Lezione 12 Algebra 1

Federico De Sisti

2025-04-24

0.1 Successioni esatte corte di moduli

Ricordo

Definizione 1
Una SEC è una coppia di omeomorfismi R-moduli

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''.$$

tali che

1. *i iniettiva*
2. *π suriettiva*
3. *$Ker(\pi) = Im(i)$*

Abbiamo dimostrato

1. Se M è finitamente generato allora M'' è finitamente generato.
2. Se M' e M" sono finitamente generati allora M è finitamente generato.

Esercizio
$R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$

- $M = R$ è un R-modulo (libero di ragno 1) su se stesso (è generato da 1_R).
- $I = (x_1, x_2, \ldots)$
  Verificate che I non è finitamente generato come R-modulo.

Obiettivo
Studiare il caso di (sotto) moduli su anelli Noetheriani.

Lemma 1
R anello commutativo.
Allora R è Noetheriano se e solo se ogni ideale di R è finitamente generato.

Dimostrazione

Se R è Noetheriano, assumiamo per assurdo che esista $I \subseteq R$ ideale non finitamente generato. Sia $r_1 \in I \setminus \{0\}$
definiamo $I_1 = (r_1) \subsetneq I$
Sia $r_2 \in I \setminus I_1$
definiamo $I_2 = (r_1, r_2) \subsetneq I$
Iteriamo:
Sia $r_k \in I \setminus I_{k-1}$
definiamo $I_k = (r_1, \ldots, r_k) \subsetneq I$
Abbiamo una catena infinita di ideali
$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots \subsetneq I_k \subsetneq \ldots$
che contraddice l'ipotesi su R

Viceversa, supponiamo che ogni ideale di R sia finitamente generato
Consideriamo una catena di ideali

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq \ldots.$$

Definiamo $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} I_k$ $I \subseteq R$ *è un ideale.*
Allora $I = (r_1, \ldots, r_h)$ *per qualche scelta di* $r_1, \ldots, r_h \in R$
Allora $\forall j \in \{1, \ldots, h\}$
$\exists k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *tale che* $r_j \in I_{k_j}$
Definiamo $\underline{k} = \max\{k_1, \ldots k_h\}$

$$\Rightarrow r_j \in I_{k_j} \subseteq I_k \quad \forall j \in \{1, \ldots h\}.$$

Quindi $I = (r_1, \ldots, r_h) \subseteq I_{\underline{k}} \subseteq I$
$\Rightarrow I = I_{\underline{k}}$
$\Rightarrow I_k = I_{\underline{k}} \qquad \forall k \geq \underline{k}$
$\Rightarrow$ *R Noetheriano* $\square$

Teorema 1
R anello Noetheriano M R-modulo finitamente generato, Allora ogni sottomodulo di M è finitamente generato

Dimostrazione
Passo I: *Studiamo il caso* $M = R^n$
Per induzione su n.
$n = 1$ $M = R$ *e i suoi sottomoduli sono gli ideali di R, che sono finitamente generati per il lemma.*
$n > 1$ *Sia* $N \subseteq R^n$ *sottomodulo*
Consideriamo

$$R \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\pi} R^{n-1}$$
$$r \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$R \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\pi} R^{n-1}$$
$$K = \ker(\pi|_N) \xrightarrow{i|_N} N \xrightarrow{\pi|_N} \pi(N).$$

Quindi N finitamente generato
Passo II: *M R-modulo finitamente generato*
Esiste un omomorfismo suriettivo

$$R^n \xrightarrow{\phi} M$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to \sum_{j=1}^{n} a_j m_j.$$

Sia $N \subseteq M$ sottomodulo, Definiamo

$$\tilde{N} = \phi^{-1}(N) \subseteq R^n.$$

Abbiamo una SEC

$$\ker(\phi|_{\tilde{N}}) \to \tilde{N} \xrightarrow{\phi|_{\tilde{N}}} N.$$

Quindi $\tilde{N}$ finitamente generato per il primo passo
$\Rightarrow N$ finitamente generato □

Ricordo:

Teorema 2 (di struttura)
R PID M R-modulo finitamente generato. Allora esistono $d_1, \ldots, d_n \in R$

1. $d_j \mid d_{j+1} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$
2. $M \cong R/(d_1) \oplus R/(d_2) \oplus \ldots \oplus R/(d_n)$

Osservazione
1) possiamo assumere d_j non invertibile $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$
2) i d_j sono univocamente determinati a meno di associati.
3) Alcuni dei d_j potrebbero essere 0.

Esempi:
1) $R = \mathbb{Z}$.
2) $R = \mathbb{K}[t]$ con $\mathbb{K}$ campo qualsiasi.

0.2 Decomposizione primaria

Corollario 1
R PID, M R-modulo finitamente generato.
Allora esistono
$h, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$
e desistono primi $p_1, \ldots, p_k \in R$
tali che

$$M \cong R/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus R/(p_k^{n_k}) \oplus R^h.$$

Dimostrazione
Dal teorema di struttura:
$M \cong R/(d_1) \oplus \ldots \oplus R/(d_k) \oplus R^h$
Basta studiare il caso $R/(d)$ con $d \neq 0$ e d non invertibile
Ricordiamo che $PID \Rightarrow UFD$
Quindi

$$d = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{n_s}$$

.

con $p_1, \ldots, p_s$ *distinti*
Dal teorema cinese del resto

$$R/(d) \cong R/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus R/(p_s^{n_s}).$$

$\square$

1 Forma canonica razionale

Osservazione
il dato di un $\mathbb{K}[t]$-modulo è equivalete al dato di una coppia (V, T) dove V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $T : V \to V$ applicazione $\mathbb{K}$-lineare
dato M $\mathbb{K}[t]$-modulo poniamo $V = M$
dove la moltiplicazione per scalari $a \in Ł$ è data dalla moltiplicazione per polinomi costanti $a \in \mathbb{K}[t]$
Inoltre

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ v &\to t \cdot v \end{aligned}.$$

Viceversa, data una coppia (V, T) vogliamo costruire un $\mathbb{K}[t]$-modulo M.
Poniamo $M = V$
e

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[t] \times V &\to V \\ (p(t), v) &\to p(T) \cdot v \end{aligned}$$

Osservazione
se $p(t) = t$
$\Rightarrow (p(t), v) \to T(v)$

Definizione 2
Dato un polinomio monico $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[t]$
La matrice compagna di p *è*

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Esercizio
Dimostrare che il polinomio caratteristico di C_p è p
$det(tiD - C_p) = p(t)$

Teorema 3 (forma canonica razionale)
$\mathbb{K}$ campo V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita $T \in End_{\mathbb{K}}(V, V)$
Allora esistono polinomi monici $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[t]$ ed esiste una base B di V tali che

1. $f_k \mid f_{j+1} \quad \forall j \in \{1, \ldots, k-1\}$
2. *la matrice che rappresenta T nella base B è*
$$T = \begin{pmatrix} C_{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{f_k} \end{pmatrix}.$$
3. *il polinomio caratteristico di T è $f_1, \ldots, f_k$*

Dimostrazione
Per il teorema di struttura
$V \cong \mathbb{K}[t]/(f_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]/(f_k)$ *isomorfismo di $\mathbb{K}[t]$-moduli*
Osserviamo

1. $dim_{\mathbb{K}}(V) < +\infty \Rightarrow f_j \neq 0 \; \forall j \leq k$
2. *possiamo scegliere f_j monico $\forall j$*
3. $f_j \mid f_{j+1} \quad j \in \{1, \ldots, k-1\}$

Consideriamo il sottospazio
$$U_j = \mathbb{K}[t]/(f_j).$$
scegliamo base
$$B_j = \{v_1^j, \ldots, v_{g_j}^j\}.$$
dove $g_j = deg(f_j)$ e $v_i^j = t^{i-1}$
$T(v_i^j) = t \cdot v_i^j = \begin{cases} v_{i+1}^j & \forall i \in \{1, \ldots, g_j - 1\} \\ -\sum_{i=0}^{g_j-1} a_i \cdot v_{i+1}^j & i = g_j \end{cases}$ *dove $f_j(t) = t^{g_j} + \sum_{i=1}^{g_j-1} a_i \cdot t_i$*
Quindi:
$$T = \begin{pmatrix} T|_{U_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T|_{U_k} \end{pmatrix}.$$
e $T|_{U_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = C_{f_j}$ $\square$

1.1 Cayley-Hamilton

Definizione 3
V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $T \in End_K(V)$
$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[t]$
diremo che T annulla f se

$$f(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 Id.$$

è il polinomio nullo

Teorema 4 (Hamilton (1853), Cayley (1858), Frobenius (1878))
$\mathbb{K}$ campo V spazio vettoriale, $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$, $dim_{\mathbb{K}}(V) < +\infty$
Allora T annulla il suo polinomio caratteristico

Dimostrazione
Dalla forma canonica razionale possiamo studiare il caso in cui T sia rappresentato dalla matrice compagna

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ la base in cui T ha questa forma
$T^n(v_k) = T^{k-1}(v_n)$
$T^n(v_k) = T^{k-1}(v_n) = T^{k-1}(-\sum_{j=0}^{n-1} a_j v_{j+1})$
$= -\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{k-1}(v_{j+1}) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{k-1+j}(v_1)$
$= -\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j(T^{k-1}(v_1)$
$= -\sum_{j-0}^{n-1} a_j T^j(v_k)$
Quindi:
$(T^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j)(v_k) = 0 \quad \forall k$
$\Rightarrow$ *T annulla il polinomio*

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots a_0.$$

che è il polinomio caratteristico di $C_f = T$ $\square$

Definizione 4
V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale
$T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ il polinomio minimo di T è il polinomio monico di grado minimo che è annullato da T

Teorema 5 (Forma canonica di Jordan)
$\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ $dim_{\mathbb{K}}(V) < +\infty$
Allora esiste una base di V in cui T si rappresenta come una matrice

$$T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_{\lambda_k} \end{pmatrix}.$$

dove $J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$

Dimostrazione
dalla decomposizione primaria segue

$$V \cong \mathbb{K}[t]/((t-\lambda_1)^{s_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]/((t-\lambda_k)^{s_k}).$$

poiché primo $\Leftrightarrow$ irriducibile $\Leftrightarrow$ $deg = 1$ di $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso
Si tratta di trovare una base per $U = \mathbb{K}[t]/((t-\lambda)^s)$ in cui T si rappresenta come J_λ
Scelgo la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per $i \in \{1, \ldots$ con $v_i = (t-\lambda)^{s-i}$
Ora
$T(v_i) = t \cdot v_i = [(t-\lambda)+\lambda] \cdot v_{=}(t-\lambda)v_i + \lambda v_i$
$= \begin{cases} v_{i-1} + \lambda v_i & se\ i \neq 1 \\ \lambda v_1 & se\ i = 1 \end{cases}$ *Allora:*

$T|_{U_j} = J_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$ □