Lezione 32 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-23

1 Omogeneizzati e Curvy

Curva algebrica affine in $\mathbb{A}^2$ (proiettivo su $\mathbb{P}^2$) La nozione si generalizza in modo ovvio al concetto di ipersuperficie (algebrica)

Definizione 1
Una ipersuperficie algebrica in $\mathbb{A}^n$ (rispettivamente $\mathbb{P}^n$) è una classe di proporzionalità di polinomi in

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \text{ (polinomi omogenei in } \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]).$$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\underline{X} = (X_0, \dots, X_n)$
$\ell = f(\underline{x}) = 0$ *equazione della curva* $F(\underline{X}) = 0$
(x sono coordinate affini, X riferimento proiettivo)
supporto di ℓ $\{\underline{x} \in \mathbb{A}^n | f(x) = 0\}$ $\{[X_0, \dots, X_n] | F(X) = 0\}$
$\varphi \in Aff(\mathbb{A}^n)$ $\psi \in PGL(n)$
ℓ *ipersuperficie definita da* $f(\underline{x}) = 0$
$\varphi(l)$: *ipersuperficie definita da*
$f(\varphi^{-1}(\underline{x})) = 0$

Qui il tipo ha corso un po troppo, TODO finire la definizioen e ci sta una mezza osservazione
$\ell : x^2 + y^2 = 1$ $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ $\varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$
$\varphi(\ell) := (x-1)^2 + (x-1)^2 = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1$ $\varphi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ ipersuperficie

Definizione 2
Due ipersuperfici affini ℓ_1, ℓ_2 (proiettivi) sono affinemente equivalenti (proiettivamente equivalenti), se esiste $\varphi \in Aff(\mathbb{A}^n)(\psi \in PGL(n))$ tale che $\varphi(\ell_1) = \ell_2(\psi(\ell_1) = \ell_2)$

Nota:
$x_1 = \frac{X_1}{X_0}$
$f(\underline{x}) \to F(\underline{X})$ e questo si chiama polinomio omogeneizzato di F
Esempio
$x + y + z - 3 = 0 \rightsquigarrow \quad X_1 + X_2 + X_3 - 3X_0 = 0$

2 Chiusura proiettiva di ℓ

La chiusura proiettiva dell'ipersuperficie affine di equazione $f(\underline{x}) = 0$ è l'ipersuperficie proiettiva di equazione $F(\underline{X}) = 0$ dove F è il polinomio omogeneizzato di f
I punti di $l^\star \cap H_0$ si chiama punti impropri di ℓ ($\ell^\star$ è la chiusura proiettiva)
Se scriviamo f come

$$f(\underline{x}) = f_0 + f_1(\underline{x}) + \ldots + f_n(\underline{x}).$$

con gli f_i omogenei di grado i

$$F(X) = f_0 X_0^n + f_1(\underline{X}) X_0^{n-1} + \ldots + f_n(\underline{X}).$$

ad esempio

$$x^2 + 2xy + y^2 + z + 2x - 3 = 0.$$

diventa

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_3X_0 + 2X_1X_0 - 3X_0^2 = 0.$$

punti impropri: intersecano con $X_0 = 0$

$$[0, X_1, X_2, X_3] : X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

Quindi l'equazione dei punti omogenei è data da

$$f_n(\underline{X}) = 0.$$

3 Classificazione delle coniche proiettive

Le coniche proiettive sono le curve di secondo grado in $\mathbb{P}^2$
:a generica equazione può scriversi

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{12}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2.$$

Posto $a_{21} = a_{12}, a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}$, la forma precedente si scrive come

$$(1) \qquad \underline{X}^t AX = 0 \qquad \text{ove } A = (a_{ij}).$$

Se ora $M \in GL(3, \mathbb{K})$ e rimpiazziamo $\underline{X}$ con $M\underline{X}$ da (1) si ottiene
(2) (M$\underline{X}^t$)$AM\underline{X} = 0$
$\underline{X}^t MAM\underline{X} = 0$
$\underline{X}^t B\underline{X} = 0 \quad B = M^tAM$ TODO
Per definire ℓ_2 è proiettivamente a ℓ_1
Viceversa ogni conica poriettiva equivalente a (ℓ_1) si ottiene in questo modo a partire da $M \in GL(3, \mathbb{K})$ in definitiva
classi di quivalenza proiettiva di coniche $\leftrightarrow$ classi di congruenza di matrici simmetriche

Definizione 3
La conica $\underline{X}^t A\underline{X} = 0$ *è:*
non degenere se $\det A \neq 0$
semplicemente degenere se $rkA = 2$ *e* $\det A = 0$
doppiamente degenere se $rkA = 1$ *e* $\det A = 0$

Teorema 1
Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chisuo. Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ *conica generale*
$x_0^2 + x_1^2 = 0$ *conica semplicemente degenere*
$x_0^2 = 0$ *conica doppiamente degenere*
Tali coniche non sono equivalenti tra loro

Dimostrazione
Dobbiamo solo classificare le matrici simmetriche 3×3 complesse rispetto alle componenti. Sappiamo che il rango è un invariante completo, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sono le uniche possibilità.

$\square$

Nota:
Un invariante completo caratterizza la matrice (se hanno rango uguale allora sono equivalenti e viceversa)

Teorema 2
Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ *conica generale*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ *conica generale a punti non reali*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$
$x_0 + x_1^2 = 0$ *sono coniche semplicemente degeneri*
$x_0^2 = 0$ *conica doppiamente degenere Queste coniche non sono equivalenti tra loro*

Dimostrazione
Utilizziamo il teorema di Sylvester per classificare le matrici reali simmetriche 3×3 *a meno di congruenza*
Sappiamo che gli indici sono invariante completo,
ora ricordiamo che stiamo classificando polinomi omogenei a meno di proporzionalità
(i_+, i_-, i_0)
$(3, 0, 0)$
$(0, 3, 0)$
$(0, 0, 3)$
$(2, 1, 0)$
$(2, 0, 1)$
$(0, 2, 1)$
$(1, 0, 2)$
$(0, 1, 2)$
$(1, 1, 1)$
TODO aggiungi immagine che sennò finisce male
Quindi ogni conica proiettiva è equivalente a unna delle cinque elencate.
Tali coniche non sono equivalenti perché hanno rango diverso oppure stesso rango ma supporti diversi □

Caso generale: quadriche proiettive
$\ell \quad \underline{X}^t A \underline{X} = 0 \quad A$ matrice simmetrica $(n+1) \times (n+1)$

Teorema 3
1.$\mathbb{K}$ algebricamente chiuso: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola quadrica poichè

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0 \qquad 0 \leq r \leq n.$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una e una sola quadrica

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = 0.$$

$0 \leq p \leq r \leq n,\ 2p \geq r-1, \quad r \geq 1$

Esempio
$x_0^2 - 1x_1^2 + x_1x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \qquad \det A = -\frac{1}{4} \neq 0$ ℓ è generale
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad i_+ \geq 1 \rightsquigarrow i_+ = 2, \quad i_- = 1, i_+ = 0$
$\rightsquigarrow$ equivalente a $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$