Lezione 22 Algebra I

Federico De Sisti

2024-12-15

1 Esercizi delle schede

Esercizio 0.1
$(A, +, \cdot)$ tale che

1. 1) $(A, +)$ gruppo, "non necessariamente abeliano"
2. 2) $\cdot$ è associativa ed esiste $1 \in A$ tale che $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
3. Valgono le proprietà distributive

Dimostrare che $(A, +, \cdot)$ è un anello
Soluzione
$x, y \in A \quad 1 + 1) \cdot (x + y) =?$
Primo caso:

$$(1 + 1)(x + y) = 1(x + y) + 1(x + y) = x + y + x + y.$$

Secondo caso:

$$(1+1)(x+y) = (1+1)(x)+(1+1)(y) = 1 \cdot x+1 \cdot x+1 \cdot y+1 \cdot y = x+x+y+y.$$

$\Rightarrow x + y + x + y = x + x + y + y$ sommando a sinistra l inverso additivo di x e a destra l'inverso di y otteniamo $y + x = x + y \Rightarrow (A, +)$ abeliano.
Esercizio 0.2
Sia $(A, +, \cdot)$ anello con $x^2 = x \quad \forall x \in A \quad \Rightarrow A$ è commutativo
Soluzione
Studiamo $(a + a)^2$:
$a \in A \Rightarrow a + a \in A \Rightarrow (a + a)^2 = (a + a)$
ma $(a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a \Rightarrow a + a = a + a + a + a \Rightarrow a + a = 0 \Rightarrow a = -a$
Siano ora $a, b \in A \Rightarrow (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b \Rightarrow 0 = ab + ba \Rightarrow ab = -ba = ba$
Esercizio 0.3
A anello tale che $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 \quad \forall x, y \in A \Rightarrow A$ è commutativo
Soluzione
Notazione: $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ "Braket di Lie"
Dati $x, y \in A$ vogliamo dimostrare $[x, y] = 0$
$(x \cdot y)^2 = x^2 y^2$ ovvero $x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$
$\Rightarrow x^2 \cdot y^2 - x \cdot y \cdot x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot (xy - y \cdot x) \cdot y = 0$
$\Rightarrow xx \cdot [x, y] \cdot y = 0$
Osservazione:
$[1, y] = 0$ e $[x, y] = 0$
La relazione precedente è verificata per $x + 1, y \in A \Rightarrow (x + 1) \cdot [x, y] \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot [x, y] \cdot y + 1 \cdot [x, y] \cdot y = 0 \Rightarrow [x, y] \cdot y = 0 \quad \forall x, y \in A \Rightarrow$ tale relazione è verificata per $x, y + 1 \in A \Rightarrow [x, y + 1] \cdot (y + 1) = 0 \Rightarrow [x, y] \cdot y + [x, y] \cdot 1 = 0$
Esercizio 0.4
A anello $I \subseteq A$, ideale, $1 \in I$ dimostrare che $I = A$

Soluzione:
$a \in A \Rightarrow a = a \cdot 1 \in I$
Esercizio
$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ anello non commutativo $\Rightarrow$ gli unici ideali bilateri di A sono $\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ e A
Soluzione
Sia $I \subseteq A$ un ideale bilatero tale che $I \neq \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \Rightarrow \exists \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I \neq \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.
Vogliamo che $g \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) g^{-1} \in I \quad \forall g \in GL_2(\mathbb{Q}) \in A$
$\Rightarrow$ possiamo assumere $a \neq 0$
$\Rightarrow$ considero $\left(\begin{smallmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I$
$\Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I$, basta dimostrare che $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I$
$\Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in I$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in I \Rightarrow I \in A$

Definizione 1
$A \subseteq R$ sottoanello di un anello $R, b \in R$
$A[b] = \{a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^m | a_i \in A, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$

Osservazione
Se $b \in A \Rightarrow A = A[b]$
$\cdot$ in generale $A \subseteq A[b]$
Esempi:
$A = \mathbb{Z};\ R = \mathbb{C}$
$\mathbb{Z}[i] = \{a_0 + a_1 i + \ldots + a_n i^n | a_j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = \{m + ni | m, n \in \mathbb{Z}\}$
Esercizio
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ anello
$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni | m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$
Mostrare:
1)$\mathbb{Z}[i]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$
Soluzione
$(\mathbb{Z}[i], +)$ è un sottogruppo, $Z[i]$ è chiuso rispetto a $\cdot$ per distributività
2)$A \subseteq Z[i]$ sottoanello, dimostrare che $A = \mathbb{Z} \vee \exists l \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $A = \{m + nki | m, n \in \mathbb{Z}\}$
Soluzione
Un sottoanello $A \subseteq \mathbb{Z}[i]$ contiene $1 = 1 + 0_i \Rightarrow Z \subseteq A$
Quindi $A = \mathbb{Z} \vee \exists x + yiA$ con $y \neq 0$
$(A, +)$ sottogruppo di $\mathbb{Z}[i] \Rightarrow -x - yo \in A$
Quindi possiamo assumere $y > 0 \Rightarrow y \cdot i \in A$
con $y > 0$, infatti $\mathbb{Z} \subset A \Rightarrow -x + (x + iy) \in A$,
$k := \min\{y \in \mathbb{Z}_{>0} | y_i \in A\} \Rightarrow$ considero $a + bi \in A$ vogliamo che $k | b \Rightarrow b = qk + r$ con $0 \leq r < k$
Moltiplichiamo per $i \Rightarrow b_i = qk_i + r_i$
$\Rightarrow r_i = b_i - qk_i \in A \Rightarrow k \leq r$ oppure $r = 0$ poiché $r | k$
$\Rightarrow k | b \Rightarrow b = nk \Rightarrow A \subseteq \{m + nki | m, n \in \mathbb{Z}\}$
Il viceversa è facile

- $Z \subseteq A$

- $K_i A \Rightarrow nk_i \in A \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + nk_i \in A \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Osservazione
$(\mathbb{Q}, +\cdot)$ anello
$S :=$ insieme di numeri primi $\mathbb{Z}_S := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}|$ i fattori primi di n sono in $S\}$
$\mathbb{Z}_S = Z[\frac{1}{p}|p \in S] \subseteq \mathbb{Q}$
Esercizio
1) Dimostrare che $\mathbb{Z}_S$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$
$\cdot(\mathbb{Z}_S, +)$ è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{n_2 m_1 + n_1 m_2}{n_1 n_2} \in \mathbb{Z}_S \text{ ed è chiuso rispetto agli opposti.}$$

$\cdot$ Z_S è chiuso rispetto a $\cdot$

$$m_1 n_1 \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 n_2} \in \mathbb{Z}_S.$$

$\cdot 1 \in \mathbb{Z}_S$
2) Dimostrare che ogni sottoanello di è di tale forma per qualche insieme S
$A \subseteq Q$ sottoanello quindi $1 \in A \Rightarrow A \subseteq A \Rightarrow A = Z = Z_\phi \vee \mathbb{Z} \subsetneq A$
$\Rightarrow$ se $\mathbb{Z} \subsetneq A \Rightarrow \exists r \in A \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow r\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
con $n > 1$ e possiamo assumere che $MCD(m, n) = 1$
$\Rightarrow 1 = mx + ny$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ (Bezout)
Dividiamo per $n : \frac{1}{n} = rx + y$ Ora:
$x, y \in \mathbb{Z} \subseteq A$ e $r \in A \Rightarrow \frac{1}{n} = ex + y \in A \Rightarrow \frac{a}{n} = a \cdot \frac{1}{n} \in A \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow n > 1 \Rightarrow n \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$
Scelgo $a = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{p_1} = \frac{a}{n} \in A$
$\Rightarrow \frac{1}{p_j} \in A \quad \forall j = 1, \ldots, k.$
Chiamo $S = \{p \in Z|p$ primo tale che $\frac{1}{p} \in A\}$
$Z_S = Z[\frac{1}{p}|p \in S] = A$

Definizione 2
$(A, +, \cdot)$ anello commutativo $I, J \subseteq A$ ideali di A.
$I \cdot J = \{\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \cdot b_\alpha | a_\alpha \in I, b_\alpha \in K, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$

Esercizio:
1)Dimostrare che $I \cdot J$ è un ideale.
Soluzione
$I \cdot J$ è un sottogruppo additivo inoltre $\forall x \in A \quad x \cdot \sum_{finita} a_\alpha b_\alpha = \sum (x a_\alpha) b_\alpha = \sum a'_\alpha \cdot b_\alpha$
2)$I \cap J$ è un ideale di A
Soluzione
$\cdot I \cap J$ è un sottogruppo di $(A, +)$ perchè intersezione di sottogruppi

$$\cdot x \in A \text{ e } b \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \cdot b \in I \\ xb \in K \end{cases} \Rightarrow x \cdot b \in I \cap J$$

3)$I \cdot J \subseteq I \cap J$

$\begin{cases} a \in I \\ b \in J \end{cases} \Rightarrow a \cdot b \in I \cap J$ ora $I \cap J$ è un sottogruppo di $(A, +) \Rightarrow \sum_{finita} a_\alpha b_\alpha \in I \cap J$