Dispense di Geometria I
Seconda Parte

Federico De Sisti

1 Prefazione

Scrivo queste dispense in vista del secondo esonero dato il mio (potentissimo) 21 al primo. Governo ladro speriamo che il secondo vada meglio

L'utilizzo di queste dispense è solamente riservato a chi mi sta particolarmente simpatico quindi siate lieti di essere in questa cerchia.

Ciò che è scritto in queste dispense viene solamente dalle lezioni del Papi del 2024, potrei aggiungere qualcosa del libro di Edoardo Sernesi (mio padre).
Detto ciò cominciamo subito questo magico viaggio!

1.1 Prodotti Hermitiani

V spazio vettoriale complesso

Definizione 1 (Funzione sesquilineare)
Una funzione sesquilineare su V è un'applicazione $h : V \times V \to \mathbb{C}$ che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$\begin{aligned}
&h(v + v', w) = h(v, w) + g(v', w)\\
&h(\alpha v, w) = \alpha h(v, w)\\
&h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w')\\
&h(v, \alpha w) = \overline{\alpha} h(v, w)
\end{aligned}$$

per ogni scelta di $v, w, v', w' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

Definizione 2 (Forma hermitiana)
Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

Osservazione
Se h è hermitiana, $h(v, v) \in \mathbb{R}$, infatti deve risultare $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

Definizione 3 (Forma antihermitiana)
Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

Osservazione
In questo caso $h(v, v) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$

Definizione 4
Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Definizione 5
Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

Esempio
$V = \mathbb{C}^n$

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

Dato V, consideriamo una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.
Se h è una forma heritiana, diciamo che $H = (h_{ij}) = h(v_i, v_j)$ è la matrice che rappresenta h nella base B.
se $u = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(u,w) &= h(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h_i(v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \overline{y} \end{aligned}$$

Dato che h è hermitiana, abbiamo $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$ da cui segue

$$\begin{aligned} X^t H Y &= \overline{Y^t H X} \\ &= \overline{Y}^t \overline{H X} \\ &= (\overline{Y}^t \overline{H X})^t \\ &= \overline{X}^t \overline{H}^t \overline{Y} \quad \Rightarrow \quad H = \overline{H}^t \end{aligned}$$

Definizione 6
Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$

2 Operatori Unitari

Definizione 7
Sia $T \in End(V)$ *questo si dice unitario se*

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, \rangle.$$

Lemma 1
$T \in End(V)$ *operatore unitario*
1. *Gli autovalori hanno modulo 1*
2. *Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali*

Dimostrazione
1. *Sia* v *un autovettore di autovalore* λ

$$\langle v, v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \langle tv, tv\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \quad |\lambda|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

2. *Sia* $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$

$$\langle v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle.$$

$$\textit{Se } \langle v, w\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda\overline{\mu} = 1 \textit{ Per il punto 1.}$$

$$\lambda\overline{\lambda} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \overline{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \quad \textit{assurdo.}$$

□

Definizione 8
Diciamo che $U \in M_n(\mathbb{C})$ *è unitaria se*

$$U\overline{U}^t = Id.$$

Proposizione 1
$T \in End(V)$ *è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria*

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base ortonormale di* V

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \langle Tv_i, Tv_j\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = e_i^t A^t \overline{A} e_j = A_i^t \overline{A}_j$$

dove abbiamo posto $A = (T)_B$ *e* $\{e_i\}$ *è una base di* $\mathbb{C}^n$.
Abbiamo ottenuto quindi $A_i^t\overline{A}_j$ *che è il prodotto hermitiano standard tra la* i*-esima e la* j*-esima colonna di* A □

Teorema 1
Sia $T \in End(V)$ un operatore unitario Esiste una base standard di autovettori per T

In particolare, per ogni matrice unitaria $A \in U(n)$ esiste $M \in U(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale a volte si pone

$$A^* = \overline{A}^t.$$

A unitario $AA^* = Id$
A hermitiano $A = A^*$
A antihermitiano $A = -A^*$

Definizione 9 (Operatore Aggiunto)
Dato $T \in End(V)$, esiste unico $S \in End(V)$ tale che

$$\langle Tu, w\rangle = \langle u, Sw\rangle \quad \forall u, w \in V.$$

Tale operatore è detto aggiunto hermitiano di T e denotato con T^*

Definizione 10 (operatore normale)
Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto hermitiano (forma hermitiana definita positiva), un operatore $L \in End(V)$ è normale se

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

Osservazione
L unitario, hermitiano, antihermitiano $\Rightarrow$ L diagonale

Teorema 2
Sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) *L è normale*
2) *esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di L*

3 Diangonalizzazione unitaria di operatori normali

($\mathbb{C}^n$, prodotto hermitiano standard)
Indichiamo $M^\star = \overline{M}^t$

Definizione 11
M è normale se $MM^\star = M^\star M$

Nota
Sono normali le matrici

unitarie	$MM^\star = Id$
hermitiane	$M = M^\star$
antihermitiane	$M = -M^\star$

4 Classificazione delle isometrie

Nomenclatura 1
· *rotazioni*
· *riflessioni*
· *traslazioni*
· *glissoriflessione* $= t_v \circ s_\alpha$ *con* $v \parallel \alpha^t$ *(disegno de li mortacci sua)*
· *glissorotazioni* $= t \circ R$ *dove* $v \parallel a$, a *asse di* R *(altro disegno)*
· *riflessioni rotatorie* $s_a \circ R$ R *rotazione di asse* $\underline{a}$, $s_{\underline{a}}$ *è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad* $\underline{a}$

Teorema 3 (Eulero 1776)
Ogni isometria di $\mathbb{E}^3$ è di uno dei sei tipi sopra descritti

5 Spazi Hermitiani

Lemma 2
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$
Siano $P, Q \in End(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P, risulta

$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione
Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)
$\dim(V) < +\infty$

Teorema 4
Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in End(V)$ operatore, sono equivalenti

- *L è normale (rispetto ad h)*
- *esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L*

Lemma 3
(V, h) spazio hermitiano, $L \in End(V)$ normale
sono equivalenti

- *$Lv = \lambda v$*
- *$L^\star v = \overline{\lambda} v$*

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per $L^\star$

$$V_\lambda(L) = V_{\overline{\lambda}}(L^\star).$$

Dimostrazione
Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\overline{\lambda}}(L^\star)$. L'inclusione contraria segue da $L^{\star t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$\begin{aligned} h(L^\star(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \overline{\lambda} h(v, w) = h(\overline{\lambda} v, w) \\ h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, w) &= 0 \quad \circledast \end{aligned}$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$L^\star(v) \in V_\lambda(L), \quad \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

$$\Rightarrow \quad L^\star(v) - \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

Quindi nella $\circledast$ posso prendere $w = L^\star(v) - \overline{\lambda} v$, ottenendo

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, L^\star(v) - \overline{\lambda} v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$L^\star(v) - \overline{\lambda} v = 0$$

cioè $\qquad L^\star(v) = \overline{\lambda} v$

$\square$

Osservazione

Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$\lambda h(v, w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^\star w) = h(v, \overline{\mu} w) = \mu h(v, w) \Rightarrow h(v, w) = 0$

Dato che $\lambda \neq \mu$

Nomenclatura 2
Chiamiamo $U(n)$ lo spazio delle matrici unitarie

Teorema 5 (Spettrale)
M è normale se e solo se $\exists A \in U(n)$: $A^t M A$ è ortogonale

Dimostrazione (Teorema Spettrale)

1) $\Rightarrow$ 2) *Procediamo per induzione su* $\dim V$*,con base ovvia* $\dim V = 1$

Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ e sia $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

Sia $v_1 \in V$ un autovettore per L, che possiamo assumere di norma 1. Sia $V_1 = \mathbb{C} v_1, W = V_1^\perp$.

Allora $V = V_1 \oplus W$.

Poiché V_1 è L-invariante (per costruzione) e $L^\star$-invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per W.

Inoltre $L|_W \in End(V)$ è normale.

Per induzione, esiste una base $h|_W$-ortonormale formata da autovettori per $L|_W$, sia $\{v_2, \ldots, v_n\}$. Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base h-ortonormale di V formata da autovettori per L.

2) $\Rightarrow$ 1). *Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base h-ortonormale di autovettori per L. Allora*

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$[L^\star]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$
$$[L \circ L^\star]_B^B = [L]_B^B [L^\star]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^\star]_B^B [L]_B^B = [L^\star \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \to [A]_B^B$ è un isomorfismo tra $End(V)$ e $M_{nn}(\mathbb{C})$, segue

$$L \circ L^\star = L^\star \circ L.$$

cioè L è normale □

Esercizio 1

$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ $L^\star = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L$ matrice hermitiana
Trovo ora il polinomio caratteristico
$t^2 - 2t = 0$ che ha quindi autovalori $t = 0, t = 2$
$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad U^-1LU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto scalare standard è stato utilizzato per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato) [I calcoli sono errati, guarda le slide]

Esempio 2
$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione
il polinomio caratteristico è $t^2 - \sqrt{3}t + 1$ gli autovalori sono quindi $t = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$
$v_{\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Esempio 3

$L = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad L^\star = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$

$$LL^\star = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^\star L.$$

$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \;\; t_1, t_2$
$v_{t_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$
U come nell'esercizio precedente

Osservazioni
1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x,y) = x^t H \overline{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$\begin{aligned}
& h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y) \\
& (L_A X)^t H \overline{Y} = X^t H \overline{L_A Y} \\
& X^t A^t H \overline{Y} = X^t H \overline{A Y} \;\; \forall X, Y \\
& A^t H = H \overline{A} \\
& \begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$\det\begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) + 1 = (t+1)^2.$$

Ma $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, in particolare non è diagonalizzabile

2. Vediamo in dettaglio il fatto che $L|_W$ è normale

Ritornando alla dimostrazione del teorema spettrlae, osserviamo che se W è L-invariante è anche $L^\star$-invariante.

Infatti, se $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(L)$ (per esercizio da dimostrare)

$W = \bigoplus_\lambda (V_\lambda(L) \cap W)$

$= \bigoplus_\lambda (V_{\overline{\lambda}}(L^\star) \cap W)$

$=> W$ è $L^\star$-invariante

Adesso osservo che $(L|_W)^\star = (L^\star)|_W$

(L$\big|_{W)} \circ (L\big|_W)^\star = (L|_W) \circ (L^s tar|_W) =$

$(L \circ L^\star)|_W = (L^\star \circ L)|_W = (L^\star|_W) \circ L|_W = (L|_W)^\star \circ L|_W$