Lezione 4

Federico De Sisti

2025-11-06

0.1 Netwon e qualcosa

Esempio:
$\begin{cases} e^{x_1^2+x_2^2}-2=0 \\ e^{x_1^2-x_2^2}-1=0 \end{cases}$
Scrivere $J_F(x)$ (dipende da x_1, x_2) e implementarla in matlab
$F_2(x)=0 \quad e^{x_1^2-x_2^2}=1 \Rightarrow x_1^2-x_2^2=0 \Rightarrow x_1=\pm x_2$
$F_1(x)=0 \quad e^{2x_1^2}=2 \Rightarrow 2x_1^2=\ln(2) \Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\ln 2/2}$
$(\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln 2}{2}})(\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \sqrt{\frac{\ln 2}{2}})(-\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \sqrt{\frac{\ln 2}{2}})(-\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln 2}{2}})$
con $\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}=0.58870501$
Guarda script nel file.m
Scriviamo la funzione f e la Jacobiana, dobbiamo farlo noi per ogni sistema. f.m, j.m
Chiamata di Newton
$[x, r, niter] = newton(@Ffun, @Jfun, [0.4, 0.4], 1.e-10, 25, 1)$
Si può implementare con funzioni inline, se lo fai puoi non mettere il function handle (@) nella chiamata della funzione newton.
Se $p=1$ ci dovrebbero essere 6 iterazioni, se $p=5$ iterazioni $=$?
con vettore iniziale $[5;5]$ in 56 iterazioni $p=1$
con vettore iniziale $[0.1;0.1]$ in 19 iterazioni $p=1$
Completato il discorso sui sistemi non lineari.

1 Interpolazione

$\pi_n = P_n \qquad (\pi_n f)$
la prima è quando abbiamo una tabella di nodi, nel secondo caso abbiamo una funzione che vogliamo approssimare ad un polinomio.
Le condizioni sono $x_i \neq x_j \quad i \neq j$
In entrambi i casi abbiamo $n+1$ coppie di valori.
$\pi_n(x_i) = x_i$ e $\pi_n f(x_i) = f(x_i)$

1. base di $\mathbb{P}_n$
   $\{x^i\}_{i=0:n}$
   $\pi_n(x) = \sum_n^{i=0} c_i x^i$
   $\pi_n(x_j) = \sum_{i=0}^n x_i (x_j)^i = y_j \qquad j=0:n$
   $V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
   $\det V = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$
   V è la matrice di Vandermonde ed è mal condizionata, potete verificarlo con $function \quad vander$ e con $fliplr(vander(x))$ il condizionamento della matrice è molto più alto di 1.

In più risolvere un sistema è molto costoso.

2. base di $\mathbb{P}_n$ $\{l_k(x)\}_{k=0:n}$

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 0 : n.$$

Questa è la base di Lagrange, il nostro polinomio $\pi_n(x) = \sum_{n}^{i=0} y_i l_i(x)$
Questa è la forma di lagrange, mentre prima risolvevamo il sistema qui è come se avessimo una matrice diagonale.

3. base di $\mathbb{P}_n$
$\{\omega_k(x)\}_{k=0:n}$
$\omega_0 = 1$
$\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \quad k = 1 : n$

$$\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega_i(x).$$

$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})\}$
$\pi_n(x) = \sum_{n}^{k=0} a_k \omega_k(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & \ldots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & \omega_2(x_2) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & \ldots & \omega_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
La matrice è quindi triangolare inferiore, posso usare forwardorw.
$a_0 = y_0$
$a_1 = \frac{y_1 - a_0 \omega_0(x_1)}{\omega_1(x_1)}$
$a_k = \dfrac{y_k - \sum_{k-1}^{j=0} a_j \omega_j(x_k)}{\omega_k(x_k)} = \dfrac{y_k - \pi_k(x_k)}{\omega_k(x_k)}$
Si nota come per aggiungere un punto, basta aggiungere una riga alla matrice.

$\pi_n f \qquad f, \quad x_0, \ldots, x_n, \quad x_i \neq x_j \quad i \neq j$
Dati $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0:n}$
Voglio ottenere $\pi_n f(x)$ a partire dal $\pi_{n-1} f(x) \quad n \geq 1 \qquad \pi_0 f(x) = f(x_0)$
Chi è $q(x)$ tale che $\pi_n f(x) = \pi_{n-1} f(x) + q_n(x)$ con $q_n \in \mathbb{P}_n$
$q_n(x_i) = \pi_f(x_i) - \pi_{n-1} f(x_i) = 0 \qquad i = 0, \ldots, n-1$
$q_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) = a_n \omega_n(x)$
Chi è a_n?
Deve valere $\pi_n f(x_n) = f(x_n)$
$a_n = \frac{q_n(x)}{\omega_n(x)} = \frac{\pi_n f(x) - \pi_{n-1} f(x)}{\omega_n(x)}$