Lezione 33 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Classificazione affine ed Euclidea

$\ell \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ conica
$\circledast a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{01}y + a_{00}$
pongo $a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}, a_{21} = a_{12}$ dunque la matrice $A = (a_{ij})$ è simmetrica.
Chiamo

$$\underline{\widetilde{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Allora } \circledast \text{ diventa.}$$

$$\underline{\widetilde{X}}^t A \underline{\widetilde{X}}.$$

Considera l'affinità $T_{M,C}(\underline{X}) = M\underline{X} + c$ ove $M \in GL(2, \mathbb{K}), \quad b \in \mathbb{K}^2$
Abbiamo visto che c'è un omomorfismo iniettivo

$$Aff(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \to GL(3, \mathbb{K}).$$

$$T_{M,C} \to \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0 \\ c & M \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se effettuo il cambio di coordinate

$$\underline{\widetilde{X}} = \widetilde{M}\underline{\widetilde{X}}'.$$

l'equivalenza $\underline{\widetilde{X}}^t A \underline{\widetilde{X}} = 0$
diventa $(\widetilde{M}\underline{\widetilde{X}}')^t A \widetilde{M}\underline{\widetilde{X}}'$

$$\underline{\widetilde{X}}'^t B \underline{\widetilde{X}}' = 0.$$

con $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$
Questa equazione ci dice che il rango di A è una proprietà affine di ℓ. Chiameremo tale numero rango di ℓ (notazione $r(\ell)$
Diciamo che ℓ è
non degenere se $r(\ell) = 3$
semplicemente degenere se $r(\ell) = 2$
doppiamente degenere se $r(\ell) = 1$

$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
In altri termini, A_0 è la matrice della forma quadratica associata ai termini quadratici del polinomio $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ (A_0 è il minore ottenuto togliendo prima riga e prima colonna)
$\underline{\widetilde{X}} = \widetilde{M}\underline{\widetilde{X}}'$
$A \leftrightarrow B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$
$A_0 \leftrightarrow B_0 = M^t A_0 M \circledast$

Dunque anche rkA_0 è un invariante affine di ℓ

$\det A_0 \begin{cases} \neq 0 & \ell \text{ conica a centro} \\ = 0 & \ell \text{ parabola} \end{cases}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Da $\circledast$ deduciamo che anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine (infatti $\det B = (\det M)^2 \det A_0$)

$$\det B \begin{cases} > 0 & \ell \text{ ellisse} \\ < 0 & \ell \text{ iperbole} \end{cases}.$$

Teorema 1

Ogni conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è affinemente equivalente a una delle seguenti:
1) $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ *conica a centro 1*
$x^2 + y^2 = 0$ *conica a centro degenere 2*
$y^2 - x = 0$ *parabola 3*
$y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere 4*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere 5*
2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ *ellisse 1*
$x^2 + y^2 + 1 = 0$ *ellisse a punti non reali 2*
$x^2 + y^2 = 0$ *ellisse degenere 3*
$x^2 - y^2 - 1 = 0$ *iperbole 4*
$x^2 - y^2 = 0$ *iperbole degenere 5*
$y^2 - x = 0$ *parabola 6*
$y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere 7*
$y^2 + 1 = 0$ *parabola degenere 8*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere 9*
Le coniche di ognuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affinemente equivalenti

Dimostrazione

Partiamo da $\underline{\widetilde{X}}^t AX = 0$ e tramite affinità vogliamo ridurci ad uno dei casi elencati
Passo 1:
eliminazione del termine in xy
Poichè A_0 è simmetrica, esiste $M \in GL(2, \mathbb{K})$ tale che $M^t AM$ è diagonale. Quindi effetto la sostituzione $\underline{X} = M\underline{X}'$. L'equazione, nelle nuove coordinate $\underline{X}'$, che per comodità indichiamo ancora $\underline{X}$ è

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_00 = 0.$$

Osserviamo che la conica è a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$
Passo 2
Eliminazione dei termini lineari e costanti
Supponiamo ℓ a centro

effettuiamo la traslazione $\begin{cases} x = x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$ *che cambia l'equazione in* $a_11x'^2 + a_{22}y'^2 + c_00 = 0$

Se ℓ *non è a centro possiamo supporre, a meno di scambiare le variabili (ovvero effettuare l'affinità* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*) che risulti*

$$a_11 = 0, a_{22} \neq 0.$$

$a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$

Tramite la traslazione $\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$

l'equazione diventa

$$a_22y^{2\prime} + 2a_{01}x' + d_{00} = 0.$$

Se $a_{01} \neq 0$ *eseguo* $\begin{cases} x' = x'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ y' = y'' \end{cases}$

ottenendo $a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0$

se $a_{01} = 0 \quad a_{22}y'^2 + d_{00} = 0$

Passo 3

Normalizzazione dei coefficienti

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$*. Sia* ℓ *a centro. Partiamo da*

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_{00} = 0.$$

se $c_{00} = 0$ $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (2)$

Se $c_{00} \neq 0$

$$-\frac{a_{11}}{c_{00}}x^{2\prime} - \frac{a_{12}}{c_{00}}y^{2\prime} - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{11}}}x \\ y' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{22}}}y \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + y^2 - 1 = 0(1).$$

Sia ora ℓ *non a centro, trasformata in*

$$a_{22}y^{2\prime} + d_{00} = 0.$$

$d_{00} = 0 \quad y^{2\prime} = 0 \rightsquigarrow \quad y^2 = 0(5)$

$d_{00} \neq 0 \quad -\frac{a_{22}}{d_{00}}y^{2\prime} - 1 = 0$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-\frac{d_{00}}{a_{22}}}y \\ x' = x \end{cases} \rightsquigarrow y^2 - 1 = 0(4).$$

Resta da vedere il caso ℓ *non a centro trasformata in*

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow y^2 - x = 0(3).$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ℓ *a centro*

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y^{2\prime} + c_{00} = 0.$$

Posso supporre $c_0 0 = 0$ *o* $c_0 0 = -1$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (1) - (5).$$

ℓ *non a centro del tipo*

$$a_{22}y'^2 + d_0 0 = 0.$$

Posso supporre $d_{00} = 0$ *o* $d_{00} = -1$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (7) - (9).$$

ℓ*a centro del tipo*

$$a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

Posso supporre $a_{22} > 0$ *e effettuare* $\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow 6$ $\square$

Osservazioni

1) Se ℓ è a centro, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{22}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}.$$

Ha soluzione unica (poichè $\det A_0 \neq 0$) (x_0, y_0)

Il punto con tali coordinate è il centro di simmetria, infatti la simmetria rispetto a tale punto

$$\begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases}.$$

manda ℓ in ℓ

Le rette passanti per $c = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si dicono diametri di ℓ

2) per calcolare i punti impropri di ℓ di equazione

$$\underline{\widetilde{X}}^t A \underline{\widetilde{X}} = 0.$$

bisogna risolvere l'equazione omogenea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

$\left(x = \dfrac{x_1}{x_0}, \quad y = \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ che ha discriminante $-detA_0$. Quindi le soluzioni sono
reali distinte ℓ iperbole
reali coincidenti ℓ parabola
complesse conugate ℓ ellisse

Teorema 2
Ogni conica di $\mathbb{E}^2$ è congruente a una delle seguenti
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b > 0$ *ellisse*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \quad a \geq b > 0$ *ellisse a putni non reali*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad a \geq b > 0$ *ellisse degenere*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$ *iperbole*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad a > 0, b > 0$ *iperbole degenere*
$y^2 - 2px = 0 \quad p > 0$ *parabola*
$y^2 - a^2 = 0 \quad a \geq 0$ *parabola degenere*
$y^2 + a^2 = 0 \quad a > 0$ *parabola degenere*
$y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere*
le coniche elencate sono a due a due non equivalenti