{C})$*, segue*

$$L \circ L^\star = L^\star \circ L.$$

cioè L *è normale* $\square$

Osservazioni
1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x,y) = x^t H \overline{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h(\binom{0}{1}, \binom{0}{1}) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y)$$

$$(L_A X)^t H \overline{Y} = X^t H \overline{L_A Y}$$

$$X^t A^t H \overline{Y} = X^t H \overline{A Y} \quad \forall X, Y$$

$$A^t H = H \overline{A}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$\det\begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2)+1 = (t+1)^2.$$

Ma $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, in particolare non è diagonalizzabile
2. Vediamo in dettaglio il fatto che $L|_W$ è normale
Ritornando alla dimostrazione del teorema spettrlae, osserviamo che se W è L-invariante è anche $L^\star$-invariante.
Infatti, se $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(L)$ (per esercizio da dimostrare)
$W = \bigoplus_\lambda (V_\lambda(L) \cap W)$
$=\bigoplus_\lambda (V_{\overline{\lambda}}(L^\star) \cap W)$
$=> W$ è $L^\star$-invariante
Adesso osservo che $(L|_W)^\star = (L^\star)|_W$
$(\mathrm{L}\big|_{W)} \circ (L\big|_W)^\star = (L|_W) \circ (L^s tar|_W) =$
$(L \circ L^\star)|_W = (L^\star \circ L)|_W = (L^\star|_W) \circ L|_W = (L|_W)^\star \circ L|_W$

2.8 Richiami su spazi vettoriali duali

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita

$$V^V = V^\star = Hom(V, \mathbb{K}).$$

sia $A \leq V$

$$Ann(A) = A^\# = \{f \in V^\star | f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

Osservazioni
1) $A^\#$ è un sottospazio
2) $A^{\#\#} =< A >$

$$i : V \to V^{\star\star}$$
$$v \in V, \quad f \in V^\star$$
$$i(v)(f) = f(v)$$

V, W spazi vettoriali di dimensione finita $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $f^\star \in Hom_{\mathbb{K}}(W^\star, V^\star)$, la trasposta di f è definita con $\phi \in W^\star$
$f^\star(\phi) = \phi \circ f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "f^\#(\phi)"'] & W \arrow[dl, "\phi"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Definizione 36
Definisco la dualità standard su V come

$$\langle\ ,\ \rangle : V^\star \times V \to \mathbb{K}.$$

$\langle v, f\rangle = \langle f, v\rangle = f(v)$
con questa proprietà

$$\langle f(v), w^\star\rangle = \langle v, f^\star(w^\star)\rangle.$$

Ricordo che se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora i funzionali $v_i^\star$ definiti da

$$\langle v_i^\star, v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

per $1 \le i \le n$ formano una base $B^\star$ di $V^\star$ detta base duale di B
Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}, L = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V, W consideriamo $f^\star : W^\star \to V^\star$ Allora:

$$\begin{array}{ccc} [f]_B^B & = & [f^\star]_{L^\star}^{B^\star\, t} \\ \| & & \| \\ (a_{ij}) & & (a_{ij}^\star) \end{array}$$

Tesi $\quad a_{ih} = a_{hi}^\star$
$f^\star(w_i^\star) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^{\overset{\star}{i}}$
$f^\star(w_i^\star)(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^\star v_i^\star(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^\star \delta_{ih} = a_{hi}^\star$
$\|$
$w_i^\star(f(w_h)) = w_i^\star(\sum_{i=1}^n a_{ih} w_i) = \sum_{i=1}^n a_{ih} w_i^\star(w_i) =$
$= \sum_{i=1}^n a_{ih}\delta_{ij} = a_{ih}$

Teorema 10 (Qualche proprietà importante)
$f : V \to W$ *lineare* $\quad f^\star : W^\star \to V^\star$
$1)(Imf)^\# = \ker f^\star$
$2)(\ker f)^\# = Imf^\star$
$3)(\lambda f + \mu g)^\star = \lambda f^\star + \mu g^\star \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, g \in Hom(V, W))$
$4)(h \circ f)^\star = f^\star \circ h^\star \qquad h : W \Rightarrow U$ *lineare*

Dimostrazione (Il punto 2, 3 e 4 vengono lasciati per esercizio)
1) $\emptyset \in (Imf)^\#$
$\Leftrightarrow \forall w \in Imf \quad \emptyset(w) = 0$
$\Leftrightarrow \forall v \in V \emptyset(f(v)) = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \circ f = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \in ker f^\star$
Quindi abbiamo visto che $(Imf)^\# = \ker F^\star$ ☐

Proposizione 14
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e W un sottospazio. Allora
$$\dim(W) + \dim W^{\#} = n.$$

Dimostrazione
Da quanto visto, la mappa
$$Hom(V_1, V_2) \to Hom(V^s tar_2, V^s tar_1)$$
$$f \qquad \to \qquad f^t$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre f è iniettiva (rispettivamente suriettiva) se e solo se $f^\star$ è suriettiva (rispettivamente iniettiva)
Consideriamo la proiezione $\pi : V \to V|_W := U$
Poiché π è suriettiva $\pi^\star : U^\star \to V^\star$ è iniettiva e
$$W^{\#} = (\ker\pi)^{\#} = Im\pi^\star.$$
per cui
$$\dim W^{\#} = \dim(Im\pi^\star) = \dim U^\star = \dim V - \dim W.$$
□

2.9 Forme bilineari 2

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Ricordiamo che una forma bilineare è un'applicazione
$$b : V \times V \to \mathbb{R}.$$
Abbiamo già osservato che se $A = [b]_B$
$X = [v]_B, \quad Y = [w]_B$
$$b(v, w) = X^t AY.$$
Come cambia $[b]_B$ se cambio B
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ X=[v]$_B$ $X' = [v]'_B$
B' = {v$'_1, \dots, v'_n$} Y = [w]$_B$ $Y' = [w]'_B$
A = [b]$_B$ $A' = [b]_{B'}$
$$b(v, w) = X^t AY = X'^T A'Y'$$
$X = MX', \quad Y = MY' \quad M = [Id_V]^B_B$
(MX')$^t A(MY') = X'^t A'Y'$
$X'M^t AMY' = X'^t A'Y'$
$A' = M^t AM$

Definizione 37
Diciamo che due matrici A, B sono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^t AM$

Proposizione 15
Due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diversi se e solo se sono congruenti

Osservazione
1. La congruenza è una relazione di equivalenza
2. Il rango è invariante per la congruenza
3. Per matrici reali invertibili, il segno del determinante è invariante
4. Se M è ortogonale

$$M^t AM = M^{-1} AM.$$

Se ho una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ posso definire due applicazioni $V \to V^\star$ nel modo seguente.

Fissato $v \in V$, prendo $\begin{array}{l} b_v(w) = b(v, w) \\ b'_v(w) = b(w, v) \end{array}$

È chiaro che $b_v, b'_v \in V^\star$ (usiamo il fatto che b è bilineare)
Dunque ho due applicazioni $V \to V^\star$

$$\delta_b(v) = b_v \quad \delta'_b(v) = b'_v.$$

Definizione 38
Il rango di una funzione bilineare è il rango di una qualsiasi matrice che la rappresenta

Definizione 39
Una forma bilineare è non degenere se ha rango (massimo) $\dim V$

Proposizione 16
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita,

$$b : V \times V \to \mathbb{K} \text{ una forma bilineare.}$$

Sono equivalenti

- b *è non degenere ovvero* $b(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\forall v \in V, v \neq 0 \quad \exists w \in V : \quad b(v, w) \neq 0$
- $\forall w \in V, \ w \neq 0 \quad \exists v \in V : b(v, w) \neq 0$
- $\delta_b : V \to V^\star$ *è un isomorfismo*
- $\delta'_b : V \to V^*$ *è un isomorfismo*

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base di* V *e sia* $A = [b]_B$
1) $\Rightarrow$ 2) *per ipotesi* $\det A \neq 0$ *se* $X = [v]_B \quad X \neq 0 \Rightarrow X^t A \neq 0$
quindi esiste $Y \in \mathbb{K}^n : X^t AY \neq 0.$
Se $w \in V$ *è tale che* $[w]_B = Y$ *ho dimostrato che* $b(v, w) = X^t AY \neq 0$
2) $\Rightarrow$ 1) *Riscrivendo l'ipotesi in coordinate abbiamo*

$$\forall X \neq 0 \ \exists Y : \quad X^t AY \neq 0$$

$$\Rightarrow X^t A \neq 0 \quad \forall X \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

1) $\Leftrightarrow$ 3) *è come sopra*
2) $\Rightarrow$ 4) *Poiché* $\dim V = \dim V^\star$ *basta vedere che* δ_b *è iniettava, cioè* $\ker \delta_b = \{0\}$
$v \in \ker \delta_b \quad \Rightarrow \quad \delta_b(v) = b_v$ *è il funzionale nullo, cioè*
$b_v(w) = 0 \quad \forall w \in V$
$b_v(w) = b(v, w) \Rightarrow v = 0$
4) $\Rightarrow$ 2) *Dato* $v \neq 0$, $\delta_b(v) = b_v \neq 0$ *perché* δ_b *è un isomorfismo,*
quindi esiste $w \in V$:

$$b(v, w) = b_v(w) \neq 0$$

3) $\Leftrightarrow$ 5) *è simile a* 2) $\Leftrightarrow$ 4) □

2.10 Caso Simmetrico

$$b(v, w) = b(w, v).$$

Osservazione
b è simmetrica se e solo se lo è qualsiasi matrice che la rappresenta. **Dato** $S \subset V$ definiamo

$$S^\perp = \{v \in V | b(v, s) = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

Esercizio $S^\perp$ è un sottogruppo e, $S^\perp = < s >^\perp$

Definizione 40
Due sottospazi U, W *si dicono ortogonali se*

$$Y \subseteq W^perp \Leftrightarrow W \subset U^{\perp})$$

Definizione 41
$v \in V$ *si dice isotropo se* $b(v, v) = 0$

Definizione 42
$\ker b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\} = V^{\perp}$

Osservazione
b è non degenere se e solo se $\ker b = \{0\}$

Proposizione 17
Sia b *non degenere,* $W \subseteq V$ *sottospazio,*
Allora, se $\delta_b : V \to V^{\star}$ *è l'isomorfismo canonico indotto da* b*,* $\delta_b(W^t) = W^{\star}$*. In particolare risulta sempre* $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

Nota
Non è vero, anche nel caso non degenere, che $V = W \oplus W^{\perp}$
Dimostrazione
$w \in W^{\perp} \quad \delta_b(w) = b_w$ *Voglio vedere che*
$b_w \in W^{\#} \quad b_w(w') = b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W$
Quindi $\delta_b(W^{\perp}) \subseteq W^{\#}$
Prendo ora $f \in W^{\#}$*; poiché* b *è non degenere,* δ_b *è un isomorfismo, quindi esiste* $v \in V$

$$f = \delta_b(v) = b_v \quad b(v, w) = b_v(w) = 0 \quad \forall w \Rightarrow v \in W^{\perp}.$$

quindi $f = \delta(b_v)$ *con* $v \in W^{\perp}$ □

Proposizione 18
Sia V *spazio vettoriale,* $W \subset V$ *sottospazio,* $b \in Bi(V)$*. Sono equivalenti:*

- $V = W \oplus W^{\perp}$
- $b|_W$ *è non degenere*

Lemma 12
$\ker b|_W = W \cap W^\perp$

Dimostrazione (lemma)
$w \in \ker b|_W \Leftrightarrow b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W \Leftrightarrow w \in W \cap W'$ $\square$

Dimostrazione (proposizione)
1) $\Rightarrow$ 2)*segue dal lemma perché dall'ipotesi* $W \cap W^\perp = \{0\}$
2) $\Rightarrow$ 1) *Sia* $\{w_1, \dots, w_s\}$ *una base di* W
Per ipotesi $A = (b(w_i, w_j))$ *è invertibile, in particolare dato* $v \in V$, *il sistema lineare*

$$* \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, w_1) \\ \vdots \\ b(v, w_s) \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica. Poniamo

$$w = v - \sum_{h=1}^{s} x_j w_j.$$

*Notiamo che * significa*

$$\sum_{h=1}^{s} b(v_h, w_j) x_h = b(v, w_j) \quad 1 \leq j \leq s.$$

Calcoliamo
$b(w, w_i) = b(v - \sum_{h=1}^{s} x_h w_h, w_j) = b(v, w_j) - \sum_{h=1}^{s} x_h b(w_h, w_j) = b(v, w_j) =$
$= b(v, w_i) - b(v, w_i) = 0$
Poiché i $\{w_i\}$ *sono una base di* W, *risulta* $b(w, u) = 0 \quad \forall u \in W$, *cioè* $w \in W^\perp$
Allora

$$v = w + \sum_{h=1}^{s} x_h w_h.$$

Pertanto $V = W + W^\perp$, *per ipotesi* $W \cap W^\perp = \ker b|_W = \{0\}$, *quindi* $V = W \oplus W^\perp$ $\square$

2.11 Sylvester e forme quadratiche

Definizione 43
la forma quadratica associata a V *è l'applicazione* $q : V \to \mathbb{K}$ *definita da* $q(v) = g(v, v)$ *e questa è una funzione omogenea di grado* 2

Esempio
$V \cong \mathbb{K}^n, g =$ prodotto scalare standard
$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2$
Osservazione
Valgono:
1) $q(kv) = k^2 q(v)$
2) $2g(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$
dove $g(v,w)$ è la forma polare di q
Dimostrazione
1.$q(kv) = g(kv,kv) = k^2 g(v,v) = k^2 q(v)$
2.$q(v+w) - q(v) - q(w) = g(v+w, v+w) - g(v,v) - g(w,w) =$
$= \cancel{g(v,v)} + 2g(w,v) + \cancel{g(w,w)} - \cancel{g(v,v)} - \cancel{g(w,w)} = 2g(w,v)$ □
Osservazione
$V = \mathbb{R}^4$ e sia $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_1x_2$
Voglio trovare la matrice della forma polare di q rispetto alla base canonica
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Sulla diagonale ci sono i coefficienti delle componenti al quadrato $(x_i)^2$ gli altri li ottieni dividendo per 2 ogni altro coefficiente

Teorema 11 ((Caratteristica di $\mathbb{K}$) $\neq 2$)
Dato V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, allora esiste una base g-ortogonale.

Dimostrazione
Per induzione su $\dim V = n$. *Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.*
se g è la forma bilineare nulla ($g(v,w) = 0 \ \forall v, w \in V$) ogni base è $g-$ortogonale.
Altrimenti esistono, $v, w \in V$ con $g(v,w) \neq 0$.
Assumo che almeno uno tra $v, w, v+w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi

$$g(v+w, v+w) = g(v,v) + g(v,w) + g(w,w) = 2g(v,w) \neq 0).$$

quindi $\exists v_1 \in V$ t.c $g(v_1, v_1) \neq 0$. Allora $g|_{\mathbb{K}v_1}$ è non degenere quindi $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$ con $W = (\mathbb{K}v_1)^\perp$
$\dim(W) = n-1$, *per induzione $\exists$ una base $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W con $g(v_1, v_j) = 0$ se $2 \leq j \leq n, \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g-ortogonale di V* □

Teorema 12
Supponiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Sia V spazio vettoriale dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ $r = rg(D)$
In modo equivalente, ogni matrice simmetrica a coefficienti in $\mathbb{K}$ è congruente a D

Dimostrazione
Per il teorema precedente, esiste una base $B = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ di V rispetto alla quale $(g)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Possiamo assumere che $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ siano non nulli e che $a_{r+i,r+i} = 0$ con $1 \leq i \leq n-r$.
Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii}, \quad 1 \leq i \leq r$ poniamo.
$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} v'_i, & 1 \leq i \leq r \\ v'_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$
è chiaro che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base. Risulta
$$g(v_i, v_i) = \begin{cases} g(\frac{v'_i}{\alpha_i}, \frac{v'_i}{\alpha_i} = 1\alpha_i^2 g(v'_i, v'_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 & 1 \leq i \leq r \\ g(v'_i, v'_i) = 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$
□

Osservazione
Se g è non degenere, esiste una base B rispetto alla quale $(g)_B = Id_n$
Caso Reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
V spazio vettoriale reale ($\dim V = n \geq 1$)
$g \in Bi_s(V)$
Sia B una base g-ortogonale. Definiamo

Definizione 44
Chiamiamo $i_+(g), i_-(g), i_0(g)$ indice di positività, negatività e nullità di g, e sono rispettivamente
$i_+(g) = \{v \in B | g(v,v) > 0\}$
$i_-(g) = \{v \in B | g(v,v) < 0\}$
$i_0(g) = \{v \in B | g(v,v) = 0\}$

Teorema 13 (Sylvester)
Gli indici non dipendono dalla scelta di B. Posto $p = i_+(g), q = i_-(g)$ allora $1 + q = n - r \quad (r = rg(g))$
ed esiste una base di V rispetto alla quale la matrice E di g è tale che

$$E = \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale A è congruente ad una matrice della forma E in cui $r = rg(A)$ e p dipende solo da A

Dimostrazione
Dal teorema di esistenza di una base g-ortogonale deduciamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ di V rispetto alla quale, se $v = \sum_{i=1}^n y_i f_i$
$q(v) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$
con esattamente n coefficienti diversi da 0, che possiamo supporre essere $a_{11}, \dots, a_{rr}$
Siano $a_{11}, \dots, a_{pp} > 0, \quad a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr} < 0$
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ *t.c.*
$\alpha_i^2 = a_{ii} \quad 1 \le i \le p \qquad \alpha_i^2 = -a_{ii} \quad p + 1 \le i \le r$
Allora posto $e_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & 1 \le i \le r \\ f_i & r + 1 \le i \le n \end{cases}$
la matrice di g rispetto a $\{e_1, \dots, e_n\}$ è $\begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$
Resta da dimostrare che p dipende solo da g e non dalla base B usata per definirlo
Supponiamo che rispetto ad un'altra base g-ortogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$, risulti, per $v = \sum_{i=1}^n z_i b_i$

$$q(v) = z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2.$$

mostriamo che $p = t$
se per assurdo $p \neq t$ assumo $t \le p$ considero quindi i sottospazi $S =< e_1, \dots, e_n >$
$T =< b_{t+1}, \dots, b_n >$
Poiché $\dim S + \dim T = p + n - t > n$ *perché $t < p$ per Grassman vettoriale* $S \cap T \neq \{0\}$ *sia* $0 \neq v \in S \cap T$
allora $r = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = z_{t+1} b_{t+1} + \dots, z_n b_n$
contraddizione:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0.$$

$$q(v) = -\sum_{i=1}^{r} z_i^2 + z_{r+1}^2 + \dots + z_n^2 < 0.$$

$\square$

Osservazioni

1. Esiste una definizione più intrinseca degli indici. Ricordiamo che $g \in Bil_S(V), V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è definita positiva se $g(v,v) > 0, \ \forall v \in V \setminus \{0\}$ e che g è definita negativa se $-g$ è definita positiva.

2.Il teorema di Sylvester si estende, con la stessa dimostrazione alla forma hermitiana.

In particolare ogni matrice hermitiana è congruente a una matrice diagonale del del tipo

$$\begin{pmatrix} I_p & \dots & 0 \\ \vdots & I_{r-p} & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposizione 19

Sia (V, g) uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dotati di una forma bilineare simmetrica g

Siano dati un prodotto scalare h e una forma bilineare simmetrica k

Allora esiste una base di V che sia h-ortonormale e k-ortogonale

Dimostrazione

(V, h) è uno spazio euclideo, quindi per il teorema di rappresentazione delle forme bilineari, esiste un operatore $L \in End(V)$ tale che

$$h(L(v), w) = k(v, w).$$

Poiché k è simmetrica, L è simmetrica, per il teorema spettrale siste una base h-ortonormale costituita da autovettori per L.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale base. Voglio dimostrare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è k-ortogonale

$$k(v_r, v_s) = h(L(v_r), v_s) = h(\lambda_r v_r, v_s) = \lambda_r h(v_r, v_s) = \lambda_r \delta_{rs}.$$

$\square$

Corollario 3

Sia (V, h) uno spazio euclideo, e k una forma bilineare simmetrica su V.

Allora $i_+(k), i_-(k), i_0(k)$ corrispondono al numero di autovalori positivi, negativi, nulli, dell'endomorfismo di V che rappresenta k rispetto ad h

Dimostrazione

Sia come nella proposizione, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una h-ortonormale e k-ortogonale, per il teorema di Sylvester

$$i_+(k) = |\{v_i | k(v_i, v_i) > 0\}|.$$

Ma abbiamo visto che $k(v_i, v_i) = \lambda_i$

quindi $i_+(k) = |\{\lambda_i > 0\}|$. La dimostrazione non è terminata. $\square$

Definizione 45
Una matrice simmetrica reale si dice definita positiva se tutti gli autovalori sono positivi

Definizione 46
Data una matrice quadrata $n \times n$, i minori principali leading, sono quelli ottenuti estraendo righe e colonne come segue

$$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,\ldots,n\}.$$

Esempio
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$|1| = 1$
$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$

Teorema 14
A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori principali leading sono positivi