Lezione 8 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Spazi topologici connessi

Esempio
$\mathbb{R}$ con topologia euclidea,
$X = [0,1] \cup [2,3]$ sottospazio
intuitivamente è fatto da due "pezzi" gli intervalli $[0,1]$ e $[2,3]$
Come distinguere i "pezzi di X da altri sottospazio ad esempio $[0,1/3]$?
$[0,1/3]$ è chiuso in X.
anche $[0,1]$ e $[2,3]$ sono chiusi in X
$[0,1/2]$ non è aperto in X.
Invece $[0,1]$ è anche aperto in X in topologia di sottospazio, infatti $[0,1] \in X\cap\ ]-1,3/2[$, dove il secondo è aperto in $\mathbb{R}$
Anche $[2,3]$ è aperto in X

Definizione 1
Uno spazio topologico si dice connesso se gli unici sottospazi contemporaneamente aperti e chiusi sono solo $\emptyset$ e X Se X non è connesso si dice sconnesso

Esempio
1) Se $X = \emptyset$
allora X è connesso
2) se $|X| = 1$ è connesso
3) Anche se X ha topologia banale (qualsiasi cardinalità) è connesso
4) Se $|X| \geq 2$ e la topologia discreta allora X è connesso
5) $X = [0,1] \cup [2,3]$ di prima, è sconnesso ($[0,1]$ è contemporaneamente aperto e chiuso)
6) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (topologia di sottospazio da $\mathbb{R}$ con topologia euclidea)
è sconnesso ad esempio $]-\infty,0[$ è aperto e chiuso in X.

$$]-\infty,0[= \begin{cases} X\cap]-\infty,0[& \text{(aperto di } \mathbb{R}) \\ X\cap]-\infty,0] & \text{(chiuso di } \mathbb{R}) \end{cases}$$

7) $\mathbb{Q} = X$ (con topologia di sottospazio da $\mathbb{R}$ con topologia euclidea)
è sconnesso, ad esempio $\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}[$ è contemporaneamente aperto in $\mathbb{Q}$
è aperto ovviamente in topologia di sottospazio
ed è anceh chiuso $\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}[= \mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}]$ chiuso in $\mathbb{R}$

Lemma 1
Sia X spazio topologico allora sono equivalenti:

1. *X sconnesso*
2. *esistono aperti disgiunti non vuoti A_1, A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$*
3. *Esistono chiusi disgiunti non vuoti tali che $X = C_1 \cup C_2$*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Sia $A \subseteq X$ aperto e chiuso $A \notin \{\emptyset, X\}$, basta porre $A_1 = A,\ A_2 = X \setminus A$*

2) $\Rightarrow$ 3) *Poniamo* $C = A_1, C_2 = A_2$
3) $\Rightarrow$ 1) *Basta prendere* $A = C_1$ *è anche aperto, non vuoto* $\neq X$ *perché* $C_2 \neq 0$ $\square$

Nota
D'ora in poi, per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ daremo per scontata la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$

Teorema 1
$[0,1]$ *è connesso*

Dimostrazione
Suppongo per assurdo $[0,1]$ *sconnesso, usiamo il 3) del lemma, quindi esistono chiusi non vuoti disgiunti* C, D *tale che* $[0,1] = C \cup D$
Possiamo assumere che $0 \in C$ *(altrimenti scambio i nomi)*
Consideriamo $d = \inf D$*, allora* $d \in \mathbb{R}$ *perché* D *è limitato*
Visto che D *è chiuso* $d = \min D$
Inoltre $d \neq 0$ *poiché* $C \cap D = \emptyset$
Segue $[0, d[\subseteq C$ *ma* C *è chiuso e* d *è aderente a* $[0, d[$ *poiché* $d \in C$ *assurdo* $\square$

Lemma 2
Sia X *spazio topologico, sia* $Y \subseteq X$ *sottospazio connesso, sia* $A \subseteq X$ *sottoinsieme aperto e chiuso.*
Allora $Y \subseteq A$ *oppure* $Y \cap A = \emptyset$

Dimostrazione
$A \cap Y$ *è contemporaneamente aperto e chiuso in topologia di sottospazio quindi* $A \cap Y = Y$ *oppure* $A \cap Y = \emptyset$ $\square$

Definizione 2
Uno spazio topologico X *si dice connesso per archi se*
$\forall p, q \in X \exists \alpha : [0,1] \to X$ *continua tale che* $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$ *Una tale* α *è detto cammino da* p *a* q

Esempio
1) $X = \mathbb{R}^n$è connesso per archi, ad esempio.
$\alpha(t) = tq + (1-t)p$
percorre il segmento da p a q
2) $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||p|| = 1\}$
sfera n-dimensionale
$S^{-1} = \emptyset \subseteq \mathbb{R}^0 = \{0\}$
$S^0 = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{R}$ sconnesso
$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Ogni S^n è connesso per archi per ogni $n \geq 1$

Un cammino da p a q è dato ad esempio da $\alpha(t) = (\cos(t \cdot s + (1-t)$
DA COMPLETARE
Suppongo $n \geq 2$, dimostro che S^n connesso per archi
Scegliamo $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sottospazio vettoriale di dimensione 2 contenente p e q. Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ che preserva il prodotto scalare (quindi la norma) allora $\varphi(V \cap S^n) = S^1$
Scelgo β cammino tra $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$ allora $\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta$ è camino tra p e q
3) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme connesso, allora è connesso per archi

Teorema 2
Sia $f : C \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici

1. *Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso*
2. *Se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi*

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo $f(x)$ sconnesso, quindi esistono aperti non vuoti disgiunti $A, B \subseteq f(X)$ tale che $f(X) = A \cup B$
Supponiamo che la restrizione $\tilde{f} : X \to f(X)$ è continua
Allora $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti in X, non vuoti e disgiunti

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B).$$

Assurdo perché X è connesso.
2) Siano $p, q \in f(X)$ scegliamo $x \in f^{-1}(p), z \in f^{-1}(q)$ e $\beta : [0,1] \to X$ un cammino da x a z allora $f \circ \beta : [0,1] \to f(X)$ è un cammino da p a q $\square$

Corollario 1
Sia X spazio topologico. Se X è connesso per archi allora è connesso.

Dimostrazione
Suppongo per assurdo X sconnesso, esistono quindi disgiunti A, B non vuoti tali che $X = A \cup B$
Scegliamo $p \in A, q \in B$ e α cammino in X da p a q. $\alpha : [0,1] \to X$
Per il teorema precedente $\alpha([0,1])$ è connesso di X (e $[0,1]$ è connesso)
Osserviamo A è contemporaneamente aperto e chiuso, segue $\alpha([0,1]) \subseteq A$ assurdo perché $\alpha(1) = q \in B$ oppure $\alpha([0,1]) \cap A = \emptyset$ assurdo perché $\alpha(0) = p$ $\square$

Proposizione 1
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$
Sono equivalenti

1. I *è un intervallo*
2. I *è connesso per archi*
3. I *è connesso*

Nota
In $\mathbb{R}$ definiamo un intervallo se $\forall a, b \in I$ $a < b$ e $\forall c \in \mathbb{R}$ tale che $a < c < b$ abbiamo $c \in I$
Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Se* I *è intervallo allora è convesso, allora è connesso per archi*
2) $\Rightarrow$ 3)
Segue dal corollario precedente.
3) $\Rightarrow$ 1)
Supponiamo per assurdo che $I \subseteq \mathbb{R}$ *sia connesso ma non intervallo*
Allora $\exists a, b \in I, c \in \mathbb{R}$ *con* $a < c < b, \quad c \notin I$
Definisco $A := I \cap]-\infty, c[$ *e* $B := I \cap]c, +\infty[$
aperti in I *disgiunti non vuoti e* $I = A \cup B$*, assurdo.* $\square$
Osservazione
La connessione e la connessione per archi si usano per dimostrare che spazi topologici non sono omeomorfi.
Ad esempio $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi (fogli di esercizi)

Lemma 3
Sia $f : S^n \to \mathbb{R}$ *continua,* $n \geq 1$
Allora esiste $p_0 \in S^n$ *tale che* $f(p_0) = f(-p_0)$

Dimostrazione
Consideriamo
g:$S^n \to \mathbb{R}$
$p \to f(p) - f(-p)$
è continua e vale $g(-p) = -g(p)$ *l'immagine di* g *è connessa ed è sottoinsieme simmetrico di* $\mathbb{R}$*. Allora l'immagine di* g *contiene* $0 \in \mathbb{R}$ $\square$