

Lezione 9 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-20

1 Rimembranze dalla scorsa lezione

V spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione bilineare simmetrica $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v.$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2 Nuova effettiva lezione

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

Lemma 1

1. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

Dimostrazione

1. segue dalla definizione

$$2. \|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \cdot \|v\|$$

$$3. \|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle =$$

$$= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi) \square

Definizione 1 (Versore)

Sia $v \in V$ tale che $\|v\| = 1$ allora v è un versore

Oss

Dat $u \neq 0$, $\frac{u}{\|u\|}$ è un versore

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1.$$

Proposizione 1

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme ortogonale allora v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti. In particolare se $\dim(V) = n$, un insieme ortogonale di n vettori è una base

Dimostrazione

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle$$

$$= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$$

Dato che $\langle v_i, v_i \rangle > 0$ poiché $v_i \neq 0$ per ipotesi, dunque $\alpha_i = 0$,
dato che posso scegliere qualunque v_i □

Osservazioni

1. La base standard di \mathbb{R}^n è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
2. Sia $g = \langle, \rangle$ un prodotto scalare su V , Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g -ortonormale allora $[g]_B = Id_n$ ovvero $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$
Inoltre, se $X = [v]_B$, $Y = [Id]_B$
 $g(v, w) = X^t [g]_B Y = X^t Y$ (sempre con B ortonormale)

Proposizione 2

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, per ogni $v \in V$ risulta

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Dimostrazione

(1) Sia $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_j v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1) a_j con $\langle v, v_j \rangle$ □

Nomenclatura 2

Dato $v \neq 0$ viene detto coefficiente di Fourier di $w \in V$ rispetto a v

$$a_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Nota

In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di w rispetto a v (moltiplicato quindi per il versore di v otteniamo il vettore della proiezione)
Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.

$$\langle w - a_v(w)v, v \rangle = \langle w - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \rangle = \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot \langle v, v \rangle$$

3 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Lemma 2

Sia v_1, v_2, \dots una successione di vettori in V spazio vettoriale euclideo. Allora:

1. Esiste una successione w_1, w_2, \dots in V tale che per ogni $k \geq 1$

$$a) \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle.$$

$$b) \quad \langle w_i, w_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

2. Se u_1, u_2, \dots è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dimostrazione

Costruiamo i w_i per induzione su k .

Base $k = 1$

$$v_1 \rightarrow w_1 = v_1 \text{ verifica } a, b.$$

Supponiamo per induzione di aver costruito w_1, \dots, w_t , $t > 1$ verificanti a e b e costruiamo w_{t+1}

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1})w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1})w_i.$$

per induzione $v_i \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \quad 1 \leq i \leq t$
dunque

$$\langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle.$$

D'altra parte $w_{t+1} \in \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$ perché per induzione $w_i \in \langle v_1, \dots, v_t \rangle \quad 1 \leq i \leq t$

Quindi $\langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$ e quindi le proprietà a e b sono verificate.

Verifichiamo ora b, sia $w_i \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle w_{t+1}, w_i \rangle &= \langle v_{t+1} - \sum_{j=1}^t a_{w_j}(v_{t+1})w_j, w_i \rangle = \\ &= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - a_{w_i}(v_{t+1})\langle w_i, w_i \rangle = \\ &= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - \frac{\langle v_{t+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

2. Di nuovo procedo per induzione su k , con base ovvia $k = 1$

Supponiamo $t > 1$ e apponiamo che esistano $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ con $u_k = \delta_k w_k$ per ogni $k \leq t$. per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \quad z \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle = \langle u_1, \dots, u_t \rangle .$$

D'altra parte, $\langle u_{t+1}, z \rangle = \langle w_{t+1}, z \rangle = 0$

Quindi $\langle u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w \rangle = 0$ ovvero $\langle z, z \rangle$

$\Rightarrow z = 0$ e $u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$

□