

Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello

3 esoneri

Con le prove di esonero possiamo essere esonerati dall'orale.

Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.

L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.

La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale

Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistemazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).

Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiantata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).

Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.

Parliamo ora di modelli "ondulosi"

Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori

$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \rightarrow u(x, t)$

$$\text{Equazione della corda vibrante: } \begin{cases} \partial_t^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = h_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = h_1(x) \quad \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:
- $u(x, t) = \psi(t)\phi(x)$ variabili separate
- sovrapposizione:
- u_1, u_2 soluzioni $\Rightarrow u_1 + u_2$ soluzione

1.5 Onde stazionarie

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \text{costante} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}\end{aligned}$$

Spiegazione:

$$\begin{aligned}\psi''(t) &= -m^2\psi(t) \\ \psi(t) &= a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R} \\ \phi(x) &= A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))(A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx)) \\ \Rightarrow u(0, t) &= 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0 \\ (u(\pi, t) &= 0 = \psi(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow u(x, t) &= (a_m(\cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx) \text{ Tutti gli } m \text{ interi mi danno} \\ &\text{una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrappo-} \\ &\text{sizione}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) B_m \sin(mx). \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx).\end{aligned}$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$

Condizioni Iniziali:

$$u(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x, \pi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$$

Come trovare α_m, β_m

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{\pi} h_0(x) \sin(mx) dx = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \alpha_m \text{ (coefficienti di}$$

Fourier)

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:

La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.

Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

ma $D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, f_n Riemann integrabile.

Numeriamo $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre:

$$D(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\lim_{j \rightarrow +\infty} \cos(k! \pi x)^{2j}) \quad \text{Esercizio "facile"}$$

Esercizio difficile:

non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro

Esempio:

$C([0, 1]) \ni f, g$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\|f - g\|_1 = \dots$$

$(C([0, 1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)

$$\|f_m - f_n\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n, m \rightarrow +\infty$$

$$f_n \rightarrow f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Teorema 1

*Il completamento di $(C[0, 1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili **secondo Lebesgue***

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in \mathbb{R}^n)

Stabilire la misura è come definire un integrale.

$$|E| = \int X_E$$

Prerequisiti:

1. $|[a, b]| = b - a$
 $|[a, b] \times [c, d]| = (d - c) \cdot (b - a)$
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

$$3. \forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$$

$$3' \quad \forall E \quad \forall \sigma \text{ isometria} \quad |E| = |\sigma(E)|$$

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski)

in \mathbb{R}^3 non esiste nessuna funzione che soddisfa 1, 2 e 3.

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \dots \cup A_5.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Troviamo $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ t.c.

$\sigma_1(A_1) \cup \dots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sfera iniziale)

Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

Assioma 1 (della scelta)

Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possibile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_λ

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

0.2 Misure

X insieme non vuoto

2^X = insieme delle parti di $X = \{ \text{sottoinsiemi } E \subseteq X \}$

$\phi, X \in 2^X = \{ \chi : X \rightarrow \{0, 1\} \}$

$\chi \leftrightarrow E = \{ \chi = 1 \}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Definizione 1

Sia X non vuoto. Una misura è una funzione $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ che soddisfa le due proprietà:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

Commenti:

1) numerabile \Leftrightarrow al più numerabile

$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ possono essere finite: $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

2) Proprietà di monotonia: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

Segue da (ii) prendendo $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \dots$

3) Gli insiemi $\{E_i\}$ non sono necessariamente disgiunti

4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:

$E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Può accadere che $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

Esempi di misure:

- La misura che conta: X

$$\mathbb{H}^0 : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha } n \text{ elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:

$$\begin{aligned} X, x_0 \in X \\ \delta_{x_0} : 2^X \rightarrow [0, +\infty] \\ \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \end{aligned}$$

Verifica

δ_{x_0} è una misura

Osservazione

Se X è infinito allora $H^0(X) = +\infty$

Viceversa δ da finire

0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$ misura su X

Osservazione

Possono esistere E, F t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

Definizione 2 (Caratheodory)

Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura su X

Un insieme $E \subseteq X$ si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

Commenti:

1) $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

E è misurabile

\Updownarrow

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

Teorema 1

Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura.

1. la classe degli insiemi misurabili è una σ -algebra:

$$1) \emptyset, X \in M$$

$$2) E \in M \Rightarrow E^c \in M$$

$$3) \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

2. μ è numerabilmente additiva su M : se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ sono disgiunti a coppie ($E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j$) allora

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Commenti

1) M è chiuso anche per intersezioni numerabili: $E_i \in M$

$$\left(\bigcap_i E_i \right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

$$2) \limsup_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq N} E_i$$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geq N} E_i$$

Dimostrazione

Passo 1: M è un'algebra

$$\cdot \emptyset \in M, X \in M$$

Vado a verificare che $\forall A \subseteq X$ vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che $\mu(\emptyset) = 0$

Per X :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$$

Vado a verificare che per ogni $A \subseteq X$ vale le proprietà di Caratheodory: $\mu(A) =$

$$\mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$$

$\cdot E_2, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$ Considero un insieme test $A \subseteq X$:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$1) \ \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

Passo 2: finita additività di μ in M

$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

Ottenuto sempre per Caratheodory

$$\mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2).$$

Iterando questo passaggio:

$E_1, \dots, E_n \in M$ allora:

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

Spiegazione passaggio precedente

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^N E_i) = \dots = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

Passo 3: mostriamo le proprietà di σ -algebra e numerabile additività

Siano $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$

Consideriamo gli insiemi:

$F_1 := E_1, \quad F_2 := E_2 \setminus E_1$

$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$

quindi definiamo ricorsivamente: $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$

Allora F_i sono disgiunti a coppie

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$F_i \in M$

Fissiamo il test di Caratheodory $A \subseteq X, F_i \in M$, Passo 1: M algebra

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i).$$

Usando il passo 2: finita additività

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i). \end{aligned}$$

Passiamo al limite $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&\geq \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&= \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M
\end{aligned}$$

Se prendiamo come test $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, allora $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$
 $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$ — F_i sono disgiunti a coppie \square

Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebegue

1.1 Proprietà delle funzioni lunghezza di intervalli

I intervallo in \mathbb{R}

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ \sup I - \inf I & \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$$\emptyset = (a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) - \{x\} = [x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà:

$$1. |\emptyset| = 0$$

2. monotonia

$$I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$$

3. finita additività

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad I_i \text{ intervallo}$$

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Nota

se I illimitato

$$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n \text{ tale che } I_i \text{ illimitato}$$

$$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{k=1}^n |I_k|$$

Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \dots, n$

$$|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

4. I intervallo

$$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$$

$$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1)| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Nota

Se I illimitato

$$\Rightarrow I \cap [n, n+1) = [n, n+1) \text{ per infiniti } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| \text{ per infiniti } n$$

Se I limitato

$$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^k I \cap [n, n+1) \text{ per } l, k \in \mathbb{Z}$$

5. Numerabile subadditività

Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \\ \Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione 5.

Si può assumere I_i limitato $\forall i$

1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$

$$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$$

I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto

$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.

si può supporre che $a_1 < a < b_1$ se $b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_1| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Reiterando trovo l'aperto contenente a_1 , se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.

abbiamo quindi rinumerato I_1, \dots, I_n in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |I| = \sum_{i=1}^n b_i - a_i = b_1 - a_1 + \dots + b_n - a_n$$

notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati

$\forall \varepsilon > 0 \exists I^\varepsilon$ chiuso, $I^\varepsilon \subset I$ tale che $|I^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I|$

$\forall i \exists I_i^\varepsilon$ aperto tale che $I_i \subset I_i^\varepsilon$ e $|\sum_i I_i^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|\sum_i I_i|$

$$I^\varepsilon \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\varepsilon$$

$$|I^\varepsilon| = \frac{1}{1-\varepsilon} |I^\varepsilon| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^\varepsilon| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1])$$

Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati

per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione

$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ vero per la 5)

Ci basta dimostrare l'altro verso della disuguaglianza

se I limitato, (con estremi $a < b$)

$\forall k \geq 1$ consideriamo I_1, I_2, \dots, I_k sono contenuti in I e disgiunti

questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| \leq b - a$$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

$$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \dots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$$

per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^k |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I illimitato

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

$$I \cap [n, n+1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1)$$

$$\Rightarrow |I \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

□

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$

$I + x$ traslato di I

$$|I + x| = |I|$$

(invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli} \right\}.$$

$$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

Osservazione

Se $D \subset \mathbb{R}$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili

2) Per definire m si usano ricoprimenti numerabili ma anche i ricoprimenti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimenti finiti o ricoprimenti numerabili

$$E \subseteq \mathbb{R}$$

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervalli}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervalli}\}$$

La disuguaglianza può essere stretta

Esempio

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$

Sia $\{I_1, \dots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq 1$$

Infatti

$$R = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i}$$

$$\Rightarrow [0, 1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$$

$$\leq \left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) \leq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0, 1]| \leq \sum_{i=1}^n |\overline{I_i}| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

$$\Rightarrow \inf\left\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo}\right\} \geq 1 \text{ ma } E \subseteq [0, 1]$$

$$\Rightarrow \inf\left\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo}\right\} \leq 1$$

Se avessi ricoprimenti finiti \mathbb{Q} avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimenti infiniti.

Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Misura di Lebesgue

Reminder (misura di Lebesgue)

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : |I_i| \text{ intervalli } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}.$$

Proposizione 1

- 1) $m(\emptyset) = 0$
- 2) $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
- 3) *subadditività numerabile, $\{E_i\}$ successione di insiemi*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

- 4) $\forall I$ intervallo $m(I) = |I|$
- 5) $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E+x) = m(E)$

Dimostrazione

- 1) $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ dato che l'insieme vuoto è un intervallo
- 2) $\forall \{I_i\}$ intervalli tale che $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$ è un ricoprimento anche di $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ prendendo l'inf rispetto a $\{I_i\}$ $m(E) \leq m(F)$
- 3) Se $\exists i$ tale che $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$ tesi ovvia
possiamo supporre $m(E_i) < +\infty \quad \forall i > 1$
Dato $\varepsilon > 0 \exists \{I_k^i\}_k$ intervalli tali che $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ e

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$ successione di intervalli

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$$

quindi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $E = I$ $m(E) \leq |I|$ scegliendo I stesso come sottoricoprimento
 $\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ per la numerabile additività di } |\cdot|.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5) $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i + x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$

sappiamo che $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$$

□

Osservazione

È vero che se $\{E_i\}$ successione di insiemi disgiunti $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.

Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \dots + m(E_n).$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow$ sarebbe vera anche la finita additività.

Infatti

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \text{ sempre vero per subadditività.}$$

$$\text{Se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \text{ e } \forall k \geq 1 \quad m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i)$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di E_1 che di E_2 quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_i |I_i| + \sum_i |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se I_1, \dots, I_n intervalli, $I_i \cap I_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Si può supporre gli I_i limitati (sennò misura è infinita)

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i$$

$$m(I) = |I| = \sum_{i=1}^n |I_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |J_i| \geq m(\bigcup_{i=1}^n I_i) + m(\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i)$$

$$\leq m(\bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i) = m(I).$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| = m(\bigcup_{i=1}^n I_i).$$

se I_i intervalli con $I_i \cap I_j = \emptyset$ $i \neq j$

Definizione 1

Se X un insieme non vuoto, Una misura su X è una funzione

$$\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty].$$

tale che

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ (monotonia) } E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$$

$$3. \text{ (subadditività) } \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

$$2.+3. \Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Esempi di misura

1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty).$$

$$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \quad \text{difatti:}$$

$$- \delta_{x_0}(\emptyset) = 0$$

$$- \text{ se } E \subseteq F \text{ se } x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$$

$$\text{se } x_0 \in E \rightarrow x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$$

$$\text{se } \delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$$

$$\text{se } \delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \exists i, \text{ t.c. } x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$$

2) misura "che conta"

$$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}.$$

Esempio di insieme di misura di Lebesgue nulla

Non misurabile, insieme di Cantor

Al passo $n = 1$, $I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi J e rimuovendo gli intervalli centrali.

C_n è un insieme di 2^n intervalli chiusi, disgiunti, ognuno di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

C_n è alternato da C_{n-1} rimuovendo 2^{n-1} intervalli aperti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definita da $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0, 1] \setminus$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$$

$$m(C) \leq m(C_n) = m\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n\right) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

si scrive nella forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$, $x_i \in \{0, 1, 2\}$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \dots + \frac{x_i}{3^i} + \dots$$

Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Qui manca la parte precedente della lezione

f s.c.i $\Leftrightarrow f^{-1}(a, +\infty)$ aperto $\forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

$(\Rightarrow) f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x)$

$c- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \inf(fx) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \inf(fx) > a$ per δ sufficientemente piccolo

$\Rightarrow f(x) > a$ per $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$

$\Rightarrow \{f > a\}$ aperto

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R} \quad \forall a < f(x_0) \quad x_0 \in \{f > a\}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) > a$

$\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a \quad \forall a < f(x_0)$

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$

$\Rightarrow f$ s.c.i

□

Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Insieme di Vitali

Controesempio all'additività di m

Insieme di Vitali

In \mathbb{R} consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia $[x]$ la classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

V insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in $[0, 1]$ da ogni classe d'equivalenza. $V \subseteq [0, 1]$, $x \in V$

$$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V \text{ tale che } x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q \text{ dove } q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$$

$$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$$

Quindi abbiamo dimostrato

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \subseteq [-1, 2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti

$$\text{siano } q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$$

$$\text{se } V + q_1 \cap V + q_2 \neq$$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \text{ tale che}$$

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che $x_1 \sim x_2$ che è assurdo dato che in V prendiamo solo un rappresentante per ogni classe di equivalenza.

Ciò vuol dire che $\bigcup_{i \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + i$ è unione numerabile di insiemi disgiunti

Vediamo la misura di questo insieme

$$m([0, 1]) = 1 \leq m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q\right) \text{ per monotonia}$$

Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$= \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V + q).$$

$$= \sum m(V) \leq m([-1, 2]) = 3.$$

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V) \leq 3$$

Però le due disuguaglianze indicano che $m(V) > 0$ e $m(V) = 0$ (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di \mathbb{R} ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

Definizione 1 (Caratheodory)

X insieme non vuoto μ misura su X

Un insieme $E \subseteq X$ si dice μ -misurabile se $\forall F \subseteq X$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero E spezza additivamente ogni altro insieme

Osservazione

1. $E \subseteq X$ è μ misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$
 perché \geq è sempre vero per la subadditività
 Quindi si può anche supporre $\mu(F) < +\infty$
2. La definizione di misurabilità è simmetrica per E e $E^c = X \setminus E$, E misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$
 che è la misura che dovrei testare per E^c
 Quindi E è μ -misurabile $\Leftrightarrow E^c$ è μ -misurabile
3. Se $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$ è μ -misurabile.
 $\forall F \subseteq X$
 $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F) \Rightarrow E$ è μ -misurabile.

Indicheremo con η_μ la classe dei sottoinsiemi μ -misurabili
 $\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \text{ } \mu\text{-misurabile}\} = \{\emptyset, X, \dots\}$

Teorema 1

Sia μ una misura su X , η_μ la classe degli insiemi μ -misurabili, Allora:

1. se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ tale che $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
 tale che $E_1 E_2 \subseteq \dots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \dots$
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$
4. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
 tale che $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \dots$
 e $\mu(E_1) < +\infty$
 $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$

Dimostrazione

Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \text{ th : } E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$$\forall F \subseteq X$$

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1 \cap E_2) + \mu(F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \\ &\mu(F \cap E_1 \cup (F \setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

per subadditività

Induttivamente:

$$\text{se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$$

$$\text{Se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \dots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i^c \in \eta_\mu \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^c \in \eta_\mu$$

Secondo passo finita additività:

$$E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \dots, E_k \text{ disgiunti}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i \cap E_k\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)$$

terzo passo: Numerabile additività

$$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) &\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \quad \forall k. \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$, disgiunti

$$F \subseteq X$$

$$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F \cap E_i\right)$$

$$e \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^+ \mu(F \cap E_i)$$

quarto passo

$$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \eta_\mu$$

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_3 \setminus E_2 \cup \dots \cup E_k \setminus E_{k-1}$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E_i \setminus E_{i-1}$$

$$\{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i \geq 2}$$

successione di insiemi disgiunti e misurabili.

$$E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i+1})^c$$

$$\text{per il passo 3} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$$

$$= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1}))$$

$$E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1}$$

$$\Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1})$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^k (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})).$$

$$= \mu(E_2) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(E_2) - \mu(E_1) + \mu(E_3) - \mu(E_2) + \dots + \mu(E_k) - \mu(E_{k-1})).$$

Inoltre:

$$\text{se } E_1 \subseteq \dots \quad \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$$

$$\forall F \subseteq X$$

$$\mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(F \cap E_i)$$

Quinto passo

$$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$$

$$E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots \quad \mu(E_1) < +\infty$$

$$E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \dots$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) -$$

$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i)$. sesto passo

$$\{E_i\} \subset \eta_\mu$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$$

$$\forall F \subseteq X$$

$$\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k)$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^k E_i$$

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \setminus B_k)$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)$$

□

Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 σ -algebra

Definizione 1

X insieme non vuoto, Una famiglia $\eta \subseteq P(X)$ si dice σ -algebra su X se

1. $\emptyset, X \in \eta$
2. $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3. $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

Osservazione

Se η è σ -algebra e $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

$E_i \in \eta \rightarrow E_i^c \in \eta \quad \forall i$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta$

Una misura individua una σ -algebra

In generale

se μ è una misura su X

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X : R \text{ è } \mu\text{-misurabile}\}.$$

è una σ -algebra

In particolare in \mathbb{R} c'è la σ -algebra di Lebesgue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue

Definizione 2

Sia X un insieme non vuoto e sia $F \subset P(X)$ si chiama σ -algebra generata da F la σ -algebra data da

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

la più piccola σ -algebra che contiene F

Definizione 3

Se (X, ι) è uno spazio topologico la σ -algebra generata da ι si dice σ -algebra di Borel

Vogliamo ora indagare sulla σ -algebra di Lebesgue in \mathbb{R} $\eta_m = \eta$

Proposizione 1

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo

$\Rightarrow I \in \eta$ (è misurabile secondo Lebesgue)

Dimostrazione

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $\Rightarrow \forall F \subseteq \mathbb{R} \quad m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ **Primo caso**

Supponiamo $I = (a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

Sia $F \subseteq \mathbb{R}$, con $m(F) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ e $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$\begin{aligned} m(F) + \varepsilon &> \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I_i \setminus I|) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I). \end{aligned}$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ $|I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + |I_i \setminus I|$

$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$

$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$

$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$

Quindi:

Intervalli del tipo $I = (a, +\infty) \in \eta \rightarrow I = (-\infty, a] \in \eta$

$\rightarrow (a, b] \in \eta$

$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$

$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$

$\Rightarrow (a, b) \in \eta$

\Rightarrow vale anche per gli intervalli chiusi

tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti. \square

Teorema 1

Ogni aperto $a \subseteq \mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti

Corollario 1

σ -algebra di Borel in $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$ -algebra di Lebesgue

L'inclusione può essere stretta perché F insieme misurabili con Lebesgue e non con Borel

Quindi in \mathbb{R} si ha:

$B \subseteq \eta \subsetneq P(\mathbb{R})$, che è stretta perché e come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perché non vale l'additività $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lebesgue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti

1. $E \in \eta$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c. $E \subseteq A_\varepsilon$ e $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3. $\exists F \in B$ (F è intersezione numerabile di aperti) tali che $E \subseteq F$ e $m(F \setminus E) = 0$
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$ chiuso tale che $C_\varepsilon \subseteq E$ e $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$
5. $\exists G \in B$ (G è unione numerabile di chiusi) tale che $G \subseteq E$ e $m(E \setminus G) = 0$

Dimostrazione

1) \Rightarrow 2)

Hp $E \in \eta$

Primo caso: $m(E) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ successione di intervalli aperti tali che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$ (l'insieme A_ε

aperto) e $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$

$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$

$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$

$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$

quindi

$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon$

Secondo caso: $m(E) = +\infty$

$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$

$E \in \eta \Rightarrow \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$

applicando il primo caso

$\forall n, \forall \varepsilon$

$\exists A_n^\varepsilon$ aperto tale che $A_n^\varepsilon \supseteq E_n$ e $m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) < \varepsilon$

$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$

$m(A_\varepsilon \setminus E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E)\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$

Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

2) \Rightarrow 3)

Hp $\forall > 0, \exists A_\varepsilon$ aperto, $A_\varepsilon \supseteq E$ e $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

Th $\exists F \in B$ tale che $F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) = 0$

Per $\varepsilon = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \exists A_n$ aperto t.c. $A_n \supseteq E$ e $m(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$

$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B, F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) \leq m(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n \rightarrow +\infty \quad m(F \setminus E) = 0$

3) \Rightarrow 1)

Hp $\exists F \in B : F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) = 0$

$E = F \setminus (F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$

1) \Rightarrow 4)

$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ aperto

tale che $A_\varepsilon \supseteq E^c$ e $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$ è chiuso

$E^c \subseteq A_\varepsilon \Rightarrow E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$

$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C_\varepsilon^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4) \Rightarrow 5)

Per $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists C_n$ chiuso, $C_n \subseteq E$ tale che $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

$$\text{per } n \rightarrow +\infty m(E \setminus G) = 0$$

5) \Rightarrow 1)

Hp: $\exists G \in B$ tale che $G \subseteq E$ e $m(E \setminus G) = 0$

$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$ perché unione di misurabili

□

Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Approccio agli integrali di Lebesgue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

Definizione 1

Sia X un insieme non vuoto e η una σ -algebra in X .

((X, η) spazio misurabile)

Sia X uno spazio topologico,

una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice misurabile se $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \quad A$ aperto

Esempi

1) se $\eta = P(X) \Rightarrow$ ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ è misurabile

Se $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \rightarrow Y$ è η -misurabile $\Leftrightarrow f$ è costante.

2) Se X è spazio topologico e se $\eta \supseteq B(\text{Borel})$

$f : X \rightarrow Y$ continua $\Rightarrow f$ misurabile

3) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$$E \subseteq X$$

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}$$

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0, 1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A \end{cases} \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

Proposizione 1

Se (X, η) spazio misurabile e $f : X \rightarrow Y$

$\Rightarrow \{F \subseteq Y : f^{-1}(F) \in \eta\} = S$ è una σ -algebra in Y

di conseguenza se Y è uno spazio topologico e f è η -misurabile

allora $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$

Dimostrazione

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$$

$$f^{-1}(Y) = X \Rightarrow Y \in S$$

$$F \in S \text{ ovvero } f^{-1}(F) \in \eta$$

$$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$$

Facciamo vedere che S è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.

$$\{F_i\} \subset S \text{ ovvero } f^{-1}(F_i) \in \eta \quad \forall_i$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$$

□

Proposizione 2

Sia (X, η) uno spazio misurabile $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Allora f è misurabile se e solo se

$$\{x \in X : f(x) > t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \geq t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) < t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \leq t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

f è misurabile $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$ B boreliano

$$\Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Proposizione 3

Sia (X, η) uno spazio misurabile

1. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili

$\Rightarrow f + g, \lambda f \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \frac{f}{g} \quad$ se $g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ sono misurabili

2. Se $\{f_k\}$ successione di funzioni misurabili

$\Rightarrow \sup_k f_k, \inf_k f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ sono misurabili

In particolare, se $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$ è misurabile

Dimostrazione

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili

$$t \in \mathbb{R} \quad \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r + s = t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \text{ perché } f, g \text{ misurabili}$$

se x tale che $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t - g(x)$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) > r > t - g(x)$

quindi $g(x) > t - r \rightarrow s \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) > s > t - r$

$f, g, X \rightarrow \mathbb{R}$ numerabili, $\lambda \in \mathbb{R}, f$ misurabile

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

f misurabile

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{se } t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{se } f, g \text{ misurabili}$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$ sono misurabili

$$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

f misurabile

$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ Guarda sta dimostrazione sul libro o ricopila dalle foto perchè è assolutamente insensato \square

Sia (X, η) spazio misurabile
se η è la σ -algebra di misurabili di misura μ allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a η_μ

Proposizione 4

Sia (X, η, μ) spazio di misura

(μ è una misura su X e η è la σ algebra di μ misurabili)

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

e sia $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = g$ quasi ovunque (ovvero $m(\{f \neq g\}) = 0$)

\Rightarrow anche g è μ -misurabile

Dimostrazione

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$

Il primo insieme è contenuto in $\{g \neq f\}$ quindi ha misura nulla

$\Rightarrow \in \eta_\mu$

il secondo insieme è $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$ perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

\square

Corollario 1

se $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili $k > 1$ ed esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ per quasi ogni $x \in X$

\Rightarrow la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

Dimostrazione

$X_1 = \{x \in X \mid \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)\} = \{x \in X \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)\}$

è misurabile

$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{se } x \in X_1 \\ 0 & \text{se } x \notin X_1 \end{cases}.$$

è misurabile $\forall k$ perché $\tilde{f}_j = f_j$ quasi ovunque

$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$

quindi è misurabile

\square

0.2 Funzione di Lebesgue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

$$\forall n \quad [0, 1] = \bigcup_{i=1}^n J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$$

gli J sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, le I sono di ampiezza $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases}.$$

Lezione 9 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

0.1 Funzione di Lebesgue-Vitali

$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $n = 1$ $[0, 1] = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \cup (1/3, 2/3)$

Al primo passo abbiamo questa situazione, gli intervalli restanti (chiusi) sono gli J_i^1 e quelli rimossi (aperti) sono gli I_i^1

al passo $n = 2$ abbiamo $[0, 1] = J_1^2 \cup J_{23}^2 \cup J_4^2 \cup I_1^2 \cup I_{212}^2 \cup I_3^2$

In generale al passo n -esimo abbiamo $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{2^n-1} I_i^n$ con $|J_i^n| = \frac{1}{3^n}$ e $|J_i^n| = \frac{1}{2^n}$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } 3/2 & \text{su } J_1^1 \cup J_2^1 \\ \text{costante} & \text{su } I_1^1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^2 & \text{su } \bigcup_{i=1}^4 J_i^2 \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^n & \text{su } \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n.$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{3^n}]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = L_{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) - L_n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{2^n}$$

$$\forall m > n$$

$$\sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_n(x)| = \sup_{[0,1]} |L_n(x) - L_{m-1}(x) + L_{m-1}(x) - L_{m-2}(x) + \dots + L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{[0,1]} |L_{k+1}(x) - L_k(x)| \leq \sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_{m-1}(x)| + \dots + \sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \rightarrow n \rightarrow \infty 0.$$

$\{L_n(x)\}$ è uniformemente di Cauchy in $[0, 1]$.

$\Rightarrow \exists L \in C([0, 1])$ tale hce $L_n \rightarrow L$ uniformemente in $[0, 1]$

$$L_n(x) \leq L_n(y) \quad \forall x \leq y \Rightarrow L(x) \leq L(y)$$

$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è continua, monotona crescente

$$L(0) = 0, L(1) = 1$$

L è localmente costante su $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^m$
 $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_k^n$
 $\Rightarrow \exists m, \exists k \ x \in I_k^n \ L = \text{costante in } I_k^n \Rightarrow L'(x) = 0$
 $\Rightarrow L$ è derivabile quasi ovunque (in $[0, 1] \setminus C$) e $L' = 0$ quasi certamente.

$$\int_0^1 L'(x) dx = 0 \neq L(1) - L(0).$$

Integrale di Riemann perché L' è discontinua in C , non funziona quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale

Proposizione 1

$$L(C) = [0, 1] \ \forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 2\}$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$$

Dimostrazione

Primo caso $x \in C$ tale che $\exists n \geq 1 \quad x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$

Usiamo l'induzione su n

se $n = 1 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = \frac{2}{3} \Rightarrow L(0) = 0L(2/3) = L_1(2/3) = \frac{1}{2} \Rightarrow ok$

Supponiamo vero per $L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i}$

e sia $x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$, con $x_n = 2$

$$L(x) = L_n(x) = L_n(x - \frac{1}{3^n}) + (\frac{2}{3})^n \frac{1}{3^n}$$

$$L(x + \frac{2}{3^n}) + \frac{1}{2^n} = L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i} + \frac{x/2}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{x/2}{2^i}$$

secondo caso

$$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$$

è continua

$$\Rightarrow L(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i/2}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}.$$

$$L(C) = [0, 1]$$

Quindi L manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva.

Consideriamo

$$\phi(x) = L(x) + x$$

$\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ strettamente crescente

$\exists \phi^{-1}: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ strettamente crescente, con immagine in un intervallo

\Rightarrow continua

$\Rightarrow \phi$ è un omomorfismo di $[0, 1]$ in $[0, 2]$ $\phi([0, 1]) = \phi(C \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^n)$

$= \phi(C) \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(I_i^n)$ insiemi misurabili e disgiunti

$$\phi(x) = 2 = m(\phi([0, 1])) = m(\phi(C)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(\phi(I_i^n))$$

$$x \in I_i^n \quad \phi(x) = x + L(x) = x + a_i^n \Rightarrow \phi(I_i^n) = I_i^n + a_i^n$$

$$\Rightarrow m(\phi(I_i^n)) = |I_i^n| = \frac{1}{3^n}$$

$$= m(\phi(C)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^2$$

$$= m(\phi(C)) + 1$$

$$\Rightarrow m(\phi(C)) = 1$$

□

$$m(\phi(C)) > 0$$

$\Rightarrow \exists V \subset \phi(C)$ tale che $V \notin \eta$

ma $E = \phi^{-1}(V) \subset C \Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \eta$

quindi $E \in \eta$ ma $\phi(E) \notin \eta$

Proposizione 2

La σ -algebra η non è chiusa per omeomorfismi continui

Dimostrazione

$E \in \eta$ ma $\phi(E) = V \notin \eta$

$E \in \eta$ se $E \in B \Rightarrow \phi(E) = (\phi^{-1})^{-1}(E)$

ϕ^{-1} è continua $\Rightarrow \phi^{-1}$ è misurabile secondo Lebesgue

$\Rightarrow (\phi)^{-1}(E) \in \eta \quad \forall E \in B$

da capire come finisce sta roba (non so manco se questa sia la dimostrazione)

□

Proposizione 3

$\eta \setminus B \neq \emptyset$

Lezione 10 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-25

0.1 Continuando sulle funzioni misurabili

Definizione 1 (Funzione semplice)

Sia (X, A, μ) uno spazio di misura. Una funzione semplice in X è una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x), \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, N \geq 1, E_i \in A.$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^N E_i = X$

Teorema 1

Sia (X, A, μ) uno spazio di misura, e $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

Allora f misurabile $\Leftrightarrow \exists \{s_m\}$ successione di funzioni semplici tale che

$$s_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$$

Inoltre

1. se $f \geq 0 \Rightarrow$ si può scegliere $\{s_m\}$ tale che $s_m(x) \leq s_{m+1}(x) \quad \forall x \in X, \forall m \geq 1$.
2. se f è limitata $\Rightarrow s_m \rightarrow f$ uniformemente in X .

Dimostrazione

(\Leftarrow) ovvia, perché f è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili

(\Rightarrow) Primo caso: $f \geq 0$, limitata, si può supporre $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad [0, 1] &= \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \\ E_k^n &= \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \quad k = 1, \dots, 2^n \\ f \text{ misurabile} &\Rightarrow E_k^n \text{ misurabile } \forall k = 1, \dots, 2^n, \forall n \geq 1 \\ E_k^n \cap E_j^n &= \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } X = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_k^n \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n}(x)$$

$$\forall x \in X, \forall n \geq 1 \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^n \text{ tale che } x \in E_k^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x)$$

$$x \in E_k^n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2^n} f(x), \frac{k}{2^n}$$

$$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

\Rightarrow sono possibili due casi

$$s_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}.$$

oppure

$$s_n(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}.$$

nel caso 1

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = s_{n+1}(x)$$

nel caso 2

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$$

$$\forall x \in X \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^{n+1}$$

tale che $x \in E_k^n$

$$\Leftrightarrow s_n(x) \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$$

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

$$\sup_{x \in X} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow s_m \rightarrow f$ uniformemente in X

(\Rightarrow) secondo caso: $f \geq 0$

$$\forall n \geq 1$$

$$E_I^n = \{f < n\}, \quad E_{II}^n = \{f \geq n\}.$$

$$E_{I,k}^n = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = E_I^n$$

$$s_n(x) = n \chi_{E_{II}^n}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{I,k}^n}(x).$$

$$E_{II}^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = X.$$

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \text{ (come nel caso 1)}$$

$$\text{Se } f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) \geq m \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow x \in E_{II}^n$$

$$\Rightarrow s_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$$

$$\text{Se } f(x) < +\infty \Rightarrow \exists \bar{n} \text{ tale che } f(x) \leq \bar{n}$$

$$\Rightarrow x \in E_I^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n$$

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

la convergenza non è uniforme perché \bar{n} dipende da f .

$$\Rightarrow s_n(x) \rightarrow f(x)$$

Terzo caso

f di segno variabile

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

f misurabile $\Leftrightarrow f^-, f^+$ misurabili

Per il secondo caso

$$\exists \{s_n\} \text{ funzioni semplici } s_n(x) \rightarrow f^+(x) \quad \forall x$$

$$\{t_n\} \text{ funzioni semplici } t_n(x) \rightarrow f^-(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow s_n - t_n \text{ è funzione semplice, } s_n(x) - t_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

□

Definizione 2

Sia (X, A, μ) spazio di misura e sia $s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$, $c_i \geq 0$ si definisce

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i).$$

dove si usa la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$
e, inoltre, $\forall E \in A$

$$\int_E s \, d\mu = \int_X s \cdot \chi_E \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E \cap E_i).$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i \cap E}.$$

dato che $\chi_{E_i} \cdot \chi_E = \chi_{E_i \cap E}$

Definizione 3

Sia (X, A, μ) spazio di misura e sia $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile
 $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X s \, d\mu \mid s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f\}$ e $\forall E \in A$

$$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu.$$

Proprietà immediate dell'integrazione

1. $f = 0$ quasi certamente in $X \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$
2. Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f \, d\mu = 0$
3. $0 \leq f \leq g$, f, g misurabili $\Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$
4. Se $E, F \in A, E \subseteq F \Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$

Esempio

$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1\mu(\mathbb{Q}) = 0$
 s funzione semplice $0 \leq s \leq f$

Proposizione 1

Sia $s(x)$ funzione semplice, ≥ 0 , e sia $\mu_s : A \rightarrow [0, +\infty)$ definita da

$$\mu_s(E) = \int_E s \, d\mu.$$

μ_s è una misura su A (cioè $\mu_s(\emptyset) = 0$ ed è additiva su misurabili disgiunti)

Dimostrazione

$$\mu_s(\emptyset) = \int_{\emptyset} s \, d\mu = 0$$

Siano $\{E_i\} \subset A$ disgiunti e sia $s(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{F_k}(x)$ $F_k \in A$ $F_k \cap F_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$ $\bigcup_{k=1}^N F_k = X$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^K E_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^K E_i} s \, d\mu = \int_X s \chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} \, d\mu.$$

con

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} = \sum_{i=1}^K \chi_{E_i}.$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^K E_i \Leftrightarrow \exists i \, x \in E_i.$$

$$\int_X s \sum_{i=1}^K \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K s \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \chi_{F_j \cap E_i} \, d\mu.$$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^K \int_{E_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^K \mu_s(E_i).$$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu_s(E_i) \Rightarrow \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i).$$

□

Osservazione

Se $N \subseteq X$, $\mu(N) = 0$

$$\Rightarrow \int_N s \, d\mu = 0$$

$$\mu_s(N) = 0 \quad \forall N : \mu(N) = 0$$

$\mu_s \ll \mu$ μ_s è assolutamente continua rispetto a μ .

Lezione 11 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-26

0.1 Esercitazioni, Foglio 4

Esercizio 4

$f : X \rightarrow Y$

1. se $B \subseteq 2^Y$ σ -algebra di Y
 $A = \{f^{-1}(B), B \in B\}$ è una σ -algebra in X

Svolgimento

$$\emptyset \in B \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

sia $f^{-1}(C) \in A$, con $C \in B$

$$(f^{-1}(C))^c = X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c)$$

$$C \in B \Rightarrow C^c \in B \Rightarrow (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in A$$

$$\{f^{-1}(C_i)\}_{i \geq 1}, C_i \in B$$

$$= \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A$$

2. A σ -algebra in X

$$B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in A\} \text{ è una sigma algebra in } Y$$

Svolgimento

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in B$$

$$C \in B \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A \Rightarrow f^{-1}(C)^c \in A \Rightarrow f^{-1}(C^c) \in A \Rightarrow C^c \in B$$

$$\{C_i\} \subset B \Leftrightarrow f^{-1}(C_i) \in A \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in B$$

3. $X \xrightarrow{f} Y$

$$f^{-1}(\sigma < F >) \leftarrow \sigma < F > \text{ con } F \subset 2^X$$

\parallel

$$\sigma < f^{-1}(F) > \leftarrow F \text{ con } F \subset 2^X$$

Soluzione

Per il primo punto dell'esercizio la controimmagine della σ -algebra è comunque una σ -algebra.

$$f^{-1}(\sigma < F >) \supset f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(\sigma < F >) \supseteq \sigma < f^{-1}(F) >$$

$$\sigma < f^{-1}(F) > \quad B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma < f^{-1}(F) >\}$$

questa è una σ -algebra in Y (punto 2)

$f^{-1}(B) \subseteq \sigma < f^{-1}(F) >$ quindi sono l'una contenuta nell'altra, quindi le due σ -algebre coincidono.

Esercizio 5

Sia X un insieme (\neq) A una σ -algebra in X e sia $\mu : A \rightarrow [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\{E_i\} \subset A, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$

Osservazione

μ rimane monotona e subadditiva

Infatti :

$$A, B \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$B = A \cup B \setminus A \cup \emptyset \cup \dots$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

$$\text{Inoltre } \{A_i\} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

Esercizio

Dimostrare che $\exists \bar{\mu} : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ misura

tale che $A \subseteq \sigma$ -algebra dei $\bar{\mu}$ -misurabili e $\forall A \in \mathcal{A} \quad \bar{\mu}(A) = \mu(A)$

$$E \subseteq X \quad \bar{\mu}(E) = \inf\{\mu(A), A \in \mathcal{A}, A \supseteq E\}$$

$$\bar{\mu}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(\emptyset) = 0$$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \text{ se } \exists i \text{ t.c. } \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

$$\text{Allora } \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

$$\text{se } \bar{\mu}(E_i) < +\infty \quad \forall i \quad \forall i \exists A_i \in \mathcal{A} \text{ tale che } E_i \subseteq A_i \quad \bar{\mu}(E_i) \leq \mu(A_i) < \bar{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

$$\text{Se } E \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

$$\text{e } \forall A \in \mathcal{A}, A \supseteq E \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(E) \Rightarrow \bar{\mu}(E) \geq \mu(E) \Rightarrow \mu(E) = \bar{\mu}(E)$$

$$A \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow A \Rightarrow A \text{ è } \bar{\mu}\text{-misurabile cioè } \forall F \subseteq X$$

$$\bar{\mu}(F) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A).$$

$$\text{Se } F \in \mathcal{A} \Rightarrow A, F \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\mu}(F) = \mu(F)$$

$$= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

$$\text{se } F \notin \mathcal{A}, \text{ e } \bar{\mu}(F) < \infty$$

$$\forall k \exists A_k \in \mathcal{A} \mid F \subseteq A_k, \text{ e } \bar{\mu}(F) \leq \mu(A_k) < \bar{\mu}(F) + \frac{1}{k}$$

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}, A \supseteq F$$

$$\bar{\mu}(F) \leq \mu(A) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \leq \bar{\mu}(F)$$

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ tale che } \bar{\mu}(F) = \mu(A) \quad F \subseteq A$$

$$\bar{\mu}(F) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

$$\text{Dato che } \exists B \in \mathcal{A} \text{ tale che } F \subseteq B \text{ è } \bar{\mu}(F) = \mu(B)$$

Esercizio 6

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$f(E) \in \eta \quad \forall E \in \eta \Leftrightarrow m(f(E)) = 0 \quad \forall E \text{ se } m(E) = 0$$

$$(\Rightarrow) \text{ sia } N \text{ tale che } m(N) = 0$$

per assurdo supponiamo $m(f(N)) > 0$

$\Rightarrow \exists V \subset f(N) \quad V \notin \eta$ (ogni insieme di misura positiva contiene un insieme non misurabile)

$$f^{-1}(V) \cap N \subset N \Rightarrow m(f^{-1}(V) \cap N) = 0$$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \cap N \in \eta \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap N) = V \notin \eta$ ma dovrebbe appartenerci in quanto è immagine di un misurabile (ha misura nulla).

(\Leftarrow)

$$E \in \eta \text{ tale che } f(E) \in \eta$$

$$E \in \eta \Leftrightarrow E = B \cup N \quad m(N) = 0 \quad B \text{ boreliano.}$$

$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq E, C_n$ chiusi
 $f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n \cup N) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(C_n) \cup f(N)$ con $m(f(N)) = 0$ per ipotesi
 $\Rightarrow f(N) \in \eta$
 Se E è limitato $\Rightarrow C_n$ sono compatti $\forall n$
 $\Rightarrow f(C_n)$ è compatto $\forall n$ (f continua)
 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(C_n) \in B \subseteq \eta$ (boerliano)
 $\Rightarrow f(E) \in \eta$
 In generale, se $E \in \eta \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap [-n, n]$, limitati $\forall n$ $f(E) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(E \cap [-n, n]) \in \eta$ unione misurabile di misurabili.

Esercizio 11

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, x > 1, x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ n-1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad a_n \neq 0 \quad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \end{cases}.$$

le prime $n-1$ cifre sono tutte nulle, e gli a_k sono le cifre del numero irrazionale

$$x \in [0, 1] a_1 \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{a_1}{10} \geq \frac{1}{10}$$

$$\text{Se } x \in [0, \frac{1}{10}], a_2 \neq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$$

$$f(x) = \chi_{(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}) \setminus \mathbb{Q}} \text{ (tra } 0,01 \text{ e } 0,1)$$

$$f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}}(x)$$

Quindi f è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.

Lezione 12 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-01

0.1 Boh

(X, m, μ)

$$s = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}, c_j \geq 0 \quad E_j \in m$$

$$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j)$$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu = \int_X s \chi_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E)$$

Proposizione 1

Sia (X, m, μ) spazio di misura sia $s(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}(x)$ funzione semplice
 ≥ 0 ($c_j \geq 0 \quad \forall j$)
 $\Rightarrow \mu_S : m \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu \quad \forall E \in m.$$

è una misura.

Dimostrazione

$$\mu_S(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = 0$$

$$\{F_i\} \subset m, F_i \cap F_l = \emptyset \text{ se } i \neq l$$

$$F = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$$

$$\mu_S(F) = \int_F s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i)$$

$$= \sum_{j=1}^N c_j \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_j \cap F_i)$$

$$= \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_j \cap F_i) \quad \text{dato che } E_j \cap F_i \text{ sono disgiunti e misurabili}$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{F_i} s d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_S(F_i)$$

□

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono risultati che garantiscono la proprietà:

$\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ per q.o. $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Osservazione

Per l'integrale di Riemann la validità del passaggio al limite sotto il segno d'integrale richiede la convergenza uniforme.

Esempio

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_n\}$$

$$\forall n \geq 1 s_n(x) = \chi_{\{q_1, \dots, q_n\}}$$

s_n è discontinua in $\{q_1, \dots, q_n\}$

$$\Rightarrow s_n \in R([0, 1])$$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x).$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$
ma $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \notin R([0, 1])$

Teorema 1 (convergenza monotona, B. Levi)

Sia (X, m, μ) spazio di misura e sia $\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili

$f_n : X \rightarrow [0, +\infty] \quad \forall n$

monotona crescente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 1, q.o.$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x).$$

$f : X \rightarrow [0, +\infty]$ definita quasi ovunque è misurabile e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dimostrazione

$\int_X f_n d\mu$ è una successione numerica monotona crescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

$$f_n \leq f \quad \forall n \quad \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Tesi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu = \sup\{\int_X s d\mu : s \text{ semplice } 0 \leq s \leq f\}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu \quad \forall s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f$$

Sia s funzione semplice, $0 \leq s \leq f$ Sia $\varepsilon > 0$ e $\forall n$

$$E_n = \{f_n \geq (1 - \varepsilon)s\}.$$

• $E_n \in m \quad \forall n$ perché $f_n - (1 - \varepsilon)s$ è misurabile

• $E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ poiché $f_n \leq f_{n+1}$

• $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$ poiché sia $x \in X$

se $s(x) = 0 \Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$

se $s(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \sup_{n \geq 1} f_n(x) \geq s(x) \quad \exists \bar{n}$ tale che

$$(1 - \varepsilon)s \leq (1 - \varepsilon)f(x) < f_{\bar{n}}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in E_{\bar{n}}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_X s d\mu = \mu_{(1-\varepsilon)s}(X) = \mu_{(1-\varepsilon)s}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{(1-\varepsilon)s}(E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} (1 - \varepsilon)s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

□

Osservazione

1. $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$\Rightarrow \exists \{s_n\}$ successione di funzioni misurabili tale che

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X.$$

$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + n \chi_{\{f \geq n\}}.$$

Per il teorema di B. Levi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X s_n d\mu = \int_X f d\mu$$

2. Se $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile $\forall n$

$$f_n(X) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_{n \geq 1} f_n \geq 0$$

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

$$g_n = f_1 - f_n \geq 0 \quad \forall n$$

g_n è monotona crescente

$$\int_X g_n d\mu \rightarrow \int_X (f_1 - f) d\mu$$

$$\int_X (f_1 - f_n) d\mu$$

$$\text{Se } \int_X f_1 d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

In generale non vale se $\int_X f_1 d\mu = +\infty$

$$\text{Esempio: } f_n = \chi_{[n, +\infty)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1m([n, +\infty]) = +\infty$$

Corollario 1

Siano $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili $\forall n$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty$ oppure $+\infty \Rightarrow f : X \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

$$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu \doteq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

dove il penultimo passaggio (\doteq) è ancora da giustificare

□

Proposizione 2

Siano $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili

$$\Rightarrow \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

Dimostrazione

primo caso: f, g funzioni semplici, $f = s = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \chi_{E_j}$ $c_j \geq 0$ $E_j \in m$ disgiunti $\cup E_j = X$

$g = t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{F_k}$ $d_k \geq 0, F_k \in m$ disgiunti $\cup F_k = X$
 $E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^M F_k = \bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k$

$$s = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{\bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k} = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{k=1}^M \chi_{E_j \cap F_k}$$

Vero poiché unione di insiemi disgiunti

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j}.$$

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j} = \sum_{k=1}^M d_k \sum_{j=1}^N \chi_{F_k \cap E_j}.$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_X (s+t) d\mu &= \int_X \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M c_j \chi_{F_k \cap E_j} + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N d_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu. \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (c_j + d_k) \mu(F_k \cap E_j) = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu. \end{aligned}$$

secondo caso $f, g \geq 0$ misurabili

$\exists s_n \uparrow f$ e $\exists t_n \uparrow g$ ($\uparrow = \text{tende}$)
 $\Rightarrow s_n + t_n \uparrow f + g$

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

□

Esercizio

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini mai negativi $a_n \geq 0$

$\{a_n\}$ può essere pensata come una funzione

$f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$

$$n \rightarrow f(n) = a_n$$

$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu^*) \quad \int_{\mathbb{N}} f d\mu^* = ?$ dove μ^* calcola la cardinalità dei sottoinsiemi

Lezione 13 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-25

0.1 Lemma di Fatou

Lemma 1 (di Fatou)

Sia (X, M, μ) uno spazio di misura e $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ successione di funzioni misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$ con $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall k, \forall x$
e sono misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

ma $g_k \leq f_k \quad \forall k$

$$\Rightarrow \int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu \text{ e applicando il } \liminf$$

$$\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

□

Esempio 1

$f_n(x) = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ funzioni misurabili ≥ 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = 0$$

$$< \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Esempio 2

$$f_n(x) = \chi_{[n, +\infty)}(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \quad \forall n$$

Definizione 1 (Funzioni integrabili)

Sia (X, M, μ) spazio di misura e sia $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile.

Se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int_X f^- d\mu < +\infty$ allora f si dice integrabile e

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

se $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow f$ si dice sommabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$
questo tipo di funzioni definisce

$$L^1(X) = \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ misurabili, } \int_X |f| d\mu < +\infty\}.$$

Proposizione 1

Sia (X, M, μ) spazio di misura

1. Se f è integrabile su X
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$
2. (disuguaglianza di Chebychev) $f \in L^1(X) \Rightarrow \forall t > 0$
 $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu$
3. $f \in L^1(X) \Rightarrow |f(x)| < +\infty$ quasi ovunque in X (?)
4. $f \in L^1(X), \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque
5. $f, g \in L^1(X) \rightarrow f + g \in L^1$ ($f + g$ è definita quasi ovunque) e
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione

Dimostriamo ogni punto:

1. se $\int_X |f| d\mu = +\infty$ ovvio
 Se $\int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty$
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| = |\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu| \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu$
2. $\int_X |f| d\mu \geq \int_X f |\chi_{\{|f| > t\}}| d\mu \geq \int_X t \chi_{\{|f| > t\}} d\mu$
3. $f \in L^1(X)$
 se $|f| = +\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\}$ chiamo $E_n = \{|f| > n\}$
 $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \dots \subseteq E_1$
 $\mu(E_1) \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$
 $\Rightarrow \mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(E_n)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu = 0$
4. $\int_X |f| f d\mu = 0$
 $\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$
 $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$
 $\Rightarrow \mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = 0$
5. $f + g$ è definita su $X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})$ (dove il secondo insieme ha misura nulla)
 posso quindi calcolare il suo integrale
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_{X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})} (f + g) d\mu$
 $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$
 chiamiamo $f + g = h$
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$
 $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$
 $\Rightarrow \int_X (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu$
 \parallel
 $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu$

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X h^+d\mu - \int_X h^-d\mu = \int_X f^+d\mu - \int_X f^-d\mu + \int_X g^+d\mu - \\ &\int_X g^-d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu\end{aligned}$$

□

Teorema 1 (convergenza dominata o Teorema di Lebesgue)

Sia (X, M, μ) spazio di misura e siano $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ per q.o. $x \in X$ se $\exists g \in L^1(X)$ tale che $|f_n| \leq g$ quasi ovunque in $X \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Allora:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \rightarrow 0.$$

Dimostrazione

$|f_n| \leq g \rightarrow f_n \in L^1(X)$ e $|f| \leq g$ quasi ovunque $\rightarrow f \in L^1(X)$

$\Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0$ quasi ovunque in X (perché $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$)

quindi puntualmente per q.o. $x \in X$ fissato

$$2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 2g(x).$$

\Rightarrow Usando il lemma di Fatou

$$\int_X 2gd\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)d\mu.$$

sfruttiamo la linearità dell'integrale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\int_X 2g - \int_X |f_n - f|d\mu) = \int_X 2gd\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu$$

Nota: il \liminf diventa lineare nel caso dei limiti.

siccome $g \in L^1(X)$ posso semplificare

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu \leq 0.$$

□

Lezione 15 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-16

0.1 Convergenze varie (alberto agostinelli)

Definizione 1 (Convergenza quasi uniforme)

$f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente se $\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subseteq X, F_\delta$ misurabile $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \rightarrow 0$ ($f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$)

Proposizione 1

$f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

Dimostrazione

(\Rightarrow)

$\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che, $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$

tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$X \setminus F_\delta \subseteq \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X \quad \mu(F_\delta) < \delta$

tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta)$

$$\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq F_\delta.$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

(\Leftarrow)

$\varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists k = k(\varepsilon, \delta)$ tale che

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ per $\varepsilon = \frac{1}{j}, \quad \delta = \frac{\nu}{2^j}, \nu > 0$ fissato

$\Rightarrow \exists k_j = k_j(j, \nu)$ tale che $\mu(\bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) < \frac{\nu}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\nu}{2^j} = \nu.$$

$x \in X \setminus F_\nu$ (dove F_ν è l'argomento della misura precedente)

$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{j}\}$

$\Rightarrow \forall j \quad \exists k_j$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall n \geq k_j \Rightarrow \sup_{X \setminus F_\nu} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$0 \Rightarrow f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus F_\nu$

Abbiamo caratterizzato la convergenza quasi uniforme con la misura dei sopralivelli $\forall \varepsilon > 0$

conseguenza:

$$f_n \rightarrow f \text{ q.u.} \Rightarrow \begin{cases} f_n \rightarrow f \text{ q.u.} \\ f_n \rightarrow f \text{ in misura} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

ma allora

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) = \mu \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right).$$

$$\forall k \quad \mu(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \rightarrow 0.$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura

□

Teorema 1 (Egorov)

Sia (X, μ) spazio di misura finita ($\mu(X) < +\infty$)

Allora:

$$f_n \rightarrow f \text{ q.o.} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ q.u..}$$

Teorema 2 (Vitali)

Sia (X, μ) uno spazio di misura finita e siano $f_n, f \in L^1(X)$ tale che $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque

allora $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \Leftrightarrow \{f_n\}$ equi-assolutamente integrabili

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon \text{ se } E \in M \quad \forall n, \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione

(\Rightarrow) già visto

(\Leftarrow)

$f_n \rightarrow f$ quasi ovunque + $\mu(X) < +\infty$

\Rightarrow (per Egorov)

$\forall \delta > 0 \exists f_\delta \in M, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus f_\delta$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato

\Rightarrow sia $\delta(\varepsilon)$ dato dall'ipotesi di equi-assoluta integrabilità

e sia $f_\delta \in M$ dato dal teorema di Egorov

$$\Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| d\mu + \int_{F_\delta} |f_n - f| d\mu.$$

$$\leq \sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \mu(X \setminus F_\delta) + \int_{F_\delta} |f_n| d\mu + \int_{F_\delta} |f| d\mu.$$

$$\leq \left(\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \right) \mu(X) + \varepsilon + \varepsilon \quad (\text{dato che } \mu(F_\delta) < \delta).$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

□

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, m)$

f continua $\Rightarrow f$ misurabile

f continua quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile

MANCA UNA PARTE

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ è discontinua in } x\}.$$

$m\mu(D_f) = 0$ f è misurabile, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \cap D_f \cup \{f > t\} \setminus D_f.$$

\Rightarrow ha misura nulla \Rightarrow è misurabile

$$x \in \{f > t\} \setminus D_f$$

$\lim_{y \rightarrow x} f(y) \Rightarrow f(x) > t$ e f è continua in X

$$\Rightarrow \exists \delta_x > 0 : f(y) > t \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$$

$$\Rightarrow \{f > t\} \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap D_f^c$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

se $\exists g \in C(\mathbb{R})$

tale che $f = g$ quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile

$$\exists N \subset \mathbb{R}, m(N) = 0$$

tale che $f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \setminus N \cup \{f > t\} \cap N \text{ è misurabile}$$

$f = \chi_Q = 0$ quasi ovunque

$f = g$ quasi ovunque $\exists N, \mu(N) > 0$ $f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$

$$x \in \mathbb{R} \setminus N \quad \lim_{y \rightarrow x} f(y)$$

$f = \chi_{[0,1]}$ è continua quasi ovunque ma non può essere uguale quasi ovunque ad una funzione continua

Teorema 3

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile $\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists g_\delta \in C(\mathbb{R})$

tale che $m(\{f \neq g\}) < \delta$

e $\sup_{\mathbb{R}} |g_\delta| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f|$