Lezione 4 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-10

1 Altre informazioni sugli omomorfismi

Esercizio
Sia $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo dei gruppi
$ker\varphi = \{g \in G_1 | \varphi(g) = e_2\}$
Dimostrare che
φ è iniettivo $\Leftrightarrow ker(\varphi) = \{e_1\}$
soluzione:
supponiamo che $ker(\varphi) = \{e_1\}$
Allora dati $g, h \in G_1$ t.c $\varphi(g) = \varphi(h)$
dobbiamo mostrare che $g = h$
moltiplico per $\varphi(h)^{-1}$

$$\begin{gathered}\Rightarrow \varphi(h)^{-1} * \varphi(g) = e_2 \\ \Rightarrow \varphi(h^{-1}) * \varphi(g) = e_2 \\ \Rightarrow \varphi(h^{-1} \cdot g) = e_2 \\ \Rightarrow h^{-1} \cdot g \in ker\varphi \\ \Rightarrow h^{-1} \cdot g = e_1 \\ \Rightarrow g = h\end{gathered}$$

Il viceversa è lasciato al lettore come esercizio
Soluzione di un esercizio passato
1)Se $H_1 \subseteq G_1$ dimostriamo che $\varphi(H_1) \trianglelefteq \varphi(G_1)$
Verifichiamo che

$$f\varphi(H_1)f^{-1} \subseteq \varphi(H_1) \quad \forall f \in (G_1).$$

Quindi basta dimostrare che
$\forall h \in H_1 \quad \forall g \in G_1$ abbiamo
$\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in \varphi(H_1)$
Questo è equivalente a richiedere che

$$\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1})\varphi(H_1).$$

Ma $ghg^{-1} \in gH_1g^{-1} = H_1$ dato che $H_1 \trianglelefteq G_1$

$$\begin{gathered}\exists \tilde{h} \in H_1 \text{ t.c } g \cdot h \cdot g^{-1} = \tilde{h} \\ \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(\tilde{h}) \in \varphi(H_1)\end{gathered}$$

2) Se $H_2 \trianglelefteq G_2$ dimostriamo che $\varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq G_1$
Ho due omomorfismi,
li compongo:

$$\psi : G_1 \underset{\varphi}{\to} G_2 \underset{\pi}{\to} G_2/H_2.$$

Studia il $\ker(\psi)$
$\ker(\psi) := \{g \in G_1 | \psi(g) = H_2\} = \{g \in G_1 | \varphi(g)H_2 = H_2\}$
$ker(\psi) = \{g \in G | \varphi(g) \in H_2\} = \varphi^{-1}(H_2)$
Quindi $\varphi^{-1}(H_2)$ è il nucleo di un omomorfismo $\psi : G_1 \to G_2/H_2$ e dunque $\varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq G_1$
Osservazione:
Se $\varphi : G_1 \to G_2$
omomorfismo di gruppi
$H_2 = \{e_2\} \trianglelefteq G_2$
l'esercizio (2) ci dice che $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e_2\}) \trianglelefteq G_1$
Osservazione
Dalla parte (1) segue che
$H_1 \leq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \leq G_2$
Quindi se scelgo $H_1 = G_1 \leq G_1$
$\Rightarrow Im(\varphi) = \varphi(G_1) \leq G_2$

2 Parte figa della lezione

Lemma 1
$(G, \cdot)$ gruppo
$N \trianglelefteq G, H \trianglelefteq G$ sottogruppi normali
$\pi : G \to G/N$
Allora $\pi(H) = \pi(HN)$

Dimostrazione
$H \subseteq HN$ poiché $e \in N$ ogni elemento di H lo scrivo come lui stesso e $\Rightarrow \pi(H) \subseteq \pi(HN)$
Viceversa dimostriamo che $\pi(HN) \subseteq \pi(H)$
infatti:
$\forall h \in H \quad \forall n \in N$
$\pi(hn) = \pi(h)\pi(n)$ *(omomorfismo)*
$n \in N$
$\Rightarrow \pi(n) = N \to \pi(h)\pi(e) = \pi(ne)$
$\pi(e) = N \qquad = \pi(n) \in \pi H$ $\square$

Lemma 2
$(G, \cdot)$ *gruppo*
$\cdot H \trianglelefteq G$
$\cdot N \trianglelefteq G$
$\cdot \pi \to G/N$
Allora:
$1) \pi^{-1}(\pi(H)) = HN$
$2)$ *se* $N \subseteq H \to \pi^{-1}(\pi(H)) = N$
$3) \bar{H} \leq G/N \to \pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \bar{H}$

Dimostrazione (1)
$\pi^{-1}(\pi(H)) =?$
osserviamo che dal lemma 1
$\pi(H) = \pi(HN) = HN$
dato che $\pi(hn) = \pi(h)\pi(n) = hn$
$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}(\pi(HN)) = \pi^{-1}(HN) \supseteq HN$
Resta da verificare che $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$

$$\begin{gathered}
\pi^{-1}(\pi(H)) := \{g \in G | \pi(g) \in \pi(H)\} \\
= \{g \in G | \exists g \in H : \pi(g) = \pi(h)\} \\
= \{g \in G | \exists h \in H : \pi(h)^{-1}\pi(g) = N\} \ N\text{= elemento neutro in } G \\
= \{g \in G | \exists h \in H : \pi(hg) = N\} \\
= \{g \in G | \exists h \in H : h^{-1}g \in N\} \\
= \{g \in G | \exists h \in H : g \in hN\acute{r}brace \subseteq HN
\end{gathered}$$

segue (1) □

Dimostrazione (2)
È un caso particolare del punto 1, infatti se

$$N \subset H \Rightarrow HN = H.$$

□

Dimostrazione (3)
Segue dal fatto che $\pi èunomomorfismosuriettivo$

$$\pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \pi(G) \cap \bar{H} = \bar{H}.$$

□

Teorema 1
$(G, \cdot)$, $n \trianglelefteq G$
Allora esistono due corrispondenze biunivoche

$$\{sottogruppi\ H \leq G\ \ t.c.\ \ N \supseteq H\} \to \{sottogruppi\ di\ G/N\}$$
$$H \to \pi(H)$$
$$\pi^{-1} \leftarrow \bar{H}$$
$$\{\ sottogruppi\ normali\ H \trianglelefteq G\ t.c\ N \subseteq H\} \to \{\ sottogruppi\ normali\ G/N\}$$
$$H \to \pi(H)$$
$$\pi^{-1}(\bar{H}) \to \bar{H}$$

Dimostrazione
Il lemma 2 (punti 2 e 3) garantisce che le due applicazioni $H \to \pi(H)$ $\pi^{-1}(H) \to \bar{H}$
sono una l'inversa dell'altra □

Osservazione:
Per la seconda corrispondenza osserviamo che per la suriettività di π e l'esercizio di oggi

$$H \trianglelefteq G \to \pi(H) \trianglelefteq G/N.$$

Teorema 2 (Teorema di omomorfismo)
$\varphi : G_1 \to G_2$ *omomorfismo*
$\cdot N \trianglelefteq G_1$
$\pi : G_1 \to G/N$
Allora:
1) esiste unico omomorfismo
$\bar{G}/N \to G_2$

t.c. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$
$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & G_2 \\ G_1/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

2) $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi)$
3) $\bar{\varphi}$ *è iniettivo* $\Leftrightarrow ker\varphi = N$

Dimostrazione
La condizione $\bar{\varphi} \cdot \pi = \varphi$
Significa
$\forall g \in G_1$ *si ha*
$\bar{\varphi} \cdot \pi(g) = \varphi(g)$
ovvero
$\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g)$
Dobbiamo verificare:
$\cdot$ *Unicità (segue da* $\bar{\varphi} \cdot \pi = \varphi$*)*
$\cdot\bar{\varphi}$ *è ben definita*

$\cdot\bar{\varphi}$ *è un omomorfismo*
significa che se $gN = fN$ *per qualche* $g, f \in G_1$, *allora* $\varphi(g) = \varphi(f)$
Verifichiamo:
$gN = fN \to g \equiv f mod N$
$\Rightarrow \exists n \in N$ *t.c.* $g^{-1}f = n$
$\Rightarrow f = gn \Rightarrow \varphi(f) = \varphi(gn)$
$\Rightarrow \varphi(f) = \varphi(g)\varphi(n) = \varphi(g)$
dato che $\varphi(n) = e_2$ *ovvero* $N \subseteq \ker\varphi$
Mostriamo adesso che* $\bar{\varphi}$ *è un omomorfismo
Significa che $\forall f, g \in G$

$$\bar{\varphi}((fN) \cdot (gN)) = \bar{\varphi}(fN) \cdot \bar{\varphi}(gN).$$

Per definizione

$$\bar{\varphi}((fN)(gN)) = \bar{\varphi}(fgN) = \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g).$$

2)$\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$
dalla suriettività del π *segue che* $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi)$
3)$\bar{\varphi}$ *è iniettivo* $\Leftrightarrow ker\bar{\varphi} = \{N\}$
$ker\bar{\varphi} = \{gN \in G_1/N | \bar{\varphi}(gN) = e_2\}$
$= \{gN \in G_1/N | \varphi(g) = e_2\}$
$= \{gN \in G_1/N | g \in ker(\varphi)\}$ $\square$

Corollario 1
$(G, \cdot)$, $N \trianglelefteq G$
Allora esiste una corrispondenza biunivoca

$$\{omomorfismi\ \varphi : G \to G'\ t.c.\ N \subseteq ker(\varphi)\} \to \{omomorfismi\ G/N \to G'\}$$
$$\varphi \to \bar{\varphi}$$
$$\pi \leftarrow \bar{\varphi}$$

Dimostrazione
basta osservare che
dato $\bar{\varphi} : G/N \to G'$ *la composizione*
$\bar{\varphi} \circ \pi : G \to G'$ *è un omomorfismo*
tale che $ker(\bar{\varphi} \circ \pi) \supseteq N$
segue $\pi(N) = N$ *che è l'elemento neutro di* G/N
$\Rightarrow \bar{\varphi} \circ \pi(N) = e'$ *che è l'elemento neutro di* G'

$\square$

Definizione 1
$\varphi : G_1 \to G_2$
omomorfismo si dice isomorfismo se è invertibile

Teorema 3 (Primo teorema di isomorfismo)
$\varphi : G_1 \to G_2$
Allora:
$Im(\varphi) \cong G_1/ker(\varphi)$
Dove $\cong$ *(isomorfo) significa che esiste un isomorfismo tra i due gruppi*

Dimostrazione

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G_2 \\ G_1/N \arrow[ur, "\exists!\overline{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

scelgo $N - ker\varphi$
il teorema di isomorfismo fornisce un omomorfismo iniettivo

$$\bar{\varphi} : G_1/\ker\varphi \to G_2.$$

Allora mi restringo all'immagine di $\bar{\varphi}$ *così diventa suriettiva*

$$G/ker\varphi \cong Im(\bar{\varphi}) \cong Im(\varphi).$$

la prima tramite $\bar{\varphi}$ *la seconda per il teorema di isomorfismo*
Applicazione:
det: $GL_n(\mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^*, \cdot) = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$
$\ker(det) = SL_n(\mathbb{K})$ *matrici con det 1*
$\Rightarrow GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^*, \cdot)$ $\square$