Lezione 6 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-11

0.1 boh

Osservazione:
Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio T_Y .
Considero l'inclusione di Y in X come applicazione

$$\begin{aligned} i : & Y \to X \\ & y \to y \end{aligned}$$

i è costruita (mettendo su Y la topologia T_Y). Verifica: sia $B \subseteq X$ aperto
la controimmagine è $i^{-1}(B)$ Questo è aperto in topologia di sottospazio.
Sia T una topologia su Y (non necessariamente $= T_Y$), suppongo che $i : Y \to X$ sia continua anche usando T come topologia su Y
Allora $\forall B \subseteq X$ aperto, $i^{-1}(B)$ è aperto in Y cioè $i^{-1}(B) \in T$.
Al variare di B aperto in X, gli insiemi $i^{-1}(B)$ formano T_Y, quindi $T_y \subseteq T$.
Possiamo considerare la famiglia di tutte le topologie su Y per cui l'inclusione è continua. L'intersezione di esse è contenuta in T_Y perché T_Y è una di esse, e contiene T_Y perché ogni T siffatta contiene T_Y.
Quindi T_Y è la topologia meno fine fra quelle per cui i è continua.

Proposizione 1
Sia $f : X \to Z$ applicazione continua fra spazi topologici, sia $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, allora $f|_Y : Y \to Z$ è continua

Dimostrazione
Usiamo l'inclusione $i : X \to Y$ e osserviamo $f|_Y : Y \to Z$ concateno con

$$f \circ i : Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Z.$$

f e i sono continue, lo è anche $f \circ i$ □

Proposizione 2
Siano X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, Z spazio topologico e $f : Z \to Y$.
Consideriamo l'estensione del codominio di f da Y a X che è l'applicazione $i \circ f : Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} X$
Allora f è continua se e solo se $i \circ f$ è continua.

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *ovvio poiché $i \circ f$ è composizione di applicazioni continue*
($\Leftarrow$) *Sia $A \subseteq Y$ aperto, scegliamo $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap Y = A$.*
Allora $f^{-1}(A) = (i \circ f)^{-1}(B)$
poiché chiedere che $z \in Z$ vada in A tramite f è equivalente a richiedere che vada in B.

Allora $f^{-1}(A)$ *è aperto per continuità di* $i \circ f$ $\square$

Osservazione

Data in generale $f : Z \to X$ spesso la si restringe all'immagine

$$\begin{aligned} \tilde{f} : & Z \to Im(f) \\ & z - f(z) \end{aligned}$$

vale f continua $\Leftrightarrow \tilde{f}$ continua, perché posso considerare l'inclusione

$$i : Im(f) \to X.$$

e allora $f = i \circ \tilde{f}$

Esempio:

$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.

$Y = [0, 1[$ con topologia di sottospazio

$$Z =]0, 1[\quad (\subseteq Y).$$

Sia verifica facilmente (esercizio) che la chiusura di Z in Y è $[0, 1[$e la chiusura di Z in X è $[0, 1]$

Le chiusure sono diverse, ma

$$[0, 1[= [0, 1] \cap Y.$$

dove il primo intervallo è in Y e il secondo intervallo in X

Questo si generalizza.

Lemma 1

Sia X *spazio topologico,* $Y \subseteq X$ *con topologia di sottospazio,* $Z \subseteq Y$ *la chiusura di* Z *in* Y *è uguale a* Y *intersecato la chiusura di* Z *in* X

Dimostrazione

Chiusura di Z *in* $Y = \displaystyle\bigcap_{\substack{C \subseteq Y, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z}} C = \dots$

Per ogni tale C *scelgo un* $D \subseteq X$ *chiuso in* X *tale che* $C = D \cap Y$

$$\begin{aligned} \dots = & \bigcap_{\substack{C \subset U, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z, \\ D \subseteq X, \\ D \text{ chiuso in } X \\ \text{t.c. } D \cap Y = C}} D \cap Y. \\ = & \bigcap_{\substack{D' \subseteq X, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supset Z}} D' \cap Y. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale perché ogni D della prima intersezione compare fra i D della seconda intersezione, Per ogni D' della seconda seconda intersezione considero $C = D' \cap Y$ che è in Y, chiuso in Y, contenente Z, quindi compare fra i C della prima intersezione; ad esso corrisponde un D della prima intersezione, che soddisfa $D \cap Y = C = D' \cap Y$.
Quindi per ogni D' della seconda intersezione esiste un D della prima con la stessa intersezione con Y, ovvero $D \cap Y = D' \cap Y$, Quindi vale l'uguaglianza.
L'uguaglianza prosegue:

$$= \left(\bigcap_{\substack{D' Z, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supseteq Z}} D' \right) \cap Y.$$

dove la parentesi è la chiusura di Z in X □

Osservazione
Attenzione: non vale un enunciato analogo con la parte interna.
Ad esempio $X = \mathbb{R}$ cn topologia euclidea $Y = \mathbb{Z}$ $Z = \{0\}$
La parte interna di Z in X è vuota, perché Z non contiene alcun aperto di $\mathbb{R}$
Invece la topologia di sottospazio su Y è la topologia discreta e Z è aperto in Y.
Quindi Z è la propria parte interna come sottoinsieme di Y.

Definizione 1
Sia $f : X \Rightarrow Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, f è un'inversione topologica se la restrizione

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& X \to f(X) \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo, dove su $f(X) \subseteq Y$ metto la topologia di sottospazio.

Esempio
1) Considero

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to (x, 0) \end{aligned}$$

(qui $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$con topologia euclidea) è un immersione, la verifica è per esercizio.
2)

$$\begin{aligned} \text{f : } & [0{,}2\pi[\to \mathbb{C} \\ & \text{t} \to e^{it} \end{aligned}$$

Su $[0, 2\pi[\subseteq \mathbb{R}$
metto la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ metto la topologia euclidea
È continua, iniettiva e $f([0, 2\pi[) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
Questa f non è un'immersione, infatti $[0, \pi[$ è aperto nel dominio, ma $f([0, 2[)$ non è aperto in S_1 con topologia di sottospazio. quel chiuso dovrebbe essere interesezione tra la circonferenza e un aperto di $\mathbb{R}^2$, Ciò non è possibile perchè ci sarebbe un intorno su un estremo della circonferenza.

0.2 Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici.
vogliamo definire una topologia "naturale" su $P \times Q$.
Esempio:
Considero $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$P \times Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

La topologia su $\mathbb{R}^2$ sarà quella euclidea. Considero ad esempio

$$U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}, \quad V \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}.$$

il prodotto $U \times V$ sarà aperto in $\mathbb{R}^2$, posso pensare che questa sia quindi la mia topologia, ma vediamo qualche esempio con la topologia euclidea.
Ad esempio $U =]a, b[\quad V =]c, d[$, allora $UV =]a, b[\times]c, d[$ è un rettangolo aperto
Anche un disco aperto in $\mathbb{R}^2$ è aperto in topologia euclidea, ma non riesco a scriverlo con questo prodotto $U \times V$ con $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$
Potrei prendere

$$B = \{U \times V \mid {}^{U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}}_{V \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}}, \}.$$

come base per la topologia su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definizione 2
Siano P, Q spazi topologici, la topologia prodotto su $P \times Q$ è la meno fine fra quelle per cui le proiezioni:

$$\begin{aligned} p : & P \times Q \to P \\ & (a, b) \to a \\ q : & P \times Q \to Q \\ & (a, b) \to b \end{aligned}$$

Sono continue.

Osservazione
Esistono topologie su $P \times Q$ tali che p e q sono continue, per esempio la topologia discreta su $P \times Q$
La topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologia per cui p e q sono continue.