

# Lezione 3 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-21

## 1 Nella lezione precedente...

Abbiamo introdotto i sottospazi affini di  $(A, V)$  come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che  $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

## 2 Nuova lezione

### Osservazione

Se  $\Sigma_1 = p_1 + W_1$ ,  $\Sigma_2 = p_2 + W_2$  sono sottospazi affini, la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_{12}.$$

### Lemma 1

$$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$$

$$H_p = \{\overrightarrow{px} \mid x \in S\} \quad H_q = \{\overrightarrow{qy} \mid y \in S\}$$

Allora  $\langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$  e  $p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle$   
(sottospazio generato da  $S$ )

### Dimostrazione

$$v_0 = \overrightarrow{pq} \quad v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$$

$$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in \langle H_q \rangle$$

$$H_p \subseteq \langle H_q \rangle \Rightarrow \langle H_p \rangle \subseteq \langle H_q \rangle$$

$$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in \langle H_p \rangle \Rightarrow \langle H_q \rangle \subseteq \langle H_p \rangle$$

$$\text{Quindi } \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$\overrightarrow{pq} \in \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle \quad \square$$

### Nomenclatura 1

$\Sigma_1, \Sigma_2$  sottospazi affini

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \text{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

**Lemma 2**

Siano  $\Sigma_i = p_i + W_i$ ,  $i = 1, 2$  sottospazi affini. Allora

- (a)  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2$   
 (b)  $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle)$

**Dimostrazione**

(a)  $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  allora  $\Sigma_1 = p_0 + W_1$   $\Sigma_2 = p_0 + W_2$

$\exists w_i \in W_i$ ,  $i = 1, 2$  t.c

$p_1 = p_0 + W_1, p_2 = p_0 + W_2$

$\overrightarrow{p_1 p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$

Viceversa, se  $\overrightarrow{p_1 p_2} = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$

$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1 p_2} = p_1 + w_1 + w_2$  (2) Dato  $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , risulta

$p_2 - w_2 = p_1 + w_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$\overrightarrow{p_1 x} \in W_1$  se  $x \in \Sigma_1$

oppure

$$\overrightarrow{p_1 x} \in \overrightarrow{p_1 p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1 x} = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 x}).$$

Dunque la giacitura di  $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$  è

$$W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle.$$

□

### 3 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

**Definizione 1**

Siano  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sottospazi affini di  $(A, V)$  di giacitura rispettivamente  $W_1, W_2$

Diciamo che

- 1)  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono **incidenti**, se  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
- 2)  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono **paralleli** se  $W_1 \subseteq W_2$  o  $W_2 \subseteq W_1$
- 3)  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono **sghembi** se  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  e  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Osservazione**

Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

## 4 Esercizi Elementari

### Esercizio 1

Dire se  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  appartiene alla retta per  $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  e direzione  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  **Svolgimento**  
Scriviamo l'equazione parametrica della retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \end{cases}.$$

alternativamente avrei potuto cercare le coordinate cartesiane

---

### Esercizio 2

Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + s \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

---

### Esercizio 3

Scrivere equazioni per il piano identificato dalla retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e dal punto } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Svolgimento

modo 1, scelgo due punti distinti sulla retta e riduco al punto precedente

$$\text{modo 2, sia } q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

considero il piano  $P = q + tv + s\overrightarrow{Oq}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1-1 & x_2-2 & x_3-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x_1-1) - (x_3-3) = 0$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

Fascio di piani di asse una retta  $r$  è l'insieme dei piani che contengono  $r$

$$r = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \end{cases}.$$

Equazione del fascio

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ogni piano del fascio si ottiene con una coppia  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Coppie proporzionali per un fattore non nulla individuano lo stesso piano

# Lezione 4 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-16

# 1 Formula di Grassmann affine

Richiami dalla scorsa lezione

Dati  $\Sigma_i = p_i + W_i$ ,  $i = 1, 2$  sottospazi affini (di  $(A, V, +)$ ) allora:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2.$$

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle).$$

Inoltre  $\Sigma_1, \Sigma_2$  si dicono:

**incidenti** se  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$

**paralleli** se  $W_1 \subseteq W_2$  o  $W_2 \subseteq W_1$

**sghembi** se  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  e  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Proposizione 1** (Formula Grassmann per spazi affini)

*Siano  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sottospazi affini di  $A$ , Allora*

$$\dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq \dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 - \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

*e vale l'uguaglianza se  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono incidenti o sghembi*

*si usa la notazione  $\dim(\emptyset) = -1$*

**Dimostrazione**

- Supponiamo  $\Sigma_1, \Sigma_2$  incidenti, allora esiste

$$p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$

$$\Sigma_1 = p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale

- Sia ora  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  allora  $\Sigma_i = p_i + W_i$   $i = 1, 2$

risulta  $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin W_1 + W_2$  (per lemma)

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) &= \dim(W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle) = \dim(W_1 + W_2) + 1 \leq \\ &\leq \dim(W_1) + \dim(W_2) - (-1) = \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \end{aligned}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se  $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2)$  ovvero  $W_1 \cap W_2 = 0$  ovvero se  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono sghembi □ □

**Proposizione 2**

siano  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sottospazi affini di  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  definiti dai sistemi lineari

$$A_i X = b_i \quad i = 1, 2.$$

Allora:

(a)  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono incidenti se e solo se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) = rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right).$$

detto  $r$  tale rango,  $\dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$

(b)  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono sghembi se e solo se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right) = n.$$

(c) Se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right) = r < n.$$

allora  $\Sigma_1$  (rispetto a  $\Sigma_2$ ) contiene un sottospazio affine di dimensione  $n - r$  parallelo a  $\Sigma_2$  (rispetto a  $\Sigma_1$ )

**Dimostrazione**

(a)  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$  il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli

(b) la disuguaglianza tra i ranghi dice che  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ;

il fatto che  $rk\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right) = n$  implica che  $W_1 \cap W_2 = 0$

(c) Di nuovo la disuguaglianza dei ranghi implica  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ;

Se ora  $W_1 \cap W_2 = W$  allora  $\dim(W_1 \cap W_2) = n - r$

Scelto  $p_1 \in \Sigma_1$  risulta

$p_1 + W \subset \Sigma_1$  ( $W_1 \cap W_2 = W$  sottospazio di  $W_1$ )

e  $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$  è parallelo a  $\Sigma_2$  e  $\dim(p_1 + W) = \dim(W) = n - r \quad \square \quad \square$

**Esempio**

in  $\mathbb{A}^3$   $\pi_1, \pi_2$  piani distinti

$A_1, A_2$  vettori riga ( $A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ )

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

piani distinti  $\Rightarrow rk(C) = 2$

$$rg\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right) = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \text{ è una retta}$$

$$rg\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\right) = 1 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \text{ piani paralleli poiché } W_1 = W_2$$



$\mathbb{A}^4, \pi_1 \pi_2$  piani distinti tali che  $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array} \right) \in M_{45} \quad rk(C) \leq 4.$$

$rk \left( \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right)$	$rk(C)$	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	$\{p\}$
3	4	$\emptyset$ e $W_1, W_2$ hanno una direzione in comune
3	3	$r$
2	3	$\emptyset$

# Lezione 5 Geometria I

ebbene sì, sta accadendo davvero

Federico De Sisti

2024-03-17

$V, V'$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ ,  $(A, V, +)$ ,  $(A', V', +)$  spazi affini

### Definizione 1

$f : A \rightarrow A'$  è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow V'$  tale che:

$$f(p + v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ovvero} \quad f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

### Nomenclatura

Se  $f$  è biunivoca,  $f$  è detto isomorfismo affine

Un isomorfismo affine  $A \rightarrow A$  è detto affinità. **Oss**

vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come  $\text{Aff}(A)$

### Esempio

*Ov<sub>1</sub>...vn riferimento affine in A*

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Dico che  $f$  è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che  $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$$

$$\varphi(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

### 3 Esempi di affinità

I Transazioni

Fissato  $v \in V$  definiamo

$t_v : A \rightarrow A$ ,  $t_v(P) = p + v$  Dico che  $t_v$  è un'affinità con associato isomorfismo

$Id_V$  dato che:

$$\begin{aligned} t_V(p + w) &= (p + w) + v = p + (w + v) = p + (v + w) = (p + v) + w = \\ &= t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V \end{aligned}$$

la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto

$$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$$

Dico che  $\sigma_C$  è un'affinità con parte lineare  $\varphi = -Id$

$$\sigma_C(p+v) = c - \overrightarrow{CQ} \quad Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

$$\sigma_C(p) + \phi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$$

III Otetia di centro O e fattore  $\gamma \in R \setminus \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma \overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare  $\phi = \gamma Id_V$

$$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O + \gamma \overrightarrow{OQ} = O + \gamma(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = (O + \gamma \overrightarrow{OP}) + \gamma \overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) + \varphi(v)$$

### Lemma 1

Fissato  $O \in \mathbb{A}$ , per ogni  $O' \in \mathbb{A}$  e per ogni  $\varphi \in GL(V)$  esiste un'unica affinità tale che  $f(O) = O'$  e che ha  $\varphi$  come isomorfismo associato

### Dimostrazione

#### esistenza

$$\text{Pongo } f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OO}) = O' + O = O'$$

$$f(p+v) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p) + \varphi(v)$$

dove abbiamo usato  $Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$

#### unicità

Supponiamo che  $g$  abbia le stesse proprietà di  $f$ , allora

$$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$$

$$\Rightarrow f = g$$

□

□

### Definizione 2

Definiamo  $\text{Aff}_O(A) = \{f \in \text{Aff}(A) | f(O) = O\} \leq \text{Aff}(A)$   
tale gruppo è anche isomorfo a  $GL(V)$

### Lemma 2

Sia  $O \in A$ ,  $f \in \text{Aff}(A)$  Esistono  $v, v' \in V$  e  $g \in \text{Aff}_O(A)$ , univocamente determinate da  $f$  tale che

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

### Dimostrazione

$$\text{poniamo } v = -\overrightarrow{Of^{-1}(O)}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v'}, \quad g' = t_{-v} \circ f$$

Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v'})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_{v'}) = f.$$

quindi vale  $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che  $g = g'$ , per cui ho dimostrato anche  $f = t_{v'} \circ g$

$$\begin{aligned} g(O) &= (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) = \\ &= f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0 \end{aligned}$$

$$g'(O) = t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0.$$

d'altra parte  $g, g'$  hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi  $O$  in  $O$ , dunque coincidono  $\square$  **Descrizione in coordinate delle affinità di  $\mathbb{A}^n$**

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$\begin{aligned} b = f(O) \quad \varphi = L_A \quad L_A : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\rightarrow AX \end{aligned}$$

con  $\det(A) \neq 0$  ovviamente

Viceversa, per  $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$  è un'affinità con parte lineare  $L_A$

$$\begin{aligned} f_{A,b}(x + v) &= f_{A,b}(x) + \varphi(v) \\ f_{A,b}(x + y) &= f_{A,b}(x) + L_A y \end{aligned}$$

$$f_{A,b}(x + y) = A(x + y) + b = AX + AY + b = (AX + b) + AY = f_{A,b}(x) + L_A(y).$$

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n) = \{f_{A,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

### Osservazione

$\text{Aff } \mathbb{A}^n$  è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX + d) = \\ &= A(CX + d) + b = \\ &= ACX + Ad + b = f_{AC, Ad+b}(x) \end{aligned}$$

Osservo che  $f_{I,O}$  è l'elemento neutro

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) &= f_{A,b}(Ix + O) = f_{A,b}(x) \\ (f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) &= f_{A,b}(x) \end{aligned}$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di  $f_{A,b}$ ,  
ovvero che esiste  $f_{C,d}$  tale che  $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned}
(f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{I,O}(x) = x \\
ACX + Ad + b + X &\quad \forall X \in \mathbb{K}^n \\
\Rightarrow AC &= Id \quad Ad + b = 0 \\
C &= A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\
(f_{A,b})^{-1} &= f_{A^{-1}, -A^{-1}b}
\end{aligned}$$

# Lezione 6 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-13

# 1 Equivalenza per affinità

## Definizione 1

*Equivalenza per affinità* Due sottoinsiemi  $F, F' \subseteq A$  spazio affine, si dicono affinementemente equivalenti se esiste  $f \in \text{Aff}(A)$  tale che  $f(F) = F'$   
Definiamo anche una proprietà **affine** se è equivalente per affinità

## Proposizione 1

Se  $f \in \text{Aff}(A)$  e  $F$  un sottospazio affine di  $A$  di dimensione  $k$ , allora  $f(F)$  è un sottospazio affine di dimensione  $k$

## Dimostrazione

$F = p + W$   $\dim(W) = k$  Sia  $\varphi$  la parte lineare di  $f$ , che è un omomorfismo  $\varphi : V \rightarrow V$ .

Poniamo  $F' = f(p) + W'$  dove  $W' = \varphi(W)$

Chiaramente,  $\dim(W') = \dim(\varphi(W)) = k$

risulta  $f(F) = F'$

$$Q \in F \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che  $\overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow f(F) \subseteq F'$  Viceversa, dato  $R \in F'$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^{-1}(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque  $F' \subseteq f(F)$

□

## Teorema 1

Sia  $(A, V, +)$  uno spazio affine di dimensione  $n$  e siano  $\{p_0, \dots, p_n\}$ ,  $\{a_0, \dots, a_n\}$  due  $(n+1)$ -ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità  $f \in \text{Aff}(A)$  tale che  $f(p_i) = a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$

## Dimostrazione

Per ipotesi  $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}\}$  Sono basi di  $V$ , dunque esiste un unico operatore lineare  $\varphi \in GL(V)$  tale che  $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i}$   $1 \leq i \leq n$

Pongo  $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$

$$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$$

$$f \text{ è chiaramente biettiva } \overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) = \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(\overrightarrow{pp'})$$

L'unicità di  $f$  segue da quella di  $\varphi$  e dal fatto che  $f(p_0) = q_0$  (un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto). □



**Esempio**

Determino  $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^2)$  t.c.

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\{\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}\} \rightarrow \{\overrightarrow{q_0 q_1}, \overrightarrow{q_0 q_2}\}$$

Cercherò quindi  $\varphi \in GL(V)$  tale che

$$\varphi(\overrightarrow{p_0 p_1}) = \overrightarrow{q_0 q_1}, \quad \varphi(\overrightarrow{p_0 p_2}) = \overrightarrow{q_0 q_2}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$P = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \varepsilon \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$[\varphi]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad [Id]_B^\varepsilon = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_B^\varepsilon = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_B^\varepsilon = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_B^\varepsilon^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0 p})$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (t_V \circ L_A)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \quad v = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

**Corollario**

$(A, V, +)$  spazio affine di dimensione  $n$

1. per ogni  $1 \leq k \leq n+1$  due qualsiasi  $k$ -uple di punti sono affinemente equivalenti

2. Due sottospazi affini sono affinemente equivalenti se e solo se hanno la stessa dimensione

**Dimostrazione**

1. Se  $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}, \{q_0, \dots, q_{k-1}\}$  sono le  $k$ -ple date, completiamole a  $(n+1)$ -ple di punti indipendenti  $\{p_0, \dots, p_n\}, \{q_0, \dots, q_n\}$  e usiamo il teorema 2. Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi.

Viceversa, se  $S, S'$  sono sottospazi affini della stessa dimensione  $k$ , possiamo trovare  $k+1$  punti indipendenti in  $S$ , e  $k+1$  punti indipendenti in  $S'$  tali che

$$S = \overrightarrow{p_0, \dots, p_k}, \quad S' = \overrightarrow{q_0, \dots, q_k}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda  $P_i$  in  $q_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , dunque

$$f(S) = S'.$$

□

## 2 Proiezioni e Simmetrie

**Definizione 2** (Proiezioni e Simmetrie)

In  $(A, V, +)$  Sia  $L$  un sottospazio affine,  $L = P + W$

Sia  $U$  un complementare di  $W$  in  $V$ , ovvero  $V = W \oplus U$

$$\pi_W^U(w + u) = w \quad \pi_W^U : V \rightarrow V$$

$$\sigma_W^U(w + u) = w - u \quad \sigma_W^U : V \rightarrow V$$

$$p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\overrightarrow{px}) \quad \text{proiezione su } L \text{ parallela a } U$$

$$s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\overrightarrow{px}) \quad \text{simmetria di asse } L \text{ e direzione } U$$

# Lezione 7 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-14

# 1 Esercizi Vari

## Piccola definizione per esercizio

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \text{ Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n) = \{f_{a,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}$$

$$f_{A,b}(X) = AX + b$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right)$$

## Esercizio 1

---

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = e_1 + e_3, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2$$

e chiamiamo

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove  $\varphi$  è la parte lineare di  $f$ .

Trovare l'espressione di  $f$  in coordinate affini canoniche

e trovare i punti fissi di  $f$ .

### Svolgimento

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(\overrightarrow{p_0 p_1}) = \overrightarrow{q_0 q_1}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se  $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$  è la stessa base standard di  $\mathbb{R}^3$

$$[\varphi]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2-1 \\ -x_2+x_3+1 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix}$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che  $F(p) = f(p_0) + \varphi(\overrightarrow{p_0 p}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0 p})$

**Cerchiamo ora i punti fissi**

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

### Esercizio 2

Dimostrare che un'affinità di piano affine che ha tre punti fissi non allineati è l'identità

#### Svolgimento

Osservo che in un piano affine tre punti  $p_0, p_1, p_2$  sono non allineati se e solo se  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}$  sono linearmente indipendenti, ovvero  $p_0, p_1, p_2$  sono affinamente indipendenti. D'altra parte, un'affinità è univocamente determinata dall'immagine di tre punti indipendenti. L'identità è un'affinità con (almeno) tre punti fissi. Per l'unicità si ha  $f = Id$ .

### Esercizio 3

In  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  consideriamo la retta  $r : x + y = 1$

- Determinare le affinità che fissano tutti i punti di  $r$
- Tra le affinità determinate in (i), trovare quelle che mandano  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  in  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Tra le affinità determinate in i, trovare le traslazioni

#### Svolgimento

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0.$$

Basta scegliere  $f(p) = p$  per due punti distinti  $p \in r$ . Posso scegliere  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} a + \alpha = 1 \\ c + \beta = 0 \\ d + \alpha = 0 \\ d + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - \alpha \\ b = -\alpha \\ c = -\beta \\ d = 1 - \beta \end{cases} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta = 1 - \alpha - \beta \neq 0 \quad \alpha + \beta \neq 1$$

$$\text{ii} \quad \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha + \alpha = 2 \\ -\beta + 3 - 3\beta + \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3\alpha = 1 \\ -3\beta = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{iii} \quad \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 - \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta & 1 - \beta \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

e quindi l'unica traslazione è l'identità

### Nota

$$f_{A,b} = AX + b \quad f_{A,b} \circ f_{C,b} = f_{AC, Ad+b}$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right) \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{K}) \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ d & C \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ Ad + b & AC \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 + a_{11}d_1 + a_{12}d_2 & a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ b_2 + a_{21}d_1 + a_{22}d_2 & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{array} \right) \end{aligned}$$

### Esercizio 4

$$\text{In } \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^4 \quad L : \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Scrivere le matrici delle proiezioni su  $L$  parallela a  $W$  e la matrice della simmetria di asse  $L$  e direzione  $W$

### Svolgimento

$$L = P + W_1 \quad V = W_1 \oplus W_2$$

$$p_L^{W_2}(X) = P + \pi_L^{W_2}(\vec{p}\vec{x}) \quad \text{Cerco ora l'equazione parametrica di } L$$

$$s_L^{W_2}(X) = P + \sigma_L^{W_2}(\vec{p}\vec{x})$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V + W : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qui il professore utilizza la sacra formula di Antani per giungere al seguente risultato

$$\gamma = -2 + x_1 - 2x_3$$

$$\delta = -2 + 2x_2 + x_4 \quad p_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & - & -2 \end{array}$$

$$s_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

# Lezione 8 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-18



# 1 Complementi

$\mathbb{A}$  spazio affine reale con associato spazio vettoriale  $V$

## Definizione 1 (Semiretta)

Possiamo definire la semiretta di origine  $Q \in \mathbb{A}$  e direzione  $v \in V \setminus \{0\}$

$$P = Q + tv, t \geq 0 \quad (\overrightarrow{QP} = tv, t \geq 0).$$

## Definizione 2 (Segmento)

Possiamo definire il segmento di estremi  $A, B \in \mathbb{A}$  ( $A \neq B$ )

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

i punti  $p_1, \dots, p_t$  che dividono il segmento  $AB$  in  $t$  parti uguali sono dati, cioè

$$\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_3} = \dots = \overrightarrow{p_{t-1}B}.$$

sono dati da

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{i}{t}\overrightarrow{AB} \quad 1 \leq i \leq t-1.$$

In un riferimento affine  $Oe_1 \dots, e_n$ , in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i - a_1 \\ \vdots \\ x_n^i - a_n \end{pmatrix} = \frac{i}{t} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} ib_1 + (t-i)a_1 \\ \vdots \\ ib_n + (t-i)a_n \end{pmatrix}.$$

in particolare, il punto medio del segmento  $AB$  ha coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

$A, B, C$  non allineati

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

se  $t, n \geq 0$  e  $t + n \leq 1$  allora abbiamo un triangolo  $ABC$

se  $0 \leq t, n \leq 1$  abbiamo il parallelogramma individuato da  $A, B, C$

### Osservazione

Questo procedimento funziona in ogni dimensione, Ad esempio se A,B,C,D sono quattro punti indipendenti

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}.$$

se  $0 \leq t, n, v \leq 1$  tetraedro di vertici ABCD

se  $n, t, v \geq 0$  e  $n + t + v \leq 1$  si ha un parallelogramma

in generale dati  $p_0, \dots, p_k$  punti indipendenti:

$$\overrightarrow{p_0P} = \sum_{i=1}^k t_i p_0 p_i, \quad \sum_{i=1}^k t_i \leq 1.$$

definisce il  **$k$ -simplesso di vertici**  $p_0, \dots, p_k$

### Definizione 3 (Sottosineime Convesso)

$S \subseteq \mathbb{A}$  si dice *Convesso* se per ogni  $A, B \in S$  il segmento  $AB$  è contenuto in  $S$

## 2 Cambiamenti di riferimento affine

Sia  $(A, V, +)$  uno spazio affine  $n$ -dimensionale

$R = Ee_1, \dots, e_n; \quad R' = Ff_1, \dots, f_n$  due riferimenti affini.

$$\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$\overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^n b_i e_i \quad \overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^n y_i f_i.$$

$$A = (e_{ij}) = {}_{\varepsilon}(Id_V)_{\Gamma}.$$

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EP} = -\sum_{i=1}^n b_i e_i + \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (1)$$

$$\overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1, j=1}^n y_i a_{ij} - e_i \quad (2)$$

Comparando (1), (2) troviamo

$$X = AY + b.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ b & | & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}.$$

$$Y = A^{-1}X - A^{-1}b.$$

### 3 Esercizi

Trovare l'affinità  $F : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(r) = r', \quad f(s) = s.$$

dove  $r : x = 0, \quad s : 2x - y = 0 \quad r' : x - 2y = 1$

---

$f$  è del tipo  $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$  con  $ad + bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \quad \left( \frac{1}{f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Imponiamo le condizioni del testo

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + \alpha_1 + 3b = 1 \\ \alpha_2 + c + 3d = 1 \end{cases}.$$

Un punto in  $r(x_1 = 0)$  è del tipo  $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) \in r \quad \forall t \in$

$$\begin{pmatrix} 1+bt \\ \alpha_2+dt \end{pmatrix} \in r'.$$

$$x_1 - 2x_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + bt - 2(\alpha_2 + dt) = 1 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1.$$

$$b - 2d = 0.$$

Sicuramente il punto di  $S$  ha coordinate

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \text{e imponiamo } f\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}\right) \in s$$

$$f\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + at + 2bt \\ \alpha_2 + ct + 2dt \end{pmatrix}$$

$$2(\alpha_1 + at + 2bt) = \alpha_2 + ct + 2dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2a + 4b - c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3} \quad b = \frac{2}{3} = c \quad d = \frac{1}{3} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{3} \quad \alpha_2 = -\frac{2}{3}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dire se sono incidenti, paralleli o sghembi

$$\pi_1 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Dalle equazioni cartesiane è chiaro che  $pi_1 \cap pi_2 = \emptyset$ , quindi  $\pi_1 \pi_2$  non sono incidenti la giacitura di  $\pi_1, \pi_2$  sono  $W_1 = e_1 + e_2$ ,  $W_2 = e_1 + e_2$   
dunque **APPUNTI DA RECUPERARE**

$$f : A \rightarrow A$$

$$R_1 \quad R'_1$$

$$R_2 \quad R'_2$$

$$[f]_{R_1}^{R'_1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

$$[f]_{R_2}^{R'_2} = [Id]_{R'_1}^{R_2} [f]_{R_1}^{R'_1} [Id]_{R_2}^{R_1}.$$

Troviamo l'affinità che manda ordinatamente  $A, B, C$  in  $A', B', C'$  ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = \{A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}\}$  è un riferimento affine

$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}\}$  è un riferimento affine

$$[F]_{R_1}^{R_2} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$f(\overrightarrow{AB}) = \alpha \overrightarrow{A'B'} + \beta \overrightarrow{A'C'}.$$

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$[f]_R^R = [Id]_{R_2}^R [f]_{R_1}^{R_2} [Id]_R^{R_1}.$$

$$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

Quindi la matrice del cambio di base da  $R$  a  $R_2$  è

$$[Id]_{R_2}^R = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Analogamente si fa con  $R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\}$

## 4 Forme Bilineari e Simmetriche

$V$  Spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

### Definizione 4

Una funzione  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  si dice **Forma bilineare** se è lineare in ciascuna variabile fissata l'altra

in altre parole:

$$g(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha g(v_1, v_3) + g(v_2, v_3) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

### Definizione 5

$g$  si dice **simmetrica** se

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

### Esempio

Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$

$$\text{Allora} \quad g_A(x, y) = X^t A Y.$$

è una forma bilineare su  $K^n$

### Esempio

$g_A$  è bilineare con

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = x_1(2y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + 3y_2) = \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{aligned}$$

### Osservazione

$g_A$  è simmetrica se e solo se  $A$  è simmetrica

### Esempio (Importante)

in  $\mathbb{K}^n$  prendiamo  $A = I_n$

$$g_{I_n}(X, Y) = X^t Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Se  $g$  è una forma bilineare simmetrica su  $V$  e  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , definisco la matrice di  $g$  rispetto a  $B$  come

$$[g]_B \rightarrow a_{ij} = g(v_i, v_j) \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = X^t A Y.$$

**Ricorda:**  $X^t$  è la matrice trasposta di  $X$

## 5 Prodotto Scalare

$V$  spazio vettoriale Reale

**Definizione 6** (Prodotto Scalare)

Un prodotto scalare su  $V$  è una forma bilineare simmetrica

$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

**Nomenclatura 1.** 1.  $v, w \in V$  si dicono **ortogonali** se

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

2.  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  è la norma di  $v$

3. In  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  è detto **prodotto scalare standard**

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

**Proposizione 1** (Disuguaglianza di Schwarz)

$$v, w \in V \quad \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

e vale l'uguaglianza se e solo se  $v, w$  sono dipendenti

**Dimostrazione**

Se  $w=0$  la disuguaglianza è ovvia, quindi possiamo assumere  $w \neq 0$ . Per  $v, w, a, b \in$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle av + bw, av + bw \rangle = a \langle v, av + bw \rangle + b \langle w, av + bw \rangle = \\ &= a(a \langle v, v \rangle + b \langle v, w \rangle) + b(a \langle w, v \rangle + b \langle w, w \rangle) = \\ &= a^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle v, w \rangle + b^2 \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la simmetria del prodotto scalare  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ .  
Notiamo che vale l'uguaglianza solo se  $av + bw = 0$ , cioè  $v, w$  sono paralleli.

La relazione

$$a^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle v, w \rangle + b^2 \langle w, w \rangle \geq 0.$$

vale per ogni scelta di  $a, b$ .

Prendo  $a = \langle w, w \rangle$  e  $b = - \langle v, w \rangle$

$$0 \leq \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - 2 \langle w, w \rangle \langle v, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 \langle w, w \rangle.$$

Poiché  $\langle w, w \rangle \neq 0$ ,  $\langle w, w \rangle > 0$  quindi posso dividere la relazione precedente per  $\langle w, w \rangle$ , per altro senza cambiare verso dato che il prodotto scalare è definito positivo

$$0 \leq \langle w, w \rangle \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

ovvero

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

□

**Osservazione**

$$| \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \|w\|$$

**Proprietà della lunghezza**

1.  $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0$  e  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

# Lezione 9 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-20



## 1 Rimembranze dalla scorsa lezione

$V$  spazio vettoriale. Un prodotto scalare su  $V$  è una funzione bilineare simmetrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v.$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

## 2 Nuova effettiva lezione

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

### Lemma 1

1.  $\|v\| \geq 0$  e  $\|v\| = 0$  se e solo se  $v = 0$ .
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

### Dimostrazione

1. segue dalla definizione

$$2. \|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \cdot \|v\|$$

$$3. \|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle =$$

$$= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle =$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi)  $\square$

### Nomenclatura 1

$v, w' \in V$  si dicono ortogonali se  $\langle v, w' \rangle = 0$

Un insieme  $S$  di vettori è detto ortogonale se

$$0 \in S \text{ e } \langle s_1, s_2 \rangle = 0 \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

Una base di  $V$  si dice ortogonale se è un insieme ortogonale. Una base

$$\{v_i\}_{i \in I} \text{ si dice ortonormale se } \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

### Definizione 1 (Versore)

Sia  $v \in V$  tale che  $\|v\| = 1$  allora  $v$  è un versore

Oss

Dat  $u \neq 0$ ,  $\frac{u}{\|u\|}$  è un versore

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1.$$

**Proposizione 1**

Sia  $\{v_1, \dots, v_k\}$  un insieme ortogonale allora  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti. In particolare se  $\dim(V) = n$ , un insieme ortogonale di  $n$  vettori è una base

**Dimostrazione**

Supponiamo  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle$$

$$= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$$

Dato che  $\langle v_i, v_i \rangle > 0$  poiché  $v_i \neq 0$  per ipotesi, dunque  $\alpha_i = 0$ ,  
dato che posso scegliere qualunque  $v_i$  □

**Osservazioni**

1. La base standard di  $\mathbb{R}^n$  è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard

2. Sia  $g = \langle, \rangle$  un prodotto scalare su  $V$ , Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $g$ -ortonormale allora  $[g]_B = Id_n$  ovvero  $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$

Inoltre, se  $X = [v]_B$ ,  $Y = [Id]_B$

$g(v, w) = X^t [g]_B Y = X^t Y$  (sempre con  $B$  ortonormale)

**Proposizione 2**

Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base ortonormale, per ogni  $v \in V$  risulta

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

**Dimostrazione**

(1) Sia  $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$

$$\langle v, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1)  $a_j$  con  $\langle v, v_j \rangle$  □

**Nomenclatura 2**

Dato  $v \neq 0$  viene detto coefficiente di Fourier di  $w \in V$  rispetto a  $v$

$$a_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

**Nota**

In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di  $w$  rispetto a  $v$  (moltiplicato quindi per il versore di  $v$  otteniamo il vettore della proiezione). Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.

$$\langle w - a_v(w)v, v \rangle = \langle w - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \rangle = \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot \langle v, v \rangle$$

### 3 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

#### Lemma 2

Sia  $v_1, v_2, \dots$  una successione di vettori in  $V$  spazio vettoriale euclideo. Allora:

1. Esiste una successione  $w_1, w_2, \dots$  in  $V$  tale che per ogni  $k \geq 1$

$$a) \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle.$$

$$b) \quad \langle w_i, w_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

2. Se  $u_1, u_2, \dots$  è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

#### Dimostrazione

Costruiamo i  $w_i$  per induzione su  $k$ .

Base  $k = 1$

$$v_1 \rightarrow w_1 = v_1 \text{ verifica } a, b.$$

Supponiamo per induzione di aver costruito  $w_1, \dots, w_t$ ,  $t > 1$  verificanti a e b e costruiamo  $w_{t+1}$

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1})w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1})w_i.$$

per induzione  $v_i \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \quad 1 \leq i \leq t$

dunque

$$\langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle.$$

D'altra parte  $w_{t+1} \in \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$  perché per induzione  $w_i \in \langle v_1, \dots, v_t \rangle \quad 1 \leq i \leq t$

Quindi  $\langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$  e quindi le proprietà a e b sono verificate.

Verifichiamo ora b, sia  $w_i \neq 0$

$$\langle w_{t+1}, w_i \rangle = \langle v_{t+1} - \sum_{j=1}^t a_{w_j}(v_{t+1})w_j, w_i \rangle =$$

$$= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - a_{w_i}(v_{t+1}) \langle w_i, w_i \rangle =$$

$$= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - \frac{\langle v_{t+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0$$

2. Di nuovo procedo per induzione su  $k$ , con base ovvia  $k = 1$

Supponiamo  $t > 1$  e apponiamo che esistano  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$  con  $u_k = \delta_k w_k$  per ogni  $k \leq t$ . per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \quad z \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle = \langle u_1, \dots, u_t \rangle .$$

D'altra parte,  $\langle u_{t+1}, z \rangle = \langle w_{t+1}, z \rangle = 0$

Quindi  $\langle u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w \rangle = 0$  ovvero  $\langle z, z \rangle$

$\Rightarrow z = 0$  e  $u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$

□

# Lezione 10 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-21

# 1 Utilizzo del procedimento di Gram Schmidt

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ ,  $V$  spazio euclideo

$$w_1 = v_1$$

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1, w_i \neq 0}^t \frac{\langle v_{t+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  e i  $w_i$  sono a due a due ortogonali

---

## Esercizio 1

Applicare il procedimento di G.S ai vettori di  $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere le corrispondente base ortonormale

## Svolgimento

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il procedimento è analogo e banale per  $w_4$ .

I vettori della alla fine dello svolgimento sono:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vanno solo normalizzare (fatto dal professore ma non da me)

---

**Esercizio 2**

Ortogonalizzare la base standard di  $\mathbb{R}^4$  rispetto al prodotto scalare

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + y_4x_3 + 2x_4y_4.$$

$\varepsilon$  base standard di  $\mathbb{R}^4$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Svolgimento**

Notare come  $a_{ij}$  sia il coefficiente di  $x_i y_j$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 - \frac{v_2^t A w_1}{w_1^t A w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il procedimento continua, ma non è niente di che.

---

**Foglio 2****Esercizio 2**

$$p_1, \dots, p_n \in A, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Dimostrare che dato qualunque  $q \in A$

$$p = q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{op_i}.$$

non dipende da  $q$

$\sum_{i=1}^n c_i p_i$  combinazione baricentrica dei punti  $p_i$  con coefficienti  $c_i$

Dobbiamo dimostrare che se  $q' \in A$

$$q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} = q' + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{q'p_i}.$$

$$q = q' + \overrightarrow{q'q}$$

$$q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \overrightarrow{q'q} + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{something}$$

non sono riuscito a finire l'esercizio in tempo pene pene pene TODO

**Punto b dell'esercizio 3**

$f : A \rightarrow A', \varphi : V \rightarrow V'$  parte lineare

Devo vedere che  $f(\sum_{i=1}^n c_i p_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i) \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1$

$$f(p_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{p_0 p_i}) = f(p_i) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi(\overrightarrow{p_0 p_i}) =$$

$$= f(p_0) + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i)$$

$$= (1 - \sum_{i=1}^n c_i) f(p_0) + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)}$$

Dove nell'ultimo passaggio si spezza la somma

Viceversa supponiamo che  $f : A \rightarrow A'$  rispetti le combinazioni baricentriche; verificiamo che  $\varphi : V \rightarrow V'$

$$p_0 \in A \quad \varphi(v) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v)}.$$

è lineare

$$v_1, v_2 \in V \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad p_1 = p_0 + v_1 \quad p_2 = p_0 + v_2$$

$$v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1} \quad v_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$$

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} =$$

$$\overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \alpha_2 \overrightarrow{p_0 p_2})} =$$

$$\overrightarrow{f(p_0) f(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)} =$$

$$= \alpha_0 \overrightarrow{f(p_0) f(p_0)} + \alpha_1 \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{f(p_0) f(p_2)} = \alpha_2 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$$

$$\text{infatti } f(p_1) = f(p_0 + v_1), \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v_1)} = \varphi(v_1)$$



# Lezione 11 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-27

# 1 Varie robe su basi ortonormali

## Proposizione 1

Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormale dello spazio euclideo  $V$ , la base  $L = \{w_1, \dots, w_n\}$  è ortonormale se e solo se  $M = [Id_V]_L^B$  è ortogonale ( $MM^t = Id_V$ )

## Dimostrazione

Sia  $M = (m_{ij})$  per definizione di  $M$   $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j$   $1 \leq i \leq n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n m_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj} v_h \right\rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki} m_{hj} \langle v_k, v_h \rangle = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (M^t M)_{i,j}.$$

□ Osservazione

Sia  $V = \mathbb{R}[x]$   $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$  è un prodotto scalare

## Definizione 1 (Angolo non orientato tra vettori)

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \quad (v, w \neq 0)$$

allora

$$\exists! \in [0, \pi] : \cos = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

è detto angolo non orientato tra  $v, w$

## Definizione 2

Sia  $S \subseteq V$  con  $V$  spazio euclideo,  $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

## Osservazione

$S^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Siano  $v_1, v_2 \in S^\perp$  e  $\alpha_{1,2} \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v_1, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$$

**Proposizione 2**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo e  $W$  un sottospazio di  $V$  allora

$$V = W + W^\perp$$

**Dimostrazione**

Sia  $\{w_1, \dots, w_k\}$  una base ortogonale di  $W$

consideriamo  $\pi : V \rightarrow W$  con  $\pi(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$ , dobbiamo mostrare che  $V = W + W^\perp$  e che  $W \cap W^\perp = \{0\}$  ma la seconda è ovvia poiché se  $w \in W \cap W^\perp$  è ortogonale a se stesso  $\Rightarrow \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$

Osserviamo inoltre che se  $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$  la richiesta è dunque  $v - \pi(v) \in W^\perp$ . Basta verificare che  $\langle v - \pi(v), w_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0.$$

□ Osservazione

1- Se  $V$  è spazio euclideo e  $W$  è sottospazio di  $V$ ,

$(W, \langle, \rangle|_{W \times W})$  è uno spazio euclideo

2- Se  $\{w_1, \dots, w_k\}$  è base ortogonale di  $W$  risulta:

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|$$

e vale l'uguaglianza se e solo se  $a_h = \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle}$

**Dimostrazione** (Punto 2)

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|;$$

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w \rangle =$$

$$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u \rangle = \langle v - w, v - w \rangle + \langle w - u, w - u \rangle \geq \|v - w\|^2$$

□ La lezione prosegue con lo svolgimento di alcuni esercizi

## 2 Prodotto vettoriale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo per cui  $\dim(V) = 3$  sia  $\{v, j, k\}$  una base ortonormale di  $V$

**Definizione 3** (Prodotto vettoriale)

$$\text{Dati } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ pongo } v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$B_1, B_2$  si dicono concordemente orientate se  $\det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$ , questa è inoltre una relazione di equivalenza.

$$\begin{aligned} \text{Di fatti se } B_1 \sim B_2, B_2 \sim B_3 \quad \det([Id]_{B_1}^{B_3}) &= \det([Id]_{B_2}^{B_3} [Id]_{B_1}^{B_2}) = \\ &= \det([Id]_{B_2}^{B_3}) \det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_2 \end{aligned}$$

# Lezione 12 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-27

# 1 Operatori Lineari Unitari

Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo

## Definizione 1

Un operatore lineare  $T : V \rightarrow V$  si dice unitario se  
 $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$

## Proposizione 1

Sia  $V$  spazio vettoriale euclideo  $n$ -dimensionale e sia  $T : V \rightarrow V$  un'applicazione, TFAE (The Following Are Equivalent)

1.  $T$  è unitario
2.  $T$  è lineare e  $\|T(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$
3.  $T(O) = O, \|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in V$
4.  $T$  è lineare e manda basi ortonormali in basi ortonormali
5.  $T$  è lineare ed esiste una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ortonormale di  $V$  tale che  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  è una base ortonormale

## Dimostrazione

$$1 \Rightarrow 2. \text{ Unitario} \Rightarrow \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2 = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$$2 \Rightarrow 3 \text{ } T \text{ lineare} \Rightarrow T(O) = O \quad \|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| = \|v - w\|$$

$$3 \Rightarrow 1 \quad \|T(v)\| = \|T(v) - O\| = \|T(v) - T(O)\| = \|v - O\| = \|v\|$$

$$\text{Esplicitiamo } \|T(v) - T(w)\|^2 = \|v - w\|^2$$

$$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle$$

$$\Rightarrow \|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

$$\text{Dunque } \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Resta da vedere che  $T$  è lineare.

Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $V$  allora  $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$  è una base ortonormale per quanto dimostrato prima.

$$\langle T(e_j), T(e_i) \rangle = \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (\Rightarrow x_i = \langle v, e_i \rangle)$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \langle T(v), T(e_i) \rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i)$$

$$\text{Dunque } T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \text{ quindi } T \text{ è lineare}$$

$$1 \Rightarrow 4 \quad \{e_1, \dots, e_n\} \text{ è una base ortonormale}$$

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

4  $\Rightarrow$  5 *Ovvio*

5  $\Rightarrow$  1 Sia  $e_1, \dots, e_n$  la base ortonormale dell'enunciato. Considero  $u, v \in V$

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(w) \rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^n x_i e_i), T(\sum_{j=1}^n y_j e_j) \rangle = \\ &= \langle \sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{j=1}^n y_j T(e_j) \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato  $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \delta_{ij}$

□

$\alpha \in V \setminus \{0\}$   $S_\alpha = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$  riflessione rispetto ad  $\alpha^2$

1.  $S_\alpha$  è unitaria
2.  $S_\alpha^2 = Id$
3. Esiste una base  $B$  di  $V$  tale che  $(S_\alpha)_B = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} 1. \langle S_\alpha(v), S_\alpha(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \\ \langle v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, w - 2 \frac{\langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \rangle &= \\ \langle v, w \rangle - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle \alpha, w \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 4 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp.$$

Quindi presa una base  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  di  $\alpha^\perp$ ,

$B = \{w_1, \dots, w_{n-1}, \alpha\}$  è una base di  $V$  e

$$S_\alpha(w_i) = w_i, i = 1, \dots, n-1$$

$$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$$

$$(S_\alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

In particolare  $S_\alpha = Id$  poiché  $M^2 = Id$

□

## 2 Osservazioni sugli operatori unitari

1. Se  $T$  è unitario, e  $v \in \text{Ker}(T)$ , allora

$$0 = \|T(v)\| = \|v\| \Rightarrow v = 0.$$

Dunque  $T$  è invertibile.

È facile vedere che se  $T_1, T_2$  sono unitarie, lo è anche  $T_1 T_2^{-1}$ , quindi, posto

$$O(V) = \{T \in \text{End}(V) | T \text{ è unitario}\}.$$

$$O(V) \leq GL(V).$$

e  $O(V)$  viene chiamato gruppo ortogonale di  $V$ .

2. Se fissiamo in  $V$  una base ortonormale  $B$ , e  $T \in O(V)$ ,  $[T]_B^B$  è ortogonale. Infatti sia  $A = [T]_B^B$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Le colonne di  $A$  sono le coordinate di  $T(e_i)$  rispetto a  $B$ , quindi  $T$  è unitario se e solo se

$$\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}.$$

dove  $A^i, A^j$  rappresentano la riga  $i$ -esima e  $j$ -esima della matrice  $A$

3. Se  $T \in O(V)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un autovalore di  $T$ , allora  $\lambda = \pm 1$

Se  $\lambda$  è autovalore, esiste  $v \neq 0$  tale che  $T(v) = \lambda v$

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$$

Poiché  $v \neq 0, \|v\| \neq 0$  quindi  $|\lambda| = 1$ , cioè  $\lambda = \pm 1$

4. Se  $V$  è uno spazio euclideo di dimensione  $n$ , ogni  $T \in O(V)$  è composizione di al più  $n$  riflessioni  $S_n$

### Dimostrazione

per induzione su  $n$ , con base ovvia  $n = 1$ .

Supponiamo il teorema valga per ogni spazio euclideo di dimensione  $n - 1$  e dimostriamo per uno spazio euclideo di dimensione  $n$ . Sia  $f \in O(V)$

#### Primo caso

$f$  ha un punto fisso non nullo

$$v \in V, \quad v \neq 0, \quad f(v) = v.$$

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^\perp.$$

$W = v^\perp$ ,  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W})$  è euclideo di dimensione  $n - 1$

$f|_W : W \rightarrow W$ , infatti, se  $u \in W$

$$\langle f(u), v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0.$$

Per induzione  $f|_W = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$ ,  $r \leq n - 1$

e quindi  $f = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$ ,  $r \leq n - 1$

### Secondo caso

Sia  $v \neq 0$  tale che  $f(v) \neq v$ . Allora

$$S_{f(v)-v}(f(v)) = v.$$

$$\text{Infatti } S_{f(v)-v}(f(v)) = f(v) - 2 \frac{\langle f(v), f(v) - v \rangle}{\langle f(v) - v, f(v) - v \rangle} (f(v) - v)$$

$$\text{Ma } = f(v) + 2 \frac{\langle f(v), f(v) - v \rangle}{\langle f(v) - v, f(v) - v \rangle} (v - f(v))$$

$$\text{Ora } \langle f(v), f(v) - v \rangle = \|v\|^2 - \langle f(v), v \rangle$$

$$\langle f(v) - v, f(v) - v \rangle = 2\|v\|^2 - 2\langle f(v), v \rangle.$$

Dunque  $(S_{f(v)-v} \circ f)$  ha un punto fisso. Per il primo caso  $S_{f(v)-v} \circ f = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$   $r \leq n-1$

$$\text{Dunque } S_{f(v)-v} \circ S_{f(v)-v} \circ f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \dots \circ S_{\alpha_r}$$

$$\Rightarrow f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$$

quindi  $f$  è composizione di al più  $n$  riflessioni □

## 3 Spazi affini euclidei

Uno spazio affine euclideo è uno spazio affine  $(E, V, +)$  dove  $V$  è uno spazio euclideo.

Si può definire una distanza tra punti di  $E$

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Un riferimento cartesiano per uno spazio affine euclideo è il dato  $Oe_1 \dots e_n$  di un punto e di una base ortonormale di  $V$

In particolare se  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  allora

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

### Definizione 2

Due sottospazi affini si dicono ortogonali se le loro giaciture sono ortogonali

(cioè se  $S = P + U$ ,  $T = Q + W$ ,  $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall u \in U, \quad \forall w \in W$ ).



# Lezione 14 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-04

## 1 Precisazione

Siano  $S, T$  sottospazi affini in uno spazio euclideo  $\delta$  di dimensione  $n$ . Diciamo che  $S, T$  sono ortogonali se, posto  $S = p + U$ ,  $T = q + W$ ,  $p \in S, q \in T$ ,  $U, W$  sottospazi vettoriali di  $V$ ,

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad \text{se } \dim(S) + \dim(T) < n.$$

$$\langle U^\perp, W^\perp \rangle = 0 \quad \text{se } \dim(S) + \dim(T) \geq n.$$

### Esempi

1. Due rette  $r, s$  in  $\mathbb{E}^3$  con vettori direttori  $v_s, v_r$

**COMPLETARE CON DISEGNI**

2. retta e piano in  $\mathbb{E}^3$

**COMPLETARE CON DISEGNI**

3. due piani in  $\mathbb{E}^3$

**COMPLETARE CON DISEGNI**

sarò sincero, non si capisce un cazzo

## 2 Esercizi foglio 4

### es 3

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad r' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Posizione reciproca

La direzione di  $r$  è  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , quella di  $r' = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Essendo tali vettori indipendenti, le rette non sono parallele

$$p' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in r', \quad O \in r$$

$$\overrightarrow{Op'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

quindi  $r, r'$  sono sghembi

$S = \pi \cap \pi'$   $\pi$  piano per  $r$  parallelo a  $v \wedge v'$

$\pi'$  piano per  $r'$  parallelo a  $v \wedge v'$

$$v \wedge v' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v \wedge v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi' : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

trasformiamo in coordinate cartesiane

$$\pi \rightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

analogo per  $\pi'$

**es 4**

proiezione ortogonale su  $\pi$

simmetria ortogonale di asse  $\pi$

$$\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0.$$

vettore normale a  $\pi$   $P_0 \in \pi$

$$p(P) = P_0 + \tilde{p}(\overrightarrow{P_0 P})$$

$$\sigma(P) = P_0 + \tilde{\sigma}(\overrightarrow{P_0 P})$$

$$\text{scelgo } p_0 \in \pi \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W \text{ giacitura di } \pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$$

$$\text{Dobbiamo decomporre } \overrightarrow{P_0 P} \text{ rispetto a } W \oplus W^\perp \quad W^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo poi è solo un sistema noioso da risolvere

$$p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ( \text{ guarda le lavagnate, è un super vettore}).$$

sulle lavagnate trovi anche il risultato della simmetria ma non lo svoglimento

**es 5**

# Lezione 15 Geometria

Federico De Sisti

2024-04-08

# 1 Definizioni su operatori

## Definizione 1

$T \in \text{End}(V)$  è

· Simmetrico o Autoaggiunto se

$$T = T^t.$$

· Antisimmetrico se

$$T = -T^t.$$

## Proposizione 1

$T$  è unitario se e solo se  $T^t \circ T = \text{Id}_V$

## Definizione 2

Sia  $E$  uno spazio euclideo. Un'affinità  $f : E \rightarrow E$  si dice Isometria se la sua parte lineare  $\varphi : V \rightarrow V$  è un operatore unitario

## Osservazione

Le isometrie formano un gruppo denotato con  $\text{Isom}(E)$  (difatti,  $\text{Isom}(E) \leq \text{Aff}(E)$ )

Infatti la composizione di isometrie è un isometria.

se  $\varphi_1, \varphi_2$  sono le parti lineari di  $f_1, f_2 \in \text{Isom}(E)$

Per ipotesi  $\varphi_1 \circ \varphi_1 = \text{Id}$ ,  $\varphi_2^t \circ \varphi_2 = \text{Id}$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^t \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_2^t \circ \varphi_1^t \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^t \circ \varphi_2 = \text{Id}.$$

Inoltre, dalla definizione, l'inversa di un operatore unitario è unitario.

In effetti, ho dimostrato che

$$O(V) = \{f \in \text{End}(V) | f^t \circ f = \text{Id}\}.$$

è un gruppo, e un sottogruppo di  $GL(V)$

Data  $f \in \text{Isom}(E)$  diciamo che:

$f$  è diretta se  $\det(\varphi) = 1$

$f$  è inversa se  $\det(\varphi) = -1$

Le isometrie dirette formano un sottogruppo

$$\text{Isom}^+(E) \leq \text{Isom}(E).$$

## Osservazione

1. Sia  $O \in E$

$$\text{Isom}^+(E)_O \leq \text{Isom}(E)_O = \{f \in \text{Isom}(E) | f(O) = O\} \leq \text{Isom}(E).$$

Dove  $Isom^+(E)_O$  sono le rotazioni di centro  $O$

2. Se nello spazio euclideo  $E$  è assegnato con riferimento cartesiano  $R = Oe_1, \dots, e_n$ , ogni isometria  $f \in Isom(E)$  con parte lineare  $\varphi \in O(V)$  si scrive in coordinate rispetto al riferimento nella forma

$$Y + AX + c \quad A \in O(n).$$

dove  $p \in E, \quad X = [P]_R, \quad Y = [f(P)]_R$   
 $A = [\varphi]_{\{e_1, \dots, e_n\}}, \quad c = [f(O)]_R$

### Teorema 1

*Sia  $E$  uno spazio euclideo, Un'applicazione  $f : E \rightarrow E$  è un isometria se e solo se*

$$\otimes d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \quad \forall P, Q \in E.$$

### Dimostrazione

*supponiamo che  $f$  sia un'isometria, con parte lineare  $\varphi$*

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q).$$

*Viceversa se  $f : E \rightarrow E$  un'affinità verificante l'equazione  $\otimes$ , fissiamo  $O \in E$  e definiamo  $\varphi : V \rightarrow V$  ponendo*

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

*Poiché ogni vettore  $v \in V$  è del tipo  $\overrightarrow{OP}$  per qualche  $P \in E$ ,  $\varphi$  è definita, e tale che se  $\underline{Q}$  è il vettore nullo in  $V$*

$$\varphi(\underline{Q}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{Q}.$$

*Inoltre se  $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$*

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\| &= \|\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})\| = \\ &= \|\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)}\| = \|\overrightarrow{f(Q)f(P)}\| = \\ &= d(f(Q), f(P)) = d(Q, P) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|v - w\| \end{aligned}$$

*Quindi, per una delle caratterizzazioni già dimostrati,  $\varphi$  è un operatore unitario.*

*Dimostro ora che  $f$  è un'affinità con parte lineare  $\varphi$*

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(Q)} - \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

□

## 2 Isometrie di piani e spazi euclidei di dimensione 3

$$A \in SO(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che: } \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 = 1 &\rightsquigarrow a = \cos \theta, \quad c = \sin \theta \\ \text{altre condizioni} &\rightsquigarrow b = -\sin \theta, \quad d = \cos \theta \end{aligned}$$

Dunque

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che se  $\det(A) = \det(B) = -1$  allora  $\det(AB) = 1$ , quindi se  $A \in O(2) \setminus SO(2)$

$$A = (AB)B^{-1} = (AB)B^t.$$

con  $B \in O(2) \setminus SO(2)$  fissato.

Scegliendo  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , tutti gli elementi di  $O(2) \setminus SO(2)$  sono del tipo

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

### Lemma 1

- 1)  $A_\theta = R_\theta A_O = A_O R_{-\theta}$
- 2)  $A_\varphi \circ A_\theta = R_{\varphi-\theta}$
- 3)  $A_\theta$  ha autovalori 1 e -1 con autospazi ortogonali

### Dimostrazione

1. *ovvio*
2.  $A_\varphi A_\theta = R_\varphi A_O R_\theta A_O = R_\varphi A_O A_O R_{-\theta} = R_\varphi R_{-\theta} = R_{\varphi-\theta}$
3. *Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A_\varphi$ :*

$$\det \begin{pmatrix} T - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & T + \cos \theta \end{pmatrix} = (T - \cos \theta)(T + \cos \theta) - \sin^2 \theta = T^2 - 1.$$

quindi  $A_\theta$  ha autovalori 1. Si capisce direttamente che gli autospazi sono ortogonali. In realtà

$$V_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

□

Sia  $c \in E$   $\sigma : E \rightarrow E$  rotazione di centro  $c$ .  
 La parte lineare di  $\sigma$  appartiene a  $SO(2)$ , quindi è del tipo  $R_\theta$ . Se  $Oe_1e_2$  è un riferimento cartesiano

$$R_{c,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OC}}.$$

riflessione: isometria diretta che fissa tutti i punti di una retta, detta asse di riflessione

### Osservazione

Riflessioni per  $O \Leftrightarrow O(w) \setminus SO(2)$

#### Lemma 2

1.  $r \subset E$  retta,  $C \in r$ ,  $R_{C,\theta}$  rotazione di centro  $C$ . Esistono rette  $s, t$  contenenti  $C$  tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette  $r, s$  passanti per  $C$   $\rho_r \circ \rho_s$  è una rotazione di centro  $C$  e

$$\rho_r \circ \rho_s = Id \Leftrightarrow r = s.$$

2.  $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$  è una rotazione di angolo  $\theta + \varphi$  a meno che  $\theta + \varphi = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , in tal caso è una traslazione che è diversa dall'identità se e solo se  $C \neq D$

3. Se  $C, D \in E$ ,  $C \neq D$  e  $r$  è la retta per  $C$  e  $D$ . Se  $R_{C,\theta}, R_{D,\varphi}$  sono non banali e  $\theta + \varphi \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , allora  $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$  e  $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\varphi}$  hanno centri destini e simmetrici rispetto ad  $r$ .



# Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

# 1 Ultima Parte teorica prima del compito

$$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$

$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

## Definizione 1 (Riflessione)

*Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)*

$E$  piano euclideo  $C \in E, r \subset E$  retta  $\exists s, t$  rette passanti per  $C$  tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"

Possiamo fissare  $c = 0$   $p_r = A_{o,\alpha}$ . Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove  $\rho_r = A_\alpha$  e  $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$

Il viceversa segue, sostituendo  $c \equiv 0$ , da  $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \rightarrow \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

altrimenti è una traslazione (che è l'identità  $= D$ )

Se  $C = D$  chiaramente  $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$

Se  $C \neq D$  sia  $r$  la retta per  $C$  e  $D$  Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \quad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette  $s, t$

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se  $s, t$  sono incidenti allora per la parte precedente  $T$  è una rotazione, altrimenti

$s \parallel t$

## TODO disegno

In coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano  $Oe_1e_2$  Se  $P \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \quad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d) + d - x) + x.$$

dove  $c, d$  sono i vettori delle coordinate di  $C, D$  rispettivamente

$$\frac{R_{\theta+\varphi}(x-d) + R_\theta(d-c) + c}{\text{parte lineare}}$$

$T$   $T$  è una traslazione se e solo se  $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

che è l'identità se e solo se  $d = c$  cioè  $D = C$

**Definizione 2** (Glissoriflessione)

Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione  $t_v \circ \rho_r$  di una riflessione di asse  $r$  con una traslazione  $t_v \neq Id$  con  $v \neq 0, v \parallel r$

**TODO disegno**

**Teorema 1** (Charles, 1831)

Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

**Dimostrazione**

Sia  $f \in Isom(E)$

Se  $f$  ha un punto fisso abbiamo già visto che  $f$  è una rotazione se è diretta o una riflessione se  $f$  è inversa

se  $f$  diretta priva di punti fissi. Allora anche  $f^2$  non ha punti fissi, perché se  $f^2(p) = p$

**Disegno TODO**

Dunque  $f(M) = M$  escluso.

Dico che  $p, f(p), f^2(p)$  che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati, Altrimneti **Disegno TODO**

$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p)) \text{ (poichè } f \text{ è un'isometria)}.$$

$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché  $f$  preserva l'orientazione, il triangolo  $QPf(P)$  viene trasformato in  $Q, f(P), f^2(P)$  da cui  $f(Q) = Q$

Dunque tutti i punti  $f^i(P)$ ,  $i \geq 0$  sono allineati, quindi se  $r$  è la retta che li contiene,  $f$  agisce su  $r$  come una traslazione.

Poiché  $f$  è diretta,  $f$  agisce su tutto il piano come una traslazione.

Sia ora  $f$  inversa senza punti fissi,

Allora  $f^2$  è diretta e come prima  $f^2 = t_v$  per qualche  $v$

Sia  $P \in E$  un punto  $r_0 = Pf^2(P)$ ,  $r_1 = f(P)f^2(P)$  sono rette parallele che sono scambiate tra loro da  $f$

**Disegno TODO**

Sia  $r$  la retta equidistante da  $r_0$  e  $r_1$ .

Allora  $f(r) \subseteq r$  Ma  $f^2 = t_v$   $f|_r = t_{v/2}$

Se ora consideriamo  $t_{-v/2} \circ f$

questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente  $r$ , quindi è una riflessione che indichiamo con  $\rho$ . Dunque

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

□

## 2 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

### Ricorda

$f \in \text{End}(V)$  diagonalizzabile se esiste una base di  $V$  di autovettori di  $f$   
 $\Leftrightarrow A = [f]_B^B$  B base  $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$  è diagonale

### Lemma 1

*Il polinomio caratteristico di  $A \in M_n(\mathbb{R})$  simmetrica ha solo radici reali*

### Dimostrazione

$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C}) \quad L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$

Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore e  $x \neq 0$  un corrispondente autovettore

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

$$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t (Ax) = \overline{x}^t (\lambda x) = \lambda \overline{x}^t x$$

$$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda} \overline{x}^t x$$

$$\overline{x}^t x = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i \leftarrow \text{è un numero reale positivo poiché } x \neq 0$$

$$\lambda \overline{x}^t x = \overline{\lambda} \overline{x}^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}.$$

□

### Teorema 2 (Teorema Spettrale)

*Sia  $V$  uno spazio euclideo di dimensione finita e  $T \in \text{End}(V)$  un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per  $T$*

### Corollario 1

*Per ogni matrice reale simmetrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  esiste una matrice ortogonale  $N \in O(n)$  tale che*

$$N^{-1}AN = N^t AN \quad \text{è ortogonale.}$$

### Dimostrazione (Teorema)

*Per induzione su  $n = \dim(V)$ . Base  $n = 1$  ovvia*

*Supponiamo  $n = \dim(V) \geq 2$ . Poichè  $T$  è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi  $T$  ammette un autovalore  $\lambda$  e sia  $e_1$  il suo corrispondente autovettore di lunghezza 1*

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp.$$

*Chiamo  $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^\perp$*

*Dico che  $T|_U : U \rightarrow U$ , per cui  $T|_U \in \text{End}(U)$*

*Infatti, dimostro che  $u \in U \rightarrow T(u) \in U$*

**ipotesi:**  $\langle u, e_1 \rangle = 0$

**Tesi:**  $\langle Tu, e_1 \rangle = \langle u, T^t e_1 \rangle = \langle u, Te_1 \rangle = \langle u, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0$

dove abbiamo usato la simmetria di  $T$

Chiaramente  $T|_U$  è simmetrico, quindi per induzione  $U$  ha una base ortonormale di autovettori  $\{e_2, \dots, e_n\}$ .

Ne segue che  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è una base ortonormale di  $V$  formata da autovettori per  $T$  □

# Lezione 17 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-17

# 1 Prodotto Hermitiano

$V$  spazio vettoriale complesso

**Definizione 1** (Funzione sesquilineare)

Una funzione sesquilineare su  $V$  è un'applicazione  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$h(v + v', w) = h(v, w) + h(v', w)$$

$$h(\alpha v, w) = \alpha h(v, w)$$

$$h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w')$$

$$h(v, \alpha w) = \bar{\alpha} h(v, w)$$

per ogni scelta di  $v, w, v', w' \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$

**Definizione 2** (Forma hermitiana)

Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

**Osservazione**

Se  $h$  è hermitiana,  $h(v, v) \in \mathbb{R}$ , infatti deve risultare  $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

**Definizione 3** (Forma antihermitiana)

Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

**Osservazione**

In questo caso  $h(v, v) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$

**Definizione 4**

Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

**Definizione 5**

Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

**Esempio** $V = \mathbb{C}^n$ 

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su  $\mathbb{C}^n$

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$$

Dato  $V$ , consideriamo una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ . Se  $h$  è una forma hermitiana, diciamo che  $(h_{ij}) = h(v_i, v_j)$  è la matrice che rappresenta  $h$  nella base  $B$  e la denotiamo come  $(h)_B$ .

se  $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(v, w) &= h\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h(v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \overline{y} \end{aligned}$$

Poiché  $h$  è hermitiana,  $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$

$$X^t H Y = \overline{Y^t H X}$$

$$= \overline{Y^t H X}$$

$$= (\overline{Y^t H X})^t$$

$$= \overline{X^t H^t Y} \Rightarrow H = \overline{H}^t$$

**Definizione 6**

Una matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$  si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$



### Esercizio

le matrici hermitiane  $2 \times 2$  sono un  $\mathbb{R}$ -sottospazio di  $M_2(\mathbb{C})$  di dimensione 4

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 & a_3 - ib_3 \\ a_2 - ib_2 & a_4 - ib_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a_1 + ib_1 &= a_1 - ib_1 \Rightarrow b_1 = 0 \\ a_2 + ib_2 &= a_3 - ib_3 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ \Rightarrow a_3 + ib_3 &= a_2 - ib_2 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ a_4 + ib_4 &= a_4 - ib_4 \Rightarrow b_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

il professore qui lascia un esercizio, non penso che realisticamente qualcuno lo farà

---

Si definiscano allo stesso modo del caso reale simmetrico  $S^t$  coefficiente di Fourier

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

disuguaglianza triangolare  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Operatore unitario:  $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  t.c.

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Verifichiamo le caratteristiche degli operatori unitari dati nel caso reale

### Gram Schmidt

$T \in \text{End}(V)$  operatore unitario

1. Gli autovalori hanno modulo 1
2. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali
1. Sia  $v$  un autovettore di autovalore  $\lambda$

$$\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle tv, tv \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

2. Sia  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Se  $\langle v, w \rangle \neq 0 \neq 0 \Rightarrow \lambda \bar{\mu} = 1$ . Per il punto 1

$$\lambda \bar{\lambda} \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{\mu} \Rightarrow \lambda = \mu \quad \text{assurdo.}$$

**Definizione 7**

Diciamo che  $U \in M_n(\mathbb{C})$  è unitaria se

$$U\bar{U}^t = Id.$$

**Proposizione 1**

$T \in \text{End}(V)$  è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria

**Dimostrazione**

Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormale di  $V$

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i^t A^t \bar{A} e_j = A_i^t \bar{A}_j$$

dove abbiamo posto  $A = (T)_B$  e  $\{e_i\}$  è una base di  $\mathbb{C}^n$

**TODO** dimostrazione da finire

□

Come nel caso reale si dimostra

**Teorema 1**

Sia  $T \in \text{End}(V)$  un operatore unitario. Esiste una base standard di autovettori per  $T$

In particolare, per ogni matrice unitaria  $A \in U(n)$  esiste  $M \in U(n)$  tale che  $M^{-1}AM$  è diagonale. A volte si pone

$$A^* = \bar{A}^t.$$

$A$  unitario  $AA^* = Id$

$A$  hermitiano  $A = A^*$

$A$  antihermitiano  $A = -A^*$

**Definizione 8 (Operatore Aggiunto)**

Dato  $T \in \text{End}(V)$ , esiste unico  $S \in \text{End}(V)$  tale che

$$\langle Tu, w \rangle = \langle u, Sw \rangle \quad \forall u, w \in V.$$

Tale operatore è detto aggiunto hermitiano di  $T$  e denotato con  $T^*$

**Definizione 9**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto hermitiano (forma hermitiana definita positiva), un operatore  $L \in \text{End}(V)$  è normale se

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

**Osservazione**

$L$  unitario, hermitiano, antihermitiano  $\Rightarrow L$  diagonale

**Teorema 2**

*Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- 1)  $L$  è normale
- 2) esiste una base ortonormale di  $V$  formata da autovettori di  $L$

# Lezione 19 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-18

## 1 Esercizi vari

### Esercizio 1 Foglio 6

$f : A \rightarrow A$  affinità ha un unico punto fisso se e solo se la sua parte lineare ( $\varphi$ ) non ha l'autovalore 1

#### Svolgimento

Sia  $F = \{x \in A \mid f(x) = x\}$

Supponiamo  $F \neq \emptyset$  e  $P \in F$  dico che

$$\star \quad F = P + \ker(\varphi - Id).$$

dove  $\ker(\varphi - Id)$  è l'autospazio di autovalore 1 di  $\varphi$

$u \in V \quad P + u \in F \Leftrightarrow P + u = f(P + u) = f(P) + \varphi(u) = P + \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = u$   
ovvero  $u \in \ker(\varphi - Id)$

Se ora  $F$  ha un unico punto fisso  $\star$  implica che

$$\ker(\varphi - Id) = \{0\}.$$

cioè 1 non è autovalore di  $\varphi$

Viceversa facciamo vedere che se  $\ker(\varphi - Id) = \{0\}$  allora  $F \neq \emptyset$  Cerchiamo

$Q + v$  tale che

$$f(Q + v) = Q + v$$

$$f(Q) + \varphi(v)$$

$$f(Q) - P = v - \varphi(v)$$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\varphi - Id)(v)$$

Quindi, poiché  $(\varphi - Id)$  è invertibile (per ipotesi), dato  $Q$  trovo un unico  $v =$

$$-(\varphi - Id)^{-1}(\overrightarrow{Qf(Q)})$$

per cui  $Q + v$  è un punto fisso

---

### Esercizio 5 Foglio 6

$f(x) = Ax + b$  in  $\mathbb{E}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = 0$$

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Svolgimento A

1. è una traslazione quindi non ha punti fissi

2.  $\det A = 1$  e  $A$  ortogonale

$$AX + b = X$$

$$(A - I)X = -b$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2) \text{ rotazione di } \frac{\pi}{2}$$

Esercizio da finire

## 2 Diagonalizzazione unitaria di operatori normali

( $\mathbb{C}^n$ , prodotto hermitiano standard)  $M^* = \overline{M}^t$

$M$  è normale se  $MM^* = M^*M$

siano normali le matrici

unitarie	$MM^* = Id$
hermitiane	$M = M^*$
antihermitiane	$M = -M^*$

### Teorema 1 (Spettrale)

$M$  è normale se e solo se  $\exists U \in U(n) : U^t M U$  è ortogonale

#### nota

$U(n)$  spazio delle matrici unitarie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \text{ matrice hermitiana}$$

Trovo ora il polinomio caratteristico

$t^2 - 2t = 0$  che ha quindi autovalori  $t = 0, t = 2$

$$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad U^{-1} L U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dove il prodotto scalare standard è stato fatto per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato)

**Esempio 2**

$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$  matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione

il polinomio caratteristico è  $t^2 - \sqrt{3}t + 1$  gli autovalori sono quindi  $t = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

$$v_{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$


---

**Ultimo esempio**

$$L = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$LL^* = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^*L.$$

$$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \quad t_1, t_2$$

$$v_{t_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$U$  come nell'esercizio precedente

**3 Cenni sulla classificazione delle isometrie****Nomenclatura 1**

- rotazioni
- riflessioni
- traslazioni
- glissoriflessione  $= t_v \circ s_a$  con  $v \parallel a$  (disegno de li mortacci sua)
- glissorotazioni  $= t \circ R$  dove  $v \parallel a$ ,  $a$  asse di  $R$  (altro disegno)
- riflessioni rotatorie  $s_a \circ R$   $R$  rotazione di asse  $\underline{a}$ ,  $s_a$  è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad  $\underline{a}$

**Teorema 2** (Eulero 1776)

Ogni isometria di  $\mathbb{E}^3$  è di uno dei sei tipi sopra descritti

# Lezione 20 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-22



# 1 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

## Lemma 1

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{R}$

Siano  $P, Q \in \text{End}(V)$  tali che  $PQ = QP$ . Allora, se  $V_\lambda$  è l'autospazio di autovalore  $\lambda$  su  $P$ , risulta

$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

## Dimostrazione

Sia  $v \in V_\lambda$  (cioè  $P(v) = \lambda v$ ). Dobbiamo vedere che  $Qv \in V_\lambda$ .

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

$(V, h)$  spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso  $h$  forma hermitiana definita positiva in  $V$ )

$\dim(V) < +\infty$

## Teorema 1

Sia  $(V, h)$  uno spazio hermitiano,  $L \in \text{End}(V)$  operatore, sono equivalenti

- $L$  è normale (rispetto ad  $h$ )
- esiste una base ortonormale  $B$  di  $V$  composta da autovettori per  $L$

## Lemma 2

$(V, h)$  spazio hermitiano,  $L \in \text{End}(V)$  normale

sono equivalenti

- $Lv = \lambda v$
- $L^*v = \bar{\lambda}v$

In particolare  $\lambda$  è l'autovalore per  $L$  se e solo se  $\bar{\lambda}$  è autovalore per  $L^*$

$$V_\lambda(L) = V_{\bar{\lambda}}(L^*).$$

## Dimostrazione

Se  $v = 0$  non c'è niente da dimostrare.

Se  $v \neq 0$  basta far vedere che se  $v \in V_\lambda(L)$  allora  $v \in V_{\bar{\lambda}}(L^*)$ . L'inclusione contraria segue da  $L^{*t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$h(L^*(v), w) = h(v, L(w)) = h(v, \lambda w)$$

$$= \bar{\lambda}h(v, w) = h(\bar{\lambda}v, w)$$

$$h(L^*(v) - \bar{\lambda}v, w) = 0 \quad \circledast$$

Per il lemma, siccome per ipotesi  $L$  è normale,

$$\begin{aligned} L^*(v) &\in V_\lambda(L), \quad \bar{\lambda}v \in V_\lambda(L) \\ \Rightarrow L^*(v) - \bar{\lambda}v &\in V_\lambda(L) \end{aligned}$$

Quindi nella  $\circledast$  posso prendere  $w = L^*(v) - \bar{\lambda}v$ , ottenendo

$$h(L^*(v) - \bar{\lambda}v, L^*(v) - \bar{\lambda}v) = 0.$$

Poiché  $h$  è definito positivo, segue

$$L^*(v) - \bar{\lambda}v = 0$$

cioè  $L^*(v) = \bar{\lambda}v$

□

### Osservazione

Dal lemma segue  $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$  se  $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v, w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^*w) = h(v, \bar{\mu}w) = \bar{\mu}h(v, w) \Rightarrow h(v, w) = 0$$

Dato che  $\lambda \neq \mu$

**Dimostrazione** (Teorema Spettrale)

1)  $\Rightarrow$  2) Procediamo per induzione su  $\dim V$ , con base ovvia  $\dim V = 1$

Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione  $\leq n-1$  e sia  $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

Sia  $v_1 \in V$  un autovettore per  $L$ , che possiamo assumere di norma 1. Sia  $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^\perp$ .

Allora  $V = V_1 \oplus W$ .

Poiché  $V_1$  è  $L$ -invariante (per costruzione) e  $L^*$ -invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per  $W$ .

Inoltre  $L|_W \in \text{End}(W)$  è normale.

Per induzione, esiste una base  $h|_W$ -ortonormale formata da autovettori per  $L|_W$ , sia  $\{v_2, \dots, v_n\}$ . Allora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $h$ -ortonormale di  $V$  formata da autovettori per  $L$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base  $h$ -ortonormale di autovettori per  $L$ . Allora

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[L^*]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$

$$[L \circ L^*]_B^B = [L]_B^B [L^*]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^*]_B^B [L]_B^B = [L^* \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa  $A \rightarrow [A]_B^B$  è un isomorfismo tra  $\text{End}(V)$  e  $M_{nn}(\mathbb{C})$ , segue

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

cioè  $L$  è normale

□

### Osservazioni

1. È essenziale che  $h$  sia definita positiva.

$$h(x, y) = x^t H \bar{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva  $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che  $L_A$  è autoaggiunto, quindi normale

$$h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y)$$

$$(L_A X)^t H \bar{Y} = X^t H \overline{L_A Y}$$

$$X^t A^t H \bar{Y} = X^t H \overline{A Y} \quad \forall X, Y$$

$$A^t H = H \bar{A}$$

Calcolo il poli-

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

polinomio caratteristico di  $A$

$$\det \begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) + 1 = (t+1)^2.$$

# Lezione 21 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-24

# 1 Nuove informazioni sulle forme bilineari

$V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

Ricordiamo che una forma bilineare è un'applicazione

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che se  $A = [b]_B$

$$X = [v]_B, \quad Y = [w]_B$$

$$b(v, w) = X^t A Y.$$

Come cambia  $[b]_B$  se cambio  $B$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad X = [v]_B \quad X' = [v]'_B$$

$$B' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \quad Y = [w]_B \quad Y' = [w]'_B$$

$$A = [b]_B \quad A' = [b]_{B'}$$

$$b(v, w) = X^t A Y = X'^t A' Y'$$

$$X = M X', \quad Y = M Y' \quad M = [Id_V]_B^{B'}$$

$$(M X')^t A (M Y') = X'^t A' Y'$$

$$X'^t M^t A M Y' = X'^t A' Y'$$

$$A' = M^t A M$$

## Definizione 1

Diciamo che due matrici  $A, B$  sono congruenti se esiste una matrice invertibile  $M$  tale che  $B = M^t A M$

## Proposizione 1

Due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diversi se e solo se sono congruenti

## Osservazione

1. La congruenza è una relazione di equivalenza
2. Il rango è invariante per la congruenza
3. Per matrici reali invertibili, il segno del determinante è invariante
4. Se  $M$  è ortogonale

$$M^t A M = M^{-1} A M.$$

Se ho una forma bilineare  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  posso definire due applicazioni  $V \rightarrow V^*$  nel modo seguente.

$$\text{Fissato } v \in V, \text{ prendo } \begin{aligned} b_v(w) &= b(v, w) \\ b'_v(w) &= b(w, v) \end{aligned}$$

È chiaro che  $b_v, b'_v \in V^*$  (usiamo il fatto che  $b$  è bilineare)

Dunque ho due applicazioni  $V \rightarrow V^*$

$$\delta_b(v) = b_v \quad \delta'_b(v) = b'_v.$$

**Definizione 2**

*Il rango di una funzione bilineare è il rango di una qualsiasi matrice che la rappresenta*

**Definizione 3**

*Una forma bilineare è non degenera se ha rango (massimo)  $\dim V$*

**Proposizione 2**

*Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita,*

*$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineare.*

*Sono equivalenti*

- *$b$  è non degenera ovvero  $b(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$*
- *$\forall v \in V, v \neq 0 \quad \exists w \in V : b(v, w) \neq 0$*
- *$\forall w \in V, w \neq 0 \quad \exists v \in V : b(v, w) \neq 0$*
- *$\delta_b : V \rightarrow V^*$  è un isomorfismo*
- *$\delta'_b : V \rightarrow V^*$  è un isomorfismo*

**Dimostrazione**

*Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e sia  $A = [b]_B$*

*1)  $\Rightarrow$  2) per ipotesi  $\det A \neq 0$  se  $X = [v]_B \quad X \neq 0 \Rightarrow X^t A \neq 0$*

*quindi esiste  $Y \in \mathbb{K}^n : X^t A Y \neq 0$ .*

*Se  $w \in V$  è tale che  $[w]_B = Y$  ho dimostrato che  $b(v, w) = X^t A Y \neq 0$*

*2)  $\Rightarrow$  1) Riscrivendo l'ipotesi in coordinate abbiamo*

$$\forall X \neq 0 \exists Y : X^t A Y \neq 0$$

$$\Rightarrow X^t A \neq 0 \quad \forall X \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

*1)  $\Leftrightarrow$  3) è come sopra*

*2)  $\Rightarrow$  4) Poiché  $\dim V = \dim V^*$  basta vedere che  $\delta_b$  è iniettiva, cioè  $\ker \delta_b = \{0\}$*

*$v \in \ker \delta_b \Rightarrow \delta_b(v) = b_v$  è il funzionale nullo, cioè*

$$b_v(w) = 0 \quad \forall w \in V$$

$$b_v(w) = b(v, w) \Rightarrow v = 0$$

*4)  $\Rightarrow$  2) Dato  $v \neq 0, \delta_b(v) = b_v \neq 0$  perché  $\delta_b$  è un isomorfismo,*

*quindi esiste  $w \in V :$*

$$b(v, w) = b_v(w) \neq 0$$

*3)  $\Leftrightarrow$  5) è simile a 2)  $\Leftrightarrow$  4)*

□

## 2 Caso Simmetrico

$$b(v, w) = b(w, v).$$

### Osservazione

$b$  è simmetrica se e solo se lo è qualsiasi matrice che la rappresenta. **Dato**  $S \subset V$  definiamo

$$S^\perp = \{v \in V | b(v, s) = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

**Esercizio**  $S^\perp$  è un sottogruppo e,  $S^\perp = \langle s \rangle^\perp$

### Definizione 4

Due sottospazi  $U, W$  si dicono ortogonali se

$$Y \subseteq W^{\text{perp}} \Leftrightarrow W \subset U^\perp$$

### Definizione 5

$v \in V$  si dice isotropo se  $b(v, v) = 0$

### Definizione 6

$$\ker b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\} = V^\perp$$

### Osservazione

$b$  è non degenere se e solo se  $\ker b = \{0\}$

### Proposizione 3

Sia  $b$  non degenere,  $W \subseteq V$  sottospazio,

Allora, se  $\delta_b : V \rightarrow V^*$  è l'isomorfismo canonico indotto da  $b$ ,  $\delta_b(W^\perp) = W^*$ . In particolare risulta sempre  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$

### Nota

Non è vero, anche nel caso non degenere, che  $V = W \oplus W^\perp$

### Dimostrazione

$w \in W^\perp \quad \delta_b(w) = b_w$  Voglio vedere che

$b_w \in W^\# \quad b_w(w') = b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W$

Quindi  $\delta_b(W^\perp) \subseteq W^\#$

Prendo ora  $f \in W^\#$ ; poiché  $b$  è non degenere,  $\delta_b$  è un isomorfismo, quindi esiste  $v \in V$

$$f = \delta_b(v) = b_v \quad b(v, w) = b_v(w) = 0 \quad \forall w \Rightarrow v \in W^\perp.$$

quindi  $f = \delta(b_v)$  con  $v \in W^\perp$

□

**Proposizione 4**

Sia  $V$  spazio vettoriale,  $W \subset V$  sottospazio,  $b \in Bi(V)$ . Sono equivalenti:

- $V = W \oplus W^\perp$
- $b|_W$  è non degenera

**Lemma 1**

$$\ker b|_W = W \cap W^\perp$$

**Dimostrazione** (lemma)

$$w \in \ker b|_W \Leftrightarrow b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W \Leftrightarrow w \in W \cap W^\perp$$

□

**Dimostrazione** (proposizione)

1)  $\Rightarrow$  2) segue dal lemma perché dall'ipotesi  $W \cap W^\perp = \{0\}$

2)  $\Rightarrow$  1) Sia  $\{w_1, \dots, w_s\}$  una base di  $W$

Per ipotesi  $A = (b(w_i, w_j))$  è invertibile, in particolare dato  $v \in V$ , il sistema lineare

$$* \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, w_1) \\ \vdots \\ b(v, w_s) \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica. Poniamo

$$w = v - \sum_{h=1}^s x_h w_h.$$

Notiamo che  $*$  significa

$$\sum_{h=1}^s b(v_h, w_j) x_h = b(v, w_j) \quad 1 \leq j \leq s.$$

Calcoliamo

$$b(w, w_i) = b(v - \sum_{h=1}^s x_h w_h, w_i) = b(v, w_i) - \sum_{h=1}^s x_h b(w_h, w_i) = b(v, w_i) =$$

$$= b(v, w_i) - b(v, w_i) = 0$$

Poiché i  $\{w_i\}$  sono una base di  $W$ , risulta  $b(w, u) = 0 \quad \forall u \in W$ , cioè  $w \in W^\perp$

Allora

$$v = w + \sum_{h=1}^s x_h w_h.$$

Pertanto  $V = W + W^\perp$ , per ipotesi  $W \cap W^\perp = \ker b|_W = \{0\}$ , quindi  $V = W \oplus W^\perp$  □