Lezione 8 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-18

1 Complementi

$\mathbb{A}$ spazio affine reale con associato spazio vettoriale V

Definizione 1 (Semiretta)
Possiamo definire la semiretta di origine $Q \in \mathbb{A}$ e direzione $v \in V \setminus \{0\}$

$$P = Q + tv, t \geq 0 \quad (\overrightarrow{QP} = tv, t \geq 0).$$

Definizione 2 (Segmento)
Possiamo definire il segmento di estremi $A, B \in \mathbb{A}$ $(A \neq B)$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

i punti $p_1, \ldots, p_t$ che dividono il segmento AB in t parti uguali sono dati, cioè

$$\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_2 p_3} = \ldots = \overrightarrow{p_{t-1} B}.$$

sono dati da

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{i}{t}\overrightarrow{AB} \quad 1 \leq i \leq t-1.$$

In un riferimento affine $Oe_1 \ldots, e_n$, in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i - a_1 \\ \vdots \\ x_n^i - a_n \end{pmatrix} = \frac{i}{t} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n = a_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} ib_1(t-i)a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

in particolare, il punto medio del segmento AB ha coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

A, B, C non allineati

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

se $t, n \geq 0$ e $t + n \leq 1$ allora abbiamo un triangolo ABC
se $0 \leq t, n \leq 1$ abbiamo il parallelogramma individuato da A, B, C

Osservazione
Questo procedimento funziona in ogni dimensione, Ad esempio se A,B,C,D sono quattro punti indipendenti

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}.$$

se $0 \leq, t, n, v \leq 1$ tetraedro di vertici ABCD
se $n, t, v \geq 0$ e $n + t + v \leq 1$ si ha un parallelogramma
in generale dati $p_0, \ldots, p_k$ punti indipendenti:

$$\overrightarrow{p_0 p} = \sum_{i=1}^{k} t_i p_0 p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1.$$

definisce il **k-simplesso di vertici** $p_0, \ldots, p_k$

> **Definizione 3** (Sottosineime Convesso)
> *$S \subseteq \mathbb{A}$ si dice Convesso se per ogni $A, B \in S$ il segmento AB è contenuto in S*

2 Cambiamenti di riferimento affine

Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine n-dimensionale

$$R = Ee_1, \ldots, e_n; \qquad R' = Ff_1, \ldots, f_n \quad \text{due riferimenti affini.}$$

$$\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}, \quad \Gamma = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

$$\overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \overrightarrow{FE} = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \quad \overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i.$$

$$A = (e_{ij}) = {}_{\varepsilon}(Id_V)_{\Gamma}.$$

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EP} = -\sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{1}$$

$$\overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1, j=1}^{n} y_i a_{ij} - e_i \tag{2}$$

Comparando $(1), (2)$ troviamo

$$X = AY + b.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline Y \end{pmatrix}.$$

$$Y = A^{-1}X - A^{-1}b.$$

3 Esercizi

Trovare l'affinità $F : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che

$$f\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \quad f(r) = r', \quad f(s) = s.$$

dove $r : x = 0, \quad s : 2x - y = 0 \quad r' : x - 2y = 1$

---

f è del tipo $f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}e & b\\c & d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{smallmatrix}\right)$ con $ad + bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{1}{f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1\\x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right).$$

Imponiamo le condizioni del testo

$$f\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \to \begin{cases} a + \alpha_1 + 3b = 1 \\ \alpha_2 + c + 3d = 1 \end{cases}.$$

Un punto in $r(x_1 = 0)$ è del tipo $\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right) \in r \quad \forall t \in$

$$\left(\begin{smallmatrix}1+bt\\\alpha_2+dt\end{smallmatrix}\right) \in v'.$$

$$x_1 - 2x_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + bt - 2)\alpha_2 + dt) = 1 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1.$$

$$b - 2d = 0.$$

Sicuramente il punto di S ha coordinate

$$\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right), \quad \text{e imponiamo} \quad f\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right) \in s$$

$$f\left(\begin{smallmatrix}t\\2t\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_1+at+2bt\\\alpha_2+ct+2dt\end{smallmatrix}\right)$$

$$2(\alpha_1 + at + 2bt) = \alpha_2 + ct + 2dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - alpha_2 = 0 \\ 2a + 4b - c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3} \quad b = \frac{2}{3} = c \quad d = \frac{1}{3} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{3} \quad \alpha_2 = -\frac{2}{3}$$

$$f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\\-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}c_2\end{smallmatrix}\right)$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} > \quad \pi_2 : \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + < \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} > .$$

Dire se sono incidenti, paralleli o sghembi

$\pi_1 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Dalle equazioni cartesiane è chiaro che $pi_1 \cap pi_2 = \emptyset$, quindi $\pi_1 \pi_2$ non sono incidenti la giacitura di π_1, π_2 sono $W_1 = e_1 + e_2, \quad W_2 = e_1 + e_2$
dunque **APPUNTI DA RECUPERARE**

$$\begin{array}{c} f : A \to A \\ R_1 \quad R_1' \\ R_2 \quad R_2' \end{array}$$

$$[f]_{R_1}^{R_1'} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right).$$

$$[f]'^{R_2}_{R_2} = [Id]^{R_2}_{R_1'}[f]^{R_1'}_{R_1}[Id]^{R_1}_{R_2}.$$

Troviamo l'affinità che manda ordinatamente A, B, C in A', B', C' ove

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad B = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ a \end{smallmatrix}\right) \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

$$A \ = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad B' \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \quad C' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

$R_1 = \{A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}\}$ è un riferimento affine
$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}\}$ è un riferimento affine

$$[F]^{R_2}_{R_1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$f(\overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{B'C'}.$$

$$R = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

$$[f]^R_R = [Id]^R_{R_2}[f]^{R_2}_{R_1}[Id]^{R_1}_R.$$

$$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \{\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}\}.$$

Quindi la matrice del cambio di base da R a R_2 è

$$[Id]^R_{R_2} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Analogamente si fa con $R_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}\}$

---

4 Forme Bilineari e Simmetriche

V Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Definizione 4
*Una funzione $g : VxV \to \mathbb{K}$ Si dice **Forma bilineare** se è lineare in ciascuna variabile fissata l'altra*

in altre parole:

$$g(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha g(v_1, v_3) + \beta g(v_2, v_3) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \ \forall \alpha, \beta \in V \ \ \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Definizione 5
*g si dice **simmetrica** se*

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \ \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esempio
Sia A una atrice quadrata nxn

$$\textit{Allora} \quad g_A(x, y) = X^t AY.$$

è una forma bilineare su K^n
Esempio
g_A è bilineare con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = x_1(2y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + ey_2) =$$
$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Osservazione
g_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica

Esempio (Importante)
in $\mathbb{K}^n$ prendiamo $A = I_n$

$$g_{I_m}(X, Y) = X^t Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se g è una forma bilineare simmetrica su V e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, definisco la matrice di g rispetto a B come

$$[g]_B \to a_{ij} = g(v_i, v_j) \qquad 1 \le i, j \le n.$$

$$g(v, w) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \ \ \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i g(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i a_{ij} = X^t AY.$$

Ricorda: X^t è la matrice trasposta di X

5 Prodotto Scalare

V spazio vettoriale Reale

Definizione 6 (Prodotto Scalare)
Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica
$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$< v, v > \geq 0 \quad \forall v \in V$$
$$< v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Nomenclatura 1. $1. v, w \in V$ *si dicono* ***ortogonali*** *se*

$$< v, w >= 0.$$

2. $||v|| = \sqrt{< v, v >}$ *è la norma di* v
3. *In* $\mathbb{R}^n$, $< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *è detto* ***prodotto scalare standard***

$$|| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} || = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Proposizione 1 (Disuguaglianza di Schwarz)

$$v, w \in V \qquad < v, w >^2 \leq < v, V >< w, w > .$$

e vale l'uguaglianza se e solo se v,w sono dipendenti

Dimostrazione
Se w=0 la disuguaglianza è ovvia, quindi possiamo assumere $w \neq 0$. *Per* $v, w, a, b \in$

$$\begin{aligned} 0 \leq < av+bw, av+bw > &= a < v, av+bw > + b < w, av+bw > = \\ &= a(a < v,v > + b < v,w >) + b(a < w,v > + b < w,w >)i = \\ &= a^2 < v,v > + 2ab < v,w > + b^2 < w,w > \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la simmetria del prodotto scalare $< v,w > = < w,v >$
Notiamo che vale l'uguaglianza solo se $av + bw = 0$, *cioè* v, w *sono paralleli.*
La relazione

$$a^2 < v,v > + 2ab < v,w > + b^2 < w,w > \geq 0.$$

vale per ogni scelta di a, b.
Prendo $a = < w,w >$ *e* $b = - < v,w >$

$$0 \leq < w,w >^2 < v,v > -2 < w,w >< v,w >^2 + < v,w >^2 < w,w > .$$

Poiché $W \neq 0$, $< w,w >> 0$ *quindi posso dividere la relazione precedente per* $< w,w >$, *per altro senza cambiare verso dato che il prodotto scalare è definito positivo*

$$0 \leq < w,w >< v,w > - < v,w >^2 .$$

ovvero

$$< v,w >^2 \leq < v,v >< w,w > .$$

$\square$

Osservazione
$| < v,w > | \leq ||v|| ||w||$
Proprietà della lunghezza
1. $\forall v \in V \quad ||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v|| \quad \forall \alpha \in, \quad \forall v \in V$
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V$