Lezione 11 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Varie robe su basi ortonormali

Proposizione 1
Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base ortonormale dello spazio euclideo* V*, la base* $L = \{w_1, \dots, w_n\}$ *è ortonormale se e solo se* $M = [Id_V]^B_L$ *è ortogonale* $(MM^t = Id_v)$

Dimostrazione
Sia $M = (m_{ij})$ *per definizione di* M $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \quad 1 \le i \le n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n m_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj} v_h \rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki} m_{kj} \langle v_k, v_h \rangle = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (M^t M)_{i,j}.$$

□

Osservazione
Sia $V = \mathbb{R}[x]$ $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$ è un prodotto scalare

Definizione 1 (Angolo non orientato tra vettori)
$|\langle v, w \rangle| \le ||v|| ||w|| \Rightarrow -1 \le \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| ||w||} \le 1 \qquad (v, w \ne 0)$
allora
$\exists ! \in [0, \pi] : \cos = \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| ||w||}$
è detto angolo non orientato tra v, w

Definizione 2
Sia $S \subseteq V$ *con* V *spazio euclideo,* $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Osservazione
$S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.
Siano $v_1, v_2 \in S^\perp$ e $\alpha_{1,2} \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

Proposizione 2
Sia V uno spazio vettoriale euclideo e W un sottospazio di V allora

$$V = W + W^{\perp}$$

Dimostrazione
Sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ *una base ortogonale di* W
consideriamo $\pi : V \to W$ *con* $\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i$, *dobbiamo mostrare che* $V = W + W^{\perp}$ *e che* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ *ma la seconda è ovvia poiché se* $w \in W \cap W^t$ *è ortogonale a se stesso* $\Rightarrow \langle w, w\rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$
Osserviamo inoltre che se $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ *la richiesta è dunque* $v - \pi(v) \in W^{\perp}$. *Basta verificare che* $\langle v - \pi(v), w_i\rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} w_j\rangle = \langle v, w_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} \langle w_j, w_i\rangle = \langle v, w_i\rangle - \frac{\langle v, w_i\rangle}{\cancel{\langle w_j, w_j\rangle}} \cancel{\langle w_j, w_j\rangle} = 0.$$

$\square$

Osservazione
1- Se V è spazio euclideo e W è sottospazio di V,
$(W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ è uno spazio euclideo
2- Se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è base ortogonale di W risulta:
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h\rangle}{\langle w_h, w_h\rangle} w_h||$
e vale l'uguaglianza se se solo se $a_h = \frac{\langle v, w_h\rangle}{\langle w_h, w_h\rangle}$
Dimostrazione (Punto 2)
$||v - \sum_{h=1}^{n} a_h w_k|| \geq ||v - \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h\rangle}{\langle w_h, w_h\rangle} w_h||$;
$||v - w||^2 = \langle v - u, v - u\rangle =$
$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u\rangle = \langle v - w, v - w\rangle + \langle w - u, w - u\rangle \geq ||v - w||^2$ $\square$
La lezione prosegue con lo svolgimento di alcuni esercizi

2 Prodotto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo per cui $dim(V) = 3$ sia $\{v, j, k\}$ una base ortonormale di V

Definizione 3 (Prodotto vettoriale)
Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *pongo* $v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

B_1, B_2 si dicono concordemente orientate se $det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$, questa è inoltre una relazione di equivalenza.
Di fatti se $B_1 \sim B_2,\ B_2 \sim B_3$ $\ det([Id]_{B_1}^{B_3}) = det([Id]_{B_2}^{B_3}[Id]_{B_1}^{B_2}) =$
$= det([Id]_{B_2}^{B_3}) det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_2$