Lezione 31 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-22

1 Due Teoremi Classici

Teorema 1 (Desgardes)
$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ piano proiettivo, $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}$ punti distinti tali che le tre rette

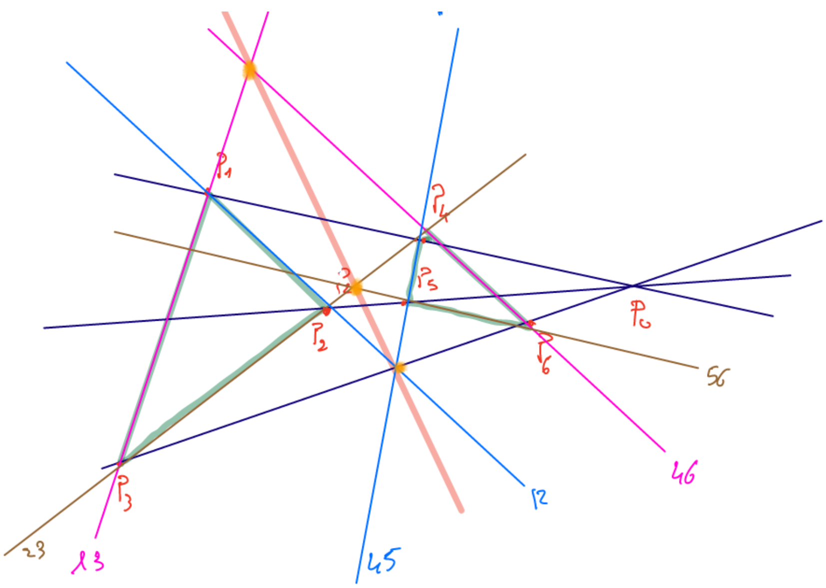
$$L(P_1, P_4) \quad L(P_2, P_4) \quad L(P_3, P_6).$$

abbiano in comune un punto $P_0 \neq P_i \quad 1 \leq i \leq 6$ Allora

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6), L(P_2, P_5) \cap L(P_5, P_6), L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5).$$

sono allineati

Dimostrazione



Siano $v_i \in V, \ \leq i \leq 6,$ t.c. $\quad [v_i] = P_i$ Per ipotesi

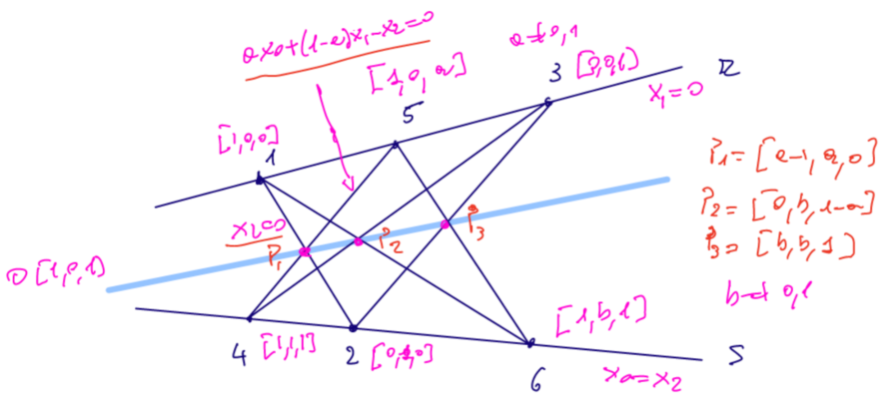
$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6.$$

Inoltre poiché $P_0 \neq P_i, i > 1,$ tutti gli α_i sono non nulli. I punti
$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$
$L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$
$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$ *sono associati ai vettori*
$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$
$-\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_5 v_4 - \alpha_6 v_6$
$-\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 - \alpha_5 v_5$
I vettori nella colonna di sinistra sono dipendenti, poiché la loro somma è 0. Dunque i punti corrispondenti sono allineati. $\square$

Teorema 2 (Pappo)
$A_1, \ldots, A_6$ distinti $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \ldots, L(A_6, A_1)$ distinte
esistono r, s rette con $A_i \in r$, i dispari, $A_i \in s$ i pari
Supponiamo poi $0 = r \cap s \neq A_i$. Allora

$$L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5), \quad L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6), \quad L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1).$$

sono allineati



Dimostrazione
Poiché $r = L(A_1, A_3)$, $\quad s = L(A_2, A_4)$ sono distati e $0 \neq A_i$
A_1, A_2, A_3, A_4 è un riferimento proiettivo. Ma

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)b(1-1+a) + ab(1-a) = 0$$

$\square$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo di dimensione n $S = \mathbb{P}(U)$, $\quad H = \mathbb{P}(W)$ sottospazi proiettivi tali che

$$S \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad L(S, H) = \mathbb{P}.$$

Se $\dim S = k, \dim H = h$ per le formule di Grassmann

$$k + h = n - 1.$$

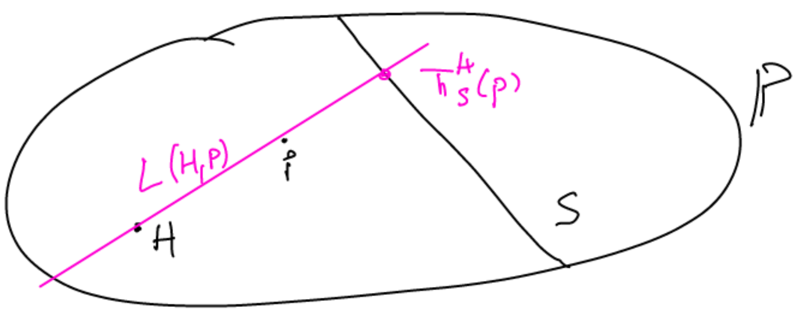
$\forall P \in \mathbb{P} \setminus H, \quad \dim L(H, \{p\}) = h + 1$
Quindi $S \cap L(H, \{0\})$ è un punto

Posso definire la proiezione su S di centro H come

$$\pi_S^H : \mathbb{P} \setminus H \to \mathbb{P}.$$

$$P \to S \cap L(H, \{0\}).$$

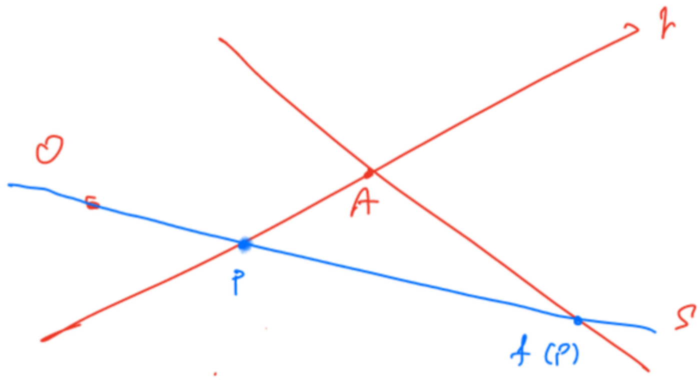
π_S^H è unna trasformazione proiettiva degenere indotta da $\mathbb{P}_U^W : V \to V$ proiezione su U parallela ad H



2 Proiettività

Siano in $\mathbb{P}^2$ r, s rette distinte con $A = r \cap s$

Definizione 1
Dato $O \notin r \cup s$, la restrizione ad r della proiezione su s di centro O è detta ***proiettività*** *di centro O*



f è un isomorfismo proiettivo. La notazione si generalizza a $\mathbb{P}^n$ nel modo seguente.
S_1, S_2 sottospazi di dimensione k, H sottospazio tale che

$$H \cap S_1 = G \cap S_2 = \emptyset.$$

$$\dim H = n - k - 1.$$

Allora la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H è un isomorfismo proiettivo $f : S_1 \to S_2$ detto prospettività di centro H

Definizione 2
Una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ *è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di* $\mathbb{K}[x,y]$. *Se* $f(x,y)$ *è un rappresentante della classe, l'equazione*

$$f(x,y) = 0.$$

si dice equazione della curva

$$l = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{A}^2 | f(x,y) = 0 \}.$$

è il supporto della curva
$\deg f$ *grado della curva*

Caso affine
Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ l'affinità $T(X) = AX + C$

$$A = (a_{ij}) \in GL(2, \text{Ł}) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sia l una curva di equazioni $f(x,y) = 0$ La curva D di equazione

$$g(x,y) = 0.$$

ove $g(x,y) = f(a_{11}x_1 + a_{12}y + c_1, a_{21}x + a_{22}y + c_2)$
è detta la trasformata di l tramite T^{-1}

$$D = T^{-1}(l).$$

Se $T^{-1}X = BX + d \quad (B = A^{-1},\ \ldots)$
allora $g(b_{11}x + b_{12}y + d_1, b_{21}x + b_{22}y + d_2) = A(x,y)$ quindi $l = T(D)$
è chiaro che se $p(x,y) \in D$ allora $T(p) \in l$ e viceversa.
quindi i supporti si dicono affinamente equivalente

Definizione 3
Data l *curva affine, una curva affine* D *si dice affinamente equivalente a* l *se esiste un'affinità* T *tale che* $l = T(D)$