Lezione 04 Meccanica Razionale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Ripasso sui sistemi differenziali ad un grado di libertà

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}.$$

$g : \Omega \to \mathbb{R}^n \; \| omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $n \in \mathbb{N}$
$z_0 \in \Omega \quad t \to z(t) \; r \in R \subseteq \mathbb{R}$ intorno di O definiamo questo con (SDO1)
$g = 0, c \in \mathbb{R}, z$ soluzione globale
$g = z^2, \frac{1}{z}$ soluzione locale
Sono soluzioni uniche
Esercizio 4 foglio 1

$$\begin{cases} = \sqrt{|z|} \\ \text{z(0) = z}_0 \end{cases}$$

$z_0 = 0 \;\; z(t) = 0$ soluzione stazionaria—
$z_0 \neq 0 \;\; z_0 > 0$

$$t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dy}{\sqrt{y}} \quad z > 0.$$

$t(z) = 2\sqrt{z} - 2\sqrt{z_0}$
$z(t) = (\sqrt{z}_0 + \frac{t}{2})^2$
$t > -2\sqrt{z_0} \qquad I = (-2\sqrt{z}_0, +\infty)$
Osservazione
per $z_0 = 0$ ha più soluzioni
1) $\exists$ per $z_0 \in \mathbb{R}$
2) $\exists!$ per $z_0 \neq 0$
Osservazione
Lontano dei punti singoli costruiamo una soluzione unica
Metodo "separazione variabili"
$g \in C(\Omega)$
$I_0 \times \Omega_0$ intorno di $(0, z_0)$
$g(z_0) \neq 0$ Possiamo assicurare
$g|_\Omega \neq 0$

$$\frac{dz}{dt} = g(z) \quad dt = \frac{dz}{g(z)} \quad t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dy}{g(y)} \quad z \in \Omega_0.$$

La soluzione unica di (SDO1) è l'inversa di $t(z)$

$$A(t, z(t)) := t - \int_{z_0}^{z(t)} \frac{dy}{g(t)}.$$

Il problema è equivalente a

$$\begin{cases} \dot{A} = 1 - \frac{\dot{z}(t)}{g(z(t))} = 0 \\ A(0, z_0) = 0 \end{cases}.$$

Per il teorema della funzione implicita

$$A(t, z(t)) = 0.$$

Esercizio 3 foglio 1

$$\begin{cases} \dot{z} = z^2 - 1 \\ z(0) = z_0 \qquad z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

1)$z_0 \in \mathbb{R}$ t.c. soluzione stazionaria
2)$z_0 \in \mathbb{R}$ tale che soluzione limitata

---

1) $z_0 = \pm 1$ p.t singolari
2) $z_0 \neq \pm 1$ $t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dy}{y^-1}$

$$t(z) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y_1} \right) dy = \frac{1}{2} \log \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{z_0+1}{z_0-1}.$$

$\frac{z-1}{z+1}\alpha_0 = e^{2t}$
$z(t) = \frac{\alpha_0 + e^{2t}}{\alpha_0 - e^{2t}} = 1 + \frac{2e^{2t}}{\alpha_0 - e^{2t}}$
Se $z_0 \in (-1, 1)$ $\alpha_0 < 0$
la soluzione è globale e limitata
Per $z_0 \in [-1, 1]$ soluzione è limitata.
Negli altri casi la soluzione diverge.
Esercizio 2
$t \to z(t)$ periodica
$z(t) = \varphi_t(z_0)$ (evoluto al tempo t)
$\exists T > 0$ $\varphi_T(z_0) = z_0$
$y_0 = \varphi_s(z_0)$ $s \in \mathbb{R}$
$\varphi_T(y_0) = \varphi_T \varphi_s(z_0) = \varphi_{T+s})z_0) = \varphi_s(z_0) = y_0$

2 Procedura soluzione SDO1

autonomo per $n = 1$
Passo 1
Punti singolari di $g = 0$
Se z_0 singolare $z(t) = z_0$ $\forall t$ soluzione stazionaria
Passo 2
z_0 tale che $g(z_0) \neq 0$
Ω_0 intorno di z_0 massimale tale che $g|_{\Omega} \neq 0$
$\Omega_0 \subseteq \Omega$ $\Omega = domg$
$\Omega_0 = (z_0, z_1)$
Per $z \in \Omega_0$, calcoliamo

$$t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dy}{g(y)}.$$

tempo di raggiungimento di z (da z_0)
Passo 3

Invertiamo la funzione $z \to t(z)$ (monotonia)
Troviamo $t \to z(t) \in \Omega_0$
$t \in I_0$ intorno di zero
Soluzione locale unica di (SDO1)

$$\left(z(t) = \frac{1}{t'(z)|_{z(t)}} = g(z(t)), \quad z(0) = z(t(z_0)) = z_0 \right).$$

Teorema della funzione implicita $\Rightarrow$ unicità
Passo 4
Estremi.

$$t_+ := \int_{z_0(t_0)}^{z_t(z_0)} \frac{dy}{gy}.$$

$$t_- := \dots$$

$|t_\pm| = \bar{i}nfty$ oppure $|t_\pm =< \infty$ $\begin{cases} \text{soluzione non globale } (z_\pm \in \partial\Omega) \\ \text{perdita di unicità } (z_\pm \text{ punto singolare di g }) \end{cases}$

2.1 Equilibri

SDO1 autonomi $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Definizione 1
z t.c. $g(z) = 0$ punto singolare
Anche detto punto di equilibrio di SDO1. Nel caso meccanico

$$0 = g(z) = (v, f(x, v)).$$

$(x, 0)$ t.c. $f(x, 0) = 0$ stato di equilibrio
x è detta configurazione di equilibrio

Definizione 2 (Classificazione degli equilibri)
Un punto di equilibrio z_{eq} del $SDO1$ è:
1) stabile se $\forall\varepsilon > 0$ $\bar{B}_\varepsilon(z_{eq}) \subset \Omega$, $\exists\delta > 0$ t.c. $\forall z_0 \in B_\delta(z_{eq}), z(t) \in B_\varepsilon(z_{eq})$ $\forall t$
2) asintoticamente stabile se inoltre $\exists\delta' > 0$ t.c. $\forall z_0 \in B_{\delta'}(z_{eq})$, $\lim_{t\to\infty} z(t) = z_{eq}$
3) instabile se non è stabile