Lezione 3 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Nella lezione precedente...

Abbiamo introdotto i sottospazi affini di (A, V) come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

2 Nuova lezione

Osservazione
Se $\Sigma_1 = p_1 + W_1$, $\ _2 = p_2 + W_2$ sono sottospazi affini , la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_{12}.$$

Lemma 1
$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$
$H_p = \{\overrightarrow{px} \ | \ x \in S\}$ $H_q = \{\overrightarrow{qy} \ | \ y \in S\}$
Allora $< H_p >=< H_q >$ e $p+ < H_p >= q+ < H_q >$
(sottospazio generato da S)

Dimostrazione
$v_0 = \overrightarrow{pq}$ $\ v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$
$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in< H_q >$
$H_p \ \subseteq < H_q > \ \Rightarrow \quad < H_p > \subseteq < H_q >$
$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in< H_q > \Rightarrow < H_q > \subseteq < H_p >$
Quindi ¡$H_p >=< H_q >$
$\overrightarrow{pq} \in< H_p >=< H_q >$
$p+ < H_p >= q+ < H_q >$ $\square$

Nomenclatura 1
Σ_1, Σ_2 sottospazi affini

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \textit{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Lemma 2
Siano $\Sigma_i = p_i + W_i, \quad i = 1,2$ *sottospazi affini. Allora*
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in W_1 + W_2$
(b) $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} >)$

Dimostrazione
(a) $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *allora* $\Sigma_1 = p_0 + W_1 \quad {}_2 = p_0 + W_2$
$\exists w_i \in W_i, \quad i = 1,2 \quad t.c$
$p_1 = p_0 + W_1, p_2 = p_0 + W_2$
$\overrightarrow{p_1p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$
Viceversa, se $\overrightarrow{p_1p_2} = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$
$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} = p_1 + w_1 + w_2$
$p_2 - w_2 = p_1 + w_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
(2) Dato $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$*, risulta*
$\overrightarrow{p_1x} \in W_1$ *se* $x \in \Sigma_1$
oppure

$$\overrightarrow{p_1x} \in \overrightarrow{p_1p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1x} = \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2x}).$$

Dunque la giacitura di $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ *è*

$$W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} > .$$

□

3 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

Definizione 1
Siano Σ_1, Σ_2 *sottospazi affini di* (A, V) *di giacitura rispettivamente* W_1, W_2
Diciamo che
1) Σ_1, Σ_2 *sono* ***incidenti****, se* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
2)Σ_1, Σ_2 *sono* ***paralleli*** *se* $W_1 \subseteq W_2$ *p* $W_2 \subseteq W_1$
3) Σ_1, Σ_2 *sono* ***sghembi*** *se* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ *e* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Osservazione
Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

4 Esercizi Elementari

Esercizio 1
Dire se $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Svolgimento**
Scriviamo l'equazione parametrica della retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \end{cases} .$$

alternativamente avrei potuto cercare le coordinate cartesiane

---

Esercizio 2
Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + s \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$
$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

Esercizio 3
Scrivere equazioni per il piano identificato dalla retta
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Svolgimento
modo 1, scelgo due punti distinti sulla retta e riduco al punto precedente
modo 2, sia $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
considero il piano $P = q + tv + s\overrightarrow{Oq}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$
$3(x_1 - 1) - (x_3 - 3) = 0$
$3x_1 - x_3 = 0$
Fascio di piani di asse una retta r è l'insieme dei piani che contengono r

$$r = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \end{cases} .$$

Equazione del fascio

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ogni piano del fascio si ottiene con una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Coppie proporzioneali per un fattore non nulla invidiano lo stesso piano

Lezione 4 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-16

1 Formula di Grassmann affine

Richiami dalla scorsa lezione
Dati $\Sigma_i = p_i + W_i, \quad i = 1, 2$ sottospazi affini (di $(A, V, +)$) allora:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2.$$
$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1 p_2} >).$$

Inoltre Σ_1, Σ_2 si dicono:
incidenti se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
paralleli se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$
sghembi se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Proposizione 1 (Fromula Grassmann per spazi affini)
Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di A, Allora

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq dim\Sigma_1 + dim\Sigma_2 - dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

e vale l'uguaglianza se Σ_1, Σ_2 sono incidenti o sghembi
si usa la notazione $dim(\emptyset) = -1$

Dimostrazione
- Supponiamo Σ_1, Σ_2 incidenti, allora esiste

$$p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$
$$\Sigma_1 = p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2$$
$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale
- Sia ora $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ allora $\Sigma_i = p_i + W_i \quad i = 1, 2$
risulta $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin W_1 + W_2$ (per lemma)

$$dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) = dim(W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1 p_2}) = dim(W_1 + W_2) + 1 \leq$$
$$\leq dim(W_1) + dim(W_2) - (-1) = dim(W_1) + dim(W_2) + dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $dim(W_1) + dim(W_2) = dim(W_1 + W_2)$ ovvero $W_1 \cap W_2 = 0$ ovvero se Σ_1, Σ_2 sono sghembi $\square$ $\square$

Proposizione 2
siano Σ_1, Σ_2 *sottospazi affini di* $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ *definiti dai sistemi lineari*

$$A_i X = b_i \ i = 1, 2.$$

Allora:
(a) Σ_1, Σ_2 *sono incidenti se e solo se*

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) = rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

detto r *tale rango,* $dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$
(b) Σ_1, Σ_2 *sono sghembi se e solo se*

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n.$$

(c) Se

$$rk\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) \geq rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = r < n.$$

allora Σ_1 *(rispetto a* Σ_2*) contiene un sottospazio affine di dimensione* $n - r$ *parallelo a* Σ_2 *(rispetto a* Σ_1*)*

Dimostrazione
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli*

(b) la disuguaglianza tra i ranghi dice che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$*;*
il fatto che $rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n$ *implica che* $W_1 \cap W_2 = 0$
(c) Di nuovo la disuguaglianza dei ranghi implica $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$*;*
Se ora $W_1 \cap W_2 = W$ *allora* $dim(W_1 \cap W_2) = n - r$
Scelto $p_1 \in \Sigma_1$ *risulta*
$p_1 + W \subset \Sigma_1$ *(*$W_1 \cap W_2 = W$ *sottospazio di* W_1*)*
e $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$ *è parallelo a* Σ_2 *e* $dim(p_1 + W) = dim(W) = n - r$ $\square$ $\square$

Esempio
$\mathbb{A}$ π_1, π_2 *piani distinti*
A_1, A_2 *vettori riga* $(A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$
$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$
piani distinti $\Rightarrow$ $rk(C) = 2$
$rg\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 2 \ \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2$ *è una retta*
$rg\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 1 \ \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ *piani paralleli poiché* $W_1 = W_2$

$\mathbb{A}^4, \pi_1 \pi_2$ piani distinti tali che $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \in M_{45} \quad rk(C) \leq 4.$$

rk $\binom{A_1}{A_2}$	rk(C)	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	{p}
3	4	$\emptyset$ e W_1, W_2 hanno una direzione in comune
3	3	r
2	3	$\emptyset$

Lezione 5 Geometria I
ebbene sì, sta accadendo davvero

Federico De Sisti

2024-03-17

V, V' spazi vettoriali su $\mathbb{K}, (A, V, +), (A', V', +)$ spazi affini

Definizione 1
$f : A \to A'$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che:

$$f(p+v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left(\textit{ovvero} \quad \begin{array}{ll} f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

Nomenclatura
Se f è biunivoca, f è detto isomorfismo affine
Un isomorfismo affine $A \to A$ è detto affinità. **Oss**
vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come $\text{Aff}(A)$

Esempio
$Ov_1 ... vn$ rifermento affine in A

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Dico che f è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare
$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$
Verifichiamo che $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$
$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ . \\ . \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$
$\varphi(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

3 Esempi di affinità

I Transazioni
Fissato $v \in V$ definiamo
$t_v : A \to A, \quad t_v(P) = p + v$ Dico che t_v è un'affinità con assoviato isomorfismo Id_V dato che:
$t_V(p+w) = (p+w) + v = p + (w+v) = p + (v+w) = (p+v) + w =$
$= t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V$
la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto
$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$
Dico che σ_C è un'affinità con parte lineare $\varphi = -Id$
$\sigma_C(p+v) = c - \overrightarrow{CQ} \quad Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$
$\sigma_C(p) + \phi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$
III Otetia di centro O e fattore $\gamma \in R \backslash \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma \overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare $\phi = \gamma Id_V$
$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O+\gamma\overrightarrow{OQ} = O+\gamma(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = (O+\gamma\overrightarrow{OP})+\gamma\overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) = \varphi(v)$

Lemma 1
Fissato $O \in \mathbb{A}$, per ogni $O' \in \mathbb{A}$ e per ogni $\varphi \in GL(V)$ esiste un'unica affinità tale che $f(O) = O'$ e che ha φ come isomorfismo associato

Dimostrazione
esistenza
Pongo $f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + O = O'$
$f(p+v) = O'+\varphi(\overrightarrow{OQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP})+\varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p)+\varphi(v)$
dove abbiamo usato $Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$
unicità
Supponiamo che g abbia le stesse proprietà di f, allora
$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$
$\Rightarrow f = g$ $\square$ $\square$

Definizione 2
Definiamo $Aff_O(A) = \{f \in Aff(A) | f(O) = O\} \leq Aff(A)$
tale gruppo è anche isomorfo a $GL(V)$

Lemma 2
Sia $O \in A, f \in Aff(A)$ Esistono $v, v' \in V$ e $g \in Aff_O(A)$, univocamente determinate da f tale che

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

Dimostrazione

poniamo $v = -\overrightarrow{Of^{-1}}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v'}, \quad g' = t_{-v} \circ f$
Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_v) = f.$$

quindi vale $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che $g = g'$, per cui ho dimostrato anche $f = t_{v'} \circ g$

$$g(O) = (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) =$$
$$= f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0$$

$$g'(O) = t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0.$$

d'altra parte g, g' hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi O in O, dunque coincidono $\square$ **Descrizione in coordinate delle affinità di $\mathbb{A}^n$**

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$b = f(O) \quad \varphi = L_A \qquad \begin{aligned} L_A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ X &\to AX \end{aligned}$$

con $det(A) \neq 0$ ovviamente
Viceversa, per $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$ è un'affinità con parte lineare L_A

$$f_{A,b}(x + v) = f_{A,b}(x) + \varphi(v)$$
$$f_{A,b}(x + y)) = f_{A,b}(x) + L_A y$$

$$f_{A,b}(x+y) = A(x+y)+b = AX + AY + b = (AX + b) + AY = f_{A,b}(x) + L_A(y).$$

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n = \{f_{A,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

Osservazione
Aff $\mathbb{A}^n$ è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX + d) = \\ &= A(CX + d) + b = \\ &= ACX + Ad + b = f_{AC,Ad+b}(x) \end{aligned}$$

Osservo che $f_{I,O}$ è l'elemento neutro

$$(f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) = f_{A,b}(Ix + O) = f_{A,b}(x)$$
$$(f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) = f_{A,b}(x)$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di $f_{A,b}$,
ovvero che esiste $f_{C,d}$ tale che $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d}(x) = f_{I,O}(x) = x \\ ACX + Ad + b + X \quad \ \forall \ X \in \mathbb{K}^n \\ \Rightarrow AC = Id \ \ Ad + b = 0 \\ C = A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\ (f_{A,b})^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}b} \end{aligned}$$

Lezione 6 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-13

1 Equivalenza per affinità

Definizione 1
Equivalenza per affinità Due sottoinsiemi $F, F' \subseteq A$ spazio affine, si dicono affinamente equivalenti se esiste $f \in Aff(A)$ tale che $f(F) = F'$
Definiamo anche una proprietà ***affine*** *se è equivalente per affinità*

Proposizione 1
Se $f \in Aff\,(A)$ e F un sottospazio affine di A di dimensione k, allora $f(F)$ è un sottospazio affine di dimensione k

Dimostrazione
$F = p + W \quad dim(W) = k$ *Sia φ la parte lineare di f, che è un omomorfismo $\varphi : V \to V$.*
Poniamo $F' = f(p) + W'$ dove $W' = \varphi(W)$
Chiaramente, $dim(W') = dim(\varphi(W)) = k$
risulta $f(F) = F'$

$$Q \in F \qquad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che $\overrightarrow{PQ} \in W \ \Rightarrow f(F) \subseteq F'$ Viceversa, dato $R \in F$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^{-}1(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque F'$\subseteq f(F)$ $\square$

Teorema 1
Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e siano $\{p_0, \ldots, p_n\}$, $\{a_0, \ldots, a_n\}$ due $(n+1)$-ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità $f \in Aff(A)$ tale che $f(p_i) = q_i, \quad 0 \le i \le n$

Dimostrazione
Per ipotesi $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ Sono basi di V, dunque esiste un unico operatore lineare $\varphi \in GL(V)$ tale che $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = \overrightarrow{q_0q_i}) \quad 1 \le i \le n$
Pongo $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$
$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$
f è chiaramente biettiva $\overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) =$
$= \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(pp')$
L'unicità di f segue da quella di φ e dal fatto che $f(p_0) = q_0$ (un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto. $\square$

Esempio
Determino $f \in Aff(\mathbb{A}^2)$ *t.c.*

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\{\overrightarrow{p_0p_1},\overrightarrow{p_0p_2}\}\to\{\overrightarrow{q_0q_1},\overrightarrow{q_0q_2}\}$$

Cercherò quindi $\varphi \in GL(V)$ *tale che*

$$\varphi(\overrightarrow{p_0p_1})=\overrightarrow{q_0q_1},\varphi(\overrightarrow{p_0p_2})=\overrightarrow{q_0q_2}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad \varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$
$$P=\{\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\}\quad \varepsilon\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$
$$[\varphi]_B^\varepsilon=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-3\end{pmatrix}\qquad [Id]_B^\varepsilon=\begin{pmatrix}-3&-2\\-2&0\end{pmatrix}$$
$$[\varphi]_\varepsilon^\varepsilon=[\varphi]_B^\varepsilon[Id]_\varepsilon^B=[\varphi]_B^\varepsilon[Id]_B^{\varepsilon\,-1}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-2\\x_2-1\end{pmatrix}$$
$$f(p)=q_0+\varphi(\overrightarrow{p_0p})$$
$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(t_V\circ L_A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\quad v=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

Corollario
$(A,V,+)$ *spazio affine di dimensione* n
1. per ogni $1\le k\le n+1$ *due qualsiasi* k*-uple di punti sono affinamente equivalenti*
2. Due sottospazi affini sono affinamente equivalenti se e solo se hanno al stessa dimensione

Dimostrazione
1. Se $\{p_0,\dots,p_{k-1}\},\{q_0,\dots,q_{k-1}\}$ *sono le* k*-ple date, completiamole a* $(n+1)$*-ple di punti indipendenti* $\{p_0,\dots,p_n\},\{q_0,\dots,q_n\}$ *e usiamo il teorema 2. Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi.*
Viceversa, se S,S' *sono sottospazi affini della stessa dimensione* k*, possiamo trovare* $k+1$ *punti indipendenti in* S*, e* $k+1$ *punti indipendenti in* S' *tali che*

$$S=\overrightarrow{p_0,\dots,p_k},\quad S'=\overrightarrow{q_0,\dots,q_n}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda P_i *in* q_i*,* $0\le i\le k$*, dunque*

$$f(S)=S'.$$

$\square$

2 Proiezioni e Simmetrie

Definizione 2 (Proiezioni e Simmetrie)
In $(A, V, +)$ *Sia* L *un sottospazio affine,* $L = P + W$
Sia U *un complementare di* W *in* V*, ovvero* $V = W \bigoplus U$

$$
\begin{array}{rl}
\pi_W^U(w+u) = w & \pi_W^U : V \to V \\
\sigma_W^U(w+u) = w - u & \sigma_W^U : V \to V \\
p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{proiezione su } L \textit{ parallela a } U \\
s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{simmetria di asse } L \textit{ e direzione } U
\end{array}
$$

Lezione 7 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-14

1 Esercizi Vari

Piccola definizione per esercizio
$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{f_{a,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}$

$$f_{A,b}(X) = AX + b$$
$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

Esercizio 1

$f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$
$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_1) = e_1 + e_3, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2$
e chiamiamo
$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dove φ è la parte lineare di f.
Trovare l'espressione di f in coordinate affini canoniche
e trovare i punti fissi di f.
Svolgimento

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}$$
$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la stessa base standard di $\mathbb{R}^3$

$$[\varphi]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2-1 \\ -x_2+x_3+1 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix}$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che $F(p) = f(p_0) + \varphi(\overrightarrow{p_0p}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$
Cerchiamo ora i punti fissi

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2
Dimostrare che un'affinità di piano affine che ha tre punti fissi non allineati è l'identità
Svolgimento
Osservo che in un piano affine tre punti p_0, p_1, p_2 sono non allineati se e solo se $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}$ sono linearmente indipendenti, ovvero p_0, p_1, p_2 sono affinamente indipendenti. D'altra parte, un'affinità è univocamente determinatta dall'immagine di tre punti indipendenti. L'identità è un'affinità con (almeno) tre punti fissi. Per l'unicità si ha $f = Id$.

Esercizio 3
In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ consideriamo la retta $r : x + y = 1$
i. Determinare le affinità che fissano tutti i punti di r
ii. Tra le affinità determinate in (i), trovare quelle che mandano $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ in $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$
iii. Tra le affinità determinate in i, trovare le traslazioni
Svolgimento

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Basta scegliere $f(p) = p$ per due punti distinti $p \in r$. Posso scegliere $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} a + \alpha = 1 \\ c + \beta = 0 \\ d + \alpha = 0 \\ d + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - \alpha \\ b = -\alpha \\ c = -\beta \\ d = 1 - \beta \end{cases} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta = 1-\alpha-\beta \neq 0 \quad \alpha+\beta \neq 1$

ii $\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ -\beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1--3\alpha+\alpha = 2 \\ -\beta+3-3\beta+\beta = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\alpha = 1 \\ -3\beta = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases}$

iii $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta & 1-\beta \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -\beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

e quindi l'unica traslazione è l'identità

Nota

$$f_{A,b} = AX + b \quad f_{A,b} \circ f_{C,b} = f_{AC,Ad+b}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}) \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline d & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline Ad+b & AC \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 + a_{11}d_1 + a_{12}d_2 & a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ b_2 + a_{21}d_1 + a_{22}d_2 & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{22} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{array}\right)$$

Esercizio 4

In $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}} \quad L: \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad W = < \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} >$

Scrivere le matrici delle proiezioni su L parallela a W e la matrice della simmetria di asse L e direzione W

Svolgimento

$L = P + W_1 \quad V = W_1 \oplus W_2$

$p_L^{W_2}(X) = P + \pi_L^{W_2}(\overrightarrow{px})$ Cerco ora l'equazione parametrica di L

$s_L^{W_2}(X) = P + \sigma_L^{W_2}(\overrightarrow{px})$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = t \\ x_4 s \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V + W : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qui il professore utilizza la sacra formula di Antani per giungere al seguente risultato

$\gamma = -2 + x_1 - 2x_3$

$\delta = -2 + 2x_2 + x_4 \quad p_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & - & -2 \end{array}$$

$s_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Lezione 8 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-18

1 Complementi

$\mathbb{A}$ spazio affine reale con associato spazio vettoriale V

Definizione 1 (Semiretta)
Possiamo definire la semiretta di origine $Q \in \mathbb{A}$ e direzione $v \in V \setminus \{0\}$

$$P = Q + tv, t \geq 0 \quad (\overrightarrow{QP} = tv, t \geq 0).$$

Definizione 2 (Segmento)
Possiamo definire il segmento di estremi $A, B \in \mathbb{A}$ $(A \neq B)$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

i punti $p_1, \ldots, p_t$ che dividono il segmento AB in t parti uguali sono dati, cioè

$$\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_2 p_3} = \ldots = \overrightarrow{p_{t-1} B}.$$

sono dati da

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{i}{t}\overrightarrow{AB} \quad 1 \leq i \leq t-1.$$

In un riferimento affine $Oe_1 \ldots, e_n$, in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i - a_1 \\ \vdots \\ x_n^i - a_n \end{pmatrix} = \frac{i}{t} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n = a_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} ib_1 (t-i) a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

in particolare, il punto medio del segmento AB ha coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

A, B, C non allineati

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

se $t, n \geq 0$ e $t + n \leq 1$ allora abbiamo un triangolo ABC
se $0 \leq t, n \leq 1$ abbiamo il parallelogramma individuato da A, B, C

Osservazione
Questo procedimento funziona in ogni dimensione, Ad esempio se A,B,C,D sono quattro punti indipendenti

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}.$$

se $0 \leq, t, n, v \leq 1$ tetraedro di vertici ABCD
se $n, t, v \geq 0$ e $n + t + v \leq 1$ si ha un parallelogramma
in generale dati $p_0, \dots, p_k$ punti indipendenti:

$$\overrightarrow{p_0 p} = \sum_{i=1}^{k} t_i p_0 p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1.$$

definisce il **k-simplesso di vertici** $p_0, \dots, p_k$

Definizione 3 (Sottosineime Convesso)
$S \subseteq \mathbb{A}$ si dice Convesso se per ogni $A, B \in S$ il segmento AB è contenuto in S

2 Cambiamenti di riferimento affine

Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine n-dimensionale

$$R = Ee_1, \dots, e_n; \qquad R' = Ff_1, \dots, f_n \quad \text{due riferimenti affini.}$$

$$\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$\overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \overrightarrow{FE} = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \quad \overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i.$$

$$A = (e_{ij}) = {}_{\varepsilon}(Id_V)_{\Gamma}.$$

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EP} = -\sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{1}$$

$$\overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1, j=1}^{n} y_i a_{ij} - e_i \tag{2}$$

Comparando $(1), (2)$ troviamo

$$X = AY + b.$$

$$\left(\frac{1}{X}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \left(\frac{1}{Y}\right).$$

$$Y = A^{-1}X - A^{-1}b.$$

3 Esercizi

Trovare l'affinità $F : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che

$$f\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \quad f(r) = r', \quad f(s) = s.$$

dove $r : x = 0, \quad s : 2x - y = 0 \quad r' : x - 2y = 1$

---

f è del tipo $f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}e & b\\c & d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{smallmatrix}\right)$ con $ad + bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{1}{f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1\\x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right).$$

Imponiamo le condizioni del testo

$$f\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \to \begin{cases} a + \alpha_1 + 3b = 1 \\ \alpha_2 + c + 3d = 1 \end{cases}.$$

Un punto in $r(x_1 = 0)$ è del tipo $\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right) \in r \quad \forall t \in$

$$\left(\begin{smallmatrix}1+bt\\\alpha_2+dt\end{smallmatrix}\right) \in v'.$$

$$x_1 - 2x_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + bt - 2)\alpha_2 + dt) = 1 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1.$$

$$b - 2d = 0.$$

Sicuramente il punto di S ha coordinate

$$\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right), \quad \text{e imponiamo} \quad f\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right) \in s$$

$$f\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1+at+2bt\\\alpha_2+ct+2dt\end{smallmatrix}\right)$$

$$2(\alpha_1 + at + 2bt) = \alpha_2 + ct + 2dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - alpha_2 = 0 \\ 2a + 4b - c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3} \quad b = \frac{2}{3} = c \quad d = \frac{1}{3} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{3} \quad \alpha_2 = -\frac{2}{3}$$

$$f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\\-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}c_2\end{smallmatrix}\right)$$

$$\pi_1 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + < \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) > \quad \pi_2 : \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + < \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) > .$$

Dire se sono incidenti, paralleli o sghembi

$$\pi_1 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$
Dalle equazioni cartesiane è chiaro che $pi_1 \cap pi_2 = \emptyset$, quindi $\pi_1\pi_2$ non sono incidenti la giacitura di π_1, π_2 sono $W_1 = e_1 + e_2, \quad W_2 = e_1 + e_2$
dunque **APPUNTI DA RECUPERARE**

$$\begin{aligned} f : A &\to A \\ R_1 \quad &R_1' \\ R_2 \quad &R_2' \end{aligned}$$

$$[f]_{R_1}^{R_1'} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right).$$

$$[f]'^{R_2}_{R_2} = [Id]^{R_2}_{R_1'}[f]^{R_1'}_{R_1}[Id]^{R_1}_{R_2}.$$

Troviamo l'affinità che manda ordinatamente A, B, C in A', B', C' ove

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad B = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ a \end{smallmatrix}\right) \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

$$A \;\; = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad B' \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \quad C' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

$R_1 = \{A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}\}$ è un riferimento affine
$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}\}$ è un riferimento affine

$$[F]^{R_2}_{R_1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$f(\overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{B'C'}.$$

$$R = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

$$[f]^R_R = [Id]^R_{R_2}[f]^{R_2}_{R_1}[Id]^{R_1}_R.$$

$$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \{\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}\}.$$

Quindi la matrice del cambio di base da R a R_2 è

$$[Id]^R_{R_2} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Analogamente si fa con $R_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}\}$

---

4 Forme Bilineari e Simmetriche

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Definizione 4
*Una funzione $g : VxV \to \mathbb{K}$ Si dice **Forma bilineare** se è lineare in ciascuna variabile fissata l'altra*

in altre parole:

$$g(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha g(v_1, v_3) + \beta g(v_2, v_3) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Definizione 5
*g si dice **simmetrica** se*

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esempio
Sia A una atrice quadrata nxn

$$\textit{Allora} \quad g_A(x, y) = X^t AY.$$

è una forma bilineare su K^n
Esempio
g_A è bilineare con

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right) \right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 x_2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{smallmatrix} \right) = x_1(2y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + ey_2) =$$
$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Osservazione
g_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica

Esempio (Importante)
in $\mathbb{K}^n$ prendiamo $A = I_n$

$$g_{I_m}(X, Y) = X^t Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se g è una forma bilineare simmetrica su V e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, definisco la matrice di g rispetto a B come

$$[g]_B \to a_{ij} = g(v_i, v_j) \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

$$g(v, w) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i g(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i a_{ij} = X^t AY.$$

Ricorda: X^t è la matrice trasposta di X

5 Prodotto Scalare

V spazio vettoriale Reale

Definizione 6 (Prodotto Scalare)
Un prodotto scalare su V *è una forma bilineare simmetrica*
$<,>: V \bigtimes V \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$< v, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$$
$$< v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Nomenclatura 1. $1.v, w \in V$ *si dicono* ***ortogonali*** *se*

$$< v, w >= 0.$$

2. $||v|| = \sqrt{< v, v >}$ *è la norma di* v
3. *In* $\mathbb{R}^n$, $< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *è detto* ***prodotto scalare standard***

$$|| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} || = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Proposizione 1 (Disuguaglianza di Schwarz)

$$v, w \in V \qquad < v, w >^2 \leq < v, V >< w, w > .$$

e vale l'uguaglianza se e solo se v,w sono dipendenti

Dimostrazione
Se w=0 la disuguaglianza è ovvia, quindi possiamo assumere $w \neq 0$. *Per* $v, w, a, b \in$

$$0 \leq < av + bw, av + bw > = a < v, av + bw > + b < w, av + bw > =$$
$$= a(a < v, v > + b < v, w >) + b(a < w, v > + b < w, w >)i =$$
$$= a^2 < v, v > + 2ab < v, w > + b^2 < w, w >$$

Dove abbiamo utilizzato la simmetria del prodotto scalare $< v, w > = < w, v >$
Notiamo che vale l'uguaglianza solo se $av + bw = 0$*, cioè* v, w *sono paralleli.*
La relazione

$$a^2 < v, v > + 2ab < v, w > + b^2 < w, w > \geq 0.$$

vale per ogni scelta di a, b*.*
Prendo $a = < w, w >$ *e* $b = - < v, w >$

$$0 \leq < w, w >^2 < v, v > -2 < w, w > < v, w >^2 + < v, w >^2 < w, w > .$$

Poiché $W \neq 0$, $< w, w > > 0$ *quindi posso dividere la relazione precedente per* $< w, w >$*, per altro senza cambiare verso dato che il prodotto scalare è definito positivo*

$$0 \leq < w, w > < v, w > - < v, w >^2 .$$

ovvero

$$< v, w >^2 \leq < v, v > < w, w > .$$

$\square$

Osservazione
$| < v, w > | \leq ||v|| ||w||$
Proprietà della lunghezza
1. $\forall v \in V \quad ||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v|| \quad \forall \alpha \in, \quad \forall v \in V$
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V$

Lezione 9 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-20

1 Rimembranze dalla scorsa lezione

V spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione bilineare simetirca $< \cdot\ ,\ \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

$$< v, v > \geq 0 \quad \forall v.$$

$$< v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2 Nuova effettiva lezione

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

Lemma 1

$$1.\ \ ||v|| \geq 0 \ \ e \ \ ||v|| = 0 \ \ se\ e\ solo\ se \ \ v = 0..$$

$$2.\ \ ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v|| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$$

$$3.\ \ ||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V.$$

Dimostrazione

1. segue dalla definizione

2. $||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = |\alpha| \cdot ||v||$

3. $||v + w||^2 =< v + w, v + w >=$

$=< v, v > + < w, v > + < v, w > + < w, w >=$

$= ||v||^2 + 2 < v, w > +||w||^2 \leq ||v||^2 + 2||v||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$

Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi $\square$

Nomenclatura 1

$\cdot v, w' \in V$ *si dicono ortogonali se* $< v, v' >= 0$

$\cdot$ *Un insieme* S *di vettori è detto ortogonale se*

$$0 \in S \ \ e \ \ < s_1, s_2 >= 0 \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

$\cdot$ *Una base di* V *si dice ortogonale se è un insieme ortogonale* $\cdot$ *Una base* $\{vi\}_{i \in I}$ *si dice ortonormale se* $< v_i, v_j >= \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Definizione 1 (Versore)

Sia $v \in V$ *tale che* $||v|| = 1$ *allora* v *è un versore*

Oss

Dat $u \neq 0$, $\frac{u}{||u||}$ è un versore

$$\left|\left| \frac{u}{||u||} \right|\right| = \frac{1}{||u||} \cdot ||u|| = 1.$$

Proposizione 1
Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un insieme ortogonale allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti. In particolare se $dim(V) = n$, un insieme ortogonale di n vettori è una base

Dimostrazione
Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k = 0$
$< \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k, v_i >=< 0, v_i >= 0$
$= \alpha_1 < v_1, v_i > + \ldots + \alpha_k < v_k, v_i >$
$= \alpha_i < v_i, v_i >$
Dato che $< v_i, v_i >> 0$ *poiché* $v_i \neq 0$ *per ipotesi, dunque* $\alpha_i = 0$,
dato che posso scegliere qualunque v_i □

Osservazioni
1. La base standard di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
2. Sia $g =<, >$ un prodotto scalare su V, Se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base g-ortonormale allora $[g]_B = Id_n$ ovvero $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$
Inoltre, se $X = [v]_B, \quad Y = [Id]_B$
$g(v, w) = X^t[g]_B Y = X^t Y$ (sempre con B ortonormale)

Proposizione 2
Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale, per ogni $v \in V$ risulta

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i.$$

Dimostrazione
(1) *Sia* $\quad v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

$$< v, v_i >=< \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_i >= \sum_{j=1}^{n} a_j < v_j, v_i >= \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1) a_j *con* $< v, v_j >$ □

Nomenclatura 2
Dato $v \neq 0$ viene detto coefficiente di Fourier di $w \in V$ risptto a v

$$a_v(w) = \frac{< v, w >}{< v, v >}.$$

Nota
In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di w rispetto a v (moltiplicato quindi per il versore di v otteniamo il vettore della proiezione)
Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.
$$< w - a_v(w)v, v >=< w - \frac{< v, w >}{< v, v >} v, v >=< w, v > - \frac{< v, w >}{\cancel{< v, v >}} \cdot \cancel{< v, v >}$$

3 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Lemma 2
Sia $v_1, v_2, \ldots$ una successione di vettori in V spazio vettoriale euclideo. Allora:
1. Esiste una successione $w_1, w_2, \ldots$ in V tale che per ogni $k \geq 1$

$$a) \quad < v_1, \ldots, v_K >=< w_1, \ldots, w_k > .$$

$$b) \quad < w_i, w_j >= 0 \ \mathit{se}\ i \neq j.$$

2. Se $u_1, u_2, \ldots$ è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Dimostrazione
Costruiamo i w_i per induzione su k.
Base $k = 1$

$$v_1 \to w_1 = v_1 \ \mathit{verifica}\ a, b.$$

Supponiamo per induzione di aver costruito $w_1, \ldots w_t$, $\ t > 1$ verificanti a e b e costruiamo w_{t+1}

$$\o w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^{t} a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

per induzione $v_i \in < w_1, \ldots, w_t > \subseteq < w_1, \ldots, w_{t+1} > \quad 1 \leq i \leq t$
dunque

$$< v_1, \ldots, v_{t+1} > \ \subseteq \ < w_1, \ldots, w_{t+1} > .$$

D'altra parte $w_{t+1} \in < w_{1,t}, v_{t+1} >=< v_1, \ldots, v_{t+1} >$ perché per induzione $w_i \in < v_1, \ldots, v_t > \quad 1 \leq i \leq t$
Quindi $< w_1, \ldots, w_{t+1} > \ \subseteq \ < v_1, \ldots, v_{t+1} >$ e quindi le proprietà a è verificata.
Verifichiamo ora b, sia $w_i \neq 0$

$$< w_{t+1}, w_i >=< v_{t+1} - \sum_{j=1}^{t} a_{w_j}(v_{t+1}) w_j, w_i >=$$

$$=< v_{t+1}, w_i > - a_{w_j} < (v_{t+1}) w_j, w_j >=$$

$$=< v_{t+1}, w_i > - \frac{< v_{t+1}, w_i >}{\cancel{< w_i, w_i >}} \cancel{< w_i, w_i >} = 0$$

2. Di nuovo procedo per induzione su k, con base ovvia $k = 1$
Supponiamo $t > 1$ e apponiamo che esistano $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ con $u_k = \delta_k w_k$ per ogni $k \leq t$. per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \qquad z \in < w_1, \ldots, w_t > = < u_1, \ldots, u_t > .$$

D'altra parte, $< u_{t+1}, z > = < w_{t+1}, z > == 0$
Quindi $< u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w > = 0$ ovvero $< z, z >$
$\Rightarrow z = 0$ e $u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$ $\square$

Lezione 10 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Utilizzo del procedimento di Gram Schmidt

$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, V spazio euclideo
$w_1 = v_1$

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1, w_i \neq 0}^{t} \frac{< v_{t+1}, w_i >}{< w_i, w_i >} w_i$$

$< w_1, \ldots, w_n > = < v_1, , v_n >$ e i w_i sono a due a due ortogonali

---

Esercizio 1
Applicare il procedimento di $G.S$ ai vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere le corrispondente base ortonormale
Svolgimento
$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >} - \frac{< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il procedimento è analogo e banale per w_4.
I vettori della alla fine dello svolgimento sono:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vanno solo normalizzare (fatto dal professore ma non da me)

Eserczio 2
Ortogonalizzare la base standard di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare

$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + y_4x_3 + 2x_4y_4.$

ε base standard i $\mathbb{R}^4$

$$\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento
Notare come a_{ij} sia il coefficiente di x_iy_j
$\mathrm{w}_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 - \frac{v_2^t A w_1}{w_1^t A w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 2&1&0&0 \\ 1&2&0&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 2&1&0&0 \\ 1&2&0&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il procedimento continua, ma non è niente di che.

Foglio 2
Esercizio 2

$$p_1, \ldots, p_n \in A, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

Dimostrare che dato qualunque $q \in A$

$$p = q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{op_i}.$$

non dipende da q
$\sum_{i=1}^{n} c_i p_i$ combinazione baricentrica dei punti p_i con coefficienti c_i
Dobbiamo dimostrare che se $q' \in A$

$$q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{q'p_i}.$$

q = q' + $\overrightarrow{q'q}$
$q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \overrightarrow{q'q} + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{something}$

non sono riuscito a finire l'esericizo in tempo pene pene pene TODO

Punto b dell'esercizio 3
$f : A \to A', \varphi : V \to V'$ parte lineare
Devo vedere che $f(\sum_{i=1}^n c_i p_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i) \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1$

$f(p_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{p_0 p_i}) = f(p_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(\overrightarrow{p_0 pi}) =$

$= f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i f(p_i)$

$= (1 - \sum_{i=1}^{n} c_i) f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)}$

Dove nell'ultimo passaggio si spezza la somma
Viceversa supponiamo che $f : A \to A'$ rispetti le combinazioni baricentriche; verifichiamo che $\varphi : V \to V'$

$$p_0 \in A \quad \varphi(v) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v)}.$$

è lineare
$v_1, v_2 \in V \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \;\; p_1 = p_0 + v_1 \;\; p_2 = p_0 + v_2$
$v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1} \quad v_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$
$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} =$
$\overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \alpha_2 \overrightarrow{p_1 p_2}} =$
$\overrightarrow{f(p_0) f(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2} =$
$= \alpha_0 \overrightarrow{f(p_0) f(p_0)} + \alpha_1 \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{f(p_0) f(p_2)} = \alpha_2 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$

infatti $f(p_1) = f(p_0 + v_1), \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v_1)} = \varphi(v_1)$

Lezione 11 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Varie robe su basi ortonormali

Proposizione 1
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base ortonormale dello spazio euclideo* V*, la base* $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *è ortonormale se e solo se* $M = [Id_V]_L^B$ *è ortogonale* $(MM^t = Id_v)$

Dimostrazione
Sia $M = (m_{ij})$ *per definizione di* M $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \quad 1 \le i \le n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n m_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj} v_h \rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki} m_{kj} \langle v_k, v_h \rangle = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (M^t M)_{i,j}.$$

$\square$ **Osservazione**
Sia $V = \mathbb{R}[x]$ $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$ è un prodotto scalare

Definizione 1 (Angolo non orientato tra vettori)
$|\langle v, w \rangle| \le ||v|| ||w|| \Rightarrow -1 \le \frac{\langle v,w \rangle}{||v|| ||w||} \le 1 \qquad (v, w \ne 0)$
allora
$\exists! \in [0, \pi] : \cos = \frac{\langle v,w \rangle}{||v|| ||w||}$
è detto angolo non orientato tra v, w

Definizione 2
Sia $S \subseteq V$ *con* V *spazio euclideo,* $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Osservazione
$S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.
Siano $v_1, v_2 \in S^\perp$ e $\alpha_{1,2} \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

Proposizione 2
Sia V uno spazio vettoriale euclideo e W un sottospazio di V allora

$$V = W + W^{\perp}$$

Dimostrazione
Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortogonale di W
consideriamo $\pi : V \to W$ con $\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$, dobbiamo mostrare che $V = W + W^{\perp}$ e che $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ ma la seconda è ovvia poiché se $w \in W \cap W^t$ è ortogonale a se stesso $\Rightarrow \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$
Osserviamo inoltre che se $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ la richiesta è dunque $v - \pi(v) \in W^{\perp}$. Basta verificare che $\langle v - \pi(v), w_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\cancel{\langle w_j, w_j \rangle}} \cancel{\langle w_j, w_j \rangle} = 0.$$

□ **Osservazione**

1- Se V è spazio euclideo e W è sottospazio di V,
$(W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ è uno spazio euclideo
2- Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è base ortogonale di W risulta:
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h||$
e vale l'uguaglianza se se solo se $a_h = \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle}$

Dimostrazione (Punto 2)
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_k|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h||;$
$||v - w||^2 = \langle v - u, v - u \rangle =$
$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u \rangle = \langle v - w, v - w \rangle + \langle w - u, w - u \rangle \geq ||v - w||^2$
□ La lezione prosegue con lo svolgimento di alcuni esercizi

2 Prodotto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo per cui $dim(V) = 3$ sia $\{v, j, k\}$ una base ortonormale di V

Definizione 3 (Prodotto vettoriale)
Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ pongo $v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

B_1, B_2 si dicono concordemente orientate se $det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$, questa è inoltre una relazione di equivalenza.
Di fatti se $B_1 \sim B_2,\ B_2 \sim B_3 \ \ det([Id]_{B_1}^{B_3}) = det([Id]_{B_2}^{B_3}[Id]_{B_1}^{B_2}) =$
$= det([Id]_{B_2}^{B_3}) det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_2$

Lezione 12 Geometira

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Operatori Lineari Unitari

Sia V uno spazio vettoriale euclideo

Definizione 1
Un operatore lineare $T : V \to V$ *si dice unitario se*
$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V$

Proposizione 1
Sia V *spazio vettoriale euclideo* $n-$ *dimensionale e sia* $T : V \to V$ *un applicazione, TFAE (The Following Are Equivalent)*
1. T *è unitario*
2. T *è lineare e* $||T(w)|| = ||v|| \quad \forall v \in V$
3. $T(O) = O, ||T(v) - T(w)|| = ||v - w|| \quad \forall v, w \in V$
4. T *è lineare e manda basi ortonormali in basi ortonormali*
5. T *è lineare ed esiste una base* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *ortonormale di* V *tale che* $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ *è una base ortonormale*

Dimostrazione
$1 \Rightarrow 2.$ *Unitario* $\Rightarrow \langle T_(v), T(v)\rangle = ||T(v)||^2 = \langle v, v\rangle = ||v||^2$

$2 \Rightarrow 3$ T *lineare* $\Rightarrow T(O) = O \quad ||T(v) - T(w)|| = ||T(v - w)|| = ||v - w||$

$3 \Rightarrow 1 ||T(v)|| = ||T(v) - O|| = ||T(v) - T(O)|| = ||v - O|| = ||v||$
Esplicitiamo $||T(v) - T(w)||^2 = ||v - w||^2$
$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w)\rangle = \langle v - w, v - w\rangle$
$\Rightarrow \cancel{||T(v)||^2} - 2\langle T(v), T(w)\rangle + \cancel{||T(w)||^2} = \cancel{||v||^2} - 2\langle v, w\rangle + \cancel{||w||^2}$
Dunque $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$
Resta da vedere che T *è lineare.*
Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base ortonormale di* V *allora* $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ *è una base ortonormale per quanto dimostrato prima.*

$$\langle T(e_j), T(e_i)\rangle = \langle e_j, e_i\rangle = \delta_{ij}.$$

$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (\Rightarrow x_i = \langle v, e_i\rangle)$
$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v), T(e_i)\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_j)$
Dunque $T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$ *quindi* T *è lineare*

$1 \Rightarrow 4 \{e_1, \ldots, e_n\}$ *è una base ortonormale*

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

$4 \Rightarrow 5$ *Ovvio*

$5 \Rightarrow 1$ *Sia* $e_1, \ldots, e_n$ *la base ortonormale dell'enunciato. Considero* $u, v \in V$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(w)\rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, T(\sum_{j=1}^{n} y_i e_i)\rangle = \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_i T(e_i)\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \langle T(e_i), T(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle u, w\rangle\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \delta_{ij}$ □

$\alpha \in V\{0\} \quad S_\alpha = v - 2\dfrac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$ riflessione rispetto ad α^2

1. S_α è unitaria
2. $S_\alpha^2 = Id$
3. Esiste una base B di V tale che $(S_\alpha)_B = diag(1, \ldots, 1, -1)$

Dimostrazione

1. $\langle S_\alpha(v), S_\alpha(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

$\langle v - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha, w - 2\frac{\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\rangle =$

$\langle v, w\rangle - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle \alpha,w\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} + 4\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle\cancel{\langle \alpha,\alpha\rangle}}\cancel{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \langle v, w\rangle$

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp.$$

Quindi presa una base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ *di* $\alpha^\perp$,
$B = \{w_1, \ldots, w_{n-1}, \alpha\}$ *è una base di* V *e*
$S_\alpha(w_i) = w_i, i = 1, \ldots, n-1$

$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$

$$(S_\alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

In particolare $S_\alpha = Id$ *poiché* $M^2 = Id$ □

2 Osservazioni sugli operatori unitari

1. Se T è unitario, e $v \in Ker(T)$, allora

$$0 = ||T(v)|| = ||v|| \Rightarrow v = 0.$$

Dunque T è invertibile.
È facile vedere che se T_1, T_2 sono unitarie, lo è anche $T_1 T_2^{-1}$, quindi, posto

$$O(V) = \{T \in End(V) | T \text{ è unitario}\}.$$

$$O(V) \leq GL(V).$$

e $O(V)$ viene chiamato gruppo ortogonale di V.

2. Se fissiamo in V una base ortonormale B, e $T \in O(V), [T]_B^B$ è ortogonale. Infatti sia $A = [T]_B^B, \ B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Le colonne di A sono le coordinate di $T(e_i)$ rispetto a B, quindi T è unitario se e solo se

$$\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}.$$

dove A^i, A^j rappresentano la riga i-esima e j-esima della matrice A

3. Se $T \in O(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora $\lambda = \pm 1$
Se λ è autovalore, esiste $v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$

$$||v|| = ||T(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Poiché $v \neq 0, ||v|| \neq 0$ quindi $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

4. Se V è uno spazio euclideo di dimensione n, ogni $T \in O(V)$ è composizione di al più n riflessioni S_n

Dimostrazione
per induzione su n, con base ovvia $n = 1$.
Supponiamo il teorema valga per ogni spazio euclideo di dimensione $n - 1$ e dimostriamo per uno spazio euclideo di dimensione n. Sia $f \in O(V)$
Primo caso
f ha un punto fisso non nullo

$$v \in V, \quad v \neq 0, \quad f(v) = v.$$

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^{\perp}.$$

$W = v^{\perp}, \quad (W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ *è euclideo di dimensione* $n - 1$
$F|_W : W \to W$, *infatti, se* $u \in W$

$$\langle f(u), v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0.$$

Per induzione $f|_W = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n - 1$
e quindi $f = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n - 1$

Secondo caso
Sia $v \neq 0$ tale che $f(v) \neq v$. Allora

$$S_{f(v)-v}(f(v)) = v.$$

Infatti $S_{f(v)-v}(f(v)) = f(v) - 2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(f(v)-v)$
Ma $\qquad = f(w) = +2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(v-f(v))$
Ora $\langle f(v), f(v)-v\rangle = ||v||^2 - \langle f(v), v\rangle$
$\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle = 2||v||^2 - 2\langle f(v), v\rangle$.
Dunque $(S_{f(v)-v} \circ f)$ *ha un punto fisso. Per il primo caso* $S_{f(v)-v} \circ f = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r} \quad r \leq n-1$
Dunque $S_{f(v)-v} \circ S_{f(v)-v} \circ f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \ldots \circ S_{\alpha_r}$
$\Rightarrow f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}$
quindi f è composizione di al più n riflessioni $\square$

3 Spazi affini euclidei

Uno spazio affine euclideo è uno spazio affine $(E, V, +)$ dove V è uno spazio euclideo.
Si può definire una distanza tra punti di E

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||.$$

Un riferimento cartesiano per uno spazio affine euclideo è il dato $Oe_1 \ldots e_n$ di un punto e di una base ortonormale di V
In particolare se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 2
Due sottospazi affini si dicono ortogonali se le loro giaciture sono ortogonali

$$(\textit{cioè se } S = P + U, \quad T = Q + W, \langle u, w\rangle = 0 \quad \forall u \in U, \quad \forall w \in W).$$

Lezione 14 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-04

1 Precisazione

Siano S, T sottospazi affini in uno spazio euclideo δ di dimensione n. Diciamo che S, T sono ortogonali se, posto $S = p + U, \quad T = q + W, \quad p \in S, q \in T$
U, W sottospazi vettoriali di V,

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad \text{se } dim(S) + dim(T) < n.$$

$$\langle U^\perp, W^\perp \rangle = 0 \quad \text{se } dim(S) + dim(T) \geq n.$$

Esempi
1. Due rette r, s in $\mathbb{E}^3$ con vettori direttori v_s, v_r
COMPLETARE CON DISEGNI
2. retta e piano in $\mathbb{E}^3$
COMPLETARE CON DISEGNI
3. due piani in $\mathbb{E}^3$
COMPLETARE CON DISEGNI
sarò sincero, non si capisce un cazzo

2 Esercizi foglio 4

es 3

$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad r' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Posizione reciproca
La direzione di r è $\mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, quella di $r' = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
Essendo tali vettori indipendenti, le rette non sono parallele
$p' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \in r', \quad O \in r$
$\overrightarrow{Op'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$
quindi r, r' sono sghembi
$S = \pi \cap \pi' \quad \pi$ piano per r parallelo a $v \wedge v'$
π' piano per r' parallelo a $v \wedge v'$

$$v \wedge v' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v \wedge v' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right).$$

$$\pi : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right).$$

$$\pi' : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right).$$

trasformiamo in coordinate cartesiane
$\pi \rightarrow det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$

analogo per π'
es 4
proiezione ortogonale su π
simmetria ortogonale di asse π

$$\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0.$$

vettore normale a π $\quad P_0 \in \pi$
$p(P) = P_0 + \widetilde{p}(\overrightarrow{p_0 p})$
$\sigma(P) = P_0 + \widetilde{\sigma}(\overrightarrow{p_0 p})$
scelgo $p_0 \in \pi \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
W giacitura di $\pi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$
Dobbiamo decomporre $\overrightarrow{P_0 P}$ rispetto a $W \oplus W^\perp \quad W^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Questo poi è solo un sistema noioso da risolvere

$$p\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\text{ guarda le lavagnate, è un super vettore}).$$

sulle lavagnate trovi anche il risultato della simmetria ma non lo svoglimento
es 5

Lezione 15 Geometria

Federico De Sisti

2024-04-08

1 Definizioni su operatori

Definizione 1
$T \in End(V)$ è
· Simmetrico o Autoaggiunto se

$$T = T^t.$$

· Antisimmetrico se

$$T = -T^t.$$

Proposizione 1
T è unitario se e solo se $T^t \circ T = Id_V$

Definizione 2
Sia E uno spazio euclideo. Un'affinità $f : E \to E$ si dice Isometria se la sua parte lineare $\varphi : V \to V$ è un operatore unitario

Osservazione
Le isometrie formano un gruppo denotato con $Isom(E)$ (difatti, $Isom(E) \leq Aff(E)$)
Infatti la composizione di isometrie è un isometria.
se φ_1, φ_2 sono le parti lineari di $f_1, f_2 \in Isom(E)$
Per ipotesi $\varphi_1 \circ \varphi_1 = Id, \quad \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^t \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_2^t \circ \varphi_1^t \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id.$$

Inoltre, dalla definizione, l'inversa di un operatore unitario è unitario.
In effetti, ho dimostrato che

$$O(V) = \{f \in End(V) | f^t \circ f = Id\}.$$

è un gruppo, e un sottogruppo di $GL(V)$

Data $f \in Isom(E)$ diciamo che:
f è diretta se $det(\varphi) = 1$
f è inversa se $det(\varphi) = -1$

Le isometrie dirette formano un sottogruppo

$$Isom^+(E) \leq Isom(E).$$

Osservazione
1. Sia $O \in E$

$$Isom^+(E)_O \leq Isom(E)_O = \{f \in Isom(E) | f(O) = O\} \leq Isom(E).$$

Dove $Isom^+(E)_O$ sono le rotazioni di centro O
2. Se nello spazio euclideo E è assegnato con riferimento cartesiano $R = Oe_1, \ldots, e_n$, ogni isometria $f \in Isom(E)$ con parte lineare $\varphi \in O(V)$ si scrive in coordinate rispetto al riferimento nella forma

$$Y + AX + c \qquad A \in O(n).$$

dove $p \in E, \quad X = [P]_R, \quad Y + [f(P)]_R$
$A = [\varphi]^{\{e_1,\ldots,e_n\}}_{\{e_1,\ldots,e_n\}}, \quad c = [f(O)]_R$

Teorema 1
Sia E uno spazio euclideo, Un'applicazione $f : E \to E$ è un isometria se e solo se

$$\circledast d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) \qquad \forall P, Q \in E.$$

Dimostrazione
supponiamo che f sia un'isometria, con parte lineare φ

$$d(f(P), f(Q)) = ||\overrightarrow{f(P)f(Q)}|| = ||\varphi(\overrightarrow{PQ})|| = ||\overrightarrow{PQ}|| = d(P,Q).$$

Viceversa se $f : E \to E$ un'affinità verificante l'equazione $\circledast$, fissiamo $O \in E$ e definiamo $\varphi : V \to V$ ponendo

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Poiché ogni vettore $v \in V$ è del tipo $\overrightarrow{OP}$ per qualche $P \in E$, φ è definita, e tale che se $\underline{O}$ è il vettore nullo in V

$$\varphi(\underline{O}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{O}.$$

Inoltre se $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$
$||\varphi(v) - \varphi(w)|| = ||\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})|| =$
$= ||\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(q)}|| = ||\overrightarrow{f(Q)f(P)}|| =$
$= d(f(Q), f(P)) = d(Q,P) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||v - w||$
Quindi, per una delle caratterizzazioni già dimostrati, φ è un operatore unitario.
Dimostro ora che f è un'affinità con parte lineare φ

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O) - f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

$\square$

2 Isometrie di piani e spazi euclidei di dimensione 3

$$A \in SO(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che: } \quad \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

$a^2 + c^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta$
altre condizioni $\rightsquigarrow \quad b = -\sin\theta, \quad d = \cos\theta$
Dunque

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che se $det(A) = det(B) = -1$ allora $det(AB) = 1$, quindi se $A \in O(2) \setminus SO(2)$

$$A = (AB)B^{-1} = (AB)B^t.$$

con $B \in O(2) \setminus SO(2)$ fissato.
Scegliendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tutti gli elementi di $O(2) \setminus SO(2)$ sono del tipo

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lemma 1
1) $A_\theta = R_\theta A_O = A_O R_{-\theta}$
2) $A_\varphi \circ A_\theta = R_{\varphi-\theta}$
3) A_θ *ha autovalori* 1 *e* -1 *con autospazi ortogonali*

Dimostrazione
1. ovvio
2. $A_\varphi A_\theta = R_\varphi A_O R_\theta A_O = R_\varphi A_O A_O R_{-\theta} = R_\varphi R_{-\theta} = R_{\varphi-\theta}$
3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_φ*:*

$$det \begin{pmatrix} T - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & T + \cos\theta \end{pmatrix} = (T - \cos\theta)(T + \cos\theta) - \sin^2\theta = T^2 - 1.$$

quindi A_θ *ha autovalori* 1*. Si capisce direttamente che gli autospazi sono ortogonali. In realtà*

$$V_1 = \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix} \right), \quad V_{-1} - \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta + 1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix} \right).$$

$\square$

Sia $c \in E \quad \sigma : E \to E$ rotazione di centro c.
La parte lineare di σ appartiene a $SO(2)$, quindi è del tipo R_θ. Se Oe_1e_2 è un riferimento cartesiano

$$R_{c,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OC}}.$$

riflessione: isometria diretta che fissa tutti i punti di una retta, detta asse di riflessione

Osservazione
Riflessioni per $O \Leftrightarrow O(w) \setminus SO(2)$

Lemma 2
1. $r \subset E$ retta, $C \in r$, $\quad R_{C,\theta}$ rotazione di centro C. Esistono rette s, t contenenti C tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette r, s passanti per C $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro C e

$$\rho_r \circ \rho_s = Id \Leftrightarrow r = s.$$

2. $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ è una rotazione di angolo $\theta + \varphi$ a meno che $\theta + \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, in tal caso è una traslazione che è diversa dall'identità se e solo se $C \neq D$
3. Se $C, D \in E$, $C \neq D$ e r è la retta per C e D. Se $R_{C,\theta}, R_{D,\varphi}$ sono non banali e $\theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, allora $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ e $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\varphi}$ hanno centri destini e simmetrici rispetto ad r.

Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

1 Ultima Parte teorica prima del compito

$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$
$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 1 (Riflessione)
Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"
Possiamo fissare $c = 0 \;\; p_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$
Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \quad \rightarrow \quad \text{rotazione di angolo } \theta+\varphi \text{ Se } \theta+\varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

altrimenti è una traslazione (che è l'identità $= D$)
Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$
Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \qquad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$
TODO disegno
In coordinate rispetto ad un riferimetno cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \qquad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d) + d - x) + x.$$

dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente
$\underbrace{R_{\theta+\varphi}(x-d)}_{\text{parte lineare}} + R_\theta(d-c) + c$

T T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 2 (Glissoriflessione)
Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ di una riflessione di asse r con una traslazione $t_v \neq Id$ con $v \neq 0, v \parallel r$

TODO disegno

Teorema 1 (Charles, 1831)
Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione
Sia $f \in Isom(E)$
Se f ha un punto fisso abbiamo già visto che f è una rotazione se è diretta o una riflessione se f è inversa
se f diretta priva di punti fissi. Allora anche f^2 non ha punti fissi, perché se $f^2(p) = p$
Disegno TODO
Dunque $f(M) = M$ escluso.
*DIco che $p, f(p), f^2(p)$ che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati, Altrimneti **Disegno TODO***

$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p))(\text{ poichè } f \text{ è un'isometria}).$$
$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché f preserva l'orientazione, il triangolo $QPf(P)$ viene trasformato in $Q, f(P), f^2(P)$ da cui $f(Q) = Q$
Dunque tutti i punti $f^i(P), \quad i \geq 0$ sono allineati, quindi se r è la retta che li contiene, f agisce su r come una traslazione.
Poiché f è diretta, f agisce su tutto il piano come una traslazione.

Sia ora f inversa senza punti fissi,
Allora f^2 è diretta e come prima $f^2 = t_v$ per qualche v
Sia $P \in E$ un punto $r_0 = \overrightarrow{Pf^2(P)}, \quad r_1 = \overrightarrow{f(P)f^2(P)}$
sono rette parallele che sono scambiate tra loro da f
Disegno TODO
Sia r la retta equidistante da r_0 e r_1.
Allora $f(r) \subseteq r$ Ma $f^2 = t_v$ $f|_r = t_{v/2}$
Se ora consideriamo $t_{-v/2} \circ f$
questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente r,
quindi è una riflessione che indichiamo con ρ. Dunque

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

□

2 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Ricorda
$f \in End(V)$ diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f
$\Leftrightarrow A = [f]_B^B$ B base $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$ è diagonale

Lemma 1
Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ha solo radici reali

Dimostrazione
$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C}) \quad L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore e $x \neq 0$ un corrispondente autovettore

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t(Ax) = \overline{x}^t(\lambda x) = \lambda \overline{x}^t x$
$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda}\overline{x}^t x$
$\overline{x}^t x = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i \leftarrow$ *è un numero reale positivo poiché $x \neq 0$*

$$\lambda \overline{x}^t x = \overline{\lambda} x^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda.$$

□

Teorema 2 (Teorema Spettrale)
Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $T \in End(V)$ un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per T

Corollario 1
Per ogni matrice reale simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $N \in O(n)$ tale che

$$N^{-1}AM = N^t AN \qquad \text{è ortogonale.}$$

Dimostrazione (Teorema)
Per induzione su $n = dim(V)$. Base $n = 1$ ovvia
Supponiamo $n = dim(v) \geq 2$. Poichè T è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi T ammette un autovalore λ d sia e_1 il suo corrispondente autovettore di lunghezza 1

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^{\perp}.$$

Chiamo $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$
Dico che $T|_U : U \to$, per cui $T|_U \in End(U)$
Infatti, dimostro che $u \in U \to T(u) \in U$

ipotesi: $\langle u, e_1 \rangle = 0$
Tesi: $\langle Tu, e_1 \rangle = \langle u, T^t e_1 \rangle = \langle u, Te_1 \rangle = \langle u, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0$
dove abbiamo usato la simmetria di T
Chiaramente $T|_U$ *è simmetrico, quindi per induzione* U *ha una base ortonormale di autovettori* $\{e_2, \ldots, d_n\}$.
Ne segue che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *è una base ortonormale di* V *formata da autovettori per* T $\square$

Lezione 17 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-17

1 Prodotto Hermitiano

V spazio vettoriale complesso

Definizione 1 (Funzione sesquilineare)
Una funzione sesquilineare su V è un'applicazione $h : V \times V \to \mathbb{C}$ che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$\begin{aligned} &h(v + v', w) = h(v, w) + g(v', w) \\ &h(\alpha v, w) = \alpha h(v, w) \\ &h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w') \\ &h(v, \alpha w) = \overline{\alpha} h(v, w) \end{aligned}$$

per ogni scelta di $v, w, v', w' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

Definizione 2 (Forma hermitiana)
Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

Osservazione
Se h è hermitiana, $h(v, v) \in \mathbb{R}$, infatti deve risultare $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

Definizione 3 (Forma antihermitiana)
Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

Osservazione
In questo caso $h(v, v) \in \sqrt{1}\mathbb{R}$

Definizione 4
Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Definizione 5
Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

Esempio
$V = \mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

Dato V, consideriamo una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V Se h è una forma heritiana, diciamo che $(h_{ij}) = h(v_i, v_j)$ è la matrice che rappresenta h nella base B e la denoto come $(h)_B$
se $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(v, w) &= h(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i h_i(v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \overline{y} \end{aligned}$$

Poiché h è hermitiana, $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$

$$\begin{aligned} X^t H Y &= \overline{Y^t H X} \\ &= \overline{Y}^t \overline{H X} \\ &= (\overline{Y}^t \overline{H X})^t \\ &= \overline{X}^t \overline{H}^t \overline{Y} \quad \Rightarrow \quad H = \overline{H}^t \end{aligned}$$

Definizione 6
Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$

Esercizio
le matrici hermitiane 2×2 sono un $\mathbb{R}$-sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ di dimensione 4

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 & a_3 - ib_3 \\ a_2 - ib_2 & a_4 - ib_4 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} & a_1 + ib_1 = a_1 - ib_1 \Rightarrow b_1 = 0 \\ & a_2 + ib_2 = a_3 - ib_3 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ & a_3 + ib_3 = a_2 - ib_2 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ & a_4 + ib_4 = a_4 - ib_4 \Rightarrow b_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{M}_2 = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$
il professore qui lascia un esercizio, non penso che realisticamente qualcuno lo farà

Si definiscano allo stesso modo del caso reale simmetrico S^t
coefficiente di Fourier

$$|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| ||w||.$$

disuguaglianza triangolare $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$
Operatore unitario: $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ t.c.

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Verifichiamo le caratteristiche degli operatori unitari dati nel caso reale
Gram Schmidt
$T \in End(V)$ operatore unitario
1. Gli autovalori hanno modulo 1
2. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali
1. Sia v un autovettore di autovalore λ

$$\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle tv, tv \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \quad |\lambda|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

2. Sia $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w \rangle.$$

Se $\langle v, w \rangle \neq 0 \neq 0 \Rightarrow \lambda\overline{\mu} = 1. Perilpunto 1$
$\lambda\overline{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \overline{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \quad$ assurdo.

Definizione 7
Diciamo che $U \in M_n(\mathbb{C})$ è unitaria se

$$U\overline{U}^t = Id.$$

Proposizione 1
$T \in End(V)$ è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di V

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i^t A^t \overline{A} e_j = A_i^t \overline{A}_j$$

dove abbiamo posto $A = (T)_B$ e $\{e_i\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$
TODO *dimostrazione da finire*

$\square$

Come nel caso reale si dimostra

Teorema 1
Sia $T \in End(V)$ un operatore unitario Esiste una base standard di autovettori per T

In particolare, per ogni matrice unitaria $A \in U(n)$ esiste $M \in U(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale a volte si pone

$$A^* = \overline{A}^t.$$

A unitario $AA^* = Id$
A hermitiano $A = A^*$
A antihermitiano $A = -A^*$

Definizione 8 (Operatore Aggiunto)
Dato $T \in End(V)$, esiste unico $S \in End(V)$ tale che

$$\langle Tu, w \rangle = \langle u, Sw \rangle \quad \forall u, w \in V.$$

Tale operatore è detto aggiunto hermitiano di T e denotato con T^*

Definizione 9 (operatore normale)
Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto hermitiano (forma hermitiana definita positiva), un operatore $L \in End(V)$ è normale se

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

Osservazione
L unitario, hermitiano, antihermitiano $\Rightarrow$ L diagonale

Teorema 2
Sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) L *è normale*
2) *esiste una base ortonormale di* V *formata da autovettori di* L

Lezione 19 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-18

1 Esercizi vari

Esercizio 1 Foglio 6
$f : A \to A$ affinità ha un unico punto fisso se e solo se la sua parte lineare (φ) non ha l'autovalore 1
Svolgimento
Sia $F = \{x \in A | f(x) = x\}$
Supponiamo $F \neq \emptyset$ e $P \in F$ dico che

$$\star \quad F = P + \ker(\varphi - Id).$$

dove $\ker(\varphi - Id)$ è l'autospazio di autovalore 1 di φ
$u \in V \quad P + u \in F \Leftrightarrow P + u = f(P + u) = f(P) + \varphi(u) = P + \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = u$
ovvero $u \in \ker(\varphi - Id)$
Se ora F ha un unico punto fisso $\star$ implica che

$$ker(\varphi - Id) = \{0\}.$$

cioè 1 non è autovalore di φ
Viceversa facciamo vedere che se $\ker(\varphi - Id) = \{0\}$ allora $F \neq \emptyset$ Cerchiamo $Q + v$ tale che
$f(Q + v) = Q + v$
$f(Q) + \varphi(v)$
$f(Q) - P = v - \varphi(v)$
$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\varphi - Id)(v)$
Quindi, poiché $(\varphi - Id)$ è invertibile (per ipotesi), dato Q trovo un unico $v = -(\varphi - Id)^{-1}(\overrightarrow{Qf(Q)})$
per cui $Q + v$ è un punto fisso

Esercizio 5 Foglio 6
$f(x) = Ax + b$ in $\mathbb{E}^2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = 0$

1

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

SvolgimentoA
1. è una traslazione quindi non ha punti fissi
2. $\det A = 1$ e A ortogonale

$AX + b = X$
$(A - I)X = -b$
$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$x_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2)$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$
Esercizio da finire

---

2 Diangonalizzazione unitaria di operatori normali

($\mathbb{C}^n$, prodotto hermitiano standard) $M^\star = \overline{M}^t$
M è normale se $MM^\star = M^\star M$
siano normali le matrici

unitarie	$MM^\star = Id$
hermitiane	$M = M^\star$
antihermitiane	$M = -M^\star$

Teorema 1 (Spettrale)
M è normale se e solo se $\exists U \in U(n) : U^t M U$ è ortogonale

nota
$U(n)$ spazio delle matrici unitarie

$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad L^\star = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L$ matrice hermitiana
Trovo ora il polinomio caratteristico
$t^2 - 2t = 0$ che ha quindi autovalori $t = 0, t = 2$
$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad U^-1LU = 0002.$$

Dove il prodotto scalare standard è stato fatto per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato)

Esempio 2
$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione
il polinomio caratteristico è $t^2 - \sqrt{3}t + 1$ gli autovalori sono quindi $t = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$
$v_{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ultimo esempio

$L = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad L^\star = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$

$$LL^\star = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^\star L.$$

$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \;\; t_1, t_2$
$v_{t_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$
U come nell'esercizio precedente

3 Cenni sulla classificazione delle isometrie

Nomenclatura 1
· *rotazioni*
· *riflessioni*
· *traslazioni*
· *glissoriflessione* $= t_v \circ s_\alpha$ *con* $v \parallel \alpha^t$ *(disegno de li mortacci sua)*
· *glissorotazioni* $= t \circ R$ *dove* $v \parallel a$, a *asse di* R *(altro disegno)*
· *riflessioni rotatorie* $s_a \circ R$ R *rotazione di asse* $\underline{a}$, $s_{\underline{a}}$ *è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad* $\underline{a}$

Teorema 2 (Eulero 1776)
Ogni isometria di $\mathbb{E}^3$ *è di uno dei sei tipi sopra descritti*

Lezione 20 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-22

1 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

Lemma 1
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$
Siano $P, Q \in End(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P, risulta
$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione
Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.
$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$
□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)
$\dim(V) < +\infty$

Teorema 1
Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in End(V)$ operatore, sono equivalenti

- *L è normale (rispetto ad h)*
- *esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L*

Lemma 2
(V, h) spazio hermitiano, $L \in End(V)$ normale
sono equivalenti

- $Lv = \lambda v$
- $L^\star v = \overline{\lambda} v$

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per $L^\star$
$$V_\lambda(L) = V_{\overline{\lambda}}(L^\star).$$

Dimostrazione
Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\overline{\lambda}}(L^\star)$. L'inclusione contraria segue da $L^{\star t} = L$
$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$
$$\begin{aligned} h(L^\star(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \overline{\lambda} h(v, w) = h(\overline{\lambda} v, w) \\ h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, w) &= 0 \quad \circledast \end{aligned}$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$L^\star(v) \in V_\lambda(L), \quad \overline{\lambda}v \in V_\lambda(L)$$

$$\Rightarrow \quad L^\star(v) - \overline{\lambda}v \in V_\lambda(L)$$

Quindi nella $\circledast$ posso prendere $w = L^\star(v) - \overline{\lambda}v$, ottenendo

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda}v, L^\star(v) - \overline{\lambda}v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$L^\star(v) - \overline{\lambda}v = 0$$

cioè $\qquad L^\star(v) = \overline{\lambda}v$

□

Osservazione

Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v,w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^\star w) = h(v, \overline{\mu}w) = \mu h(v,w) \Rightarrow h(v,w) = 0$$

Dato che $\lambda \neq \mu$

Dimostrazione (Teorema Spettrale)

1) $\Rightarrow$ 2) *Procediamo per induzione su* $\dim V$*,con base ovvia* $\dim V = 1$

Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ e sia $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

Sia $v_1 \in V$ un autovettore per L, che possiamo assumere di norma 1. Sia $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^perp$.

Allora $V = V_1 \oplus W$.

Poiché V_1 è L-invariante (per costruzione) e $L^\star$-invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per W.

Inoltre $L|_W \in End(V)$ è normale.

Per induzione, esiste una base $h|_W$-ortonormale formata da autovettori per $L|_W$, sia $\{v_2, \ldots, v_n\}$. Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base h-ortonormale di V formata da autovettori per L.

2) $\Rightarrow$ 1). *Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base h-ortonormale di autovettori per L. Allora*

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[L^\star]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$

$$[L \circ L^\star]_B^B = [L]_B^B [L^\star]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^\star]_B^B [L]_B^B = [L^\star \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \to [A]_B^B$ è un isomorfismo tra $End(V)$ e $M_{nn}(\mathbb{C})$, segue

$$L \circ L^\star = L^\star \circ L.$$

cioè L è normale $\square$

Osservazioni

1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x,y) = x^t H\overline{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h(\binom{0}{1},\binom{0}{1}) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$\begin{aligned} & h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y) \\ & (L_A X)^t H\overline{Y} = X^t H\overline{L_A Y} \\ & X^t A^t H\overline{Y} = X^t H\overline{A Y} \quad \forall X, Y \\ & A^t H = H\overline{A} \\ & \begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$\det \begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2)+1 = (t+1)^2.$$

Ma $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, in particolare non è diagonalizzabile

2. Vediamo in dettaglio il fatto che $L|_W$ è normale

Ritornando alla dimostrazione del teorema spettrlae, osserviamo che se W è L-invariante è anche $L^\star$-invariante.

Infatti, se $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(L)$ (per esercizio da dimostrare)

$W = \bigoplus_\lambda (V_\lambda(L) \cap W)$

$=\bigoplus_\lambda (V_{\overline{\lambda}}(L^\star) \cap W)$

$=> W$ è $L^\star$-invariante

Adesso osservo che $(L|_W)^\star = (L^\star)|_W$

(L$\big|_{W)} \circ (L\big|_W)^\star = (L|_W) \circ (L^star|_W) =$

$(L \circ L^\star)|_W = (L^\star \circ L)|_W = (L^\star|_W) \circ L|_W = (L|_W)^\star \circ L|_W$

2 Richiami su spazi vettoriali duali

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita

$$V^V = V^{\acute{s}tar = Hom(V,\mathbb{K})}.$$

sia $A \leq V$

$$Ann(A) = A^{\#} = \{f \in V^\star | f(a) = 0 \ \ \forall a \in A\}.$$

Osservazioni

1) $A^{\#}$ è un sottospazio
2) $A^{\#\#} =< A >$

$$i : V \to V^{\star\star}$$
$$v \in V, \quad f \in V^\star$$
$$i(v)(f) = f(v)$$

V, W spazi vettoriali di dimensione finita $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $f^\star \in Hom_{\mathbb{K}}(W^\star, V^\star)$, la trasposta di f è definita con $\phi \in W^\star$
$f^\star(\phi) = \phi \circ f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "f^\star(\phi)"'] & W \arrow[dl, "\phi"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

> **Definizione 1**
> *Definisco la dualità standard su V come*
>
> $$\langle \ , \ \rangle : V^\star \times V \to \mathbb{K}.$$
>
> $\langle v, f \rangle = \langle f, v \rangle = f(v)$
> *con questa proprietà*
>
> $$\langle f(v), w^\star \rangle = \langle v, f^\star(w^\star) \rangle.$$

Ricordo che se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora i funzionali $v_i^\star$ definiti da

$$\langle v_i^\star, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

per $1 \leq i \leq n$ formano una base $B^\star$ di $V^\star$ detta base duale di B
Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, siano $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, L = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi di V, W consideriamo $f^\star : W^\star \to V^\star$ Allora:

$$\begin{array}{ccc} [f]_B^B & = & [f^\star]_{L^\star}^{B^\star t} \\ \| & & \| \\ (a_{ij}) & & (a_{ij}^\star) \end{array}$$

Tesi $\quad a_{ih} = a_{hi}^\star$

$f^\star(w_i^\star) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^{\overset{\star}{i}}$
$f^\star(w_i^\star)(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^\star v_i^\star(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^\star \delta_{ih} = a_{hi}^\star$
$\|$
$w_i^\star(f(w_h)) = w_i^\star(\sum_{i=1}^n a_{ih} w_i) = \sum_{i=1}^n a_{ih} w_i^\star(w_i) =$
$= \sum_{i=1}^n a_{ih} \delta_{ij} = a_{ih}$

Teorema 2 (Qualche proprietà importante)
$f : V \to W$ *lineare* $\quad f^\star : W^\star \to V^\star$
$1)(Imf)^\# = \ker f^\star$
$2)(\ker f)^\# = Imf^\star$
$3)(\lambda f + \mu g)^\star = \lambda f^\star + \mu g^\star \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, g \in Hom(V, W))$
$4)(h \circ f)^\star = f^\star \circ h^\star \qquad h : W \Rightarrow U$ *lineare*

Dimostrazione (Il punto 2, 3 e 4 vengono lasciati per esercizio)
1) $\emptyset \in (Imf)^\#$
$\Leftrightarrow \forall w \in Imf \quad \emptyset(w) = 0$
$\Leftrightarrow \forall v \in V \emptyset(f(v)) = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \circ f = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \in kerf^\star$
Quindi abbiamo visto che $(Imf)^\# = \ker F^\star$ □

Proposizione 1
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e W un sottospazio. Allora
$$\dim(W) + \dim W^\# = n.$$

Dimostrazione
Da quanto visto, la mappa
$$Hom(V_1, V_2) \to Hom(V^s tar_2, V^s tar_1)$$
$$f \qquad \to \qquad f^t$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre f è iniettiva (rispettivamente suriettiva) se e solo se $f^\star$ è suriettiva (rispettivamente iniettiva)
Consideriamo la proiezione $\pi : V \to V|_W := U$
Poiché π è suriettiva $\pi^\star : U^\star \to V^\star$ è iniettiva e
$$W^\# = (\ker \pi)^\# = Im\pi^\star.$$
per cui
$$\dim W^\# = \dim(Im\pi^\star) = \dim U^\star = \dim V - \dim W.$$
□

Lezione 21 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-24

1 Nuove informazioni sulle forme bilineari

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Ricordiamo che una forma bilineare è un'applicazione

$$b : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che se $A = [b]_B$
$X = [v]_B, \quad Y = [w]_B$

$$b(v, w) = X^t AY.$$

Come cambia $[b]_B$ se cambio B
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ X=[v]$_B$ $X' = [v]'_B$
B' = {v$'_1, \ldots, v'_n\}$ Y = [w]$_B$ $Y' = [w]'_B$
A = [b]$_B$ $A' = [b]_{B'}$

$$b(v, w) = X^t AY = X'^T A'Y'$$

$X = MX', \quad Y = MY' \quad M = [Id_V]_B^B$
(MX')$^t A(MY') = X'^t A'Y'$
$X' M^t AMY' = X'^t A'Y'$
$A' = M^t AM$

Definizione 1
Diciamo che due matrici A, B sono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^t AM$

Proposizione 1
Due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diversi se e solo se sono congruenti

Osservazione
1. La congruenza è una relazione di equivalenza
2. Il rango è invariante per la congruenza
3. Per matrici reali invertibili, il segno del determinante è invariante
4. Se M è ortogonale

$$M^t AM = M^{-1} AM.$$

Se ho una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ posso definire due applicazioni $V \to V^\star$ nel modo seguente.

Fissato $v \in V$, prendo $\begin{array}{l} b_v(w) = b(v, w) \\ b'_v(w) = b(w, v) \end{array}$

È chiaro che $b_v, b'_v \in V^\star$ (usiamo il fatto che b è bilineare)
Dunque ho due applicazioni $V \to V^\star$

$$\delta_b(v) = b_v \quad \delta'_b(v) = b'_v.$$

Definizione 2
Il rango di una funzione bilineare è il rango di una qualsiasi matrice che la rappresenta

Definizione 3
Una forma bilineare è non degenere se ha rango (massimo) $\dim V$

Proposizione 2
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita,

$$b : V \times V \to \mathbb{K} \text{ una forma bilineare.}$$

Sono equivalenti

- b *è non degenere ovvero* $b(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\forall v \in V, v \neq 0 \;\; \exists w \in V : \quad b(v, w) \neq 0$
- $\forall w \in V, \; w \neq 0 \;\; \exists v \in V : b(v, w) \neq 0$
- $\delta_b : V \to V^\star$ *è un isomorfismo*
- $\delta_b' : V \to V^*$ *è un isomorfismo*

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base di* V *e sia* $A = [b]_B$
1) $\Rightarrow$ 2) *per ipotesi* $\det A \neq 0$ *se* $X = [v]_B \quad X \neq 0 \Rightarrow X^t A \neq 0$
quindi esiste $Y \in \mathbb{K}^n : X^t AY \neq 0$.
Se $w \in V$ *è tale che* $[w]_B = Y$ *ho dimostrato che* $b(v, w) = X^t AY \neq 0$
2) $\Rightarrow$ 1) *Riscrivendo l'ipotesi in coordinate abbiamo*

$$\forall X \neq 0 \; \exists Y : \quad X^t AY \neq 0$$

$$\Rightarrow X^t A \neq 0 \quad \forall X \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

1) $\Leftrightarrow$ 3) *è come sopra*
2) $\Rightarrow$ 4) *Poiché* $\dim V = \dim V^\star$ *basta vedere che* δ_b *è iniettava, cioè* $\ker \delta_b = \{0\}$
$v \in \ker \delta_b \quad \Rightarrow \quad \delta_b(v) = b_v$ *è il funzionale nullo, cioè*
$b_v(w) = 0 \;\; \forall w \in V$
$b_v(w) = b(v, w) \Rightarrow v = 0$
4) $\Rightarrow$ 2) *Dato* $v \neq 0$, $\delta_b(v) = b_v \neq 0$ *perché* δ_b *è un isomorfismo,*
quindi esiste $w \in V$:

$$b(v, w) = b_v(w) \neq 0$$

3) $\Leftrightarrow$ 5) *è simile a* 2) $\Leftrightarrow$ 4) $\square$

2 Caso Simmetrico

$$b(v, w) = b(w, v).$$

Osservazione

b è simmetrica se e solo se lo è qualsiasi matrice che la rappresenta. **Dato** $S \subset V$ definiamo

$$S^{\perp} = \{v \in V | b(v, s) = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

Esercizio $S^{\perp}$ è un sottogruppo e, $S^{\perp} =< s >^{\perp}$

Definizione 4

Due sottospazi U, W *si dicono ortogonali se*

$$Y \subseteq W^p erp \ \Leftrightarrow W \subset U^{\perp})$$

Definizione 5

$v \in V$ *si dice isotropo se* $b(v, v) = 0$

Definizione 6

$\ker b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \ \ \forall w \in V\} = V^{\perp}$

Osservazione

b è non degenere se e solo se $\ker b = \{0\}$

Proposizione 3

Sia b *non degenere,* $W \subseteq V$ *sottospazio,*
Allora, se $\delta_b : V \to V^{\star}$ *è l'isomorfismo canonico indotto da* b*,* $\delta_b(W^t) = W^{\star}$*. In particolare risulta sempre* $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

Nota

Non è vero, anche nel caso non degenere, che $V = W \oplus W^{\perp}$

Dimostrazione

$w \in W^{\perp} \quad \delta_b(w) = b_w$ *Voglio vedere che*
$b_w \in W^{\#} \quad b_w(w') = b(w, w') = 0 \ \ \forall w' \in W$
Quindi $\delta_b(W^{\perp}) \subseteq W^{\#}$
Prendo ora $f \in W^{\#}$*; poiché* b *è non degenere,* δ_b *è un isomorfismo, quindi esiste* $v \in V$

$$f = \delta_b(v) = b_v \quad b(v, w) = b_v(w) = 0 \ \ \forall w \Rightarrow v \in W^{\perp}.$$

quindi $f = \delta(b_v)$ *con* $v \in W^{\perp}$ $\square$

Proposizione 4
Sia V spazio vettoriale, $W \subset V$ sottospazio, $b \in Bi(V)$. Sono equivalenti:

- $V = W \oplus W^{\perp}$
- $b|_W$ *è non degenere*

Lemma 1
$\ker b|_W = W \cap W^{\perp}$

Dimostrazione (lemma)
$w \in \ker b|_W \Leftrightarrow b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W \Leftrightarrow w \in W \cap W'$ $\square$

Dimostrazione (proposizione)
1) $\Rightarrow$ 2)*segue dal lemma perché dall'ipotesi* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$
2) $\Rightarrow$ 1) *Sia* $\{w_1, \ldots, w_s\}$ *una base di* W
Per ipotesi $A = (b(w_i, w_j))$ *è invertibile, in particolare dato* $v \in V$*, il sistema lineare*

$$* \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, w_1) \\ \vdots \\ b(v, w_s) \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica. Poniamo

$$w = v - \sum_{h=1}^{s} x_j w_j.$$

*Notiamo che * significa*

$$\sum_{h=1}^{s} b(v_h, w_j) x_h = b(v, w_j) \quad 1 \leq j \leq s.$$

Calcoliamo
$b(w, w_i) = b(v - \sum_{h=1}^{s} x_h w_h, w_j) = b(v, w_j) - \sum_{h=1}^{s} x_h b(w_h, w_j) = b(v, w_j) =$
$= b(v, w_i) - b(v, w_i) = 0$
Poiché i $\{w_i\}$ *sono una base di* W*, risulta* $b(w, u) = 0 \quad \forall u \in W$*, cioè* $w \in W^{\perp}$
Allora

$$v = w + \sum_{h=1}^{s} x_h w_h.$$

Pertanto $V = W + W^{\perp}$*, per ipotesi* $W \cap W^{\perp} = \ker b|_W = \{0\}$*, quindi* $V = W \oplus W^{\perp}$ $\square$

Lezione 22 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-29

1 Boh non ero a lezione

$W \subseteq V$ sottospazio $g \in Bi(V)$
$g|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$
Cosa dimostreremo oggi
Sia V spazio vettoriale di dimensione finita e $g \in Bi_s(V)$ (forma bilineare simmetrica
$\mathbb{K}$ qualsiasi, esiste una base $g-$ *ortogonale*
$\mathbb{K}$ algebricamente chiuso ($\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$), esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad r = rg(g)$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad r+s = rg(g) \quad n-r-s$ indice di nullità, ker della forma
V spazio vettoriale $(\dim(V) < +\infty), g \in Bi_s(V)$

> **Definizione 1**
> *la forma quadrativi associata a V è l'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ definita da $q(v) = g(v,v)$ e questa è una funzione omogenea di grado 2*

Esempio
$V \cong \mathbb{K}^n, g =$ prodotto scalare standard
$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
Osservazione
Valgono:
1) $q(kv) = k^2 q(v)$
2) $2g(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$
dove $g(v,w)$ è la forma polare di q
Dimostrazione
1. $q(kv) = g(kv,kv) = k^2 g(v,v) = k^2 q(v)$
2. $q(v+w) - q(v) - q(w) = g(v+w, v+w) - g(v,v) - g(w,w) =$
$= \cancel{g(v,v)} + 2g(w,v) + \cancel{g(w,w)} - \cancel{g(v,v)} - \cancel{g(w,w)} = 2g(w,v)$ $\square$
Osservazione
$V = \mathbb{R}^4$ e sia $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_1x_2$
Voglio trovare la matrice della forma polare di q rispetto alla base canonica
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Sulla diagonale ci sono i coefficienti delle componenti al quadrato $(x_i)^2$ gli altri li ottieni dividendo per 2 ogni altro coefficiente

Teorema 1 ((Caratteristica di $\mathbb{K}$) $\neq 2$)
Dato V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, allora esiste una base g-ortogonale.

Dimostrazione
Per induzione su $\dim V = n$. *Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.*
se g è la forma bilineare nulla ($g(v,w) = 0\ \ \forall v, w \in V$) ogni base è $g-$ortogonale.
Altrimenti esistono, $v, w \in V$ con $g(v,w) \neq 0$.
Assumo che almeno uno tra $v, w, v+w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi

$$g(v+w, v+w) = g(v,v) + g(v,w) + g(w,w) = 2g(v,w) \neq 0).$$

quindi $\exists v_1 \in V$ t.c $g(v_1, v_1) \neq 0$. Allora $g|_{\mathbb{K}v_1}$ è non degenere quindi $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$ con $W = (\mathbb{K}v_1)^{\perp}$
$\dim(W) = n-1$, *per induzione $\exists$ una base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ di W con $g(v_1, v_j) = 0$ se $2 \leq j \leq n, \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base g-ortogonale di V* □

Teorema 2
Supponiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Sia V spazio vettoriale dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ $r = rg(D)$
In modo equivalente, ogni matrice simmetrica a coefficienti in $\mathbb{K}$ è congruente a D

Dimostrazione
Per il teorema precedente, esiste una base $B = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ di V rispetto alla quale $(g)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Possiamo assumere che $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ siano non nulli e che $a_{r+i,r+i} = 0$ con $1 \leq i \leq n-r$.
Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii}$, $1 \leq i \leq r$ poniamo.
$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} v'_i, & 1 \leq i \leq r \\ v'_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$
è chiaro che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base. Risulta
$g(v_i, v_i) = \begin{cases} g(\frac{v'_i}{\alpha_i}, \frac{v'_i}{\alpha_i} = 1\alpha_i^2 g(v'_i, v'_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 & 1 \leq i \leq r \\ g(v'_i, v'_i) = 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$ □

Osservazione
Se g è non degenere, esiste una base B rispetto alla quale $(g)_B = Id_n$
Caso Reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
V spazio vettoriale reale $(\dim V = n \geq 1)$
$g \in Bi_s(V)$
Sia B una base g-ortogonale. Definiamo

Definizione 2
Chiamiamo $i_+(g), i_-(g), i_0(g)$ indice di positività, negatività e nullità di g, e sono rispettivamente
$i_+(g) = \{v \in B | g(v,v) > 0\}$
$i_-(g) = \{v \in B | g(v,v) < 0\}$
$i_0(g) = \{v \in B | g(v,v) = 0\}$

Teorema 3 (Sylvester)
Gli indici non dipendono dalla scelta di B. Posto $p = i_+(g), q = i_-(g)$ allora $1 + q = n - r \quad (r = rg(g))$
ed esiste una base di V rispetto alla quale la matrice E di g è tale che

$$E = \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale A è congruente ad una matrice della forma E in cui $r = rg(A)$ e p dipende solo da A

Dimostrazione
Dal teorema di esistenza di una base g-ortogonale deduciamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ di V rispetto alla quale, se $v = \sum_{i=1}^n y_i f_i$
$q(v) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$
con esattamente n coefficienti diversi da 0, che possiamo supporre essere $a_{11}, \dots, a_{rr}$
Siano $a_{11}, \dots, a_{pp} > 0, \quad a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr} < 0$
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ *t.c.*
$\alpha_i^2 = a_{ii} \quad 1 \leq i \leq p \qquad \alpha_i^2 = -a_{ii} \quad p+1 \leq i \leq r$
Allora posto $e_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & 1 \leq i \leq r \\ f_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$
la matrice di g rispetto a $\{e_1, \dots, e_n\}$ è $\begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$
Resta da dimostrare che p dipende solo da g e non dalla base B usata per definirlo
Supponiamo che rispetto ad un'altra base g-ortogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$, risulti, per

$v = \sum_{i=1}^{n} z_i b_i$

$$q(v) = z_1^2 + \ldots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

mostriamo che $p = t$
se per assurdo $p \neq t$ *assumo* $t \leq p$ *considero quindi i sottospazi* $S =< e_1, \ldots, e_n >$
$T =< b_{t+1}, \ldots, b_n >$
Poiché $\dim S + \dim T = p + n - t > n$ *perché* $t < p$ *per Grassman vettoriale* $S \cap T \neq \{0\}$ *sia* $0 \neq v \in S \cap T$
allora $r = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p = z_{t+1} b_{t+1} + \ldots, z_n b_n$
contraddizione:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0.$$

$$q(v) = -\sum_{i=1}^{r} z_i^2 + z_{r+1}^2 + \ldots + z_n^2 < 0.$$

□

Osservazioni
1. Esiste una definizione più intrinseca degli indici. Ricordiamo che $g \in Bil_S(V), V$ spazio vettoriale su $/R$ è definita positiva se $g(v, v) > 0, \ \forall v \in V \backslash \{0\}$ e che g è definita negativa se $-g$ è definita positiva.
2.Il teorema di Sylvester si estende, con la stessa dimostrazione alla forma hermitiana.
In particolare ogni matrice hermitiana è congruente a una matrice diagonale del del tipo

$$\begin{pmatrix} I_p & \ldots & 0 \\ \vdots & I_{r-p} & \vdots \\ 0 & \ldots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposizione 1
Sia (V, g) *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *dotati di una forma bilineare simmetrica* g
Siano dati un prodotto scalare h *e una forma bilineare simmetrica* k
Allora esiste una base di V *che sia* h*-ortonormale e* k*-ortogonale*

Dimostrazione
(V, h) *è uno spazio euclideo, quindi per il teorema di rappresentazione delle forme bilineari, esiste un operatore* $L \in End(V)$ *tale che*

$$h(L(v), w) = k(v, w).$$

Poiché k *è simmetrica,* L *è simmetrica, per il teorema spettrale siste una base* h*-ortonormale costituita da autovettori per* L.
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *tale base. Voglio dimostrare che* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è* k*-ortogonale*

$$k(v_r, v_s) = h(L(v_r), v_s) = h(\lambda_r v_r, v_s) = \lambda_r h(v_r, v_s) = \lambda_r \delta_{rs}.$$

$\square$

Corollario 1
Sia (V, h) uno spazio euclideo, e k una forma bilineare simmetrica su V. Allora $i_+(k), i_-(k), i_0(k)$ corrispondono al numero di autovalori positivi, negativi, nulli, dell'endomorfismo di V che rappresenta k rispetto ad h

Dimostrazione
Sia come nella proposizione, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una h-ortonormale e k-ortogonale, per il teorema di Sylvester

$$i_+(k) = |\{v_i | k(v_i, v_i) > 0\}|.$$

Ma abbiamo visto che $k(v_i, v_i) = \lambda_i$
quindi $i_+(k) = |\{\lambda_i > 0\}|$. La dimostrazione non è terminata. $\square$

Definizione 3
Una matrice simmetrica reale si dice definita positiva se tutti gli autovalori sono positivi

Definizione 4
Data una matrice quadrata $n \times n$, i minori principali leading, sono quelli ottenuti estraendo righe e colonne come segue

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Esempio
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$|1| = 1$
$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$

Teorema 4
A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori principali leading sono positivi

$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$

1. Determinare gli indici
2. Calcolare $W \perp$ se $W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Scriviamo la matrice della forma bilineare associata rispetto alla base standard

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad i_- = 2$$

Lezione 23 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-02

1 In questa lezione il signorino ha semplciemente riportato gli esoneri e fatto esercizi della scherda 7, nnon è roba mia

Lezione 24 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-06

1 Spazi proiettivi e Antani

Servirebbe un'introduzione per tutto ciò, ma non sarà il Posta a darcela, la motivazione matematica è che la formula di Grassmann vale sempre (antani)

Definizione 1 (Spazio Proiettivo)
*Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Lo **spazio proiettivo** associato a V denominato con $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V*

$$\mathbb{K}v \leftrightarrow [v] \leftsquigarrow \textit{punto di } \mathbb{P}(v).$$

$\dim V = 0 \quad \mathbb{P}(V) = \emptyset$
$\dim V = 1 \quad \mathbb{P}(V) = \{pt\}$
$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ *retta proiettiva*
$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ *piano proiettivo*
Quindi $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$
Caso importante $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n (= \mathbb{P}^n(K)).$$

Osservazione
1. Dati $v \in V \setminus \{0\}$, $\quad \mathbb{K}v$ è un sottospazio 1-dimensionale, quindi esso dà luogo a un punto nello spazio proiettivo che denotiamo $[v]$
2. La nozione di spazio proiettivo di V può introdursi in modo equivalente tramite la seguente relazione d'equivalenza su $V \setminus \{0\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ t.c. } v = \lambda w.$$

Allora
$$\mathbb{P}(v) = {}^{V \setminus \{0\}}/_{\sim}.$$

Riprendendo l'osservazione 1, nel caso $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n + 1 \setminus \{0\} \rightsquigarrow [x_0 \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n.$$

$$[x_0, \ldots, x_n] = [y_0, \ldots, y_n].$$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \quad y_i = \lambda x_i, \quad 0 \leq i \leq n$

Definizione 2
Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ ed $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V.
Diciamo che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ definisce un sistema di coordinate omogenee (o riferimento proiettivo) su V, denotato con $e_0 \ldots e_n$

Dato $v \in V\{0\}$
$$v = x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n.$$

$\rightsquigarrow (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{\{}n+1\} \setminus \{0\}$

$$P[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow P = [v].$$

$x_0, \ldots, x_n$ si dicono coordinate omogenee di v
Ad esempio, fissata la base $\{e_0, e_1, e_2$ in $\mathbb{P}^2$,
$P[1,2,3]$ è il sottospazio 1-dim di V generato da $e_0 + 2e_1 + 3e_2$

Nomenclatura 1
Fissato $e_0 \ldots e_n$, i punti

$$F_0[1,0,\ldots,0] = [e_0], \ldots, F_n[0,\ldots,1] = [e_n].$$

sono i punti fondamentali del riferimento
$U[1,\ldots,1]$ *punto unità del riferimento*
Nota Bene
Poichè $[v] = [\lambda v]$ risulta

$$\lambda v = \lambda x_0 e_0 + \ldots + \lambda x_n e_n.$$

quindi le coordinate omogenee sono determinate solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

Osservazione
se $e_0 \ldots e_n$ è un riferimento proiettivo, anche $(\mu e_0) \ldots (\mu e_n)$, $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un riferimento proiettivo e i punti hanno le stesse coordinate omogenee rispetto ai due riferimenti.
Quindi
consideriamo identici due riferimenti se definiti da basi proporzionali

$$e_0, \ldots, e_n = (\mu e_0), \ldots, (\mu e_n).$$

Un riferimento in $\mathbb{P}^n$ determinato dalla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$ si dice riferimento standard.
i punti fondamentali sono

$$[1,0,\ldots,0], [0,1,\ldots,0], \ldots, [0,\ldots,0,1].$$

Dato $W \subset V$ sottospazio vettoriale possiamo considerare $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(V)$
$\mathbb{P}(W)$ è detto sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = (\dim V - 1) - (\dim W - 1) = \dim V - \dim W.$$

Definizione 3
Un iperpiano in $\mathbb{P}^n$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 1

Supponiamo che in $\mathbb{P}^n$ sia dissato un riferimento $e_0, \ldots, e_n$ con coordinate omogenee $x_0, \ldots, x_n$

$$\circledast \quad a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se leggiamo quest'equazione in V è l'equazione cartesiana di un iperpiano vettoriale $H \subset V$
I punti di $P = [v] \in \mathbb{P}$ le cui coordinate omogenee verificano $\circledast$ sono quelli tali che $v \in H, \quad v \neq 0$ quindi sono i punti di $\mathbb{P}(H)$
Nota bene
Se $[x_0, \ldots, x_{n2}] = [y_0, \ldots, y_n]$ e

$$a_0x_0 + \ldots_{a\ n} + x_n = 0.$$

allora anche $a_0y_0 + \ldots + a_ny_n = 0$ perché $[x_0, \ldots, x_n] = [y_0, \ldots, y_n]$ significa $y_i = \mu x_i \quad \mu \in \mathbb{K}\{0\}$ e

$$a_0y_0 + \ldots + a_ny_n = a_0\mu x_0 + \ldots + a_n\mu x_n = \mu(a_0x_0 + \ldots_{a\ n}x_n) = 0.$$

Iperpiano coordinati su $\mathbb{P}^n$ (rispetto al riferimento standard)

$$H_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n | x_i = 0\} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Ad esmpio, in $\mathbb{P}^2$, $\mathrm{H}_0 = \{x_0 = 0\}$
$H_1 = \{x_1 = 0\}$
$H_2 = \{x_2 = 0\}$ Più in generale consideriamo un sistema di t equazioni omogenee

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{t0}x_0 + \ldots + a_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

Se $W \subset V$ è il sottospazio definito dal sistema precedente, l'insieme di punti $P \in \mathbb{P}$ le cui coordinate verificano il sistema è $\mathbb{P}(W)$
Sia $A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq n$ e sia $r = rk(A)$ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim W - 1 = \dim V - r - 1 = \dim \mathbb{P}(V) - r$ Quindi $\mathbb{P}(W)$ ha condimensione r su $\mathbb{P}$
Intersezione
$A_1x = 0 \ \ \mathbb{P}(W_1)$
$A_2x = 0 \ \ \mathbb{P}(W_2)$

$$\begin{cases} A_1x = 0 \\ A_2x = 0 \end{cases} \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

In particolare $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq 0 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Definizione 4
$\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)$ *si dicono*
Incidenti se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ *Sghembi se* $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) =$

Osservazion
La formula si generalizza in

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

Definizione 5
Se $\emptyset \neq J \subset \mathbb{P}$, *il sottospazio proiettivo generato da* J *è*

$$L(J) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq J} \mathbb{P}(W).$$

con W *sottospazio di* V

Caso speciale
$J = \{p_{1,t}\}$. Scriveremo in tal caso $L(p_1, \ldots, p_y)$ Notiamo che se

$$p_1 = [v_1], \ldots, p_t = [v_t].$$

$$L(p_1, \ldots, p_t) = \mathbb{P}(< v_1, \ldots, v_t >).$$

In particolare
$\dim(L(p_1, \ldots, p_t)) \leq t - 1$

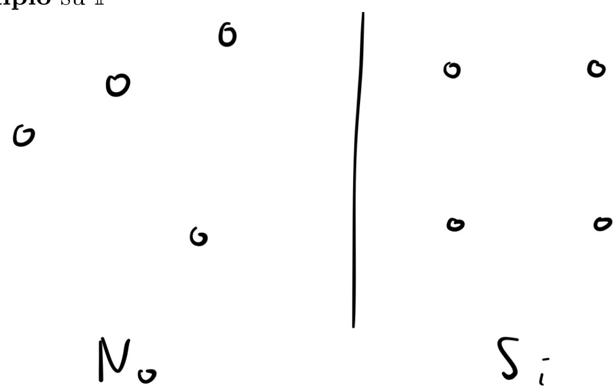
Definizione 6
$p_1, \ldots, p_t$ *si dicono linearmente indipendenti se*

$$\dim(L(p_{1,t})) = t - 1.$$

Esempio
p_1, p_2 sono indipendenti $\Leftrightarrow$ sono distinti
p_1, p_2, p_3 sono indipendenti $\Leftrightarrow$ non sono allineati

Definizione 7
$p_1, \ldots, p_t$ in $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\dim(V) = n+1$ si dicono in posizione generale se
$\circ$ sono linearmente indipendenti ($t \leq < n+1$)
$\circ$ se $t > n+1$ e $n+1$ tra essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti

Esempio su $\mathbb{P}^2$



2 Equazioni parametriche di un sottospazio

$k+1$ punti linearmente indipendenti $[v_0], \ldots, [v_n]$ in un sottospazio proiettivo S di dimensione k.
Per ogni $P \in S$,

$$P = [\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k].$$

Fissiamo ora un riferimento $e_0, \ldots, e_n$ du $\mathbb{P}$
Allora se v_i ha coordinate $(p_{i0}, \ldots, p_{in})^t$ rispetto a ${}_0, \ldots, e_n\}$ e $P = P[x_0, \ldots, x_n]$ si ha

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \ldots + \lambda_k p_{k0} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \ldots + \lambda_k p_{k1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \ldots + \lambda_k p_{kn} \end{cases}$$

Caso importante: rette $[v_0], [v_1]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} \\ x_0 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} \\ \vdots \\ x_0 = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} \end{cases}$$

$\mathbb{P}$ piano proiettivo, r retta per $P[p_0, p_1, 2], Q[q_0, q_1, q_2]$ r è un iperpiano in $\mathbb{P}$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esercizio Se in $\mathbb{P}^3$ sono dati punti non allineati

$$P[p_0, p_1, p_2, p_3], Q[q_0, q_1, q_2, q_3], R[r_0, r_1, r_2, r_3].$$

l'equazione del piano per P, Q, E è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempio Retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per $[-1, 1, 1], [1, 3, 2i]$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2i \end{pmatrix} = 0.$$

$\circ$ C'eradicare che i punti $A = [1, 2, 2], B = [3, 1, 4], C = [\dots]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e scrivere un'equazione ella retta che li contiene

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

$\circ$ Verificare che le rette per $\mathbb{P}(\mathbb{C})$
$ix_1 - x_2 + 3ix_0 = 0$

$x_0 + x_1 - ix_2 = 0$

$5 \dots$
hanno intersezione non vuota (basta verificare che il determinante sia no nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & -1 \\ 1 & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$\det A = 0$

Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ due sottospazi proiettivi

$$L(S_1 \cup S_2) \text{ è detto sottospazio somma.}$$

$$L(S_1, S_2) = P(W_1 + W_2).$$

Infatti, se $\mathbb{P}(W) \supset S_1 \cup S_2$, allora contiene $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ perché W deve contenere sia W_1 che W_2
D'altra parte, $W_1 + W_2 \supseteq W_1, \quad W_1 + W_2 \supseteq W_2$
quindi $\qquad \mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_1) = S_1$
$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_2) = S_2 \Rightarrow \supseteq L(S_1, S_2)$

Teorema 1 (Forumla di Grassmann proiettiva)

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

($S1, S_2$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$)

Dimostrazione
La dimostrazione segue subito dalla formula di Grassmann vettoriale

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

$\dim L(S_1, S_2) - 1 = \dim S + 1 + \dim S_2 + 1 - (\dim S1 \cap S_2 + 2)$ $\square$

Osservazione
Poiché $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$, risulta dalla formula di Grassmann

$$\dim S_1 \cap S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

In particolare

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P} \Rightarrow S_1, S_2 \text{ sono incidenti.}$$

(Infatti $\dim S_1 \cap S_2 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \geq S_2 \neq \emptyset$)

Corollario 1 (Antani[2])
1. In un piano proiettivo due rette si intersecano
2. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano si intersecano e due piani distinti si intersecano in una retta

Lezione 26 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-09

1 Mappe tra spazi proiettivi

Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Definizione 1
Un'applicazione $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice trasformazione proiettiva se esiste un'applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \to W$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall\ v \in V \setminus \{0\}.$$

Osservazione
Scriviamo $f = \bar{\varphi}$ e diciamo che φ induce f.
Notiamo che $\bar{\varphi} = \overline{\lambda\varphi} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi la famiglia $\{\lambda\varphi | \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ induce la stessa trasformazione proiettiva

Nomenclatura 1
- *Se φ è un isomorfismo $f = \bar{\varphi}$ si chiama isomorfismo proiettivo*
- *Se $\varphi : V \to V$ è un isomorfismo, $f = \bar{\varphi}$ si chiama proiettività*
- *$A, B \subseteq \mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se esiste proettività f tale che $f(A) = B$*

Formula di Grassmann Proiettiva
$S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ $\ S_2 = \mathbb{P}(W_2)$
$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \quad L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$
Dove $L(S_1, S_2)$ è il minimo sottospazio che contiene S_1, S_2

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

$$\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

$\Rightarrow$ se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}$ allora S_1, S_2 sono incidenti

2 Sottospazi in posizione Generale

Definizione 2
S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale se $S_1 \cap S_2$ ha dimensione minima

Osservazione
Se $\dim S_1 = h, \dim S_2 = k, \dim \mathbb{P} = n$ allora S_1, S_2 sono in posizione generale se

$$\dim S_{12} = h + k - n \quad \text{se } h + k \geq n.$$

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \qquad \text{se } h + k < n.$$

Definizione 3 (Cono proiettivo)
$J \subseteq \mathbb{P}(V), \quad P \in \mathbb{P}$
Il Cono proiettivo J di p è definito con

$$C_p(J) = \bigcup_{Q \in J} L(P, Q).$$

Esercizio 1. $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo, allora

$$C_p(S) = L(P, S).$$

2. S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi, allora

$$L(S_1, S_2) = \bigcup_{P_1 \in S_1, P_2 \in S_2} L(P_1, P_2) = \bigcup_{P_2 \in S_2} C_{P_2}(S_1).$$

$H \in \mathbb{P}$ iperpiano $P \in \mathbb{P} \setminus H$
La proiezione di H di centro P è l'applicazione

$$\pi_{P,H} : \mathbb{P} \setminus \{P\} \to H.$$

$$\pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H.$$

Osserviamo che se $J \subseteq \mathbb{P}$ e $p \notin J$

$$\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J).$$

Esempio[Corazzata Cotionkin]
Nota
$\mathbb{P}^N, \quad H_0 = \{x_0 = 0\} = \{[0, x_1, \ldots, x_N] \in \mathbb{P}^N\}$
Dato che punti proporzionali ci danno lo stesso risultato dire $x_0 = 1$ non avrebbe senso, sarebbe identico a $x_0 = 3$

Se $P = [1, 0, \ldots, 0] \notin H_0$
Se $Q = [x_0, \ldots, x_N]$, allora

$$\pi_{P,H}(Q) = [0, x_1, \ldots, x_N].$$

$L(P, Q) = [\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \ldots, \mu x_n]$
$L(P, Q) \cap H_0$
Esempio
$[1, 2, 1][0, 1, -1]$

$$\{\lambda[1, 2, 1] + \mu[0, 1, -1] | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \neq (0, 0)\}.$$

Qui c'è lo spazio quoziente $(\lambda, \mu)/\lambda \sim \mu$

---

3 Posizione generale di sottospazi in $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^4$

$\dim S_1 = h$
$\dim S_2 = k \quad \dim S_1 \cap S_2 = \begin{cases} h+k-n & h+k \geq n \\ -1 & h+k < n \end{cases}$
$\dim \mathbb{P} = n$
qui ci sono un bel po di tabelle, conviene copiarle a mano

Osserviamo che in un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^n$ sia $e_0, \ldots, e_n$ individua i punti fondamentali ed il punto unità, e questi sono in posizione generale

$$F_0 = [e_0], \ldots, F_n = [e_n], u = [e_0 + \ldots + e_n].$$

ogni $(n+1)$-ple di righe ha rango massimo $\begin{matrix} 1 & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \\ 0 & 0\ldots & 1 \\ 1 & 1\ldots & 1 \end{matrix}$

Esempio $\mathbb{P}^2$ $[e_0]$ $\begin{matrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \end{matrix}$ tutti i minori di rango 3 sono non zero

Viceversa, data una $(n+2)$-pla di punti in posizione generale, esiste un unico riferimento proiettivo che il ammette come punti fondamentali e punti unità.
Siano dati $P_0, \ldots, P_n$ n punti in posizione generale,
supponiamo che $P_i = [v_i], \quad i = 0, \ldots, n$
Allora $\{v_0, \ldots, v_n\}$ è una base di V. Se $n \in V$ è tale che $N = [n]$, allora

$$n = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

in modo unico.
Osserviamo che per l'ipotesi di posizione generale, tutti i λ_i sono diversi da zero.
Allora $(\lambda_0 v_0) \ldots (\lambda v_n)$ è un riferimento con le proprietà valide: infatti i punti fondamentali sono

$$[\lambda_i v_i] = [v_i] = P_i.$$

$$[(\lambda_0 v_0) + \ldots + (\lambda_n v_n) = [n] = V.$$

4 Esercizi

Verificare che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$[\frac{1}{2}, 1, 1], \quad [1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}], \quad [2, -1, 2].$$

Sono allineati e trovare un'equazione della retta che li contiene
Svolgimento

$$0=\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 12 - 2 - 10 = 0$$

Altro Esercizio:
Determinare i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui le rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$ax_1 - x_2 + 3ix_0 = 0.$$

$$-iax_1 + x_1 - ix_2 = 0.$$

$$3ix_2 + 3x_0 + x_1 = 0.$$

sono concorrenti (si intersecano in un punto)
Svolgimento
Le rette sono concorrenti se e solo se il sistema delle tre equazioni ha una soluzione non nulla

$$A = \begin{pmatrix} 3i & a & -1 \\ -ia & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0 \qquad ra^2 + 4ia + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{-ra^2 - 21a^2}}{3} = \begin{cases} i \\ -\frac{7}{3}i \end{cases}$$

Here we go again
Si considerano i punti seguenti in $\mathbb{P}^3(R)$

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \ P_2 = [0, 1, 1, 1], \ P_3 = [2, 1, 2, 2], \ P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

a. Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale
b. Calcola $\dim L(P_1, P_2, P_3, P_4$ e trovare equazioni cartesiane
c. Completare, se possibile, P_1, P_2, P_3 a un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$
Svolgimento
I punti dati sono in posizione generale se posto $P_i = [v_i]$, v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tuttavia il determinante del minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diverso da 0

$$L(P_1, P_2, P_3, P_4) = L(P_1, P_2, P_3).$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_0 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Ultimo punto dell'esercizio

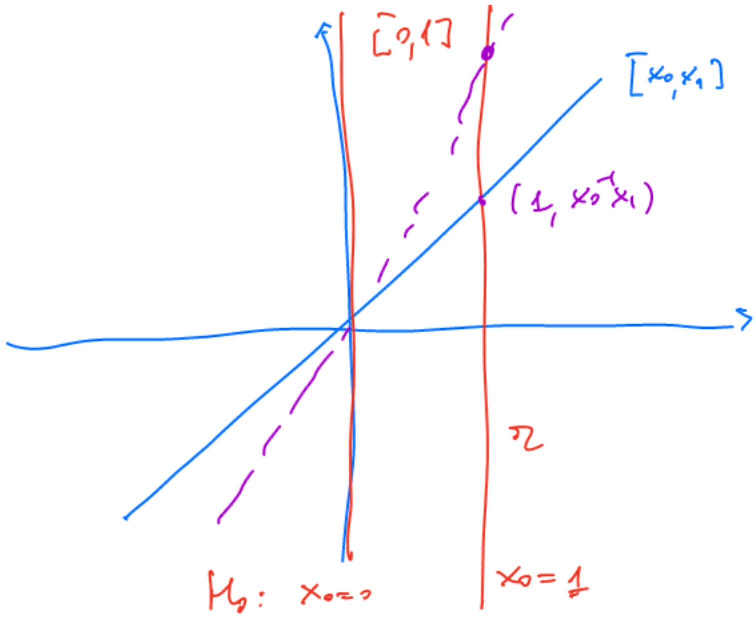
Per prima cosa si completa ad una base, si può completare con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il determinate è diverso da 0, a questo punto possiamo prendere P_1, P_2, P_3 come prima, $\widetilde{P}^4 = [0, 0, 0, 1]$ $U = [3, 2, 4, 6]$

Lezione 27 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-13

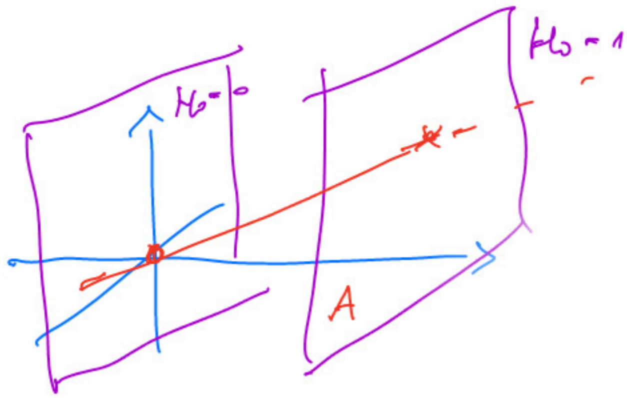
1 Ancora da definire



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = rette passanti per O $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $(\lambda x_0, \lambda x_1) \in \mathbb{A}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Osserviamo che ogni punto $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{H_0\}$ individua una retata parallela ad r (in $\mathbb{A}^2$), che interseca r nell'unico punti $(1, x_0^{-1}x_1)$
(Infatti dobbiamo imporre che $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ abbia prima coordinata 1, cioè $\lambda x_0 = 1$ cioè $\lambda = x_0^{-1}$
Viceversa ogni punto $(1.x) \in r$ appartiene ad un'unica retta per l'origine, quella che corrisponde al punti $[1, x] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$
In definitiva, abbiamo una corrispondenza biunivoca
$\mathbb{P}^1 \setminus H_0 \leftrightarrow r$

$\mathbb{P}^1 \leftrightarrow r \cup \{\infty\}$

$H_0 \leftarrow \infty$ punto all'infinito di r
La costruzione si generalizza a $\mathbb{P}^n \leftrightarrow$ rette per l'origine di $\mathbb{A}^{n+1}$
$[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \leftrightarrow$ rette $\{_0, \ldots, \lambda x_{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ $\quad H_0 = \{x_0 = 0\}$
Consideriamo l'iperpiano affine $A : \{x_0 = 1\} = \{(1, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\}$



$j : A \to \mathbb{P}^n \setminus \{H_0\}$
$(1, y_1, \ldots, y_n) \to [1, y_1, \ldots, y_n]$
$y^{-}1([x_0, \ldots, x_n] = \left[1, \dfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_0}\right]$

Quindi come sopra, ho una corrispondenza biunivoca

$$A \cup \{H_0\} \to \mathbb{P}^n.$$

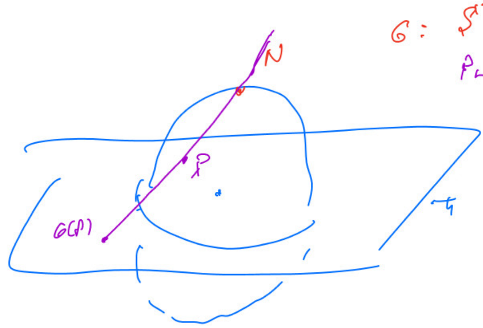
Se nella costruzione precedente identificavamo A con $\mathbb{A}^n$ tramite $(1, y_1, \ldots, y_n) \to (y_1, \ldots, y_n)$ otteniamo
$j_0 : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n\{H_0\}$
$j_0(y_1, \ldots, y_n) = [1, y_1, \ldots, y_n]$ passaggio a coordinate omogenee rispetto a x_0
$j_0^{-1}([x_0, \ldots, x_n]) = \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_0}\right)$ passaggio a coordinate non omogenee rispetto ad x_0
ci sono analoghe mappe per ogni $i \quad 0 \le i \le n$

Modello di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
E^3 spazio euclideo con coordinate x, y, z
$\pi = \{z = 0\} \quad S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 | d(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1\}$
$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Proiezione stereografica

$\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \pi$

$P \longmapsto \overrightarrow{NP} \cap \pi$



Se $P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NP} \quad \begin{cases} x = x't \\ t = y't \\ z = (z-1)t + 1 \end{cases}$

$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{1-z'} \\ \frac{y'}{1-z'} \\ 0 \end{pmatrix}$ **Esercizio**

σ è invertibile con inversa

$\sigma^-1 \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix} \mathrm{S}^2 \leftrightarrow \pi \cup \{\infty\}$

identifichiamo π con $\mathbb{C}$ tramite

$\pi \quad \to \quad \mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} u & v & 0 \end{pmatrix} \to u + iv$

Allora abbiamo ottenuto una corrispondenza biunivoca

$$\sigma : S^2 \to \mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

$$\sigma(N) = \infty.$$

$$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{x' + iy'}{1 - z'} \quad (z \neq 1).$$

3 Alcuni degli esercizi svolti a lezione

Esercizio
Determinare un'equazione cartesiana del piano da $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[1,1,0,1]$ we per i punti impropri delle rette

$$r = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}.$$

$$s = \begin{cases} 2x-y-2x+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}.$$

Il punto improprio di r è $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_0=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_{2x_3}=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow [0,0,-1,-1]$$

Per quanto riguarda s

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+x_0=0 \\ x_2+x_3-x_0=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow [0,1,-2,2]$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

4 Dualità

$\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^\star)$ $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}^V$ poichè $\dim V = \dim V^\star$
Osserviamo che $F, F' \in V^\star$ definiscono lo stesso punto in $\mathbb{P}^V$ se e solo se
$F' = \lambda F \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Ma in questo caso $\ker F = \ker F'$
Ne segue che l'iperpiano $\ker F$ dipende solo da $[F]$ Quindi si ha un'applicazione di dualità

$$\delta : \mathbb{P}^V \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}\}.$$

$$\delta([F]) = \mathbb{P}(\ker F).$$

δ è biunivoca
è iniettiva perché due funzionali non nulli che hanno lo stesso nucleo sono proporzionali.
Inoltre l'iperpiano di V è il nucleo di un funzionale, quindi δ è suriettiva

---

Diciamo che gli iperpiani $H_1, \ldots, H_s$ in $\mathbb{P}$ sono linearmenete indipendenti se lo sono $\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_s)$

Sia $\{e_0, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia $\{\eta_0, \ldots, \eta_n\}$ la corrispondente base duale di $V^\star : \eta_i(e_i) = \delta_{e_i}$

$$H \subseteq \mathbb{P}^n \quad a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

$$H = \mathbb{P}(\ker F) \quad F \in V^\star \text{ definita :}$$

$$F(\sum_{i=1}^n x_ie_i) = \sum_{i=1}^n a_ix_i.$$

Dove le a_i sono le coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo $\{\eta_0, \ldots, \eta_n\}$
In particolare $H = \delta([F])$ $\quad H = H[a_0, \ldots, a_n]$
$\mathrm{H}_0 = H_0[1, \underline{0}, \ldots, \underline{0}] = \delta([\eta_0]$
$\vdots$
$H_n = H_n[0, \ldots, 0, 1] = \delta([\eta_n])$

Definizione 1
$S \subset \mathbb{P}$ sottospazio, $\dim S = k \leq n-1$

$$\bigwedge_1(S) = \{ \textit{ iperpiani di } \mathbb{P} \textit{ che contengono } S\}.$$

dove $\bigwedge_1(S)$ è il sistema lineare di iperpiain di centro S

Esempi
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ $\quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^2$ che contengono $Q =$ fascio di rette di centro Q
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3$ $\quad S = \{r\}$

$\bigwedge_1(r) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono r = fascio di rette di centro r
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono Q = stella di rette di centro Q

Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-15

1 Conclusione Spazi proiettivi (godo)

V spazio vettoriale, $V^\star$, $\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^\star)$ spazio proiettivo duale
Se B è una base di V (ottenuta ad esempio a partire da un riferimento proiettivo di $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$), la base duale $B^\star$ di V^* può essere usata per introdurre in $\mathbb{P}^V$ un sistema di coordinate omogenee "duali"

$$0 \neq L \in V^\star \quad [L] \in \mathbb{P}^V.$$

se $x_1, \ldots, x_n$ sono coordinate in V rispetto a $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$$L(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = a_0 x_0 + \ldots + a_n x_n.$$

e L ha coordinate $(a_0, \ldots, a_n)$ rispetto alla base $B^\star = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$
$(v_i^*(v_j) = \delta_{ij})$
Qui il professore prende letteralmenete un altro file e iniza a scriverci sotto, non sappiamo a cosa si stia riferendo
Sia $S = \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ di dimensione k.

$$W^\# = \{F \in V^* | F|_W = 0\}.$$

$\dim W = n - k$

$$\delta : \{\text{sottospazi proiettivi di} \dim k \text{ di } \mathbb{P}\} \to \{\text{sottospazi proiettivi di } \mathbb{P}^V \text{ di dim } n-k-1\}.$$

$$\mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W^\#).$$

Osservazione
Se prendiamo $k = n-1$ sottospazi proiettivi di $\dim n-1$ in $\mathbb{P}$ = iperpiani di $\mathbb{P}$
Sottospazi proiettivi di $\dim 0$ in $\mathbb{P}^V$ = punti di $\mathbb{P}^V$
Quindi è facile vedere che $\delta = \widetilde{\delta}^{-1}$

Nomenclatura 1
δ (o δ^{-1}) si chiama corrispondenza di dualità

Lemma 1 (Proprietà della corispodenza di dualità)
1. *δ è biunivoca*
2. *δ rovescia le inclusioni*
3. $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$
$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$

Dimostrazione
1. Segue dal caso vettoriale
2. Segue dal fatto che $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1^\# W_2^\#$
3. $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$
$\delta(S_1 \cap S_2) = \delta(\mathbb{P}(W_1 \cap S_2)) = \mathbb{P}((W_1 \cap W_2)^\#) = \mathbb{P}(W_1^\# + W_2^\# = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$
$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) = \mathbb{P}((W_1 + W_2)^\#) = \mathbb{P}(W^\# \cap W^\#)$ *(manca una minchiata da finire)* □

Definizione 1
Un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^V$ si chiama sistema lineare
Il centro S di un sistema lineare L è l'intersezione degli iperpiani del sistema lineare
Allora L coincide con tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}$ che contengono S

$$L \leftrightarrow \Lambda_1(S) \text{ sistema lineare degli iperipani di centro } S.$$

Osservazioni
H iperpiano di $\mathbb{P}$ $\quad HS \Leftrightarrow \delta(H) \in \delta(S)$
Ne segue che se $\dim S = k$ allora $\dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 & (H_1) \\ \vdots \\ a_{n-k\ 0}x_0 + \ldots + a_{n-k\ n}x_n = 0 & (H_{n-k}) \end{cases} \qquad n{-}k \text{ equazioni indipendenti.}$$

$S = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-k}$
$\Lambda_1(S) = \delta(S) = \delta(H_1 \cap \ldots \cap H_{N-k}) = L(\delta(H_1), \ldots, \delta(H_{n-k}))$
$\Rightarrow \dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$
$k = n - 2 \quad \Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di iperpiani di centro S
$n = 2$ e S è una retta, allora $\Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di piani di asse la retta

---

$T : V \to W$ lineare

$$\begin{aligned} [T] : \mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(\ker T) &\to \mathbb{P}(W) \\ [v] &\to [T(v)] \end{aligned} \quad \text{È definita se } v \in V \setminus \ker T, \lambda \neq 0$$

$$[T][tv] = [T(tv)] = [\lambda T(v)] = [T(v)].$$

Osservazione
Se $\lambda \neq 0, \quad \ker T = \ker \lambda T$, inoltre

$$[\lambda T] = [T].$$

Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi e sia $\mathbb{P}(U)$ un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$

Definizione 2
$f : \mathbb{P}(V) \setminus P(U) \to \mathbb{P}(W)$ *si dice applicazione proiettiva se esiste*
$T : V \to W$ *lineare tale che* $[T] = f \qquad (\ker T \subset U)$

Problema
È possibile che un'applicazione proiettiva sia indotta da due applicazioni lineari diverse?

Proposizione 1
Siano $T, S : V \to W$ *due applicazioni lineari supponiamo che*
1. *Esiste* U *sottospazio di* V *tale che* $\ker T. \ker S \subset U$
2. $\forall v \in V \setminus U \quad \exists \lambda = \lambda(v) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *t.c.*

$$T(w) = \lambda S(v).$$

Allora $\lambda =$*const e* $T = \lambda S$ *in particolare* $\ker T = \ker S$

Corollario 1
Se $f : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(W)$ *è indotta da* $T, S : V \to W$ *allora,* $T = \lambda S, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
In particolare $\ker T = \ker S$ *e il dominio di* f *si può estendere a* $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T)$ *cioè esiste una trasformazione proiettiva*
$\widetilde{f} : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T) \to \mathbb{P}(W)$ *tale che*

$$\widetilde{f}|_{\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)} = f.$$

Tale dominio di definizione è massimale

Definizione 3
Un'applicazione proiettiva si dice non degenere se è indotta da un'applicazione lineare iniettiva, si dice degenere altrimenti.
Un'applicazione proiettiva non degenere $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *si dice proiettività*

Osservazione
Le proiettività formano un gruppo, denotato $PGL(V)$
Esempio
$PGL(n+1, \mathbb{K}) = PGL(\mathbb{P}^n_k) = PGL(\mathbb{K}^{n+1})$
sono le matrici di $GL(n_1, \mathbb{K})$ identificate se differiscono per uno scalare non nullo

$$PGL(n_1, \mathbb{K})/\text{matrici scalari non nulle}.$$

dove le matrici scalari non nulle $\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$

Dimostrazione (Proposizione)
Proviamo anzitutto che $\ker T = \ker S$
Sia Z *un complementare di* U *:* $\quad V = U \oplus Z \quad u + z \in V \setminus U$ *(poichse* $u + z \in U$ *anche* z *appartiene a* U *escluso* $\square$

Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-16

1 Parte mancante

Dimostrazione
Supponiamo che esista una base $\{z'_1, \ldots, z'_r\}$ *di* Z' *con* $z'_v \in V \setminus U$ *e* $\Sigma z'_i \in V \setminus U$
Sia $\lambda'_i = \lambda(z'_i), \quad \lambda_0 = \lambda(\Sigma z'_i)$
$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i)$
$T(\Sigma z'_i) = \lambda_i S('_i) = \lambda_0 \Sigma S(z'_i)$
$T(\Sigma z'_i) = \Sigma T(z'_i) = \Sigma \lambda_i S_(z'_i)$
quindi $\lambda_0 \Sigma S(z'_i) = \Sigma \lambda_i S(z'_i)$
$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0) S(z_i) = 0 \quad S(\Sigma(\lambda_i - \lambda_0) z'_i) = 0$

$$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0) z'_i \in \ker S = U.$$

$$\Rightarrow \Sigma(\lambda_i - \lambda_0) z'_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_0 \forall i.$$

$$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i) \Leftrightarrow T(Z'_i) = \lambda_0 S(z'_i) \Rightarrow T = \lambda_0 S.$$

Poichè gli z_i *sono una base)*
Resta da vedere che esiste una base con le proprietà richieste. Posso supporre (esercizio) che U *sia un iperpiano. Allora*

$$\dim Z' \cap U = \dim Z' - 1 \qquad \textit{perchè } Z \not\subset \ U.$$

(se fosse $Z' \subseteq U \quad V = U' \oplus Z' \subset U \neq V$*)*
Prendiamo $z'_1 \in Z' \setminus U$, $\{z_2", \ldots, z_r"\}$ *base di* $Z' \cap U$
Poniamo:

$$z'_2 = z'_1 + z_2"$$
$$z'_3 = z'_1 + z_3"$$
$$\vdots$$
$$z'_r = z'_1 + z_r"$$

Dato che $\{z'_1, \ldots, z'_r\}$ *è la base cercata, inatti i suoi elementi non appartengono ad* U*, perchè sono somma di un elemento in* U *e di uno fuori da* U*, Inoltre*
$\sum_{i=1}^r z'_i = r z'_1 + \sum_{i=1}^r z_i" \Rightarrow \notin U$
Tutto questo funziona se $(char \mathbb{K} = 0)$ $\square$

Teorema 1 (Teorema Fondamentale sulla proiettività)
Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $\mathbb{P}(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di dimensione n.
Date due $(n+2)$-ple $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$ e $[z_0], \dots, [z_n], [w]$ in $\mathbb{P}(Z)$ entrambe in posizione generale, esiste un'unica trasformazione proiettiva non degenere $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che

$$f([v_i]) = [z_i],\ 0 \le i \le n,\ \ e\ f([u]) = [w].$$

$Imf = \mathbb{P}(Z)$

Corollario 1
Dati $n+2$ punti in posizione generale $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = n$ esiste un unico isomorfismo $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n$ tale che

$$f([v_i]) = [e_i]\ \ e\ f([u]) = [e_0 + \ldots + e_n].$$

In altre parole, esiste un riferimento proiettivo in cui $[v_i]$ ha coordinate omogenee $[0 \ldots, 0, 1, \ldots, 0]$e $[w] = [1, \ldots, 1]$

Dimostrazione
Il fatto che $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ sono in posizione generale implica che
1. $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \{\alpha_0 v_0, \dots, \alpha_n v_n\}$ *è una base di V*
2. $u = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n$ *con* $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i$
(infatti, se fosse $\lambda_{j0} = 0$, avremmo che $u \in Span\{v_0, \dots, \cancel{v_{j0}}, \dots, v_n\}$
$\dim Span\{v_0, \dots, v_{j_0-1}, u, v_{j_0+1}, \dots, v)n\} = 0$
Sia $B = \{v_0', \dots, v_n'\}$ la base di V con $v_i' = \lambda_i v_i$. Ovviamente $[v_i] = [v_i']$
Scegliamo similarmente $\{z_0', \dots, z_n'\}$ base di Z con $z_0' + \ldots + z_n' = w$ e $\quad [z_i'] = [z_i]$
Sia $T : V \to W$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(v_i') = z_i' \quad 0 \le i \le n.$$

T è iniettiva poiché gli $\{z_i'\}$ sono indipendenti e $ImT = Span\{z_0', \dots, z_n'\} = Z$.
Inoltre
$T(u) = T(\sum_{i=1}^n v_i') = \sum_{i=1}^n T(v_i') = \sum_{i=1}^n z_i' = w$
quindi $f = [T]$ è non degenere e ha le proprietà indicate

$$f([v_i]) + f([\delta v_i'] = [T(v_i')] = [z_i'] = [z_i].$$

$$f([u]) = [T(u)] = [w].$$

□

Esempio
Determinare la proiettività di f in $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ tale che

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a coppie li denotiamo v_1, z_1

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

quindi $\lambda = -1, \quad \mu = +1, \quad \lambda' = 2, \quad \mu' = 2$

$v_0' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ inoltre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_0' + v_1'$

$z_0' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad z_1' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(v_i') = z_i' \quad i = 0, 1$

$$[\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{v_0',v_1'\}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$[\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{e_1,e_2\}} = [\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{v_0',v_1'\}} [\varphi]^{\{v_0',v_1'\}}_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_0 - 3x_1 \\ x_0 + x_1 \end{bmatrix}.$$

Lezione 31 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-22

1 Due Teoremi Classici

Teorema 1 (Desgardes)
$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ piano proiettivo, $P_1, \ldots, P_6 \in \mathbb{P}$ punti distinti tali che le tre rette

$$L(P_1, P_4) \quad L(P_2, P_4) \quad L(P_3, P_6).$$

abbiano in comune un punto $P_0 \neq P_i \quad 1 \leq i \leq 6$ Allora

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6), L(P_2, P_5) \cap L(P_5, P_6), L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5).$$

sono allineati

Dimostrazione
TODO AGGIUNGI DISEGNO
Siano $v_i \in V, \ \leq i \leq 6, \ t.c. \quad [v_i] = P_i$ Per ipotesi

$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6.$$

Inoltre poiché $P_0 \neq P_i, i > 1$, tutti gli α_i sono non nulli. I punti
$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$
$L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$
$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$ *sono associati ai vettori*
$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$
$= \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_5 v_4 - \alpha_6 v_6$
$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 - \alpha_5 v_5$ *la loro somma è zero. Dunque i punti corrispondenti sono allineati*
TODO Non ho capito se sta cosa deve terminare così (rivedere) $\square$

Teorema 2 (Pappo)
$A_1, \ldots, A_6$ distinti $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \ldots, L(A_6, A_1)$ distinte
esistono r, s rette con $A_i \in r$, i dispari, $A_i \in s$ i pari
Supponiamo poi $0 = r \cap s \neq A_i$. Allora

$$L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5), \quad L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6), \quad L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1).$$

sono allineati

TODO AGGIUNGI DISEGNO

Dimostrazione
Poiché $r = L(A_1, A_3), \quad s = L(A_2, A_4)$ sono distati e $0 \neq A_i$
A_1, A_2, A_3, A_4 è un riferimento proiettivo. Ma

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)b(1-1+a) + ab(1-a) = 0$$

□

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo di dimensione n $S = \mathbb{P}(U), \quad H = \mathbb{P}(W)$ sottospazi proiettivi tali che

$$S \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad L(S, H) = \mathbb{P}.$$

Se $\dim S = k, \dim H = h$ per le formule di Grassmann

$$k + h = n - 1.$$

$\forall P \in \mathbb{P} \setminus H, \quad \dim L(H, \{p\}) = h + 1$
Quindi $S \cap L(H, \{0\})$ è un punto
Posso definire la proiezione su S di centro H come

$$\pi_S^H : \mathbb{P} \setminus H \to \mathbb{P}.$$

$$P \to S \cap L(H, \{0\}).$$

π_S^H è unna trasformazione proiettiva degenere indotta da $\mathbb{P}_U^W : V \to V$ proiezione su U parallela ad H
TOOD AGGIUNGI DISEGNO

2 Proiettività

Siano in $\mathbb{P}^2$ r, s rette distinte con $A = r \cap s$

Definizione 1
*Dato $O \notin r \cup s$, la restrizione ad r della proiezione su s di centro O è detta **proiettività** di centro O*

TODO UN ALTRA IMMAGINE
f è un isomorfismo proiettivo. La notazione si generalizza a $\mathbb{P}^n$ nel modo seguente.
S_1, S_2 sottospazi di dimensione k, H sottospazio tale che

$$H \cap S_1 = G \cap S_2 = \emptyset.$$

$$\dim H = n - k - 1.$$

Allora la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H è un isomorfismo proiettivo $f : S_1 \to S_2$ detto prospettività di centro H

Definizione 2
Una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ *è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di* $\mathbb{K}[x, y]$*. Se* $f(x, y)$ *è un rappresentante della classe, l'equazione*

$$f(x, y) = 0.$$

si dice equazione della curva

$$l = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{A}^2 | f(x, y) = 0\}.$$

è il supporto della curva
$\deg f$ *grado della curva*

Caso affine
Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ l'affinità $T(X) = AX + C$

$$A = (a_{ij}) \in GL(2, \text{Ł}) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sia l una curva di equazioni $f(x, y) = 0$ La curva D di equazione

$$g(x, y) = 0.$$

ove $g(x, y) = f(a_{11}x_1 + a_{12}y + c_1, a_{21}x + a_{22}y + c_2)$
è detta la trasformata di l tramite T^{-1}

$$D = T^{-1}(l).$$

Se $T^{-1}X = BX + d \quad (B = A^{-1}, \ \ldots)$
allora $g(b_{11}x + b_{12}y + d_1, b_{21}x + b_{22}y + d_2) = A(x, y)$ quindi $l = T(D)$
è chiaro che se $p(x, y) \in D$ allora $T(p) \in l$ e viceversa.
quindi i supporti si dicono affinamente equivalente

Definizione 3
Data l *curva affine, una curva affine* D *si dice affinamente equivalente a* l *se esiste un'affinità* T *tale che* $l = T(D)$

Lezione 32 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-23

1 Omogeneizzati e Curvy

Curva algebrica affine in $\mathbb{A}^2$ (proiettivo su $\mathbb{P}^2$) La nozione si generalizza in modo ovvio al concetto di ipersuperficie (algebrica)

Definizione 1
Una ipersuperficie algebrica in $\mathbb{A}^n$ (rispettivamente $\mathbb{P}^n$) è una classe di proporzionalità di polinomi in

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \text{ (polinomi omogenei in } \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]).$$

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $\underline{X} = (X_0, \ldots, X_n)$
$\ell = f(\underline{x}) = 0$ *equazione della curva* $F(\underline{X}) = 0$
(x sono coordinate affini, X riferimento proiettivo)
supporto di ℓ $\{\underline{x} \in \mathbb{A}^n | f(x) = 0\}$ $\{[X_0, \ldots, X_n] | F(X) = 0\}$
$\varphi \in Aff(\mathbb{A}^n)$ $\psi \in PGL(n)$
ℓ *ipersuperficie definita da* $f(\underline{x}) = 0$
$\varphi(l)$: *ipersuperficie definita da*
$f(\varphi^{-1}(\underline{x})) = 0$

Qui il tipo ha corso un po troppo, TODO finire la definizioen e ci sta una mezza osservazione
$\ell : x^2 + y^2 = 1 \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} \quad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$
$\varphi(\ell) := (x-1)^2 + (x-1)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ ipersuperficie

Definizione 2
Due ipersuperfici affini ℓ_1, ℓ_2(proiettivi) sono affinemente equivalenti (proiettivamente equivalenti), se esiste $\varphi \in Aff(\mathbb{A}^n)(\psi \in PGL(n))$ tale che $\varphi(\ell_1) = \ell_2(\psi(\ell_1) = \ell_2)$

Nota:
$x_1 = \frac{X_1}{X_0}$
$f(\underline{x}) \to F(\underline{X})$ e questo si chiama polinomio omogeneizzato di F
Esempio
$x + y + z - 3 = 0 \rightsquigarrow \quad X_1 + X_2 + X_3 - 3X_0 = 0$

2 Chiusura proiettiva di ℓ

La chiusura proiettiva dell'ipersuperficie affine di equazione $f(\underline{x}) = 0$ è l'ipersuperficie proiettiva di equazione $F(\underline{X}) = 0$ dove F è il polinomio omogeneizzato di f
I punti di $l^\star \cap H_0$ si chiama punti impropri di ℓ ($\ell^\star$ è la chiusura proiettiva)
Se scriviamo f come

$$f(\underline{x}) = f_0 + f_1(\underline{x}) + \ldots + f_n(\underline{x}).$$

con gli f_i omogenei di grado i

$$F(X) = f_0 X_0^n + f_1(\underline{X}) X_0^{n-1} + \ldots + f_n(\underline{X}).$$

ad esempio

$$x^2 + 2xy + y^2 + z + 2x - 3 = 0.$$

diventa

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_3X_0 + 2X_1X_0 - 3X_0^2 = 0.$$

punti impropri: intersecano con $X_0 = 0$

$$[0, X_1, X_2, X_3] : X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

Quindi l'equazione dei punti omogenei è data da

$$f_n(\underline{X}) = 0.$$

3 Classificazione delle coniche proiettive

Le coniche proiettive sono le curve di secondo grado in $\mathbb{P}^2$
:a generica equazione può scriversi

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{12}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2.$$

Posto $a_{21} = a_{12}, a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}$, la forma precedente si scrive come

$$(1) \qquad \underline{X}^t AX = 0 \qquad \text{ove } A = (a_{ij}).$$

Se ora $M \in GL(3, \mathbb{K})$ e rimpiazziamo $\underline{X}$ con $M\underline{X}$ da (1) si ottiene
(2) $(\mathrm{M}\underline{X}^t)AM\underline{X} = 0$
$\underline{X}^t MAM\underline{X} = 0$
$\underline{X}^t B\underline{X} = 0 \quad B = M^t AM$ TODO
Per definire ℓ_2 è proiettivamente a ℓ_1
Viceversa ogni conica poriettiva equivalente a (ℓ_1) si ottiene in questo modo a partire da $M \in GL(3, \mathbb{K})$ in definitiva
classi di quivalenza proiettiva di coniche $\leftrightarrow$ classi di congruenza di matrici simmetriche

Definizione 3
La conica $\underline{X}^t A\underline{X} = 0$ *è:*
non degenere se $\det A \neq 0$
semplicemente degenere se $rkA = 2$ *e* $\det A = 0$
doppiamente degenere se $rkA = 1$ *e* $\det A = 0$

Teorema 1
Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chisuo. Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ *conica generale*
$x_0^2 + x_1^2 = 0$ *conica semplicemente degenere*
$x_0^2 = 0$ *conica doppiamente degenere*
Tali coniche non sono equivalenti tra loro

Dimostrazione
Dobbiamo solo classificare le matrici simmetriche 3×3 complesse rispetto alle componenti. Sappiamo che il rango è un invariante completo, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sono le uniche possibilità.

$\square$

Nota:
Un invariante completo caratterizza la matrice (se hanno rango uguale allora sono equivalenti e viceversa)

Teorema 2
Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ *conica generale*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ *conica generale a punti non reali*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$
$x_0 + x_1^2 = 0$ *sono coniche semplicemente degeneri*
$x_0^2 = 0$ *conica doppiamente degenere Queste coniche non sono equivalenti tra loro*

Dimostrazione
Utilizziamo il teorema di Sylvester per classificare le matrici reali simmetriche 3×3 *a meno di congruenza*
Sappiamo che gli indici sono invariante completo,
ora ricordiamo che stiamo classificando polinomi omogenei a meno di proporzionalità
(i_+, i_-, i_0)
$(3, 0, 0)$
$(0, 3, 0)$
$(0, 0, 3)$
$(2, 1, 0)$
$(2, 0, 1)$
$(0, 2, 1)$
$(1, 0, 2)$
$(0, 1, 2)$
$(1, 1, 1)$
TODO aggiungi immagine che sennò finisce male
Quindi ogni conica proiettiva è equivalente a unna delle cinque elencate.
Tali coniche non sono equivalenti perché hanno rango diverso oppure stesso rango ma supporti diversi □

Caso generale: quadriche proiettive
$\ell \quad \underline{X}^t A \underline{X} = 0 \quad A$ matrice simmetrica $(n+1) \times (n+1)$

Teorema 3
1.$\mathbb{K}$ algebricamente chiuso: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola quadrica poichè

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0 \qquad 0 \leq r \leq n.$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una e una sola quadrica

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = 0.$$

$0 \leq p \leq r \leq n,\ 2p \geq r-1, \quad r \geq 1$

Esempio
$x_0^2 - 1x_1^2 + x_1x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \qquad \det A = -\frac{1}{4} \neq 0$ ℓ è generale
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad i_+ \geq 1 \rightsquigarrow i_+ = 2, \quad i_- = 1, i_+ = 0$
$\rightsquigarrow$ equivalente a $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

Lezione 33 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Classificazione affine ed Euclidea

$\ell \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ conica
$\circledast a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{01}y + a_{00}$
pongo $a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}, a_{21} = a_{12}$ dunque la matrice $A = (a_{ij})$ è simmetrica.
Chiamo

$$\widetilde{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Allora } \circledast \text{ diventa.}$$

$$\widetilde{\underline{X}}^t A \widetilde{\underline{X}}.$$

Considera l'affinità $T_{M,C}(\underline{X}) = M\underline{X} + c$ ove $M \in GL(2, \mathbb{K}), \quad b \in \mathbb{K}^2$
Abbiamo visto che c'è un omomorfismo iniettivo

$$Aff(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \to GL(3, \mathbb{K}).$$

$$T_{M,C} \to \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0\,0 \\ c & M \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se effettuo il cambio di coordinate

$$\widetilde{\underline{X}} = \widetilde{M}\widetilde{\underline{X}}'.$$

l'equivalenza $\widetilde{\underline{X}}^t A \widetilde{\underline{X}} = 0$
diventa $(\widetilde{M}\widetilde{\underline{X}}')^t A \widetilde{M}\widetilde{\underline{X}}'$

$$\widetilde{\underline{X}}'^t B \widetilde{\underline{X}}' = 0.$$

con $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$
Questa equazione ci dice che il rango di A è una proprietà affine di ℓ. Chiameremo tale numero rango di ℓ (notazione $r(\ell)$
Diciamo che ℓ è
non degenere se $r(\ell) = 3$
semplicemente degenere se $r(\ell) = 2$
doppiamente degenere se $r(\ell) = 1$

$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
In altri termini, A_0 è la matrice della forma quadratica associata ai termini quadratici del polinomio $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ (A_0 è il minore ottenuto togliendo prima riga e prima colonna)
$\widetilde{\underline{X}} = \widetilde{M}\widetilde{\underline{X}}'$
$A \leftrightarrow B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$
$A_0 \leftrightarrow B_0 = M^t A_0 M \circledast$

Dunque anche rkA_0 è un invariante affine di ℓ

$\det A_0 \begin{cases} \neq 0 & \ell \text{ conica a centro} \\ = 0 & \ell \text{ parabola} \end{cases}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Da $\circledast$ deduciamo che anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine (infatti $\det B = (\det M)^2 \det A_0$)

$$\det B \begin{cases} > 0 & \ell \text{ ellisse} \\ < 0 & \ell \text{ iperbole} \end{cases} .$$

Teorema 1

Ogni conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è affinemente equivalente a una delle seguenti:
1) $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ *conica a centro 1*
$x^2 + y^2 = 0$ *conica a centro degenere 2*
$y^2 - x = 0$ *parabola 3*
$y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere 4*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere 5*
2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ *ellisse 1*
$x^2 + y^2 + 1 = 0$ *ellisse a punti non reali 2*
$x^2 + y^2 = 0$ *ellisse degenere 3*
$x^2 - y^2 - 1 = 0$ *iperbole 4*
$x^2 - y^2 = 0$ *iperbole degenere 5*
$y^2 - x = 0$ *parabola 6*
$y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere 7*
$y^2 + 1 = 0$ *parabola degenere 8*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere 9*
Le coniche di ognuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affinemente equivalenti

Dimostrazione

Partiamo da $\underline{\widetilde{X}}^t AX = 0$ e tramite affinità vogliamo ridurci ad uno dei casi elencati
Passo 1:
eliminazione del termine in xy
Poichè A_0 è simmetrica, esiste $M \in GL(2, \mathbb{K})$ tale che $M^t AM$ è diagonale. Quindi effetto la sostituzione $\underline{X} = M\underline{X}'$. L'equazione, nelle nuove coordinate $\underline{X}'$, che per comodità indichiamo ancora $\underline{X}$ è

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_0 0 = 0.$$

Osserviamo che la conica è a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$
Passo 2
Eliminazione dei termini lineari e costanti
Supponiamo ℓ a centro

effettuiamo la traslazione $\begin{cases} x = x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$ *che cambia l'equazione in* $a_1 1x'^2 + a_{22}y'^2 + c_0 0 = 0$

Se ℓ *non è a centro possiamo supporre, a meno di scambiare le variabili (ovvero effettuare l'affinità* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*) che risulti*

$$a_1 1 = 0, a_{22} \neq 0.$$

$a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$

Tramite la traslazione $\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$

l'equazione diventa

$$a_2 2y^{2\prime} + 2a_{01}x' + d_{00} = 0.$$

Se $a_{01} \neq 0$ *eseguo* $\begin{cases} x' = x'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ y' = y'' \end{cases}$

ottenendo $a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0$

se $a_{01} = 0 \quad a_{22}y'^2 + d_{00} = 0$

Passo 3

Normalizzazione dei coefficienti

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. *Sia* ℓ *a centro. Partiamo da*

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_{00} = 0.$$

se $c_{00} = 0 \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (2)$

Se $c_{00} \neq 0$

$$-\frac{a_{11}}{c_{00}}x^{2\prime} - \frac{a_{12}}{c_{00}}y^{2\prime} - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{11}}}x \\ y' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{22}}}y \end{cases} \quad \rightsquigarrow x^2 + y^2 - 1 = 0(1).$$

Sia ora ℓ *non a centro, trasformata in*

$$a_{22}y^{2\prime} + d_{00} = 0.$$

$d_{00} = 0 \quad y^{2\prime} = 0 \rightsquigarrow \quad y^2 = 0(5)$

$d_{00} \neq 0 \quad -\frac{a_{22}}{d_{00}}y^{2\prime} - 1 = 0$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-\frac{d_{00}}{a_{22}}}y \\ x' = x \end{cases} \quad \rightsquigarrow y^2 - 1 = 0(4).$$

Resta da vedere il caso ℓ *non a centro trasformata in*

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow y^2 - x = 0(3).$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ℓ *a centro*

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y^{2\prime} + c_{00} = 0.$$

Posso supporre $c_0 0 = 0$ *o* $c_0 0 = -1$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (1) - (5).$$

ℓ *non a centro del tipo*

$$a_{22}y'^2 + d_0 0 = 0.$$

Posso supporre $d_{00} = 0$ *o* $d_{00} = -1$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (7) - (9).$$

ℓ*a centro del tipo*

$$a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

Posso supporre $a_{22} > 0$ *e effettuare* $\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow 6$ $\square$

Osservazioni

1) Se ℓ è a centro, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{22}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} .$$

Ha soluzione unica (poichè $\det A_0 \neq 0$) (x_0, y_0)

Il punto con tali coordinate è il centro di simmetria, infatti la simmetria rispetto a tale punto

$$\begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases} .$$

manda ℓ in ℓ

Le rette passanti per $c = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si dicono diametri di ℓ

2) per calcolare i punti impropri di ℓ di equazione

$$\underline{\widetilde{X}}^t A \underline{\widetilde{X}} = 0.$$

bisogna risolvere l'equazione omogenea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

$\left(x = \dfrac{x_1}{x_0}, \quad y = \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ che ha discriminante $-detA_0$. Quindi le soluzioni sono
reali distinte ℓ iperbole
reali coincidenti ℓ parabola
complesse conugate ℓ ellisse

Teorema 2
Ogni conica di $\mathbb{E}^2$ è congruente a una delle seguenti
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b > 0$ *ellisse*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \quad a \geq b > 0$ *ellisse a putni non reali*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad a \geq b > 0$ *ellisse degenere*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$ *iperbole*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad a > 0, b > 0$ *iperbole degenere*
$y^2 - 2px = 0 \quad p > 0$ *parabola*
$y^2 - a^2 = 0 \quad a \geq 0$ *parabola degenere*
$y^2 + a^2 = 0 \quad a > 0$ *parabola degenere*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere*
le coniche elencate sono a due a due non equivalenti

Ultima lezione di teoria del nostro caro papi

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Boh

Osservazioni
1. Metrico = euclideo
2. Per distinguere l'ellisse non degenere a punti reali da quella a punti immaginari, si può usare il seguente criterio

$$A = (a_{ij})^2_{i,j=0} \quad A_0 = (a_{ij})^2_{i,j=1}.$$

$tr A_0 \det A \begin{cases} > 0 \text{ellisse a punti immaginari} \\ < 0 \text{ellisse a punti reali} \end{cases}$
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{\det A}{\det A_0} = 0$
Non ci sono soluzioni reali se e solo se $\lambda_1($ o $\lambda_2)$ hanno lo stesso segno di $\det A$, è equivalente dire

$$tr A_0 \det A > 0.$$

2 geometria delle coniche euclidee

Ellissi
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$
$a = b \quad x^2 + y^2 = a^2$ circonferenza di centro l'origine e rango a
Il supporto dell'ellisse è chiuso e limitato, infatti esso è centrato nel rettangolo delimitato dalle rette $x \pm a, \quad y = \pm b$

$$supp \quad \ell \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, \; |y| \leq b\}.$$

TODO INSERISCI IMMAGINI
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \rightsquigarrow y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y == \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Definizione 1
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\pm c, 0)$ *fuori di* ℓ

$$e = \frac{c}{a} \quad \textit{eccentriche di } \ell.$$

Nota
$0 \leq e < 1, \quad e = 0 \Leftrightarrow$ circonferenza

$$x = \pm\frac{a}{c}\text{manca qualcosa.}$$

Iperbole
$\dfrac{x^2}{e^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$
TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 2
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(\pm c, 0)$ *fuochi di* ℓ

$$e = \frac{c}{a} \qquad \textit{eccentricità } e > 1.$$

$$x = \pm \frac{a}{c} \qquad \textit{direttrici.}$$

Parabola
$y^2 = 2px$ $p > 0$ $y = \pm\sqrt{2px}$
TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 3
Il fuoco di ℓ $(\frac{p}{2}, 0)$

$$\textit{direttrice} \quad x = -\frac{p}{2} \quad e = 1 \quad \textit{eccentricità.}$$

Proposizione 1
L'ellisse (1) e l'iperbole (2) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze dai due fuochi ha somma (rispettivamente differenza) costante (rispettivamente costante in valore assoluto) uguale a $2a$

Proposizione 2
L'ellisse (1), l'iperbole (2), la parabola (3) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale ad e l'eccentricità della conica

Dimostrazione (proposizione 1)
Siano F, F' *i fuochi, di coordinate* $(c, 0), (-c, 0)$ *rispettivamente. Imponiamo la condizione*

$$|d(P, F) \pm d(P, F')| = 2a.$$

Se P *ha coordinate* (x, y) *risulta*

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a \quad \circledast\,.$$

Elevando due volte al quadrato, otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad .$$

Se $c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ellisse*
Se $c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *iperbole*
Per concludere, osserviamo che il luogo rappresentato da $\circledast$ *è precisamente (1) nel caso dell'ellisse e (2) nel caso dell'iperbole*

A questo scopo, basta osservare che il procedimento è reversibile a meno di affinità di segni nei radicali. Però la conclusione

$$c < a \quad \text{è compatibile col prendere} + \text{nell'equazione} \circledast\circledast.$$

$$c > a \quad \text{è compatibile col prendere} - \text{nell'equazione} \circledast\circledast.$$

$\square$

Dimostrazione (proposizione 2)
La condizione che definisce il luogo cercato è

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e.$$

$P = (x, y)$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - \frac{a}{c}|} = e.$$

$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a}{e})^2$
$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$
$x^2(1-e^2) + y^2 = \cancel{2(c - ea)x} + a^2 - c^2$ *dato che* $c = \frac{e}{a}$ *e* $e = \frac{c}{a}$
$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{b^2}{e^2}x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Gli altri cambi per l'iperbole sono analoghi e lasciati per esercizio $\square$

$\mathbb{P}^2$ TODO AGGIUNGI IMMAGINE
Più in generale, dati S_1, S_2 spazi proiettivi tali che $\dim S_1 = \dim S_2 = k$ in $\mathbb{P}^n$, e H sottospazio $H \cap S_1 = H \cap S_2 = \emptyset$ e $\dim H = n - k - 1$, la prospettività di centro M è la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H ; è un isomorfismo $S_1 \to S_2$
Esercizio
Siano in $\mathbb{P}^3$ T_1 il piano $x_3 = 0$ e T_2 il piano $x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0$

$$Q = [0, 1, -1, 1], \quad f : T_1 \to T_2 \quad \text{di centro } Q.$$

Trova equazioni cartesiane dell'immagine di $r = T_1 \cap T_3$ dove $T_3 : x_0 + x_1 = 0$
Risulta $f(r) = L(Q, r) \cap T_2$
r ha equazioni $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \end{cases}$
Il fascio di piani di asse r ha equazione

$$\lambda(x_0 + x_1) + \mu x_3 = 0 \qquad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Imponendo il passaggio per $[0,1,-1,1]$ otteniamo

$$\lambda + \mu = 0 \qquad [\lambda, \mu] = [1, -1].$$

$L(Q,r) : x_0 + x_1 - x_3 = 0 \quad f(r) \quad \begin{cases} x_0 + x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

Siano $r, s \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rette distinte, $A = r \cap s$ e $f : r \to s$ un isomorfismo proiettivo allora.

(a) f è una prospettività se e solo se $f(A) = A$

(b) Se $f(A) \neq A$, esiste una retta t in $\mathbb{P}^2$ e due prospettività $g : r \to t, \;\; h : t \to s$ tale che

$$f = h \circ g.$$

(c) Ogni proiettività $p : r \to r$ è composizione di al più tre prospettività

(a) per costruzione una prospettività fissa il punto A

TODO AGGIUNGI IMMAGINE

Viceversa, supponiamo che $f : r \to s$ sia tale che $f(A) = A$ **TODO AGGIUNGI IMMAGINE**

$L(P_1, Q_1) \cap L(P_2, Q_2) = 0 \notin r \cup s$

Se g è la rpospettività di centro O, risulta $g(A) = A, \;\; g(P_1) = Q_1, \;\; g(P_2) = Q_2$

Ma $A, P_1, P_2, \quad A, Q_1, Q_2$ sono punti in posizione generale

e pertanto, per il teorema fondamentale, $f = g$