Lezione 9 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-30

1 Ricapitolando

Siano $(N, \cdot), (H, *)$ gruppi.

Definizione 1
Il prodotto semidiretto di N e H tramite un omomorfismo $\theta : H \to Aut(N)$ è l'insieme $N \times H$ dotato dell'operazione

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \o_{h_1}(n_2), h_1 * h_2).$$

Osservazione:
$h_1 \in H, \quad \o_{h_1} \in Aut(N) \quad \o_{h_1}(n_2) \in N$
Esempio
Scegliendo
$\o : H \to Aut(N)$
$\quad h \to \o_h$
con $\o_n := Id_N \quad \forall h \in H$
Abbiamo:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot n_2, h_1 * h_2).$$

Quindi il prodotto diretto è un caso particolare del prodotto semidiretto

2 Prodotto semidiretto interno:

Un gruppo G si dice *prodotto semidiretto interno* di N e $H \leq G$ se:

1. $N \trianglelefteq G$,
2. $N \cap H = \{e\}$,
3. $NH = G$.

Esercizio
Sia $\o : H \to Aut(N)$ un omomorfismo
Dimostrare:
1)$|N \rtimes_{\o} H| = |N||H|$
2)$N \rtimes_{\o} H$ è abeliano $\Leftrightarrow N, H$ abeliani
3)$\tilde{H} \leq H, \tilde{N} \leq N$ (sottogruppo caratteristico)

$$\tilde{N} \rtimes_{\o} \tilde{H} := \{(n, h) \in N \rtimes_{\o} H | n \in \tilde{N}, n \in \tilde{H}\}.$$

è un sottogruppo di $N \rtimes_{\o} H$

Definizione 2 (Sottogruppo caratteristico)
$\tilde{N} \leq N$ *sottogruppo caratteristico se*
$\varphi(n) \in \tilde{N} \quad \forall n \in N \quad \forall \varphi \in Aut(N)$

Teorema 1
Sia G un gruppo.
1) Se G è prodotto semidiretto di N e $H \leq G$, allora esiste un omomorfismo $\o : H \to Aut(N)$ tale che $G \cong N \rtimes_{\o} H$
2) Se $G \cong \tilde{N} \rtimes_{\o} \tilde{H}$ allora esistono $N, h \leq G$ t.c.

- *G sia prodotto semidiretto interno di N e H*
- *$N \cong \tilde{N}, h \cong \tilde{H}$*

Dimostrazione (1)
Definiamo l'applicazione
$\o : H \to Aut(N)$
$h \to \o_n$
dove $\o_h(n) := (hnh^{-1}) \in hNh^{-1} = N \quad \forall n \in N$
Dato che abbiamo assunto N normale
Abbiamo verificato la volta scorsa che è un omomorfismo.
Definiamo l'applicazione
$\psi : N \rtimes_{\o} H \to G$
$(n, h) \to nh$
ψ è suriettiva poiché $N \cdot H = G$
ψ è iniettiva poichè

$$n_1 h_1 = n_2 h_2 \to n_2^{-1} h_1 = h_2 h_1^{-1} \in H \cap N = \{e\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n_2^{-1} n_1 = e \\ h_2 h_1^{-1} = e \end{cases} \to (n_1, h_1) = (n_2, h_2)$$

ψ è omomorfismo:
$\psi((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) =$
$= \psi((n_1 \o_{h_1}(n_2), h_1 h_2))$
$= n_1 \o_{h_1}(n_2) h_1 h_2$
$= n_1 h_1 n_2 h_1^{-1} h_1 h_2 = \psi(n_1, h_1) \cdot \psi(n_2, h_2)$
Omomorfismo biunivoco $\square$

Dimostrazione (2)
Dato un isomorfismo
$\psi : \tilde{N} \rtimes_{\emptyset} \tilde{H} \to G$
definiamo:
$N := \psi(\tilde{N} \rtimes_{\emptyset} \{e_{\tilde{H}}\}) \trianglelefteq G$
$H := \psi(\{e_n\} \rtimes_{\emptyset} \tilde{H})$
Osserviamo che:
$\cdot\tilde{N} \cong \tilde{N} \rtimes_{\emptyset} \{e_{\tilde{H}}\} \cong N$
$\cdot\tilde{H} \cong \{e_{\tilde{H}\} \rtimes_{\emptyset} \tilde{H} \cong H}$
$\cdot N \cap H = \{e\}$
$\cdot NH = e$
(analogo alla dimostrazione per prodtto diretto) $\square$