Lezione 9 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-20

1 Rimembranze dalla scorsa lezione

V spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione bilineare simetirca $< \cdot\ ,\ \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

$$< v, v > \geq 0 \quad \forall v.$$

$$< v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2 Nuova effettiva lezione

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

Lemma 1

$$1.\ \ ||v|| \geq 0 \ \textit{e}\ ||v|| = 0 \ \textit{se e solo se}\ v = 0..$$

$$2.\ \ ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v|| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$$

$$3.\ \ ||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V.$$

Dimostrazione
1. segue dalla definizione
2. $||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = |\alpha| \cdot ||v||$
3. $||v + w||^2 =< v + w, v + w >=$
$=< v, v > + < w, v > + < v, w > + < w, w >=$
$= ||v||^2 + 2 < v, w > +||w||^2 \leq ||v||^2 + 2||v||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$
Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi $\square$

Nomenclatura 1
$\cdot v, w' \in V$ *si dicono ortogonali se* $< v, v' >= 0$
$\cdot$ *Un insieme* S *di vettori è detto ortogonale se*

$$0 \in S \ \textit{e}\ < s_1, s_2 >= 0 \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

$\cdot$ *Una base di* V *si dice ortogonale se è un insieme ortogonale* $\cdot$ *Una base* $\{vi\}_{i \in I}$ *si dice ortonormale se* $< v_i, v_j >= \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Definizione 1 (Versore)
Sia $v \in V$ *tale che* $||v|| = 1$ *allora* v *è un versore*

Oss
Dat $u \neq 0$, $\frac{u}{||u||}$ è un versore

$$\left|\left|\frac{u}{||u||}\right|\right| = \frac{1}{||u||} \cdot ||u|| = 1.$$

Proposizione 1
Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un insieme ortogonale allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti. In particolare se $dim(V) = n$, un insieme ortogonale di n vettori è una base

Dimostrazione
Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k = 0$
$< \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k, v_i > = < 0, v_i > = 0$
$= \alpha_1 < v_1, v_i > + \ldots + \alpha_k < v_k, v_i >$
$= \alpha_i < v_i, v_i >$
Dato che $< v_i, v_i >> 0$ *poiché* $v_i \neq 0$ *per ipotesi, dunque* $\alpha_i = 0$,
dato che posso scegliere qualunque v_i □

Osservazioni
1. La base standard di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
2. Sia $g = <,>$ un prodotto scalare su V, Se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base g-ortonormale allora $[g]_B = Id_n$ ovvero $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$
Inoltre, se $X = [v]_B, \quad Y = [Id]_B$
$g(v, w) = X^t [g]_B Y = X^t Y$ (sempre con B ortonormale)

Proposizione 2
Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale, per ogni $v \in V$ risulta

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i.$$

Dimostrazione
(1) *Sia* $\quad v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

$$< v, v_i > = < \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_i > = \sum_{j=1}^{n} a_j < v_j, v_i > = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1) a_j *con* $< v, v_j >$ □

Nomenclatura 2
Dato $v \neq 0$ viene detto coefficiente di Fourier di $w \in V$ risptto a v

$$a_v(w) = \frac{< v, w >}{< v, v >}.$$

Nota
In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di w rispetto a v (moltiplicato quindi per il versore di v otteniamo il vettore della proiezione)
Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.
$< w - a_v(w)v, v > = < w - \dfrac{< v, w >}{< v, v >} v, v > = < w, v > - \dfrac{< v, w >}{\cancel{< v, v >}} \cdot \cancel{< v, v >}$

3 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Lemma 2
Sia $v_1, v_2, \dots$ una successione di vettori in V spazio vettoriale euclideo. Allora:
1. Esiste una successione $w_1, w_2, \dots$ in V tale che per ogni $k \geq 1$

$$a) \quad < v_1, \dots, v_K > = < w_1, \dots, w_k > .$$

$$b) \quad < w_i, w_j > = 0 \ \text{se} \ i \neq j.$$

2. Se $u_1, u_2, \dots$ è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Dimostrazione
Costruiamo i w_i per induzione su k.
Base $k = 1$

$$v_1 \to w_1 = v_1 \ \text{verifica} \ a, b.$$

Supponiamo per induzione di aver costruito $w_1, \dots w_t, \quad t > 1$ verificanti a e b e costruiamo w_{t+1}

$$\text{ø} w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

per induzione $v_i \in < w_1, \dots, w_t > \subseteq < w_1, \dots, w_{t+1} > \quad 1 \leq i \leq t$
dunque

$$< v_1, \dots, v_{t+1} > \ \subseteq \ < w_1, \dots, w_{t+1} > .$$

D'altra parte $w_{t+1} \in < w_{1,t}, v_{t+1} > = < v_1, \dots, v_{t+1} >$ perché per induzione $w_i \in < v_1, \dots, v_t > \quad 1 \leq i \leq t$
Quindi $< w_1, \dots, w_{t+1} > \ \subseteq \ < v_1, \dots, v_{t+1} >$ e quindi le proprietà a è verificata.
Verifichiamo ora b, sia $w_i \neq 0$

$$< w_{t+1}, w_i > = < v_{t+1} - \sum_{j=1}^{t} a_{w_j}(v_{t+1}) w_j, w_i > =$$

$$= < v_{t+1}, w_i > - a_{w_j} < (v_{t+1}) w_j, w_j > =$$

$$= < v_{t+1}, w_i > - \frac{< v_{t+1}, w_i >}{\cancel{< w_i, w_i >}} \cancel{< w_i, w_i >} = 0$$

2. Di nuovo procedo per induzione su k, con base ovvia $k = 1$
Supponiamo $t > 1$ e apponiamo che esistano $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ con $u_k = \delta_k w_k$ per ogni $k \leq t$. per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \qquad z \in < w_1, \dots, w_t > = < u_1, \dots, u_t > .$$

D'altra parte, $< u_{t+1}, z > = < w_{t+1}, z > == 0$
Quindi $< u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w > = 0$ ovvero $< z, z >$
$\Rightarrow z = 0$ e $u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$ $\square$