Lezione 14 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-04

1 Precisazione

Siano S, T sottospazi affini in uno spazio euclideo δ di dimensione n. Diciamo che S, T sono ortogonali se, posto $S = p + U, \quad T = q + W, \quad p \in S, q \in T$
U, W sottospazi vettoriali di V,

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad \text{se } dim(S) + dim(T) < n.$$

$$\langle U^{\perp}, W^{\perp} \rangle = 0 \quad \text{se } dim(S) + dim(T) \geq n.$$

Esempi
1. Due rette r, s in $\mathbb{E}^3$ con vettori direttori v_s, v_r
COMPLETARE CON DISEGNI
2. retta e piano in $\mathbb{E}^3$
COMPLETARE CON DISEGNI
3. due piani in $\mathbb{E}^3$
COMPLETARE CON DISEGNI
sarò sincero, non si capisce un cazzo

2 Esercizi foglio 4

es 3

$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad r' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Posizione reciproca
La direzione di r è $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quella di $r' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Essendo tali vettori indipendenti, le rette non sono parallele
$p' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in r', \quad O \in r$
$\overrightarrow{Op'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$
quindi r, r' sono sghembi
$S = \pi \cap \pi' \quad \pi$ piano per r parallelo a $v \wedge v'$
π' piano per r' parallelo a $v \wedge v'$

$$v \wedge v' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v \wedge v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi' : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

trasformiamo in coordinate cartesiane
$\pi \rightarrow det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$

analogo per π'
es 4
proiezione ortogonale su π
simmetria ortogonale di asse π

$$\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0.$$

vettore normale a π $\quad P_0 \in \pi$
$p(P) = P_0 + \widetilde{p}(\overrightarrow{p_0p})$
$\sigma(P) = P_0 + \widetilde{\sigma}(\overrightarrow{p_0p})$
scelgo $p_0 \in \pi$ $\qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
W giacitura di $\pi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$
Dobbiamo decomporre $\overrightarrow{P_0P}$ rispetto a $W \oplus W^\perp \quad W^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Questo poi è solo un sistema noioso da risolvere

$$p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\text{ guarda le lavagnate, è un super vettore}).$$

sulle lavagnate trovi anche il risultato della simmetria ma non lo svoglimento
es 5