Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

0.2 Misure

X insieme non vuoto
2^X = insieme delle parti di X = { sottoinsiemi $E \subseteq X$}
$\phi, X \in 2^X = \{\chi : X \to \{0,1\}\}$
$\chi \leftrightarrow E = \{\chi = 1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Definizione 1
Sia X non vuoto. Una misura è una funzione $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ *che soddisfa le due proprietà:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi* $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$
   $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

Commenti:
1) numerabile $\Leftrightarrow$ al più numerabile
$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ possono essere finite: $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
2) Proprietà di monotonia: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
Segue da (ii) prendendo $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \dots$
3) Gli insiemi $\{E_i\}$ non sono necessariamente disgiunti
4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:
$E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Può accadere che $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

---

Esempi di misure:

- La misura che conta: X
  $\mathbb{H}^0 : 2^X \to [0, +\infty]$
  $$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha n elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:
  $X,\ x_0 \in X$
  $\delta_{x_0} : 2^X \to [0, +\infty]$
  $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$

Verifica
δ_{X_0} è una misura
Osservazione
Se X è infinito allora $H^0(X) = +\infty$
Viceversa δ da finire

0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$ misura su X
Osservazione
Possono esistere E, F t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

Definizione 2 (Caratheodory)
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

Commenti:
1) $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

$$E \text{ è misurabile}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

Teorema 1
Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura.

1. *la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra:*
   1) $\emptyset, X \in M$
   2) $E \in M \Rightarrow E^c \in M$
   3) $\{E_i{}_i i \in \mathbb{N}^+ \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$
2. *μ è numerabilmente additiva su M: se $\{E_i\}_{i \in N^+}$ sono disgiunti a coppie ($E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) allora*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Commenti
1) M è chiuso anche per intersezioni numerabili: $E_i \in M$

$$\left(\bigcap_i E_i \right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

2) $\lim sup_{i \to \infty} E_i := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq N} E_i$
$\lim inf_{i \to \infty} E_i := \bigcup_N \in \mathbb{N} \bigcap_{i \geq N} E_i$
Dimostrazione
Passo 1: M è un algebra
$\cdot \emptyset \in M, X \in M$
Vado a verificare che $\forall A \subseteq X$ vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che $(\emptyset) = 0$
Per X :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$
Vado a verificare che per ogni $A \subseteq X$ vale le proprietà di Caratheodory: $\mu(A) = \mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$
$\cdot$ $E_2, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$ *Considero un insieme test $A \subseteq X$:*
$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$

$$1) \quad \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

Passo 2: finita additività di μ in M
$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

Ottenuto sempre per Caratheodory

$$\mu(A \cap E_1) + \cap(A \cap E_2).$$

Iterando questo passaggio:
$E_1, \ldots, E_n \in M$ *allora:*

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Spiegazione passaggio precedente

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^{N} E_i) = \ldots = \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap E_i).$$

Passo 3: mostriamo le proprietà di σ-algebra e numerabile additività
Siano $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$
Consideriamo gli insiemi:
$F_1 := E_1, \qquad F_2 = E_2 \setminus E_1$
$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$
quindi definiamo ricorsivamente: $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1}$
Allora F_i sono disgiunti a coppie

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i =_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$\cdot F_i \in M$
Fissiamo il test di Caratheodory $A \subseteq X$, $F_i \in M$, Passo 1: M algebra

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{N} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i).$$

Usando il passo 2: finita additività

$$= \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i).$$

Passiamo al limite $N \to \infty$

$$\mu(A) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup F_i)$$

$$\geq \mu(A \cap \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$$
$$= \mu(A \cap \textstyle\bigcup^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup^{\infty} E_i)$$
$$\Rightarrow \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

Se prendiamo come test $A =_{i=1}^{\infty} F_i$, *allora* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$
$\Rightarrow \mu(\bigcup^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$ — F_i *sono disgiunti a coppie* $\square$