Lezione N+1

Federico De Sisti

2025-05-13

0.1 Sollevamenti di cammini

Esempi

1. $\rho : \mathbb{R} \to S^1$
   solito rivestimento,
   $\alpha : [0,1] \to S^1$
   t $\to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$
   $\alpha \in \Omega(S^1, (1,0), (1,0))$
   I numeri $t \in \mathbb{R}$ t.c. $\rho(t) = a$ sono gli interi.
   Possiamo sollevare α partendo da

$$\alpha_0^\uparrow : [0,1] \to \mathbb{R} \to S^1$$
$$t \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$
$$t \to ?$$

   dove "?" è tale che composto con ρ fa α
   quindi $\alpha_0^\uparrow(t) = t$
   Posso partire da qualunque $n \in \mathbb{Z}$:
   $\alpha_3^t(t) = t + 3$
   Composto con ρ da α e parte da 3
   Potrei usare
$$\beta : [0,1] \to S^1$$
$$t \to (\cos(-6\pi t), \sin(-6\pi t))^{.}$$

   Esempi di sollevamento:
   $\beta_5^\uparrow(t) = 5 - 3t$

Teorema 1 (Sollevamento delle omotopie di cammini)
Sia $p : E \to X$ un rivestimento, $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua,
$e \in E$ tale che $p(e) = F(0,0)$.
Allora esiste un unico sollevamento $g : [0,1] \times [0,1] \to E$ di F tale che $G(0,0) = e$.

Dimostrazione
L'unicità segue dal teorema di unicità dei sollevamenti (quello di $Y \xrightarrow{f} X$ è Y connesso). Dimostriamo l'esistenza di G.
Considero $F(-,0)$ è un cammino $[0,1] \to X$ e anche $F(0,-)$ è un cammino $[0,1] \to X$
Solleviamo partendo da e, otteniamo i sollevamenti

$$\alpha : [0,1] \to E.$$

$$\beta : [0,1] \to E.$$

Soddisfano
$p(\alpha(t)) = F(t,0)$

$p(\beta(t)) = F(0,t)$
e coincidono per $t = 0$
Definiamo $L : ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \subseteq Q = [0,1] \times [0,1]$
Definiamo

$$
\begin{aligned}
g : L &\to E \\
(t,s) &\to \begin{cases} \alpha(t) & se\ s = 0 \\ \beta(s) & se\ t = 0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

g è continua e solleva

$$F|_L : L \to X.$$

Quindi vogliamo dimostrare che esiste G sottoinsieme di F che coincide con g su $L \subseteq Q$
Passo 1:
Supponiamo l'immagine di F contenuta in un aperto banalizzante $V \subseteq X$.
Sia $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ come nella definizione.
L è connesso, $g(L)$ è connesso, e contenuto in $p^{-1}(V)$
Per connessione esiste un unico $i_0 \in I$ tale che $g(L) \subseteq U_{i_0}$
Sia $s : V \to U_{i_0}$ la sezione locale, poniamo $G = s \circ F$ questa solleva F
Coincide con g su L per l'unicità dei sollevamenti.
Passo 2: caso generale.
Non supponiamo $Im(F)$ contenuta in un aperto banalizzante.
Dal teorema del numero di Lebesgue esiste $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] = Q_{i,j}.$$

un singolo aperto banalizzante $V_{i,h} \subseteq X$
Se sollevo ogni quadratino in ordine con continuità, posso "appiccicarlo" a quelli vecchi, così che la mia funzione non abbia "salti" e sia quindi discontinua
Per il passo 1, posso sollevare $F|_{Q_{i,j}}$
Per assicurare che questi sollevamenti si incollino, ordiniamo i $Q_{i,j}$ la coppia definiamo $(i,j) \leq (h,k) \Leftrightarrow \begin{cases} i+k < h+k \\ i+j = h+k, \quad i \leq k \end{cases}$ Aggiungi foto 6:00 13 maggio.
Vale: i lati inferiore e sinistro di $Q_{i,j}$ sono contenuti in

$$L \cup \bigcup_{(a,b)<(i,j)} Q_{a,b}.$$

Patiamo da $Q_{1,1}$: per il passo 1 esiste, un sollevamento:

$$\tilde{G}_{1,1} : Q_{1,1} \to E.$$

tale che $\tilde{G}(0,0) = e$, e $\tilde{G}$ solleva $F|_{Q_{1,1}} : Q_{1,1} \to X$
Per l'unicità dei sollevamenti, g e $\tilde{G}_{1,1}$ si incollano a un sollevamento

$G_{1,1} : L \cup Q_{1,1} \to E$ di $F|_{L \cup Q_{1,1}}$
Il quadrato successivo è $Q_{2,1}$, per il passo 1 esiste $\tilde{G}_{2,1} : Q_{2,1} \to E$ che solleva $F|_{G_{2,1}}$ e tale che $\tilde{G}_{2,1}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = G_{1,1}(\frac{1}{n}, 0)$
Di nuovo $\tilde{G}_{2,1} e G_{1,1}$ si incollano a un sollevamento

$$G_{2,1} : L \cup Q_{1,1} \cup Q_{2,1} \to E.$$

che solleva:
$F|_{L \cup Q_{1,1} \cup Q_{2,1}}$
iterando sollevo $F|_{Q_{i,j}}$ a un'applicazione $G_{i,j} : Q_{i,j} \to E$
che si incolla alla precedente ottenendo

$$G_{i,j} : L \cup \left(\bigcup_{(a,b) \leq (i,j)} Q_{(a,b)} \right) \to E.$$

Il sollevamento richiesto di F è $G_{n,n} : Q \to E$. $\square$

Teorema 2
Sia $p : E \to X$ un rivestimento, scegliamo $a, b \in X$ e $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ scegliamo $e \in E$ tale che $p(e) = a$ considero i sollevamenti $\alpha_e^{\uparrow}, \beta_e^{\uparrow}$.
Allora sono equivalenti

1. *$\alpha \sim \beta$*
2. *$\alpha_e^{\uparrow}(1) = \beta_e^{\uparrow}(1)$ e $\alpha_e^{\uparrow} \sim \beta_e^{\uparrow}$*

Dimostrazione
(2) $\Rightarrow$ (1) *è facile*
se $\alpha_e^{\uparrow}(1) = \beta_e^{\uparrow}(1)$ ed esiste un omomorfismo di cammini G di $\alpha_e^{\uparrow}$ a $\beta_e^{\uparrow}$
allora $p \circ G = F : [0,1] \times [0,1] \to X$
è un omotopia di cammini da α a β
(verifica per esercizio)
(1) $\Rightarrow$ (2)
Sia F omotopia di cammini in X da α a β.
Per il teorema precedente posso sollevare F a $G : [0,1] \times [0,1] \to E$
tale che $G(0,0) = e$.
Dobbiamo dimostrare che G è omotopia di cammini da $\alpha_e^{\uparrow}$ a $\beta_e^{\uparrow}$, e che $\alpha_e^{\uparrow}(1) = \beta_e^{\uparrow}(1)$.
Foto 6:40
A) $F(-, 0) = \alpha$, $G(-, 0)$ è sollevamento di $F(-, 0) = \alpha$
e parte da $G(0,0) = e$
segue $G(-, 0) = \alpha_e^{\uparrow}$ per l'unicità dei sollevamenti.
B) $G(0, -)$ solleva $F(0, -)$ partendo da $G(0,0) = e$
Ma $F(0, -) = 1_a$ perché F è omotopia di cammino.
Quindi $G(0, -)$ solleva 1_a partendo da e, ma anche 1_e solleva 1_a partendo da e

Per l'unicità $G(0,-) = 1_e$
Analogamente $F(1,-) = 1_b$
e il cammino $G(1,-)$ *parte da* $G(1,0) = \alpha_e^{\uparrow}(1)$ *e solleva* 1_b *come prima* $G(1,-)$
è costante e vale $G(1,0) = 1_{\alpha_e^{\uparrow}(1)}$
C) $G(-,1)$ *solleva* $F(-,1) = \beta$, *parte da* $G(0,1) =$ *punto finale di* $G(0,-) = 1_e$
quindi $G(-,1)$ *pare da e, quindi per l'unicità* $G(-,1) = \beta_e^{\uparrow}$
Segue:
$\beta_e^{\uparrow}(1) = G(1,1) = 1_{\alpha_e^{\uparrow}(1)}(1) = \alpha_e^{\uparrow}(1)$
inoltre G *è omotopia di cammini da* $\alpha_e^{\uparrow}$ *a* $\beta_e^{\uparrow}$ $\square$
Usiamo subito questo teorema per calcolare il primo gruppo fondamentale non banale, quello di S^1

Corollario 1
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
Precisamente, sia $a = (1,0)$ *definiamo*
$\alpha^{(n)} : [0,1] \to S^1$
$t \to (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$
Definiamo
$\Sigma : Z \to \pi(S^1, a)$
$n \to [a^{(n)}]$
Allora Σ *è isomorfismo di gruppi*

Dimostrazione
Assumiamo Σ *omomorfismo, dimostriamo che è iniettivo, siano* $n, m \in \mathbb{Z}$, *assumiamo* $\Sigma(n) = \Sigma(m)$
cioè $\alpha^{(n)} \sim \alpha^{(m)}$.
Considero il rivestimento solito $\rho : \mathbb{R} \to S^1$
solleviamo $\alpha^{(n)}$ *e* $\alpha^{(m)}$ *partendo da* $0 \in \mathbb{R}$

$$(\alpha^{(n)})_0^{\uparrow}(t) = nt.$$

$$(\alpha^{(m)})_0^{\uparrow}(t) = mt.$$

Per il teorema, questi hanno stesso punto finale: $n \cdot 1 = m \cdot 1$ *cioè* $n = m$ $\square$