

Lezione 6 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-21

1 Teoremi sulla cardinalità dei gruppi

Teorema 1

(G, \cdot) gruppo. Se $|G| = 6$ allora
 $G \cong C_6$ (abeliano) oppure $G \cong D_3$ (non abeliano)

Dimostrazione

Se G contiene un elemento di ordine 6 allora $G \cong C_6$

Se invece G non contiene elementi di ordine 6, per l'esercizio (2) esistono elementi $r, s \in G$ t.c. $\text{ord}(r) = 3$ e $\text{ord}(s) = 2$

Definisco:

$$G := \langle r \rangle = \{e, r, r^2\} \quad k := \langle s \rangle = \{e, s\}.$$

$$H \cap K = \{e\}.$$

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 6 = |KH|.$$

$$\Rightarrow HK = G = KH$$

Esplicitamente:

$$HK = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$$

$$KH = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

Dobbiamo considerare 2 casi:

I caso: $rs = sr$

studiamo $\text{ord}(rs)$

$$(rs)^2 = r^2s^2 = r^2 \neq e \Rightarrow \text{ord}(rs) \neq 2$$

$$(rs)^3 = r^3s^3 = s^3 = s \neq e$$

Per Lagrange

necessariamente $\text{ord}(rs) = 6$

$\Rightarrow G$ è ciclico \Rightarrow Assurdo

$$\text{II caso: } \begin{cases} rs = sr^2 \\ r^2s = sr \end{cases}$$

Costruiamo l'isomorfismo

$$G \rightarrow D_3 := \langle \rho, \sigma \rangle$$

$$e \rightarrow Id$$

$$r \rightarrow \rho$$

$$r^2 \rightarrow \rho^2$$

$$s \rightarrow \sigma$$

$$sr \rightarrow \sigma\rho$$

□

Definizione 1

Dato un gruppo (G, \cdot) il reticolo dei sottogruppi T_G è un grafo definito come

- esiste un vertice in T_G per ogni sottogruppo $H \leq G$
- esiste un lato $H_1 - H_2$ se e solo se $H_1 \subseteq H_2$
e $\nexists K \leq G$ t.c. $H_1 \subset K \subset H_2$

Esempio:

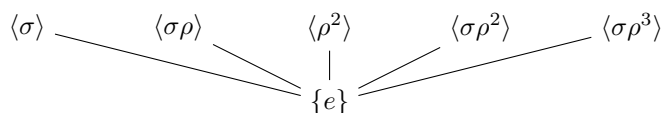
T_{D_4}

Ricordiamo che $D_4 = \langle \sigma, \rho \rangle \quad |D_4| = 8$

studiamo i sottogruppi di D_4

ordine 1: L'unico sottogruppo è $H = \{e\}$

ordine 2: Sono tutti e soli quelli generati da un elemento di ordine 2 in D_4

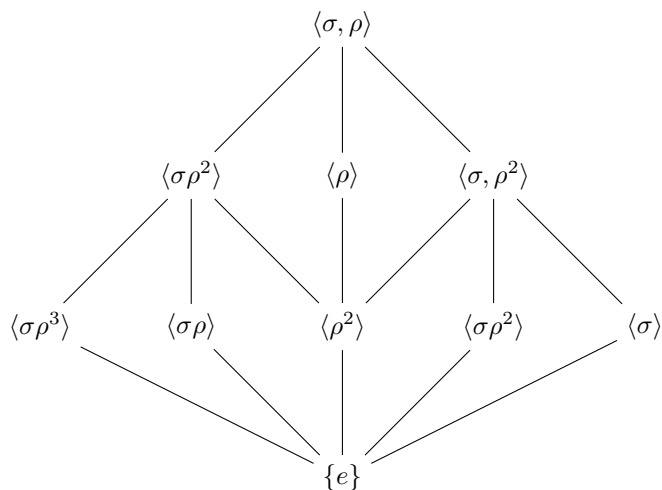


ordine 4: per la classificazione sono ciclici (C_4) oppure di Klein (K_4) oltre al ciclico $\langle p \rangle$ esistono altri sottogruppi

$$\langle \rho^2, \sigma \rangle = \{e, \sigma, \rho^2, \sigma \rho^2\}.$$

$$\langle \rho^2, \sigma \rho \rangle = \{e, \sigma \rho, \rho^2, \sigma \rho^3\}.$$

Ordine 8: D_4



Esempio:

$$G = D_4$$

$$N = \langle \rho^2 \rangle \trianglelefteq G$$

Vogliamo $T_{G/N}$

studiamo $G/N = D_4 / \langle \rho^2 \rangle$

$$|G/N| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|} = \frac{8}{2} = 4$$

chi sono i laterali?

$$IdN = N \cap \langle \rho^2 \rangle = \{Id, \rho^2\}$$

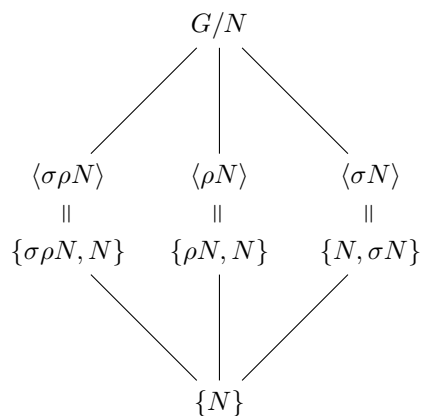
$$\rho N = \{\rho, \rho^3\}$$

$$\sigma N = \{\sigma, \sigma\rho^2\}$$

$$\sigma\rho N = \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}$$

Ricordo:

Abbiamo una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G/N e i sottogruppi di G contenenti N .

**Obiettivo: studiare S_n** **Ricordo:**

$$X := \{1, \dots, n\}$$

$$S_n := S_X = \{ \text{applicazioni biunivoche } X \rightarrow X \}$$

S_n gruppo di permutazioni

Osservazione:

$$|S_n| = n!$$

Osservazione:

$$\text{se } n = 3 \rightarrow |S_3| = 6$$

$$\Rightarrow S_3 \cong D_3$$

Osservazione

$$S_n \cong D_n \quad \forall n \geq 4$$

$$\text{Infatti } n! > 2n \quad \forall n \geq 4$$

2 Notazioni in S_n

$$\sigma = (123)(47)$$

$$\tau = (23456)$$

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau = (123)(46)(23456)(12)(36)(45)$$

$$\tau \circ \sigma = (23456)(123)(46) = (13)(24)(56)$$

Lemma 1

Data $\sigma \in S_n$ allora σ partizione $X = \{1, \dots, n\}$ in sottoinsiemi permutati ciclicamente e disgiunti tra loro

Dimostrazione

Definiamo la relazione d'equivalenza $i \sim j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \sigma^k(i) = j$

È una relazione d'equivalenza!

studiamo le classi di equivalenza

fissato $i \in X$

la sua classe

$$X_i = \{\sigma^k(i) | k \in \mathbb{Z}\} \subseteq X.$$

quindi $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ distinti t.c. $\sigma^{k_1}(i) = \sigma^{k_2}(i)$

$$\Rightarrow i = \sigma^{k_2 - k_1}(i)$$

$$\Rightarrow m := \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | \sigma^k(i) = i\}$$

$$\Rightarrow X_i = \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m-1}(i)\}$$

□

Proposizione 1

Data $\sigma \in S_n$, allora σ può essere rappresentata come composizione di cicli disgiunti

Obiettivo: Definire un omomorfismo

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot).$$

Questo ci permetterà di definire il sottogruppo alterno $A_n \trianglelefteq S_n$

$$A_n := \ker(\text{sgn})$$

Notazione 1

Dato un polinomio

$$f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

e data $\sigma \in S_n$

Definiamo

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Ci sta un polinomio speciale:

- $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$
- $\Delta^\sigma(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$

Definizione 2

$$\sigma \in S_n$$

$$\text{sgn}(\sigma) := \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \in \{\pm 1\}$$

Osservazione

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

è un omomorfismo

Dimostrazione

In generale

$$(f^\sigma)^\tau = f^{\sigma\tau}$$

$$(fg)^\sigma = f^\sigma g^\sigma$$

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \frac{\Delta^{\sigma\tau}}{\Delta} = \frac{(\Delta^\sigma)^\tau}{\Delta} = \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \frac{(\Delta^\sigma)^\tau}{\Delta^\sigma} = \text{sgn}(\sigma) \frac{\Delta^\tau}{\Delta} = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \quad \square$$