Lezione 20 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-13

0.1 manca un aparte della lezione

0.2 parte nuova

Dimostrazione
$f \in L^p(\mathbb{R}),\ \varepsilon > 0$
$f_n = f\chi_{[-n,n]}$ *è a supporto compatto*
$f_n(x) \to f(x)$ *quasi ovunque*
$|f_n| \leq |f|$ *in* $\mathbb{R} \Rightarrow f_n \to f$ *in* L^p
quindi $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$, *con supporto compatto tale che* $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$
$T_j(f_1)(x) = \begin{cases} f_1(x) & se\ |f_1| < j \\ j & se\ f_1(x) > j \\ -j & se\ f_1(x) < -j \end{cases}$
$|T_j(f_1)| \leq j \Rightarrow T_j(f_1) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$
$T_j(f_1) \to f_1$ *in* $L^p(\mathbb{R})$ *convergenza dominata.*
primo passo $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$ *supporto compatto tale che* $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$
secondo passo $\exists f_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *supporto compatto tale che* $\|f_2 - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$
terzo passo: $supp f_2 \subset [-k, k]$
dal teorema di Lusin (e dalla sua dimostrazione)
$\forall \delta > 0 \exists g_\delta : [-k, k] \to \mathbb{R}$ *continua*
tale che $m(\{f_2 \neq g_\delta\}) < \delta$
$\sup_{[-k,k} |g_\delta| \leq \|f_k\|_\infty$ *e* $g_\delta(k) = g_\delta(-k) = 0$
estenendo a zero g_δ *fuori di* $[-k, k]$ *si ottiene* $g \in C_1(\mathbb{R})$
tale che $\|f_2 - g\|_p^p = \int_\mathbb{R} |f_2 - g|^p dm = \int_{[-k,k] \cap \{f_2 \neq g\}} |f_2 - g|^p dm \leq (\|g\|_\infty + \|f_2\|_\infty)^p m(\{f_2 \neq g\}) \leq 2^p \|f_2\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$ *per* δ *sufficientemente piccolo.*
Quindi $\exists g \in C_0(\mathbb{R})$ *tale che*

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_2\|_p + \|f_1 - f\|_p + \|f_2 - g\|_p < \varepsilon.$$

$\square$

Domanda:
Potrebbe esserci un risultato analogo in L^∞?
Osservazione
Il risultato di densità si scrive in simboli
$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\ \|_p} = L^p(\mathbb{R})\ \ 1 \leq p < +\infty$
$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\ \|_p} = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua e } \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0\}$
Dimostrazione per esercizio

Definizione 1
Uno spazio metrico Y
si dice separabile se ammette un sottoinsieme denso numerabile (esempio $\mathbb{R}$ *è separabile,* R^n *è separabile* $\forall n1$*)*

Teorema 1
$L^p(\mathbb{R})$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$
$L^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile

Dimostrazione
$D = \{s(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i x_{(a_i,b_i)},\ a_i < b_i, a_i, b_i, q_i \in \mathbb{Q}\}$ è numerabile
Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$ e sia $\varepsilon > 0$
$\exists g \in C_c(\mathbb{R})$(continua a supporto compatto) tale che $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$
sia $k \in \mathbb{N}$ tale che supp $g \subset (-k, k)$
g è uniformemente continua (supporto compatto + continua)
$\forall \eta > 0 \exists \delta_\eta > 0$ tale che

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \eta \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ |x_1 - x_2| < \delta_\eta.$$

suddividiamo $[-k, k]$ in sottointervalli di ampiezza $\frac{1}{j} < \delta_\eta$ mediante i punti $-k + \frac{i}{j}$ $0 \leq i \leq 2kjA$
$\forall 0 \leq i \leq 2k_j - 1$
Scegliamo $x \in (-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j})$ e $q_i \in \mathbb{Q}$ tale che $|q - g(x)| < \eta$
$s(x) = \sum_{i=0}^{2kj-1} q_i \chi_{(-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j})}(x) \in D$

$$\|g - s\|_p^p = \int_{[-k,k]} |g - s|^p dm = \sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p$$

$\exists x \in [2k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}]$ tale che $|g(x) - q_i| < \eta$
$\forall g \in [-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}]$ $\ |y - x| < \frac{1}{j} < \delta_\eta$
$\Rightarrow |g(y) - q_i| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - q_1| < 2\eta$
Tornando quindi all'equazione precedente

$$\|g - s\|_p^p = \int_{[-k,k]} |g - s|^p dm =$$

$\sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p \leq (2\eta)^p \frac{i}{j} 2kj < \left(\frac{e}{2}\right)^p$ *per η sufficientemente piccolo.*

$\square$

Osservazione
$L^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile, sia $\{\omega_r\}_r$ famiglia più che numerabile di sottoinsiemi tali che ${}_r \subset \mathbb{R},\ \omega_r \in \eta$ per $r \neq s$
$m(\omega_r \setminus \omega_s)$ oppure $m(\omega_s \setminus \omega_r) > 0$
esempio
$\omega_r = (-r, r) \quad r > 0$
se $r < s$ $m(\omega_s \setminus \omega_r) = ([(-s, -r] \cup [r, s)) > 0$
$\{\chi_{\omega_r}\}_{r>0} \subset L^\infty(\mathbb{R})$
$\|\chi_{\omega_r} - \chi_{\omega_s}\|_\infty = 1$
$\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})\}$ sono disgiunte in $L^\infty(\mathbb{R})$
Sia D denso in $L^\infty(\mathbb{R})$
$\forall r \quad \exists f_r \in D \cap B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})$ se $r \neq s \Rightarrow f_s \neq f_r$
$\Rightarrow D$ è più che misurabile $(V_0, \| \ \|_{V_1}), (V_2, \| \ \|_{V_2})$ spazi vettoriali normati

$L : V_1 \to V_2$ operatore lineare.

Definizione 2
L si dice limitato se $\exists C \geq 0$ tale che $\|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$

Teorema 2
Sia L operatore lineare L è limitata $\Leftrightarrow$ L è continua.

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *Sia L limitato* $\forall v_1, v_2 \in V_1 \quad \|L(v_1) - L(v_2)\|_{V_2} = \leq L(v_1 + v_2)\|_{V_2} \leq C\|v_1 - v_2\|_{V_1} \Rightarrow L$ *è lipschitziano.*
($\Leftarrow$) *sia L continuo.*
Poiché $L(0) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *tale che* $\|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$ *se* $\|v\|_{V_1} < \delta$
$\frac{\delta}{2} \frac{v}{\|v\|_{V_1}} \in V_1$ *e* $\|\frac{\delta}{2} \frac{v}{\|v\|_{V_1}} = \frac{\delta}{2} < \delta$
$\Rightarrow \|L(\frac{\delta}{2} \frac{v}{\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} < \varepsilon$
$\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$
$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$
$\Rightarrow L$ *è limitato* □
$L(V_1, V_2) = \{L : V_1 \to V_2 \ : \ L \text{ lineare e continuo}\}$
spazio vettoriale
$L \in L(V_1, V_2)$
$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1}$
$\Rightarrow \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} \leq C \quad \forall v \in V_1 \setminus \{0\}$
$\Rightarrow \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} < +\infty$
$\|L\| = \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}}$
$= \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \|L(\frac{v}{\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} = \sup_{\substack{v \in V_1 \\ \|v\|_{V_1} = 1}} \|L(v)\|_{V_2}$

Teorema 3
$(L(V_1, V_2), \| \ \|)$ è uno spazio vettoriale normato
se $(V_2, \| \ \|_{V_2})$ è di Banach $\Rightarrow$ $(L(V_1, V_2), \| \ \|)$ è di Banach.

Dimostrazione
per esercizio □
In particolare $L(V_1, \mathbb{R}) = \{L : V_1 \to \mathbb{R}$ lineare continua $\}$ è uno spazio di Banach
$V_1' = V_1^*$ spazio dueale di V_1