

# Dispense Analisi Numerica

Federico De Sisti

2026-01-26

# 1 Norme Matriciali

**Definizione 1** (Norma Matriciale)

Una norma matriciale è un'applicazione  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  e  $\|A\| = 0$  se e solo se  $A = 0$
2.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (omogeneità)
3.  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (disuguaglianza triangolare)

**Definizione 2** (Norma compatibile)

Diciamo che una norma matriciale  $\|\cdot\|$  è compatibile o consistente con una norma vettoriale  $\|\cdot\|$  se

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

**Definizione 3** (Matrice coniugata trasposta (aggiunta))

Sia  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ; la matrice  $B = A^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$  è detta matrice coniugata trasposta (o aggiunta) di  $A$  se  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$  essendo  $\overline{a_{ji}}$  il numero complesso coniugato di  $a_{ji}$

**Definizione 4** (Norma di Frobenius)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^H)}.$$

**Teorema 1**

Sia  $\|\cdot\|$  una norma vettoriale su  $\mathbb{C}^n$ . La funzione

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

è una norma matriciale su  $\mathbb{C}^{m \times n}$ , che viene detta norma matriciale indotta (o subordinata) o norma matriciale naturale.

La dimostrazione di questo teorema non è richiesta

### Teorema 2

*Se  $\|\cdot\|$  è una norma matriciale naturale indotta da  $\|\cdot\|$ , allora*

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ , ossia è una norma compatibile
2.  $\|I\| = 1$
3.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ , ossia è sub moltiplicativa

### Dimostrazione

guarda libro

□

### Definizione 5 (Raggio spettrale)

*Chiamiamo  $\rho(A)$  il raggio spettrale della matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*

$$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|.$$

### Teorema 3

*Sia  $\|\cdot\|$  una norma matriciale compatibile con una norma vettoriale che indichiamo con lo stesso simbolo, allora*

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

La norma spettrale è la norma indotta dalla norma euclidea.

### Teorema 4 (di Ostrowski)

*Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste una norma matriciale naturale  $\|\cdot\|_{\rho,\varepsilon}$  (dipendente da  $\varepsilon$  tale che*

$$\|A\|_{\rho,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

*Di conseguenza fissata una tolleranza piccola a piacere, esiste sempre una norma matriciale che è arbitrariamente vicina la raggio spettrale di  $A$ ,*

ossia

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|.$$

**Teorema 5** (Successione di matrici e raggio spettrale)

Sia  $A$  una matrice quadrata e sia  $\|\cdot\|$  una norma naturale allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A^m\|^{1/m} = \rho(A)$$

**Definizione 6** (Convergenza di una successione di matrici)

Una successione di matrici  $\{A^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$  è detta convergente ad una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0.$$

La scelta della norma è ininfluente in quanto in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  le norme sono equivalenti.

**Definizione 7** (Matrice Convergente)

Una matrice  $A$  si dice convergente se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0.$$

**Teorema 6**

Sia  $A$  una matrice quadrata. Allora:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Inoltre se  $\rho(A) < 1$  allora la matrice  $I - A$  è invertibile.

La serie geometrica  $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$  è convergente se e solo se  $\rho(A) < 1$  e, in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

Infine, sia  $\|\cdot\|$  una norma matriciale naturale tale che  $\|A\| < 1$ . Allora,

se  $I - A$  è invertibile, valgono le seguenti disuguaglianze

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

### Dimostrazione

guarda il libro ed è da fare, non il 1.24, mi sa manco l'enunciato.

□

## 2 Sistemi Lineari

**Definizione 8** (Numero di condizionamento)

Si definisce numero di condizionamento di una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  la quantità

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Essendo  $\|\cdot\|$  una norma matriciale indotta. In generale  $K(A)$  dipende dalla norma scelta.

**Definizione 9**

Una matrice si dice singolare quando non è invertibile, ovvero quando il suo determinante è nullo

### Osservazione

In generale, se definiamo la distanza relativa di  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dall'insieme delle matrici singolari rispetto alla norma  $p$  come

$$dist_p(A) = \min\left\{\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}; A + \delta A \text{ è singolare}\right\}.$$

e si può dimostrare che

$$dist_p(A) = \frac{1}{K_p(A)}.$$

Ciò significa che una matrice con un numero di condizionamento elevato potrebbe comportarsi come una matrice singolare della forma  $A + \delta A$ . In altre parole, in tal caso, a perturbazioni nulle del termine noto potrebbero non corrispondere perturbazioni nulle sulla soluzione.

**Teorema 7**

Siano  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice non singolare e  $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tali che sia soddisfatta:

$$\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1.$$

per una generica norma matriciale indotta  $\|\cdot\|$ .

Allora se  $x \in \mathbb{R}^n$  è soluzione di  $Ax = b$  con  $b \in \mathbb{R}^n$  ( $b \neq 0$ ) e  $\delta x \in \mathbb{R}^n$  verifica

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b.$$

si ha che

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A)\|\delta A\|/\|A\|} \left( \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right).$$

**Dimostrazione**

guarda il libro

□

**Corollario 1**

Si suppongano valide le ipotesi del teorema 7, sia  $\delta A = 0$ . Allora

$$\frac{1}{K(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Per poter impiegare queste due diseguaglianze nell'analisi della propagazione degli errori di arrotondamento per i metodi diretti,  $\|\delta A\|$  e  $\|\delta b\|$  dovranno essere stimati in funzione della dimensione del sistema e delle caratteristiche dell'aritmetica floating-point usata.

È infatti ragionevole aspettarsi che le perturbazioni indotte da un metodo per la risoluzione di un sistema lineare siano tali che  $\|\delta A\| \leq \gamma \|A\|$  e  $\|\delta b\| \leq \gamma \|b\|$ , essendo  $\gamma$  un numero positivo che dipende da  $u$ , l'unità di roundoff (ad esempio si porrà in seguito  $\gamma = \beta^{1-t}$ , essendo  $\beta$  la base e  $t$  il numero di cifre della mantissa del sistema  $\mathbb{F}$  scelto).

## 2.1 Metodo di eliminazione gaussiana (MEG) e fattorizzazione LU

Il metodo di eliminazione gaussiana si basa sul ridurre il sistema  $Ax = b$  ad un nuovo sistema equivalente  $Ux = \hat{b}$  dove  $U$  è triangolare superiore e  $\hat{b}$  è un

nuovo termine noto.

Il MEG equivale a fattorizzare la matrice di partenza nel prodotto di due matrici  $A = LU$  con  $U = A^{(n)}$ .

Fattorizzare la matrice  $A$  in questo modo è utile perché non dipende dal termine noto, e quindi posso risolvere più sistemi lineari con matrice dei coefficienti uguale e termine noto diverso.

Sostanzialmente possiamo prendere la matrice di trasformazione gaussiana del  $k$ -esimo passo  $M_k$  e ricavare che

$$A^{k+1} = M_k(A^{(k)}).$$

possiamo quindi scrivere

$$M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1A = A^{(n)} = U.$$

Le matrici  $M_k$  sono matrici triangolari inferiori con elementi diagonali pari ad uno e con inversa data da

$$M_k^{-1} = 2I_n - M_k = I_n + m_k e_k^T.$$

essendo  $(m_i e_i^T)(m_j e_j^T)$  uguale alla matrice nulla se  $i \leq j$  di conseguenza

$$\begin{aligned} A &= M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} U \\ &= (I_n + m_1 e_1^T) \dots (I_n + m_{n-1} e_{n-1}^T) U \\ &= \left( I_n + \sum_{i=1}^{n-1} m_i e_i^T \right) U \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & m_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} U \end{aligned}$$

Definiamo allora  $L = M_{n-1} \dots M_1)^{-1} = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$  sia

$$A = LU.$$

La risoluzione del sistema lineare diventa quindi la soluzione, in sequenza, di questi due sistemi lineari

$$Ly = b \tag{1}$$

$$Ux = y \tag{2}$$

Il programma numero 3 a pagina 78 è lukji della fattorizzazione LU.  
Studio fowardrow e backwardrow.

### Definizione 10 (Pivoting Parziale)

*Il pivoting parziale è l'applicazione del metodo MEG su una matrice con la scelta dell'elemento di modulo massimo come PIVOT per ridurre l'errore*

### Esistenza e unicità della fattorizzazione LU

Sia  $A \in R^{n \times n}$ . La fattorizzazione LU di  $A$  con  $l_{ii} = 1$  per  $i = 1, \dots, n$  esiste ed è unica se e solo se le sottomatrici principali  $A_i$  di  $A$  di ordine  $i = 1, \dots, n - 1$  sono non singolari.

### Definizione 11

*Una matrice quadrata  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è a diagonale dominante per righe se:*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

*e strettamente dominante diagonale se:*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

### Matrici a dominanza diagonale e fattorizzazione LU

Se  $A$  è una matrice a dominanza diagonale stretta per righe o per colonne, allora esiste ed è unica la fattorizzazione LU di  $A$  con elementi diagonali di  $L$  tutti pari ad 1. Lo stesso risultato vale se  $A$  è a dominanza diagonale nel caso sia non singolare.

### Teorema 8 (Fattorizzazione di Cholesky)

*Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice simmetrica e definita positiva; allora esiste un'unica matrice triangolare superiore  $H$  con elementi diagonali positivi*

tale che

$$A = H^T H.$$

Questa è la fattorizzazione di Cholesky, Gli elementi  $h_{ij}$  di  $H$  sono dati dalle formule seguenti  $h_{11} = \sqrt{a_{11}}$ , per  $j = 2, \dots, n$

$$h_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} j_{ki} h_{kj} \right) / h_{ii}, i = 1, \dots, j-1.$$

$$h_{jj} = \left( a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{kj}^2 \right)^{1/2}.$$

Il teorema si generalizza alle matrici ermitiane definite positive

**Teorema 9** (Fattorizzazione di Cholesky complessa)

Una matrice quadrata  $A \in C^{n \times n}$  è hermitiana definita positiva se:

- $A = A^H$  (proprietà hermitiana)
- $x^H Ax > 0$  per ogni  $x \neq 0$

In tal caso, esiste una matrice triangolare inferiore  $L \in C^{n \times n}$  con elementi diagonali reali e positivi tali che

$$A = LL^H.$$

dove  $L^H$  è la trasposta coniugata di  $L$

Per  $k = 1, \dots, n$ :

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} |l_{kj}|^2} \quad (3)$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} \overline{l_{kj}} \right), \quad i = k+1, \dots, n \quad (4)$$

Qui c'è il codice della fattorizzazione di chol2, il programma 7 a pagina 84

## 2.2 Matrici tridiagonali e algoritmo di Thomas

### Definizione 12

*Una matrice tridiagonale è una matrice nulla se non per la diagonale, i coefficienti strettamente al di sopra e strettamente al di sotto*

In caso di matrici tridiagonali le matrici  $LU$  sono del tipo:

$L$  ha sulla diagonale 1 e sulla diagonale subito sotto i coefficienti  $\beta_k$  con  $k = 2, \dots, n$

$U$  ha sulla diagonale i coefficienti  $\alpha_k$  e sulla diagonale subito sopra i coefficienti  $c_k$  con  $k = 1, \dots, n - 1, n$

i coefficienti  $c_k$  sono gli stessi della matrice di partenza e per calcolare gli  $\alpha$  e i  $\beta$  si usa la formula

$$\alpha_1 = a_1, \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, i = 2, \dots, n.$$

Questo algoritmo prende il nome di algoritmo di Thomas.

Questo algoritmo può essere utilizzato per risolvere il sistema tridiagonale tramite

$$(Ly = f) \quad y_1 = f_1, y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, i = 2, \dots, n.$$

$$(Ux = y) \quad x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = (y_i - c_i x_{i+1}) / \alpha_i, i = n - 1, \dots, 1.$$

## 2.3 Metodi iterativi

I metodi iterativi sono tutti quelli che ci portano alla soluzione tramite un numero di iterazioni determinato dalla precisione scelta.

### Splitting additivo

Una strategia generale per costruire metodi iterativi lineari consiste in una decomposizione additiva della matrice  $A$ , della forma  $A = P - N$  dove  $P$  e  $N$  sono due matrici opportune e  $P$  è non singolare,  $P$  è detta matrice di precondizionamento o precondizionaore.

Precisamente, assegnare  $x^0$ , si ottiene  $x^{k+1}$  per  $k \geq 0$  risolvendo i nuovi sistemi

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \quad k \geq 0.$$

Più in generale per i metodi iterativi avremo  $x^{(0)}$  dato e

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad k \geq 0.$$

avendo indicato con  $B$  una matrice quadrata  $n \times n$  detta matrice di iterazione e con  $f$  un vettore che si ottiene a partire dal termine noto  $b$ .

**Definizione 13** (Condizione di consistenza)

Un metodo iterativo della forma appena descritta si dirà consistente con il sistema  $Ax = b$  se e solo se  $f$  e  $B$  sono tali che  $x = Bx + f$ . Equivalentemente

$$f = (I - B)A^{-1}b.$$

Indicato con

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x.$$

L'errore al passo  $k$ , la condizione di convergenza è equivalente a richiedere che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{(k)} = 0$  per ogni scelta del vettore iniziale  $x^{(0)}$

**Teorema 10** (Convergenza e Raggio spettrale)

Se il metodo è consistente, esso converge alla soluzione del sistema per ogni scelta del vettore iniziale  $x^{(0)}$  se e solo se  $\rho(B) < 1$

**Dimostrazione**

Questa te la fai sul libro a pagina 116

□

**2.3.1 Metodo di Jacobi**

Nel metodo di Jacobi, scelto un dato iniziale  $x^{(0)}$ , si calcola  $x^{(k+1)}$  attraverso le formule

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Ciò equivale allo splitting  $A = P - N$  con

$$P = D, \quad N = D - A = E + F.$$

Dove  $D$  è la matrice diagonale rappresentata dagli elementi diagonali di  $A$ ,  $E$  è la matrice triangolare inferiore di coefficienti  $e_{ij} = -a_{ij}$  se  $i > j$ ,  $e_{ij} = 0$  se  $i \leq j$ , mentre  $F$  è la matrice triangolare superiore di coefficienti  $d_{ij} = -a_{ij}$  se  $j > i$ ,  $f_{ij} = 0$  se  $j \leq i$ . Di conseguenza,  $A = D - (E + F)$

La matrice di iterazione corrispondente è

$$B_J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A.$$

### 2.3.2 Metodo di Gauss-Seidel

Il metodo di Gauss-Seidel si differenzia dal metodo di Jacobi per il fatto che al passo  $k + 1$  si utilizzano i valori di  $x_i^{(k+1)}$  qualora sianodisponibili

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Questo metodo equivale ad aver utilizzato lo splitting  $A = P - N$  dove

$$P = D - E, \quad N = F.$$

La corrispondente matrice di iterazione è data da

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F.$$

**Teorema 11** (Convergenza di Jacobi e Gauss Seidel)

*Se  $A$  è una matrice a dominanza diagonale stretta per righe, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.*

#### Dimostrazione

questa va fatta sul libro ma è una mezza cazzata (pag 121) □

**Teorema 12** (Convergenza tridiagonali)

*Nel caso in cui  $A$  sia una matrice tridiagonale (per punti o per blocchi), si può dimostrare che*

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J).$$

*Da tale relazione si conclude che due metodi convergono o divergono contemporaneamente. Nel caso in cui convergano, il metodo di Gauss-Seidel converge più rapidamente*

### 2.3.3 Metodo del rilassamento successivo (SOR)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega)x_i^{(k)}.$$

per  $i = 1, \dots, n$

La matrice di iterazione è per tanto

$$B(\omega) = (1 - \omega D^{-1}E)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}F].$$

Si puo trovare la formula seguente per il metodo SOR

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left( \frac{1}{\omega} D - E \right)^{-1} r^{(k)}.$$

Esso risulta consistente per ogni  $\omega \neq 0$  e per  $\omega=1$  concide con il metodo di Gauss-Seidel. In particolare, se  $\omega \in (0, 1)$  il metodo si dice sottilassamento, mentre se  $\omega > 1$  si dice sovrilassamento.

**Teorema 13** (Convergenza SOR (Teorema di Kahan))

Per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  si ha  $\rho(B(\omega)) \geq |\omega - 1|$ , pertanto il metodo SOR diverge se  $\omega \leq 0$  o se  $\omega \geq 2$ .

#### Proprietà 4.3 (Ostrowski)

Se  $A$  è una matrice simmetrica definita positiva, il metodo SOR converge se e solo se  $0 < \omega < 2$ . Inoltre, la convergenza è monotona rispetto alla norma  $\|\cdot\|_A$

Infine, se  $A$  è a dominanza diagonale stretta per righe, il metodo SOR converge se  $0 < \omega \leq 1$

#### Proprietà 4.4

Sia  $A$  simmetrica definita positiva e tridiagonale. Allora il metodo SOR converge per ogni valore iniziale  $x^{(0)}$  se  $0 < \omega < 2$ . In tal caso

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}.$$

ed è in corrispondenza di tale valore il fattore asintotico di convergenza è pari a

$$\rho(B(\omega_{opt})) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}.$$

#### 2.3.4 Un criterio basato sul controllo dell'incremento

Dalla relazione ricorsiva sull'errore  $e^{(k+1)} = Be^{(k)}$ , otteniamo

$$\|e^{(k+1)}\| \leq \|B\| \|e^{(k)}\|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare si trova

$$\|e^{(k+1)}\| \leq \|B\| (\|e^{(k+1)}\| + \|x^{(k_1)} - x^{(k)}\|).$$

dunque se  $\|B\| > 1$

$$\|x - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

In particolare prendendo  $k = 0$  e applicando ricorsivamente la formula precedente si trova

$$\|x - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

che può essere usata per sistemare il numero di iterazioni necessario per soddisfare la condizione  $\|e^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$  per una data tolleranza  $\varepsilon$

In pratica,  $\|B\|$  può essere stimata nel modo seguente avendosi

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = -(x - x^{(k+1)}) + (x - x^{(k)}) = B(x^{(k)} - x^{(k+1)}).$$

### 2.3.5 Un criterio basato sul controllo del residuo

Un criterio d'arresto più pratico dei precedenti è quello in cui ci si ferma quando  $|r^{(k)}| \leq \varepsilon$ , essendo  $\varepsilon$  una tolleranza fissata. In tal caso si ricava

$$\|x - x^{(k)}\| = \|A^{-1}b - x^{(k)}\| = \|A^{-1}r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\|\varepsilon.$$

e di conseguenza, se vogliamo che l'errore sia minore di  $\delta$ , dovremo scegliere  $\varepsilon \leq \delta/\|A^{-1}\|$ . In generale conviene tuttavia effettuare un test d'arresto sul residuo normalizzato: ci si ferma dunque non appena  $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|r^0\|} \leq \varepsilon$  oppure quando risulta  $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \varepsilon$  (che corrisponde ad aver scelto  $x^{(0)} = 0$ ). In quest'ultimo caso si ha il seguente controllo sull'errore relativo commesso.

$$\frac{\|x - x^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r^{(k)}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \varepsilon K(A).$$

Ne caso di metodi precondizionati, al residuo si sostituisce il residuo precondizionato e quindi il criterio precedente diventa

$$\frac{\|P^{-1}\|r^{(k)}\|}{\|P^{-1}r^{(0)}\|} \leq \varepsilon.$$

essendo  $P$  la matrice di precondizionamento.

### 3 Sistemi non lineari

Affrontiamo in questa sezione la risoluzione numerica di sistemi di equazioni non lineari della forma:

$$\text{data } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{trovare } x^* \in \mathbb{R}^n \quad \text{tale che } F(x^*) = 0.$$

#### Notazione 1

Chiameremo  $J_F(x)$  la matrice jacobiana associata a  $F$  e valutata in  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

#### 3.1 Il metodo di Newton

Una immediata estensione al caso vettoriale del metodo di Newton si formula nel modo seguente:

dato  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , per  $k = 0, 1, \dots$ , fino a convergenza

$$\text{risolvere } J_F(x^{(k)})\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}).$$

$$\text{porre } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)}.$$

dove  $\delta x^{(k)}$  è la correzione rispetto al termine precedente

#### Teorema 14 (Convergenza metodo di Newton)

Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione vettoriale di classe  $C^1$  in un aperto convesso  $D$  di  $\mathbb{R}^n$  contenente  $x^*$ . Supponiamo che  $J_F^{-1}(x^*)$  esista e che esistano delle costanti positive,  $R, C$  ed  $L$  tali che  $\|J_F^{-1}(x^*)\| \leq C$  e

$$\|J_F(x) - J_F(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in B(x^*; R).$$

Avendo indicato con lo stesso simbolo  $\|\cdot\|$  una norma vettoriale ed una norma matriciale consistenti. Esiste allora  $r > 0$  tale che, per ogni  $x^{(0)} \in B(x^*; r)$  la successione è univocamente definita, converge a  $x^*$  e

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq CL\|x^{(k)} - x^*\|^2.$$

#### Dimostrazione

sul libro a pagina 251

□

## 4 Interpolaione polinomiale

In questo capito illustreremo i principali metodi per l'approssimazione di funzioni attraverso i loro valori nodali.

### 4.1 Interpolaione polinomiale di Lagrange

Consideriamo  $n+1$  coppie di valori  $(x_i, y_i)$ . Cerchiamo un polinomio  $\Pi_n \in \mathbb{P}_m$  detto polinomio interpolatore tale che

$$\Pi_m(x_i) = a_m x_i^m + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_0, \quad i = 0, \dots, n.$$

#### Teorema 15

Dati  $n+1$  punti distinti  $x_0, \dots, x_n$  e  $n+1$  corrispondenti  $y_0, \dots, y_n$  esiste un unico polinomio  $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$  tale che  $\Pi_n(x_i) = y_i$  per  $i = 0, \dots, n$

La dimostrazione non è necessaria ma costruisce così il polinomio

$$\begin{aligned} \Pi_n(x_i) &= \sum_{j=0}^n b_j l_j(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \\ l_i \in \mathbb{P}_n : \quad l_i &= \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Questa forma è detta forma di Lagrange del polinomio interpolatore.

### 4.2 Forma di Newton

Introduciamo una forma alternativa dal costo computazionale inferiore. Poniamo il seguente obiettivo:

date  $n+1$  coppie  $\{x_i, y_i\}$  si può rappresentare  $\Pi_n$  come la somma di  $\Pi_{n-1}$  e di un polinomio di grado  $n$  dipendente dai nodi  $x_i$  e da un solo coefficiente incognito. Precisamente poniamo

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x).$$

doeve  $q_n \in \mathbb{P}_n$ . Poiché  $q_n(x_i) = \Pi_n - \Pi_{n-1}(x_i) = 0$  per  $i = 0, \dots, n-1$ , dovrà necessariamente essere

$$q_n(x) = a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = a_n \omega_n(x).$$

Per determinare il coefficiente incognito  $a_n$ , supponiamo che  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  dove  $f$  è una funzione opportuna, non necessariamente nota in forma esplicita. Siccome  $\Pi_n f(x_n) = f(x_n)$  si avrà

$$a_n = \frac{f(x_n) - \Pi_{n-1} f(x_n)}{\omega_n(x_n)}.$$

Il coefficiente  $a_n$  è detto  $n$ -esima differenza divisa di Newton e viene generalmente indicato con

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n].$$

per  $n \geq 1$ . Di conseguenza la prima formula diventa

$$\Pi_n f(x) = \Pi_{n-1} f(x) + \omega_n(x) f[x_0, \dots, x_n].$$

Se poniamo  $y_0 = f(x_0) = f[x_0]$  e  $\omega_0 = 1$ , per ricorsione su  $n$  possiamo ottenere la formula seguente

$$\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) f[x_0, \dots, x_k].$$

#### 4.2.1 Formula ricorsiva per il calcolo delle differenze divise

Rielaborando algebricamente la formula si giunge alla seguente formula ricorsiva per il calcolo delle differenze divise:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n \geq 1.$$

**Il programma di interpolazione è il numero 57 a pagina 273**

#### 4.2.2 Stabilità della procedura

Il valore assunto dalla differenza divisa è invariante rispetto ad una permutazione degli indici dei nodi. Questo fatto può essere sfruttato opportunamente quando problemi di stabilità suggeriscano l'uso di una opportuna permutazione degli indici (ad esempio se  $x$  è il punto in cui si vuole valutare il polinomio è conveniente utilizzare una permutazione degli indici in modo tale che  $|x - x_k| \leq |x - x_{k-1}|$  con  $k = 1, \dots, n$ )

### 4.2.3 L'errore di interpolazione

#### Teorema 16

*Siano  $x_0, \dots, x_n$   $n+1$  nodi distinti e  $x$  un punto appartenente al dominio di una data funzione  $f$ . Supponiamo che  $f \in C^{n+1}(I_x)$  essendo  $I_x$  il più piccolo intervallo contenente i nodi  $x_0, \dots, x_n$  ed è il punto  $x$ . Allora l'errore di interpolazione nel generico punto  $x$  è dato da*

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x).$$

*con  $\xi(x) \in I_x$  e dove  $\omega_{n+1}$  è il polinomio nodale di grado  $n+1$*

### 4.2.4 L'errore di interpolazione usando le differenze divise

Consideriamo i nodi  $x_0, \dots, x_n$  e sia  $\Pi_n f$  il polinomio interpolatore di  $f$  su tali nodi. Sia ora  $x$  un nodo distinto dai precedenti; posto  $x_{n+1} = x$ , denotiamo con  $\Pi_{n+1} f$  il polinomio interpolatore sui nodi  $x_k, k = 0, \dots, n+1$ . Usando la formula delle differenze divide di Newton si trova

$$\Pi_{n+1} f(t) = \Pi_n f(t) + (t - x_0) \dots (t - x_n) f[x_0, \dots, x_n, t].$$

Essendo  $\Pi_{n+1} f(x) = f(x)$ , si ricava la seguente formula dell'errore di interpolazione in  $t = x$

$$\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - \Pi_n f(x) = \Pi_{n+1} f(x) - \Pi_n f(x) \\ &= (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x] \\ &= \omega_{n+1}(x) f[0, \dots, x_n, x] \end{aligned}$$

Supponendo  $f \in C^{(n+1)}(I_x)$  otteniamo

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}.$$

$\xi(x) \in I_x$ . Per la somiglianza della formula con il resto dello sviluppo in serie di Taylor, la formula di Newton del polinomio interpolatore viene paragonata ad uno sviluppo troncato intorno ad  $x_0$  a patto che  $|x_n - x_0|$  non sia troppo grande.

#### 4.2.5 Limiti dell'interpolazione polinomiale su nodi equidistanziati

Per analizzare il comportamento dell'errore di interpolazione quando  $n$  tende all'infinito, definiamo per ogni funzione  $f \in C^0([a, b])$  la norma infinito come

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Introduciamo una matrice triangolare inferiore  $X$  di dimensione infinita, detta matrice di interpolazione su  $[a, b]$  i cui elementi  $x_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots$  rappresentano i punti di  $[a, b]$  con l'assunzione che in ogni riga gli elementi siano tutti distinti

In tal caso, per ogni  $n \geq 0$ , la  $n+1$ -esima riga di  $X$  contiene  $n+1$  valori che possiamo identificare come nodi di interpolazione. Per una data funzione  $f$ , si puo allora definire in modo univoco un polinomio interpolatore  $\Pi_n f$  di grado  $n$  rispetto a detti nodi. Naturalmente,  $\Pi_n f$  dipenderà solamente da  $X$ , oltre che da  $f$ .

Fissata  $f$  e la matrice di interpolazione  $X$ , definiamo l'errore di interpolazione

$$E_{n,\infty}(X) = \|f - \Pi_n f\|_\infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Indichiamo con  $p^* \in \mathbb{P}_n$  il polinomio di miglior approssimazione uniforma (detto in inglese polinomio di best approximation), in corrispondenza del quale si ha

$$E_n^* = \|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty \quad \forall q \in \mathbb{P}_n.$$

Vale il seguente risultato di confronto

#### Proprietà 7.1

Sia  $f \in X^0([a, b])$  e  $X$  una matrice di interpolazione su  $[a, b]$ . Allora

$$E_{n,\infty}(X) \leq (1 + \Lambda_n(X)) E_n^*, \quad n = 0, 1, \dots$$

dove  $\Lambda_n(X)$  denota la costante di Lebesgue di  $X$  definita come

$$\Lambda_n(X) = \left\| \sum_{j=0}^n |l_j^{(n)}| \right\|_\infty.$$

essendo  $l_j^{(n)} \in \mathbb{P}_n$  il  $j$ -esimo polinomio caratteristico associato alla  $n+1$ -esima riga di  $X$ , ovvero tale che  $l_j^{(n)}(x_{nk}) = \delta_{jk}$ ,  $j, k = 0, 1, \dots$

Essendo  $E_n^*$  indipendente da  $X$ , tutte le informazioni relative agli effetti di  $X$  su  $E_{n,\infty}(X)$  andranno ricercate in  $\Lambda_n(X)$ . Pur esistendo una matrice

di interpolazione  $X^*$  in corrispondenza della quale  $\Lambda_n(X)$  è minimo, non è possibile, se non in rari casi, determinare esplicitamente gli elementi.

D'altro canto per ogni possibile scelta di  $X$ , esiste una costante  $C > 0$  tale che

$$\Lambda_n(X) > \frac{2}{\pi} \log(n+1) - C.$$

Questa proprietà mostra che  $\Lambda_n(X) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . In particolare si può dedurre che per ogni matrice di interpolazione  $X$  su un intervallo  $[a, b]$  esiste sempre una funzione  $f$ , continua in  $[a, b]$  tale che  $\Pi_n f$  non converge uniformemente (nella norma massimo) ad  $f$ . Non è quindi possibile approssimare tramite l'interpolazione polinomiale tutte le funzioni continue, il seguente ne è un esempio.

### Controesempio di Runge

Si voglia approssimare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad -5 \leq x \leq 5.$$

con l'interpolazione di Lagrange su nodi equispaziati. Si verifica che esistono dei punti  $x$  interni all'intervallo tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x) - \Pi_n f(x)| \neq 0.$$

In particolare si ha divergenza per  $|x| > 3.63 \dots$ . Questo fenomeno è particolarmente marcato agli estremi dell'intervallo di interpolazione, come mostrato nella figura (pag 270) ed è legato alla scelta di nodi equispaziati.

### 4.3 Stabilità dell'interpolazione polinomiale

Supponiamo di considerare una approssimazione,  $\tilde{f}(x_i)$ , di un insieme di dati  $f(x_i)$  relativi ai nodi  $x_i$ , con  $i = 0, \dots, n$  in un intervallo  $[a, b]$ . La perturbazione  $f(x_i) - \tilde{f}(x_i)$  potrà essere dovuta ad esempio all'effetto degli errori di arrotondamento, oppure causata da un errore nella misurazione dei dati stessi.

Indicando con  $\Pi_n \tilde{f}$  il polinomio interpolatore corrispondente ai valori  $\tilde{f}(x_i)$  si ha

$$\begin{aligned} \|\Pi_n f - \Pi_n \tilde{f}\|_\infty &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{j=1}^n (f(x_j) - \tilde{f}(x_j)) l_j(x) \right| \\ &\leq \Lambda_n(X) \max_{i=0, \dots, n} |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \end{aligned}$$

Di conseguenza, a piccole perturbazioni sui dati corrisponderanno piccole variazioni sul polinomio interpolatore purchè la costante di Lebesgue sia piccola. Quest'ultima assume il significato di numero di condizionamento del problema dell'interpolazione. Come abbiamo già osservato,  $\Lambda_n$  cresce per  $n \rightarrow +\infty$  ed in particolare, nel caso dell'interpolazione polinomiale di Lagrange su nodi equispaziati, si trova

$$\Lambda_n(X) \simeq \frac{2^{n+1}}{en(\log n + \gamma)}.$$

dove  $e$  è il numero di nepero e  $\gamma \simeq_0 .547721$  rappresenta la costante di Eulero. Di conseguenza per  $n$  grande questo tipo di interpolazione può essere instabile. Facciamo notare come siano stati del tutto trascurati gli errori generati dal processo di interpolazione nella costruzione di  $\Pi_n$ . Tuttavia, l'effetto di questi errori è in generale trascurabile

#### Esempio

Sull'intervallo  $[-1, 1]$  interpoliamo la funzione  $f(x) = \sin(2\pi x)$  con 22 nodi equidistanti  $x_i$ . Generiamo un insieme perturbato di valori  $\tilde{f}(x_i)$  in modo che

$$\max_{i=0, \dots, 21} |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \simeq 9.5 \cdot 10^{-4}.$$

### 4.4 Interpolazione composita di Lagrange

In generale, per distribuzioni equispaziate dei nodi di interpolazione, non si ha convergenza uniforme di  $\Pi_n f$  a  $f$  per  $n \rightarrow \infty$ . D'altra parte, da un

lato l'equispaziatura dei nodi presenta considerevoli vantaggi ocmputazionali, dall'altro l'interpolazione di Lagrange risulta ragionveolmente accurata per gradi bassi, a patto di interpolare su intervalli sufficientemente piccoli.

È per tanto naturale introdurre una partizione  $\mathcal{T}_h$  di  $[a, b]$  in  $M$  sottointervalli  $I_j = [x_j, x_{j+1}]$  con  $j = 0, \dots, M$  di lunghezza  $h_j$ , con  $h = \max_{0 \leq j \leq M-1} h_j$ , tali che  $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{M-1} I_j$  ed usare poi l'interpolazione di Lagrange su ciascun intervallo  $I_j$  con  $k$  piccolo e su  $k + 1$  nodi equidistanziati  $\{x_j^{(i)}, 0 \leq i \leq k\}$ .

Per  $k \geq 1$ , introduciamo su  $\mathcal{T}$  lo spazio dei polinomi composti

$$X_h^k = \{v \in C^0([a, b]) : v|_{I_j} \in \mathbb{P}_k(I_j) \forall I_j \in \mathcal{T}_h\}.$$

definito come lo spazio delle funzioni continue su  $[a, b]$  le cui restrizioni a ciascun  $I_j$  sono polinomi di grado  $\leq k$ . Allora, per ogni funzione  $f$  continua su  $[a, b]$  il polinomio inteprolatore composito,  $\Pi_h^k f$ , coincide su  $I_j$  con il polinomio interpolatore di  $f|_{I_j}$  sui  $k + 1$  nodi  $\{x_j^{(i)}, 0 \leq i \leq k\}$ . Di conseguenza, se  $f \in C^{k+1}([a, b])$ , si ricava la seguente stima dell'errore

$$\|f - \Pi_h^k f\|_\infty \leq Ch^{k+1} \|f^{(k+1)}\|_\infty.$$

## 4.5 Funzioni spline

Introduciamo in questa sezione le funzioni splines, che consentono di effettuare l'interpolazione di una funzione attraverso polinomi composti non solo continui, ma anche derivabili su tutto l'intervallo  $[a, b]$

### Definizione 14

*Siano  $x_0, \dots, x_n, n + 1$  nodi distinti e ordinati sull'intervallo  $[a, b]$  con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Una funzione  $s_j(x)$  sull'intervallo  $[a, b]$  è detta spline di grado  $k$  ( $k \geq 1$ ) relativa ai nodi  $x_j$  se*

$$s_k|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_k, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

$$s_k \in C^{k-1}[a, b].$$

### 4.5.1 Spline cubiche interpolatorie

Le spline cubiche di grfado 3 di tipo interpolatorio hanno un rilievo particolare, in quanto

1. sono le spline di grado minimo che consentano di ottenere approssimazioni almeno di classe  $C^2$
2. sono sufficientemente regolari in presenza di piccole curvature.

Consideriamo dunque in  $[a, b], n+1$  nodi ordinati  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  e le corrispondenti valutazioni  $f_i$ . Si vuole fornire una procedura efficiente per la costruzione della spline cubica interpolante tali valori. Essendo la spline di grado 3, essa dovrà presentare derivate continue fino al second'ordine. Introduciamo le seguenti notazioni

$$f_i = s_3(x_i), \quad m_i = s'_3(x_i), \quad M_i = s''_3(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Avendosi  $s_{3,i-1}(x) \in \mathbb{P}_3$ ,  $s''_{3,i-1}$  sarà lineare e

$$s''_{3,i-1} = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad \text{per } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

essendo  $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$ . Integrando l'uguaglianza precedente due volte otteniamo

$$s_{3,i-1} = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \tilde{C}_{i-1}.$$

e le costanti  $C_{i-1}$  e  $\tilde{C}_{i-1}$  vengono delimitate imponendo che  $s_3(x_{i-1} = f_{i-1}$  e  $s_3(x_i) = f_i$ . Si ricava quindi che, per  $i = 1, \dots, n-1$

$$\tilde{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6}, \quad C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}).$$

Imponiamo ora la continuità delle derivate prime in  $x_i$ ; avremo:

$$s'_{3,i-1}(x_i) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \tag{5}$$

$$= -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = s'_{3,i}(x_i) \tag{6}$$

Si giunge così al seguente sistema lineare (detto di  $M$ -continuità)

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n-1.$$

avendo posto

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, & \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}. \\ d_i &= \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), & i &= 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Il sistema ha  $n+1$  incognite e  $n-1$  equazioni: servono ancora  $2 (= k-1)$  condizioni. In generale, queste condizioni potranno essere della formula

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \quad \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n.$$

con  $0 \leq \lambda_0, \mu_n \leq 1$  e  $d_0, d_n$  valorai assegnati. Ad esempio nel caso in cui si vogliano ottenere spline naturali (soddisfacenti  $s_3''(a) = s_3''(b) = 0$ ), si prenderanno tali coefficienti tutti nulli.