Lezione 10 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Utilizzo del procedimento di Gram Schmidt

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V, \quad V$ spazio euclideo
$w_1 = v_1$

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1, w_i \neq 0}^{t} \frac{< v_{t+1}, w_i >}{< w_i, w_i >} w_i$$

$< w_1, \dots, w_n > = < v_1, , v_n >$ e i w_i sono a due a due ortogonali

---

Esercizio 1
Applicare il procedimento di $G.S$ ai vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere le corrispondente base ortonormale
Svolgimento
$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{< \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) >}{< \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) >} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{2}{2} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{< \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) >}{< \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) >} - \frac{< \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) >}{< \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) >} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$$

Il procedimento è analogo e banale per w_4.
I vettori della alla fine dello svolgimento sono:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vanno solo normalizzare (fatto dal professore ma non da me)

Eserczio 2
Ortogonalizzare la base standard di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + y_4x_3 + 2x_4y_4.$$

ε base standard i $\mathbb{R}^4$

$$\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Svolgimento
Notare come a_{ij} sia il coefficiente di x_iy_j
$\mathrm{w}_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 = v_2 - \frac{v_2^t A w_1}{w_1^t A w_1}w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Il procedimento continua, ma non è niente di che.

Foglio 2
Esercizio 2

$$p_1, \ldots, p_n \in A, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

Dimostrare che dato qualunque $q \in A$

$$p = q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{op_i}.$$

non dipende da q
$\sum_{i=1}^{n} c_i p_i$ combinazione baricentrica dei punti p_i con coefficienti c_i
Dobbiamo dimostrare che se $q' \in A$

$$q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{q'p_i}.$$

q = q' + $\overrightarrow{q'q}$
$q + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \overrightarrow{q'q} + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{something}$

non sono riuscito a finire l'esericizo in tempo pene pene pene TODO

Punto b dell'esercizio 3
$f : A \to A', \varphi : V \to V'$ parte lineare
Devo vedere che $f(\sum_{i=1}^n c_i p_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i) \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1$

$f(p_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{p_0 p_i}) = f(p_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(\overrightarrow{p_0 pi}) =$

$= f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i f(p_i)$

$= (1 - \sum_{i=1}^{n} c_i) f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)}$

Dove nell'ultimo passaggio si spezza la somma
Viceversa supponiamo che $f : A \to A'$ rispetti le combinazioni baricentriche; verifichiamo che $\varphi : V \to V'$

$$p_0 \in A \quad \varphi(v) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v)}.$$

è lineare
$v_1, v_2 \in V \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \ \ p_1 = p_0 + v_1 \ \ p_2 = p_0 + v_2$
$v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1} \quad v_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$
$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} =$
$\overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \alpha_2 \overrightarrow{p_1 p_2}} =$
$\overrightarrow{f(p_0) f(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2} =$
$= \alpha_0 \overrightarrow{f(p_0) f(p_0)} + \alpha_1 \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{f(p_0) f(p_2)} = \alpha_2 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$

infatti $f(p_1) = f(p_0 + v_1), \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v_1)} = \varphi(v_1)$