Lezione 22 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-29

1 Boh non ero a lezione

$W \subseteq V$ sottospazio $g \in Bi(V)$
$g|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$
Cosa dimostreremo oggi
Sia V spazio vettoriale di dimensione finita e $g \in Bi_s(V)$ (forma bilineare simmetrica
$\mathbb{K}$ qualsiasi, esiste una base $g-$ *ortogonale*
$\mathbb{K}$ algebricamente chiuso ($\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$), esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad r = rg(g)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r+s = rg(g)$ $\quad n-r-s$ indice di nullità, ker della forma
V spazio vettoriale $(\dim(V) < +\infty), g \in Bi_s(V)$

Definizione 1
la forma quadrativi associata a V è l'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ definita da $q(v) = g(v, v)$ e questa è una funzione omogenea di grado 2

Esempio
$V \cong \mathbb{K}^n, g =$ prodotto scalare standard

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Osservazione
Valgono:
1) $q(kv) = k^2 q(v)$
2) $2g(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$
dove $g(v, w)$ è la forma polare di q
Dimostrazione
1. $q(kv) = g(kv, kv) = k^2 g(v, v) = k^2 q(v)$
2. $q(v + w) - q(v) - q(w) = g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) =$
$= \cancel{g(v,v)} + 2g(w, v) + \cancel{g(w,w)} - \cancel{g(v,v)} - \cancel{g(w,w)} = 2g(w, v)$ $\square$
Osservazione
$V = \mathbb{R}^4$ e sia $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_1x_2$
Voglio trovare la matrice della forma polare di q rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale ci sono i coefficienti delle componenti al quadrato $(x_i)^2$ gli altri li ottieni dividendo per 2 ogni altro coefficiente

Teorema 1 ((Caratteristica di $\mathbb{K}$) $\neq 2$)
Dato V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, allora esiste una base g-ortogonale.

Dimostrazione
Per induzione su $\dim V = n$. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.
se g è la forma bilineare nulla ($g(v, w) = 0 \ \forall v, w \in V$) ogni base è $g-$ortogonale.
Altrimenti esistono, $v, w \in V$ con $g(v, w) \neq 0$.
Assumo che almeno uno tra $v, w, v + w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi

$$g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, w) = 2g(v, w) \neq 0).$$

quindi $\exists v_1 \in V$ t.c $g(v_1, v_1) \neq 0$. Allora $g|_{\mathbb{K}v_1}$ è non degenere quindi $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$ con $W = (\mathbb{K}v_1)^{\perp}$
$\dim(W) = n - 1$, *per induzione $\exists$ una base $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W con $g(v_1, v_j) = 0$ se $2 \leq j \leq n, \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g-ortogonale di V* □

Teorema 2
Supponiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Sia V spazio vettoriale dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V, esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ $r = rg(D)$
In modo equivalente, ogni matrice simmetrica a coefficienti in $\mathbb{K}$ è congruente a D

Dimostrazione
Per il teorema precedente, esiste una base $B = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di V rispetto alla quale $(g)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Possiamo assumere che $a_{11}, \dots, a_{rr}$ siano non nulli e che $a_{r+i,r+i} = 0$ con $1 \leq i \leq n - r$.
Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii}, \quad 1 \leq i \leq r$ poniamo.
$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} v'_i, & 1 \leq i \leq r \\ v'_i & r + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$
è chiaro che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base. Risulta
$$g(v_i, v_i) = \begin{cases} g(\frac{v'_i}{\alpha_i}, \frac{v'_i}{\alpha_i} = 1\alpha_i^2 g(v'_i, v'_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 & 1 \leq i \leq r \\ g(v'_i, v'_i) = 0 & r + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$ □

Osservazione
Se g è non degenere, esiste una base B rispetto alla quale $(g)_B = Id_n$
Caso Reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
V spazio vettoriale reale ($\dim V = n \geq 1$)
$g \in Bi_s(V)$
Sia B una base g-ortogonale. Definiamo

Definizione 2
Chiamiamo $i_+(g), i_-(g), i_0(g)$ indice di positività, negatività e nullità di g, e sono rispettivamente
$i_+(g) = \{v \in B | g(v,v) > 0\}$
$i_-(g) = \{v \in B | g(v,v) < 0\}$
$i_0(g) = \{v \in B | g(v,v) = 0\}$

Teorema 3 (Sylvester)
Gli indici non dipendono dalla scelta di B. Posto $p = i_+(g), q = i_-(g)$ allora $1 + q = n - r \quad (r = rg(g))$
ed esiste una base di V rispetto alla quale la matrice E di g è tale che

$$E = \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale A è congruente ad una matrice della forma E in cui $r = rg(A)$ e p dipende solo da A

Dimostrazione
Dal teorema di esistenza di una base g-ortogonale deduciamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ di V rispetto alla quale, se $v = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$
$q(v) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \ldots + a_{nn}y_n^2$
con esattamente n coefficienti diversi da 0, che possiamo supporre essere $a_{11}, \dots, a_{rr}$
Siano $a_{11}, \dots, a_{pp} > 0, \quad a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr} < 0$
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ *t.c.*
$\alpha_i^2 = a_{ii} \quad 1 \leq i \leq p \qquad \alpha_i^2 = -a_{ii} \quad p+1 \leq i \leq r$
Allora posto $e_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & 1 \leq i \leq r \\ f_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$
la matrice di g rispetto a $\{e_1, \dots, e_n\}$ è $\begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$
Resta da dimostrare che p dipende solo da g e non dalla base B usata per definirlo
Supponiamo che rispetto ad un'altra base g-ortogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$, risulti, per

$v = \sum_{i=1}^{n} z_i b_i$

$$q(v) = z_1^2 + \ldots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

mostriamo che $p = t$
se per assurdo $p \neq t$ *assumo* $t \leq p$ *considero quindi i sottospazi* $S =< e_1, \ldots, e_n >$
$T =< b_{t+1}, \ldots, b_n >$
Poiché $\dim S + \dim T = p + n - t > n$ *perché* $t < p$ *per Grassman vettoriale* $S \cap T \neq \{0\}$ *sia* $0 \neq v \in S \cap T$
allora $r = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p = z_{t+1} b_{t+1} + \ldots, z_n b_n$
contraddizione:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0.$$

$$q(v) = -\sum_{i=1}^{r} z_i^2 + z_{r+1}^2 + \ldots + z_n^2 < 0.$$

□

Osservazioni
1. Esiste una definizione più intrinseca degli indici. Ricordiamo che $g \in Bil_S(V), V$ spazio vettoriale su $/R$ è definita positiva se $g(v, v) > 0, \ \forall v \in V \backslash \{0\}$ e che g è definita negativa se $-g$ è definita positiva.
2.Il teorema di Sylvester si estende, con la stessa dimostrazione alla forma hermitiana.
In particolare ogni matrice hermitiana è congruente a una matrice diagonale del del tipo

$$\begin{pmatrix} I_p & \ldots & 0 \\ \vdots & I_{r-p} & \vdots \\ 0 & \ldots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposizione 1
Sia (V, g) *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *dotati di una forma bilineare simmetrica* g
Siano dati un prodotto scalare h *e una forma bilineare simmetrica* k
Allora esiste una base di V *che sia* h*-ortonormale e* k*-ortogonale*

Dimostrazione
(V, h) *è uno spazio euclideo, quindi per il teorema di rappresentazione delle forme bilineari, esiste un operatore* $L \in End(V)$ *tale che*

$$h(L(v), w) = k(v, w).$$

Poiché k *è simmetrica,* L *è simmetrica, per il teorema spettrale siste una base* h*-ortonormale costituita da autovettori per* L.
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *tale base. Voglio dimostrare che* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è* k*-ortogonale*

$$k(v_r, v_s) = h(L(v_r), v_s) = h(\lambda_r v_r, v_s) = \lambda_r h(v_r, v_s) = \lambda_r \delta_{rs}.$$

$\square$

Corollario 1
Sia (V,h) uno spazio euclideo, e k una forma bilineare simmetrica su V. Allora $i_+(k), i_-(k), i_0(k)$ corrispondono al numero di autovalori positivi, negativi, nulli, dell'endomorfismo di V che rappresenta k rispetto ad h

Dimostrazione
Sia come nella proposizione, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una h-ortonormale e k-ortogonale, per il teorema di Sylvester

$$i_+(k) = |\{v_i | k(v_i, v_i) > 0\}|.$$

Ma abbiamo visto che $k(v_i, v_i) = \lambda_i$
quindi $i_+(k) = |\{\lambda_i > 0\}|$. La dimostrazione non è terminata. $\square$

Definizione 3
Una matrice simmetrica reale si dice definita positiva se tutti gli autovalori sono positivi

Definizione 4
Data una matrice quadrata $n \times n$, i minori principali leading, sono quelli ottenuti estraendo righe e colonne come segue

$$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2,3,\dots,n\}.$$

Esempio
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$|1| = 1$
$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$

Teorema 4
A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori principali leading sono positivi

$q\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$

1. Determinare gli indici

2. Calcolare $W \perp$ se $W = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Scriviamo la matrice della forma bilineare associata rispetto alla base standard

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad i_- = 2$$