Lezione 4 Analisi Numerica

Federico De Sisti

2025-10-09

0.1 Parte che hai sul tablet

0.2 Parte nuova

Cosa facciamo con l'output di lu di matlab?

$$A = lu(A)$$
$$[\tilde{L}, U] = lu(A) \qquad \tilde{L} = P_1 P_2, , P_{n-1} L$$
$$[L, U, P] = lu(A)$$

Per risolvere $Ax = b$ dobbiamo usare anche P.

$$Ax = b \tag{1}$$
$$PAx = Pb \tag{2}$$
$$LUx = Pb \tag{3}$$

posso quindi risolvere:

$$Ly = Pb \qquad \text{triang. inf.} \tag{4}$$
$$Ux = y \qquad \text{triang. sup.} \tag{5}$$

Bisogna scrivere queste due funzioni per la risoluzione di sistemi triangolari superiori e inferiori.
Sul manuale c'è "forwardrow" per risolvere un sistema triangolare inferiore.
$Ly = c, \quad i = 1, \ldots, n \quad y_i = \frac{1}{l_{ii}}(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j)$
Nota:
Questo funziona anche per il primo elemento y_1, questo poichè i parte da 1 e non entra quindi nel "ciclo" (sommatoria)
$L(i, 1 : i-1) * y(1 : i-1)$ è la sommatoria
Si può anche sovrascrivere la soluzione sul vettore del termine noto, tanto una volta utilizzata una componente non mi serve più.
$c = forwardrow(L, c)$ mi restituisce il vettore soluzione.
$y = backwardrow(U, y)$ che risolve il sistema $Ux = y$
$u = n : -1 : 1$
$x_i = \frac{1}{u_{ii}} = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)$
lukji, forwardrow, backwardrow sono 3 funzioni che vanno preparate per il laboratorio.
$Ax = b$ in matlab, $x = A \backslash b$ sottintende $x = U \backslash (L \backslash (P * b))$
ovvero $y = L \backslash (P * b)$ e poi $x = U \backslash y$
Per controllare quindi che la soluzione sia corretta possiamo utilizzare questo metodo.

0.3 Piovting parziale

Si utilizza per aumentare la stabilità del metodo risolutivo.
$A = \begin{pmatrix} 10^{-13} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
La norma spettrale di questa matrice è $K_2(A) = 2,6180$
$b = A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ Metto b in questo modo per avere una soluzione di tutti 1
$b = sum(A, 2)$ (matlab lavora per colonne di base), trova il vettore riga A senza secondo argomento, con 2 si specifica di lavorare sulla seconda dimensione e trova il vettore somma di tutte le righe (controlla che sia vero)
$\hat{L}, \hat{U} = A + \delta A$ dove δA è una piccola perturbazione
con la norma di Schur (?) (massimo modulo tra tutti gli elementi della matrice)
$\|\hat{L}\|_\Delta \cong 10^{12}$
$\|\hat{U}\|_\Delta \cong 10^{13}$
$\|A\|_\Delta = 1$
Questo succederebbe se non facessi permutazioni (che non sono obbligatorie dato che non ci sono 0 sulla diagonale).
$\|x^{LU} - 1\|_2 = 8 \cdot 10^{-4}$ ovvero c'è un errore di ordine 10^{-4} che è molto grande, ci aspettiamo 16 cifre significative esatte in matlab.
$\|x^{PA=LU} - 1\|_2 = 0$ (attuando la permutazione)
$\tilde{L}\tilde{U} = PA + \delta A$
$\|\tilde{L}\| = 1 = O(1)$ (una piccola costante)
$\|\tilde{U}\| = 1$
Si dice che la fattorizzazione $PA = LU$ è stabile in senso debole

$$\frac{\|\tilde{\delta A}\|_\Delta}{\|A\|_\Delta} = P(\rho_n \cdot eps).$$

eps è l'epsilon di macchina ovvero $2.2 \cdot 10^{-16}$ è la precisione macchina, è la differenza tra 1 e il successivo numero macchina.
ρ_n dovrebbe dipendere linearmente da n ed essere relativamente piccolo. Questa dipendenza da n mi fa parlare di stabilita in senso debole.
In esempi costruiti appositamente si ha anche $\rho_n = 2^{n-1}$, ma in genere dipende linearmente da n.
Quando si parla invece di stabilità in senso forte il rapporto tra le norme di Schur è un O grande di una costante non dipendente dalla dimensione.