Lezione 22 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-20

0.1 boh

Definizione 1
$S \subset H$ sottoinsieme

$$S^{\perp} = \{f \in H \mid (f, g) = 0 \quad \forall g \in S\}.$$

questo viene anche chiamato complemento ortogonale di S

Proposizione 1
Sia $S \subset H \Rightarrow S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale chiuso

Osservazione
In dimensione infinita esistono sottospazi non chiusi
Esempio
$C([0,1]) \subset L^2((0,1))$
$C([0,1])$ non è chiuso in $L^2([0,1])$
Quindi dire "chiuso" non è una banalità
Se $f_1, f_2 \in S^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g) = 0 \quad \forall g \in S$
Se $\{f_n\} \subset S^{\perp}, f_n \to f$ in H
$\Rightarrow (f_n, g) = 0 \;\; \forall n, \forall g \in S$
$\xrightarrow{n \to +\infty} (f, g)$
$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f, g)| \le \|f_n - f\| \|g\| \to 0$ se converge uniformemente.

Corollario 1
Sia $M \subset H$ un sottospazio chiuso proprio $\Rightarrow \exists g \in M^{\perp} \setminus \{0\}$

Dimostrazione
Sia $f \in H \setminus M$ e sia $u = pr_M(f) \in M$
$\Rightarrow f \ne u$ e $(f - u, v) = 0 \;\; \forall v \in M$
$\Rightarrow f \cdot u \ne 0$ e $f - u \in M^{\perp}$ $\square$
Osservazione
$M = C([0,1]) \subset L^2((0,1))$ sottospazio proprio non chiuso
Sia $g \in M^{\perp} \Leftrightarrow \int_{[0,1]} gf dm = 0 \;\; \forall f \in C([0,1]) \Rightarrow g = 0$

Teorema 1 (Riesz) (rappresentazione del duale per uno spazio di Hilbert)
Sia H uno spazio di Hilbert
$\forall L \in H'$ (spazio duale = {funzionali su H lineari e continui})
$\exists! g \in H$ tale che $L(f) = (f, g) \;\; \forall f \in H$
e $\|L\|_{H'} = \|g\|_H$

Dimostrazione
Se $L0 \to g = 0$ $L(f) = (f, 0) = 0 \;\; \forall f \in H$

Se $L \not\equiv 0 \Rightarrow \ker(L) = \{f \in H \ : \ L(f) = 0\}$ *è un sottospazio proprio* $(L \neq 0)$ *è chiuso (perché* L *continuo)*
$\Rightarrow \exists \tilde{g} \in \ker(L)^{\perp} \setminus \{0\}$
Osserviamo che $L(\tilde{g}) \neq 0$ *perché*
se $L(\tilde{g}) = 0 \Rightarrow \tilde{g} \in \ker(L) \cap \ker(L)^{\perp} \Rightarrow g^{\tilde{=}0}$
$\forall f \in H$
$$L(f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g})) = L(f) - \frac{L(f)}{\cancel{L(\tilde{g})}}\cancel{L(\tilde{g})} = 0$$
$\Rightarrow f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g} \in \ker(L)$
$\Rightarrow (f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g}, \tilde{g}) = 0$ *perché* $\tilde{g} \in \ker(L)^{\perp}$
$\Rightarrow (f, \tilde{g}) = \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\|g\|^2$
$\Rightarrow (f, \frac{L(\tilde{g})}{\|\tilde{g}\|^2}\tilde{g}) = L(f) \quad \forall f \in H$
se $g_1, g_2 \in H$
tale che $L(f) = (f, g_1) = (f, g_2) \quad \forall f \in H$
$\Rightarrow (f, g_1 - g_2) = 0 \quad \forall f \in H \Rightarrow g_1 = g_2$
Isometria:
$L(f) = (f, g) \ \ f \in H \Rightarrow |L(f)| = |(f, g)| \leq \|f\|\|g\| \Rightarrow \|L\|_{H'} = \sup_{f \in H \setminus \{0\}} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|} \leq \|g\|$
Ma $L(g) = \|g\|^2$
$\Rightarrow \frac{L(g)}{\|g\|} = \|g\|$
$\Rightarrow \|L\|_{H'} = \|g\|$ $\square$

Definizione 2
Un sottoinsieme $S \subset H$
si dice linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è composto da vettori linearmente indipendenti.
Un sottoinsieme S *linearmente indipendente si dice sistema ortogonale se* $(f, g) = 0 \forall f, g \in S$
S *si dice sistema ortonormale se* S *è un sistema ortogonale e* $\|f\| = 1 \ \ \forall f \in S$

Proposizione 2
Sia H *uno spazio di Hilbert separabile e sia* S *un sistema ortonormale di* H
$\Rightarrow S$ *è al più numerabile*

Dimostrazione
$S = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$
$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = (\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \|\varphi_\beta\|^2 + \|\varphi_\beta\|^2 = 2$
$B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha) = \{f \in H \ : \ \|f - phi_\alpha\| < \frac{1}{\sqrt{2}\}}}$
Sia $D \subset H, \bar{D} = H$
D *numerabile*

$D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha) \neq \emptyset} \quad \forall \alpha$
$\forall \alpha \quad \exists \; v_\alpha \in D$

$$S \to D$$
$$\varphi_\alpha \in S \to v_\alpha \in D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)}.$$

è iniettiva $\Rightarrow card(S) \leq cord(D)$ $\square$

Definizione 3
Sia $\{\varphi_k\}$ *un sistema ortonormale numerabile in* H *spazio di Hilbert.*
$\{\varphi_k\}$ *si dice completo (o base hilbertiana) se l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di* $\{\varphi_k\}$ *è denso in* H
(se $\forall f \in H \quad f = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_k \varphi_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$

Teorema 2
Sia H *uno spazio di Hilbert separabile*
$\Rightarrow H$ *ammette un sistema ortonormale completo*

Dimostrazione
Sia $D = \{f_n\}$ *sottoinsieme numerabile e denso*
da D *si tolgano gli elementi che sono della forma* $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{R}$
si ottiene un sottoinsieme di S *linearmente indipendente*
$\Rightarrow D \subseteq < S >$ *insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di* S
$\Rightarrow H = \overline{D} \subseteq \overline{< S >} = H$
S *si ortonormalizza mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Alberto-Agostinelli* *(Gram-Schmidt)*
$\square$

Proposizione 3
Sia H *uno spazio di Hilbert e sia* $\{\varphi_k\}$ *un sistema ortonormale numerabile*
$\forall n \geq 1$ *sia* $M_n =< \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n >= \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ *(sottospazio vettoriale chiuso)*
$\forall f \in H$ *si ha*

$$p_{M_n}(f) \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

e

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\|\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2.$$

Dimostrazione
Siano $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ *e* $f\in H$

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\|^2=(f-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k,f-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k.$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_k\lambda_i(\varphi_k,\varphi_i).$$

$$=\|f\|2-2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2.$$

$$=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^2-2\lambda_k(f,\varphi_k))=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-(f,\varphi_k))^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2$$

.

$$\geq\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2.$$

se $\lambda_k=(f,\varphi_k)\Rightarrow\|f=\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2$ □

Corollario 2 (Disuguaglianza di Bessel)
H spazio di Hilbert $\{\varphi_k\}$ *sistema fondamentale numerabile*
$\Rightarrow f\in H$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(f,f_k)^2\leq\|f\|^2.$$

Dimostrazione
$\forall n$

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2=\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\|^2\geq0.$$

□

Definizione 4

Se $\{\varphi_k\}$ *è un sistema ortonormale, i numeri* (f, φ_k)
si dicono coefficienti di Fourier di f
$\Rightarrow \{(f, \varphi_k)\} \in l^2$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k ? = f.$$

si chiama serie di Fourier di f