Lezione 24 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-23

0.1 altre cose sui polinomi trigonometrici

Teorema 1 (Weierstrass)
Data $f \in C(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p_n$ polinomio trigonometrico tale che $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$

Dimostrazione

$$p_n(x) = \int_{-x}^{x} Q_n(x-y) f(y) dy.$$

Osserviamo che $p_n(x)$ è un polinomio trigonometrico

$$Q_n(x) = \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_k^n \cos(kx) + \beta_k^n \sin(kx)\right).$$

$$Q_n(x-y) = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{n} ({}_k^n \cos(kx-ky) + \beta_k^n \sin(kx-ky)).$$

è combinazione lineare di $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$
$\Rightarrow$ *$p_n(x)$ è polinomio trigonometrico*
$p_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x-y) f(y) dy = -\int_{\pi+x}^{\pi-x} Q_n(t) f(x-t) dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} Q_n f(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) f(x-t) dt$
Osservo che p_n come regolarità prende il "meglio" delle funzioni Q_n e f

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &= |\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) f(x-t) dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt| \\
&= |\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)(f(x-t) - f(x)) dt \le \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt + \int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt + \\
&\quad + \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt
\end{aligned}$$

$f \in C(\mathbb{R})$ + f periodica $\Rightarrow$ uniformemente continua.
Allora dato $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tale che $|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $x \in \mathbb{R}, \forall t$ tale che $|t| < \delta$
Scegliendo questo δ, sia ha $|p_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt + 8\pi \|f\|_\infty \sup_{\delta \le |t| \le \pi} Q_n(t) < \frac{\varepsilon}{3}$ per $n \ge n_\delta$ $\square$

Teorema 2 (Completezza in $L^2(-\pi, \pi)$ del sistema trigonometrico)
Il sistema trigonometrico $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(kx)\}_{k \ge 1}$ è completo in

$L^2((-\pi,\pi))$

Dimostrazione
$f \in L^2((-\pi,\pi)); \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists g \in C_c((-\pi,\pi))$ *tale che* $\|f-g\|_2 < \varepsilon$
$\Rightarrow g(-\pi) = g(\pi) = 0 \Rightarrow g$ *si estende per periodicità a una funzione* $C(\mathbb{R})$
Per il teorema di Weierstrass $\exists p_n$ *polinomio trigonometrico tale che* $\|g-p_n\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|g-p_n\|_{L^2((-\pi,\pi))} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g-p_n|^2 dx} \leq \|g-p_n\|_\infty \sqrt{2\pi} < \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

In conclusione, $\|f-p_n\|_{L^2((-\pi,\pi))} \leq \|f-g\|_2 + \|g-p_n\|_2 < \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon = (1+\sqrt{2\pi})\varepsilon$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Dove viene usato il fatto che la convergenza in L^2 *implica quella puntuale solo a meno di un'estratta, la convergenza quasi ovunque si ha per una sottosuccessione*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

□

0.2 Svolgimento esercizi foglio 8

(X,μ) spazio di misura $R : X \to [0,+\infty]$ misurabile

$$K = \{u \in L^2(X) : |u(x)| \leq h(x) \;\; q.o. \;\text{ in } X\}.$$

$K \neq \emptyset$ perché $0 \equiv u$ in K
K convesso : $u_1, u_2 \in K, \; \lambda \in [0,1]$
Il resto delle soluzioni te le ha mandate Alberto su wa, nei messaggi importanti