Lezione 02 Geometria II

Federico De Sisti

2025-03-08

1 Spazi Topologici

Definizione 1 (Topologia)
Sia X un insieme, $T \subset P(X)$
T è detta Topologia se:

1. *$X, \emptyset \in T$*
2. *Unione di una famiglia qualsiasi di elementi in T è un elemento di T*
3. *intersezione di 2 elementi qualsiasi di T è un elemento di T.*

In tal caso gli elementi di T sono detti aperti di T.
La coppia (X, T) è detta ***spazio topologico*** *(o anche semplicemente insieme X)*

Osservazione

- Famiglia qualsiasi vuol dire infinita numerabile, o finita, o non numerabile, o anche vuota
- L'intersezione di una famiglia finita di elementi di T è ancora un elemento di T
- Possiamo interscambiare la precedente affermazione e la proprietà 3 della definizione

Nota

- "intervallo aperto" $=]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ come al solito
- aperto = elemento della topologia T

Esempi 1) Ogni insieme è dotato almeno delle seguenti topologia

1. $T = \{X, \emptyset\}$, detta **topologia banale**
2. $T = P(x)$, detta **topologia discreta**

Osserviamo che, nella topologia discreta, $\{x\}$ è aperto $\forall x \in X$
2) $X = \mathbb{R}^n$
$T = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0\ t.c.\ B_\varepsilon(a) \subseteq A\}$ è la topologia euclidea
La dimostrazione del fatto che sia una topologia è un esercizio per casa
3) Sia X insieme, $p \in X$. Definiamo $T = \{A \subseteq X \mid p \in A$, oppure $A = \emptyset\}$ T è una topologia
4) X insieme, poniamo $T = \{A \subseteq X \mid X \setminus A$ è finito, oppure $A = \emptyset\}$
T è una topologia, detta **topologia cofinita**

Definizione 2
Sia (X, T) spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto

Lemma 1 (Proprietà degli insiemi chiusi)
Per gli insiemi chiusi di qualunque topologia valgono:

1. *$X, \emptyset$ sono chiusi*
2. *intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso*
3. *Unione finita di chiusi è un chiuso*

Dimostrazione
1. ovvio
2. $x \setminus \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcup_{X \setminus C_i}^{i \in I}$ *che è unione di aperti*
3. $(X \setminus (C \cup D)) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ *che è intersezione di 2 aperti.* □

Osservazione
In uno spazio topologico ci sono insiemi sia aperti che chiusi (clopen = closed + open)

Esempio
$X = \mathbb{R}$
Il sottoinsieme $[0, 1]$ è chiuso in topologia euclidea
è chiuso e aperto in topologia discreta
non è chiuso in topologia banale
non è chiuso in topologia cofinita, e neanche aperto

Definizione 3
Sia X spazio topologico con topologia T. Sia $B \subseteq T$ B è detta base se ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B

Esempi

1. Sia T topologia su $X, \Rightarrow B = T$ è una base
2. Sia T topologia discreta su $X, B = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è una base di T
3. Sia $X = \mathbb{R}$, $T =$ topologia euclidea. $B = \{]a, b[|a < b \in \mathbb{R}\}$ è una base di T
   Infatti $B \subseteq T$ perché $]a, b[$ è aperto in topologia euclidea. Inoltre ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B

Dimostrazione
Sia $A \in T$ euclidea su $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall p \in A \quad \exists \varepsilon > 0$ *t.c.* $\quad]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subseteq A$
$\Rightarrow A = \bigcup_{p \in A}]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\in B$ □

Osservazione
Data B base di T topologia, la topologia T è determinata da B Infatti:

$$T = \{ \text{ unione arbitraria di elementi di } B\}.$$

Proposizione 1
Sia X insieme, $B \subseteq P(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X. Esiste T topologia t.c. B è sua base se e solo se

1. *X è unione di elementi di B*
2. *$\forall A, A' \in B, A \cap A'$ è unione di elementi di B*

Dimostrazione
$(\Rightarrow)$
$\exists T$ topologia di cui B è base (per ipotesi)

- *$\Rightarrow X \in T$ e B è base di $T \Rightarrow$ (1) vera*
- *$\Rightarrow A$ e $A' \in T \Rightarrow A \cap A' \in T \Rightarrow$ (2) vera*

$(\Leftarrow)$
Definisco $T =$ unioni arbitrarie di elementi di B e verifico che sia una topologia

- *$X \in T, \emptyset \in T \Rightarrow$ (1) vera ($\emptyset \in T$ perché $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$)*
- *Per costruzione di T, unioni di elementi di T sono elementi di $T \Rightarrow$ (3) vera*
- *$D, E \in T \Rightarrow D = \bigcup_{i \in I} A_i, E = \bigcup_{i \in J} A'_j, \quad A_i, A'_j \in B \;\; \forall i, j$*
  $\Rightarrow D \cap E = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap A'_j)$

Osservazione:
Ciascuno $A_i \cap A'_j$ è unione di elementi di B.
$\Rightarrow D \cap E$ è unione di elementi di B
$\Rightarrow T$ è topologia (e B sua base per costruzione) $\square$

Osservazione
La proprietà (2) è equivalente a:

$$\forall A, A' \in B, \quad \forall p \in A \cap A' \; \exists D \in B \;\; \text{t.c } p \in D \subseteq A \cap A'.$$

Esempio
Sia K un campo, consideriamo $x = \mathbb{K}^n$, Dato $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
Poniamo $x_f = \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) \neq 0\}$
$\Rightarrow B = \{x_f \mid f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}$
(esempio: $x = \mathring{,}n = 1, \daleth = \mathring{;}\ f(x) = (x-1)(x-2) \rightsquigarrow x_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$) (esempio: $X = \mathbb{R}, n = 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}^2, \; f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, x_f = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$)

Allora B è base di una topologia T su X
Verifichiamo usando la proposizione precedente
$X = X_f, f = 1$ polinomio costante, allora (1) ok
Prendiamo $A, A' \in B$ studiamo $A \cap A'$
$A = x_f,\ A' = x_g$ con $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, Allora
$A \cap A' = X_{fg}$ è essa stessa un elemento di B quindi (2) ok
per la proposizione precedente $\Rightarrow \exists$ topologia T
La topologia così definita è detta la topologia di Zariski in $\mathbb{K}^n$ **Esempio**
$\mathbb{K} = \mathbb{R}, n = 1$
$\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ è aperto in topologia euclidea e in topologia di Zariski.
$[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso in topologia euclidea, è chiuso in topologia di zariski? Esercizio per casa

Definizione 4
T_1, T_2 topologie su X, T_1 è detta più fine di T_2 se $T_2 \subseteq T_1$

Osservazione
Prese 2 topologie a caso, non è detto che siano confrontabili.
Esempio
La topologia banale è la meno fine di tutte, Quella discreta è la più fine.

Proposizione 2
Siano T_1, T_2 topologie su X. Allora
$T_1 \cap T_2$ è una topologia.
Inoltre $T = T_1 \cap T_2$ è meno fine di T_1 e meno fine di T_2
Dimostrazione
Esercizio lasciato al lettore □