

Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello

3 esoneri

Con le prove diesonero possiamo essere esonerati dall'orale.

Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.

L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.

La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale

Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistematizzazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).

Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiattata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).

Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIIIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.

Parliamo ora di modelli "ondulosi"

Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori

$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \rightarrow u(x, t)$

Equazione della corda vibrante:
$$\begin{cases} \partial^2 u / \partial t^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = h_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h_1(x) \quad \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:

$$u(x, t) = \psi(t)\phi(x) \text{ variabili separate}$$

- sovrapposizione:

$$u_1, u_2 \text{ soluzioni} \Rightarrow u_1 + u_2 \text{ soluzione}$$

1.5 Onde stazionarie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \\ \Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \text{costante} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \end{aligned}$$

Spiegazione:

$$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$$

$$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}$$

$$\phi(x) = A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))(A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx))$$

$$\Rightarrow u(0, t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$$

$$(u(\pi, t) = 0 = \psi_m(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow u(x, t) = (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$ Tutti gli m interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx). \end{aligned}$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$

Condizioni Iniziali:

$$u(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x, \pi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$$

Come trovare α_m, β_m

$$\rightarrow \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^\pi h_0(x) \sin(mx) dx = \int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \alpha_m \text{ (coefficienti di Fourier)}$$

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:

La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.

Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

ma $D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, f_n Riemann integrabile.

Numeriamo $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n \in N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre:

$D(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\lim_{j \rightarrow +\infty} \cos(k! \pi x)^{2j})$ Esercizio "facile"

Esercizio difficile:

non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro

Esempio:

$C([0, 1]) \ni f, g$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\|f - g\|_1 = \dots$$

$(C([0, 1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)

$\|f_m - f_n\|_1 \rightarrow 0$ se $n, m \rightarrow +\infty$

$$f_n \rightarrow f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Teorema 1

Il completamento di $(C[0, 1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili secondo Lebesgue

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in \mathbb{R}^n)

Stabilire la misura è come definire un integrale.

$$|E| = \int X_E$$

Prerequisiti:

1. $|[a, b]| = b - a$
 $|[a, b] \times [c, d]| = (d - c) \cdot (b - a)$
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

3. $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$
 3' $\forall E \quad \forall \sigma \text{ isometria} \quad |E| = |\sigma(E)|$

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski)
in \mathbb{R}^3 non esiste nessunna funzione che soddisfa 1,2 e 3.

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \dots \cup A_5.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Troviamo $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ t.c.

$\sigma_1(A_1) \cup \dots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)

Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

Assioma 1 (della scelta)

Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possibile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_x

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Lezione 02

Federico De Sisti

2025-02-28

0.1 Prima scheda informazioni

parte da recuperare

0.2 Misure

X insieme non vuoto

2^X = insieme delle parti di X = { sottoinsiemi $E \subseteq X$ }

$\phi, X \in 2^X = \{\chi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$

$\chi \leftrightarrow E = \{\chi = 1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

Definizione 1

Sia X non vuoto. Una misura è una funzione $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ che soddisfa le due proprietà:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi $E, \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq X$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

La seconda proprietà viene chiamata sub-additività numerabile

Commenti:

1) numerabile \Leftrightarrow al più numerabile

$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ possono essere finite: $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

2) Proprietà di monotonia: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$

Segue da (ii) prendendo $E_1 = F, E_2 = \emptyset, E_3 = \emptyset, \dots$

3) Gli insiemi $\{E_i\}$ non sono necessariamente disgiunti

4) In generale in (ii) non vale l'uguaglianza neanche se:

$E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Può accadere che $E \cap F = \emptyset$

$$\mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

5) Comunemente quello che noi chiamiamo misura sono dette misure esterne

Esempi di misure:

- La misura che conta: X

$$\mathbb{H}^0 : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mathbb{H}^0(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ n & E \text{ ha } n \text{ elementi} \\ +\infty & E \text{ infinito} \end{cases}$$

- Misura delta di Dirac:

$$X, x_0 \in X$$

$$\delta_{x_0} : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

Verifica

δ_{X_0} è una misura

Osservazione

Se X è infinito allora $H^0(X) = +\infty$

Viceversa δ da finire

0.3 Insiemi misurabili

$X \neq \emptyset, \mu$ misura su X

Osservazione

Possono esistere E, F t.c.

$$E \cap F = \emptyset \text{ ma } \mu(E \cup F) < \mu(E) + \mu(F).$$

Definizione 2 (Caratheodory)

Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura su X

Un insieme $E \subseteq X$ si dice misurabile se vale:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subseteq X.$$

Commenti:

1) $A = X$

$$\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c).$$

2) Vale sempre

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

E è misurabile

\Updownarrow

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

Teorema 1

Sia $X \neq \emptyset$ e μ misura.

1. la classe degli insiemi misurabili è una σ -algebra:

$$1) \emptyset, X \in M$$

$$2) E \in M \Rightarrow E^c \in M$$

$$3) \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$$

2. μ è numerabilmente additiva su M : se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ sono disgiunti a coppie ($E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) allora

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Commenti

1) M è chiuso anche per intersezioni numerabili: $E_i \in M$

$$\left(\bigcap_i E_i \right)^c = \bigcup_i E_i^c \in M \Rightarrow \bigcap_i E_i \in M.$$

2) $\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq N} E_i$
 $\liminf_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geq N} E_i$

Dimostrazione

Passo 1: M è un algebra

$\cdot \emptyset \in M, X \in M$

Vado a verificare che $\forall A \subseteq X$ vale

$$\mu(A) = \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

dove sappiamo che $(\emptyset) = 0$

Per X :

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

$\cdot E \in M \Rightarrow E^c \in M$

Vado a verificare che per ogni $A \subseteq X$ vale le proprietà di Caratheodory: $\mu(A) = \mu(A \cap E^c) + \mu(A \setminus E^c) = \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E)$

$\cdot E_1, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$ Considero un insieme test $A \subseteq X$:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$1) \quad \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \setminus E_1)$$

$$\mu(A \cap E_1) + \mu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((A \setminus E_1) \setminus E_2)$$

il risultato è ottenuto applicando Caratheodory al secondo termine della somma (1)

$$\geq \mu((A \cap E_1) \cup (A \setminus E_1) \cap E_2) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in M$$

Passo 2: finita additività di μ in M

$E_1, E_2 \in M, E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2) \setminus E_1)$$

Ottenuto sempre per Caratheodory

$$\mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2).$$

Iterando questo passaggio:

$E_1, \dots, E_n \in M$ allora:

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

Spiegazione passaggio precedente

$$\mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap \bigcup_{i=2}^N E_i) = \dots = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap E_i).$$

Passo 3: mostriamo le proprietà di σ -algebra e numerabile additività

Siano $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subseteq M$

Consideriamo gli insiemi:

$$F_1 := E_1, \quad F_2 = E_2 \setminus E_1$$

$$F_3 := E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$$

quindi definiamo ricorsivamente: $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$

Allora F_i sono disgiunti a coppie

$$(F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j).$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

$$\cdot F_i \in M$$

Fissiamo il test di Caratheodory $A \subseteq X, F_i \in M$, Passo 1: M algebra

$$\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^N F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i).$$

Usando il passo 2: finita additività

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i). \end{aligned}$$

Passiamo al limite $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&\geq \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&= \mu(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M
\end{aligned}$$

Se prendiamo come test $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, *allora* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$
 $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) — F_i$ sono disgiunti a coppie \square

Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebegque

1.1 Porprietà dellle afunzioen lunghezza di intervalli

I intervallo in \mathbb{R}

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ \sup I - \inf I & (b-a) \quad \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$$\emptyset = (a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) - \{x\} = [x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà:

1. $|\emptyset| = 0$

2. monotonia

$$I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$$

3. finita additività

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad I_i \text{ interevallo}$$

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Nota

se I illimitato

$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n$ tale che I_i illimitato

$$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{i=1}^n |I_k|$$

Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \dots, n$

$$|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

4. I intervallo

$$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]|$$

$$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1]| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1]|$$

Nota

Se I illimitato

$\Rightarrow I \cap [n, n+1] = [n, n+1]$ per infiniti indici $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]|$ per infiniti n

Se I limitato

$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^k I \cap [n, n+1]$ per $l, k \in \mathbb{Z}$

5. Numerabile subadditività

Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione 5.

Si può assumere I_i limitato $\forall i$

1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$

$$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$$

I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto

$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.

si può supporre che $a_1 < a < b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Reiterando trovo l'aperto contenente a_1 , se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.

abbiamo quindi rinumerato I_1, \dots, I_n in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |I| = \sum_{i=1}^n b_i - a_i = b_1 - a_1 + \dots + b_n - a_n$$

notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati

$\forall \varepsilon > 0 \exists I^\varepsilon$ chiuso, $I^\varepsilon \subset I$ tale che $|I^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I|$

$\forall i \exists I_i^\varepsilon$ aperto tale che $I_i \subset I_i^\varepsilon$ e $|\sum_i^\varepsilon| = (1 - \varepsilon)|I_i|$

$$I^\varepsilon \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^\varepsilon$$

$$I = \frac{1}{1-\varepsilon}|I^\varepsilon| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^\varepsilon| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1])$$

Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati

per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I \cap [n, n+1]|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Dimostrazione

$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ vero per la 5)

Ci basta dimostrare l'altro verso della diseguaglianza

se I limitato, (con estremi $a < b$)

$\forall k \geq 1$ consideriamo I_1, I_2, \dots, I_k sono contenuti in I e disgiunti

questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$

$$\sum_{i=1}^k \leq b - a$$

$$\sum_{i=1}^k |I_i| = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

$$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \dots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$$

per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^k |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I illimitato

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$$I \cap [n, n+1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1]$$

$$\Rightarrow |I \cap [n, n+1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]|$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1]| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

□

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$

$I + x$ traslato di I

$$|I + x| = |I|$$

(invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli} \right\}.$$

$$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

Osservazione

Se $D \subset \mathbb{R}$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili

2) Per definire m si usano ricoprimeti numerabili ma anche i ricoprimeti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimeti finiti o ricoprimeti numerabili

$$E \subseteq \mathbb{R}$$

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervalli}\}$$

La disegualanza può essere stretta

Esempio

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$

Sia $\{I_1, \dots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq 1$$

Infatti

$$R = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \Rightarrow [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$$

$$\Rightarrow [0, 1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$$

$$\leq \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \bigcup_{i=1}^n \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0, 1]| \leq \sum_{i=1}^n |\overline{I_i}| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo} \right\} \geq 1 \text{ ma } E \subseteq [0, 1]$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{i=1}^n |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i \text{ intervallo} \right\} \leq 1$$

Se avessi ricoprimeti finiti \mathbb{Q} avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimeti infiniti.

Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Misura di Lesbegue

Reminderi (misura di Lesbegue)

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : |I_i| \text{ intervalli } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right.$$

Proposizione 1

- 1) $m(\emptyset) = 0$
- 2) $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
- 3) subadditività numerabile, $\{E_i\}$ successione di insiemi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

- 4) $\forall I$ intervallo $m(I) = |I|$
- 5) $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E+x) = m(E)$

Dimostrazione

- 1) $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ dato che l'insieme vuoto è un intervallo
- 2) $\forall \{I_i\}$ intervalli tale che $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$ è un ricoprimento anche di $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ prendendo l'inf rispetto a $\{I_i\}$ $m(E) \leq m(F)$
- 3) Se $\exists i$ tale che $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$ tesi ovvia
possiamo supporre $m(E_i) < +\infty \quad \forall i > 1$
Dato $\varepsilon > 0 \exists \{I_k^i\}_k$ intervalli tali che $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ e

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$ successione di intervalli
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$
 quindi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $E = I$ $m(E) \leq |I|$ scegliendo I stesso come sottoricoprimento
 $\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ per la numerabile additività di } | |.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5) $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
 $\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i + x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$
sappiamo che $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$$

□

Osservazione

È vero che se $\{E_i\}$ successione di insiemi disgiunti $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.

Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \dots + m(E_n).$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j \Rightarrow$ sarebbe vera anche la finita additività.
Infatti

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \quad \text{sempre vero per subadditività.}$$

$$\begin{aligned} & \text{Se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \text{ e } \forall k \geq 1 \quad m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) \\ & \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \end{aligned}$$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di E_1 che di E_2 quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_{I \cap E_2} |I_i| + \sum_{I \cap E_2} |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se I_1, \dots, I_n intervalli, $I_i \cap I_j = \emptyset$ per $i \neq j$
 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^n |I_i|$

Si può supporre gli I_i limitati (sennò misura è infinita)

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i$$

$$\begin{aligned} m(I) &= |I| = \sum_{i=1}^n |I_i| + \sum_{i=n+1}^{i=1} |J_i| \geq m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) + m\left(\bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i\right) \\ &\leq m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{i=1} J_i\right) = m(I). \end{aligned}$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| = m\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right).$$

se I_i intervalli con $I_i \cap I_j = \emptyset$ $i \neq j$

Definizione 1

Se X un insieme non vuoto, Una misura su X è una funzione

$$\mu : P(x) \rightarrow [0, +\infty].$$

tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. (monotonìa) $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
3. (subadditività) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$
- 2.+3. $\Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Esempi di misura

1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty).$$

$$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \quad \text{difatti:}$$

- $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$

- se $E \subseteq F$ se $x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$

se $x_0 \in E \rightarrow x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \exists i, \text{ t.c. } x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$

2) misura "che conta"

$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E \text{ se } E \text{ è finito} \\ +\infty \quad \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} .$$

Esempio di insieme di misura di Lesbegue nulla

Non misurabile, insieme di Cantor

Al passo $n = 1, I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi J e rimuovendo gli intervalli centrali.

C_n è un insieme di 2^n intervalli chiusi, disgiunti, ognuno di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

C_n è alternato da C_{n-1} rimuovendo 2^{n-1} intervalli aperti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definita da $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$

$$m(C) \leq m(C_n) = m\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n\right) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\forall x \in [0, 1]$

si scrive nella forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}$

$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \dots + \frac{x_i}{3^i} + \dots$

Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Qui manca la parte precedente della lezione

$f s.c.i \Leftrightarrow f^{-1}(a, +\infty)$ aperto $\forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

$(\Rightarrow) f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$
 $c^- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) > a$ per
 δ sufficientemente piccolo

$\Rightarrow f(x) > a$ per $|x - x_0| < \delta$
 $\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$
 $\Rightarrow \{f > a\}$ aperto

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R} \quad \forall a < f(x_0) \quad x_0 \in \{f > a\}$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 $\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) > a$
 $\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a \quad \forall a < f(x_0)$
 $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$
 $\Rightarrow f \text{ s.c.i}$

□

Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Insieme di Vitali

Controesempio all'additività di m

Insieme di Vitali

In \mathbb{R} consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia $[x]$ la classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

V insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in $[0, 1]$ da ogni classe d'equivalenza. $V \subseteq [0, 1]$, $x \in V$

$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V$ tale che $x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q$ dove $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$

Quindi abbiamo dimostrato

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \subseteq [-1, 2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti

siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

se $V + q_1 \cap V + q_2 \neq$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che $x_1 \sim x_2$ che è assurdo dato che in V prendiamo solo un rappresentante per ogni classe di equivalenza.

Ciò vuol dire che $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]}$ è unione numerabile di insiemi disgiunti

Vediamo la misura di questo insieme

$$m([0, 1]) = 1 \leq m \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \right) \text{ per monotonia}$$

Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V + q). \\ &= \sum m(V) \leq m([-1, 2]) = 3. \end{aligned}$$

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V) \leq 3$$

Però le due diseguaglianze indicano che $m(V) > 0$ e $m(V) = 0$ (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di \mathbb{R} ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

Definizione 1 (Caratheodory)

X insieme non vuoto μ misura su X

Un insieme $E \subseteq X$ si dice μ -misurabile se $\forall F \subseteq X$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero E spezza additivamente ogni altro insieme

Osservazione

1. $E \subseteq X$ è μ misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$
perché \geq è sempre vero per la subadditività
Quindi si può anche supporre $\mu(F) < +\infty$
2. La definizione di misurabilità è simmetrica per E e $E^c = X \setminus E$, E misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$
che è la misura che dovrei testare per E^c
Quindi E è μ -misurabile $\Leftrightarrow E^c$ è μ -misurabile
3. Se $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$ è μ -misurabile.
 $\forall F \subseteq X$
 $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F) \Rightarrow E$ è μ -misurabile.

Indicheremo con η_μ la classe dei sottoinsiemi μ -misurabili
 $\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \text{ } \mu\text{-misurabile}\} = \{\emptyset, X, \dots\}$

Teorema 1

Sia μ una misura su X , η_μ la classe degli insiemi μ -misurabili, Allora:

1. se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ tale che $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
tale che $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \dots$
 $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$
4. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\nu$
tale che $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \dots$
e $\mu(E_1) < +\infty$
 $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$

Dimostrazione

Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \text{ th: } E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$$\forall F \subseteq X$$

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1 \cap E_2) + (F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \\ &\mu(F \cap E_1 \cup (F \setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

per subadditività

Induttivamente:

$$\text{se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$$

$$\text{Se } E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \dots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i^c \in \eta_\mu \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^k E_i^c)^c \in \eta_\mu$$

Secondo passo finita additività:

$$E_1, \dots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \dots, E_k \text{ disgiunti}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i \cap E_k\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)$$

terzo passo: Numerabile additività

$$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Osserviamo che $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu$, disgiunti

$$F \subseteq X$$

$$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F \cap E_i\right)$$

$$\begin{aligned}
& e \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(F \cap E_i) \\
& \text{quarto passo} \\
& \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \eta_\mu \\
& E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \\
& \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i) \\
& \bigcup_{i=1}^k E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_{... \cup 2 \setminus E_2 ... \cup E_k \setminus E_{k-1}} \\
& \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E_i - iE_{i-1} \\
& \{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i \geq 2} \\
& \text{successione di insiemi disgiunti e misurabili.} \\
& E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i-1})^c \\
& \text{per il passo 3} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) \\
& = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})) \\
& E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1} \\
& \Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1}) \\
& \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^k (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})). \\
& = \mu(E_2) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(E_2) - \mu(E_1) + \mu(E_3) - \mu(E_2) + \dots + \mu(E_k) - \mu(E_{k-1})).
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
& \text{se } E_1 \subseteq \dots \quad \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \\
& \forall F \subseteq X \\
& \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(F \cap E_i) \\
& \text{Quinto passo} \\
& \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \eta_\mu \\
& E_2 \supseteq E_2 \supseteq \dots \quad \mu(E_1) < +\infty \\
& E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \dots \\
& \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(E_i). \text{ sesto passo} \\
& \{E_i\} \subset \eta_\mu \\
& \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu \\
& \forall F \subseteq X \\
& \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k) \\
& B_j = \bigcup_{i=1}^k E_i \\
& B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \\
& \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \\
& \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(F \setminus B_k) \\
& = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)
\end{aligned}$$

□

Lezione 07 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 σ -algebra

Definizione 1

X insieme non vuoto, Una famiglia $\eta \subseteq P(X)$ si dice σ -algebra su X se

1. $\emptyset, X \in \eta$
2. $E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta$
3. $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

Osservazione

Se η è σ -algebra e $\{E_i\} \subseteq \eta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta$

$$\begin{aligned} E_i \in \eta &\rightarrow E_i^c \in \eta \quad \forall i \\ \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c \in \eta &\Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c)^c \in \eta \end{aligned}$$

Una misura individua una σ -algebra

In generale

se μ è una misura su X

$$\eta_\mu = \{R \subseteq X : E \text{ e } \mu - \text{misurabile}\}.$$

è una σ -algebra

In particolare in \mathbb{R} c'è la σ -algebra di Lesbegue = famiglia degli insiemi misurabili secondo Lesbegue

Definizione 2

Sia X un insieme non vuoto e sia $F \subset P(X)$ si chiama σ -algebra generata da F la σ -algebra data da

$$\Sigma_F = \bigcap_{\substack{\eta \text{ è } \sigma\text{-algebra} \\ F \subseteq \eta}} \eta.$$

la più piccola σ -algebra che contiene F

Definizione 3

Se (X, τ) è uno spazio topologico la σ -algebra generata da τ si dice σ -algebra di Borel

Vogliamo ora indagare sulla σ -algebra di Lesbegue in \mathbb{R} $\eta_m = \eta$

Proposizione 1

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo

$\Rightarrow I \in \eta$ (è misurabile secondo Lesbegue)

Dimostrazione

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $\Rightarrow \forall F \subseteq \mathbb{R} \ m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ **Primo caso**

Supponiamo $I = (a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

Sia $F \subseteq \mathbb{R}$, con $m(F) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ e $m(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < m(F) + \varepsilon$

$$\begin{aligned} m(F) + \varepsilon &> \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} (|I_i \cap I| + |I \setminus I_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \cap I| + \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i \setminus I| \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I). \end{aligned}$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $m(F) \geq m(F \cap I) + m(F \setminus I)$ $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ $|I_i| = \beta_i - \alpha_i = \beta_i - a + a - \alpha_i = |I_i \cap I| + |I_i \setminus I|$

$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$

$F \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \cap I)$

$F \setminus I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i \setminus I)$

Quindi:

Intervalli del tipo $I = (a, +\infty) \in \eta \rightarrow I = (-\infty, a] \in \eta$

$\rightarrow (a, b] \in \eta$

$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \in \eta$

$\Rightarrow (-\infty, a) \in \eta$

$\Rightarrow (a, b) \in \eta$

\Rightarrow vale anche per gli intervalli chiusi

tutti gli intervalli sono misurabili, quindi anche tutti gli aperti. \square

Teorema 1

Ogni aperto $a \subseteq \mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti

Corollario 1

σ -algebra di Borel in $\mathbb{R} = \beta \subseteq \eta = \sigma$ -algebra di Lesbegue

L'inclusione può essere stretta perché F insieme misurabili con Lesbegue e non con Borel

Quindi in \mathbb{R} si ha:

$B \subseteq \eta \subsetneq P(\mathbb{R})$, che è stretta perché come controesempio abbiamo l'insieme di Vitali perché non vale l'additività $V \in P(\mathbb{R}) \setminus \eta$

Teorema 2 (Caratterizzazione sui misurabili secondo Lesbegue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti

1. $E \in \eta$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c. $E \subseteq A_\varepsilon$ e $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

3. $\exists F \in B$ (F è intersezione numerabile di aperti) tali che $E \subseteq F$ e $m(F \setminus E) = 0$
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$ chiuso tale che $C_\varepsilon \subseteq E$ e $m(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$
5. $\exists G \in B$ (G è unione numerabile di chiusi) tale che $G \subseteq E$ e $m(E \setminus G) = 0$

Dimostrazione

1) \Rightarrow 2)

Hp $E \in \eta$

Primo caso: $m(E) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}$ successione di intervalli aperti tali che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i^\varepsilon$ (l'insieme A_ε aperto) e $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| < m(E) + \varepsilon$

$E \in \eta \Rightarrow m(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \cap E) + m(A_\varepsilon \setminus E) =$

$= m(E) + m(A_\varepsilon \setminus E)$

$\Rightarrow m(A_\varepsilon) - m(E) = m(A_\varepsilon \setminus E)$

quindi

$(A_\varepsilon \setminus E) = m(A_\varepsilon) - m(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i^\varepsilon) - m(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^\varepsilon| - m(E) < \varepsilon -$

Secondo caso: $m(E) = +\infty$

$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap (-n, n)$

$E \in \eta \Rightarrow \forall n E \cap (-n, n) = E_n \in \eta, \eta(E_n) < +\infty$

applicando il primo caso

$\forall n, \forall \varepsilon$

$\exists A_n^\varepsilon$ aperto tale che $A_n^\varepsilon \supseteq E_n$ e $m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) < \varepsilon$

$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = E$

$m(A_\varepsilon \setminus E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E)\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n^\varepsilon \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n^\varepsilon \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$

Se è misurabile c'è un aperto che lo contiene e la misura della differenza è finita

2) \Rightarrow 3)

Hp $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon$ aperto, $A_\varepsilon \supseteq E$ e $m(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$

Th $\exists F \in B$ tale che $F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) = 0$

Per $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1 \exists A_n$ aperto t.c. $A_n \supseteq E$ e $m(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$

$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in B$, $F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) \leq m(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n \rightarrow +\infty m(F \setminus E) = 0$

3) \Rightarrow 1)

Hp $\exists F \in B : F \supseteq E$ e $m(F \setminus E) = 0$

$E = F(F \setminus E) = F \cap (F \setminus E)^c \in \eta$

1) \Rightarrow 4)

$E \in \eta \Rightarrow E^c \in \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ aperto

tale che $A_\varepsilon \supseteq E^c$ e $m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

$C_\varepsilon = A_\varepsilon^c$ è chiuso

$E^c \subseteq A_\varepsilon \Rightarrow E \supseteq A_\varepsilon^c = C_\varepsilon$

$m(E \setminus C_\varepsilon) = m(E \cap C^c) = m(E \cap A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$

4) \Rightarrow 5)

Per $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists C_n$ chiuso, $C_n \subseteq E$ tale che $m(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in B, \quad G \subseteq E.$$

$$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

per $n \rightarrow +\infty m(E \setminus G) = 0$

□

5) \Rightarrow 1)

Hp: $\exists G \in B$ tale che $G \subseteq E$ e $m(E \setminus G) = 0$

$\Rightarrow E = G \cup (E \setminus G) \in \eta$ perché unione di misurabili

Lezione 8 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Approccio agli integrali di Lesbegue

La somma infinitesima viene fatta orizzontalmente piuttosto che verticalmente.

Definizione 1

Sia X un insieme non vuoto e η una σ -algebra in X .

((X, η) spazio misurabile)

Sia X uno spazio topologico,

una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice misurabile se $f^{-1}(A) \in \eta \quad \forall A \subseteq Y \text{ aperto}$

Esempi

1) se $\eta = P(X) \Rightarrow$ ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ è misurabile

Se $\eta = \{\emptyset, X\} \Rightarrow f : X \rightarrow Y$ è η -misurabile $\Leftrightarrow f$ è costante.

2) Se X è spazio topologico e se $\eta \supseteq B(\text{Borel})$

$f : X \rightarrow Y$ continua $\Rightarrow f$ misurabile

3) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$f(x) = \gamma_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$E \subseteq X$

$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 0, 1 \in A \\ E^c & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A \end{cases} \in \eta \Leftrightarrow E \in \eta$$

Proposizione 1

Se (X, η) spazio misurabile e $f : X \rightarrow Y$

$\Rightarrow \{F \subseteq Y : f^{-1}(F) \in \eta\} = S$ è una σ -algebra in Y

di conseguenza se Y è uno spazio topologico e f è η -misurabile

allora $f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \in B_Y$

Dimostrazione

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \eta \Rightarrow \emptyset \in S$$

$$f^{-1}(Y) = X \Rightarrow Y \in S$$

$$F \in S \text{ ovvero } f^{-1}(F) \in \eta$$

$$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F)^c \in \eta \Rightarrow F^c \in S$$

Facciamo vedere che S è chiusa per le unioni numerabili e abbiamo finito.

$$\{F_i\} \subset S \text{ ovvero } f^{-1}(F_i) = \eta \quad \forall_i$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(F_i) \in \eta = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \in S$$

□

Proposizione 2

Sia (X, η) uno spazio misurabile $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Allora f è misurabile se e solo se

$$\begin{aligned} & \{x \in X : f(x) > t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) \geq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) < t\} \in \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \{x \in X : f(x) \leq t\} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} f \text{ è misurabile} & \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \eta \quad \forall B \subseteq \mathbb{R} \text{ boreiano} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}([t, +\infty)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t)) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, t]) \in \eta \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Proposizione 3

Sia (X, η) uno spazio misurabile

1. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili
 $\Rightarrow f + g, \lambda f \quad \lambda \in \mathbb{R}, f \cdot g, \frac{f}{g} \quad \text{se } g \neq 0, |f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ sono misurabili
2. Se $\{f_k\}$ successione di funzioni misurabili
 $\Rightarrow \sup_k f_k, \inf f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ sono misurabili
In particolare, se $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow f$ è misurabile

Dimostrazione

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili

$$t \in \mathbb{R} \quad \{f + g > t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r+s=t}} \{f > r\} \cap \{g > s\} \in \eta \text{ perch\'e } f, g \text{ misurabili}$$

se x tale che $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > t - g(x)$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) > r > t - g(x)$

quindi $g(x) > t - r \rightarrow s \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) > s > t - r$

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ numerabili, $\lambda \in \mathbb{R}, f$ misurabile

$$\Rightarrow \{f > t'\} = \begin{cases} \{f > \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda > 0 \\ \{f < \frac{t}{\lambda}\} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

f misurabile

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{set} < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{se } f, g \text{ misurabili}$$

$\Rightarrow (f + g)^2, f^2, g^2$ sono misurabili

$$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

f misurabile

$f^+ = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ Guarda sta dimsotrzione usl libro o ricopila dalle foto perchè è assolutamente insensato \square

Sia (X, η) spazio misurabile

se η è la σ -algebra di misurabili di misura μ allora è vero che tutti gli insiemi di misura nulla appartengono a η_μ

Proposizione 4

Sia (X, η, μ) spazio di misura

(μ è una misura su X e η è la σ -algebra di misurabili)

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

e sia $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = g$ quasi ovunque (ovvero $m(\{f \neq g\}) = 0$)

\Rightarrow anche g è μ -misurabile

Dimostrazione

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\{g > t\} = \{g > t\} \cap \{g \neq f\} \cup \{g > t\} \setminus \{g \neq f\}$$

Il primo insieme è contenuto in $\{g \neq f\}$ quindi ha misura nulla

$\Rightarrow \in \eta_\mu$

il secondo insieme è $\{f > t\} \cap \{f = g\} \in \eta$ perché sono un misurabile e il complementare di un misurabile.

\square

Corollario 1

se $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili $k > 1$ ed esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ per quasi ogni $x \in X$

\Rightarrow la funzione limite puntuale è definita a meno di un insieme di misura nulla ed è misurabile.

Dimostrazione

$X_1 = \{x \in X \mid \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)\} = \{x \in X \mid \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)\}$ è misurabile

$\mu(X \setminus X_1) = 0$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{se } x \in X_1 \\ 0 & \text{se } x \notin X_1 \end{cases} .$$

è misurabile $\forall k$ perché $\tilde{f}_j = f_j$ quasi ovunque

$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_k(x) = f_k(x) \quad \forall x$

quindi è misurabile

\square

0.2 Funzione di Lesbegue-Vitali o funzione di Cantor o scala del diavolo

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

$\forall n \quad [0, 1] = \bigcup_{i=1}^n J_i^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^{k-1}} I_i^{(k)}$
 gli J sono intervalli chiusi, disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, le I sono di ampiezza $\frac{1}{3^k}$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (\frac{3}{2})^2 & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \end{cases}.$$

Lezione 9 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

0.1 Funzione di Lebesgue-Vitali

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad n = 1 \quad [0, 1] = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \cup (1/3, 2/3)$$

Al primo passo abbiamo questa situazione, gli intervalli restanti (chiusi) sono gli J_i^1 e quelli rimossi (aperti) sono gli I_i^1

$$\text{al passo } n = 2 \text{ abbiamo } [0, 1] = J_1^2 \cup J_{2,3}^2 \cup J_4^2 \cup I_1^2 \cup I_{2,1^2 \cup I_3^2}$$

In generale al passo n -esimo abbiamo $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{2^n-1} I_i^n$ con $|J_i^n| = \frac{1}{3^n}$ e $|I_i^n| = \frac{1}{2^n}$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } 3/2 & \text{su } J_1^1 \cup J_2^1 \\ \text{costante} & \text{su } I_1^1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^2 & \text{su } \bigcup_{i=1}^4 J_i^2 \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{lineare con pendenza } (3/2)^n & \text{su } \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{costante} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n.$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{3^n}]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = L_{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) - L_n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{2^n}$$

$$\forall m > n$$

$$\sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_n(x)| = \sup_{[0,1]} |L_n(x) - L_{m-1}(x) + L_{m-1}(x) - L_{m-2}(x) + \dots + L_{n+1} - L_n(x)|.$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{[0,1]} |L_{k-1}(x) - L_k(x)| \leq \sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_{m-1}(x)| + \dots + \sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \rightarrow n \rightarrow \infty 0.$$

$\{L_n(x)\}$ è uniformemente di Cauchy in $[0, 1]$.

$\Rightarrow \exists L \in C([0, 1])$ tale che $L_n \rightarrow L$ uniformemente in $[0, 1]$

$L_n(x) \leq L_n(y) \quad \forall x \leq y \Rightarrow L(x) \leq L(y)$

$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è continua, monotona crescente

$L(0) = 0, L(1) = 1$

L è localmente costante su $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^m$
 $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_k^n$
 $\Rightarrow \exists m, \exists k \ x \in I_k^n \ L = \text{costante in } I_k^n \Rightarrow L'(x) = 0$
 $\Rightarrow L$ è derivabile quasi ovunque (in $[0, 1] \setminus C$) e $L' = 0$ quasi certamente.

$$\int_0^1 L'(x) dx = 0 \neq L(1) - L(0).$$

Integrale di Riemann perché L' è discontinua in C , non funziona quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale

Proposizione 1

$$L(C) = [0, 1] \quad \forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 2\}$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$$

Dimostrazione

Primo caso $x \in C$ tale che $\exists n \geq 1 \ x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$

Usiamo l'induzione su n

se $n = 1 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = \frac{2}{3} \Rightarrow L(0) = 0, L(2/3) = L_1(2/3) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ok}$

Supponiamo vero per $L(\sum_{n=1}^{i-1} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{n=1}^{i-1} \frac{x_i/2}{2^i}$

e sia $x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$, con $x_n = 2$

$L(x) = L_n(x) = L_n(x - \frac{1}{3^n}) = L_n(x - \frac{2}{3^n}) + (\frac{3}{2})^n \frac{1}{3^n}$

$L(x + \frac{2}{3^n}) + \frac{1}{2^n} = L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i} + \frac{x/2}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i/2}{2^i}$

secondo caso

$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$

è continua

$$\Rightarrow L(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i/2}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}.$$

$L(C) = [0, 1]$

Quindi L manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva.

Consideriamo

$\phi(x) = L(x) + x$

$\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ strettamente crescente

$\exists \phi^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ strettamente crescente, con immagine in un intervallo

\Rightarrow continua

$\Rightarrow \phi$ è un omomorfismo di $[0, 1]$ in $[0, 2]$ $\phi([0, 1]) = \phi(C \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^n)$

$= \phi(C) \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(I_i^n)$ insiemi misurabili e disgiunti

$\phi(x) = 2 = m(\phi([0, 1])) = m(\phi(C)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(\phi(I_i^n))$

$x \in I_i^n \ \phi(x) = x + L(x) = x + a_i^n \Rightarrow \phi(I_i^n) = I_i^n + a_i^n$

$\Rightarrow m(\phi(I_i^n)) = |I_i^n| = \frac{1}{3^n}$

$= m(\phi(C)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^2$

$= m(\phi(C)) + 1$

$$\Rightarrow m(\phi(C)) = 1$$

□

$m(\phi(C)) > 0$
 $\Rightarrow \exists V \subset \phi(C)$ tale che $V \notin \eta$
ma $E = \phi^{-1}(V) \subset C \Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \eta$
quindi $E \in \eta$ ma $\phi(E) \notin \eta$

Proposizione 2

La σ -algebra η non è chiusa per omeomorfismi continui

Dimostrazione

$E \in \eta$ ma $\phi(E) = V \notin \eta$
 $E \in \eta$ se $E \in B \Rightarrow \phi(E) = (\phi^{-1})^{-1}(E)$
 ϕ^{-1} è continua $\Rightarrow \phi^{-1}$ è misurabile secondo Lesbegue
 $\Rightarrow (\phi)^{-1}(E) \in \eta \quad \forall E \in B$
da capire come finisce sta roba (non so manco se questa sia la dimostrazione)

□

Proposizione 3

$\eta \setminus B \neq \emptyset$

Lezione 10 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-25

0.1 Continuando sulle funzioni misurabili

Definizione 1 (Funzione semplice)

Sia (X, A, μ) uno spazio di misura. Una funzione semplice in X è una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x), \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, N \geq 1, E_i \in A.$$

$$\text{con } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } \bigcup_{i=1}^N E_i = X$$

Teorema 1

Sia (X, A, μ) uno spazio di misura, e $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

Allora f misurabile $\Leftrightarrow \exists \{s_m\}$ successione di funzioni semplici tale che $s_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$

Inoltre

1. se $f \geq 0 \Rightarrow$ si può scegliere $\{s_m\}$ tale che $s_m(x) \leq s_{m+1}(x) \quad \forall x \in X, \forall m \geq 1$.
2. se f è limitata $\Rightarrow s_m \rightarrow f$ uniformemente in X .

Dimostrazione

(\Leftarrow) ovvia, perché f è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili

(\Rightarrow) Primo caso: $f \geq 0$, limitata, si può supporre $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad [0, 1] &= \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \\ E_k^n &= \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \quad k = 1, \dots, 2^n \\ f \text{ misurabile} &\Rightarrow E_k^n \text{ misurabile } \forall k = 1, \dots, 2^n, \forall n \geq 1 \\ E_k^n \cap E_j^n &= \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } X = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_k^n \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n}(x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \forall n \geq 1 \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^n \text{ tale che } x \in E_k^n \\ \Rightarrow 0 \leq s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \\ x \in E_k^n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \\ \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ \Rightarrow \text{sono possibili due casi} \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}.$$

oppure

$$s_n(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}.$$

nel caso 1
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = s_{n+1}(x)$
 nel caso 2
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$
 $\forall x \in X \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^{n+1}$
 tale che $x \in E_k^n$
 $\Leftrightarrow s_n(x) \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
 $0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$
 $\sup_{x \in X} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2^n}$
 $\Rightarrow s_m \rightarrow f$ uniformemente in X

(\Rightarrow) secondo caso: $f \geq 0$
 $\forall n \geq 1$

$$E_I^n = \{f < n\}, \quad E_{II}^n = \{f \geq n\}.$$

$$E_{I,k}^n = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = E_I^n$$

$$s_n(x) = n \chi_{E_{II}^n}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k+1}{2^n} \chi_{E_{I,k}^n}(x).$$

$$E_{II}^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = X.$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x$ (come nel caso 1)
 Se $f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) \geq m \quad \forall m$
 $\Leftrightarrow x \in E_{II}^n$
 $\Rightarrow s_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$
 Se $f(x) < +\infty \Rightarrow \exists \bar{n}$ tale che $f(x) \leq \bar{n}$
 $\Rightarrow x \in E_I^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n$
 $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
 $\Rightarrow 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$
 la convergenza non è uniforme perché \bar{n} dipende da f .
 $\Rightarrow s_n(x) \rightarrow f(x)$

Terzo caso

f di segno variabile

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

f misurabile $\Leftrightarrow f^-, f^+$ misurabili

Per il secondo caso

$$\exists \{s_n\} \text{ funzioni semplici } s_n(x) \rightarrow f^+(x) \quad \forall x$$

$$\{t_n\} \text{ funzioni semplici } t_n(x) \rightarrow f^-(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow s_n - t_n \text{ è funzione semplice, } s_n(x) - t_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

□

Definizione 2

Sia (X, A, μ) spazio di misura e sia $s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$, $c_i \geq 0$
si definisce

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i).$$

dove si usa la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$
e, inoltre, $\forall E \in A$

$$\int_E s \, f \, d\mu = \int_X s \cdot \chi_E \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E \cap E_i).$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i \cap E}.$$

dato che $\chi_{E_i} \cdot \chi_E = \chi_{E_i \cap E}$

Definizione 3

Sia (X, A, μ) spazio di misura e sia $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile
 $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X s \, d\mu \mid s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f\}$ e $\forall E \in A$

$$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E \, d\mu.$$

Proprietà immediate dell'integrazione

1. $f = 0$ quasi certamente in $X \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$
2. Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f \, d\mu = 0$
3. $0 \leq f \leq g, f, g$ misurabili $\Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$
4. Se $E, F \in A$ $E \subseteq F \quad \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$

Esempio

$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1 \mu(\mathbb{Q}) = 0$
 s funzione semplice $0 \leq s \leq f$

Proposizione 1

Sia $s(x)$ funzione semplice, ≥ 0 , e sia $\mu_s : A \rightarrow [0, +\infty)$ definita da

$$\mu_s(E) = \int_E s \, d\mu.$$

μ_s è una misura su A (cioè $\mu_S(\emptyset) = 0$ ed è additiva su misurabili disgiunti)

Dimostrazione

$$\mu_s(\emptyset) = \int_{\emptyset} s \, d\mu = 0$$

Siano $\{E_i\} \subset A$ disgiunti e sia $s(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{F_k}(x)$ $F_k \in A$ $F_k \cap F_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$ $\bigcup_{k=1}^N F_k = X$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^K E_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^K E_i} s \, d\mu = \int_X s \chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} \, d\mu.$$

con

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^K E_i} = \sum_{i=1}^K \chi_{E_i}.$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^K E_i \Leftrightarrow \exists! i \ x \in E_i.$$

$$\int_X s \sum_{i=1}^K \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K s \chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \chi_{F_j \cap E_i} \, d\mu.$$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^K \int_{E_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^K \mu_s(E_i).$$

$$\mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu_S\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu_s(E_i) \Rightarrow \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i).$$

□

Osservazione

Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0$

$$\Rightarrow \int_N s \, d\mu = 0$$

$$\mu_s(N) = 0 \quad \forall N : \mu(N) = 0$$

$\mu_s << \mu$ μ_s è assolutamente continua rispetto a μ .

Lezione 11 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-26

0.1 Esercitazioni, Foglio 4

Esercizio 4

$f : X \rightarrow Y$

1. se $B \subseteq 2^Y$ σ -algebra di Y
 $A = \{f^{-1}(B), B \in B\}$ è una σ -algebra in X

Svolgimento

$$\begin{aligned} \emptyset \in B &\Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ \text{sia } f^{-1}(C) &\in A, \text{ con } C \in B \\ (f^{-1}(C))^c &= X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(C^c) \\ C \in B &\Rightarrow C^c \in B \Rightarrow (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in A \\ \{f^{-1}(C_i)\}_I &\geq 1, C \in B \\ &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \end{aligned}$$

2. A σ -algebra in X

$B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in A\}$ è una sigma algebra in Y

Svolgimento

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \Rightarrow \emptyset \in B \\ C \in B &\Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A \Rightarrow f^{-1}(C)^c \in A \Rightarrow f^{-1}(C^c) \in A \Rightarrow C^c \in B \\ \{C_i\} \subset B &\Leftrightarrow f^{-1}(C_i) \in A \quad \forall i \\ &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(C_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i) \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in C \end{aligned}$$

3. $X \xrightarrow{f} Y$

$$\begin{array}{c} f^{-1}(\sigma < F >) \leftarrow \sigma < F > \text{ con } F \subset 2^X \\ \parallel \\ \sigma < f^{-1}(F) > \leftarrow F \text{ con } F \subset 2^X \end{array}$$

Soluzione

Per il primo punto dell'esercizio la controimmagine della σ -algebra è comunque una σ -algebra.

$f^{-1}(\sigma < F >) \supset f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(\sigma < F >) \supseteq \sigma < f^{-1}(F) >$
 $\sigma < f^{-1}(F) > \quad B = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma < f^{-1}(F) >\}$
 questa è una σ -algebra in Y (punto 2)
 $f^{-1}(B) \subseteq < f^{-1}(F) >$ quindi sono l'una contenuta nell'altra, quindi le due σ -algebre coincidono.

Esercizio 5

Sia X un insieme (\neq) A una σ -algebra in X e sia $\mu : A \rightarrow [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\{E_i\} \subset A, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$

Osservazione

μ rimane monotona e subadditiva

Infatti :

$$A, B \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$B = A \cup B \setminus A \cup \emptyset \cup \dots$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

$$\text{Inoltre } \{A_i\} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

Esercizio

Dimostrare che $\exists \bar{\mu} : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ misura

tale che $A \subseteq \sigma\text{-algebra dei } \bar{\mu}\text{-misurabili e } \forall A \in \mathbb{A} \quad \bar{\mu}(A) = \mu(A)$

$$E \subseteq X \quad \bar{\mu}(E) = \inf\{\mu(A), A \in \mathbb{A}, A \supseteq E\}$$

$$\bar{\mu}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(\emptyset) = 0$$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \text{ se } \exists i \text{ t.c. } \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

$$\text{Allora } \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) = +\infty$$

se $\bar{\mu}(E_i) < +\infty \quad \forall i \quad \forall i \exists A_i \in \mathbb{A} \text{ tale che } E_i \subseteq A_i \quad \bar{\mu}(E_i) \leq \mu(A_i) < \bar{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

Se $E \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(E) \leq \mu(E)$

e $\forall A \in \mathbb{A}, A \supseteq E \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(E) \Rightarrow \bar{\mu}(E) \geq \mu(E) \Rightarrow \mu(E) = \bar{\mu}(E)$

$A \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow A \Rightarrow A \text{ è } \bar{\mu}\text{-misurabile cioè } \forall F \subseteq X$

$$\bar{\mu}(F) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A).$$

$$\text{Se } F \in \mathbb{A} \Rightarrow A, F \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\mu}(F) = \mu(F)$$

$$= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

se $F \notin \mathbb{A}$, e $\bar{\mu}(F) < \infty$

$$\forall k \exists A_k \in \mathbb{A} \mid F \subseteq A_k, \text{ e } \bar{\mu}(F) \leq \mu(A_k) < \bar{\mu}(F) + \frac{1}{k}$$

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathbb{A}, A \supseteq F$$

$$\bar{\mu}(F) \leq \mu(A) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \leq \bar{\mu}(F)$$

$\exists A \in \mathbb{A}$ tale che $\bar{\mu}(F) = \mu(A) \quad F \subseteq A$

$$\bar{\mu}(F) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \bar{\mu}(F \cap A) + \bar{\mu}(F \setminus A)$$

Dato che $\exists B \in \mathbb{A}$ tale che $F \subseteq B$ è $\bar{\mu}(F) = \mu(B)$

Esercizio 6

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$f(E) \in \eta \quad \forall E \in \eta \Leftrightarrow m(f(E)) = 0 \quad \forall E \text{ se } m(E) = 0$$

(\Rightarrow) sia N tale che $m(N) = 0$

per assurdo supponiamo $m(f(N)) > 0$

$\Rightarrow \exists V \subset f(N) \quad V \notin \eta$ (ogni insieme di misura positiva contiene un insieme non misurabile)

$$f^{-1}(V) \cap N \subset N \Rightarrow m(f^{-1}(V) \cap N) = 0$$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \cap N \in \eta \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap N) = V \notin \eta$ ma dovrebbe appartenerci in quanto è immagine di un misurabile (ha misura nulla).

(\Leftarrow)

$E \in \eta$ tale che $f(E) \in \eta$

$E \in \eta \Leftrightarrow E = B \cup N \quad m(N) = 0$ B boreliano.

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq E, C_n \text{ chiusi}$$

$$f(E) = f(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n \cup N) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(C_n) \cup f(N) \text{ con } m(f(N)) = 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\Rightarrow f(N) \in \eta$$

Se E è limitato $\Rightarrow C_n$ sono compatti $\forall n$

$\Rightarrow f(C_n)$ è compatto $\forall n$ (f continua)

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(C_n) \in B \subseteq \eta$ (boerliano)

$\Rightarrow f(E) \in \eta$

In generale, se $E \in \eta \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} E \cap [-n, n]$, limitati $\forall n$ $f(E) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f(E \cap [-n, n]) \in \eta$ unione misurabile di misurabili.

Esercizio 11

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, x > 1, x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ n-1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \text{ } a_n \neq 0 \text{ } a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \end{cases} .$$

le prime $n-1$ cifre sono tutte nulle, e gli a_k sono le cifre del numero irrazionale

$$x \in [0, 1] a_1 \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{a_1}{10} \geq \frac{1}{10}$$

$$\text{Se } x \in [0, \frac{1}{10}], a_2 \neq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{100}$$

$$f(x) = \chi_{(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}) \setminus \mathbb{Q}} \text{ (tra 0,01 e 0,1)}$$

$$f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n (k-1) \chi_{(\frac{1}{10^k}, \frac{1}{10^{k-1}}) \setminus \mathbb{Q}}(x)$$

Quindi f è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.

Lezione 12 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-01

0.1 Boh

$$\begin{aligned}
 & (X, m, \mu) \\
 & s = \sum_{i=1}^N c_j x_{E_j}, c_j \geq 0 \quad E_j \in m \\
 & \int_X s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j) \\
 & \mu_S(E) = \int_E s d\mu = \int_X s x_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap E)
 \end{aligned}$$

Proposizione 1

Sia (X, m, μ) spazio di misura sia $s(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}(x)$ funzione semplice ≥ 0 ($c_j \geq 0 \quad \forall j$)
 $\Rightarrow \mu_S : m \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu \quad \forall E \in m.$$

è una misura.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\emptyset) &= \int_{\emptyset} s d\mu = 0 \\
 \{F_i\} &\subset m, F_i \cap F_l = \emptyset \text{ se } i \neq l \\
 F &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i \\
 \mu_S(F) &= \int_F s d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) \\
 &= \sum_{j=1}^N c_j \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_j \cap F_i) \\
 &= \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_j \cap F_i) \quad \text{dato che } E_j \cap F_i \text{ sono disgiunti e misurabili} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^N c_j \mu(E_j \cap F_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{F_i} s d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_S(F_i)
 \end{aligned}$$

□

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono risultati che garantiscono la proprietà:

$\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per q.o. $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Osservazione

Per l'integrale di Riemann la validità del passaggio al limite sotto il segno d'integrale richiede la convergenza uniforme.

Esempio

$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_n\}$
 $\forall n \geq 1 s_n(x) = \chi_{\{q_1, \dots, q_n\}}$
 s_n è discontinua in $\{q_1, \dots, q_n\}$
 $\Rightarrow s_n \in R([0, 1])$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x).$$

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

ma $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \notin R([0, 1])$

Teorema 1 (convergenza monotona, B. Levi)

Sia (X, m, μ) spazio di misura e sia $\{f_n\}$ successione di funzioni misurabili

$$f_n : X \rightarrow [0, +\infty] \quad \forall n$$

$$\text{monotona crescente } f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 1, \text{ q.o.}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x).$$

$f : X \rightarrow [0, +\infty]$ definita quasi ovunque è misurabile e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dimostrazione

$\int_X f_n d\mu$ è una successione numerica monotona crescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

$$f_n \leq f \quad \forall n \quad \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Tesi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu = \sup \{\int_X s d\mu : s \text{ semplice } 0 \leq s \leq f\}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu \quad \forall s \text{ funzione semplice } 0 \leq s \leq f$$

Sia s funzione semplice, $0 \leq s \leq f$. Sia $\varepsilon > 0$ e $\forall n$

$$E_n = \{f_n \geq (1 - \varepsilon)s\}.$$

- $E_n \in m$ $\forall n$ perché $f_n - (1 - \varepsilon)s$ è misurabile

- $E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ poiché $f_n \leq f_{n+1}$

- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$ poiché sia $x \in X$

se $s(x) = 0 \Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$

se $s(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \sup_{n \geq 1} f_n(x) \quad \exists \bar{n}$ tale che

$$(1 - \varepsilon)s \leq (1 - \varepsilon)f(x) < f_{\bar{n}}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in E_{\bar{n}}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_X s d\mu = \mu_{(1-\varepsilon)s}(X) = \mu_{(1-\varepsilon)s}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{(1-\varepsilon)s}(E_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} (1 - \varepsilon)s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

□

Osservazione

1. $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$\Rightarrow \exists \{s_n\}$ successione di funzioni misurabili tale che

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X.$$

$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + n \chi_{\{f \geq n\}}.$$

Per il teorema di B. Levi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

2. Se $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile $\forall n$

$$f_n(X) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq 0$$

$$\int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu$$

$$g_n = f_1 - f_n \geq 0 \quad \forall n$$

g_n è monotona crescente

$$\int_X g_n \, d\mu \rightarrow \int_X (f_1 - f) \, d\mu$$

$$\int_X (f_1 - f_n) \, d\mu$$

Se $\int_X f_1 \, d\mu < +\infty$

$$\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu$$

In generale non vale se $\int_X f_1 \, d\mu = +\infty$

Esempio: $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 1m([n, +\infty)) = +\infty$$

Corollario 1

Siano $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili $\forall n$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty \text{ oppure } +\infty \Rightarrow f : X \rightarrow [0, +\infty] \text{ è misurabile}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

$$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k \, d\mu$$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

dove il penultimo passaggio ($\stackrel{?}{=}$) è ancora da giustificare □

Proposizione 2

Siano $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili

$$\Rightarrow \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione

primo caso: f, g funzioni semplici, $f = s = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \chi_{E_j}$ $c_j \geq 0$ $E_j \in m$ disgiunti $\cup E_j = X$

$$g = t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{F_k} \quad d_k \geq 0, F_k \in m \text{ disgiunti} \cup F_k = X$$

$$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^M F_k = \bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k$$

$$s = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{\bigcup_{k=1}^M E_j \cap F_k} = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{k=1}^M \chi_{E_j \cap F_k}$$

Vero poiché unione di insiemi disgiunti

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j}.$$

$$t = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N F_k \cap E_j} = \sum_{k=1}^M d_k \sum_{j=1}^N \chi_{F_k \cap E_j}.$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_X (s + t) d\mu &= \int_X \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M c_j \chi_{F_k \cap E_j} + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N d_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu. \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (c_j + d_k) \mu(F_k \cap E_j) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu. \end{aligned}$$

secondo caso $f, g \geq 0$ misurabili

$$\begin{aligned} \exists s_n \uparrow f \text{ e } \exists t_n \uparrow g & \quad (\uparrow = \text{tende}) \\ \Rightarrow s_n + t_n \uparrow f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_X s \, d\mu + \int_X t_n \, d\mu \right). \\ &\quad \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Esercizio

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini mai negativi $a_n \geq 0$

$\{a_n\}$ può essere pensata come una funzione

$f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$

$$n \rightarrow f(n) = a_n$$

$$(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu^*) \quad \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu^* = ? \text{ dove } \mu^* \text{ calcola la cardinalità dei sottoinsiemi}$$

Lezione 13 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-25

0.1 Lemma di Fatou

Lemma 1 (di Fatou)

Sia (X, M, μ) uno spazio di misura e $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ successione di funzioni misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dimostrazione

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$ con $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall k, \forall x$
e sono misurabili

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

ma $g_k \leq f_k \quad \forall k$

$$\Rightarrow \int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu \text{ e applicando il lim inf}$$

$$\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

□

Esempio 1

$f_n(x) = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ funzioni misurabili ≥ 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = 0$$

$$< \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Esempio 2

$f_n(x) = \chi_{[n, +\infty)}(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \quad \forall n$$

Definizione 1 (Funzioni integrabili)

Sia (X, M, μ) spazio di misura e sia $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile.

Se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int_X f^- d\mu < +\infty$ allora f si dice integrabile e

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

se $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow f$ si dice sommabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$
questo tipo di funzioni definisce

$$L^1(X) = \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ misurabili}, \int_X |f| d\mu < +\infty\}.$$

Proposizione 1

Sia (X, M, μ) spazio di misura

1. Se f è integrabile su X
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$
2. (diseguaglianza di Chebychev) $f \in L^1(X) \Rightarrow \forall t > 0$
 $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu$
3. $f \in L^1(X) \Rightarrow |f(x)| < +\infty$ quasi ovunque in X (?)
4. $f \in L^1(X), \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque
5. $f, g \in L^1(X) \rightarrow f + g \in L^1$ ($f + g$ è definita quasi ovunque) e
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione

Dimostriamo ogni punto:

1. se $\int_X |f| d\mu = +\infty$ ovvio
 $Se \int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty$
 $\Rightarrow |\int_X f d\mu| = |\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu| \leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X |f| d\mu$
2. $\int_X |f| d\mu \geq \int_X f |\chi_{\{|f| > t\}}| d\mu \geq \int_X t \chi_{\{|f| > t\}} d\mu$
3. $f \in L^1(X)$
 $se |f| = +\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\}$ chiamo $E_n = \{|f| > n\}$
 $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \dots \subseteq E_1$
 $\mu(E_1) \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$
 $\Rightarrow \mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(E_n)) \leq_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu = 0$
4. $\int_X |f| f d\mu = 0$
 $\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$
 $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$
 $\Rightarrow \mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) = 0$
5. $f + g$ è definita su $X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})$ (dove il secondo insieme ha misura nulla)
posso quindi calcolare il suo integrale
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_{X \setminus (\{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\})} (f + g) d\mu$
 $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$
chiamiamo $f + g = h$
 $\int_X (f + g) d\mu = \int_X h^+ - \int_X h^- d\mu$
 $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$
 $\Rightarrow \int_X (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu$
 $\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu$

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X h^+d\mu - \int_X h^-d\mu = \int_X f^+d\mu - \int_X f^-d\mu + \int_X g^+d\mu - \\ \int_X g^-d\mu &= \int_X fd\mu + \int_X gd\mu\end{aligned}$$

□

Teorema 1 (convergenza dominata o Teorema di Lebesgue)

Sia (X, M, μ) spazio di misura e siano $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ per q.o. $x \in X$ se $\exists g \in L^1(X)$ tale che $|f_n| \leq g$ quasi ovunque in X $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \rightarrow 0.$$

Dimostrazione

$|f_n| \leq g \rightarrow f_n \in L^1(X)$ e $|f| \leq g$ quasi ovunque $\rightarrow f \in L^1(X)$
 $\Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0$ quasi ovunque in X (perché $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$)
quindi puntualmente per q.o. $x \in X$ fissato

$$2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 2g(x).$$

⇒ Usando il lemma di Fatou

$$\int_X 2gd\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)d\mu.$$

sfruttiamo la linearità dell'integrale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\int_X 2g - \int_X |f_n - f|d\mu) = \int_X 2gd\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu$$

Nota: il \liminf diventa lineare nel caso dei limiti.

siccome $g \in L^1(X)$ posso semplificare

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|d\mu \leq 0.$$

□

Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-09

0.1 Integrali dipendenti da un parametro

(X, μ) spazio di misura

$$f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty].$$

I intervallo di \mathbb{R} , tale che

- per quasi ogni $x \in X$
 $t \in I \rightarrow f(t, x), f(\cdot, x)$ continua
- $\forall t \in I \quad f(t, \cdot) \in L^1(X, \mu)$

$$h(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x).$$

Teorema 1

Sia (X, μ) spazio di misura, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

1. se $f(\cdot, x)$ è continua su I per quasi ogni $x \in X$ $f(t, \cdot) \in L^1(X) \quad \forall t \in I$
 $\exists g \in L^1(X)$ t.c. $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$ per quasi ogni $x \in X$
 \Rightarrow la funzione $h(t) = \int_X f(t, x) d\mu$ è continua su I
2. Se per quasi ogni $x \in X$, $f(\cdot, x)$ è derivabile su I e se $\exists g_1 \in L^1(X)$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g_1(x) \quad \text{per q.o. } x \in X \quad \forall t \in I.$$

$\Rightarrow h$ è derivabile e

$$h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

stiamo dicendo che la derivata dell'integrale è l'integrale della derivata.

Dimostrazione

Da recuperare (Chat con Alberto Agostinelli)

□

Osservazione

$f : I \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

nelle ipotesi del teorema continua in $t_0 \in I$ e $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$ quasi ovunque in X .

Posso considerare non tutti gli $t \in I$ ma selezionar e i t in sottointervalli di I quindi in un intorno di t_0 per avere la continuità in t_0

0.2 Assoluta continuità dell'integrale

Ricordiamo che s funzione semplice $s \geq 0$
 $\forall E \in M$ e definiamo

$$\mu_s(E) = \int_E s d\mu \Rightarrow \mu_s \text{ è una misura.}$$

adesso se $f \in L^1(X)$

$\mu_f(E) = \int_E |f| d\mu$ è una misura su X
 $\mu_f(E) = 0 \quad \forall E \in M$ tale che $\mu(E) = 0$

Teorema 2 (Assoluta continuità dell'integrale)

sia $f \in L^1(X)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ tale che $\int_E |f| d\mu < \varepsilon \quad \forall E \in M, \mu(E) < \delta$
 enunciato più "suggestivo":

$$\lim_{\mu}(E) \rightarrow 0 \quad \int_E |f| d\mu = 0.$$

il punto sta nel fatto che sti cazzo di chi è E basta che la sua misura tenda a 0

Dimostrazione

non la scrivo, mancano 3 giorni all'esonero, parla con Alberto Agostinelli. \square

Osservazione

Sia $\{f_n\} \subset L^1(X)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, f_n) = \delta(\varepsilon, n)$ tale che $\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$ se $\mu(E) < \delta$

Se $\exists f \in L^1(X)$ tale che

$f_n \rightarrow f$ in $L^1(X)$ ($\int_X |f_N - f| d\mu \rightarrow 0$)

\Rightarrow la proprietà di assoluta continuità dell'integrale è verificata uniformemente rispetto a n

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_f(\varepsilon)$

tale che $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$ se $\mu(E) < \delta_f$

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu < \varepsilon + \varepsilon$$

\Rightarrow per $\delta = \min\{\delta_{f_1}, \dots, \delta_{f_{n_\varepsilon}}, \delta_f\} > 0$

$$\int_E |f| d\mu < 2\varepsilon \text{ se } \mu(E) < \delta \forall n \in \mathbb{N}$$

Piccolo conto apparentemente poco utile:

Riscrittura delle convergenza quasi ovunque

(X, μ) spazio di misura

$f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque

$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$ tale che $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$

$\Leftrightarrow \exists N \subset X \quad \mu(N)$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(x, \varepsilon)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus N.$$

$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$ tale che

$$X \setminus N \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c \subseteq N.$$

ovvero

$$\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \subseteq N.$$

quindi tutta sta roba ha misura nulla poiché contenuta in N che ha misura nulla.

Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-29

0.1 Boh

Proposizione 1

(X, μ) spazio di misura; $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque; $f_n \rightarrow f$ q.o. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Dimostrazione

(\Rightarrow) Già visto

$$(\Leftarrow) \forall y \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{y=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) := \mu(N) = 0$$

$$x \in X \setminus N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{y=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{y}\}$$

Vuol dire che $\forall y \exists k_y$ (dipendente da y) tale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{y}$

$\forall n \geq k_y \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n \rightarrow f$ quasi ovunque

□

Se io so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$

È una condizione più forte o debole? Osserviamo che $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ forma una successione decrescente ($F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$)

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n^\varepsilon = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$$

Se poi diventano di misura finita (da un certo punto in poi) vale =

Definizione 1

$f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili finite quasi ovunque; $f_n \rightarrow f$ in misura
se $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Proposizione 2

Sia (X, μ) spazio di misura finita ($\mu(X) < +\infty$). Se $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunque $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura

Dimostrazione

Per la proposizione precedente:

$$\forall \varepsilon > 0, f_n \rightarrow f \text{ q.o.} \Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ma questo per ipotesi è uguale a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

se il \limsup = 0 $\Rightarrow \lim = 0$ Quindi $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0$

□

Proposizione 3

Se $f_n, f \in L^1(X, \mu); f_n \rightarrow f$ in $L^1(X) \Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura

Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0$

$$\varepsilon \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0. \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ in misura} \quad \square$$

$f_n \rightarrow f$ in misura $\xrightarrow{?} f_n \rightarrow f$ quasi ovunque

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

definiamo $g_n := |f_n - f|$, $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ $\Rightarrow \mu(\{g_n > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \xrightarrow{?} g_n \rightarrow 0$ quasi ovunque

L'insieme di sopralivello può muoversi sull'asse x . Non è detto che fissata x allora le successioni di funzioni tendano a 0.

Esempio

$\forall n$ dividiamo $[0, 1]$ in 2^n intervalli di ampiezza $\frac{1}{2^n}$

$$I_{n,m} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \quad 1 \leq k \leq 2^n$$

$\{\chi_{I_{k,n}}\}_{1 \leq k \leq 2^n, n \geq 1}$ successione di funzioni misurabili secondo Lebesgue su $[0, 1]$.

Cosa succede per $n \rightarrow +\infty$? C'è convergenza solo a 0

$$\forall \varepsilon > 0, n(\{\chi_{I_{k,n}} \geq \varepsilon\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon > 1 \\ \frac{1}{2^n} = m(I_{k,n}) & \text{se } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

$\Rightarrow \chi_{I_{n,k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ in misura.

$\forall x \in [0, 1], \chi_{I_{k,n}}(x) = 1$ per infiniti indici

$$\int_{[0,1)} |\chi_{I_{k,n}}| dm = m(I_{k,n}) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\chi_{I_{k,n}} \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1([0, 1]).$$

Quindi c'è anche la convergenza in L^1

Quindi la convergenza in misura (e in L^1) $\not\Rightarrow$ convergenza puntuale (quasi ovunque)

Ma $\{\chi_{I_{n,m}}\}$ ha un'estratta che converge puntualmente a 0

$$\chi_{I_{n,m}} = \chi_{[0, \frac{1}{2^n})} \rightarrow 0 \quad \text{q.o. in } [0, 1].$$

Teorema 1

Siano $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunque. Se $f_n \rightarrow f$ in misura $\Rightarrow \exists$ sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque

Dimostrazione (Errata)

$a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ no!

$\varepsilon > 0$ fissato, $\forall k \exists n_k$ tale che $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} &< +\infty \\
\mu\left(\bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) &\leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0. \\
\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=j}^{+\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dov'è l'errore? Qui l'estratta dipende da ε , invece io voglio un'estratta che valga $\forall \varepsilon > 0$. In questo caso presa un'estratta questa vale $\forall \varepsilon' \geq \varepsilon$. Quindi voglio sostituire ε con una cosa infinitesima. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

□

Corollario 1

Se $f_N, f \in L^1(X, \mu)$, $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \Rightarrow \exists$ estratta $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque.

Dimostrazione

$f_n \rightarrow$ in $L^1 \Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura (disuguaglianza di Chebychev (?))
 $\Rightarrow \exists \{f_{n_k}\} : f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque. □

Osservazione

In generale non tutta $\{f_n\}$ converge puntualmente. Per esempio $\chi_{I_{n,k}}$

Osservazione

Se $\mu(X) = +\infty$, $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque $\Rightarrow f_n \rightarrow$ in misura?
 $\mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Può essere che si formino tutte misure finite e l'intersezione faccia 0.

In generale non vale per esempio $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$, $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ma $m(\{f_n > \varepsilon\}) = +\infty$ per $\varepsilon < 1 \Rightarrow f_n \not\rightarrow 0$ in misura

Ma quindi bisogna che i sottoinsiemi vadano a $+\infty$, quindi di un ambiente di misura infinita.

Se $\mu(X) < +\infty$, $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists k = k(\delta, \varepsilon)$ tale che $\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$

$x \in X \setminus F_{\delta, \varepsilon} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$

Abbiamo trovato il k per cui l'ultima disequazione è piccola. Questo è vero $\forall x$.

Ma allora $\sup_{X \setminus F_{\delta, \varepsilon}} |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \Rightarrow f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$.

Definizione 2

Siano (X, μ) uno spazio di misura e $f_n, f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabili finita quasi ovunque si dice $f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente se $\forall \delta > 0 \ \exists F_\delta \subset X, F_\delta$ misurabile, $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniforme in $X \setminus F_\delta$.

Esempio

$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} = f(x)$$

$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n - f| = 1$
 Se tolgo 1, $\sup_{[0,1)} |f_n - f| = \sup_{[0,1)} x^n = 1$ comunque le cose vanno male!
 Dobbiamo togliere un intorno di 1 $\Rightarrow \sup_{[0,1-\delta]} |f_n - f| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1 - \delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\Rightarrow f_n \rightarrow 0$ uniformemente in $[0, 1 - \delta] \forall \delta > 0$

Lezione 15 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-16

0.1 Convergenze varie (alberto agostinelli)

Definizione 1 (Convergenza quasi uniforme)

$f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente se $\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subseteq X, F_\delta$ misurabile $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \rightarrow 0$ ($f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$)

Proposizione 1

$f_n \rightarrow f$ quasi uniformemente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

Dimostrazione

(\Rightarrow)

$\forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che, $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$

tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus F_\delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$X \setminus F_\delta \subseteq \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists F_\delta \subset X \mu(F_\delta) < \delta$

tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta)$

$$\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq F_\delta.$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\delta, \varepsilon)$

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

(\Leftarrow)

$\varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists k = k(\varepsilon, \delta)$ tale che

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ per $\varepsilon = \frac{1}{j}, \delta = \frac{\nu}{2^j}, \nu > 0$ fissato

$\Rightarrow \exists k_j = k_j(j, \nu)$ tale che $\mu\left(\bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}\right) < \frac{\nu}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\nu}{2^j} = \nu.$$

$x \in X \setminus F_\nu$ (dove F_ν è l'argomento della misura precedente)

$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k_j}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{j}\}$

$\Rightarrow \forall j \exists k_j$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall n \geq k_j \Rightarrow \sup_{X \setminus F_\nu} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$0 \Rightarrow f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus F_\nu$

Abbiamo caratterizzato la convergenza quasi uniforme con la misura dei sopravvivenze $\forall \varepsilon > 0$
conseguenza:

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ q.u.} &\Rightarrow \begin{cases} f_n \rightarrow f & \text{q.u.} \\ f_n \rightarrow f & \text{in misura} \end{cases} \\ &\Updownarrow \\ &\forall \varepsilon > 0 \quad \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

ma allora

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) = \mu \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right). \\ \forall k \quad \mu(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) &\leq \mu \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura

□

Teorema 1 (Egorov)

Sia (X, μ) spazio di misura finita ($\mu(X) < +\infty$)

Allora:

$$f_n \rightarrow f \quad \text{q.o.} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \quad \text{q.u..}$$

Teorema 2 (Vitali)

Sia (X, μ) uno spazio di misura finita e siano $f_n, f \in L^1(X)$ tale che $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque quasi ovunque

allora $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \Leftrightarrow \{f_n\}$ equi-assolutamente integrabili

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_E |F_n| d\mu < \varepsilon \text{ se } E \in M \quad \forall n, \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione

(\Rightarrow) già visto

(\Leftarrow)

$f_n \rightarrow f$ quasi ovunque + $\mu(X) < +\infty$

\Rightarrow (per Egorov)

$\forall \delta > 0 \exists f_\delta \in M, \mu(F_\delta) < \delta$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus f_\delta$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato

\Rightarrow sia $\delta(\varepsilon)$ dato dall'ipotesi di equi-assoluta integrabilità
e sia $f_\delta \in M$ dato dal teorema di Egorov

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| d\mu + \int_{F_\delta} |f_n - f| d\mu. \\ &\leq \sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \mu(X \setminus F_\delta) + \int_{F_\delta} |f_n| d\mu + \int_{F_\delta} |f| d\mu. \\ &\leq (\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f|) \mu(X) + \varepsilon + \varepsilon \quad (\text{dato che } \mu(F_\delta) < \delta). \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu &\leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \\ \Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}, m)

f continua $\Rightarrow f$ misurabile

f continua quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile

MANCA UNA PARTE

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ è discontinua in } X\}.$$

$m\mu(D_f) = 0$ f è misurabile, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \cap D_f \cup \{f > t\} \setminus D_f.$$

\Rightarrow ha misura nulla \Rightarrow è misurabile

$x \in \{f > t\} \setminus D_f$

$\lim_{y \rightarrow x} f(y) \Rightarrow f(x) > t$ e f è continua in X

$\Rightarrow \exists \delta_x > 0 : f(y) > t \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$

$\Rightarrow \{f > t\} \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f > t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) D_f$ aperto è misurabile

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

se $\exists g \in C(\mathbb{R})$

tale che $f = g$ quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile

$\exists N \subset \mathbb{R}, m(N) = 0$

tale che $f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \setminus N \cup \{f > t\} \setminus N$ è misurabile

$f = \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ quasi ovunque

$f = g$ quasi ovunque $\exists N, \mu(N) \quad f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$

$x \in \mathbb{R} \setminus N \quad \lim_{y \rightarrow x} f(y)$

$f = \chi_{[0, 1]}$ è continua quasi ovunque ma non può essere uguale quasi ovunque ad una funzione continua

Teorema 3

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow R$ misurabile $\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists g_\delta \in C(\mathbb{R})$
tale che $m(\{f \neq g\}) < \delta$
 $\text{e } \sup_{\mathbb{R}} |g_\delta| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f|$

Lezione 16 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-01

0.1 altri teoremi

Teorema 1 (Lisin)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists g_\delta \in C(\mathbb{R}) \mid m(\{f\}) < \delta \quad \sup |g_\delta| \leq \sup |f|$$

Dimostrazione

Procediamo per passi:

1. $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ semplice.

Tesi: $\forall \delta \exists F \subseteq [a, b] \mid m([a, b] \setminus F) < \delta, s|_F$ continua
 $\exists n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^n, E \subseteq M^n \mid s(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x)$ SPDG $E_k \cap E_h = \emptyset \quad \forall h, k$
 $\forall \delta > 0, k \in [n] \exists F_k \subseteq E_k$ chiuso $|m(E_k \setminus F_k) < \frac{\delta}{n}|$
 $\Rightarrow F := \bigcup_{k=1}^n F_k, \quad m([a, b] \setminus F) = m\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \bigcup_{k=1}^n F_k\right) \leq \sum_{k=1}^n m(E_k \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k) =$
 $\sum_{k=1}^n m(E_k \setminus F_k) < \delta$
 $s|_F$ continua pK

2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

Obiettivo: $\forall \delta \in (0, +\infty) \exists F \subseteq [a, b] \mid m([a, b] \setminus F) < \delta, f|_F \in C(F)$
La dimostrazione è poco chiara. Guarda da Spadaro.

□

0.2 Spazi L^p

(X, μ) spazio di misura

$$L^p(X) = L^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabile} \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$$

$$f(x) = \frac{\chi_{|x| \geq 1}(x)}{|x|} \in L^p(\mathbb{R})?$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu = 2 \int_1^{+\infty} \infty^{\frac{1}{x^p}} dm = 2 \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{p=1}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ \frac{2}{1-p} & p > 1 \end{cases} \Rightarrow f \in L^p \quad \forall p > 1$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \in L^p((0, 1)) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\frac{p}{2}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{2x^{\frac{2-p}{2}}}{2-p} \Big|_{x=0}^1 < +\infty \Leftrightarrow \frac{2-p}{2} > 0 \Leftrightarrow p < 2$$

Lemma 1 (Disugualanza di convessità)

$$\forall a, b \in [0, +\infty)$$

1. (Disugualanza di Young)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall p, p' \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (p' = \frac{p}{p-1})$$

$$2. \quad a^p + b^p \leq (a + p)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \forall p \in [1, +\infty)$$

$$3. \quad a^p + b^p \geq (a + b)^p \geq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall p \in (0, 1)$$

Dimostrazione 1. $\ln(x)$ concava $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p}b^p\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{p}\ln(b^p) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\ \Rightarrow \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p}b^p &\geq ab \end{aligned}$$

2. $p \geq 1 \Rightarrow f(x) = x^p, x \in [0, +\infty)$ convessa

$$\frac{1}{2^p}(a+b)^p\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p = \frac{1}{2}(a^p + b^p) \quad (\text{ottimale, } a = b \Rightarrow =).$$

$$b = 0 \Rightarrow a^p + b^p \leq (a + b)^p \quad \forall p \geq 1$$

$$b > 0 \Rightarrow f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = p(x+1)^{p-1} - px^{p-1} = (x+1)^{p-1} - x^{p-1} \geq 0 \quad \forall x \geq 0, p \geq 1$$

$$\Rightarrow f \nearrow, f(0) = 0 \Rightarrow f \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p - \left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 = f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \geq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1$$

□

Lezione 17 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-30

0.1 Proprietà spazi L^p

Ricorda:

$$L^P(X) = \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty], f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty.$$

Proposizione 1

L^p è uno spazio vettoriale

Dimostrazione

$\forall f, g \in L^p(X), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ è misurabile}$

$$\begin{aligned} \int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu &\leq \int ((|\alpha| |f| + |\beta| |g|)^p d\mu \\ &\leq 2^{p-1} (\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu + \int_X |\beta|^p |g|^p d\mu) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Per definizione, su $L^p(X)$ è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_p : L^p(X) &\rightarrow [0, +\infty) \\ f &\mapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Proposizione 2 (Disuguaglianza di Hölder)

Sia $p > 1$ e $p' = \frac{p}{p-1}$ ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$) $\forall f \in L^p(X), g \in L^{p'}(X)$
 $\Rightarrow fg \in L^1(X)$ e

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$$

Dimostrazione

Si usa la diseguaglianza di Young se $f \neq 0, g \neq 0$

$$\Rightarrow \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} > 0$$

$$\|g\|_{p'} = \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} > 0$$

Per quasi ogni (q.o.) $x \in X$

$$|f(x)| < +\infty, |g(x)| < +\infty.$$

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

$$\Rightarrow \int_X \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_{p'} d\mu} \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\int_X |f|^p d\mu} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{p'} \frac{1}{\int_X |g|^{p'} d\mu} \int_X |g|^{p'} d\mu = 1 \quad \square$$

Proposizione 3 (Disuguaglianza di Minkowski)

Sia $1 \leq p < +\infty$

$$\forall f, g \in L^p(X) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$((\int_X |f + g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}))$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &= \int_X |f + g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \int_X |f||f + \\ &\quad g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \text{ basta ultimamente dividere per } \|f + g\|^{p-1} \end{aligned}$$

entrambi i lati della disequazione \square

Proposizione 4

$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ è una norma su $L^p(X)$

Dimostrazione

$$(i) \|f\|_p \geq \forall f \in L^p(X)$$

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ q.o..}$$

$$(ii) \|\alpha f\|_p \quad \alpha \in \mathbb{R} = |\alpha| \|f\|_p$$

$$(iii) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

\square

Osservazione:

A rigore bisognerebbe definire $L^p(X)$ come l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza

$$[f] = \{g : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \quad : \quad f = g \text{ q.o.}\}.$$

L'insieme quoziato con questa relazione ci permette di definire bene la norma, altrimenti l'elemento nullo non è unico (posso fare cambiamenti di misura nulla).

Teorema 1

Se $p \geq 1 \Rightarrow L^p(X)$ è uno spazio vettoriale normato completo (spazio di Banach)

Dimostrazione (La chiede all'orale)

Sia $\{f_n\} \subset L^p(X)$ successione di Cauchy

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

Tesi: $\exists f \in L^p(X)$ tale che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(X) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Usiamo la definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$

$\forall k \exists n_k$ tale che

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

selezionando $n_{k+1} > n_k$

Si seleziona una estratta $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Consideriamo la nuova successione:

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(X).$$

$$\|g_j\|_p = \left\| \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^j \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} < 1$$

$$\Rightarrow \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1 \quad \forall j$$

Attenzione

Il modulo è fondamentale così g_j è una funzione crescente!

$$g_{j+1} \geq g_j \quad \forall x \in X \Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} g_j(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|$$

Usando il teorema di B. Levi

$$\int_X |g|^p d\mu = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_X |g_j|^p d\mu \leq 1.$$

$\Rightarrow g \in L^p(X) \Rightarrow g^p \in L^1(X) \Rightarrow g^p$ (e quindi anche g) è finita quasi ovunque.
per quasi ogni $x \in X$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)| < +\infty.$$

\Rightarrow per quasi ogni $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \text{ è convergente.}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} (\cancel{f_{n_2}} - f_{n_1} + \cancel{f_{n_3}} - \cancel{f_{n_2}} + \dots + f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \\ &= -f_{n_1} + \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j} \\ &\Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j}(x) \text{ per ogni } x \\ &f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{n_j}(x) \\ &\exists \text{ quasi ovunque, è misurabile} \\ &\forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu = \|f_m - f_{n_j}\|_p < \varepsilon \quad \forall m \geq n_e \text{ per } j \text{ suff. grande.}$$

$$\begin{aligned}
& \int_X |f_n - f|^p d\mu_{Fatou} \underset{j \rightarrow +\infty}{\leq} \liminf \int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu \leq \varepsilon^p. \\
& \Rightarrow f_n - f \in L^p e \\
& \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e. \\
& \Rightarrow f = f_n - (f_m - f) \in L_p \quad e \quad \|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_e. \\
& \Rightarrow \|f_m - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Lezione 20 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-13

0.1 manca un aparte della lezione

0.2 parte nuova

Dimostrazione

$f \in L^p(\mathbb{R}), \varepsilon > 0$

$f_n = f\chi_{[-n,n]}$ è a supporto compatto

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque

$|f_n| \leq |f|$ in $\mathbb{R} \Rightarrow f_n \rightarrow f$ in L^p

quindi $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$, con supporto compatto tale che $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

$$T_j(f_1)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } |f_1| < j \\ j & \text{se } f_1(x) > j \\ -j & \text{se } f_1(x) < -j \end{cases}$$

$|T_j(f_1)| \leq j \Rightarrow T_j(f_1) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

$T_j(f_1) \rightarrow f_1$ in $L^p(\mathbb{R})$ convergenza dominata.

primo passo $\exists f_1 \in L^p(\mathbb{R})$ supporto compatto tale che $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

secondo passo $\exists f_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$ supporto compatto tale che $\|f_2 - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

terzo passo: $\text{supp } f_2 \subset [-k, k]$

dal teorema di Lusin (e dalla sua dimostrazione)

$\forall \delta > 0 \exists g_\delta : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

tale che $m(\{f_2 \neq g_\delta\}) < \delta$

$\sup_{[-k, k]} |g_\delta| \leq \|f_k\|_\infty$ e $g_\delta(k) = g_\delta(-k) = 0$

estendendo a zero g_δ fuori di $[-k, k]$ si ottiene $g \in C_1(\mathbb{R})$

tale che $\|f_2 - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_2 - g|^p dm = \int_{[-k, k] \cap \{f_2 \neq g\}} |f_2 - g|^p dm \leq (\|g\|_\infty +$

$\|f_2\|_\infty)^p m(\{f_2 \neq g\}) \leq 2^p \|f_2\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$ per δ sufficientemente piccolo.

Quindi $\exists g \in C_0(\mathbb{R})$ tale che

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_2\|_p + \|f_2 - f\|_p + \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

□

Domanda:

Potrebbe esserci un risultato analogo in L^∞ ?

Osservazione

Il risultato di densità si scrive in simboli

$$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}) \quad 1 \leq p < +\infty$$

$$\overline{C_c(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua e } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$$

Dimostrazione per esercizio

Definizione 1

Uno spazio metrico Y

si dice separabile se ammette un sottoinsieme denso numerabile (esempio \mathbb{R} è separabile, R^n è separabile $\forall n \in \mathbb{N}$)

Teorema 1

$L^p(\mathbb{R})$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$

$L^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile

Dimostrazione

$D = \{s(x) = \sum_{i=1}^N q_i x_{(a_i, b_i)}, a_i < b_i, a_i, b_i, q_i \in \mathbb{Q}\}$ è numerabile

Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$ e sia $\varepsilon > 0$

$\exists g \in C_c(\mathbb{R})$ (continua a supporto compatto) tale che $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$

sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\text{supp } g \subset (-k, k)$

g è uniformemente continua

(supporto compatto + continua)

$\forall \eta > 0 \exists \delta_\eta > 0$ tale che

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \eta \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta_\eta.$$

suddividiamo $[-k, k]$ in sottointervalli di ampiezza $\frac{1}{j} < \delta_\eta$ mediante i punti

$$-k + \frac{i}{j} \quad 0 \leq i \leq 2kjA$$

$$\forall 0 \leq i \leq 2kj - 1$$

Scegliamo $x \in (-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j})$ e $q_i \in \mathbb{Q}$ tale che $|q - g(x)| < \eta$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{2kj-1} q_i \chi_{(-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j})}(x) \in D$$

$$\|g - s\|_p^p = \int_{[-k, k]} |g - s|^p dm = \sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p$$

$\exists x \in [2k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}]$ tale che $|g(x) - q_i| < \eta$

$$\forall y \in [-k + \frac{i}{j}, -k + \frac{i+1}{j}] \quad |y - x| < \frac{1}{j} < \delta_\eta$$

$$\Rightarrow |g(y) - q_i| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - q_i| < 2\eta$$

Tornando quindi all'equazione precedente

$$\begin{aligned} \|g - s\|_p^p &= \int_{[-k, k]} |g - s|^p dm = \\ &\sum_{i=0}^{2kj-1} \int_{[-k+\frac{i}{j}, -k+\frac{i+1}{j}]} |g - q_i|^p \leq (2\eta)^p \frac{i}{j} 2kj < \left(\frac{e}{2}\right)^p \text{ per } \eta \text{ sufficientemente piccolo.} \end{aligned}$$

□

Osservazione

$L^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile, sia $\{\omega_r\}_r$ famiglia più che numerabile di sottoinsiemi tali che $r \subset \mathbb{R}$, $\omega_r \in \eta$ per $r \neq s$

$m(\omega_r \setminus \omega_s)$ oppure $m(\omega_s \setminus \omega_r) > 0$

esempio

$$\omega_r = (-r, r) \quad r > 0$$

se $r < s$ $m(\omega_s \setminus \omega_r) = ([-s, -r] \cup [r, s]) > 0$

$$\{\chi_{\omega_r}\}_{r>0} \subset L^\infty(\mathbb{R})$$

$$\|\chi_{\omega_r} - \chi_{\omega_s}\|_\infty = 1$$

$\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})\}$ sono disgiunte in $L^\infty(\mathbb{R})$

Sia D denso in $L^\infty(\mathbb{R})$

$\forall r \exists f_r \in D \cap B_{\frac{1}{2}}(\chi_{\omega_r})$ se $r \neq s \Rightarrow f_s \neq f_r$

$\Rightarrow D$ è più che misurabile $(V_0, \|\cdot\|_{V_1}), (V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ spazi vettoriali normati

$L : V_1 \rightarrow V_2$ operatore lineare.

Definizione 2

L si dice limitato se $\exists C \geq 0$ tale che $\|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$

Teorema 2

Sia L operatore lineare L è limitata $\Leftrightarrow L$ è continua.

Dimostrazione

(\Rightarrow) Sia L limitato $\forall v_1, v_2 \in V_1 \quad \|L(v_1) - L(v_2)\|_{V_2} = \|L(v_1 + v_2)\|_{V_2} \leq C\|v_1 + v_2\|_{V_1} \leq C\|v_1\|_{V_1} + C\|v_2\|_{V_1} \Rightarrow L$ è lipschitziano.

(\Leftarrow) sia L continuo.

Poiché $L(0) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$ se $\|v\|_{V_1} < \delta$

$$\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \in V_1 \text{ e } \left\| \frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \right\|_{V_2} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Rightarrow \|L(\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} < \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{2\|v\|_{V_1}} \|L(V)\|_{V_2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$$

$\Rightarrow L$ è limitato

$$L(V_1, V_2) = \{L : V_1 \rightarrow V_2 : L \text{ lineare e continuo}\}$$

spazio vettoriale

$$L \in L(V_1, V_2)$$

$$\Rightarrow \|L(v)\|_{V_2} \leq C\|v\|_{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} \leq C \quad \forall v \in V_1 \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}} < +\infty$$

$$\|L\| = \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|L(v)\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1}}$$

$$= \sup_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \|L(\frac{v}{\|v\|_{V_1}})\|_{V_2} = \sup_{\substack{v \in V_1 \\ \|v\|_{V_1}=1}} \|L(v)\|_{V_2}$$

Teorema 3

$(L(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato

se $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ è di Banach $\Rightarrow (L(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ è di Banach.

Dimostrazione

per esercizio

In particolare $L(V_1, \mathbb{R}) = \{L : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare continua}\}$ è uno spazio di Banach
 $V'_1 = V_1^*$ spazio dueale di V_1

Lezione 21 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-14

0.1 boh

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$g \in L^{p'}(X)$ questa induce un funzionale lineare continuo $L_g : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \in L^p(X) \rightarrow L_f(g) = \int_X f g \, d\mu$
 $|L_g(f)| = |\int_X f \cdot g \, d\mu| \leq \int_X |f| |g| \, d\mu \leq \|g\|_{p'} \|f\|_p$ Per Holder
 $\Rightarrow L_g$ è limitato, quindi continuo.

$$\|L_g\| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p=1}} |L_f(g)| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ f \neq 0}} \frac{|L_g(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_{p'}.$$

$$f = |g|^{\frac{p'}{p}-1} g$$

$$|f| = |g|^{\frac{p'}{p}}$$

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |g|^{p'} \, d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow d \in L^p$$

$$\|f\|_p = (\int_X |g|^{p'} \, d\mu)^{1/p} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}} = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}}.$$

$$L_g(f) = \int_X f g \, d\mu = \int_X |g|^{\frac{p'}{p}} \, d\mu.$$

$$\int_X |g|^{\frac{p'}{p}+1} \, d\mu = \int_X |g|^{\frac{1}{p'}+1} \, d\mu = \int_X |g|^{p'} \, d\mu$$

$$= \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_p \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{p'-1}$$

$$= \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{p'} \|f\|_p$$

$$\Rightarrow \frac{|L_g(f)|}{\|f\|_{p'}} = \|g\|_{p'} \Rightarrow \|L_g\| = \|g\|_{p'}$$

$$i : L^{p'}(X) \rightarrow (L^p(X))' \quad \|i(g)\| = \|L_g\| = \|g\|_{p'} \text{ (isometria)}$$

$$g \rightarrow L_g$$

Il teorema di rappresentazione di Resz dice che i è suriettiva ($\forall p \in [1, +\infty)$), ovvero

$$(L^p(X))' = i(L^{p'}(X)).$$

con isomorfismo isometrico

$$\Rightarrow (L^p(X))' \equiv L^{p'}(X)$$

per $p = 2 \quad g \in L^2(X) \Rightarrow g$ induce un funzionale su $L^2(X)$

$$f \in L^2(X) \rightarrow \int_X g f \, d\mu.$$

Per $p = 2$ abbiamo in realtà una funzione

$$L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \rightarrow \int_X f g \, d\mu.$$

che è bilineare, simmetrica e definita positiva. $((f, f) \rightarrow \int_X f^2 d\mu \geq 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.o.})$

\Rightarrow la forma bilineare

$$(f, g) \rightarrow \int_X fg d\mu.$$

è un prodotto scalare che indicheremo come (f, g)

Ricordo:

V spazio vettoriale con prodotto scalare $(\cdot, \cdot) \Rightarrow V$ si dice spazio euclideo e $\sqrt{(f, f)} = \|f\|$ è una norma

Se V è completo rispetto alla norma indotta da $(\cdot, \cdot) \Rightarrow V$ si dice spazio di Hilbert.

Osservazione

$$\sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_X f d\mu} = (\int_X f^2 d\mu)^{1/2} = \|f\|_2$$

$\Rightarrow L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert (già dimostrato che con questa norma è completo)

Teorema 1 (Identità del parallelogramma)

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, Allora V è uno spazio euclideo $\Leftrightarrow f, g \in V$

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Dimostrazione

Idea: $(f, g) := \frac{1}{2}(\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2)$

è un prodotto scalare.

□

Osservazione

Per gli spazi $L^p(X)$ L^2 è l'unico spazio di Hilbert perché $\|\cdot\|_p$ non verifica l'identità del parallelogramma per $p \neq 2$

Teorema 2 (della proiezione)

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $C \subseteq H$ un convesso, chiuso, non vuoto.

$\Rightarrow \forall f \in H \exists! u \in C$ tale che $\|u - f\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$ ($u := p_C(f)$) Inoltre

$$u = p_C(f) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in C \\ (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C \end{cases}$$

Dimostrazione

esistenza:

se $f \in C \Rightarrow u = f$

se $f \notin C$ Th: $\inf_{v \in C} \|f - v\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$

$d = \inf_{v \in C} \|f - v\|$

Esiste una successione minimizzante $\{v_n\} \subset C$ tale che $\|f - v_n\| \rightarrow d$

Dimostriamo che $\{v_n\}$ è di Cauchy.

$v_n, v_m \in C$ convesso

$$\Rightarrow \frac{v_n + v_m}{2} \in C \Rightarrow d^2 \leq \|f - \frac{v_m + v_n}{2}\|^2 = \left\| \frac{f - v_n}{2} + \frac{f - v_m}{2} \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| \frac{f - v_n}{2} - \frac{f - v_m}{2} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - d^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$$

dato che $\|f - v_n\| \rightarrow d$ e $\|f - v_m\| \rightarrow d$

$\Rightarrow \{v_n\}$ di Cauchy

H Hilbert $\Rightarrow \exists u = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \quad \{v_n\} \subset C, C$ chiuso $\Rightarrow u \in C$

$$\|u - f\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - f\| = d$$

Unicità:

Siano $u_1, u_2 \in C$ tale che $\|u_1 - f\| = \|u_2 - f\| = d = \min_{v \in C} \|f - v\|$

$$\Rightarrow \frac{u_1+u_2}{2} \in C \text{ e } d^2 \leq \|f - \frac{u_1+u_2}{2}\|^2 = \left\| \frac{f-u_1}{2} + \frac{f-u_2}{2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\|f - u_1\|^2 + \|f - u_2\|^2) = \left\| \frac{f-u_1}{2} - \frac{f-u_2}{2} \right\|^2$$

$$d^2 - \frac{\|u_2 - u_1\|^2}{4} \Rightarrow \frac{\|u_1 - u_2\|^2}{4} \leq 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Caratterizzazione:

Sia $u = p_C(f) \Leftrightarrow \|u - f\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$ con $u \in C$

$$\Rightarrow \forall v \in C \quad \|u - f\|^2 \leq \|f - ((1-\lambda)u + \lambda v)\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\|f - u + \lambda(u - v)\|^2 = \|f - u\|^2 + \lambda^2\|u - v\|^2 + 2\lambda(f - u, u - v)$$

Quindi

$$\|u - f\|^2 \leq \|f - u\|^2 + \lambda^2\|u - v\|^2 + 2\lambda(f - u, u - v).$$

$$\Rightarrow \lambda(f - u, u - v) \leq \lambda^2\|u - v\|^2 \quad \forall \lambda \in (0, 1]$$

per $\lambda \rightarrow 0^+$

$$\Rightarrow (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C$$

Viceversa, sia $u \in C$ tale che $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C$

$$\Rightarrow \|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 \text{ con } v \in C$$

$$\|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 = \|u^2\| - 2(f, u) - \|v\|^2 + 2(f, v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(f, v - u)$$

$$\|u\|^2 - \|v\|^2(f - u, v - u) + 2(u, v + u) \leq -\|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(u, v) = -\|u - v\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \|f - u\|^2 \leq \|f - v\|^2 \quad \forall v \in C$$

□

Corollario 1

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $M \subset H$ un sottospazio vettoriale chiuso.

$$\Rightarrow \forall f \in H \quad \exists! u \in M \text{ tale che } \|u - f\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

$$\text{e } u = p_M(f) \Leftrightarrow u \in M, (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M (f - u \in M^\perp)$$

Dimostrazione

Dal teorema della proiezione $\exists u \in M \quad u = p_M(f)$ e $u = p_M(f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M \\ \forall v \in M \end{cases}$$

$\Rightarrow u + v \in M$ perché M sottospazio

$\Rightarrow (f - u, v) \leq 0 \quad \forall v \in M$ ma anche $-v \in M$

$-(f - u, v) \geq 0 \quad \forall v \in M$

$\Rightarrow (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

Viceversa

se $u \in M$ tale che $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \Rightarrow v - u \in M \quad \forall v \in M$

$(f - u, v - u) = 0 \quad \forall v \in M \Rightarrow u = p_M(f)$

□

Osservazione

Se ci chiede la proiezione e non riusciamo bene a trovare la proiezione, ci si fa un'idea e si verifica se soddisfa la caratterizzazione

Lezione 22 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-20

0.1 boh

Definizione 1

$S \subset H$ sottoinsieme

$$S^\perp = \{f \in H \mid (f, g) = 0 \quad \forall g \in S\}.$$

questo viene anche chiamato complemento ortogonale di S

Proposizione 1

Sia $S \subset H \Rightarrow S^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso

Osservazione

In dimensione infinita esistono sottospazi non chiusi

Esempio

$$C([0, 1]) \subset L^2((0, 1))$$

$C([0, 1])$ non è chiuso in $L^2([0, 1])$

Quindi dire "chiuso" non è una banalità

Se $f_1, f_2 \in S^\perp, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g) = 0 \quad \forall g \in S$$

Se $\{f_n\} \subset S^\perp, f_n \rightarrow f$ in H

$$\Rightarrow (f_n, g) = 0 \quad \forall n, \forall g \in S$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (f, g)$$

$| (f_n, g) - (f, g) | = | (f_n - f, g) | \leq \| f_n - f \| \| g \| \rightarrow 0$ se converge uniformemente.

Corollario 1

Sia $M \subset H$ un sottospazio chiuso proprio $\Rightarrow \exists g \in M^\perp \setminus \{0\}$

Dimostrazione

Sia $f \in H \setminus M$ e sia $u = pr_M(f) \in M$

$$\Rightarrow f \neq u \text{ e } (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

$$\Rightarrow f \cdot u \neq 0 \text{ e } f - u \in M^\perp$$

□

Osservazione

$M = C([0, 1]) \subset L^2((0, 1))$ sottospazio proprio non chiuso

$$\text{Sia } g \in M^\perp \Leftrightarrow \int_{[0,1]} g f dm = 0 \quad \forall f \in C([0, 1]) \Rightarrow g = 0$$

Teorema 1 (Riesz) (rappresentazione del duale per uno spazio di Hilbert)

Sia H uno spazio di Hilbert

$\forall L \in H'$ (spazio duale = {funzionali su H lineari e continui})

$\exists! g \in H$ tale che $L(f) = (f, g) \quad \forall f \in H$

$$\text{e } \|L\|_{H'} = \|g\|_H$$

Dimostrazione

Se $L0 \rightarrow g = 0$ $L(f) = (f, 0) = 0 \quad \forall f \in H$

Se $L \neq 0 \Rightarrow \ker(L) = \{f \in H : L(f) = 0\}$ è un sottospazio proprio ($L \neq 0$) è chiuso (perché L continuo)

$\Rightarrow \exists \tilde{g} \in \ker(L)^\perp \setminus \{0\}$

Osserviamo che $L(\tilde{g}) \neq 0$ perché

se $L(\tilde{g}) = 0 \Rightarrow \tilde{g} \in \ker(L) \cap \ker(L)^\perp \Rightarrow g^{\perp 0}$

$\forall f \in H$

$$L(f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g})) = L(f) - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}L(\tilde{g}) = 0$$

$$\Rightarrow f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g} \in \ker(L)$$

$$\Rightarrow (f - \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\tilde{g}, \tilde{g}) = 0 \text{ perché } \tilde{g} \in \ker(L)^\perp$$

$$\Rightarrow (f, \tilde{g}) = \frac{L(f)}{L(\tilde{g})}\|g\|^2$$

$$\Rightarrow (f, \frac{L(\tilde{g})}{\|\tilde{g}\|^2}\tilde{g}) = L(f) \quad \forall f \in H$$

se $g_1, g_2 \in H$

tale che $L(f) = (f, g_1) = (f, g_2) \quad \forall f \in H$

$$\Rightarrow (f, g_1 - g_2) = 0 \quad \forall f \in H \Rightarrow g_1 = g_2$$

Isometria:

$$L(f) = (f, g) \quad f \in H \Rightarrow |L(f)| = |(f, g)| \leq \|f\|\|g\| \Rightarrow \|L\|_{H'} = \sup_{f \in H \setminus \{0\}} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|} \leq \|g\|$$

Ma $L(g) = \|g\|^2$

$$\Rightarrow \frac{L(g)}{\|g\|} = \|g\|$$

$$\Rightarrow \|L\|_{H'} = \|g\| \quad \square$$

Definizione 2

Un sottoinsieme $S \subset H$

si dice linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è composto da vettori linearmente indipendenti.

Un sottoinsieme S linearmente indipendente si dice sistema ortogonale se $(f, g) = 0 \forall f, g \in S$

S si dice sistema ortonormale se S è un sistema ortogonale e $\|f\| = 1 \quad \forall f \in S$

Proposizione 2

Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia S un sistema ortonormale di H

$\Rightarrow S$ è al più numerabile

Dimostrazione

$$S = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = (\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \|\varphi_\beta\|^2 + \|\varphi_\beta\|^2 = 2$$

$$B_{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha) = \{f \in H : \|f - p\varphi_\alpha\| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

Sia $D \subset H$, $\bar{D} = H$

D numerabile

$$D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)} \neq \emptyset \quad \forall \alpha$$

$$\forall \alpha \exists v_\alpha \in D$$

$$S \rightarrow D$$

$$\varphi_\alpha \in S \rightarrow v_\alpha \in D \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\alpha)}.$$

\Rightarrow è iniettiva $\Rightarrow \text{card}(S) \leq \text{cord}(D)$

□

Definizione 3

Sia $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormale numerabile in H spazio di Hilbert.

$\{\varphi_k\}$ si dice completo (o base hilbertiana) se l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di $\{\varphi_k\}$ è denso in H

$$(se \forall f \in H \quad f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R})$$

Teorema 2

Sia H uno spazio di Hilbert separabile

$\Rightarrow H$ ammette un sistema ortonormale completo

Dimostrazione

Sia $D = \{f_n\}$ sottoinsieme numerabile e denso

da D si togliano gli elementi che sono della forma $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k f_k$, $a_k \in \mathbb{R}$
si ottiene un sottoinsieme di S linearmente indipendente

$\Rightarrow D \subseteq S$ insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S

$\Rightarrow H = \overline{D} \subseteq \overline{S} = H$

S si ortonormalizza mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Alberto-Agostinelli (Gram-Schmidt)

□

Proposizione 3

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormale numerabile
 $\forall n \geq 1$ sia $M_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \rangle = \{\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ (sottospazio vettoriale chiuso)

$\forall f \in H$ si ha

$$p_{M_n}(f) \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

e

$$\|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2.$$

Dimostrazione

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $f \in H$

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\|^2 &= (f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_k \lambda_i (\varphi_k, \varphi_i) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2. \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 - 2\lambda_k (f, \varphi_k)) = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k - (f, \varphi_k))^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 \\ &\geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2. \end{aligned}$$

$$se \lambda_k = (f, \varphi_k) \Rightarrow \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2$$

□

Corollario 2 (Disuguaglianza di Bessel)

H spazio di Hilbert $\{\varphi_k\}$ sistema fondamentale numerabile
 $\Rightarrow f \in H$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f, f_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

Dimostrazione

$\forall n$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 = \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 \geq 0.$$

□

Definizione 4

Se $\{\varphi_k\}$ è un sistema ortonormale, i numeri (f, φ_k) si dicono coefficienti di Fourier di f
 $\Rightarrow \{(f, \varphi_k)\} \in l^2$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k = f.$$

si chiama serie di Fourier di f

Lezione 23 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-23

0.1 Boh

H spazio di Hilbert $\{\varphi_k\}$ sistema ortonormale numerabile in $H \Rightarrow \forall f \in H, \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2 \leq \|f\|^2$

$$\gamma : H \rightarrow l^2 \quad \text{è lineare } \tau(f+g) = \{(f+g, \varphi_k)\}_{l^2} = \{(f, \varphi_k)\} + \{(g, \varphi_k)\}$$

$$f \rightarrow \{(f, \varphi_k)\}_{l^2}$$

$$\|\tau(f)\|_{l^2} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|$$

$$\tau \text{ è continua } \|\tau\|_{(H, l^2)} \leq 1$$

Proposizione 1

$\forall \{\lambda_k\} \in l^2$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k$ è convergente ad un elemento f tale che $(f, \varphi_k) = \lambda_k \quad \forall k$

Osservazione

La proposizione dice che τ è iniettiva

$$\forall \{\lambda_k\} \in l^2 \exists f = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k \in H \text{ tale che } \tau(f) = \{\lambda_j\}$$

Dimostrazione

sia $\{\lambda_k\} \in l^2 (\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 < +\infty)$

sia $f_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k$ mostriamo che è di Cauchy, siano $m > n$

$$\|f_m - f_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \lambda_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ di Cauchy in Hilbert

$$\Rightarrow \exists f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_j \varphi_k$$

$\forall k$ fissato se $n > k$

$$(f, \varphi_k) = (f - f_n, \varphi_k) + (f_n, \varphi_k) = (f - f_n, \varphi_k) + \lambda_k.$$

$$\Rightarrow |(f, \varphi_k), \lambda_k| = |(f - f_n, \varphi_k)| \leq \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (f, \varphi_k) = \lambda_k \quad \forall k$$

□

Osservazione

Se $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k$

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 =$$

$$\|\lambda_k\|_{l^2}^2 = \|\tau(f)\|_{l^2}^2$$

\Rightarrow

$$f \in H \rightarrow \{(f, \varphi_k)\} \in l^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k = \hat{f} \stackrel{?}{=} f \text{ non sempre}$$

Teorema 1

Sia H uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormale in H sono equivalenti

1. $\{\varphi_k\}$ è completo
2. $\forall f \in H \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k$
3. $\forall f \in H \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2 \rightarrow$ Perseval
4. $\forall f, g \in H \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) (g, \varphi_k)$
5. $f = 0 \Leftrightarrow (f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \geq 1$

Dimostrazione

$$1) \Rightarrow 2)$$

se (φ_k) è completo $\Rightarrow d$ è limite di una combinazione lineare finita di elementi di $\{\varphi_k\}$ che dista ovunque da f meno di ε
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\| < \varepsilon.$$

Ma $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\| \geq \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|.$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \text{ tale che } \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k$$

2) \Rightarrow 1) ovvio

$$2) \Leftrightarrow 3) \quad \|f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 \quad \forall n$$

3) \Rightarrow 4)

$$\begin{aligned} \text{siano } f, g \in H, \|f+g\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f_g, \varphi_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} ((f+\varphi_k)^2 + (g, \varphi_k)^2 + 2(f, \varphi_k)(g, \varphi_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (g, \varphi_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)(g, \varphi_k) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)(g, \varphi_k) \end{aligned}$$

4) \Rightarrow 3) per $f = g$

2) \Rightarrow 5)

$$\forall f \in H, g = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \text{ quindi } f = 0 \Leftrightarrow (f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k$$

$$5) \Rightarrow 2) \quad f \in H \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k = \hat{f} \in H$$

$$\text{e } (\hat{f}, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad \forall k$$

$$\Rightarrow (f - \hat{f}, \varphi_k) = 0 \quad \forall k$$

5) $\Rightarrow f = \hat{f}$

□

Osservazione

Il teorema dice che $\{\varphi_k\}$ completo $\Leftrightarrow \psi$ isomorfismo (quindi iniettivo poiché suriettivo lo è sempre)

Corollario 1

Ogni spazio di Hilbert H separabile di dimensione finita è isomorfo a l^2

Un esempio esplicito di sistema ortonormale completo in L^2 è il sistema trigonometrico

$L^2((-\pi, \pi))$ che contiene funzioni del tipo $\cos(kx), \sin(kx) \quad k \geq 0 \quad x \in (-\pi, \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } k = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = m = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq m \end{cases} .$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(mx) dx = 0 \quad \forall k, m \geq 0.$$

sistema ortonormale detto sistema trigonometrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k \geq 1} .$$

sia $f \in L^2((-\pi, \pi))$

serie di Fourier di f associata al sistema trigonometrico:

$$(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + (f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}) \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + (f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}) \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \dots$$

$$\dots = (f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}) \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + (f, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}) \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} = .$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx \right) \cos x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx \right) \sin x + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx) + \dots$$

Serie di Fourier di f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k$$

Una somma finita del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

si dice polinomio trigonometrico

Mostriamo che questo polinomio trigonometrico converge in L^2

dimostriamo il risultato per funzioni continue su L^2 e per densità lo è anche in L^2

Teorema 2

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ periodico di periodo 2π

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists p_n$ polinomio trigonometrico tale che $\|p_N - f\|_\infty < \varepsilon$

Se faccio vedere che vicino ad f esiste questo polinomio p_n che dista ε in norma infinito, allora vicino a f c'è anche il suo polinomio trigonometrico di Fourier

Lemma 1

\exists successione di polinomi trigonometrici $\{\mathbb{Q}_n(x)\}$ tale che

1. $\mathbb{Q}_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{Q}_n(x) dx = 1$
3. $\forall \delta > 0 \quad \sup_{\delta < |x| < \pi} \mathbb{Q}_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Dimostrazione

Sia $Q_n(X) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n \quad c_n > 0$

Q_n è un polinomio trigonometrico di grado n (si dimostra per induzione su n)

c_n viene scelto $c_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n dx}$

in modo tale che $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) dx = 1$

quindi per ora sono verificate 1. e 2.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{2} dx \\ & \geq 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2} \right) \sin x dx = \frac{4}{n+1} \left| - \left(\frac{1-\cos x}{2} \right)^{n+1} \right|_0^{\pi} = \frac{4}{n+1} \frac{1}{2^n}. \\ & c_n \leq \frac{2^n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

□

Lezione 24 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-23

0.1 altre cose sui polinomi trigonometrici

Teorema 1 (Weierstrass)

Data $f \in C(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π , $\forall \varepsilon > 0 \exists p_n$ polinomio trigonometrico tale che $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$

Dimostrazione

$$p_n(x) = \int_{-x}^x Q_n(x-y)f(y)dy.$$

Osserviamo che $p_n(x)$ è un polinomio trigonometrico

$$Q_n(x) = \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=0}^n (\alpha_k^n \cos(kx) + \beta_k^n \sin(kx)).$$

$$Q_n(x-y) = \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=0}^n (\alpha_k^n \cos(kx-ky) + \beta_k^n \sin(kx-ky)).$$

è combinazione lineare di $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$

$\Rightarrow p_n(x)$ è polinomio trigonometrico

$$p_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x-y)f(y)dy = - \int_{\pi+x}^{\pi-x} Q_n(t)f(x-t)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} Q_n(t)f(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)f(x-t)dt$$

Osservo che p_n come regolarità prende il "meglio" delle funzioni Q_n e f

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)f(x-t)dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + \int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + \\ &\quad + \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \end{aligned}$$

$f \in C(\mathbb{R}) + f$ periodica \Rightarrow uniformemente continua.

Allora dato $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $x \in \mathbb{R}, \forall t$ tale che $|t| < \delta$

Scegliendo questo δ , sia ha $|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt + 8\pi \|f\|_\infty \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_n(t) < \frac{\varepsilon}{3}$ per $n \geq n_\delta$ \square

Teorema 2 (Completezza in $L^2(-\pi, \pi)$ del sistema trigonometrico)

Il sistema trigonometrico $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(kx)\}_{k \geq 1}$ è completo in

$$L^2((-\pi, \pi))$$

Dimostrazione

$f \in L^2((-\pi, \pi)); \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C_c((-\pi, \pi))$ tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon$
 $\Rightarrow g(-\pi) = g(\pi) = 0 \Rightarrow g$ si estende per periodicità a una funzione $C(\mathbb{R})$
 Per il teorema di Weierstrass $\exists p_n$ polinomio trigonometrico tale che $\|g - p_n\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|g - p_n\|_{L^2((-\pi, \pi))} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g - p_n|^2 dx} \leq \|g - p_n\|_\infty \sqrt{2\pi} < \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

In conclusione, $\|f - p_n\|_{L^2((-\pi, \pi))} \leq \|f - g\|_2 + \|g - p_n\|_2 < \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon = (1 + \sqrt{2\pi})\varepsilon$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Dove viene usato il fatto che la convergenza in L^2 implica quella puntuale solo a meno di un'estratta, la convergenza quasi ovunque si ha per una sottosuccessione

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

□

0.2 Svolgimento esercizi foglio 8

(X, μ) spazio di misura $R : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$$K = \{u \in L^2(X) : |u(x)| \leq h(x) \text{ q.o. in } X\}.$$

$K \neq \emptyset$ perché $0 \equiv u$ in K

K convesso : $u_1, u_2 \in K, \lambda \in [0, 1]$

Il resto delle soluzioni te le ha mandate Alberto su wa, nei messaggi importanti

Lezione 25 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-27

0.1 Prodotto di spazi di Misura

$(X, \mu), (Y, \nu)$ spazi di misura (μ, ν misure esterne)

M_μ misurabili in X rispetto a μ

M_ν misurabili in Y rispetto a ν

Vogliamo definire una misura in $X \times Y$

che sia il prodotto delle due misure $\mu \times \nu$

ovvero si vuole che:

se $A \in M_\mu, B \in M_\nu$

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

Nota

Non ci basta questo perché non tutti gli insiemi in $X \times Y$ sono di forma $A \times B$. Si può pensare ad una circonferenza in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che non è il prodotto delle proiezioni.

Definizione 1

La misura prodotto $\mu \times \nu$ su $X \times Y$ è definita da: $\forall E \subseteq X \times Y$

$$\mu \times \nu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i), \ A_i \in M_\mu, \ B_i \in M_\nu, \ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i \right\}.$$

Se $A \in M_\mu, B \in M_\nu \Rightarrow R = A \times B$ rettangolo (misurabile) e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i$ si dice plurirettangolo.

Osservazione

1. $\mu \times \nu$ è una misura (esterna), infatti:

- $\mu \times \nu : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$
- $0 \leq \mu \times \nu(\emptyset) \leq \sum_i \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$
- Se $E \subseteq \sum_{j=1}^{+\infty} E_j$

Se $\exists j$ tale che $\mu \times \nu(E_j) = +\infty \Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j)$

Se $\mu \times \nu(E_j) < +\infty \ \forall j$

$\Rightarrow \forall j, \forall \varepsilon \ \exists \{A_i^j \times B_i^j\}_i$

tale che $E_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^j \times B_i^j$

$\mu \times \nu(E_j) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i^j)\nu(B_i^j) < \mu \times \nu(E_j + \frac{\varepsilon}{2})$

$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^j \times B_i^j$ è un plurirettangolo

$\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i^j) \times \nu(B_i^j)$

$\leq \sum_{j=1}^{+\infty} (\mu \times \nu(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j})$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j) + \varepsilon$ per $\varepsilon \rightarrow 0$

$\mu \times \nu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu \times \nu(E_j)$

2. La famiglia dei plurirettangoli è chiusa per unioni numerabili e per intersezioni finite, siano A_i, B_i, C_i, D_i misurabili rispettivamente per μ e per

$\nu \forall i$

$$P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i, \quad Q = \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_j \times D_j.$$

$$P \cap Q = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_i \times B_i \cap C_j \times D_j = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j).$$

3. La differenza di due rettangoli è un plurirettangolo

$$R = A \times B, \quad S = C \times D$$

$$R \setminus S = A \setminus C \times B \cup A \cap C \times V \setminus D$$

4. Ogni plurirettangolo si può scrivere come unione numerabile di rettangoli disgiunti. $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i = A_1 \times B_1 \cup (A_2 \times B_2 \setminus A_1 \times B_1) \cup A_3 \times B_3 \setminus \bigcup_{i=1}^2 A_i \times B_i)$

$$P = A_1 \times B_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} (A_i \times B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \setminus B_j)$$

P plurirettangolo

$$P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i$$

$$\chi_P(x, y)$$

$\forall y \in Y$ fissato

$$x \in X \rightarrow \chi_P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in P \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin P \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \\ 1 & \text{se } x \in A_i \text{ tale che } y \in B_i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \\ \chi_{\bigcup_{y \in B_i} A_i}(x) & \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall y \in Y \chi_P(\cdot, y)$ è μ -misurabile

Se $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i$ disgiunti

$\forall y \notin \bigcup_i B'_i \Rightarrow \chi_p(\cdot, y) \equiv 0$

Se $y \in \bigcup_i B'_i \Rightarrow \exists i$ tale che $y \in B_i$ e $\chi_p(\cdot, y) = \chi_{A'_i}$

$$\Rightarrow \int_X \chi_p(x, y) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin \bigcup_{i=1}^{+\infty} B'_i \\ \mu(\bigcup_{y \in B'_i} A'_i) & \end{cases} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i) \chi_{B'_i}(y)$$

$y \in B'_i \cap B'_j \Rightarrow A'_i \cap A'_j = \emptyset$

Proposizione 1

Se $P \subset X \times Y$ plurirettangolo

$$\Rightarrow \mu \times \nu(P) = \int_Y (\int_X \chi_P(x, y) d\mu) d\nu = \int_X (\int_Y \chi_P(x, y) d\nu) d\mu$$

Dimostrazione

$$P \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i, A_i \in M_\mu, B_i \in M_\nu$$

$\Rightarrow \chi_P(x, y) \leq \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i}(x, y)$ e sono funzioni caratteristiche di plurirettangoli

$$\int_Y \left(\int_X \chi_P(x, y) d\mu \right) d\nu \leq \int_Y \left(\int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i}(x, y) d\mu \right) d\nu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_Y \left(\int_X \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A_i \times B_i}(x, y) d\mu \right) d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}(y) d\mu \right) d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \\
&\Rightarrow \int_Y \left(\int_X \chi_P(x, y) d\mu \right) d\nu \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \nu(B_i), P \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i \right\} = \mu \times \nu(P) \\
P &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i \\
A'_i \times B'_i \cap A'_j \times B'_j &= \emptyset \text{ se } i \neq j \\
&\int_Y \left(\int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu \\
&= \int_Y \left(\int_X \sum_{i=1}^{+\infty} \chi_{A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{A'_i \times B'_i} d\mu \right) d\nu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i) \nu(B'_i) \geq \mu \times \nu(P) \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 1

Se $E \subseteq X \times Y$

$$\mu \times \nu(E) = \inf \{ \mu \times \nu(P), P \text{ plurirettangolo } E \subseteq P \}.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
E \subseteq P &\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \mu \times \nu(P) \\
&\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \mu \times \nu(P) \\
&\Rightarrow \mu \times \nu(E) \leq \inf \{ \mu \times \nu(P), P \text{ plurirettangolo } E \subseteq P \} \\
\text{Se } P &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} A'_i \times B'_i \text{ disgiunti} \\
&\Rightarrow \mu \times \nu(P) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A'_i) \nu(B'_i) \geq \mu \times \nu(E) \quad \square
\end{aligned}$$

Proposizione 2

$P \subseteq X \times Y$ plurirettangolo $\Rightarrow P$ è $\mu \times \nu$ -misurabile

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
&\text{Basta dimostrare che } A \in M_\mu, B \in M_\nu \Rightarrow A \times B \in M_{\mu \times \nu} \\
&\text{Th. } \forall E \subseteq X \setminus Y \quad \mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B) = \mu \times \nu(E) \\
&\text{Sia } Q \text{ plurirettangolo, } Q \geq E
\end{aligned}$$

$$\mu \times \nu(Q \cap A \times B) + \mu \times \nu(Q \setminus A \times B).$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Y \left(\int_X \chi_{Q \cap A \times B}(x, y) d\mu \right) d\nu + \int_Y \left(\int_X \chi_{Q \setminus A \times B} \right) d\nu \\
&= \int_Y \int_X (\chi_{Q \cap A \times B} + \chi_{Q \setminus A \times B}) d\mu = \int_Y \int_X \chi_Q d\mu = \mu \times \nu(Q) \\
&\mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B)
\end{aligned}$$

Prendendo l'inf rispetto a Q

$\Rightarrow \mu \times \nu(E \cap A \times B) + \mu \times \nu(E \setminus A \times B) \leq \mu \times \nu(E) \Rightarrow A \times B \text{ misurabile.}$

□

Proposizione 3

$\mu \times \nu$ è regolare, ovvero $\forall E \subset X \times Y \exists F \in M_{\mu \times \nu}$ tale che $E \subseteq F$ e $\mu \times \nu(E) = \mu \times \nu(F) \Rightarrow A \times B$ misurabile.

Dimostrazione

per esercizio.

□