Lezione 15 Geometria

Federico De Sisti

2024-04-08

1 Definizioni su operatori

Definizione 1
$T \in End(V)$ è
· Simmetrico o Autoaggiunto se

$$T = T^t.$$

· Antisimmetrico se

$$T = -T^t.$$

Proposizione 1
T è unitario se e solo se $T^t \circ T = Id_V$

Definizione 2
Sia E uno spazio euclideo. Un'affinità $f : E \to E$ si dice Isometria se la sua parte lineare $\varphi : V \to V$ è un operatore unitario

Osservazione
Le isometrie formano un gruppo denotato con $Isom(E)$ (difatti, $Isom(E) \leq Aff(E)$)
Infatti la composizione di isometrie è un isometria.
se φ_1, φ_2 sono le parti lineari di $f_1, f_2 \in Isom(E)$
Per ipotesi $\varphi_1^t \circ \varphi_1 = Id, \quad \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^t \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_2^t \circ \varphi_1^t \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id.$$

Inoltre, dalla definizione, l'inversa di un operatore unitario è unitario.
In effetti, ho dimostrato che

$$O(V) = \{f \in End(V) | f^t \circ f = Id\}.$$

è un gruppo, e un sottogruppo di $GL(V)$

Nomenclatura 1
Data $f \in Isom(E)$ diciamo che:
f è diretta se $det(\varphi) = 1$
f è inversa se $det(\varphi) = -1$

Le isometrie dirette formano un sottogruppo

$$Isom^+(E) \leq Isom(E).$$

Osservazione
1. Sia $O \in E$

$$Isom^+(E)_O \leq Isom(E)_O = \{f \in Isom(E) | f(O) = O\} \leq Isom(E).$$

Dove $Isom^+(E)_O$ sono le rotazioni di centro O
2. Se nello spazio euclideo E è assegnato con riferimento cartesiano $R = Oe_1, \dots, e_n$, ogni isometria $f \in Isom(E)$ con parte lineare $\varphi \in O(V)$ si scrive in coordinate rispetto al riferimento nella forma

$$Y + AX + c \qquad A \in O(n).$$

dove $p \in E, \quad X = [P]_R, \quad Y + [f(P)]_R$
$A = [\varphi]_{\{e_1,\dots,e_n\}}^{\{e_1,\dots,e_n\}}, \quad c = [f(O)]_R$

Teorema 1
Sia E uno spazio euclideo, Un'applicazione $f : E \to E$ è un isometria se e solo se

$$\circledast d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) \qquad \forall P,Q \in E.$$

Dimostrazione
supponiamo che f sia un'isometria, con parte lineare φ

$$d(f(P), f(Q)) = ||\overrightarrow{f(P)f(Q)}|| = ||\varphi(\overrightarrow{PQ})|| = ||\overrightarrow{PQ}|| = d(P,Q).$$

Viceversa se $f : E \to E$ un'affinità verificante l'equazione $\circledast$, fissiamo $O \in E$ e definiamo $\varphi : V \to V$ ponendo

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Poiché ogni vettore $v \in V$ è del tipo $\overrightarrow{OP}$ per qualche $P \in E$, φ è definita, e tale che se $\underline{O}$ è il vettore nullo in V

$$\varphi(\underline{O}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{O}.$$

Inoltre se $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$
$||\varphi(v) - \varphi(w)|| = ||\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})|| =$
$= ||\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(q)}|| = ||\overrightarrow{f(Q)f(P)}|| =$
$= d(f(Q), f(P)) = d(Q,P) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||v - w||$
Quindi, per una delle caratterizzazioni già dimostrati, φ è un operatore unitario.
Dimostro ora che f è un'affinità con parte lineare φ

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O) - f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

□

2 Isometrie di piani e spazi euclidei di dimensione 3

$$A \in SO(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che: } \quad \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

$a^2 + c^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta$
altre condizioni $\rightsquigarrow \quad b = -\sin\theta, \quad d = \cos\theta$
Dunque

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che se $det(A) = det(B) = -1$ allora $det(AB) = 1$, quindi se $A \in O(2) \setminus SO(2)$

$$A = (AB)B^{-1} = (AB)B^t.$$

con $B \in O(2) \setminus SO(2)$ fissato.
Scegliendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tutti gli elementi di $O(2) \setminus SO(2)$ sono del tipo

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lemma 1
1) $A_\theta = R_\theta A_O = A_O R_{-\theta}$
2) $A_\varphi \circ A_\theta = R_{\varphi-\theta}$
3) A_θ *ha autovalori* 1 *e* -1 *con autospazi ortogonali*

Dimostrazione
1. ovvio
2. $A_\varphi A_\theta = R_\varphi A_O R_\theta A_O = R_\varphi A_O A_O R_{-\theta} = R_\varphi R_{-\theta} = R_{\varphi-\theta}$
3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_φ*:*

$$det \begin{pmatrix} T - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & T + \cos\theta \end{pmatrix} = (T - \cos\theta)(T + \cos\theta) - \sin^2\theta = T^2 - 1.$$

quindi A_θ *ha autovalori* 1*. Si capisce direttamente che gli autospazi sono ortogonali. In realtà*

$$V_1 = \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix} \right), \quad V_{-1} - \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta + 1 \\ \sin\theta \end{smallmatrix} \right).$$

$\square$

Sia $c \in E \quad \sigma : E \to E$ rotazione di centro c.
La parte lineare di σ appartiene a $SO(2)$, quindi è del tipo R_θ. Se Oe_1e_2 è un riferimento cartesiano

$$R_{c,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OC}}.$$

Nomenclatura 2
riflessione: isometria diretta che fissa tutti i punti di una retta, detta asse di riflessione

Osservazione
Riflessioni per $O \Leftrightarrow O(w) \setminus SO(2)$

Lemma 2
1. $r \subset E$ retta, $C \in r$, $\quad R_{C,\theta}$ rotazione di centro C. Esistono rette s, t contenenti C tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette r, s passanti per C $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro C e

$$\rho_r \circ \rho_s = Id \Leftrightarrow r = s.$$

2. $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ è una rotazione di angolo $\theta + \varphi$ a meno che $\theta + \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, in tal caso è una traslazione che è diversa dall'identità se e solo se $C \neq D$
3. Se $C, D \in E$, $C \neq D$ e r è la retta per C e D. Se $R_{C,\theta}, R_{D,\varphi}$ sono non banali e $\theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, allora $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ e $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\varphi}$ hanno centri distinti e simmetrici rispetto ad r.