Lezione N+3 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-05-20

0.1 dimostrazione ultimo corollario

Corollario 1
$\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\forall n \geq 2$

Dimostrazione
Negli esercizi settimanali è dato un rivestimento

$$S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}.$$

di grado $2 \quad \forall n \geq 1$
Per il teorema di ieri:

$$p^{-1}(x) \leftrightarrow p_*(\pi_1(S^1))\backslash\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}).$$

dove $x = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *Se* $n \geq 2$ *allora* $\pi_1(S^n)$ *è banale, quindi* $p_*(\pi(S^n))$ *è banale, e* $p_*(\pi_1(S^1))\backslash\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ *è in biezione con* $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$
Quindi $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ *ha solo due elementi da cui* $\cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\square$

1 Geometria differenziale

1.1 Varietà topologiche e differenziali

Definizione 1
Sia X spazio topologico. Esso si dice una varietà topologica di dimensione $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se

1. *X di Hausdoff*
2. *$\forall x \in X$ esistono un intorno aperto $U \subseteq X$ di x, un aperot $V \subseteq \mathbb{R}^n$ e un omeomorfismo $\varphi : U \to V$ detto carta locale*
3. *X è 2^o-numerabile.*

Una collezione di triple (U, V, φ) tali che i sottoinsiemi U ricoprono X è detta atlante.

Esempi:

1. $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n (basta una carta locale $U = V = \mathbb{R}^n$, $Id_{\mathbb{R}^n} = \varphi$)
2. S^n è varietà topologica di dimensione n, per esempio posso prendere l'atlante

$$U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$$
$$U_2 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}.$$

$V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$
$U_1 \to V_1$ proiezione stereografica

3. $T =$ toro in $\mathbb{R}^3$
   AGGIUNGI IMMAGINE 5 39
   (il toro è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ e al quoziente di un quadrato)

4. Ciambelle con tanti buchi
   sono varietà di dimensione 2
   AGGIUNGI Immagine

5. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è varietà topologica di dimensione n :
   carte locali U_i dove
   $$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$
   $\varphi : U_i \to V_i = \mathbb{R}^n$
   $[x_0, \dots, x_n] \to (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$
   è ben definita, <u>continua</u> (verifica per esercizio)
   ed è omeomorfismo perchè ha inversa
   $$\begin{gathered} V_i \to U_i \\ (y_0, \dots, y_n) \to [y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots y_n] \end{gathered}.$$

6. $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sono varietà topologiche di dimensione $2n$

Definizione 2
Sia A atlante di una varietà topologica di dimensione n. A si dice C^∞ se per ogni
$$(U_1, V_1, \varphi_1), \quad (U_2, V_2, \varphi_2) \in A.$$
la composizione
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$
è di classe C^∞ se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

Esempi

1. Gli atlanti visti prima per $\mathbb{R}^n, S^n, T, \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, sono tutti C^∞

2. Se X ha un atlante fatto da due sole carte locali, allora questo atlante è C^∞

Definizione 3
Siano A, B due atlanti C^∞ di una stessa varietà topologica si dicono compatibili se $A \cup B$ è C^∞

Osservazione
Si verifica facilmente che la compatibilità è una relazione d'equivalenza.

Definizione 4
Una varietà differenziale di dimensione n è una varietà topologica di dimensione n con una classe di equivalenza di atlanti C^∞

Esempio
$X = \mathbb{R}$
$A = \{(U_1, V_1, \varphi_1)\}$ $U_1 = X$, $V_1 = \mathbb{R}$ $\varphi_1 = Id_X$ è atlante C^∞
$B = \{(U_2, V_2, \varphi_2)\}$ $U_2 = X$ $V_2 = \mathbb{R}$
$\varphi_2 : X = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
x $\to x^3$
omeomorfismo
A e B non sono compatibili, i cambi di coordinate sono

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : V_1 &\to V_2 \\ x &\to x^3 \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : V_2 &\to V_1 \\ x &\to \sqrt[3]{x} \end{aligned}.$$

è continua, biettiva non C^∞

1.2 Varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^N$

Definizione 5 (Varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^N$)
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ sottospazio topologico ($N \geq 0$). X è detta varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^N$ di dimensione $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se $\forall x \in X$ esistono $U \subseteq X$ intorno aperto di $x, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto,

$$\psi : V \to U \subseteq \mathbb{R}^N.$$

tale che

1. *ψ è omeomorfismo*
2. *ψ è C^∞ come applicazione $V \to \mathbb{R}^N$ con $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto*
3. *$\forall q \in V$ il differenziale di $d\psi_q$ è iniettivo ($d\psi_q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione lineare di matrice canonica Jacobiana di ψ in q)*

le ψ si dicono parametrizzazione
Gli aperti U si dicono aperti coordinati.

Nota
In letteratura spesso "carte locali" e "parametrizzazioni" sono sinonimi.
Invece di "immerse" si dice spesso "immerse regolarmente", e in inglese questo

"immerse" corrisponde a "embedded" **Esempi:**

1. S^1 è varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \psi_1 :]0, 2\pi[&\to U_1 = S^1 \setminus \{(1,0)\} \\ t &\to (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} \psi_2 :]-\pi, \pi[&\to U_1 = S^1 \setminus \{(-1,0)\} \\ t &\to (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}.$$

   Si verifica facilmente che ψ_1, ψ_2 sono continue, biettive, con inversa continua,
   La matrice Jacobiana di ψ_1 è

$$(J\psi_1) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

   matrice di un'applicazione lineare

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

   ha rango 1 $\forall t$ quindi $(d\psi_1)_t$ è iniettiva $\forall t$.
   Quindi la definizione è soddisfatta.

2. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Sia $f : V \to \mathbb{R}$ C^∞
   il grafico di f in $\mathbb{R}^{m+1}$ è una varietà grafico immersa in $\mathbb{R}^{m+1}$ di dimensione m.
   Infatti $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in V\}$
   mettiamo la singola parametrizzazione

$$\begin{aligned} \psi : V &\to U = \Gamma \\ (x_1, \dots, x_m) &\to (x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \end{aligned}.$$

   ψ è biettiva, continua, ψ^{-1} è la restrizione a Γ alle prime m coordinate, quindi ψ^{-1} è continua
   ψ è C^∞ perché lo sono le sue componenti.
   La matrice Jacobiana è IMMAGINE
   ha rango m quindi il differenziale è iniettiva.
   Esercizio
   Trovare parametrizzazione che rendano S^n una varietà differenzaibile immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$ (Suggerisco di usare parametrizzazione come quella del grafico) **Esempio:**
   Nella definizione non è sufficiente richiedere ψcibtubya biettiva, C^∞, un differenziabile iniettivo in ogni punto. Cioè da queste ipotesi non segue ψ^{-1} continua