Lezione 10 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-25

0.1 Altre informazioni sui compatti

Ricorda:
Un chiuso in un compatto è compatto, un compatto in un $T2$ è chiuso

Corollario 1
Sia $\mathbb{R}$ *con topologia euclidea,* $Y \subseteq \mathbb{R}$ *sottospazio allora* Y *compatto* $\Leftrightarrow Y$ *chiuso e limitato.*

Dimostrazione
$\Rightarrow \mathbb{R}$ *è* $T2$ *, se* Y *è compatto allora* Y *è chiuso in* $\mathbb{R}$*. Inoltre* Y *è limitato perchè il ricoprimento* $R = \{Y \cap]-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}\}$ *ha sottoricoprimenti finiti.*
$\Leftarrow$ *Suppongo* Y *chiuso e limitato, quindi in* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *tale che* $Y \subseteq [-n, n]$*.*
L'intervallo $[-n, n]$ *è omeomorfo a* $[0, 1]$ *quindi è compatto.*
Inoltre Y *è chiuso in* $[-n, n]$ *quindi è compatto* $\square$

Teorema 1
Sia $f : X \to Y$ *applicazione continua fra spazi topologici, se* X *è compatto allora* $f(X)$ *è compatto.*

Dimostrazione
Considero la restrizione
$$\tilde{f} : X \to f(X).$$
è continua. $\mathbb{R}$ *ricoprimento aperto di* $f(X)$*, allora*
$$\tilde{R} = \{f^{-1}(A) \mid A \in R\}.$$
è un ricoprimento aperto di X*, quindi esiste un sottoricoprimento finito*
$$\{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)\}.$$
Abbiamo, $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X) = A$
Quindi $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *è sottoricoprimento finito di* R $\square$

Corollario 2
Siano X *spazio topologico e* $f : X \to \mathbb{R}$ *continua, se* X *è compatto e diverso dal vuoto allora* f *ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione
$f(x)(\subseteq \mathbb{R})$ *è compatto,* $f(x) \neq 0$ *e limitato, quindi* $\sup f(x) \in \mathbb{R} \ni \inf f(x)$*.*
$f(X)$ *è anche chiuso, quindi* $\sup f(x) = \max f(x)$ *e* $\inf f(x) = \min f(x)$ $\square$

0.2 Come trovare omeomorfismi

Trovare esplicitamente un omeomorfismo è a volte molto rogonoso, di seguito troviamo degli strumenti per facilitare il lavoro.

Corollario 3
Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici. Se X è compatto e Y è $T2$ allora f è chiusa

Dimostrazione
Y è $T2$, quindi $f(C)$ è chiuso in Y. □
Otteniamo ora un fatto utilissimo.

Corollario 4
Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici. Se X è compatto, Y è $T2$, e f è biettiva, allora f è omeomorfismo

Dimostrazione
Dal corollario precedente, f è chiusa. Allora è un continua, biettiva, chiusa, segue: omeomorfismo. □

Proposizione 1
Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici.
Supponiamo

1. *f suriettiva.*
2. *Y compatto.*
3. *$f^{-1}(y)$ compatto $\forall y \in Y$.*
4. *f chiusa.*

Allora X è compatto.

Osservazione
La condizione analoga (4.) f aperta, non è sufficiente a garantire la compattezza di X. (fogli di esercizi per controesempio)
Dimostrazione
Definiamo AX aperto, un insieme $A' \subseteq Y$:

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}.$$

Osservazione
A' potrebbe essere vuoto. Però A' è aperto in Y, verifichiamo che $Y \setminus A'$ è chiuso in Y :

$$Y \setminus A' = \{z \in Y \mid f^{-1}(z) \nsubseteq A\} = \{z \in Y \mid \exists b \in X \setminus A \mid f(b) = z\} = f(X \setminus A)..$$

Allora $Y \setminus A'$ è chiuso perché immagine di XA tramite f chiusa.
Sia R ricoprimento aperto di X.
Sia $y \in Y$, considero $f^{-1}(y)$ è compatto. Allora esistono $A_1, \ldots, A_n \in R$ tale che $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$, ogni A_i dipende da y.
Definiamo $B_y = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (B_y dipende da y, definito come A') aperto in X
Considero B'_y è non vuoto e contiene $y \in Y$
Segue:

$$\{B'_y \mid y \in Y\} \text{ è un ricoprimento aperto di } X.$$

Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $B_{1_{y_1}}, \ldots, B'_{y_n}$
Segue $\{B_{y_1}, \ldots, B_{y_n}\}$ è ricoprimento finito aperto di X, Ciascun B_y è unione di un numero finito di elementi di R, quindi è un ammette un sottoricoprimento finito. □

Proposizione 2
Siano P, Q spazi topologici. Se P è compatto allora la proiezioni $P \times Q \to Q$ è chiusa.

Osservazione:
La proposizione in realtà è un'equivalenza: P è compatto $\Leftrightarrow p : P \times Q \to Q$ è chiusa $\forall Q$ spazio topologico.

Dimostrazione
Sia $C \subseteq P \times Q$ chiuso in topologia prodotto.
Allora $(P \times Q) \setminus C$ è aperto, vogliamo dimostrare che $Q \setminus q(C)$ è aperto, cioè che $Q \setminus q(C)$ è intorno di ogni suo punto $y \in Qq(C)$
$P \times \{y\} (\subseteq P \times Q)$
è omeomorfo a P, quindi compatto.
Consideriamo la solita base della topologia prodotto
$(P \times Q) \setminus C = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$
Per compattezza $P \times \{y\}$ è contenuto nell'unione.
$P \times \{y\} \subseteq (U_{i_1} \times V_{i_1}) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \times V_{i_n}) \subseteq (P \times Q) \setminus C$
Considero $V = V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_n}$

$$P \times \{y\} \subseteq (U_{i_1} \times V) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \times V) \subseteq (P \times Q) \setminus C.$$

Allora poniamo $U = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$

$$P \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq (P \times Q) \setminus C.$$

Segue: nessun punto di V è la seconda coordinata di alcun punto di C cioè $y \in V \subseteq Q \setminus q(C)$
Segue $q(C)$ è chiuso. □

Osservazione
La dimostrazione assomiglia a quella su $T2 \Leftrightarrow \triangle$ chiusa nel prodotto (vedi teorema di Wallace sul Manetti).

Corollario 5
Se P e Q sono spazi topologici compatti allora $P \times Q$ compatto.

Dimostrazione
Applichiamo a $q : P \times Q \to Q$ la proposizione che da condizioni sufficienti alla compattezza del dominio.
Abbiamo q continua, suriettiva, codominio Q compatto, controimmagini $P \times \{y\}$ compatte, q chiusa, per la proposizione precedente, Segue $P \times Q$ compatto $\square$
Esempio
$[0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$ è compatto, e in generale $[0, 1]^n \quad \forall n \geq 1$ è compatto.
Osservazione
A questo punto si dimostra facilmente $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ Y è chiuso e limitato.

0.3 Identificazioni

Definizione 1
Un'applicazione $f : X \to Y$ fra spazi topologici si dice identificazione se

1. *f è continua e suriettiva*
2. *Un sottoinsieme $A \subseteq Y$ qualsiasi è aperto se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto in X*

Osservazione
Se f è un'identificazione allora la topologia su Y è determinata da f e dalla topologia su X.

Lemma 1
Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici.

1. *Se f è suriettiva e aperta allora è un'identificazione.*
2. *Se f è suriettiva e chiusa allora è un'identificazione.*

Dimostrazione
1) *Supponiamo f suriettiva, aperta e continua.*
Sia $A \subseteq Y$ supponiamo $f^{-1}(A)$ aperto in X. Dimostriamo che A è aperto in Y.
Considero $f(f^{-1}) = A \cap f(X) = A \cap Y = A$ aperto perché f è aperta
Il punto 2 della dimostrazione è lasciata per esercizio ma è del tutto analoga.
$\square$
Esempi

1. Ogni omomorfismo è identificazione.
2. Le proiezioni $p : P \times Q \to P$ e $q : P \times Q \to Q$ sono identificazioni.

3. $$\begin{aligned} f : [0,1] \to &\quad S^1 \\ t \to &(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

   è suriettiva e continua.

   è anche chiusa perché $[0,1]$ è compatto e S^1 è $T2$.