# Lezione 1 Algebra I (Secondo semestre)

Federico De Sisti

2025-03-09

## 0.1 Ideali primi e massimali

**Definizione 1**
*Sia* $(R, +, \cdot)$ *un anello. Un ideale* $I \subseteq R$ *si dice primo se*

- $I \neq R$
- $\forall a, b \in R$ *se* $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$

**Teorema 1**
$(R, +, )$ *anello* $I \subseteq R$ *ideale (bilatero). Allora l'anello quoziente* $R/I$ *è dominio d'integrità* $\Leftrightarrow I$ *è ideale primo*

**Dimostrazione**
*Per ogni* $a, b \in I$*, la proprietà :*

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [0] \text{ in } R/I \Rightarrow [a] = [0] \vee [b] = [0] \text{ in } R/I.$$

*è equivalente a richiedere* $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in B \vee b \in I$ □

**Esempio**
$R = \mathbb{C}[x]/(x^2)$
Osserviamo che spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]/(x^2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[x]$
**Ricorda**
Gli ideali di $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali di $\mathbb{C}[x]$ che contengono $(x^2)$
L'ideale $(x) \in \mathbb{C}[x]$ contiene $(x^2)$ e $(x)/(x^2)$ in $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ è un ideale primo
Infatti:
$C[x]/(x^2)/x/(x^2)\mathbb{C} \Rightarrow$ è un corpo $\Rightarrow$ è un dominio d'integrità
Osserviamo che l'ideale banalae in $C[x]/(x^2)$ è $(x^2)/(x^2)$
il quale non è primo infatti $x \cdot x = x^2$
$\Rightarrow [x] \cdot [x] = [x^2] = [0]$ in $C[x]/(x^2)$
**Osservazione**
$\mathbb{C}[x]/(x^2)$ si chiama

- "algebra dei numeri duali"
- "fat point" (Geometricamente è un punto)

**Definizione 2**
$(R, +, \cdot)$ *anello,* $I \subseteq R$ *si dice ideale massimale se:*

- $I \neq R$
- *Dato un ideale* $J \subseteq R$ *tale che* $I \subseteq J$*, si ha*
  $I = J \quad \vee \quad J = R$

**Teorema 2**
*$(R, +, \cdot)$ anello commutativo, $I \subseteq R$ ideale*
*$I$ è massimale se e solo se $R/I$ è un campo*

**Dimostrazione**
*Ricordo che esiste una corrispondenza biunivoca tra { Ideali di $R$ che contengono $I$} $\leftrightarrow$ { ideali di $R/I$}*
*$J- > J/I$*
*$\Rightarrow$ $I$ massimale se e solo se $R/I$ contiene solo ideali banali*
*$\Rightarrow$ Sappiamo inoltre che (data la commutatività per ipotesi), $R/I$ contiene solo ideali banali $\Leftrightarrow$ $R/I$ è banale* $\square$

**Esercizio**
$n \geq 1$ intero, $(n) \subseteq \mathbb{Z}$ ideale in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
dimostra che sono equivalenti

- $(n)$ è ideale primo
- $n$ è numero primo

## 0.2 Polinomi

In questa sezione lavoriamo con anelli commutativi.
Problema $S$ anello commutativo, $R \subseteq S$ sottoanello, $t \in S$
Vogliamo costruire il più piccolo sottoanello $B$ di $S$ che contenga $R$ e $t$
**Osservazione**
Ogni sottoanello è chiuso rispetto alle operazioni.

- $t \in B \Rightarrow t^n = t \cdot \ldots \cdot t \in B$ ($n$ volte) $\quad \forall n \geq 1$ intero
- $r \in R \Rightarrow r \cdot t^n \in B$
- $r_1, \ldots, r_k \in R \subseteq B \Rightarrow r_0 + r_1 t + \ldots r_k t^k \in B$

Deduciamo che $R[t] \subseteq B$ dove $R[i] = \{r_0, +r_1 t + \ldots + r_k t^k \mid k \in \mathbb{N}, r_0, \ldots, r_l \in R\}$

**Proposizione 1**
*$R[t] = B$*

**Dimostrazione**
*La dimostrazione è lasciata al lettore (basta verificare che $R[t]$ è sottoanello di $S$* $\square$

**Esempi**
1) $R = \mathbb{R}, S = \mathbb{C}, t = i$

$$R[t] = R[i] = \{r_0 + r_1 i + r_2 i^2 + \ldots + r_k i^k \ |r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{c_0 + c_1 i \mid c_0, c_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}.$$

Qual'è il problema? La scrittura $r_0 + r_1 t + \ldots + r_k t^k$ non è unica.

**Definizione 3**
*$R \subseteq S$ sottoanello (commutativo), $t \in S$, allora $t$ è trascendente su $R$ se la scrittura $r_0 + \ldots + r_k t^k$ è unica*

**Proposizione 2**
*$t$ è trascendente su $R$ se e solo se $r_0 + r_1 t + \ldots + r_k t^k = 0 \Leftrightarrow r_0 = r_1 = \ldots = r_k = 0$*

**Dimostrazione**
($\Rightarrow$) *Se $t$ è trascendente $\Rightarrow 0 \in R$ ammette scrittura unica $\Rightarrow$ vale la proprietà*
($\Leftarrow$) *Se vale tale proprietà*
*P.A.*
$a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k = b_0 + b_1 t + \ldots + b_h t^h$
*Assumo $k \geq h$ senza perdita di generalità*
*Porto tutto a sinistra*
$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t + +(a_h - b_h)t^h + \ldots a_k t^k = 0$
*Dove tutti i termini sono gli $r_i$ nella struttura precedente*
*Per ipotesi $\Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i \leq h, a_j = 0 \ \forall h < j \leq k$*
$\Rightarrow$ *la scrittura è unica* $\square$