Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

1 Ultima Parte teorica prima del compito

$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$
$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 1 (Riflessione)
Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"
Possiamo fissare $c = 0 \;\; p_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$
Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \quad \rightarrow \quad \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

altrimenti è una traslazione (che è l'identità $= D$)
Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$
Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \qquad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$
TODO disegno
In coordinate rispetto ad un riferimetno cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right)$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \qquad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x - d) + d - x) + x.$$

dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente
$\underbrace{R_{\theta+\varphi}(x - d)}_{\text{parte lineare}} + R_\theta(d - c) + c$

T T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d - c) = (d - c).$$

che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 2 (Glissoriflessione)
Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ di una riflessione di asse r con una traslazione $t_v \neq Id$ con $v \neq 0, v \parallel r$

TODO disegno

Teorema 1 (Charles, 1831)
Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione
Sia $f \in Isom(E)$
Se f *ha un punto fisso abbiamo già visto che* f *è una rotazione se è diretta o una riflessione se* f *è inversa*
se f *diretta priva di punti fissi. Allora anche* f^2 *non ha punti fissi, perché se* $f^2(p) = p$
Disegno TODO
Dunque $f(M) = M$ *escluso.*
DIco che $p, f(p), f^2(p)$ *che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati, Altrimneti* ***Disegno TODO***

$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p))(\text{ poichè } f \text{ è un'isometria}).$$
$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché f *preserva l'orientazione, il triangolo* $QPf(P)$ *viene trasformato in* $Q, f(P), f^2(P)$ *da cui* $f(Q) = Q$
Dunque tutti i punti $f^i(P), \quad i \geq 0$ *sono allineati, quindi se* r *è la retta che li contiene,* f *agisce su* r *come una traslazione.*
Poiché f *è diretta,* f *agisce su tutto il piano come una traslazione.*

Sia ora f *inversa senza punti fissi,*
Allora f^2 *è diretta e come prima* $f^2 = t_v$ *per qualche* v
Sia $P \in E$ *un punto* $r_0 = \overrightarrow{Pf^2(P)}, \quad r_1 = \overrightarrow{f(P)f^2(P)}$
sono rette parallele che sono scambiate tra loro da f
Disegno TODO
Sia r *la retta equidistante da* r_0 *e* r_1.
Allora $f(r) \subseteq r$ *Ma* $f^2 = t_v \ f|_r = t_{v/2}$
Se ora consideriamo $t_{-v/2} \circ f$
questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente r,
quindi è una riflessione che indichiamo con ρ. *Dunque*

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

□

2 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Ricorda
$f \in End(V)$ diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f
$\Leftrightarrow A = [f]_B^B$ B base $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$ è diagonale

Lemma 1
Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ha solo radici reali

Dimostrazione
$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C}) \quad L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore e $x \neq 0$ un corrispondente autovettore

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t(Ax) = \overline{x}^t(\lambda x) = \lambda\overline{x}^t x$
$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda}\overline{x}^t x$
$\overline{x}^t x = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i \leftarrow$ *è un numero reale positivo poiché $x \neq 0$*

$$\lambda\overline{x}^t x = \overline{\lambda}x^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda.$$

$\square$

Teorema 2 (Teorema Spettrale)
Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $T \in End(V)$ un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per T

Corollario 1
Per ogni matrice reale simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $N \in O(n)$ tale che

$$N^{-1}AM = N^tAN \qquad \textit{è ortogonale.}$$

Dimostrazione (Teorema)
Per induzione su $n = dim(V)$. Base $n = 1$ ovvia
Supponiamo $n = dim(v) \geq 2$. Poichè T è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi T ammette un autovalore λ d sia e_1 il suo corrispondente autovettore di lunghezza 1

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^{\perp}.$$

Chiamo $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$
Dico che $T|_U : U \to$, per cui $T|_U \in End(U)$
Infatti, dimostro che $u \in U \to T(u) \in U$

ipotesi: $\langle u, e_1 \rangle = 0$
Tesi: $\langle Tu, e_1 \rangle = \langle u, T^t e_1 \rangle = \langle u, Te_1 \rangle = \langle u, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0$
dove abbiamo usato la simmetria di T
Chiaramente $T|_U$ *è simmetrico, quindi per induzione* U *ha una base ortonormale di autovettori* $\{e_2, \ldots, d_n\}$.
Ne segue che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *è una base ortonormale di* V *formata da autovettori per* T $\square$