Dispense Algebra I

Prima parte del corso

Federico De Sisti

2024-12-05

Contents

1 Preambolo

Siamo giunti ad un nuovo capitolo della nostra vita, talvolta per andare avanti bisogna guardarsi un po'indietro, ed è per questo che propongo ora una lista delle passate mogli di Alberto Agostinelli, la quale anima è più pura rispetto a quella del passato corso di Geometria I, ma non abbastanza per non essere citato in questo testo:

Alessia
Beatrice
Camilla
Chiara
Elisa
Federica
Francesca
Gaia
Giulia
Ilaria
Laura
Martina
Nicole
Sara
Sofia
Valentina
Vittoria
Eleonora

Speciali ringraziameti vanno fatti ad Andrea Duca, magnifico sulle parallele

2 Cosa c'è su e-leaning di Francesco Mazzini

Date appelli
Esercizi settimanali
All'esame ti chiedono due esercizi delle schede scelti a caso
Ci sono 2 esoneri (primo 17 dicembre) (secondo ?? maggio)
Libri
M. Artin Algebra
IN. Hernstein: Algebra (difficile)

3 Gruppi

Definizione 1 (Gruppo)
Un gruppo è un dato di un insieme G con un'operazione $\cdot$ tali che:
1) L'operazione è associativa

$$f \cdot (gh) = (f \cdot g) \cdot h \qquad \forall f, g, h \in G$$

2) Esistenza elemento neutro

$$\exists e \in G \text{ tale che } g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in G.$$

3) esistenza degli inversi

$$\forall g \in G \qquad \exists \qquad g^{-1} \in G \quad \text{tale che } g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e.$$

Nomenclatura 1 (notazione)
$(G, \cdot)$ *dato* $g \in G$ *denotiamo con:*
1) $g^0 = e$
2)$g^1 = g$
3)$g^n = g \cdot \ldots \cdot g$4)$g^{-n} = (g^{-1})^n$

Osservazione:
Con questa notazione:

$$(g^n)^m = g^{nm}$$
$$g^n \cdot g^m = g^{n+m}$$

Esempi
1) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$
2) $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) | det(A) \neq 0\}$ con prodotto
3) $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in Mat_{nn}(\mathbb{K}) | det(A) = 1\}$
4) X insieme

$$S_X = \{ \text{ funzioni } X \to X \text{ invertibili}\}$$

Speciale Se $X = \{1, \ldots, n\}$
Allora chiamiamo

$$S_n = S_X.$$

(è i lgruppo di permutazioni su n elementi)
Si chiama gruppo simmetrico

Definizione 2 (Gruppo diedrale)
$n \geq 3$ Consideriamo l'n-agono regoalre nel piano (3-agono, triangolo)
D_n è l'insieme delle simmetrie del piano che preservano l' n-agono
Si chiama gruppo diedrale, l'operazione è la composizione

Esempio:
Per $n = 3$ abbiamo D_3
TODO INSERISCI DISEGNO gruppo diedrale
Esercizio
Determina gli inversi e tutti i possibili prodotti degli elementi di D_3

Definizione 3 (Gruppo Abeliano)
$(G,)$ gruppo si dice Abeliano se l'operazione è commutativa

$$f \cdot g = g \cdot f)$$

Definizione 4 (Gruppo finito)
$(G, \cdot)$ gruppo si dice finito se la sua cardinalità è finita

$$|G| < +\infty$$

Definizione 5 (Ordine del gruppo)
$L(G, \cdot)$ gruppo, l'ordine di G è $|G|$

Definizione 6 (Ordine di un elemento)
$ord(g) = \min\{n \in \mathbb{N} | g^n = e\}$
se $\nexists n \in \mathbb{N}$ tale che $g^n = e$ poniamo $ord(g) = +\infty$

Definizione 7 (Gruppo ciclico)
$n \geq 3$ consideriamo C_n l'insieme delle isometrie del piano che preservano l' n-agono e preservano l'orientazione, questo si chiama gruppo cicliclo

Esempio
Nel caso di $n = 3$ abbiamo solamente 3 elementi: identità, e le due rotazioni (ordine dispari) **Esercizi**
1) si dimostri che l'elemento neutro in un gruppo è unico

2) si dimostri che ogni elemento in un gruppo ammette un unico elemento inverso
per casa
1) Trvoare un'applicazione biunivoca $S_3 \to D_3$
2) Dimostrare che non esiste un'applicazione biunivoca $S_4 \to D_4$
3) Dimostrare che i seguenti nkn sono gruppi
$\cdot Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ con prodotto riche per colonne
$GL(\mathbb{K})$ con somma tra matrici
$\mathbb{Z}\mathbb{Q}\mathbb{R} conilprodotto$

Proposizione 1
$(G, \cdot)$ gruppi finito, Allora ogni elemento ah ordine finito

Dimostrazione
$g \in G$ Considero il sottoinsieme

$$A = \{g, g^2, g^3, \ldots\} \subseteq G.$$

quindi $|A| < +\infty \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{N}, s > t$ tali che

$$g^s = g^t.$$

Moltiplico per g^{-t} a destra

$$g^s = g^t \quad \Rightarrow \quad g^s \cdot g^{-t} = g^t \cdot g^{-t} \quad \Rightarrow \quad g^{s-t} = e.$$

Quindi $n = s - t \geq 1$ e $g^n = e \Rightarrow ord(g) \leq n < +\infty$ $\square$

Definizione 8 (Sottogruppo)
$(G, \cdot)$ gruppo $H \subseteq G$ sottosinsieme, si dice che H è un sottogruppo se $(H, \cdot)$ è un gruppo.
In tal caso scriveremo $H \leq G$

Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo, $G \subseteq G$ sottoinsieme allora $H \leq G$se H è chiuso rispettto a $\cdot$
e H è chiuso rispetto agli inversi
(se $g, h \in G \Rightarrow g \cdot h \in H$ e se $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$)

Proposizione 2
$(G, \cdot)$ gruppo $H \subseteq G$ sottoinsieme con $|H| < +\infty$ Allora:
1) $H \leq G$ se e solo se H è chiuso rispetto a $\cdot$

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *ovvia*
($\Leftarrow$) *basta dimostrare che H è chiuso rispetto alĺ inverso ovvero*

se $|H| < +\infty$
e H *chiuso rispetto a* $\cdot$
Allora H *è chiuso rispetto agli inversi*
Sia $h \in H$
$A = \{h, h^2, h^3, \ldots\} \subseteq H$
Allora $|A| < \infty$
Ragionando come prima deduciamo $ord(h) < +\infty$

$$h \cdot h^{ord(h)-1} = h^{ord(h)-1} \cdot h = e.$$

Quindi $h^{-1} = h^{ord(h)-1} = h \cdot \ldots \cdot h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$ $\square$
Esempi
1)$C_n \leq D_n$
2) $SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$
3) $(G, \cdot)$ gruppo $g \in G$

$$< g >= \{g^n \in G | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Allora $< g > \leq G$
Congruenze
$(G, \cdot)$ gruppo $H \leq G$

Definizione 9
$f, g \in G$ si dicono congruenti modulo H se

$$f^{-1} g \in H.$$

In tal caso scriveremo

$$f \equiv g \quad mod \quad H.$$

Esercizio
Dimostrare che al congruenza modulo H definisce una relazione di equivalenza su G
Suggerimento
$(f^{-1} \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot (f^{-1})^{-1} = g^{-1} \cdot f$
e H è chiuso rispetto agli inversi
Esercizi:
$(G, \cdot)$ è un gruppo $H \leq G$ Allora la classe di equivalenza di $g \in G$ modulo H è il sottoinsieme

$$gH = \{g \cdot h | h \in H\}.$$

C'è una classe di equivalenza speciale in G data da

$$e \cdot H = H.$$

l'unica ad essere un sottogruppo

Dimostrare che esiste un'applicazione biunivoca tra $H \to gH \quad \forall g \in G$

3.1 Classi di equivalenza

Notazione 1
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $H \leq G$ un sottogruppo:

- *Dato $g \in G$ il sottoinsieme gH si chiama laterale sinistro o "classe laterale sinistra"*
- *L'insieme dei laterali sinistri si indica con G/H*

Esempi importanti
$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ $H = (m) = \{am|a \in \mathbb{Z}\}$ con m fissato
$G/H = \mathbb{Z}/(m)$
Attenzione
potete definire $f = g \bmod H$ tramite la condizione $f \cdot g^{-1}$
Le due definizioni non sono equivalenti [La chiameremo congruenza destra]

Notazione 2
L'insieme delle classi di equivalenza destra si indica con

$$H \backslash G.$$

Definizione 10
Gli elementi di G/H si chiamano laterali sinistri, quelli di $H \backslash G$ si chiamano laterali destri

Esercizio:
$(G, \cdot)$ gruppo
$H \leq G$ $g \in G$ fissato
Allora il laterale sinistro a cui appartiene g è

$$gH = \{g \cdot h|h \in H\}.$$

Soluzione
fisso $f \in G$ e osserviamo che

$$g \equiv f \bmod H.$$

Se e solo se $g^{-1} \cdot f \in H$.
Questo è equivalente a

$$\exists h \in H \text{ tale che } g^{-1} \cdot f = h.$$

ovvero

$$\exists h \in H \text{ tale che } f = g \cdot h.$$

Esercizio
$H \leq G$
Allora $|G/H| = |H\backslash G|$
Soluzione
Basta eseguire un'applicazione biunivoca tra i due insiemi

Definizione 11
$(G, \cdot)$ gruppo $H \leq G$ si dice sottogruppo normale se $gH = Hg \quad \forall g \in G$

Esempio
$G = S_3$ ricordo che S_3 è il gruppo di permutazioni dell'insimee $\{1, 2, 3\}$
Quali sono gli elementi di S_3?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 1)$$

scambio il 3 con l'uno , il 2 con il 2

(2,3,1)
(1,3)
(1,2)
Id

$$H_1 =< (1, 2) >= \{id, (1, 2)\}.$$

$$H_2 =< (3, 2, 1) >= \{id, (3, 2, 1), (2, 3, 1)\}.$$

Esempio (Nuova) Notazione
$G = S_3$ ricordo che S_3 è il gruppo di permutazioni dell'insimee $\{1, 2, 3\}$
Gli elementi sono $S_3 = \{Id, (12), (13), (23), (231), (321)\}$
Per la composizione usiamo la seguente notazione:
Per esempio leggiamo (123)(231) = (213), quindi leggiamo i cicli da destra e permutiamo verso destra, quindi 2 va in 3, (mi sposto nel primo ciclo) 3 va in 1, quindi ottengo 2 va in 1, finisce quidni con 1 e controllo dove va, nel ciclo di destra, quindi 1 va in 2, cambio cilco, 2 va in 3, ottengo quindi (213)
Esercizio
Dimostrare che $H_1 \leq S_3$ non è normale, mentre $H_2 \leq S_3$ è normale

Notazione 3
Se $H \leq G$ è normale scriveremo

$$H \trianglelefteq G.$$

Esercizio
$H \leq G$ sottogruppo dimostrare che l'applicazione $\phi : H \to gH$

$g \to g \cdot h$
Soluzione
ϕ è suriettiva per definizione di gH
è anche iniettiva infatti se $h_1, h_1 \in H$ soddisfano

$$gh_1 = gh_2 \quad .$$

allora $h_1 = h_2$ (per la legge di cancellazione)
Ossercazione
$(G, \cdot)$ gruppo
$H \leq G$ Allora

$$|gH| = |Hg| \quad \forall g \in G.$$

anche se $gH \neq Hg$ poiché hanno entrambi la stessa cardinalità di H
Inoltre tutti i laterali sinistri (e destri) hanno la stessa cardinalità

Definizione 12
$(G, \cdot)$ gruppo, $H \leq G$ l'indice di H in G è

$$[G : H] = |G/H|.$$

dove $|G/H|$ è il numero di classi laterali sinistre

Osservazione
$H \leq G$ sottogruppo
Se G è abeliano allora $H \trianglelefteq G$
Il viceversa è falso! Possono esistere sottogruppi normali in gruppi non abeliani

Proposizione 3
$(G, \cdot)$ gruppo $H \leq G$ allora

$$|G| = [G : H]|H|.$$

Dimostrazione
Basta ricordare che la cardinalità di ciascun laterale sinistro è pari a $|H|$ ☐
Osservazione
$H \subseteq G => [G : H] = \dfrac{|G|}{|H|}$

Teorema 1 (Lagrange)
$(G, \cdot)$ gruppo $H \leq G$ Allora l'ordine di H divide l'ordine di G

Dimostrazione
Dall'osservazione segue $\dfrac{|G|}{|H|} = [G : H] \in \mathbb{N}$ ☐

Corollario 1
$(G,\cdot)$ gruppo di ordine primo (ovvero $|G| = p$ con p primo)
Allora G non contiene sottogruppi non banali (tutto il gruppo o il gruppo minimale)

Dimostrazione
Sia $H \leq G$ allora per Lagrange abbiamo

$$|H| \text{ divide } p.$$

$\Rightarrow |H| = 1$ *quindi* $H = \{e\}$
oppure $\Rightarrow |H| = p$ *quindi* $H = H$

$\square$

Corollario 2
$(G,\cdot)$ gruppo (finito)
Dato $g \in G$ si ha $ord(g)$ divide l'ordine di G

Dimostrazione
Dato $g \in G$ considero

$$< g >= \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$$
$$| < g > | = ord(g).$$

La tesi segue ora da Lagrange $\square$

3.2 Operazioni fra sottogruppi

Proposizione 4
$(G,\cdot)$ gruppo $H, K \leq G$
Allora $H \cap K \leq G$

Dimostrazione
$H \cap K$ è chiuso rispetto all'operazione e agli inversi poiché sia H che K che lo sono $\square$

Esercizio
Esibire due sottogruppi $H, J \leq G$ tali che $H \cup K$ non è un gruppo

Definizione 13
Dati $H, K \leq G$ definiamo il <u>*sottoinsieme*</u>

$$HK = \{h \cdot k | h \in H, k \in K\}.$$

Attenzione *non è necessariamente un sottogruppo*

Esercizio
Dimostrare che HK è un sottogruppo, di G se e solo se

$$HK = KH.$$

Soluzione
Supponiamo che HK sia un sottogruppo

$$HK = (HK)^{-1} = \{(h \cdot k)^{-1} | h \in H, k \in K\} = K^{-1}H^{-1} = KH.$$

Viceversa supponiamo che $HK = KH$
1) Dimostro che KH è chiuso rispetto all'operazione.
$h_1 k_1 \in HK$ e $h_2 \cdot k_2 \in HK$

$$(h_1 \cdot k_1) \cdot (h_2 \cdot k_2) = h_1 \cdot (k_1 \cdot h_2) \cdot k_2 = h_1 \cdot h_3 \cdot k_3 \cdot k_2 = (h_1 \cdot h_3) \cdot (k_3 \cdot k_1).$$

2) HK è chiuso rispetto agli inversi

$$h \cdot k \in HK \rightsquigarrow (h \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot h^{-1} = h_4 \cdot k_4 \in HK.$$

Definizione 14 (Sottogruppo generato da un sottoinsieme)
$(G, \cdot)$ gruppo $X \subseteq G$ sottoinsieme
Il sottogruppo generato da X è

$$< X >= \bigcap_{H \leq G, X \subseteq H} H.$$

Notazione 4
$\cdot H, K \leq G$

$$< H, K >:=< H \cup K > .$$

$\cdot g_1, , g_n \in G$

$$< g_1, \ldots, g_n >:=< \{g_1, \ldots, g_n\} > .$$

Caso Speciale
$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +) \quad m \in \mathbb{Z}$
$(m) :=< m >$

3.3 Sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$

Ricordo
dato $a \in \mathbb{Z}$ si ha $(a) \leq \mathbb{Z}$
Obbiettivo
non esisotno altri sottogruppi

Teorema 2
$H \leq \mathbb{Z}$ allora esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $H = (m)$

Dimostrazione
Distinguiamo due casi:
1) $H = (0)$ finito
2) $H \neq (0)$ allora H contiene (almeno) un intero positivo, Definiamo

$$m := \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq 1, n \in H\}.$$

Vogliamo verificare che $H = (m)$ Sicureamente $(m) \subseteq H$ poich$H \leq \mathbb{Z}$
$Viceversasupponiamoche \exists n \in Hx(n).$
Allora

$$n = qm - r \text{ per qualche } q \in \mathbb{Z} \quad 0 < r < m.$$

$\rightarrow r = n - qm \in H$
Ma $r > 0, r < m$ quindi otteniamo l'assurdo per minimalità di m

$\square$

Proposizione 5
$a, b \in \mathbb{Z}$, Allora:
$1)(a) \cap (b) = (n)$ *dove* $m := mcm\{a, b\}$
$2)(a) + (b) = (d)$ *dove* $d := MCD\{a, b\}$

Osservazione
$(a) + (b)$ è della forma HK con $H = (a)$ e $K = (b)$
inoltre $(a) + (b) \leq \mathbb{Z}$ poich$(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano
Dimostrazione
$1)(a) \cap (b)$ *è il sottogruppo dei multipli di a e di b*
Dunque $(a) \cap (b) = (m)$
$2)a + b \leq \mathbb{Z} \Rightarrow (a) + (b) = (d')$ *per teorema*
Dobbiamo verificare che $d' = d$

$$(d) = (a) + (b) \supseteq (a) \Rightarrow d' | a(d' \text{ divide } a).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d'|a \\ d'|b \end{cases} \Rightarrow d' \leq d$$

$d' \in (a) + (b) \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z}$ *tale che* $d' = ha + kb$

Dunque:

$$\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|d' => d \leq d'$$

Allora $d = d'$ □

3.4 Gruppi D_n e C_n

Ricordo
$n \geq 3$
Fissiamo un $n - agono$
$D_n = \{$isometrie che preservano l'n-agono$\}$
$C_n = \{$isometrie che preserrvano l'n-agono e l'orientazione$\}$

Teorema 3
$n \geq 3$ *Allora*

$$|D_n| = 2n$$

$$|C_n| = n$$

Dimostrazione
Fissiamo un lato l *dell'*n*-agono. Un'isometria* $\varphi \in D_n$ *è univocamente determinata dall'immagine di* $\varphi(l)$
Ho n *scelte per il lato e per ogniuna di queste ho 2 scelte per le orientazione (mando il lato in se stesso? in quello dopo? in quello dopo ancora?, posso anche invertire la sua orientazione, i successivi lati vengono definiti da dove viene mandato il primo)*
se non scegliamo l'orientazione, ci rimane il gruppo ciclico, e ciò conclude la dimostrazione □

Osservazione
La dimostrazione prova che

$$C_n =< \rho > .$$

dove ρ è la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ attorno al centro dell'n-agono
Infatti $\rho \in C_n \Rightarrow < \rho > \subseteq C_n$ ma l'ordine di questa rotazione è n

$$| < \rho > | = ord(\rho) = n = |C_n| => C_n =< \rho > .$$

Osservazione
Dalla dimostrazione segue che D_n è costituito da n rotazioni
(della forma $\rho^i \quad i \in \{1, \ldots, n\}$
e n riflessioni

Proposizione 6
$n \geq 3$ Allora:
$1)D_n =< \rho, \sigma >$
Dove σ è una rotazione qualsiasi ($\sigma \in D_n \setminus C_n$)
$2)\rho^i \sigma = \sigma \rho^{n-i}$

Dimostrazione
1)Sicuramente $< \rho, \sigma > \subseteq D_n$
$H =< \rho >= \{Id, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}\}$
$K =< \sigma >= \{Id, \sigma\}$
$H \cap K = \{Id\}$

$$|KH| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 2n.$$

$\Rightarrow HK \subseteq D_n$ *(In particolare HK è sottogruppo)* $\Rightarrow D_n = HK =< \rho, \sigma >$
$\rho\sigma$ non preserva l'orientazione
$\Rightarrow \rho^i \sigma$ *è riflessione*
$\Rightarrow ord(\rho^i \sigma) = 2$
$\Rightarrow \rho^i \sigma \rho^i \sigma = Id$
$\Rightarrow \rho^i \sigma \rho^i = \sigma$
$\Rightarrow \sigma \rho^i = \rho^{n-1} \sigma$ □

Proposizione 7 (Caratterizzazzione dei sottogruppi normali)
$(G, \cdot)$ gruppo, $N \leq G$
Le seguenti sono equivalenti:
$1)gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$
$2)gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$
$3)N \trianglelefteq G$
4) L'operazione $G/N \times G/N \to G/N$
è ben posta $\qquad (fN, gN) \to fgN$
o equivalentemente $N \backslash G \times n \backslash G \to n \backslash G$
$\qquad (Nf, Ng) \to Nfg$

Dimostrazione
$1 \to 2$
Verifichiamo che $N \subseteq gNg^{-1}$
Dato che $n \in N \Rightarrow n = g(g^{-1}ng)g^{-1}$ basta dimostrare che $g^{-1}ng \in N$
D'altra parte $g^{-1}ng \in g^{-1}Ng \subseteq N$ (per ipotesi 1)
$2 \to 3$
$\forall g \in G \ \ \forall n \in N$
$gng^{-1} \in N$ (per ipotesi 2)

$$\begin{cases} gn \in Ng \\ ng^{-1} \in g^{-1}N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} gN \subseteq Ng(1) \\ Ng^{-1} \subseteq g^{-1}N(2) \end{cases}.$$

Il che è equivalente a dire che $gN = Ng$ la prima condizione mi dice $G/N \subseteq G/N$ e la seconda dell'arbitrarietà di g
$G/N \subseteq G/N$
3 $\to 4$
Datifeg$\in G$ *abbiamo*

$$(Nf)(Ng) = (fN)(Ng) = fNg = (fN)g = (Nf)g = Nfg.$$

$4 \to 1$
Per ipotesi 4 $(Nf)(Ng) = Nfg \quad \forall f, g \in G$ *quindi*

$$nfn'g \in Nfg \quad \forall n, n' \in N.$$

dall'arbitrarietà di g, scelgo $g = f^{-1}$, quindi

$$nfn'f^{-1} \in N \quad \forall f \in G.$$

Moltiplico (a sinistra) per n^{-1} e ottengo

$$fn'f^{-1} \in N \quad \forall f \in G.$$

Dall'arbitrarietà di n' otteniamo $fNf^{-1} \subseteq N \quad \forall f \in G$ che è la condizione (1) $\square$

Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo, la proposizione ci dice che un sottogruppo H è normale se e solo se l'operazione indotta su G/H è ben definita

Teorema 4
$(G, \cdot)$ gruppo $N \trianglelefteq G$
Allora $(G/N, \cdot)$ è un gruppo (detto gruppo quoziente)

Dimostrazione
Associatività, ovvia
elemento neutro : $N = Ne$
elemento inverso di Ng è $Ng^{-1} \quad \forall g \in G$ $\square$
Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo e $H \leq G$ t.c. $[G : H] = 2$ Allora $H \trianglelefteq G$
Infatti esistono solo due laterali sinistri o destri: H, G/H
Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo abeliano $\Rightarrow$ ogni sottogruppo è normale
Non vale sempre il viceversa
Esempio
Dimostrare che $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
è un gruppo (rispetto al prodotto) non abeliano in cui però tutti i sottogruppi sono normali
Prodotti:
$i^2 = k^2 = j^2 = -1$
$ij = k \quad jk = i \quad ki = j$
$ji = -k \quad kh = -i \quad ik = -j$

3.5 Omomorfismi tra gruppi

Definizione 15
Siano $(G_1, \cdot)$ *e* $(G_2, *)$ *gruppi*
Sia φ *un'applicazione*
$\varphi : G_1 \to G_2$ *si dice omomorfismo se:*

$$\varphi(g \cdot f) = \varphi(g) * \varphi(f) \quad \forall g, f \in G_1.$$

Osservazione
Graficamente φ è un omomorfismo se

$$\begin{tikzcd} (g,f) \arrow[d] \\ (\varphi(g),\varphi(f)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1 \times G_1 \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ G_2 \times G_2 \arrow[r, "*"] & G_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,f) \arrow[r] & g \cdot f \arrow[d] \\ & \varphi(g \cdot f) \end{tikzcd}$$

Esempi:
$(\mathbb{R}, +)$ gruppo additivo reali
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ gruppo moltiplicativo reali positivi
Allora
$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$
$\quad x \to e^x$
è un omomorfismo infatti: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Esempio
$ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$
$\quad x \to ln(x)$
è un omomorfismo, infatti $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
Osservazione:
$l^0 = 1 \;\; ln(1) = 0$
0 è l'elemento neutro in $(\mathbb{R}, +)$
1 è l'elemento neutro in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
Osservazione:
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Inverso di x in $(\mathbb{R}, +)$
è invero di e^x in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
Esercizio
$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo. Dimostrare
1)$\varphi(e_1) = e_2$
2)$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \;\; \forall g \in G_1$
Soluzione:
$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 \cdot e_2) = \varphi(e_1) * \varphi(e_1)$
moltiplico per $\varphi(e_1)^{-1}$
$\Rightarrow e_2 = \varphi(e_1)^{-1} * \varphi(e_1) = \varphi(e_1)^{-1} * (\varphi(e_1) * \varphi(e_1)) = \varphi(e_1)$

Esempio
$(G, \cdot)$ gruppo, $N \trianglelefteq G$
Allora
$\pi : G \to G/N$
$\quad g \to gN$
è un omomorfismo
Esempio
$det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$
dove $\mathbb{K}$ campo
$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un gruppo rispetto l prodotto
allora det è un omomorfismo
infatti:

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \quad det(AB) = det(A)det(B).$$

in particoalre:
$det(Id) = 1$
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{K})$

Definizione 16
$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo
il nucleo di φ è $ker(\varphi) := \{g \in G_1 | \varphi(g) = e\}$
L'immagine di ϕ è
$Im(\varphi) = \{h \in H_2 | \exists g \in G_1 : \varphi(g) = h\}$

Esercizio:
$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo
Allora $ker(\varphi) \trianglelefteq G_1)$
Soluzione
Chiamo $H : ker(\varphi)$
vorrei verificare che $gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in G_1$
scegliamo $h \in H$ (ovvero $\varphi(g) = e_2$)
$\Rightarrow \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) =$ per esercizio $= \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = e_2$
$\Rightarrow ghg^{-1} \in H \forall h \in H, \forall g \in G \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H$
Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo, $H \leq G$. Allora HG se e solo se esiste $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo tale che $H = ker(\varphi)$

Dimostrazione
Resta solo l'implicazione $\Rightarrow$
Sia $H \trianglelefteq G$. considero l'omomorfismo
$\pi : G \to G/H$
$\quad g \to gH$
chi è $ker(\pi)$
$ker(\pi) = \{g \in G | gH = H\} = \{g \in G | g \in H\} = H$ $\square$

Esempio

$det : GL_n(\mathbb{K}) \to K^*$
$ker(det) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) | det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K})$
quindi
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$
Esercizio
$(G, \cdot)$ gruppo $g \in G$ fissato
$\varphi : \mathbb{Z} \to G$
$n \to g^n$
è un omomorfismo
determinare $ker\varphi$ e $Im\varphi$
Esercizio
Sia $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo
1) Se $H_1 \leq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \leq G_2$
se $H_1 \trianglelefteq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \trianglelefteq \varphi(G_1)$
2) Se $H_3 \leq G_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(H_2) \leq G_1$
se $H_1 \trianglelefteq G_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq \varphi(G_1)$
Soluzione
1)Se $H_1 \subseteq G_1$ dimostriamo che $\varphi(H_1) \trianglelefteq \varphi(G_1)$
Verifichiamo che

$$f\varphi(H_1)f^{-1} \subseteq \varphi(H_1) \quad \forall f \in (G_1).$$

Quindi basta dimostrare che
$\forall h \in H_1 \quad \forall g \in G_1$ abbiamo
$\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in \varphi(H_1)$
Questo è equivalente a richiedere che

$$\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1})\varphi(H_1).$$

Ma $ghg^{-1} \in gH_1g^{-1} = H_1$ dato che $H_1 \trianglelefteq G_1$

$$\exists \tilde{h} \in H_1 \text{ t.c } g \cdot h \cdot g^{-1} = \tilde{h}$$
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(\tilde{h}) \in \varphi(H_1)$$

2) Se $H_2 \trianglelefteq G_2$ dimostriamo che $\varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq G_1$
Ho due omomorfismi,
li compongo:

$$\psi : G_1 \underset{\varphi}{\rightarrow} G_2 \underset{\pi}{\rightarrow} G_2/H_2.$$

Studia il ker(ψ)
ker$(\psi) := \{g \in G_1 | \psi(g) = H_2\} = \{g \in G_1 | \varphi(g)H_2 = H_2\}$
$ker(\psi) = \{g \in G | \varphi(g) \in H_2\} = \varphi^{-1}(H_2)$
Quindi $\varphi^{-1}(H_2)$ è il nucleo di un omomorfismo $\psi : G_1 \to G_2/H_2$ e dunque $\varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq G_1$
Esercizio
Sia $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo dei gruppi

$ker\varphi = \{g \in G_1 | \varphi(g) = e_2\}$
Dimostrare che
φ è iniettivo $\Leftrightarrow ker(\varphi) = \{e_1\}$
soluzione:
supponiamo che $ker(\varphi) = \{e_1\}$
Allora dati $g, h \in G_1$ t.c $\varphi(g) = \varphi(h)$
dobbiamo mostrare che $g = h$
moltiplico per $\varphi(h)^{-1}$

$$\Rightarrow \varphi(h)^{-1} * \varphi(g) = e_2$$
$$\Rightarrow \varphi(h^{-1}) * \varphi(g) = e_2$$
$$\Rightarrow \varphi(h^{-1} \cdot g) = e_2$$
$$\Rightarrow h^{-1} \cdot g \in ker\varphi$$
$$\Rightarrow h^{-1} \cdot g = e_1$$
$$\Rightarrow g = h$$

Il viceversa è lasciato al lettore come esercizio
Osservazione:
Se $\varphi : G_1 \to G_2$
omomorfismo di gruppi
$H_2 = \{e_2\} \trianglelefteq G_2$
l'esercizio (2) ci dice che $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e_2\}) \trianglelefteq G_1$
Osservazione
Dalla parte (1) segue che
$H_1 \leq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \leq G_2$
Quindi se scelgo $H_1 = G_1 \leq G_1$
$\Rightarrow Im(\varphi) = \varphi(G_1) \leq G_2$

Lemma 1
$(G, \cdot)$ gruppo
$N \trianglelefteq G, H \trianglelefteq G$ sottogruppi normali
$\pi : G \to G/N$
Allora $\pi(H) = \pi(HN)$

Dimostrazione
$H \subseteq HN$ poiché $e \in N$ ogni elemento di H lo scrivo come lui stesso e $\Rightarrow \pi(H) \subseteq \pi(HN)$
Viceversa dimostriamo che $\pi(HN) \subseteq \pi(H)$
infatti:
$\forall h \in H \quad \forall n \in N$
$\pi(hn) = \pi(h)\pi(n)$ *(omomorfismo)*
$n \in N$

$\Rightarrow \pi(n) = N \to \pi(h)\pi(e) = \pi(ne)$
$\pi(e) = N \qquad = \pi(n) \in \pi H$ $\square$

Lemma 2
$(G, \cdot)$ *gruppo*
$\cdot H \trianglelefteq G$
$\cdot N \trianglelefteq G$
$\cdot \pi \to G/N$
Allora:
1)$\pi^{-1}(\pi(H)) = HN$
2) *se* $N \subseteq H \to \pi^{-1}(\pi(H)) = N$
3)$\bar{H} \leq G/N \to \pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \bar{H}$

Dimostrazione (1)
$\pi^{-1}(\pi(H)) =?$
osserviamo che dal lemma 1
$\pi(H) = \pi(HN) = HN$
dato che $\pi(hn) = \pi(h)\pi(n) = hn$
$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}(\pi(HN)) = \pi^{-1}(HN) \supseteq HN$
Resta da verificare che $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$

$$\pi^{-1}(\pi(H)) := \{g \in G | \pi(g) \in \pi(H)\}$$
$$= \{g \in G | \exists g \in H : \pi(g) = \pi(h)\}$$
$$= \{g \in G | \exists h \in H : \pi(h)^{-1}\pi(g) = N\} \text{ N= elemento neutro in G}$$
$$= \{g \in G | \exists h \in H : \pi(hg) = N\}$$
$$= \{g \in G | \exists h \in H : h^{-1}g \in N\}$$
$$= \{g \in G | \exists h \in H : g \in hN\acute{r}brace \subseteq HN$$

segue (1) $\square$

Dimostrazione (2)
È un caso particolare del punto 1, infatti se

$$N \subset H \Rightarrow HN = H.$$

$\square$

Dimostrazione (3)
Segue dal fatto che π *è un omomorfismo suriettivo*

$$\pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \pi(G) \cap \bar{H} = \bar{H}.$$

$\square$

Teorema 5
$(G, \cdot)$, $n \trianglelefteq G$
Allora esistono due corrispondenze biunivoche

$$\{sottogruppi\ H \leq G\ \ t.c.\ \ N \supseteq H\} \to \{sottogruppi\ di\ G/N\}$$
$$H \to \pi(H)$$
$$\pi^{-1} \leftarrow \bar{H}$$
$$\{\ sottogruppi\ normali\ H \trianglelefteq G\ t.c\ N \subseteq H\} \to \{\ sottogruppi\ normali\ G/N\}$$
$$H \to \pi(H)$$
$$\pi^{-1}(\bar{H}) \to \bar{H}$$

Dimostrazione
Il lemma 2 (punti 2 e 3) garantisce che le due applicazioni $H \to \pi(H)$ $\pi^{-1}(H) \to \bar{H}$
sono una l'inversa dell'altra □
Osservazione:
Per la seconda corrispondenza osserviamo che per la suriettività di π e l'esercizio di oggi

$$H \trianglelefteq G \to \pi(H) \trianglelefteq G/N.$$

Teorema 6 (Teorema di omomorfismo)
$\varphi : G_1 \to G_2$ *omomorfismo*
$\cdot N \trianglelefteq G_1$
$\pi : G_1 \to G/N$
Allora:
1) esiste unico omomorfismo
$\bar{G}/N \to G_2$

t.c. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$
$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & G_2 \\ G_1/N \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

2) $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi)$
3) $\bar{\varphi}$ *è iniettivo* $\Leftrightarrow ker\varphi = N$

Dimostrazione
La condizione $\bar{\varphi} \cdot \pi = \varphi$
Significa
$\forall g \in G_1$ *si ha*
$\bar{\varphi} \cdot \pi(g) = \varphi(g)$
ovvero
$\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g)$
Dobbiamo verificare:
$\cdot$ *Unicità (segue da* $\bar{\varphi} \cdot \pi = \varphi$*)*
$\cdot\bar{\varphi}$ *è ben definita*

$\cdot\bar{\varphi}$ *è un omomorfismo*
significa che se $gN = fN$ *per qualche* $g, f \in G_1$, *allora* $\varphi(g) = \varphi(f)$
Verifichiamo:
$gN = fN \rightarrow g \equiv f mod N$
$\Rightarrow \exists n \in N$ *t.c.* $g^{-1}f = n$
$\Rightarrow f = gn \Rightarrow \varphi(f) = \varphi(gn)$
$\Rightarrow \varphi(f) = \varphi(g)\varphi(n) = \varphi(g)$
dato che $\varphi(n) = e_2$ *ovvero* $N \subseteq \ker\varphi$
Mostriamo adesso che $\bar{\varphi}$ ***è un omomorfismo***
Significa che $\forall f, g \in G$

$$\bar{\varphi}((fN) \cdot (gN)) = \bar{\varphi}(fN) \cdot \bar{\varphi}(gN).$$

Per definizione

$$\bar{\varphi}((fN)(gN)) = \bar{\varphi}(fgN) = \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g).$$

2)$\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$
dalla suriettività del π *segue che* $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi)$
3)$\bar{\varphi}$ *è iniettivo* $\Leftrightarrow ker\bar{\varphi} = \{N\}$
$ker\bar{\varphi} = \{gN \in G_1/N | \bar{\varphi}(gN) = e_2\}$
$= \{gN \in G_1/N | \varphi(g) = e_2\}$
$= \{gN \in G_1/N | g \in ker(\varphi)\}$ $\square$

Corollario 3
$(G, \cdot)$, $N \trianglelefteq G$
Allora esiste una corrispondenza biunivoca

$$\{omomorfismi\ \varphi : G \rightarrow G'\ t.c.\ N \subseteq ker(\varphi)\} \rightarrow \{omomorfismi\ G/N \rightarrow G'\}$$
$$\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$$
$$\pi \leftarrow \bar{\varphi}$$

Dimostrazione
basta osservare che
dato $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$ *la composizione*
$\bar{\varphi} \circ \pi : G \rightarrow G'$ *è un omomorfismo*
tale che $ker(\bar{\varphi} \circ \pi) \supseteq N$
segue $\pi(N) = N$ *che è l'elemento neutro di* G/N
$\Rightarrow \bar{\varphi} \circ \pi(N) = e'$ *che è l'elemento neutro di* G'

$\square$

Definizione 17
$\varphi : G_1 \to G_2$
omomorfismo si dice isomorfismo se è invertibile

Teorema 7 (Primo teorema di isomorfismo)
$\varphi : G_1 \to G_2$
Allora:
$Im(\varphi) \cong G_1/ker(\varphi)$
Dove $\cong$ *(isomorfo) significa che esiste un isomorfismo tra i due gruppi*

Dimostrazione

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & G_2 \\ G_1/N \arrow[ur, "\exists!\bar{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

scelgo $N - ker\varphi$
il teorema di isomorfismo fornisce un omomorfismo iniettivo

$$\bar{\varphi} : G_1/\ker\varphi \to G_2.$$

Allora mi restringo all'immagine di $\bar{\varphi}$ *così diventa suriettiva*

$$G/ker\varphi \cong Im(\bar{\varphi}) \cong Im(\varphi).$$

la prima tramite $\bar{\varphi}$ *la seconda per il teorema di isomorfismo*

$\square$

Applicazione:
det: $GL_n(\mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^*, \cdot) = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$
ker$(det) = SL_n(\mathbb{K})$ matrici con det 1
$\Rightarrow GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^*, \cdot)$

3.6 Teoremi di isomorfismo

Teorema 8 (Secondo teorema di isomorfismo)
$(G, \cdot)$ *gruppo*
$H, N \trianglelefteq G$ *tali che* $N \subseteq H$ *Allora*

1. $H/M \trianglelefteq G/N$
2. $G/N/H/N \cong G/H$

Dimostrazione

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi=\pi_H"] \arrow[d, "\pi"] & G/H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

π_H *proiezione sul quoziente* H

$N \subseteq H = ker(\varphi)$
Inoltre $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi) = G/H$
Idea: *applicare il primo teorema di isomorfismo*
suriettiva $\bar{\varphi} : G/N \to G/H$
basta quindi dimostrare che $ker(\bar{\varphi}) = H/N$
Studiamo

$$ker(\bar{\varphi}) = \{gN \in G/N | \bar{\varphi}(gN) = H\}.$$
$$\{gN \in G/N | gH = H\}.$$
$$\{gN \in G/N | g \in H\} = H/N.$$

□

Corollario 4
In $(\mathbb{Z}, +)$ *gruppo abeliano*
$a, n \in \mathbb{Z}$ *interi non nulli*
Denotiamo con

$$[a] = a + (n) \in \mathbb{Z}/(n) = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}.$$

Allora $ord_{\mathbb{Z}/(n)}([a]) = \frac{n}{MCD(a,n)}$

Nota:
se $MCD(n, a) = 1$ allora a genera il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/(n)$
Dimostrazione
Consideriamo $G = \mathbb{Z} \quad H = (a) + (n) \quad N = (n)$
Dal II Teorema di isomorfismo

$$\mathbb{Z}/(n) \Big/ ([a]) \cong \mathbb{Z}/(n) \Big/ (a) + (n)/(n) \cong G/N \Big/ H/N \cong G/N \cong \mathbb{Z}/(MCD(a, n)).$$

$\square$

Confrontiamo le cardinalità

$$MCD(a,n) = |\mathbb{Z}/(MCD(a,n))|.$$
$$= |\mathbb{Z}/(n) \Big/ ([a])\,|$$

.

$$\frac{|Z/(n)|}{([a])} = \frac{n}{ord([a])}.$$
$$ord([a]) = \frac{n}{MCD(a,n)}.$$

Lemma 3
$a, bg \in Z$ non nulli
tali che $a|b$ (allora $(b) \subseteq (a)$
Allora

$$|(a)/(b)| = \frac{b}{a}.$$

Dimostrazione
Studiamo $(a)/(b)$
Per definizione è l'insieme dei laterali

$$(a)/(b) = \{ta + (b) | t \in \mathbb{Z}\}.$$

dobbiamo capire quanti laterali <u>distinti</u> esistono
Dati $t, s \in \mathbb{Z}$ tali che

$$ta + (b) = sa + (b).$$
$$\Leftrightarrow ta \equiv sa \ mod(b).$$
$$\Leftrightarrow -ta + sa \in (b).$$

Allora

$$(a)/(b) = \{ta + (b) | tt \in \{1, \ldots, \frac{b}{a}\}\}.$$

$\square$

Teorema 9 (III teorema di isomorfismo)
$(G, \cdot)$ *gruppo*

- $N \trianglelefteq G$
- $H \leq G$

Allora

1. $H \cap N \trianglelefteq H$
2. ${}^{H}/_{H \cap N} \cong HN/N$

Dimostrazione
$\pi_N : G \to G/N$
$g \to gN$
consideriamo la restrizione

$$\begin{gathered} \pi_N|_H : H \to G/H \\ h \to hN \\ ker(\pi_N|_H) = \{h \in H | \pi_N|_H(h) = N\} \\ = \{h \in H | hN = N\} \\ = \{h \in H | h \in N\} \\ = H \cap N \end{gathered}$$

Deduciamo che $H \cap N \trianglelefteq N$
Idea: Applicare il I teorema di isomorfismo all'omomorfismo

$$\varphi = \pi_N|_H : H \to G/N.$$

Avremo $Im(\varphi) \cong H/ker(\varphi) = H/H \cap N$
Studiamo $Im(\varphi)$

$$Im(\varphi) = Im(\pi_N|_H) = \pi_N(H) = \pi_N(HN) = HN/N.$$

Il penultimo passaggio deriva da un lemma già visto a lezione □

Corollario 5
$a, b \in \mathbb{Z}$ non nulli
Allora $mcm(a,b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}$

Dimostrazione
$G = \mathbb{Z}$
$H = (a)$
$N = (b)$
$H + N = (MCD(a,b))$
$H \cap N = (mcm(a,b))$
Dal III teorema di isomorfismo

$$(a) \Big/ (mcm(a,b)) \cong H / H \cap N \cong HN / N \cong (MCD(a,b)) \Big/ (b).$$

Confrontiamo la cardinalità
Per il lemma

$$\frac{mcm(a,b)}{a} = |(a)(mcm(a,b))| = |(MCD(a,b)) \Big/ (b) = \frac{b}{MCD(a,b)}.$$

Quindi

$$mcm(a,b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}.$$

□

3.7 Classificazione di gruppi di ordine "piccolo" a meno di isomorfismo

Ordine 1
Se $|G| = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \{e\}$
Ordine p primo:
Abbiamo mostrato che se $|G| = p$ allora G non ammette sottogruppi non banali
Sia $g \in G$ tale che $g \neq e \Rightarrow ord(g) = p \ \Rightarrow G =< g >$

$$\varphi : G \to G_p =< p >$$
$$g \to p$$

Obiettivo: classificare a meno di isomorfismo i gruppi di ordine 4 e di ordine 6

Definizione 18 (Klein,1884)
Il gruppo di Klein, K_4 è il gruppo delle isometrie del piano che preservano un rettangolo fissato.

Esercizio
Verificare che $K_4 = \{id, \rho, \sigma, \rho\sigma\}$
dove $\rho =$ rotazione di angolo π
e dove $\sigma =$ riflessione rispetto ad un lato
Osservazione
tutti gli elementi in K_4 hanno ordine ≤ 2 Quindi $K_4 \neq C_4$

Notazione 5
Dato che $K_4 =< \rho, \sigma >$
denoteremo anche
$$K_4 = D_2 \text{ (gruppo diedrale).}$$

Esercizio
$(G, \cdot)$ gruppo in cui ogni elemento ha ordine ≤ 2 (equivalentemente ogni elemento è inverso di se stesso)
1) Dimostrare che G è abeliano
2) Se $|G| = 4$ dimostrare che $G \cong K_4$
Svolgimento 1) Dati $f, g \in G$
$fg = (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1} = gf$
2) Sia $|G| = 4$
Scelgo $g, f \in G$ distinti tali che $\begin{cases} g \neq e \\ f \neq e \end{cases}$
Considero $H =< g, h >$
Per Lagrange
$H \geq 3$
$\Rightarrow H = H$
$\Rightarrow G = \{e, f, g, fg\}$
abeliano
Costruisco l'isomorfismo esplicito con K_4

$$\begin{gathered} \varphi : G \to K_4 =< \rho, \sigma > \\ e \to e \\ f \to \rho \\ g \to \sigma \\ fg \to \rho\sigma \end{gathered}$$

che è chiaramente biunivoca ed è un omomorfismo $\Rightarrow \varphi$ è un isomorfismo

3.8 Teoremi sulla cardinalità dei gruppi

Teorema 10
$(G, \cdot)$ gruppo. Se $|G| = 6$ allora
$G \cong C_6$ (abeliano) oppure $G \cong D_3$ (non abeliano)

Dimostrazione
Se G contiene un elemento di ordine 6 allora $G \cong C_6$
Se invece G non contiene elementi di ordine 6, per l'esercizio (2) esistono elementi $r, s \in G$ t.c. $ord(r) = 3$ e $ord(s) = 2$
Definisco:

$$G :=< r >= \{e, r, r^2\} \quad k :=< s >= \{e, s\}.$$

$$H \cap K = \{e\}.$$

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 6 = |KH|.$$

$\Rightarrow HK = G = KH$
Esplicitamente:
$HK = \{e, r, r^2, s, rs, r^2 s\}$
$KH = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$
Dobbiamo considerare 2 casi:
I caso: $rs = sr$
studiamo $ord(rs)$
$(rs)^2 = r^2 s^2 = r^2 \neq e \Rightarrow ord(rs) \neq 2$
$(rs)^3 = r^3 s^3 = s^3 = s \neq e$
Per Lagrange
necessariamente $ord(rs) = 6$
$\Rightarrow G$ è cicliclo $\Rightarrow$ Assurdo
II caso: $\begin{cases} rs = sr^2 \\ r^2 s = sr \end{cases}$
Costruiamo l'isomorfismo

$$G \to D_3 :=< \rho, \sigma >$$
$$e \to Id$$
$$r \to \rho$$
$$r^2 \to \rho^2$$
$$s \to \sigma$$
$$sr \to \sigma\rho$$

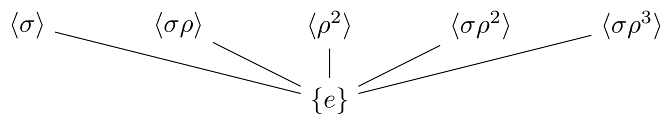
□

Definizione 19
Dato un gruppo $(G, \cdot)$ il reticolo dei sottogruppi T_G è un grafo definito come

- *esiste un vertice in T_G per ogni sottogruppo $H \leq G$*

- *esiste un lato H_1 — H_2 se e solo se $H_1 \subseteq H_2$*
  e $\nexists K \leq G$ t.c. $H_1 \subset K \subset H_2$

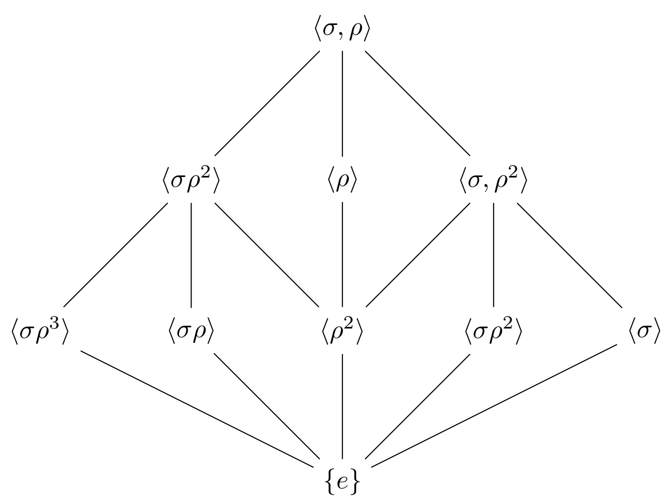
Esempio:
T_{D_4}
Ricordiamo che $D_4 =< \sigma, \rho > \quad |D_4| = 8$
studiamo i sottogruppi di D_4
ordine 1: L'unico sottogruppo è $H = \{e\}$
ordine 2: Sono tutti e soli quelli generati da un elemento di ordine 2 in D_4



ordine 4: per la classificazione sono ciclici (C_4) oppure di Klein (K_4) altre al ciclico $< p >$ esistono altri sottogruppi

$$\langle\rho^2, \sigma\rangle = \{e, \sigma, \rho^2, \sigma\rho^2\}.$$
$$\rangle\rho^2, \sigma\rho\rangle = \{e, \sigma\rho, \rho^2, \sigma\rho^3\}.$$

Ordine 8: D_4



Esempio:
$G = D_4$
$N =< \rho^2 > \trianglelefteq G$
Vogliamo $T_{G/N}$
studiamo $G/N = D_4/ < rho^2 >$
$|G/N| = [G : N] = \dfrac{|G|}{|N|} = \dfrac{8}{2} = 4$
chi sono i laterali?
$IdN = N < \rho^2 >= \{Id, \rho^2\}$
$\rho N = \{\rho, \rho^3\}$
$\sigma N = \{\sigma, \sigma\rho^2\}$
$\sigma\rho N = \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$
Ricordo:
Abbiamo una corrispondenza biunivoca tr ai sottogruppi di G/N e i sottogruppi di G contenenti N.

$$
\begin{tikzcd}
& G/N \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \sigma\rho N \rangle \arrow[d, equal] & \langle \rho N \rangle \arrow[d, equal] & \langle \sigma N \rangle \arrow[d, equal] \\
\{\sigma\rho N, N\} \arrow[dr, dash] & \{\rho N, N\} \arrow[d, dash] & \{N, \sigma N\} \arrow[dl, dash] \\
& \{N\} &
\end{tikzcd}
$$

Obiettivo: studiare S_n
Ricordo:
$X := \{1, \dots, n\}$
$S_n := S_X = \{$ applicazioni biunivoche $X \to X\}$
S_n gruppo di permutazioni
Osservazione:
$|S_n| = n!$
Osservazione:
se $n = 3 \to |S_3| = 6$
$\Rightarrow S_3 \cong D_3$
Osservazione
$S_n \cong D_n \quad \forall n \geq 4$
Infatti $n! > 2n \quad \forall n \geq 4$

3.9 notazioni in s_n

$\sigma = (123)(47)$
$\tau = (23456)$
$\sigma\tau = \sigma \circ \tau = (123)(46)(23456)(12)(36)(45)$
$\tau \circ \sigma = (23456)(123)(46) = (13)(24)(56)$

Lemma 4
Data $\sigma \in S_n$ allora σ partizione $X = \{1, \dots, n\}$ in sottoinsiemi permutati ciclicamente e disgiunti tra loro

Dimostrazione
Definiamo la relazione d'equivalenza $i \sim j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\sigma^k(i) = j$
È una relazione d'equivalenza!
studiamo le classi di equivalenza
fissato $i \in X$
la sua clase

$$X_i = \{\sigma^k(i) | k \in \mathbb{Z}\} \subseteq X.$$

quindi $\exists\ \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ distinti t.c. $\sigma^{k_1}(i) = \sigma^{k_2}(i)$
$\Rightarrow i = \sigma^{k_2 - k_1}(i)$
$\Rightarrow m := min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | \sigma^k(i) = i\}$
$\Rightarrow X_i = \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{n-1}(i)\}$ $\square$

Proposizione 8
Data $\sigma \in S_n$, allora σ può essere rappresentata come composizione di cicli disgiunti

Obiettivo: Definire un omomorfismo

$$sgn : S_n \to (\{\pm 1\}, \cdot).$$

Questo ci permetterà di definire il sottogruppo alterno $A_n \trianglelefteq S_n$
$A_n := ker(sgn)$

Notazione 6
Dato un polinomio
$f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$
e data $\sigma \in S_n$
Definiamo

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1), \dots, x_{\sigma(n)}\}.}$$

Ci sta un polinomio speciale:

- $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$
- $\Delta^\sigma(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$

Definizione 20
$\sigma \in S_n$
$sgn(\sigma) := \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \in \{\pm 1\}$

Osservazione
$sgn : S_n \to \{\pm 1\}$
è un omomorfismo

Dimostrazione
In generale
$(f^\sigma)^\tau = f^{\sigma\tau}$
$(fg)^\sigma = f^\sigma g^\sigma$
$sgn(\sigma\tau) = \dfrac{\Delta^{\delta\tau}}{\Delta} = \dfrac{((\Delta^\sigma)^\tau)}{\Delta} = \dfrac{\Delta^\sigma}{\Delta}\dfrac{(\Delta^\sigma)^\tau}{\Delta^\sigma} = sgn(\sigma)\dfrac{\Delta^\tau}{\Delta} = sgn(\delta)sgn(\tau)$ □

3.10 Il sottogruppo alterno

Definizione 21
Sia $n \in \mathbb{Z}$ un intero positivo. Il sottogruppo alterno $A_n \trianglelefteq S_n$ *è definito da*

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}.$$

Una permutazione $\sigma \in S_n$ si dice pari *se $\sigma \in A_n$ e si dice* dispari *altrimenti.*

Osservazione
Dal momento che sgn : $S_n \to \{\pm 1\}$ è un omomorfismo di gruppi per l'osservazione precedente, abbiamo che $A_n = \ker(\text{sgn}) \leq S_n$, ed è un sottogruppo normale (Esercizio passato).

Proposizione 9
Sia $n \geq 2$ un intero. Allora:

- $[S_n : A_n] = 2$,
- $[H : A_n \cap H] = 2$ *per ogni sottogruppo* $H \leq S_n$ *tale che* $H \nsubseteq A_n$.

Dimostrazione
Chiaramente è sufficiente dimostrare la seconda parte dell'enunciato. Sia dunque $H \leq S_n$. *Due permutazioni* $\sigma, \tau \in S_n$ *sono congruenti modulo* A_n *se e solo se* $\sigma^{-1}\tau \in A_n$, *ovvero se e solo se*

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = 1,$$

dove abbiamo sfruttato l'osservazione anche per dedurre $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. *Pertanto esistono solo due laterali sinistri dati da*

$$H \cap A_n \quad e \quad H \setminus (H \cap A_n) = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = -1\}.$$

$\square$

Esercizio 7.4 (Sottogruppi di A_4).
Consideriamo il sottogruppo alterno $A_4 \trianglelefteq S_4$.

1. Determinare tutti gli elementi di A_4.
2. Dimostrare che il sottoinsieme $V := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq A_4$ è un sottogruppo di A_4 isomorfo al gruppo di Klein K_4.
3. Dimostrare che A_4 non contiene sottogruppi di ordine 6.

Soluzione. Procediamo per passi.

1. Dalla Proposizione 7.3 segue che $|A_4| = 12$ poiché $|S_4| = 4! = 24$. I suoi elementi sono:
   - ordine 1: id,
   - ordine 2: $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$,
   - ordine 3: $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$.

   Il fatto che gli otto 3-cicli siano elementi di A_4 segue dall'Esercizio 6.21.

2. Osserviamo che V è chiuso rispetto all'operazione poiché

   $$\begin{aligned}(12)(34) \cdot (13)(24) &= (14)(23),\\ (13)(24) \cdot (14)(23) &= (12)(34),\\ (14)(23) \cdot (12)(34) &= (13)(24).\end{aligned}$$

   Dunque V è un sottogruppo. Inoltre, gli elementi di V hanno tutti ordine 1 o 2. Dalla classificazione dei gruppi di ordine 4 si ha dunque $V \cong K_4$ (si veda l'Esercizio 6.4).

3. Dal momento che A_4 non contiene elementi di ordine 6 non può contenere sottogruppi isomorfi a C_6. Dunque un sottogruppo $H \leq A_4$ di ordine 6 è necessariamente isomorfo a D_3 (si veda Teorema 6.7); pertanto H contiene 3 elementi di ordine 2 e due elementi di ordine 3. Ne segue che $V \subset H$, da cui l'assurdo per il Teorema 2.14 di Lagrange.

Esercizio 7.5 (Sottogruppi di S_4). Consideriamo il gruppo simmetrico S_4.

1. Determinare il numero di sottogruppi di S_4 di ordine 2 e di ordine 3.
2. Determinare tutti i sottogruppi di S_4 non ciclici e di ordine 4.
3. Determinare tutti i sottogruppi di S_4 di ordine 6.
4. Determinare tutti i sottogruppi di S_4 di ordine 8.
5. Determinare tutti i sottogruppi di S_4 di ordine 12.

Soluzione. Procediamo per punti.

1. Ogni sottogruppo di ordine 2 è generato da un elemento di ordine 2; pertanto è sufficiente contare gli elementi di ordine 2 in S_4. Abbiamo: $\binom{4}{2} = 6$ trasposizioni e i 3 elementi non banali del sottogruppo $V \subseteq A_4$ (si veda l'Esercizio 7.4). In totale esistono dunque 9 sottogruppi di ordine 2 in S_4.

   Ogni sottogruppo di ordine 3 è generato da un elemento di ordine 3; pertanto è sufficiente contare gli elementi di ordine 3 in S_4, ovvero i 3-cicli. Questi sono $2 \cdot \binom{4}{3} = 8$, ed esistono 8 sottogruppi di ordine 3 in S_4.

2. Sia $H \leq S_4$ un sottogruppo non ciclico tale che $|H| = 4$. Ora, se $H \leq A_4$ abbiamo necessario che $H = V$, poiché V contiene tutti gli elementi di A_4 di ordine divide 4. Se invece $H \not\leq A_4$, allora abbiamo $|H \cap A_4| = 2$ per la Proposizione 7.3. Ne deduciamo che H contiene un solo prodotto di trasposizioni disgiunte $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ con $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ Ne segue necessariamente che

   $$H = \{\mathrm{id}, (i_1 i_2), (i_3 i_4), (i_1 i_2)(i_3 i_4)\}.$$

   poichè il prodotto di un'altra traposizione con l'elemento $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ fornisce come risultato un 4-ciclo. Concludiamo che i sottogruppi non ciclici di oridne 4 di S_4 sono

   $$H_1 = \{id, (12), (34), (12)(34)\} \quad H_2 = \{id, (13), (24), (13)(24)\}.$$

   $$H_3 = \{id, (14), (23), (14)(23)\} \quad V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

3. Dal momento che S_4 non contiene elementi di ordine 6, non può contenere sottogruppi isomorfi a C_6. Dunque un sottogruppo $H \leq S_4$ di ordine 6 è necessariamente isomorfo a D_3 (si veda il Teorema 6.7); pertanto H contiene 3 elementi di ordine 2 e 2 elementi di ordine di 3, ovvero H contiene

necessariamente due 3-cicli che saranno uno l'inverso dell'altro. Ora, ricordiamo che dall'Esercizio 7.4 segue che A_4 non contiene sottogruppi di ordine 6, dunque $|H \cap A_4| = 3$ per la Proposizione 7.3. Ne deduciamo che i restanti tre elementi di ordine 2 in H devono necessariamente avere segno -1, dunque sono trasposizioni.

Si noti infine che la scelta delle trasposizioni da inserire nel sottogruppo H è univocamente determinata dai 3-cicli contenuti in H. Infatti, se $(i_1 i_2 i_3) \in H$ allora il prodotto

$$(i_1 i_4)(i_1 i_2 i_3) = (i_1 i_2 i_3 i_4)$$

fornisce un 4-ciclo in H, contraddicendo il Corollario 2.15. Ne segue che se $(i_1 i_2 i_3) \in H$, allora

$$H = \{\mathrm{id}, (i_1 i_2), (i_1 i_3), (i_2 i_3), (i_1 i_2 i_3), (i_1 i_3 i_2)\}.$$

I sottogruppi di ordine 6 in S_4 sono allora:

$$H_1 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}, \quad H_2 = \{\mathrm{id}, (12), (14), (24), (124), (142)\},$$

$$H_3 = \{\mathrm{id}, (13), (14), (34), (134), (143)\}, \quad H_4 = \{\mathrm{id}, (23), (24), (34), (234), (243)\}.$$

4. Sia $H \leq S_4$ un sottogruppo di ordine 8. Dal momento che $8 \nmid 12$, dalla Proposizione 7.3 deduciamo che $|H \cap A_4| = 4$. Dall'Esercizio 7.4 segue dunque che $V = H \cap A_4$, poiché i 3-cicli contenuti in A_4 hanno ordine 3 e non possono dunque appartenere ad H per il Corollario 2.15.

   Supponiamo ora che H contenga una trasposizione $(i_1 i_2) \in H$. Abbiamo

   $$(i_1 i_2)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = (i_3 i_4) \in H,$$

   e

   $$(i_1 i_2)(i_1 i_3)(i_2 i_4) = (i_1 i_3 i_2 i_4) \in H,$$

   da cui si deduce che

   $$H = V \cup \{(i_1 i_2), (i_3 i_4), (i_1 i_3 i_2 i_4), (i_1 i_4 i_2 i_3)\}.$$

   D'altra parte, assumendo che H contiene un 4-ciclo, si deduce facilmente che H contiene una trasposizione e dunque H è ancora della forma precedente. Concludiamo che i sottogruppi di ordine 8 di S_4 sono:

   $$H_1 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\},$$

   $$H_2 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\},$$

   $$H_3 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14), (23), (1234), (1342)\}.$$

5. Sia $H \leq S_4$ un sottogruppo di ordine 12. Dalla Proposizione 7.3 deduciamo che

   $$|H \cap A_4| = 6 \quad \text{oppure} \quad |H \cap A_4| = 12.$$

   Dall'Esercizio 7.4 segue dunque che $H = A_4$.

3.11 Prodotto diretto tra gruppi

Definizione 22
Siano $(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ gruppi il loro prodotto diretto risulta l'insieme $(G_1 \times G_2)$ dotato dell'operazione:

$$(g_1, g_2) \cdot (f_1, f_2) = (g_1 \cdot f_1, g_2 * f_2) \quad \forall g_1, f_1 \in G_1, \quad \forall g_2, f_2 \in G_2.$$

e lo indichiamo con $(G_1 \times G_2)$

Proposizione 10
$(G_1 \times G_2, \cdot)$ è un gruppo

Dimostrazione
L'associatività segue da quella di $\cdot$ e $*$ l'elemento neutro è (e_1, e_2)
l'inverso di (g, f) con $g \in G_1$ e $f \in G_2$ risulta (g^{-1}, f^{-1}) □

Esercizio
$(G_1, \cdot)$ e $(G_2, *)$ gruppi
Dimostrare: 1) $|G_1 \times G_2| = |G_1||G_2|$
2) $G_1 \times G_2$ è abeliano se e solo se G_1 e G_2 sono entrambi abeliani
3) Dati due sottogruppi $H \leq G_1$ e $K \leq G_2 \Rightarrow H \times K \leq G_1 \times G_2$
4) Dati $H \trianglelefteq G_1$ e $K \trianglelefteq G_2 \Rightarrow H \times K \trianglelefteq G_1 \times G_2$
5) Dati $H \trianglelefteq G_1$ e $K \trianglelefteq G_2$

$$G_1/H \times G_2/H \cong {G_1 \times G_2}/{H \times K}.$$

Dimostrazione (4,5)

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \frac{G_1}{H} \times \frac{G_2}{K} \\
\frac{(G_1 \times G_2)}{ker\varphi} \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

dove

$$\varphi(g_1, g_2) = (g_1 H, g_2 K)$$

Dal primo teorema di isomorfismo

$$Im\varphi \cong \frac{G_1 \times G_2}{ker\varphi}.$$

$\cdot\varphi$ *suriettiva poichè $\pi_H e \pi_K$ sono suriettive*
$\cdot$ $ker\varphi = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 | \varphi(g_1, g_2) = (H, K)\}$
$= \{(g_1, g_2) | g_1 H = H$ *e* $g_2 K = K\}$
$\{(g_1, g_2) | g_1 \in H, g_2 \in K\} = H \times K$
quindi $H \times K \trianglelefteq G_1 \times G_2$

$$\frac{G_1 \times G_2}{H \times K} \cong G_1/H \times G_2/K.$$

$\square$

Esercizio (importante)
$(G_1, \cdot)$ e $(G_2, *)$ gruppi
$H, K \trianglelefteq G_1 \times G_2$ tali che $H \cap K = \{\tilde{e}\}$ dove $\tilde{e} = (e_1, e_2)$
Dimostrare che ogni elemento di H commuta con ogni elemento di K.
Dimsotrazione
Consideriamo $h \in H, k \in K$ e verifichiamo che $hk = kh$
Idea:
Dimostrare che $hkh^{-1}k^{-1} = e$
Data l'ipotesi $H \cap K = \{e\}$ è sufficiente dimostrare che $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$
Sfruttare la normalità di H e K
Esercizio
$(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ gruppi

$$H := G_1 \times \{e_2\} = \{(g, e_2) | g \in G_1\} \leq G_1 \times G_2.$$

$$H := e_1 \times G_2\} = \{(e_1, g) | g \in G_2\} \leq G_1 \times G_2.$$

Verificare che H e K soddisfano le ipotesi dell'esercizio precedente

Definizione 23
$(G, \cdot)$ gruppo $H, K \leq G$
Diremo che G è
Prodotto diretto interno di H e K se:
1) $H, K \trianglelefteq G$
2) $H \cap K = \{e\}$
3) $HK = G$

Teorema 11
$(G, \cdot)$ gruppo
1) Se G è un prodotto diretto interno di $H, K \leq G$ allora $G \cong H \times K$
2) Se $G \cong G_1 \times G_2$ allora esistono $H, K \leq G$ tali che G sia prodotto diretto interno di H e K e inoltre $H \cong G_1, K \cong G_2$

Dimostrazione (1)
$\psi : H \times K \to G$
$(h, k) \to hk$
Dobbiamo verificare che ψ sia isomorfismo
1)ψ è suriettiva perchè ogni elemento di G si scrive come hk quindi $Im(\psi) = G$

2)È anche iniettiva infatti se $\psi(g_1, k_1) = \psi(h_2, k_1)$

$$\Rightarrow h_1k_1 = h_2k_2$$
$$\Rightarrow h_2^{-1}h_1k_1 = k_2$$
$$\Rightarrow h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K = \{e\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} h_2^{-1}h_1 = e \\ k_2k_1^{-1} = e \end{cases} \Rightarrow (h_1, k_1) = (h_2, k_2)$$
$$\Rightarrow \psi \text{ iniettiva}$$

Bisogna in fine dimostrare che ψ *è un omomorfismo, ovvero che*

$$\psi(h_1h_2, k_1k_2) = \psi(h_1, k_1)\psi(h_2, k_2).$$

dunque

$$\psi(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2 = h_1(h_2k_1)k_2 = h_1(k_1h_2)k_2 = \psi(h_1, k_1)\psi(h_2, k_2).$$

Ricordando che tutti gli elementi di H *commutano con quelli di* K □

Dimostrazione (2)
Per ipotesi esiste un isomorfismo $\varphi : G_1 \times G_2 \to G$
$(g_1, g_2) \to \varphi(g_1, g_2)$
considero
$H := \varphi(G_1, \{e_2\})$
$K := \varphi(\{e_1\} \times G_2)$
Abbiamo visto che
$\cdot G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G_1 \times G_2 \to H \trianglelefteq G$
$\cdot \{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2 \to K \trianglelefteq G$

$$H \cap K = \varphi((G_1 \times \{e_2\}) \cap (\{e_1\} \times G_2)) = \{e\}.$$

$$HK = \varphi((G_1 \times \{e_2\})(\{e_1\} \times G_2)) = G.$$

Le opportune restrizioni di φ *forniscono gli isomorfismi*

$$H \cong G_1 \times \{e_2\} \cong G_1.$$

$$K \cong \{e_1\} \times G_2 \cong G_2.$$

□

Esempio:
Siano $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.
$MCD(n, m) = 1$
Consideriamo $C_{nm} = < p >$

dove $ord(p) = nm$
Considero

$$H =< \rho^m > \quad K =< \rho^n > .$$

$|H| = ord(\rho^m) = n$
$|K| = ord(\rho^n) = m$
Verifichiamo che

$$C_{nm} \cong H \times K.$$

Dobbiamo mostrare:

1. H, KC_{nm}

2. $H \cap K = \{Id\}$

3. $HK = C_{nm}$

1) C_{nm} abeliano, quindi H, KC_{nm}
2) $H \cap K =?$
sia $\rho^h \in H \cap K$
Allora

$$\begin{cases} \rho^h = (\rho^m)^{t_1} \\ \rho^h = (\rho^h)^{t_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m|h \\ n|h \end{cases} .$$

Ma $h \geq mcm(m, n) = mn \Rightarrow h = mn \Rightarrow \rho^h = Id \Rightarrow H \cap K = \{Id\}$

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{nm}{1}.$$

$\Rightarrow HK$ è tutto chiuso quindi è C_{nm}

Definizione 24 (Automorfismo)
$(G, \cdot)$ gruppo
Un automorfismo di G è un isomorfismo $\varphi : G \to G$

Osservazione
$(G, \cdot)$ gruppo
$\Rightarrow Aut(G) = \{$automorfismi di $G\}$
è un gruppo (rispetto alla composizione)
Esempio:
$(G, \cdot)$ gruppo
Fissato $g \in G$ definiamo
$I_g : G \to G$
$\quad f \to gfg^{-1}$
I_g si dice automorfismo interno
$Int(G) = \{$automorfismi interni di $G\}$

Proposizione 11
$Int(G) \trianglelefteq Aut(G)$

Dimostrazione
$If_G = I_e \in Int(G)$
dato $g \in G$ *allora*

$$I_{g^{-1}} = I_g^{-1} \to \begin{cases} I_g \in Aut(G) \\ Int(G) \text{ è chiuso rispetto agli inversi} \end{cases}.$$

$I_{g_2} \cdot I_{g_1}(f) = g_3 g_2 f g_2^{-1} g_2^{-1} = (g_2 g_1) f (g_2 g_1)^{-1} = I_{g_2 g_1}(f)$
$I_{g_2} \cdot I_{g_1} = I_{g_2 g_1}$
quindi $Int(G)$ *è chiuso rispetto alla composizione*
Quindi $Int(G) \leq Aut(G)$
Basta verificare che:
$\varphi \circ Int(G) \circ \varphi^{-1} \subseteq Int(G) \quad \forall \varphi \in Aut(G)$
ovvero dato $g \in G$

$$\varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1} \in Int(G).$$

$\forall f \in G$
$\varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1}(f) = \varphi(g \varphi^{-1}(f) g^{-1}) =$
$\varphi(g)\varphi(\varphi^{-1}(f))\varphi(g^{-1}) =$
$= \varphi(g) f \varphi(g) =$
$= I_{\varphi(g)}(f)$
$\Rightarrow \varphi \circ I_g \circ \varphi^{-1} = I_{\varphi(g)} \in Int(G)$ $\square$

Definizione 25 (Centro di un gruppo)
$(G, \cdot)$ *gruppo*
Il centro di G *è*

$$Z(G) := \{g \in G | gf = fg \quad \forall f \in G\}.$$

Osservazione
$Z(G) \trianglelefteq G$
Osservazione:
$(G, \cdot)$ gruppo
Definiamo un omomorfismo
$\varphi : G \to Int(G)$
$\quad g \to I_g$
$\cdot$ φ è suriettiva
$\cdot$ φ è omomorfismo
$\varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$
$I_{g_2 g_1} = I_{g_2} \circ I_{g_1}$
Chi è il $ker(\varphi)$

$ker(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = Id\} =$
$= \{g \in G | I_g = Id\} =$
$= \{g \in G | \forall f \in G : I_g(f) = Id(f)\} =$
$= \{g \in G | \forall f \in G : gfg^{-1} = f\} = Z(G)$

Dal I teorema di isomorfismo si ha che

$$Int(G) \cong G/Z(G).$$

3.12 Prodotto semidiretto

Consideriamo due gruppi
$(N, \cdot)$ e $(H, *)$
Fissiamo un omomorfismo
$\phi : H \to Aut(N)$
$h \to \o_n$

Definizione 26 (Prodotto semidiretto)
il prodotto semidiretto di N e H tramite $\o$ è l'insieme $N \times H$ dotato dell'operazione

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \o_{h_1}(n_2), h_1 * h_2).$$

$\forall n_1, n_2 \in N \quad \forall h_1, h_2 \in H$

Notazione 7
Indichiamo il prodotto semidiretto tra N e H con il simbolo $N \rtimes_{\o} H$

Proposizione 12
$N \rtimes_{\o} H$ è un gruppo

Dimostrazione
Dato $(n, h) \in N \rtimes_{\o} H$
l'inverso è dato da $(\o_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ □

Definizione 27
$(G, \cdot)$ *gruppo*
$N, H \leq G$ *Diremo che*
G *è prodotto semidiretto interno di* N *e* H *se*

- $N \trianglelefteq G$
- $N \cap H = \{e\}$
- $NH = G$

Esempio
$D_n =< \rho, \sigma > \quad N =< \rho > \trianglelefteq D_n$
$H =< \sigma > \leq D_n$. Allora D_n è prodotto semidiretto interno di N e H
Osservazione:
$h_1 \in H, \quad \text{ø}_{h_1} \in Aut(N) \quad \text{ø}_{h_1}(n_2) \in N$
Esempio
Scegliendo
$\text{ø} : H \to Aut(N)$
$\quad h \to \text{ø}_h$
con $\text{ø}_n := Id_N \quad \forall h \in H$
Abbiamo:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot n_2, h_1 * h_2).$$

Quindi il prodotto diretto è un caso particolare del prodotto semidiretto

3.13 Prodotto semidiretto interno:

Un gruppo G si dice *prodotto semidiretto interno* di N e $H \leq G$ se:

1. $N \trianglelefteq G$,
2. $N \cap H = \{e\}$,
3. $NH = G$.

Esercizio
Sia $\text{ø} : H \to Aut(N)$ un omomorfismo
Dimostrare:
1)$|N \rtimes_{\text{ø}} H| = |N||H|$
2)$N \rtimes_{\text{ø}} H$ è abeliano $\Leftrightarrow N, H$ abeliani
3)$\tilde{H} \leq H, \tilde{N} \leq N$ (sottogruppo caratteristico)

$$\tilde{N} \rtimes_{\text{ø}} \tilde{H} := \{(n, h) \in N \rtimes_{\text{ø}} H | n \in \tilde{N}, n \in \tilde{H}\}.$$

è un sottogruppo di $N \rtimes_{\text{ø}} H$

Definizione 28 (Sottogruppo caratteristico)
$\tilde{N} \leq N$ sottogruppo caratteristico se
$\varphi(n) \in \tilde{N} \quad \forall n \in N \quad \forall \varphi \in Aut(N)$

Teorema 12
Sia G un gruppo.
1) Se G è prodotto semidiretto di N e $H \leq G$, allora esiste un omomorfismo $\o : H \to Aut(N)$ tale che $G \cong N \rtimes_{\o} H$
2) Se $G \cong \tilde{N} \rtimes_{\o} \tilde{H}$ allora esistono $N, h \leq G$ t.c.

- *G sia prodotto semidiretto interno di N e H*
- *$N \cong \tilde{N}, h \cong \tilde{H}$*

Dimostrazione (1)
Definiamo l'applicazione
$\o : H \to Aut(N)$
$\quad h \to \o_n$
dove $\o_h(n) := (hnh^{-1}) \in hNh^{-1} = N \quad \forall n \in N$
Dato che abbiamo assunto N normale
Abbiamo verificato la volta scorsa che è un omomorfismo.
Definiamo l'applicazione
$\psi : N \rtimes_{\o} H \to G$
$\quad (n, h) \to nh$
ψ è suriettiva poiché $N \cdot H = G$
ψ è iniettiva poichè

$$n_1h_1 = n_2h_2 \to n_2^{-1}h_1 = h_2h_1^{-1} \in H \cap N = \{e\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n_2^{-1}n_1 = e \\ h_2h_1^{-1} = e \end{cases} \to (n_1, h_1) = (n_2, h_2)$$

ψ è omomorfismo:
$\psi((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) =$
$= \psi((n_1\o_{h_1}(n_2), h_1h_2))$
$= n_1\o_{h_1}(n_2)h_1h_2$
$= n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2 = \psi(n_1, h_1) \cdot \psi(n_2, h_2)$
Omomorfismo biunivoco $\square$

Dimostrazione (2)
Dato un isomorfismo
$\psi : \tilde{N} \rtimes_{\phi} \tilde{H} \to G$
definiamo:
$N := \psi(\tilde{N} \rtimes_{\phi} \{e_{\tilde{H}}\}) \trianglelefteq G$
$H := \psi(\{e_n\} \rtimes_{\phi} \tilde{H})$
Osserviamo che:
$\cdot \tilde{N} \cong \tilde{N} \rtimes_{\phi} \{e_{\tilde{H}}\} \cong N$
$\cdot \tilde{H} \cong \{e_{\tilde{H}\}\rtimes_{\phi}\tilde{H}\cong H}$
$\cdot N \cap H = \{e\}$
$\cdot NH = e$
(analogo alla dimostrazione per prodtto diretto) □

4 Numeri primi e aritmetica

Definizione 29 (Numero primo)
Un intero $\rho > 1$ si dice primo se $\forall a, b\mathbb{Z}$

$$\rho | ab \to \rho | a \text{ oppure } \rho | b.$$

Definizione 30 (Numero irriducibile)
Un intero $\rho > 1$ si dice irriducibile se i suoi unici divisori positivi sono 1 e ρ

Esercizio:
Dimostrare che ρ è primo $\Leftrightarrow$ è irriducibile

Teorema 13 (Fondamentale dell'aritmetica)
$n > 1$ intero. Allora n si scrive in modo unico come

$$n = \rho_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \rho_r^{k_r} \qquad \textit{(forma canonica)}$$

dove $k_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$
e $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_r$
e ρ_i è primo $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$

Teorema 14
ρ primo. Allora
$\sqrt{\rho}$ è irrazionale (ovvero $\sqrt{\rho} \ni \mathbb{Q}$)

Dimostrazione (Per assurdo)
$\exists a, b \in \mathbb{Z}$ *t.c.* $\sqrt{\rho} = \frac{a}{b}$ *con* $MCD(a, b) = 1$

Allora:
$(a) + (b) = (MCD(a, b)) = (1)$
$\rightarrow 1 \in (a)) + (b)$
$\exists r, s, \in$, *t.c.* $1 = ra + sb$ *(identità di Bezout)*
ora: $\begin{cases} a = \sqrt{\rho} b \\ b\rho = a\sqrt{\rho} \end{cases}$
Quindi: $\sqrt{\rho} = \rho \cdot 1 = \sqrt{\rho} \cdot (ra + sb)$
$(\sqrt{\rho} a)r + (\sqrt{\rho} b)s$
$= \rho br + as \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \sqrt{\rho} \in \mathbb{Z}$ *quindi* $\sqrt{\rho}$ *è un intero che divide* ρ *e* $1 < \sqrt{\rho} < \rho$ $\square$

Teorema 15 (Euclide)
Esistono infiniti numeri primi

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo che $\exists$ *un numero finito di primi* $\rho_1, \dots, \rho_r$
Definiamo: $N := (\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_r) + 1 > 1$
$\Rightarrow \exists \rho_k$ *primo tale che* $\rho_k | N$
$\Rightarrow \begin{cases} \rho_k | N \\ \rho_k | N - 1 \end{cases} \Rightarrow \rho_k | N - (N - 1) \Rightarrow \rho_k | 1,$ *assurdo* $\square$

Definizione 31 (Primi di Euclide)
Sia ρ *primo*

$$\rho^{\#} := \left(\prod_{q \in \rho, q \text{ primo}} q \right) + 1.$$

$\rho^{\#} + 1$ *si dice numero di Euclide*

Congettura
Esistono infiniti primi di euclide

4.1 Svolgimento esercizi

Ossercazione:
Quali sono gli elementi di oridne 21 in S_{13}?
Ricordo che in S_4, gli elementi $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ hanno ordine 2
gli elementi di ordine 21 sono $(3 - ciclo)(7 - ciclo)$ sono $\frac{13!}{126}$
$(3 - ciclo)(3 - ciclo)(7 - ciclo)$ sono $\frac{13!}{126}$
Nelle note del corso trovi soluzioni degli esercizi
Esercizi:
1) $(\mathbb{Z}, +) \quad Aut(\mathbb{Z}) = ?$
Osservazione

Per definire un omomorfismo è sufficiente definirlo sui generatori.
Se inoltre vogliamo un automorfismo $\phi(1)$ deve generare $\mathbb{Z} \Rightarrow \phi(1) = 1$ o -1
$\Rightarrow Aut(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\} \cong C_2$
2) Dimostrare che $D_n \cong C_n \rtimes_{\phi} C_2$ dovea
$\phi : C_2 \to Aut(C_n) = < \rho >$ e $\phi(\rho) = \rho^{-1}$ SOluzione:
$\sigma \to \phi_\sigma$
$N = < \rho > \trianglelefteq D_n$ $[D_n : N] = 2$
$H := < \sigma > \leq D_n$
Verifichiamo che D_n è prodotto semidiretto interno di N e H
$\cdot N \cap H = \{Id\}$
$\cdot |NH| = \frac{|N||H|}{|N \cap H|} = 2n \Rightarrow NH = D_n$
Ora dal teorema segue che $D_n = N \rtimes_{\phi} H$
dove $\begin{aligned} \phi : & H \to Aut(N) H = \{Id, \sigma\} \\ & h \to h \end{aligned}$
$\cdot \phi_{Id} = Id_N$
$\cdot_{\sigma}(\rho) = \sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma\rho\sigma = \sigma\sigma\rho^{n-1} = p^{n-1} = p^{-1}$
dove abbiamo usato il fatto che $\rho^i\sigma = \sigma\rho^{n-i}$
Infine $H \cong C_2 \quad N \cong C_n$

Osservazione

Se avessimo scelto $\begin{aligned} \phi : & C_2 \to Aut(C_n) \\ & \sigma \to \phi_\sigma \end{aligned}$
con $\phi_\sigma(\rho) = \rho$ Avremmo $C_n \rtimes_{\phi} C_2 = C_n \times C_2$ è abeliano $\Rightarrow$ non isomorfo a $D_n \quad \forall n \geq 3$
3)$G = C_5 \cong \mathbb{Z}/(5)$
$Aut(C_5)$
Cerchiamo le immagini di $\varphi(\rho)$
$\mathbb{Z}/(5) = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ ricordo che $ord_{\mathbb{Z}/(n)}([a]) = \frac{n}{MCD(a,n)}$
$ord([1]) = ord([2]) = ord([3]) = ord([4])$
$ord([0]) = 1 \Rightarrow |Aut(\mathbb{Z}/(5))| = 4$

Osservazione

In generale denotiamo con U_n il gruppo delle classi in $\mathbb{Z}/(n) \quad U_n = \{[a] \in \mathbb{Z}/(n) | MCD(a, n) = 1\}$

Esercizio

U_n è un gruppo rispetto $\begin{aligned} & U_n \times U_n \to U_n \\ & ([a], [b]) \to [a \cdot b] \end{aligned}$
Si dice gruppo degli invertibili
Esercizi— $\cdot Aut(C_n) \cong U_n$
$\cdot Aut(K_4) = S_3$

Teorema 16 (Cinese del resto)
$C_{nm} \cong C_n \times C_m$ *per ogni coppia di interi tale che* $MCD(m, n) = 1$

Dimostrazione
Già dimostrato $\square$

Teorema 17 (Piccolo teorema di Fermat)
p primo, $a \geq 1$ $MCD(a,p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv_p 1$

Dimostrazione
$A := \{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$ sono $p-1$ interi.
Mi chiedo se $[ra] = [sa]$ in $\mathbb{Z}/(p)$
Sappiamo che esistono $1 \leq r < s \leq p-1$ tali che $[ra] = [sa]$ in $\mathbb{Z}/(p) \Rightarrow$ Assurdo poiché
$[r] \neq [s]$ in $\mathbb{Z}/(p)$
Quindi le classi definite dagli elementi di A sono tutte distinte e non banali $\Rightarrow$
$\{[a], [2a], \dots, [(p-1)a]\} = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$
Consideriamo il prodotto $a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a_p 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$
$\Rightarrow a^{p-1}(p-1)! \equiv_p (p-1)$ Dato che $MCD(p, (p_1)) = 1$ abbiamo $a^{p-1} \equiv_p 1$ □

Corollario 6
$A \geq 1$ p primo $\Rightarrow ap \equiv_p a$

Dimostrazione
Se $MCD(a,p) = 1$ segue dal piccolo teorema di Fermat
· Se $MCD(a,p) \neq 1 \;\Rightarrow\; p|a \Rightarrow [a] = [0]$ in $\mathbb{Z}/(p) \Rightarrow a^p \equiv_p 0 \equiv_p a$

□

Obbiettivo
Cosa succede al piccolo teorema di Fermat senza p primo?

Definizione 32 (Funzione di Eulero)
$n \geq 1 \Rightarrow \phi(n) = |U_n|$ ovvero $\phi(n)$ è il numero di interi positivi minori o uguali ad n coprimi con n

Esempio
p primo $\Rightarrow \phi(p) = p-1$; $\phi(1) = 1$
Esercizio
Mostrare che se p è primo $\Rightarrow \phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$
Soluzione:
$MCD(a,p) = 1 \Leftrightarrow p|a$ Quindi gli elementi inclusi sono $p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1})p$ tutti i multipli di $p \leq p^k$
Sono p^{k-1} elementi $\Rightarrow \phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

Definizione 33
Una funzione $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ si dice moltiplicativa se $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$ se $MCD(n, m) = 1$

Obiettivo
Dimostrare che ϕ è moltiplicativa
Esercizio
$a, b, c \in \mathbb{Z}$
$MCD(a, b, c) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} MCD(a, b) = 1 \\ MCD(a, c) = 1 \end{cases}$

Teorema 18 (Eulero)
$\phi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ di Eulero è moltiplicativa

Dimostrazione
Per il teorema cinese del resto se $MCD(n, m) = 1 \Rightarrow$
$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/(nm) &\to \mathbb{Z}(n) \times \mathbb{Z}(m) \\ [a]_{nm} &\to ([a]_n, [a]_m) \end{aligned}$ *Consideriamo la restrizione $\psi|_{U_{nm}} : U_{nm} \to Z/(n) \times$ $\mathbb{Z}/(m)$ è una funzione iniettiva*
Studiamo $Im(\psi|_{U_{nm}}) = U_n \times U_m$ (esercizio)
$\Rightarrow |U_{nm}| = |U_n| \times |U_m| \Rightarrow \phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ □
Osservazione (Formula generale)
$n > 1$ intero con fattorizzazione canonica

$$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r} \Rightarrow \phi(n) = \phi(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot \phi(p_r^{k_r})$$

$$= (p_1^k{}_1 - p_1^{k_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_r^{k_r} - p_r^{k_r - 1}) = \left(1 - \frac{1}{p_1^{k_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r^{k_r}}\right).$$

Osservazione
$|Aut(C_n)| = \phi(n)$ dato che $Aut(\mathbb{Z}/(n)) \cong U_n$
Osservazione
Se $n \geq 2 \Rightarrow \phi(n)$ è pari

- Se $n = 2^k \Rightarrow \phi(n) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$
- $n > 2 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow k - 1 > 0 \Rightarrow 2|\phi(n)$
- Se $n \neq 2^k \Rightarrow \exists p$ primo e dispari tale che $p|n \Rightarrow n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ con $p = p_j$ per qualche $j \leq r \Rightarrow \phi(p_j^{k_j})|\phi(n)$. Ma $\phi(p_j^{k_j}) = p^{k_j} - p^{k_j - 1} = p^{k_j - 1}(p - 1)$ $\Rightarrow (p_j - 1_|\phi(p_j^{k_j})$.Ma p_j è dispari $\Rightarrow 2|(p_j - 1) \Rightarrow 2|\phi(n)$

Teorema 19 (Waring 1770, Lagrange 1771)
Se p è un numero primo $\Rightarrow (p-1)! \equiv_p (p-1)$

Dimostrazione
Studiare le soluzioni di $x^2 - 1 \equiv_p 0$
$(x^2-1) \equiv_p (x-1)(x+1) \equiv_p 0$
Quindi $x - 1 \equiv_p 0$ *opprure* $x + 1 \equiv_p 0$
ovvero deduciamo che gli unici elemnti in U_p *di ordine* ≤ 2 *sono* $[1]$ *e* $[p-1]$
Nel prodotto $[(p-1)!]$ *compaiono tutti gli elementi di* $U_p \Rightarrow$ *ogni elemento di* U_p *diverso da* 1 *e* $p-1$ *oppure con il suo inverso ("moltiplicativo")* □

4.2 funzione di Eulero

$\phi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$
$\quad n \to |U_n|$
Ricordo:
$\phi(1) = 1$
$\phi(\rho) = \rho - 1$
$\phi(\rho^k) = \rho^k - \rho^{k-1}$
$\phi(n \cdot m) = \phi(n)\phi(m)$ se $MCD(n, m) = 1$

Lemma 5
$n > 1, a \in \mathbb{Z}$ *t.c.* $MCD(n, a) = 1$
sia $\{a_1, \dots, a_{\phi(n)}\}$ *l'insieme dei numeri positivi minori di n coprimi con n distinti fra loro.*
Allora $\{[a_1], \dots, [a_{\phi(n)}] = \{[aa_1], \dots, [aa_{\phi(n)}]\}$ *(Classi in $Z/(n)$)*

Dimostrazione
Basta verificare che gli elementi delle classi $[aa_i]$ $\forall\ 0 < i < \phi(n)$
Siano tutte distinte tra loro e aa_i sia coprimo con $n \; \forall\ 0 < i < \phi(n)$
Se per assurdo $[aa_i] = [aa_j]$ $\ i \neq j \Rightarrow aa_i \equiv aa_j\ mod(n) \Rightarrow a \equiv a_j\ mod(n)$
Assurdo perché $1 \leq a_i, a_j < n$ *per ipotesi e dunque* $a_i - a_j \notin (n)$

$$\begin{cases} MCD(a,n) = 1 \\ MCD(a_i, n) = 1 \end{cases} \Rightarrow MCD(a, a_i) = 1$$

□

Teorema 20 (Eulero 1760)
$n > 1, a \in \mathbb{Z}$ *tale che* $MCD(a, n) = 1$
Allora

$$a^{\phi(n)} \equiv 1\ mod(n).$$

Nota
Se n è primo ritroviamo il piccolo teorema di Fermat
Dimostrazione
Considero la situazione del lemma:
$A = \{a_1, \ldots, a_{\phi(n)}\}$
Insieme degli interi positivi minori di n e coprimi con n distinti tra loro
Dal lemma segue che

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_{\phi(n)} \equiv (aa_1) \cdot \ldots \cdot (aa_{\phi(n)})\ mod(n).$$

$$\equiv a^{\phi(n)} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{\phi(n)}\ mod(n).$$

Dal momento che $MCD(a_i, n) = 1$
abbiamo: $1 \equiv a^{\phi(n)}\ mod(n)$ □
Esempio
Se volessi calcolare le ultime 3 cifre di 2024^{2025} Studiamo la congruenza

$$x \equiv 2024^{2025}\ mod(1000)$$

È equivalente al sistema (Teorema cinese del resto):

$$\begin{cases} x \equiv 2024^{2025}\ mod(2^3) \\ x \equiv 2024^{2025}\ mod(5^3) \end{cases}$$

Alternativamente mi accorgo che la prima equazione è equivalente a

$$x \equiv 24^{2025}\ mod(1000).$$

$\phi(1000) = \phi(2^3)\phi(5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 400$
$\Rightarrow 24^{400} \equiv 1 mod(n)$
Ma questo implica che la congruenza che devo studiare è:

$$\Rightarrow x \equiv 24^{2025} mod(1000).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 24^{2025}\ mod(8) \\ x \equiv 24^{2025}\ mod(125) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ mod(8) \\ x \equiv 24^{2025}\ mod(125) \end{cases} .$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $8|24$ e $24^{\phi(125)} \equiv 24^{100} \equiv 1\ mod(125)$
Alla fine dovremmo ricostruire la soluzione in $\mathbb{Z}/(1000)$ che sarà unica per il teorema cinese del resto

4.3 Teorema cinese del resto

Problema
Dato un sistema di congruenze
$$\begin{cases} x \equiv= a_1 \ mod(n_1) \\ \vdots \\ x \equiv= a_r \ mod(n_r) \end{cases}$$
con $MCD(n_i, n_j) = 1 \ \ \forall i \neq j$
Come ricostruire l'unica soluzione $[\bar{x}] \in \mathbb{Z}/(n_1 \cdot \ldots \cdot n_r)$
$\bar{x} \equiv a_i \ mod(n_i) \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$
Idea
Definiamo:
$n := n_1 \cdot n_r$
$N_i := \frac{n}{n_i}$
$\bar{x} := a_1 N_1^{\phi(n_1)} + \ldots + a_r N_r^{\phi(n_r)}$
Ora $\bar{x} \equiv a_i N^{\phi(n)} \ mod(n) \Rightarrow \bar{x} = a_i mod(n_i) \ \ \forall i$

Teorema 21 (TCR)
Dato il sistema
$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ mod(n) \\ \ldots x \equiv a_r \ mod(n_r) \end{cases}$$
con $MCD(n_i, n_j) = 1 \ \ \forall i \neq j$
Allora esiste un'unica classe $[\bar{x}] \in \mathbb{Z}/(n_1 \cdot \ldots \cdot n_r)$ *tale che*
$\bar{x} \equiv a_i \ mod(n_i) \ \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$

Dimostrazione (Alternativa al teorema di Eulero)
$n := n_1 \ldots \cdot n_r$
$N_i = \frac{n}{n_i}$
$\bar{x} := a_1 N_1 m_1 + \ldots a_r N_r m_r$
dove gli m_i *sono univocamente determinati dalla condizione* $N_i m_i \equiv 1 mod(n_i)$
Infatti
$$\bar{x} \equiv a_i N_i m_i \ mod(n_i) \Rightarrow \bar{x} \equiv a_i mod(n_i).$$
Osserviamo che $MCD(N_i, n_i) = 1$ *Per ipotesi*
Quindi $[N_i] \in U_{n_i}$ *e* $[m_i]$ *è l'unico inverso di* $[N_i]$ *in* U_{n_i} □
Osservazione
Per risolvere i sistemi di congruenze "basta" saper trovare gli inversi degli elementi in gruppi U_{n_i}
Esercizi dalle schede
Esercizio (Gauss)
Dato un intero $n > 1$ dimostrare che $n = \sum_{d|n} \phi(d)$ (somma di tutti i divisori positivi di n
Dimostrazione
$S_d := \{m \in \mathbb{Z} | MCD(m, n) = d, 1 \leq m \leq n\}$

Osserviamo che
$\{1,\ldots,n\} = \bigcup_d S_d$
$\Rightarrow n = \sum_{d|n} |S_d|$
$MCD(m,n) = d \iff MCD(\frac{m}{d},\frac{n}{d}) = 1$
Quindi $|S_d| = \phi(\frac{n}{d})$
$n = \sum_{d|n} |S_d| = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \phi(d)$ $\square$

Esempio
$n = 15$
Voglio ripetere la dimostrazione per ottenere $15 = \sum_{d|15} \phi(d)$
$S_1 = \{1,2,4,7,8,11,13,14\} \Rightarrow \phi(15/1) = 8$
$S_3 = \{3,6,9,12\} \Rightarrow \phi(15/3) = 4$
$S_5 = \{5,10\$ \Rightarrow \phi(15/5) = 2$
$S_{15} = \{15\} \Rightarrow \phi(15/15) = 1$
Esempio
$n.1$ Allora la somma di tutti gli interi positivi minori di n coprimi con n vale $\frac{1}{2}n\phi(n) \in \mathbb{Z}$
Dimostrazione
Chiamiamo $a_1,\ldots,a_{\phi(n)}$ *tali interi:*
Studio $\sum_{i=1}^{\phi(n)} a_i$
Osserviamo che $MCD(a,n) = 1 \Leftrightarrow MCD(n-a_i,n) = 1$
Quindi
$\{a_1,\ldots,a_{\phi(n)}\} = \{n-a_1,\ldots n-a_{\phi(n)}\}$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\phi(n)} a_i = \sum_{i=1}^{\phi(n)} (n-a_i) = n\phi(n) - \sum_{i=1}^{\phi(n)} a_i \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{\phi(n)} a_i = n\phi(n)$ $\square$

4.4 Teorema di Wilson/Lagrange

Ricordo

Teorema 22 (Wilson)
p primo. Allora
$(p-1)! \equiv (p-1)\ mod(p)$

Teorema 23 (Lagrange)
$m > 1$ intero tale che
$(m-1)! \equiv (m-1)\ mod(m)$
Allora m è primo

Dimostrazione
Per assurdo, se m non è primo allora esiste un intero $d|m$ tale che $1 < d < m$
Osserviamo che:
$d < m \Rightarrow d|(m-1)!$
dall'ipotesi segue che

$$m|(m-1)! + 1.$$

$\Rightarrow d|(m+1)!+1$

Quindi $\begin{cases} d|(m-1)! \\ d|(m-1)!+1 \end{cases}$ $=> d|1$ *che è un assurdo* $\square$

4.5 Divisione Euclidea

Teorema 24
$a, b \in \mathbb{Z}$ *con* $b \neq 0$ *allora* $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ *tale che*
$\cdot a = qb + r$
$\cdot\ 0 \leq r < |b|$

Dimostrazione
Procediamo per passi
$1) a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$A = \{k \in \mathbb{Z} | kb > a\}.$$

Osserviamo che $A \neq \emptyset$
Infatti $(a+1)b = ab + b > ab \geq a \Rightarrow a+ \in A$
Per il principio del buon ordinamento di $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \exists m := min\{k\} \in \mathbb{Z}^+.$$

Definiamo

$$q := m - 1 \in \mathbb{Z}^+.$$

$q \notin A$ *e* $q + 1 \in A$
$qb \leq a < (q+1)b = qb + b$
$\Rightarrow 0 \leq a - qb < b$
Definiamo $r = a - qb$ *e otteniamo:*
$0 \leq r < b$
$a = qb + r$
2) $a \in \mathbb{Z}$ $b > 0$
Se $a \geq 0$ *(ok per 1)*
Se $a < 0 \Rightarrow -a > 0$
$\Rightarrow -a = qb + r$ *con* $0 \leq r < b$
$\Rightarrow a = (-q)b - r$
Se $r = 0$ *abbiamo finito*
Se invece $0 < r < b$
definiamo $r' = b - r \Rightarrow 0 < r' < b$
$a = (-q)b - b + \frac{b-r}{r'}$
$\Rightarrow a = (-q-1)b + r' = q'b + r'$
3) $a \in \mathbb{Z}, b < 0$
$\Rightarrow -b > 0$
$a = q(-b) + r$ *con* $0 \leq r < -b$
$\Rightarrow a = (-q)b + r \quad 0 \leq r < |b|$ $\square$

4.6 Esercizi delle schede

$$\begin{cases} x \equiv 50 \ mod(110) \\ x \equiv 47 mod(73) \end{cases}$$

Dal teorema cinese del resto sappiamo che esiste un'unica soluzione modulo il prodotto $mod(110 * 73) = mod(8030)$
Come lo costruisco?
$\bar{x} = 50 \cdot 73 \cdot m_1 + 47 \cdot 110 \cdot m_2$
L'idea è di infilare al posto di m_1 l'inverso di 73 $mod(110)$

$$\begin{cases} 73 \cdot m_1 \equiv 1 \ (110) \\ 110 \cdot m_2 \equiv 1 \ (73) \end{cases} .$$

Bisogna determinare m_1, m_2
Idea: Sfruttare l´identità di Bezoit: $(n_1) + (n_2) = (MCD(n_1, n_2)) = (1)$
obiettivo: $n_1 \cdot e + n_2 \cdot s = 1$
Nel nostro caso cerco $110 \cdot r + 73 \cdot s = 1 \quad r, s \in \mathbb{Z}$
Perché è importante $110 \cdot r \equiv 1 \ mod(73)$
$73 \cdot s \equiv 1 \ mod(110)$
Il nuovo obiettivo è determinare r, s
Procedo con la divisione euclidea tra 110 e 73

$$\begin{gathered} 110 = 73 + 37 \\ 73 = 2 \cdot 37 - 1 \\ \Rightarrow 1 = 2 \cdot 37 - 73 \\ \Rightarrow 2 \cdot (110 - 73) - 73 = 1 \\ \Rightarrow 2 \cdot 110 - 3 \cdot 73 \end{gathered}$$

Quindi:
$1 = 2 \cdot 110 - 3 \cdot 73$
da cui

$$\begin{gathered} m_1 = -3 \\ m_2 = 2 \end{gathered}$$

$$\bar{x} \equiv 5 - \cdot 73 \cdot (-3) + 47 \cdot 110 \cdot (2) \equiv -620 \ mod(8030).$$

8==D

Nuovo Esercizio

$$\begin{cases} x \equiv_6 2 \\ x \equiv_{10} 3 \end{cases}$$ Non possiamo sfruttare il teorema cinese del resto

$$x \equiv_6 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2 + 6k \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2(1 + 3k)$$

$$x \equiv_{10} 3$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 3 + 10h \quad h \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2(5h + 1) + 1$$

Dunque dalla prima congruenza segue

$$x \equiv_2 0.$$

dalla seconda

$$x \equiv_2 1.$$

8==D

Nuovo Esercizio

$\begin{cases} 3x \equiv_{15} 6 \\ 7x \equiv_9 2 \end{cases}$

Non posso usare TCB studio $3x \equiv_{15} 6$

$$3x \equiv 6 + 15k$$
$$\Updownarrow$$
$$3x = 3(2 + 5k)$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2 + 5k$$

$\begin{cases} x \equiv_5 2 \\ 7x \equiv_9 2 \end{cases}$

Ora $MCD(3, 9) = 1$ Vorrei sfruttare TCR, per farlo dobbiamo eliminare i coefficienti

Noto che 7 e 9 sono coprimi $\Rightarrow [7] \in U_9$ (invertibili modulo 9)

Cerchiamo l'inverso moltiplicativo di $[7] \in U_9$

ovvero cerco $s \in \mathbb{Z}$ tale che $7s \equiv_9 1$

Utilizzo la divisione euclidea

$$\begin{gathered} 9 = 7 + 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ \Rightarrow 1 = 7 - 3 \cdot 2 \\ \Rightarrow 1 = 7 - 3 \cdot (9 - 7) \\ \Rightarrow 1 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \end{gathered}$$

Quindi $s = 4$

$$\begin{gathered} 7x \equiv_9 2 \\ \Updownarrow \\ 4 \cdot 7 \equiv_9 4 \cdot 2 \\ \Updownarrow \\ x \equiv_9 8 \end{gathered}$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv_5 2 \\ x \equiv_9 8 \end{cases}$$

Applico TCR
La soluzione esiste ed è unica modulo (45)
Soluzione:

$$\bar{x} \equiv_{45} 2 \cdot 9 \cdot m_1 - 1 \cdot 5 \cdot m_2.$$

Dove : $\begin{cases} 5m_2 \equiv_9 1 \\ 9m_1 \equiv_5 1 \end{cases}$ Divisione euclidea

$$\begin{gathered} 9 = 5 + 4 \\ 5 = 4 + 1 \\ 1 = 5 - 4 \\ 1 = 5 - (9 - 5) \\ 1 = 2 \cdot 5 - 9 \end{gathered}$$

$\Rightarrow m_2 = 2 \quad m_1 = -1$

$$\bar{x} \equiv_{45} -18 - 10 \equiv_{45} -28.$$

5 Azioni di gruppi

Definizione 34
Un'azione di un gruppo $(G, \cdot)$ su un insieme X è un'applicazione

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \to g.x$$

tale che
1) $e.x = x$
2) $(f \cdot g).x = f(g.x) \quad \forall f, g \in G \quad \forall x \in X$

Esempi:
1)$(G, *)$ gruppo scelgo $X = G$ agisce per moltiplicazione sinistra

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) = g \underset{\text{,}}{*} x$$

2) $G = S_n \quad X = \{1, \dots, n\}$

$$\mathrm{S}_n \times X \to X$$
$$(\sigma, x) \to \sigma(x)$$

3) $n, m \in \mathbb{Z}^+$
$G := GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$
$X = Mat_{n,m}(\mathbb{R})$

$$G \times X \to X$$
$$(AB, C) \to BCA^{-1}$$

4) $G = GL_n(\mathbb{R}) \;\; X = \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{G} \times X \to X$$
$$(\mathrm{A,v}) \to Av$$

5) $G = GL_n(\mathbb{R}) \quad X = Mat_{n,m}(\mathbb{R})$

$$G \times X \to X$$
$$(A, C) \to ACA^{-1}$$

6) $(G, \cdot)$ gruppo $X = G$

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \to g * x * g^{-1}$$

Definizione 35
Data un'azione di un gruppo G su un insieme X si dice transitiva se

$$\forall x, y \in X \;\; g \in G \text{ tale che } g.x = y.$$

Definizione 36
Un'azione si dice semplicemente transitiva se

$$\forall x, y \in X \quad g \in G \text{ tale che } g.x = y.$$

Esercizio:
1) Dimostrare che gli esempi dati sono azioni
2) stabilire quali degli esempi sono semplicemente transitivi, transitivi o nessuna delle due

Notazione 8
Scriveremo $G \curvearrowright X$ per indicare che il gruppo G agisce sull'inseme X

Definizione 37
$G \curvearrowright X$, Dato $x \in X$ definiamo:
· l'orbita di x come il sottoinsieme

$$O_x = \{g.x | g \in G\} \subseteq X.$$

lo stabilizzatore di x il sottogruppo:

$$Stab_x = \{g \in G | g.x = x\} \subseteq G.$$

Esercizio:
Dimostra che lo stabilizzatore di ogni elemento è sempre un sottogruppo (non necessariamente normale
Esercizio:
Sia G gruppo finito ($|G| < +\infty$) con $G \curvearrowright X$, per ogni $x \in X$ si ha:
1) $|Stab_x| < +\infty$ (banale)
2) $|O_x| < +\infty$
3) $|G| = |O_x||Stab_x|$
Suggerimento:
2) Abbiamo un'applicazione suriettiva

$G \to O_x$

$g \to g.x$

3) L'idea è di dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'orbita e i laterali sinistri dello stabilizzatore, poi concludete ricordando che $[G : Stab_x] = \frac{|G|}{|Stab_x|}$ (numero di laterali sinistri)

Idea(per la corrispondenza biunivoca)

Verificare che $\forall g, f \in G$

$$g \equiv f mod(Stab_x)$$
$$\Updownarrow$$
$$g.x = f.x$$

> **Teorema 25** (Cauchy)
> *Sia G un gruppo finito, Sia p primo tale che $p \mid |G|$*
> *Allora esistono (almeno) $p - 1$ elementi di ordine p in G*

Dimostrazione

1) In generale se $G \curvearrowright X$ allora X è unione disgiunta di orbite

Definiamo la relazione di equivalenza su$X$come$x\tilde{y} \Leftrightarrow g \in G$ tale che $g.x = y$.

Basta dimostrare che è una relazione d'equivalenza

2) $X = \{(g_1, \dots, g_n) \in G \times \dots \times G | g \cdot \dots \cdot g_p = e\}$

Vogliamo definire un'azione del gruppo ciclico $C_p =< p >$ su X

$$C_p \times X \to X$$
$$\rho.(g_1, \dots, g_p) \to (g_2, g_3, \dots, g_p, g_1)$$

Verifichiamo che l'azione sia ben definita ovvero che

$\rho.(g_1, \dots, g_p) \in X \quad \forall (g_1, \dots, g_p) \in X$

$$g_2 \cdot \dots \cdot g_p g_1 = (g_1^{-1} g_1)(g_2 \cdot \dots \cdot g_p) g_1 = g_1^{-1}(g_1 \cdot \dots \cdot g_p) g_1 = g_1^{-1} g_1 = e.$$

3) Studio $|X|$ abbiamo $|X| = |G|^{p-1}$ infatti:

$\forall (g_1, \dots, g_{p-1}, g_p) \in X$ dove $_p = (g_1, \dots, g_{p-1})^{-1} \Rightarrow$ in particolare $p||X|$

4)Studiamo le orbite dell'azione $C_p \curvearrowright X$, Sappiamo che $|C_p| = |O_x||Stab_x| \; \forall x \in X$

Quindi $|O_x| = 1 \quad \vee \quad |O_x| = p$

5) Dato che X è unione disgiunta di orbite e $p||X|$

Allora il numero di orbite formate da (x) unico elemento è un multiplo di p

6) Studio tali orbite

L'orbita $O_{(g_1,\dots,g_p)}$ è formata da un singolo elemento se e solo se

$g_1 = g_2 = \dots = g_p$ □

Dunque abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{O_x : \; |O_x| = 1\} \; \leftrightarrow \; \{g \in G | g^p = e\}.$$

Quindi p divide $|\{g \in G | g^p = e\}|$
d'ora in poi $A = \{g \in G | g^p = e\}$
7)$A \neq \emptyset$ poiché $e \in A$

$$A = \{e\} \cup \{g \in G | ord(g) = p\}.$$

Quindi modulo (p) abbiamo

$$0 \equiv_p 1 + |\{g \in G | ord(g) = 1\}|.$$

Quindi l'insieme di elementi di ordine p in G è non uvoto e

$$|\{g | ord(g) = p\} \equiv_p p - 1.$$

Deduciamo

$$|\{g \in G | ord(g) = p\} = kp - 1 \geq p - 1.$$

con $k \in Z^+$

5.1 Torniamo alle schede

$\begin{cases} 3x \equiv_{15} 6 \\ 21x \equiv_{49} 13 \end{cases}$ La prima congruenza è equivalente a $x \equiv_5 2$
$MCD(21, 49) = 7$
La seconda congruenza significa

$$21x = 13 + 49k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$21x - 49k = 13$$
$$7(3x - 7k) = 13$$

Osservazione:
Se $MCD(a, n) \not| b$
allora $ax \equiv_n b$ non ammette soluzioni
Infatti: $d = MCD(a, n)$
con $d \not| b$ allora
con d divide il membro di sinistra ma non quello di destra
Esercizio
G gruppo $g \in G \quad ord(g) = n$
Allora, $g^h = g^k$ se e solo se $h \equiv_n k$
Soluzione
Assumiamo che $g^h = g^k$ Divisione Euclidea
$h - k = qn + r$ con $0 \leq r < n$

Assurdo se $0 < r < n \quad r = 0$
$h - k = qn \Rightarrow h \equiv_n k$
Esercizio
per quali $n, m \in \mathbb{Z}$ si ha $2^n + 2^m$ divisibile per 9
Soluzione
Studio

$$2^n + 2^m \equiv_9 0$$
$$\Updownarrow 2^n \equiv_9 -2^m$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{n-m} \equiv_9 -1$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{n-m} \equiv_9 8$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{n-m} \equiv_9 2^3$$

Sfruttiamo l'esercizio precedente con $G = U_9$
La congruenza è verificata se e solo se

$$n - m \equiv 3 \; mod(ord_{U_9}([2])).$$

$$2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = -1$$
$$2^4 = -2$$
$$2^5 = -4$$
$$2^6 = 1$$

quindi $ord([2]) = 6$
Soluzione: $n - m \equiv_6 3$

5.2 Azione di coniugio

Definizione 38
Se G gruppo e $a, b, g \in G$ tali che:

$$a = gbg^{-1}.$$

diremo che a, b sono coniugati

Definizione 39
G gruppo. Allora G agisce su se stesso tramite l'azione di coniugio
$G \times G \to G$
$g.f = gfg^{-1}$

Esercizio
Verificare che è un'azione

Teorema 26
G gruppo
1) *elementi coniugati hanno lo stesso ordine*
2) $|O_a| = [G : C(a)]$ *dove*
$C(a) := \{g \in G | ga = ag\} \leq G$ *(centralizzatore di a)* 3) *equazione delle classi*
$|G| = |Z(G)| = \sum_{O_a \nsubseteq Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}$

Dimostrazione
1) Siano $a, b, g \in G$ *tali che* $a = gbg^{-1}$ *supponiamo che* $b^k = e \quad k \in \mathbb{Z}$
Allora $a^k = (gbg^{-1}) \cdot \ldots \cdot (gbg^{-1}) = gb^k g^{-1} = e$
Quindi $ord(a) \leq ord(b)$.
Per simmetria $b = g^{-1}ag \Rightarrow ord(b) \leq ord(a)$
Allora $ord(a) = ord(b)$
2)Osserviamo che
$C(a) = g \in G | ga = ag\}$
$= \{g \in G | gag^{-1} = a\}$ *Ricordiamo che :*
$= Stab_a$
$|O_a| \cdot |Stab_a| = |G|$
$\Rightarrow |O_a| = \frac{|G|}{|Stab_a|} = [G : C(a)]$
3) se $a \in Z(G)$ *allora* $O_a = \{a\}$ *poiché*
$\forall g \in G$ *si ha* $ga = gag^{-1} = agg^{-1} = a$
Ricordiamo che G ammette una partizione in G-orbite

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{O_a \nsubseteq Z(G)} |O_a|.$$

Dal punto (2) $\Rightarrow |O_a| = \frac{|G|}{|C(a)|}$

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{O_a \nsubseteq Z(G)} \frac{|G|}{|C(a)|}.$$

Esempio *(dalla nuova scheda)*
$n \geq 3$ *intero dispari* $G = D_n$

$Z(D_n) = \{Id\}$ *infatti* $\rho^i\sigma = \sigma\rho^{n-i}$
Quindi
$1) O_\sigma = \{Id\}$
$2) O_{\rho^i} = ?$
Idea $|O_{\rho^i}| = [D_n : C(\rho^i)]$
$C(\rho') = \{\rho^i | i = 0, \ldots, n-1\}$
$\Rightarrow |C(\rho^i)| \geq n$
Dato che $C(\rho^i) \leq D_n$ *allora* $|C(\rho^i)| = n$ *oppure* $|C(\rho^i) = 2n$
Ma $\sigma\rho^i = \rho^{n-i}\sigma \neq \rho^i\sigma \quad \forall 0 < i < n$
$\Rightarrow |O(\rho^i)| = n$
Quindi
$O_{\rho^i} = [D_n : C(\rho^i)] = \frac{2n}{n} = 2$
Basta ora trovate un altro elemento coniugato a $\rho^i \quad (0 < i < n)$

$$\sigma\rho^i\sigma^{-1} = \rho^{n-i}\sigma\sigma^{-1} = \rho^{n-i}.$$

quindi $O_{\rho^i} = \{\rho^i, \rho^{n-i}\} \quad \forall 0 < i < n$
$3) O_\sigma = \{\sigma, ?\}$
Studiamo $C(\sigma)$
σ *non commuta con* $\rho^i \quad \forall 0 < i < n$
Se σ *commuta con* $\sigma\rho^i$ *con* $0 < i < n$
Allora σ *commuta anche con il prodotto* $\sigma(\sigma\rho^i) = \rho^i$ *assurdo*
$C(\sigma) = \{Id, \sigma\}$
Quindi $|O|_\sigma| = [D_n : C(\sigma)] = \frac{2n}{2} = n$
$\Rightarrow O_\sigma = \{\sigma\rho^i | 0 \leq i < n\}$
Equazione delle classi.
$|D_n| = |Z(D_n)| + \sum_{O_a \not\subseteq Z(D_n)} |O_a|$

$$2n = 1 + 2 + \ldots + 2 + n.$$

$\square$

Teorema 27
G gruppo tale che $|G| = p^k \quad p$ *primo* $k > 0$.
Allora:
1) $Z(G) \neq \{e\}$
2) $[G : Z(G)] \neq p$

Dimostrazione
1) ***IDEA*** *equazioni delle classi*

$$|G| - |Z(G)| = \sum_{O_a \not\subseteq Z(G)} \frac{|G|}{C(a)}.$$

modulo (p) *avremmo*

$$|Z(G)| \equiv_p 0.$$

$|Z(G)| \neq 1 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$
Attenzione, $\frac{|G|}{C(a)} = 1 \Rightarrow C(a) = G \Rightarrow a \in Z(G) \Rightarrow O_a = \{a\} \subseteq Z(G)$
Supponiamo per assurdo che
$[G : Z(G)] = p$
$\Rightarrow \frac{|G|}{|Z(G)|} = p \Rightarrow |Z(G)| = p^{k-1}$
Consideriamo $g \setminus Z(G)$
$\Rightarrow C(g) \supseteq Z(G) \cup \{g\}$
$\Rightarrow\Rightarrow |C(g) = p^{k-1} + 1$
$\Rightarrow |C(g)| = p^k \Rightarrow C(g) = G$
$\Rightarrow g \in Z(G)$ *assurdo* $\square$

Corollario 7 (Classificazione dei gruppi di oridine p^2)
G gruppo tale che $|G| = p^2$ con p primo.
Allora $G \cong C_{p^2}$ oppure $G \cong C_p \times C_p$

Dimostrazione
IDEA CHIAVE *Se $|G| = p^2$ allora G è abeliano.*
Infatti dal teorema:
$\cdot\ Z(G) \neq \{e\}$
$\cdot |Z(G)| \neq p$ *perché avremmo* $[G : Z(G)] = p$
allora per Lagrnage
$|Z(G)| = p^2 \Rightarrow Z(G) = G \Rightarrow G$ *abeliano*
Ora se $\exists g \in G$ tale che $ord(g) = p^2$ allora $G \sim G_{p^2}$
Se invece non esistono elementi di ordine p^2 allora tutti gli elementi ($\neq e$) in G hanno ordine p
Sia $h \in G$ tale che $h \neq e \Rightarrow H :=< h >$ con $|H| = p$
Sia $k \in G \setminus H$
$\Rightarrow K :=< k > \quad con |K| = p$
Verifichiamo che G è prodotto diretto interno di H e K
$\cdot H \trianglelefteq G$ *e* $K \trianglelefteq G$ *(poiché G abeliano)*
$H \cap K = \{e\}$ *Infatti:*

$$\begin{cases} H \cap K K \\ H \cap K \neq K \end{cases} \quad \Rightarrow |H \cap K| = 1.$$

$HK =?$
$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{p^2}{1} = p^2$
$\Rightarrow HK = G$
Allora $G \cong H \times K \cong C_p \times C_p$

$\square$

Osservazione (per $p = 2$)
$G = C_4$ oppure $G \cong K_4 \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$
Osservazione
$p = 3$ $|G| = 0$ allora

$G \cong C_9$ oppure $G \cong C_3 \times C_3$

5.3 Classi coniugate in S_n

Teorema 28 (Fondamentale)
Due permutazioni in S_n sono coniugate se e solo se hanno la stessa struttura ciclica

Dimostrazione
$\tau = (a_1, \ldots, a_n) \in S_n$ *un* k*-ciclo* $\sigma \in S_n$
Studio ora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ *e la sua azione sull'insieme* $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$
Se $\tau(j) = j$
$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(j)) = \sigma\tau(j) = \sigma(j)$
Se $j = a_i$ *per qualche* $1 \leq i \leq k \Rightarrow \tau(j) = \tau(a_i) = a_{i+1 \ mod(k)}$
$\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(a_i)) = \sigma\tau(a_i) = \sigma(a_{i+1 \ mod(k)})$
Allora
$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$
Da questo abbiamo dedotto che date $\sigma, \tau \in S_n$ *qualsiasi, allora:*
$\sigma\tau\sigma^{-1}$ *ha la stessa struttura ciclica di* τ
· *Vogliamo ora dimostrare il viceversa, ovvero: Date* $\tau, \omega \in S_n$ *vogliamo costruire* σ *tale che* $\sigma\tau\sigma^{-1} = \omega$ *(* τ, ω *con la stessa struttura ciclica)*
Per ipotesi, $\tau = \tau_1 \ldots tau_h$ *e* $\omega = \omega_1 \ldots \omega_h$ *dove* $h \geq 1, \tau_i, \omega_i$ *sono* $k_i - cicli$
Denotiamo $\tau_i = (a^{i}_{1}{}^{i}_{k_i}), \omega = (b^i_1 \ldots b_{k_i})$
Possiamo definire σ *esplicitamente*
Infatti
$\sigma\tau_i\sigma^{-1} = (\sigma(a^i_1) \ldots \sigma(a^i_{k_i})$
Quindi
Definiamo $\sigma := \{\sigma(a^i_j) = b^i_j \quad \forall i \in \{1, \ldots, h\}, j \in \{1, \ldots, k\}, \sigma(t) = t \ se \ t \neq a^i_j\}$
Allora $\sigma\tau_i\sigma^{-1} = \omega_i \quad \forall i = h$
$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau_1 \ldots \tau_h\sigma^{-1}$
$= (\sigma\tau_1\sigma^{-1}) \ldots (\sigma\tau_h\sigma^{-1})$
$= \omega_1 \ldots \omega_h = \omega$ □

Osservazione
Dato che la dimostrazione è costruttiva, è molto utile per risolvere gli esercizi.

5.4 Il gruppo p-Sylow

Idea
Prendiamo un gruppo finito.
Esistono sottogruppi di un dato ordine (divisore di $|G|$)?
Il risultato parziale che abbiamo è dato dal Teorema di Cauchy:
Se $\exists p$ primo e divide $|G|$, allora:
$\exists H \leq G$ t.c. $|H| = p$
Sylow, va avanti secondo questo filone:

Definizione 40
Sia G gruppo finito, $p, r, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.
$\cdot|G| = p^r \cdot m$
$\cdot p$ *primo* *(ogni gruppo finito ha queste caratteristiche)*
$\cdot MCD(p, m) = 1$
Un sottogruppo di ordine p^r in G si chiama $p - Sylow$
L'insieme dei $p - Sylow$ si denota con $Syl_p(G)$

Teorema 29 (I Teorema di di Sylow (1862-1872))
Se G gruppo finito, p primo che divide $|G|$, Allora:
$Syl_p(G) \neq \emptyset$

Dimostrazione
Sia $X := \{S \subseteq G : \ |S| = p^r\}$
Definisco un azione
$G \times X \to X$
$(g, s) \to gS = \{gs | s \in S\}$
Dalle osservazioni $\Rightarrow p \nmid |X|$
D'altra parte, x si decompone in G-orbite
Inoltre $|O_S| \cdot |Stab_S| = |G| = p^r \cdot m$
$\Rightarrow \exists$ *almeno un elemento* $\underline{S} \in X$ *t.c.* $\underline{S}| \not\equiv_p 0$
Allora
$$\frac{|O_{\underline{S}}|}{|O_{\underline{S}}|} \cdot |Stab_{\underline{S}}| = \frac{p^r \cdot m}{|O_{\underline{S}}|} \in \mathbb{Z}.$$
Da cui segue che $|Stab_{\underline{S}}| \equiv_{p^r} 0$
$p^r \leq |Stab_{\underline{S}}$
L'idea ora è di dimostrare che $Stab_{\underline{S}} \in Syl_p(G)$
Essendo uno stabilizzatore, è sicuramente un sottogruppo, quindi basta dimostrare che $|Stab_{\underline{S}}| \leq p^r$
Osservazione/Esercizio
$\exists$ *applicazione iniettiva,* $Stab_{\underline{S}} \to p$ *definita fissando un elemento qualsiasi* $\underline{s} \in S$
$Stab_{\underline{S}} \to \underline{S}$
$g \to g\underline{s}$
dimostrare che questa funzione è iniettiva, questo porta alla conclusione che $|Stab_{\underline{S}}| \leq |\underline{S}| = p^r$ *dato che* $\underline{S} \in X$ $\square$
Esempio
Sia $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3 = 3 \cdot 4$
Dal I Teorema di Sylow segue:
$\cdot Syl_2(G) \neq 0 \Rightarrow \exists H \leq G : |H| = 4$
$\cdot Syl_3(G) \neq 0 \Rightarrow \exists H \leq G : |H| = 3$
Osservazione
$\cdot X = O_{S_1} \circ O_{S_2} \circ \ldots O_{S_r}$
$\Rightarrow |X| = \sum_{j=1}^{r} |O_{S_j}|$ Ma $|X| \not\equiv_p 0$

Idea
G gruppo, $|G| = p^r$
$MCD(p, m) = 1, p$ primo, $p, r, m \in \mathbb{Z}_{>0}$
Per il I teorema sappiamo che $(1) Syl_p(G) \neq 0$.
il II Teorema ci dirà che (2) Tutti i $p - Sylow$ sono tra loro coniugati.
Il (3) ci dice che $\rightarrow$ Un p-Sylow è normale se e solo se è l'unico p-Sylow.
Quanti sono i p-Sylow? Analogamente $n_p := |Syl_p(G)| =?$

Teorema 30 (II Teorema di Sylow)
Dati $H_1, H_2 \in Syl_p(G), \exists g \in G$ *t.c.* $\quad gH_1g^{-1} = H_2$

Dimostrazione
L'enunciato è equivalente a dimostrare che la seguente azione è transitiva.

$$\begin{aligned} G \times Syl_p(G) &\rightarrow Syl_p(G) \\ (g, H) &\rightarrow gHg^{-1} \end{aligned}$$

o equivalentemente, che esiste un'unica orbita.
Per assurdo supponiamo che esistano due orbite distinte, O_H^G *e* O_K^G.
Passo 1
Denotiamo con $Stab_H^G$ *lo stabilizzatore di* H *rispetto a questa azione*

$$\begin{cases} |G| = |O_H^G| \cdot |Stab_H^G| = |O_H^G| \cdot [Stab_H^G : H] \cdot |H| \\ H \leq Stab_H^G \end{cases} .$$

Quindi $p \not| \, |O_H^G|$
Passo 2
Restringiamo l'azione

$$\begin{aligned} K \times O_H^G &\rightarrow O_H^G \\ (k, S) \quad & S \ k^{-1} \end{aligned}$$

Rispetto a questa azione abbiamo orbite diverse.
In particolare
$|O_H^G| = O_{H_1}^K \cup \ldots \cup O_{H_r}^K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |O_H^G| &= \sum_{i=1}^{r} |O_{H_i}^K| \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{|K|}{Stab_{H_i}^K} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{p^r}{|Stab_{H_i}|} \end{aligned}$$

Dato che $p \nmid |O_H^G|$ *deduciamo che* $\exists H_i$ *t.c.* $|O_{H_i}^K| = 1$
$\Rightarrow 1 = |O_{H_i}^K| = [K : Stab_{H_i}^G]$
Quindi K *stabilizza* H_i
$\Rightarrow kH_ik^{-1} = H_i \quad \forall k \in K$
$\Rightarrow KH_i = H_iK$
Passo 3 $KH_i = H_iK \Rightarrow KH_i \leq G$
$|KH_i| = \dfrac{|K| \cdot |H_i|}{|K \cap H_i|} = \dfrac{p^{2r}}{p^s}$ *con* $s < r$ *(poichè altrimenti* $K = H_i$*)*
$|KH_i| = p^{2r-s} = p^{r+t}$ *con* $t > r$
Ma $|KH_i|$ *divide* $|G| = p^r m$ *per Lagrange (assurdo)*

Corollario 8
p primo che divide $|G|$ *allora* $H \in Syl(G)$ *è normale se e solo se* $n_p = |Syl_p(G)| = 1$

Osservazione
è importante sapere se $n_p = 1$ *perché l'esistenza di sottogruppi normali spesso permette di realizzare un gruppo come prodotto semidiretto*

Teorema 31 (III teorema di Sylow)
G gruppo finito

- $|G| = p^r m$
- $r, p, m \in \mathbb{Z}_{>0}$
- *p primo*
- $MCD(p, m) = 1$

Allora:
1) $n_P = [G : N_G(H)]$ *dove* $H \in Syl_p(G)$
2) $m \equiv_{n_p} 0$
3) $n_p \equiv_p 1$

Prima della dimostrazione vogliamo estendere la nozione di centralizzatore (o centralizzante)

Definizione 41 (Normalizzatore)
G gruppo $S \subseteq G$ sottoinsieme
1)Il centralizzatore di S in G è

$$C(S) = \{g \in G | gs = sg \quad \forall s \in S\}.$$

2) Il normalizzatore di S in G è

$$N_G(S) = \{g \in G | gS = Sg\}.$$

Esercizio:
Dimostrare che
1) Se $S \subseteq G \Rightarrow C(S) \leq G$
2) $S \subseteq G \Rightarrow N_G(S) \leq G$
3) $S \leq G \Rightarrow S \leq N_G(S)$

Dimostrazione
Considero l'azione
$G \times Syl_p(G) \to Syl_p(G)$
$(g, H) \to g.H := gHg^{-1}$
Allora $\forall H \in Syl_p(G)$
$p^r m = |G| = [G : Stab_H] \cdot |Stab_H|$
$= [G : N_G(H)] \cdot |N_G(H)|$ *(dato che $Stab_h = N_G(H)$)*
$= [G : B_G(H)][N_G(H) : H]|H|$ *(dato che $H \leq N_G(H)$)*
Deduciamo che $m = [G : N_G(H)] \cdot [N_G(H) : H]$
Ora:
$n_p = |Syl_p(G)| = |O_H^G|$ *(II Teorema di Sylow)*
$= [G : Stab_H]$
Quindi abbiamo dimostrato (1) *e* (2)
Resta da dimostrare (3)
di un fissato $K \in Syl_p(G)$

$$K \times Syl_p(G) \to Syl_p(G).$$
$$(k, H) \to k.H := kHk^{-1}.$$

Questa azione avrà $r + 1$ orbite (con $r \geq 0$)
$O_K^K, O_{H_1}^K, \ldots, O_{H_r}^K$
Abbiamo una decomposizione in orbite disgiunte

$$Syl_p(G) = O_K^K \cup O_{H_1}^K \cup \ldots \cup O_{H_r}^K.$$

$$\Rightarrow n_p = |Syl_p(G)| = |O_K^K| + \sum_{j=1}^{r} |O_{H_j}^K|$$

$$= |O_K^K| + \sum_{j=1}^{r} [K : Syl_{H_j}^K].$$

$$= |O_K^K| + \sum_{j=1}^{r} [K : N_K(H_j)].$$

Idea
Basta ora verificare che

- $|O_K^K| = 1$
- $O_{H_j}^K \equiv_p 0 \quad \forall 1 \leq j \leq r$

Abbiamo:

$$O_K^K = [K : N_K(K)] = 1.$$

Dato che $H \leq N_G(H) \leq G \Rightarrow N_K(K) = K$

$$|O_{H_j}^K| = [K : N_K(H_j)] = \frac{|K|}{|N_K(H_j)|} = \frac{p^r}{|N_K(H_j)|}.$$

dato che $K \in Syl_p(G)$
Quindi resta da escludere il caso $N_K(H_j) = K$
Ma questo è equivalente a $KH_j = H_jK$

$$\Rightarrow \begin{cases} KH_j \leq G \\ |KH_j| = \frac{|K||H_j|}{|K \cap H_j|} = \frac{p^{2r}}{p^{s_j}} \end{cases}.$$

dove $0 \leq s_j < r$ *dato che* $H_j \neq K_j$
Ma $p^{2r-s_j} \not| \, p^r m$ *da cui l'assurdo per Lagrange* □

5.5 Applicazioni di Sylow

Possiamo (ri)-dimostrare un vecchio risultato

Teorema 32 (Cauchy)
G gruppo finito, p primo che divide $|G|$ *allora*

$$g \in G \text{ tale che}$$

$ord(g) = p$.

Dimostrazione
Da Sylow I segue che esiste $H \in Syl_p(G)$
Scegliamo $h \in H$ *tale che* $h \neq e$
Ora $ord(h) = p^s$ *per qualche* $s > 0$
Definiamo $f = h^{p^{s-1}}$
$f = h^{p^{s-1}} \neq e \Rightarrow ord(h) \neq 1$
$f^p = (h^{p^{s-1}})^p = h^{p^s} = e \Rightarrow ord(f) = p$ □

Teorema 33 (Wilson)
p primo allora $(p-1)! \equiv_p p-1$

Dimostrazione
Scelgo $G = S_p$ Studio n_p
I p-Sylow in S_p hanno ordine p
$\Rightarrow$ *sono tutti i sottogruppi ciclici di ordine p in S_p*
$\cdot$ *Gli unici elementi di ordine p in S_p sono i p-cicli.*
fissato il primo elemento, abbiamo $p-1$ scelte per il secondo, $p-2$ per il terzo e così via
quindi i p-cicli sono $(p-1)!$
Quindi i sottogruppi di S_p di ordine p sono $\frac{(p-1)!}{(p-1)} = (p-2)!$ perché in ogni tale sottogruppo appaiono $p-1$ p-cicli
$\Rightarrow (p-2)! = n_p \equiv_p 1 \quad \Rightarrow \quad (p-1)! \equiv_p p-1$ $\square$

Teorema 34 (Classificazione dei gruppi pq)
G gruppo finito, $p, q > 1$ tali che
$\cdot p, q$ *primi*
$\cdot p < 1$
$\cdot |G| = pq$
Allora
1) Se $p \not| \, q-1$ allora $G \cong C_{pq}$
2) Se $p | q-1$ allora $G \cong C_q \rtimes_\phi C_p$

Dimostrazione
Studio n_p
$$\begin{cases} p = m \equiv_{nq} 0 \\ n_q \equiv_q 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n_q = 1 \text{ oppure } m_q = p \\ \text{ seconda esclude } n_q = p \text{ perchè } p < q \end{cases}$$
$\Rightarrow n_q = 1$
$\Rightarrow \exists! Q \in Syl_p(G)$
$\Rightarrow Q \trianglelefteq G$ *e* $|G| = q \Rightarrow Q \cong C_q$
Studio n_p nel caso $p \not| q-1$
$$\begin{cases} q\text{-}m \equiv_{n_p} 0 \\ n_p \equiv_p 1 \end{cases} \Rightarrow n_p = 1 \text{ oppure } n_p = q$$
$\Rightarrow n_p \neq q$ *perché*
$q \not\equiv_p 1$ *per ipotesi*
$n_p = 1 \Rightarrow \exists! P \in Syl_p(G)$
$\Rightarrow PG$ *e* $|P| = p \Rightarrow P \cong C_p$
Ora abbiamo due sottogruppi normali $P, Q \trianglelefteq G$
tali che

$\cdot P \cap Q = \{e\}$ *perchè* $|P \cap Q|$ *divide sia* $|P| = p$ *che* $|Q| = q$
$\cdot PQ| = \frac{|P||Q|}{|P|} = pq = |G|$
$\Rightarrow G \cong P \times Q \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$
Resta il caso $p|q-1$
$\cdot \exists! Q \in Syl_p(G) \rightsquigarrow Q \trianglelefteq G$
$\cdot \exists P \in Syl_p(G) \rightsquigarrow P \leq G$
Ora
$\cdot P \cap Q = \{e\}$ *come prima*
$PQ = G$ *come prima*
Quindi G *prodotto semidiretto interno*
$\Rightarrow G \cong Q \rtimes_\emptyset P \Rightarrow C_q \rtimes_\emptyset C_p$
per qualche omomorfismo $\phi : C_p \to Aut(C_q)$ □
Esercizio:
Classificare i gruppi di ordine $2q$ con $q > 2$ primo □

5.6 Ricordo:

Teorema 35
$p < q$ *primi* G *gruppo finito di ordine* pq
Allora:
$\cdot$ *se* $p \not| q+1$ *allora* $G \cong C_{pq}$
$\cdot$ *se* $p|q+1$ *allora* $G \cong C_q \rtimes_\emptyset C_p$

Inserisci tabella fino ad ordine 9

Corollario 9
$q > 2$ *primo,* G *gruppo di ordine* $2q$
Allora $G \cong C_{2q}$ *oppure* $G \cong D_q$

Dimostrazione
Dal teorema basta studiare gli omomorfisimi

$$\begin{aligned} \phi : & C_2 \to Aut(G) \\ & s \to (\phi_s : r \to s) \end{aligned}$$

Affinchè ϕ *sia un omomorfismo, dato che* $ord_{C_2}(s) = 2$
dobbiamo imporre che $ord_{Aut(G)}(\phi_s) \in \{1, 2\}$
Se è uguale a 1 $\phi_s = Id \Rightarrow \phi$ *omomorfismo banale*
$\Rightarrow$ *il prodotto è diretto*
$\Rightarrow G \cong C_q \times C_2 \cong C_{2q}$
Nell'altro caso $ord_{Aut(G)}(\phi_s) = 2$
$\Rightarrow \phi_s \circ \phi_s = Id_{C_q} \Rightarrow \phi_s(\phi_s(r)) = r$
$\phi_s(r^k) = r$
$\Rightarrow k^2 \equiv_{ord_{C_1}(r)} 1 \Rightarrow k^2 \equiv_q 1$
$\Rightarrow (k-1)(k+1) \equiv_q 0$

$\Rightarrow k \equiv_q \pm 1$
Se $k \equiv_q 1$
$\Rightarrow \phi_s = Id_{C_q} \Rightarrow G \equiv C_{2q}$
Se $k \equiv_q -1$
$\Rightarrow \phi_s(r) = r^{-1}$
$\Rightarrow G \cong C_q \rtimes_\phi C_2 \cong D_q$ *(già visto)*

□

5.7 Gruppi di ordine 12

Studiamo G tramite i teoremi di Sylow
$\cdot Syl_2(G) \neq \emptyset$
$\cdot Syl_3(G) \neq \emptyset$
Dal Sylow III abbiamo

$$\begin{cases} n_2 \equiv_2 1 \\ 3 \equiv_{n_2} 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow n_2 = 1$ oppure $n_2 = 3$
Dal Sylow II

$$\begin{cases} n_3 \equiv_3 1 \\ 4 \equiv_{n_3} 0 \end{cases}.$$

$n_3 = 1$ oppure $n_3 = 4$
Osservazione:
Esiste un sottogruppo normale in G
Dimostrazione
se $n_3 = 4$
Allora in G *esistono 4 sottogruppi di ordine 3*
Ognuno dei quali contenente due elementi di ordine 3.
Quindi G *contiene 8 elementi di ordine 3.*
Quindi i restanti 3 elementi di ordine diverso da 3 formano necessariamente l'unico 2*-Sylow* □
Esercizio:
Se $|G| = 12$ e $n_3 = 4$ allora esiste un omomorfismo iniettivo $G \to S_4$
Nota
Da questo segue che $G \cong A_4$ perchè A_4 è l'unico sottogruppo di ordine 12 in S_4
Dimostrazione
$G \times Syl_3(G) \to Syl_3(G)$
$(g, H) \to gHg^{-1}$
$n_3 = 4$
$\Rightarrow Syl_3(G) = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$
Definiamo
$\psi : G \to S_4$
$g \to \tau_g$
$\tau_g(i) = j \Leftrightarrow gHg^{-1} = H_j$ *con* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *(Questa è l'idea da utilizzare negli*

esercizi delle schede
Verifiche:
1)ψ *è ben definita, Infatti* τ_g *è invertibile con inversa* $\tau_{G^{-1}}$
2) ψ *è un omomorfismo, ovvero*

$$\psi(gf) = \psi(g)\psi(f).$$

$\tau_{gf}(i) = j$
$\Leftrightarrow (gf)H(gf)^{-1} = H_j$
$\Leftrightarrow g(fHf^{-1})g^{-1} = H_j$
$\Leftrightarrow \tau_g(\tau_f(i)) = j$
3) ψ *iniettiva*
supponiamo che $\tau_g = \tau_f$
$gHg^{-1} = fHf^{-1} \quad \forall H \in Syl_3(G)$
$\Rightarrow (f^{-1}g)H(f^{-1}g)^{-1} = H \quad \forall H \in Syl_3(G)$
$\Rightarrow f^{-1}g \in N_G(H) \quad \forall H \in Syl_3(G)$
$\Rightarrow f^{-1}g \in \bigcap\limits_{H \in Syl_3(G)} N_G(H)$
$\Rightarrow f^{-1}g \in \bigcap\limits_{H \in Syl_3(G)} H = \{e\} \Rightarrow f^{-1}g = 3 \ \Rightarrow \ f = g$
Resta da verificare che $H = N_G(H)$
$4 = n_3 = [G : N_G(H)] = \dfrac{|G|}{|N_G(H)|} = \dfrac{12}{N_G(H)} \Rightarrow |N_G(H)| = 3$
Ma $H \leq N_G(H) \Rightarrow H = N_G(H)$ $\square$

5.8 Studiare gruppi di ordine 12 in cui $n_3 = 1$

Da Sylow III Segue che $\exists! Q \in Syl_3(G) \Rightarrow Q \trianglelefteq G$
Esiste in G almeno un 2-Sylow $P \leq G$
Ora:
$\cdot G \trianglelefteq G, \quad P \leq G$
$\cdot Q \cap P = \{e\}$ (perchè l' $MCD(|Q|, |P|) = 1$
$\cdot |QP| = \dfrac{|Q||P|}{|Q \cap P|} = \dfrac{3 \cdot 4}{1} = 12$
$\Rightarrow QP = G$
Allora $G \cong Q \rtimes_{\o} P$ per qualche
$\phi : P \to Aut(Q) \cong C_2$
Quindi studiamo i possibili omomorfismi
$\phi : P \to Aut(C_3)$ se $P \cong C_4$
$C_4 =< \gamma > \qquad C_3 =< r >$
$\phi :<\gamma >\to Aut(C_3)$
$\gamma \to (\phi_\gamma : r \to r^k$ con k $\pm$ 1) nel csao $k = 1$ abbiamo ϕ banale
$\Rightarrow$ prodotto diretto
$\Rightarrow G \cong C_3 \times C_4 \cong C_{12}$

nel caso $k = -1$
abbiamo $G \cong C_3 \rtimes_\phi C_4 \cong Dic_3$
dove
$\phi : C_4 \to Aut(C_3)$

$\gamma \to (\phi_\gamma : r \to r^{-1})$

$P \cong K_4$
$\phi : K_4 \to Aut(C_3)$

$\{Id, a, b, ab\}$

$a \to (\phi_a : r \to r^{\pm 1})$

$b \to (\phi_b : r \to r^{\pm 1})$

$ab \to (\phi_{ab} : r \to r^{\pm 1})$

Se ϕ è banale
$\Rightarrow$ prodotto diretto
$\Rightarrow G \cong C_3 \times K_4$

$\cong C_3 \times C_2 \times C_2$

$\cong C_6 \times C_2$

Se ϕ è non banale, a meno di rinominare gli elementi $\{a, b, ab\}$ avremo che

$\phi_a r \to r$

$\phi_b r \to r^{-1}$ Grazie (!) a Esercizio 1 di scheda 7 tutti i restanti prodotti

$\phi_{ab} r \to r^{-1}$

semidiretti sono isomorfi
$G \cong C_3 \rtimes_\phi K_4 \cong D_6$
Infatti $|D_6| = 12$
D_6 non è isomorfo ad alcuno dei precedenti casi
1)C_2 è ciclico
2)$C_6 \times C_2$ è abeliano, ma non ciclico
3)A_4 unico caso in cui $n_3 = 4$
4)Dic_3 non è abeliano e contiene elementi di ordine 4
5)D_6 non è abeliano e non contiene elementi di ordine 4 (C_4)

5.9 Radici primitive

Definizione 42 (Radice primitiva modulo (n))
Un intero a si definisce radice primitiva modulo (n) se $ord_{U_n}([a]) = \phi(n)$

Osservzaione:
Per teorema di Eulero

$$a^{\phi(n)} \equiv_n 1.$$

$\Rightarrow ord_{U_n}([a]) = \phi(n)$
Osservazione
a radice primitiva mod (n) significa che $U_n = < [a] >$

Obiettivo (Scheda 7)
Dimostrare che se $p > 1$ primo allora $\exists$ radice primitiva modulo (p)
Esempi
Non esistono radici primitive mod(8)
Studio $U_8 = \{[1], [3], [5], [7]\}$

$$\phi(8) = 2^3 - 2^2 = 4.$$

$1^2 \equiv_8 1$

$3^2 \equiv_8 1$

$5^2 \equiv_8 1$

$7^2 \equiv_8 1$
Es(ercizio esempio)
3 è radice primitiva mod(7)
Svolgimento:
$3^1 \equiv_7 3$
$3^2 \equiv_7 2$
$3^3 \equiv_7 1$
$3^4 \equiv_7 3$
$3^5 \equiv_7 2$
$3^6 \equiv_7 1$

---

2 è radice primitiva mod(9)
Da fare
Esercizio(Scheda 7)
Dimostrare che
$Aut(C_p) \cong C_{p-1}$
Soluzione
Sappiamo che
$Aut(C_p) \cong U_p \cong C_{\phi(p)} \cong C_{p-1}$
Esercizio
p primo
$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$
$f(x) \equiv_p 0$ ammette al più p soluzioni distinte in $\mathbb{Z}/(p)$

Dimostrazione
per induzione su n
se $n = 1 \Rightarrow a_1 x \equiv_p -a_0$
$\Rightarrow x \equiv_p = -a \cdot a_1^{-1}$ $\qquad$ a_1 *invertibile in* $\mathbb{Z}/(p)$ *per ipotesi*
$n > 1$
Se $f(x) \equiv_p 0$
non ammette soluzioni ok
Se invece a è soluzione dividiamo
$f(x) = (x - a)q(x) + r$
$\Rightarrow f(x) \equiv_p (x - a)q(x) + r$

Valuto in a:
$\Rightarrow 0 \equiv_p f(a) \equiv_p (a-a)q(a) + r$
$\Rightarrow f(x) \equiv_p (x-a)q(x)$
Sia $b \not\equiv_p a$ *tale che* $f(b) \equiv_p 0$
$0 \equiv_p f(b) \equiv_p (b-a)q(b)$
$\mathbb{Z}/(p)$ *dominio d'integrità*
$q(b)_p 0$
Ma per induzione $q(x) \equiv_p 0$
ammette al più $n-1$ *soluzioni distinte*
$\Rightarrow f(x) \equiv_p 0$ *ammette al più* n *soluzioni*

□

5.10 Ricordo (Lagrange)

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $a_n \not\equiv_p 0$ con $p > 1$ primo
Allora $f(x) \equiv_p 0$ ammette al più n soluzioni

Corollario 10
Dimostrare che se p primo e $d|(p-1)$ *allora* $x^d - 1 \equiv_p 0$ *ammette esattamente d soluzioni*

Dimostrazione (Soluzione)
Abbiamo che se $d(p-1)$ *allora* $(x^d - 1)|(x^{p-1} - 1)$
$\Rightarrow x^{p-1} = (x^d - 1)f(x)$
dove f è di grado $(p-1-d)$
Ora $x^{p-1} \equiv_p 1$ *ammette* $p-1$ *soluzioni distinte per il piccolo teorema di Fermat.*
Le soluzioni sono $1, 2, \ldots, p-1$
Se una di tali soluzioni non risolve $f(x) \equiv_p 0$ *allora risolve* $x^d - 1 \equiv_p 0$ *(Sto usando il fatto che* $\mathbb{Z}/(p)$ *è un dominio d'integrità [prodotto commutativo e se il prodotto tra due numeri è 0 allora o uno o l'altro sono 0])*
Dato che $f(x) \equiv_p 0$ *ammette al più* $p-1-d$ *soluzioni distinte deduciamo che* $x^d - 1 \equiv_p$ *ammette almeno* $d = (p-1) - (p-1-d)$ *soluzioni distinte in* $\mathbb{Z}/(p)$*.*
D'altra parte per l'esercizio precedente ne ammette al più d, e quindi segue la tesi. □

Corollario 11 (Esercizio)
$p > 1$ *primo,* $d|(p-1)$ *Allora, esistono esattamente* $\phi(d)$ *interi, distinti in* U_p*, di ordine d in* U_p

Dimostrazione (Soluzione)
Introduco $S_d = \{k \in \mathbb{Z} | ord_{U_p}([k]) = d, \quad 1 \leq k \leq p-1\}$
La tesi è equivalente a dimostrare che $|S_d| = \phi(d)$
Abbiamo una partizione $\{1, \ldots, p-1\} = \bigcup_{d|p-1} S_d$

Quindi $p-1 = \sum_{d|(p-1)} |S_d|$

Ricordo:

$n = \sum_{d|n} \phi(d)$ *(esercizio delle vecchie schede)*

Scegliendo $n = p-1$ *deduciamo*

$\sum_{d|p-1} |S_d| = \sum_{d|p-1} \phi(d)$

Basta allora dimostrare che $|S_d| \leq \phi(d) \quad \forall d|p-1$

Se $S_d = \emptyset \Rightarrow |S_d| = 0 \leq \phi(d)$

Se $S_d \neq \emptyset \ \Rightarrow \exists a \in S_d$

$\Rightarrow \{a, a^2, a^3, \ldots, a^d\}$ *sono tutti distinti mod*(p) *infatti*

$$a^i \equiv_p a^k$$
$$\Updownarrow$$
$$i \equiv_d j$$

Quindi $a, a^2, \ldots, a^n$ *sono tutte e sole le soluzioni di* $x^d - 1 \equiv_p 0$ *Quindi gli elementi di ordine* d *in* U_p *sono della forma* a^j *per qualche* $j \in \{1, \ldots, j\}$

Ma $ord([a^j]) = \frac{d}{MCD(j,d)}$ *(esercizio di una riga)*

Quindi $|S_d| = \phi(d)$

□

Corollario 12 (Esercizio)
$p > 1$ *primo:*
Allora esistono esattamente $\phi(p-1)$ *radici primitive distinte*

Dimostrazione (Soluzione)
Basta applicare l'esercizio precedente, scegliendo $d = p-1$ □

Esercizio
$p > 1$ primo
dimostrare che $Aut(C_p) \cong C_{p-1}$
Soluzione:
Sappiamo che $Aut(C_p) \cong U_p \cong C_{p-1}$
Dove la prima congruenza la sappiamo da teoremi precedenti, la seconda viene data dal precedente corollario

Congettura 1 (Gauss, 1801)
Esistono infiniti primi per cui 10 *è una radice primitiva*

Congettura 2 (E. Artin, 1927)
$a \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$
Assumiamo che a non sia un quadrato perfetto, Allora esistono infiniti primi per cui a è una radice prima

Osservazione
Oggi sappiamo che la congettura di Artin è vera per infiniti interi a, ma non è noto quali **Esercizio:** $p > 1$ primo
Sia $a = x^2$ con $x \in \mathbb{Z}$
Dimostrare che se $[a] \in U_p$
allora $ord_{U_p}([a] \neq p-1$
Esercizio [classificazione dei gruppi di ordine pq]
Dimostrare che tutti i gruppi non ciclici di ordine pq con $p \neq q$ primi, sono fra loro isomorfi e non abeliani
Soluzione
Dato G tale che $|G| = pq$ Avevamo dimostrato che $\exists! Q \in Syl_q(G) \;\Rightarrow\; Q \trianglelefteq G$
Inoltre $\exists P \in Syl_p(G) \Rightarrow P \leq G$
Abbiamo verificato che:
$\cdot P \cap Q = \{e\}$
$\cdot |PQ| = |G| \Rightarrow PQ = G$
$\Rightarrow G \cong Q \rtimes_{\emptyset} P \cong C_q \rtimes_{\emptyset} C_p$
dove $\phi : C_p \to AutC_q \cong C_{q-1}$
cot se $p \not| q-1 \Rightarrow \phi$ è banale $\Rightarrow G \cong C_q \times C_p \cong C_{pq}$
$\cdot$ se $p | q-1 \Rightarrow \phi$ potrebbe essere non banale $\Rightarrow ord_{Aut(C_q)}(\phi_P) = p \Rightarrow Im(\phi) \subseteq Aut(C_q) \cong C_{q-1}$ con $|Im(\phi)| = p$
Sappiamo che C_{q-1} contiene un unico sottogruppo di ordine $p \Rightarrow Im(\phi)$ non dipende da ϕ (a meno che ϕ non banale)
$\Rightarrow$ A meno di "precomporre" ϕ con un automorfismo di C_q la mappa $C_p \to Aut(C_q) \cong C_{q-1}$ è univocamente determinata
Concretamente:
Dati $\phi, \phi' : C_p \to Aut(C_q)$ non banali $\Rightarrow$ esiste $B \in Aut(C_p)$ tale che $\phi' = \phi \cdot B \Rightarrow C_q \rtimes_{\emptyset} C_p \cong C_q \rtimes_{\emptyset} C_p$ quindi esiste un'unica classe d'isomorfismo non ciclica

5.11 Successioni esatte corte

Esercizi [Scheda 9]

Definizione 43
Una successione esatta corta di gruppi è una coppia di omomorfismi $H \xrightarrow{r} G \xrightarrow{\pi} K$ *dove* r *iniettivo* π *suriettivo e* $Im(r) = ker(\pi)$

- G *si dice estensione di* K *tramite* H
- *la successione spezza se* $\exists s : K \to G$ *omomorfismo tale che* $\pi \cdot s = Id$
- S*, se esiste, si chiama sezione*

Esempi
Costruire una successione esatta corta (SEC) di Q_8 che estende K_4 tramite C_2
Soluzione

$$\{Id, \rho\} = C_2 \xrightarrow{r} Q_8 \xrightarrow{\pi} K_4$$

r per essere iniettiva deve mandare ρ che è di ordine 2 in un elemento di ordine 2.

$ord(r(\rho)) = 2 \Rightarrow r(\rho) = -1$ $\begin{matrix} Id \to 1 \\ \rho \to -1 \end{matrix}$

Considero la proiezione al quoziente $Q_8 \to Q_8/\{\pm 1\} \cong K_4$
$\Rightarrow$ basta prendere $\pi : Q_8 \to Q_8/\{\pm 1\} \cong K_4$
2) Non spezza!:
Se spezzasse dato che una sezione è necessariamente iniettiva (esercizio), ma non esistono omomorfismi iniettivi da K_4 in Q_8

3) $\begin{matrix} \mathbb{Z} \xrightarrow{r} \mathbb{R} \to S^1 \leq C^* \\ n \to 2\pi n \\ \theta \to e^{i\theta} \end{matrix}$

è una SEC che non spezza

Definizione 44 (Spezza)
Una successione esatta corta $H \to G \to K$ *spezza se* $\exists S : K \to G$ *omomorfismo t.c.* $\pi \circ S = Id_K$

Osservzione
Una sezione è iniettiva
Esempio:
H, K gruppi $G := H \rtimes_{\phi} K$
per qualche $\phi : K \to Aut(H) \Rightarrow$

$\begin{matrix} H \xrightarrow{r} H \rtimes_{\phi} K \xrightarrow{\pi} K \\ h \to (h, e_K) \\ (h,k) \to k \end{matrix}$ è una SEC che spezza

$\cdot r$ è iniettiva
$\cdot\pi$ è suriettiva
$\cdot Im(r) = \{(h, e_K)|h \in H\} = ker(\pi)$
$\cdot$ spezza perchè S: $K \to H \rtimes_{\o} K \quad k \to (e_K, k)$
è una sezione:

$$(\pi \cdot S)(k) = \pi(e_H, k) = k \quad \forall k \in K.$$

Esercizio scheda 9
Data una SEC $H \xrightarrow{r} G \xrightarrow{K}$ con $S : K \to G$ che spezza $\Rightarrow GH \rtimes_{\o} K$
Soluzione:
Osservo che:
$\cdot r(H) \leq G \rightsquigarrow \cdot r(H) = ker(\pi)G$
$\cdot S(K) \leq G \rightsquigarrow \cdot r(H) \cap S(K) = \{e_G\}$
$\Rightarrow$ Sia $x \in r(H) \cap S(K) \Rightarrow \exists h \in H, \exists k \in K$
$t.c. x = r(h) = S(k)$
Applicando π :
$e_K = \pi(r(h)) = \pi(S(k)) = k \;\Rightarrow\; x = S(k) = S(e_K) = e_G$
$\cdot r(H) \cdot S(K) = G$
$g \in G \rightsquigarrow \pi(g) \in K \rightsquigarrow f = S(\pi(g)) \in S(K) \leq G$
Vorremmo ora scrivere g come un'elemento in $r(H)$ per f
Basta quindi mostrare che $gf^{-1} \in Im(r)$ ma $Im(r) = ker(\pi)$
Applicando π : $\pi(gf^{-1}) = \pi(g)\pi(f^{-1}) = \pi(g)\pi(S(\pi(g^{-1}))) = \pi(g) \cdot (\pi \circ S)(\pi(g^{-1})) = \pi(gg^{-1}) = e_K$
Sapendo che $f^{-1} = (S(\pi(g)))^{-1}$ e che $(\pi \circ S) = Id_K$
Quindi $gf^{-1} \in ker(\pi) = Im(r) \Rightarrow \exists h \in H$ t.c. $gf^{-1} = r(h) \Rightarrow g = r(h)g = r(h)S(\pi(g))$
$\pitchfork \quad \pitchfork$
$Im(r)\ Im(S)$
$\cdot$ Deduciamo che $G \cong r(H) \rtimes_{\o} S(K) \cong H \rtimes_{\o} K$
poiché r e S iniettive $\Rightarrow H \cong r(H)$ e $K \cong S(K)$

5.12 Quaternioni

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk|i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
è uno spazio vettoriale di dimensione 4.
Dalla scheda 9 segue che $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo.

Definizione 45
$n \geq 2 \quad Dic_n := < a, j > \leq \mathbb{H}^*$ *dove* $a = \cos(\frac{\pi}{n}) + i\sin(\frac{\pi}{n}) \in \mathbb{H}^*$

Osservazione
(a) è un gruppo ciclico di ordine $2n$
Osservazione

$n = 2 \rightsquigarrow a = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i \quad \Rightarrow \quad Dic_2 =< i, j >= \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} = Q_8$

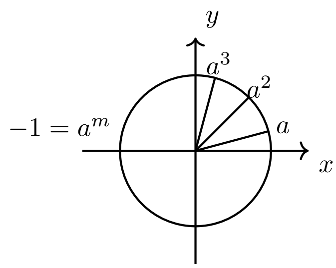
5.13 Gruppi diciclici

$Dic_n =< a, j >\leq \mathbb{H}^*$
1) $ord(a) = 2n \quad ord(j) = 4$
2) Mostrare $j^2 a^m = a^m + n = a^m j^2$
Soluzione
$j^2 = -1$ e $a^n = -1$ tutti i membri delle uguaglianze sono quindi $-a^m$
3) Mostrare $j^{\pm 1} a^m = a^{-m} j^{\pm 1}$
Soluzione
$j^-1 = -j$
$ja^m = j(cos(\frac{m\pi}{n}) + i\sin(\frac{m\pi}{n}) = \cos(\frac{m\pi}{n})) = \cos(\frac{-m\pi}{n}) + i\sin(-\frac{m\pi}{n}) = a^{-m}j$
$\Rightarrow ja^m - a^{-m}j \Rightarrow -ja^m = a^{-m}(-j) \Rightarrow j^{-1}a^m = a^{-m}j^{-1}$
6) Mostrare che ogni elemento in Dic_n può scriversi come $a^m j^k$ con $0 \leq m < 2n$
$0 \leq j \leq 1$ segue dalle relazioni precedenti $\Rightarrow Dic_n = \{a^m | 0 \leq m < 2n\} \cup \{a^m_j | 0 \leq m < 2n\}$
$\Rightarrow (6) : |Dic_n| = 4n$
8) Mostrare che esiste una SEC
$C_{2n} \xrightarrow{r} Dic_n \rightarrow \pi C_2$
$\rho \rightarrow a$
$\cdot r(\rho)L = a \Rightarrow r$ iniettiva
$\cdot \pi : Dic_n \rightarrow C_2$
Vorrei verificare proiezione al quoziente.
In effetti $r(C_{2n}) =< a >\trianglelefteq Dic_n$ perchè

$[Dic_n :< a >] = 2$

$\pi : Dic_{m2} =< \sigma >$
$a^m \rightarrow e$
$a^m j \rightarrow \sigma$

9) Mostrare che <u>non</u> si spezza
Soluzione
Mi chiedo se esiste una sezione $S : C_2 \rightarrow Dic_n$
Se S esiste allora $S(\sigma) = a^m j$ per qualche $0 \leq m < 2n$
$ord(a^m j) = 4 \rightsquigarrow (a^m j)(a^m j) = a^{m-m} j = j^2 = -1$
$\Rightarrow ord(S(\sigma)) \neq ord(\sigma) \Rightarrow$ assurdo
10) Mostrare che esiste unna SEC
$C_n \xrightarrow{r} Dic_n \xrightarrow{\pi} C_4$ ds n dispari:



$C_n =< \rho > \xrightarrow{r} Dic_n$
$\rho \to a^2$

$\pi : Dic_n \to C_4 =< r > \quad \pi(a^m) = \begin{cases} Id & \text{se } m \equiv_2 0 \\ r^2 & \text{se } m \equiv_2 1 \end{cases}$

$\pi(a^m j) = \begin{cases} rm & \text{se } m \equiv_2 0 \\ r^3 m & \text{se } m \equiv_2 1 \end{cases}$

Osservazione

$r^2 = \pi(j^2) = \pi(a^n) = \begin{cases} Id & \text{se } n \text{ pari} \\ r^2 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

2) $n \geq 3$ dispari
Dimosrtare che $Dic_n \cong C_n \rtimes_\phi C_4$ per qualche $\phi : C_4 \to Aut(C_n)$
Soluzione:
Costruiamo $S : C_4 \to Dic_n$
· dobbiamo solo definire $S(r) = j$
· S omomorfismo
·$\pi \circ S(r) = \pi(j) = r$

Definizione 46
Un gruppo G si dice semplice se i suoi unici sottogruppi normali sono $\{e\}$ e G

Esempio:
·Q_8 non è semplice
·$A_3 \cong C_3$ è semplice
·A_4 non è semplice;
Ricordo:
per A_4 sia ha $n_3 = 4$ e $n_2 = 1 \Rightarrow A_4$ contiene un unico 2-Sylow ("sottogruppo di oridne 4") che quindi è normlae

$$V = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \rightsquigarrow V \trianglelefteq A_4.$$

Proposizione 13
A_n è semplice $\forall n \geq 5$

· Strategia: Vogliamo procedere per passi dimostrando che:
1) $\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n \Rightarrow H$ contiene un 3-ciclo
2) Se H contiene un 3-ciclo $\Rightarrow$ li contiene tutti
3) A_n con $n \geq 5$ è generato dai 3-cicli

Lemma 6
$\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n$ Allora
H contiene almeno un 3-ciclo oppure (almeno un prodtotto di trasposizioni disgiunte)

Dimostrazione
Sia $\sigma \in H, \sigma \neq Id \Rightarrow \sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k$
con σ_i cicli disgiunti.
Caso I: σ_1 è m ciclo con $m \geq 4$ $\sigma_1 = (a_1 a_2 a_3 \ldots)$
$:= (a_1 a_2 a_3)\sigma(a_1 a_2 a_3)^{-1} \in H \Rightarrow \sigma\tau^{-1} \in H$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} = \sigma(a_1 a_2 a_3 a)\sigma^{-1}(a_1 a_2 a_3)^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)\sigma(a_3))$
$= (a_2 a_3 a_4)(a_1 a_3 a_2) = (a_1 a_4 a_2)(a_3) \in H$
Caso II $m = 3$ per casa
Caso I : $m = 2$ per casa □

5.14 Gruppi semplici

Definizione 47 (Gruppo Semplice)
Un gruppo di dice semplice se gli unici sottogruppi normali sono banali

Obiettivo
Dimostrare A_n è semplice per $n \geq 5$
Osservazione:
A_4 non è semplice
A_2 e A_3 sono semplici
Strategia
$n \geq 5$
1) $\{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ allora H contiene almeno un 3-ciclo
2) $\{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ se H contiene un 3-ciclo allora li contiene tutti
3) A_n è generato dai suoi 3-cicli
Ricordo:

Lemma 7
$n \geq 3 \;\; \{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$
Allora H contiene almeno un 3-ciclo oppure un prodotto di trasposizioni disgiunte

Proposizione 14
$n \geq 5, \;\; \{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$ *allora H contiene almeno un 3-ciclo*

Dimostrazione
Basta verificare che se $\sigma = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \in H$, allora esiste un e-ciclo in H.
Dato che $H \trianglelefteq A_n$ abbiamo

$$gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in A_n.$$

Definiamo $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_5\}$
$\tau := (a_3 a_4 a_5)\sigma(a_3 a_4 a_5)^{-1} \in H$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} \in H$ *Studiamo* $\sigma\tau^{-1}$
$\Rightarrow \sigma\tau^{-1} = \sigma(a_3 a_4 a_5)\sigma^{-1}(a_3 a_4 a_5)^{-1}$
Dove $\sigma(a_3 a_4 a_5) = (\sigma(a_3)\sigma(a_4)\sigma(a_5))$
$\sigma\tau^{-1} = (a_4 a_3 a_5)(a_3 a_5 a_4) = (a_3 a_4 a_5) \in H$ $\square$

Teorema 36
$n \geq 5 \; \{Id\} \neq H \trianglelefteq A_n$
Allora H contiene tutti i 3-cicli

Dimostrazione
Basta verificare che dato
$\sigma = (a_1 a_2 a_3) \in H$
Allora H contiene tutti i 3-cicli
Sfruttiamo $H \trianglelefteq A_n$
$\Rightarrow \tau = (a_3 a_4 a_5)\sigma(a_3 a_4 a_5)^{-1}$
$\tau \in H$
dove $a_4, a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3\}$
Studiamo τ :
$\tau = (a_3 a_4 a_5)(a_1 a_2 a_3)(a_3 a_4 a_5)^{-1} = (a_1 a_2 a_4) \in H$
Abbiamo dimostrato che se $(a_1 a_2 a_3) \in H$ allora $(a_1 a_2 a_4) \in H \;\; \forall a_4 \notin \{a_1, a_2\}$
Dunque mostriamo che il 3-ciclo arbitrato $(b1, b_2, b_3) \in H$ per qualunqe $b_1, b2, b_3$
$(a_1 a_2 a_3) \in H$
$\Rightarrow (a_1 a_2 a_3) \in H$
$\Rightarrow (b_1 b_2 b_3) \in H$

$\square$

Corollario 13
$n \geq 5$ A_n è semplice

Dimostrazione
Sia $\{e\} \neq H \trianglelefteq A_n$, dimostriamo che $H = A_n$
Per il teorema H contiene tutti i 3-cicli, quindi basta verificare che A_n è generato dai 3-cicli, Sia $\sigma \neq Id, \sigma \in A_n \subseteq S_n$
Ricordando che S_n è generato da trasposizioni
$\Rightarrow \sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_{2i-1}\tau_{2i} \dots \tau_{2k-1}$
L'idea è verificare che $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$ si ottiene come prodotto di 3-cicli $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
Caso 1 $\tau_{2i-1} = \tau_{2i}$
$\tau_{2i-1}\tau_{2i} = Id = (123)(132)$
Caso 2 $\tau_{2i-1} = \tau_{2i}$
hanno un indice in comune
Allora:
$\tau_{2i-1} = (ab)$
$\tau_{2i} = (bc)$
$\Rightarrow \tau_{2i-1}\tau_{2i} = (ab)(bc) = (abc)$
Caso 3:
τ_{2i-1}, τ_{2i} *non hanno indici in comune.*
$\Rightarrow \tau_{2i-1} = (ab),\ \tau_{2i} = (cd)$
$\tau_{2i-1}\tau_{2i} = (ab)(cd)$
Ma
$(abc)(bcd) = (ab)(cd)$
Quindi: $\tau_{2i-1}\tau_{2i} = (abc)(bcd)$
Allora σ è prodotto di 3-cicli $\Rightarrow \sigma \in H \Rightarrow H = A_n$ □

Esercizio
$n \geq 5$ dimostrare che gli unici sottogruppi normali di S_n sono $\{e\}, A_n, S_n\{e\}, A_n, S_n$

Soluzione
Osserviamo che se $H \trianglelefteq S_n$ allora $H \cap A_n \trianglelefteq A_n$ poichè $H \trianglelefteq S_n$ significa
$gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in S_n$
Quindi $\{Id\} \neq H \trianglelefteq S_n$
Studio $H \cap A_n$
1) $H \subseteq A_n$
$\Rightarrow H = H \cap A_n \trianglelefteq A_n$
$\xrightarrow{A_n \text{semplice}} H = \{Id\}$ oppure $H = A_n$
2) $H \not\subseteq A_n$
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$ e $H \cap A_n \trianglelefteq A_n$
A_n semplice$H \cap A_n = \{Id\}$ oppure $H \cap A_n = A_n$
Se $H \cap A_n = \{Id\}$
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$
$\Rightarrow |H| = 2$
$\Rightarrow H = \{Id, \sigma\}$ con $ord(\sigma) = 2$

Se tale H fosse normale allora avremmo

$g^{-1} = \sigma \quad \forall g \in S_n$
$\Rightarrow$ Assurdo perchè σ è coniugato a tutti gli elementi con la sua stessa struttura ciclica. $\cdot$ Allora $H \cap A_n = A_n$.
$\Rightarrow [H : H \cap A_n] = 2$
$\Rightarrow |H| = n! \Rightarrow H = S$
ricordando che $H \cap A_n = A_n$

5.15 Classi di coniugio in $\mathbf{A}_n$

Obiettivo:
Studiare le azioni

$$\begin{array}{c|c} S_n \times A_n \to A_n & A_n \times A_n \to A_n \\ (\tau, \sigma) \to \tau\sigma\tau^{-1} & (\tau, \sigma) \to \tau\sigma\tau^{-1} \end{array}$$

Ricordo:
Data $\sigma \in A_n$
$O_\sigma^{S_n} = \{$ permutazioni con la stessa struttura ciclica di $\sigma\}$
Domanda: $O_\sigma^{A_n} =?$
A priori abbiamo $O_\sigma^{A_n} \subseteq O_\sigma^{S_n}$
Esempio: n = 3
$O_{(123)}^{S_3} = \{(123), (132)\}$
infatti $(23)(123)(23)^{-1} = (132)$
$A_3 = \{Id, (123), (132)\}$
$O_{123}^{A_3} = \{(123)\}$
Ricordo:
Data $\sigma \in A_n$
$\cdot C_{A_n}(\sigma) = \{\tau \in A_n | \tau\sigma\tau^{-1}\} = Stab_\sigma^{A_n}$
$\cdot C_{S_n}(\sigma) = \{\tau \in S_n | \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\} = Stab_\sigma^{S_n}$
Osservazione
$C_A = (\sigma) = C_{S_n}(\sigma) \cap A_n$

Teorema 37
$n \geq 2 \quad \sigma \in A_n$
1) Se $C_{S_n}(\sigma) \nsubseteq A_n$ allora $O_\sigma^{A_n} = O_\sigma^{S_n}$
2) $C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$ allora $|O_\sigma^A n| = \frac{1}{2}|O_\sigma^{S_n}$

Dimostrazione
Supponiamo che $C_{S_n}(\sigma) \nsubseteq A_n$
Allora $C_{S_n}(\sigma) \leq S_n$
$|C_{S_n}(\sigma) : C_{S_n}(\sigma) \cap A_n] = 2$
notando che $C_{S_n}(\sigma) \cap A_n = C_{A_n}(\sigma)$
$\Rightarrow |C_{A_n}(\sigma)| = \frac{1}{2}|O_{S_n}(\sigma)|$

$$\Rightarrow \begin{cases} n! = |S_n| = |C_{S_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{S_n}| \\ \frac{n!}{2} = |A_n| = |C_{A_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{A_n} \end{cases}$$

$\Rightarrow |O_\sigma^{S_n}| = |O_\sigma^{A_n}$
$\Rightarrow O_\sigma^{S_n} = O_\sigma^{A_n}$
2) Se $C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$
$\Rightarrow C_{S_n}(\sigma) = C_{A_n}(\sigma)$
$\Rightarrow \begin{cases} n! = |S_n| = |C_{S_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{S_n}| \\ \frac{n!}{2} = |A_n| = |C_{A_n}(\sigma)| \cdot |O_\sigma^{A_n}| \end{cases}$
$\Rightarrow |O_\sigma^{A_n}| = \frac{1}{2}|O_\sigma^{S_n}|$

$\square$

Esempio:
$\sigma = (123) \quad n = 5$
$\Rightarrow O_{(123)}^{S_n} = O_{(123)}^{A_n}$
perché $(45) \in C_{S_n}(\sigma)$ MA $(45) \notin A_5$
Esercizio
$\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ disgiunti.
σ_i è m_i-ciclio
1) se $\sum_{i=1}^k m_i \leq n-2$
allora $O_\sigma^{S_n} = O_\sigma^{A_n}$
IDEA:
dall'ipotesi segue che $\exists a, b \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\sigma(a) = a, \sigma(b) = b$
$\Rightarrow (ab) \in C_{S_n}(\sigma)$ e $sgn(ab) = -1$

6 Gli anelli

Definizione 48
Un anello $(R, +, \cdot)$ è un insieme R dotato di due operazioni, $+, \cdot$ che soddisfano le seguenti:

1. *$(R, +)$ è un gruppo abeliano*
2. *L'operazione $\cdot$ è associativa ($a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in R$)*
3. *$\exists 1 \in R$ tale che $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$ (R è unitario)*
4. *Vale la legge distributiva*
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
   $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \quad \forall a, b, c \in R$

Nota
Artin richiede anche la commutatività

Definizione 49
Un anello $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ si dice commutativo se

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R.$$

Esempi
1)$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un anello commutativo
2)$Mat_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ è un anello non commutativo

Definizione 50 (Dominiio d'integrità)
Un dominio d'integrità è un anello commutativo tale che

1. $0 \neq 1$
2. $\forall a, b \in R$ *tale che* $a \cdot b = 0$ *si ha* $a = 0$ *oppure* $b = 0$

0 *denota l'elemento neutro del gruppo* $(R,+)$
Si dice che R *non ha divisori dello* 0

Esempio:
$R = \{e\}$
$e + e = e$
$e \cdot e = e$
$(R,+,\cdot)$ è un anello che soddisfa $0 = 1$
Si chiama Anello Banale (Zero Ring)
Esercizio
$(R,+,\cdot)$ anello
1) dimostrare che
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$$
2) dimostrare che
$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

3) se $0 = 1$ allora R è l'anello banale (ovvero $|R| = 1$)

Definizione 51
$(R,+,\cdot)$ *anello.*
Un sottoanello di R *è un sottoinsieme* $A \subseteq R$ *tale che:*

1. $(A,+) \leq (R,+)$
2. $1 \in A$
3. A *è chiuso rispetto all'operazione* $\cdot$

Esempi
$M \geq 2$ intero
$(\mathbb{Z}/(m),+)$ gruppo abeliano
$(\mathbb{Z}/(m),+,\cdot)$ è un anello commutativo
IN generale non è un dominio d'integrità.

Ad esempio se $m = 6$
$[2][3] = [6] = [0]$
quindi $[2]$ e $[3]$ sono divisori di $[0]$ in $\mathbb{Z}/(6)$

Proposizione 15
$m \geq 2$ è intero allora $\mathbb{Z}/(m)$ è un dominio d'integrità se e solo se m è primo

Dimostrazione
Se m non è primo allora esistono $1 < a, b < m$ tali che $m = ab$
Allora $[a] \cdot [b] = [m] = [0]$ e $[a]$ è un divisore dello zero
Viceversa se m è primo dobbiamo dimostrare che non esistono zero divisori
Considero $[a] \in \mathbb{Z}/(m)$ con $[a] \neq [0]$
Assumo che $0 < a < m$
Allora $MCD(a, m) = 1$
$\Rightarrow (a) + (m) = (1) = \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \exists k, h \in \mathbb{Z}$ *tali che* $ka + hm = 1$
$\Rightarrow [k] \cdot [a] = [1] \in \mathbb{Z}/(m)$
Ora se esiste $[b] \in \mathbb{Z}/(m)$ tale che
$[a] \cdot [b] = [0]$
$\Rightarrow [k] \cdot [a] \cdot [b] = [k] \cdot [0]$
$\Rightarrow [b] = [0]$
$\Rightarrow [a]$ *non è zero divisore* □

Osservazione
Abbiamo dimostrato che se $a \in R$ ammette un inverso moltiplicativo allora R è un dominio d'integrità (assumendo "solo" che R sia anello commutativo)

Definizione 52
Un anello $(R, +, \cdot)$ si dice corpo se
$0 \neq 1$
$\forall a \in R, \; \exists a^{-1} \in R$ *t.c.*
$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ a^{-1} *si dice inverso moltiplicativo*

Definizione 53
Un campo è un corpo commutativo

Osservazione
Se $(R, +, \cdot)$ anello $a \in R$ che ammette inverso moltiplicativo $a^{-1} \in R$ Allora a non è zero divisore
Infatti se $\exists b \in R$ t.c. $a \cdot b = 0$
$0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot a \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$
$1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$
$\Rightarrow a$ non è divisore di 0

Corollario 14
Ogni campo è un dominio d'integrità

Dimostrazione
$\forall a \in R$ *esiste* $a^{-1} \Rightarrow R$ *dominio d'integrità* $\square$
Osservazione

$$\begin{tikzcd}
& \text{CAMPO} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{CORPO} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{DOMINIO D'INTEGRITÀ} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{ANELLO} & & \text{ANELLO COMMUTATIVO} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Esempio: 1) $\mathbb{H}$ quaternioni è un corpo
infatti $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ $q \in \mathbb{H}$
$\rightsquigarrow q = x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow \overline{q} := x - yi - zj - wk$ (coniugato)
$\rightsquigarrow |q|^2 = q\overline{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$
$\rightsquigarrow q \cdot \frac{\overline{q}}{|q|^2} = 1$ quindi tutti invertibili (tranne 0) $\Rightarrow \mathbb{H}$ è un corpo

Proposizione 16
Ogni dominio d'integrità finito è un campo

Dimostrazione
$(R, +, \cdot)$ *dominio finito. Dato* $a \in R \setminus \{0\}$ *vogliamo dimostrare che esiste* a^{-1}
Idea:
considero la funzione $\begin{aligned} \varphi_a : & R \to R \\ & b \to a \cdot b \end{aligned}$ φ_a *è iniettiva. Infatti* φ_a *è un omomorfismo di gruppi*
$(R, +) \to (R, +)$ *per la distributività*
Inoltre
$ker(\varphi_a) = \{b \in R | \varphi_a(b) = 0\} = \{b \in R | a \cdot b = 0\} = \{0\}$ *(dato che* R *è dominio)*
$\Rightarrow \varphi_a$ *è iniettiva*
Ora dato che $|R| < +\infty$ φ_a *è biunivoca*
Quindi nell'immagine di ϕ_a *abbiamo* 1
$\Rightarrow b \in R$ *tale che* $\varphi_a(b) = 1$ *ovvero* $a \cdot b = 1$
$\Rightarrow b$ *è l'inverso moltiplicativo di* a $\square$

Definizione 54
Dati $(R_1, +, \cdot)$ *e* $(R_2, \oplus, \odot)$ *anelli, un omomorfismo di anelli è una funzione* $f : R_1 \to R_2$ *tale che*

1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
2. $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$
3. $f(1_{R_1}) = 1_{R_2} \qquad \forall a, b \in R_1$

6.1 Idee per gli esercizi

1)$(R, +,)$ anello $a \in R$
$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$
$\Rightarrow -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) = -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) + (0 \cdot a)$
$\Rightarrow 0 = 0 \cdot a$
2) $a, b \in R$
$0 = 0 \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b$
Sommando $-(a \cdot b)$ ad entrambi i membri ottengo:
$-(ab) = -(a)b$