Lezione 26 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-09

1 Mappe tra spazi proiettivi

Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Definizione 1
Un'applicazione $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *si dice trasformazione proiettiva se esiste un'applicazione lineare iniettiva* $\varphi : V \to W$ *tale che*

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall\, v \in V \setminus \{0\}.$$

Osservazione
Scriviamo $f = \bar{\varphi}$ e diciamo che φ induce f.
Notiamo che $\bar{\varphi} = \overline{\lambda\varphi} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi la famiglia $\{\lambda\varphi | \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ induce la stessa trasformazione proiettiva

Nomenclatura 1
◦ *Se* φ *è un isomorfismo* $f = \bar{\varphi}$ *si chiama isomorfismo proiettivo*
◦ *Se* $\varphi : V \to V$ *è un isomorfismo,* $f = \bar{\varphi}$ *si chiama proiettività*
◦ $A, B \subseteq \mathbb{P}(V)$ *sono proiettivamente equivalenti se esiste proettività* f *tale che* $f(A) = B$

Formula di Grassmann Proiettiva
$S_1 = \mathbb{P}(W_1) \quad S_2 = \mathbb{P}(W_2)$
$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \quad L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$
Dove $L(S_1, S_2)$ è il minimo sottospazio che contiene S_1, S_2

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

$$\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

$\Rightarrow$ se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}$ allora S_1, S_2 sono incidenti

2 Sottospazi in posizione Generale

Definizione 2
S_1, S_2 *sottospazi di* $\mathbb{P}(V)$ *sono in posizione generale se* $S_1 \cap S_2$ *ha dimensione minima*

Osservazione
Se $\dim S_1 = h, \dim S_2 = k, \dim \mathbb{P} = n$ allora S_1, S_2 sono in posizione generale se

$$\dim S_{12} = h + k - n \quad \text{se } h + k \geq n.$$

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad \text{se } h + k < n.$$

Definizione 3 (Cono proiettivo)
$J \subseteq \mathbb{P}(V), \quad P \in \mathbb{P}$
Il Cono proiettivo J di p è definito con

$$C_p(J) = \bigcup_{Q \in J} L(P, Q).$$

Esercizio 1. $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo, allora

$$C_p(S) = L(P, S).$$

2. S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi, allora

$$L(S_1, S_2) = \bigcup_{P_1 \in S_1, P_2 \in S_2} L(P_1, P_2) = \bigcup_{P_2 \in S_2} C_{P_2}(S_1).$$

$H \in \mathbb{P}$ iperpiano $P \in \mathbb{P} \setminus H$
La proiezione di H di centro P è l'applicazione

$$\pi_{P,H} : \mathbb{P} \setminus \{P\} \to H.$$

$$\pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H.$$

Osserviamo che se $J \subseteq \mathbb{P}$ e $p \notin J$

$$\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J).$$

Esempio[Corazzata Cotionkin]
Nota
$\mathbb{P}^N, \quad H_0 = \{x_0 = 0\} = \{[0, x_1, \dots, x_N] \in \mathbb{P}^N\}$
Dato che punti proporzionali ci danno lo stesso risultato dire $x_0 = 1$ non avrebbe senso, sarebbe identico a $x_0 = 3$

Se $P = [1, 0, \dots, 0] \notin H_0$
Se $Q = [x_0, \dots, x_N]$, allora

$$\pi_{P,H}(Q) = [0, x_1, \dots, x_N].$$

$L(P, Q) = [\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \dots, \mu x_n]$
$L(P, Q) \cap H_0$
Esempio
$[1, 2, 1][0, 1, -1]$

$$\{\lambda[1, 2, 1] + \mu[0, 1, -1] | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \neq (0, 0)\}.$$

Qui c'è lo spazio quoziente $(\lambda, \mu)/\lambda \sim \mu$

---

3 Posizione generale di sottospazi in $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^4$

$\dim S_1 = h$
$\dim S_2 = k \quad \dim S_1 \cap S_2 = \begin{cases} h+k-n & h+k \geq n \\ -1 & h+k < n \end{cases}$
$\dim \mathbb{P} = n$
qui ci sono un bel po di tabelle, conviene copiarle a mano

Osserviamo che in un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^n$ sia $e_0, \ldots, e_n$ individua i punti fondamentali ed il punto unità, e questi sono in posizione generale

$$F_0 = [e_0], \ldots, F_n = [e_n], u = [e_0 + \ldots + e_n].$$

ogni $(n+1)$-ple di righe ha rango massimo $\begin{matrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 \ldots & 1 \\ 1 & 1 \ldots & 1 \end{matrix}$

Esempio $\mathbb{P}^2$ $[e_0]$ $\begin{matrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \end{matrix}$ tutti i minori di rango 3 sono non zero

Viceversa, data una $(n+2)$-pla di punti in posizione generale, esiste un unico riferimento proiettivo che il ammette come punti fondamentali e punti unità.
Siano dati $P_0, \ldots, P_n$ n punti in posizione generale,
supponiamo che $P_i = [v_i], \quad i = 0, \ldots, n$
Allora $\{v_0, \ldots, v_n\}$ è una base di V. Se $n \in V$ è tale che $N = [n]$, allora

$$n = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

in modo unico.
Osserviamo che per l'ipotesi di posizione generale, tutti i λ_i sono diversi da zero.
Allora $(\lambda_0 v_0) \ldots (\lambda v_n)$ è un riferimento con le proprietà valide: infatti i punti fondamentali sono

$$[\lambda_i v_i] = [v_i] = P_i.$$

$$[(\lambda_0 v_0) + \ldots + (\lambda_n v_n) = [n] = V.$$

4 Esercizi

Verificare che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$[\frac{1}{2}, 1, 1], \quad [1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}], \quad [2, -1, 2].$$

Sono allineati e trovare un'equazione della retta che li contiene
Svolgimento

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 12 - 2 - 10 = 0$$

Altro Esercizio:
Determinare i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui le rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$ax_1 - x_2 + 3ix_0 = 0.$$

$$-iax_1 + x_1 - ix_2 = 0.$$

$$3ix_2 + 3x_0 + x_1 = 0.$$

sono concorrenti (si intersecano in un punto)
Svolgimento
Le rette sono concorrenti se e solo se il sistema delle tre equazioni ha una soluzione non nulla

$$A = \begin{pmatrix} 3i & a & -1 \\ -ia & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0 \qquad ra^2 + 4ia + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{-ra^2 - 21a^2}}{3} = \begin{cases} i \\ -\frac{7}{3}i \end{cases}$$

Here we go again
Si considerano i punti seguenti in $\mathbb{P}^3(R)$

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \; P_2 = [0, 1, 1, 1], \; P_3 = [2, 1, 2, 2], \; P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

a. Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale
b. Calcola $\dim L(P_1, P_2, P_3, P_4$ e trovare equazioni cartesiane
c. Completare, se possibile, P_1, P_2, P_3 a un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$
Svolgimento
I punti dati sono in posizione generale se posto $P_i = [v_i], \; v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tuttavia il determinante del minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diverso da 0

$$L(P_1, P_2, P_3, P_4) = L(P_1, P_2, P_3).$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_0 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Ultimo punto dell'esercizio
Per prima cosa si completa ad una base, si può completare con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il determinate è diverso da 0, a questo punto possiamo prendere P_1, P_2, P_3 come prima, $\widetilde{P}^4 = [0, 0, 0, 1]$ $U = [3, 2, 4, 6]$