Lezione 27 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-13

1 Parte da recuperare in cui ha fatto robe con sfere e spazi proiettivi

Esercizio
Determinare un'queazione cartesiana del piano da $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[1,1,0,1]$ we per i punti impropri delle rette

$$r = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}.$$

$$s = \begin{cases} 2x-y-2x+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}.$$

Il punto improprio di r è $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_0=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_{2x_3}=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow [0,0,-1,-1]$

Per quanto riguarda s

$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+x_0=0 \\ x_2+x_3-x_0=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$

$\Rightarrow [0,1,-2,2]$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

2 Dualità

$\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^\star)$ $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}^V$ poichè $\dim V = \dim V^\star$
Osserviamo che $F, F' \in V^\star$ definiscono lo stesso punto in $\mathbb{P}^V$ se e solo se
$F' = \lambda F \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Ma in questo caso $\ker F = \ker F'$
Ne segue che l'iperpiano $\ker F$ dipende solo da $[F]$ Quindi si ha un'applicazione di dualità

$$\delta : \mathbb{P}^V \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}\}.$$

$$\delta([F]) = \mathbb{P}(\ker F).$$

δ è biunivoca
è iniettiva perché due funzionali non nulli che hanno lo stesso nucleo sono proporzionali.
Inoltre l'iperpiano di V è il nucleo di un funzionale, quindi δ è suriettiva

---

Diciamo che gli iperpiani $H_1, \ldots, H_s$ in $\mathbb{P}$ sono linearmenete indipendenti se lo sono $\delta^{-1}(H_1), \ldots, \delta^{-1}(H_s)$

Sia $\{e_0, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia $\{\eta_0, \ldots, \eta_n\}$ la corrispondente base duale di $V^\star : \eta_i(e_i) = \delta_{e_i}$

$$H \subseteq \mathbb{P}^n \quad a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

$$H = \mathbb{P}(\ker F) \quad F \in V^\star \text{ definita :}$$

$$F(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i.$$

Dove le a_i sono le coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo $\{\eta_0, \ldots, \eta_n\}$
In particolare $H = \delta([F]) \quad H = H[a_0, \ldots, a_n]$
H$_0 = H_0[1, \underline{0}, \ldots, \underline{0}] = \delta([\eta_0]$
$\vdots$
$H_n = H_n[0, \ldots, 0, 1] = \delta([\eta_n])$

Definizione 1
$S \subset \mathbb{P}$ sottospazio, $\dim S = k \leq n-1$

$$\bigwedge_1(S) = \{ \textit{ iperpiani di } \mathbb{P} \textit{ che contengono } S\}.$$

dove $\bigwedge_1(S)$ è il sistema lineare di iperpiain di centro S

Esempi
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^2$ che contengono $Q =$ fascio di rette di centro Q
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{r\}$

$\bigwedge_1(r) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono $r =$ fascio di rette di centro r
$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{Q\}$
$\bigwedge_1(Q) = \{$ iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che contengono $Q =$ stella di rette di centro Q