

Lezione 22 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-29

1 Boh non ero a lezione

$W \subseteq V$ sottospazio $g \in Bi(V)$

$g|_W$ è non degenerare $\Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$

Cosa dimostreremo oggi

Sia V spazio vettoriale di dimensione finita e $g \in Bi_s(V)$ (forma bilineare simmetrica)

\mathbb{K} qualsiasi, esiste una base g - ortogonale

\mathbb{K} algebricamente chiuso ($\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$), esiste una base di V rispetto alla quale la

matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = rg(g)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r +$

$s = rg(g)$ $n - r - s$ indice di nullità, ker della forma

V spazio vettoriale ($\dim(V) < +\infty$), $g \in Bi_s(V)$

Definizione 1

la forma quadratici associata a V è l'applicazione $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ definita da $q(v) = g(v, v)$ e questa è una funzione omogenea di grado 2

Esempio

$V \cong \mathbb{K}^n$, g = prodotto scalare standard

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Osservazione

Valgono:

$$1) q(kv) = k^2 q(v)$$

$$2) 2g(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$$

dove $g(v, w)$ è la forma polare di q

Dimostrazione

$$1. q(kv) = g(kv, kv) = k^2 g(v, v) = k^2 q(v)$$

$$2. q(v + w) - q(v) - q(w) = g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) =$$

$$= \cancel{g(v, v)} + 2g(v, w) + \cancel{g(w, w)} - \cancel{g(v, v)} - \cancel{g(w, w)} = 2g(v, w)$$

□

Osservazione

$$V = \mathbb{R}^4 \text{ e sia } q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_1x_2$$

Voglio trovare la matrice della forma polare di q rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale ci sono i coefficienti delle componenti al quadrato $(x_i)^2$ gli altri li ottieni dividendo per 2 ogni altro coefficiente

Teorema 1 ((Caratteristica di \mathbb{K}) $\neq 2$)

Dato V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V , allora esiste una base g -ortogonale.

Dimostrazione

Per induzione su $\dim V = n$. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.

se g è la forma bilineare nulla ($g(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in V$) ogni base è g -ortogonale.

Altrimenti esistono, $v, w \in V$ con $g(v, w) \neq 0$.

Assumo che almeno uno tra $v, w, v + w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi

$$g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, w) = 2g(v, w) \neq 0.$$

quindi $\exists v_1 \in V$ t.c. $g(v_1, v_1) \neq 0$. Allora $g|_{\mathbb{K}v_1}$ è non degenera quindi $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$ con $W = (\mathbb{K}v_1)^\perp$

$\dim(W) = n - 1$, per induzione \exists una base $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W con $g(v_1, v_j) = 0$ se $2 \leq j \leq n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g -ortogonale di V \square

Teorema 2

Supponiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso. Sia V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V , esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ $r = \text{rg}(D)$

In modo equivalente, ogni matrice simmetrica a coefficienti in \mathbb{K} è congruente a D

Dimostrazione

Per il teorema precedente, esiste una base $B = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di V rispetto alla

$$\text{quale } (g)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Possiamo assumere che a_{11}, \dots, a_{rr} siano non nulli e che $a_{r+i, r+i} = 0$ con $1 \leq i \leq n - r$.

Poiché \mathbb{K} è algebricamente chiuso, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii}$, $1 \leq i \leq r$ poniamo.

$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} v'_i, & 1 \leq i \leq r \\ v'_i & r + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

è chiaro che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base. Risulta

$$g(v_i, v_i) = \begin{cases} g(\frac{v'_i}{\alpha_i}, \frac{v'_i}{\alpha_i}) = \frac{1}{\alpha_i^2} g(v'_i, v'_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 & 1 \leq i \leq r \\ g(v'_i, v'_i) = 0 & r + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad \square$$

Osservazione

Se g è non degenere, esiste una base B rispetto alla quale $(g)_B = Id_n$

Caso Reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

V spazio vettoriale reale ($\dim V = n \geq 1$)

$g \in Bi_s(V)$

Sia B una base g -ortogonale. Definiamo

Definizione 2

Chiamiamo $i_+(g), i_-(g), i_0(g)$ indice di positività, negatività e nullità di g , e sono rispettivamente

$$i_+(g) = \{v \in B | g(v, v) > 0\}$$

$$i_-(g) = \{v \in B | g(v, v) < 0\}$$

$$i_0(g) = \{v \in B | g(v, v) = 0\}$$

Teorema 3 (Sylvester)

Gli indici non dipendono dalla scelta di B . Posto $p = i_+(g), q = i_-(g)$ allora $1 + q = n - r$ ($r = rg(g)$)

ed esiste una base di V rispetto alla quale la matrice E di g è tale che

$$E = \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale A è congruente ad una matrice della forma E in cui $r = rg(A)$ e p dipende solo da A

Dimostrazione

Dal teorema di esistenza di una base g -ortogonale deduciamo che esiste una base

$\{f_1, \dots, f_n\}$ di V rispetto alla quale, se $v = \sum_{i=1}^n y_i f_i$

$$q(v) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$$

con esattamente n coefficienti diversi da 0, che possiamo supporre essere a_{11}, \dots, a_{rr}

Siano $a_{11}, \dots, a_{pp} > 0, a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr} < 0$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha_i^2 = a_{ii} \quad 1 \leq i \leq p \quad \alpha_i^2 = -a_{ii} \quad p+1 \leq i \leq r$$

$$\text{Allora posto } e_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & 1 \leq i \leq p \\ f_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\text{la matrice di } g \text{ rispetto a } \{e_1, \dots, e_n\} \text{ è } \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Resta da dimostrare che p dipende solo da g e non dalla base B usata per definirlo

Supponiamo che rispetto ad un'altra base g -ortogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$, risulti, per

$$v = \sum_{i=1}^n z_i b_i$$

$$q(v) = z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2.$$

mostriamo che $p = t$

se per assurdo $p \neq t$ assumo $t \leq p$ considero quindi i sottospazi $S = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$T = \langle b_{t+1}, \dots, b_n \rangle$

Poiché $\dim S + \dim T = p + n - t > n$ perché $t < p$ per Grassman vettoriale

$S \cap T \neq \{0\}$ sia $0 \neq v \in S \cap T$

allora $r = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = z_{t+1} b_{t+1} + \dots, z_n b_n$

contraddizione:

$$q(v) = \sum_{i=1}^p x_i^2 > 0.$$

$$q(v) = - \sum_{i=1}^r z_i^2 + z_{r+1}^2 + \dots + z_n^2 < 0.$$

□

Osservazioni

1. Esiste una definizione più intrinseca degli indici. Ricordiamo che $g \in \text{Bil}_S(V)$, V spazio vettoriale su R è definita positiva se $g(v, v) > 0$, $\forall v \in V \setminus \{0\}$ e che g è definita negativa se $-g$ è definita positiva.

2. Il teorema di Sylvester si estende, con la stessa dimostrazione alla forma hermitiana.

In particolare ogni matrice hermitiana è congruente a una matrice diagonale del tipo

$$\begin{pmatrix} I_p & \dots & 0 \\ \vdots & I_{r-p} & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposizione 1

Sia (V, g) uno spazio vettoriale su \mathbb{R} dotati di una forma bilineare simmetrica g

Siano dati un prodotto scalare h e una forma bilineare simmetrica k

Allora esiste una base di V che sia h -ortonormale e k -ortogonale

Dimostrazione

(V, h) è uno spazio euclideo, quindi per il teorema di rappresentazione delle forme bilineari, esiste un operatore $L \in \text{End}(V)$ tale che

$$h(L(v), w) = k(v, w).$$

Poiché k è simmetrica, L è simmetrica, per il teorema spettrale esiste una base h -ortonormale costituita da autovettori per L .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale base. Voglio dimostrare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è k -ortogonale

$$k(v_r, v_s) = h(L(v_r), v_s) = h(\lambda_r v_r, v_s) = \lambda_r h(v_r, v_s) = \lambda_r \delta_{rs}.$$

□

Corollario 1

Sia (V, h) uno spazio euclideo, e k una forma bilineare simmetrica su V . Allora $i_+(k), i_-(k), i_0(k)$ corrispondono al numero di autovalori positivi, negativi, nulli, dell'endomorfismo di V che rappresenta k rispetto ad h

Dimostrazione

Sia come nella proposizione, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una h -ortonormale e k -ortogonale, per il teorema di Sylvester

$$i_+(k) = |\{v_i | k(v_i, v_i) > 0\}|.$$

Ma abbiamo visto che $k(v_i, v_i) = \lambda_i$ quindi $i_+(k) = |\{\lambda_i > 0\}|$. La dimostrazione non è terminata.

□

Definizione 3

Una matrice simmetrica reale si dice definita positiva se tutti gli autovalori sono positivi

Definizione 4

Data una matrice quadrata $n \times n$, i minori principali leading, sono quelli ottenuti estraendo righe e colonne come segue

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$$

Teorema 4

A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori principali leading sono positivi

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

1. Determinare gli indici

2. Calcolare W^\perp se $W = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Scriviamo la matrice della forma bilineare associata rispetto alla base standard

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad i_- = 2$$