Lezione N+2 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-05-19

0.1 Fine della dimostrazione precedente

$$\begin{aligned} \Sigma :&\mathbb{Z} \to \pi(S^1, a) \\ &n \to [a^{(n)}] \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)} :&[0,1] \to S^1 \\ &t \to (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)) \end{aligned}.$$

Dimostrazione
Abbiamo visto Σ iniettiva, dimostriamo che è omomorfismo di gruppi,
Siano $n, m \in \mathbb{Z}$, dobbiamo dimostrare

$$\Sigma(n+m) = \Sigma(n) \cdot \Sigma(m).$$

□

Abbiamo $\Sigma(n+m) = [\alpha^{(n+m)}]$
$\Sigma(n) \cdot \Sigma(m) = [\alpha^{(n)}] \cdot [\alpha^{(m)}] = [\alpha^{(n)} \star \alpha^{(m)}]$
Confrontiamo i sollevamenti dei cammini $\alpha^{(n+m)}.\alpha^{(n)} \star \alpha^{(m)}$ sul rivestimento $: \mathbb{R} \to S^1$ solito.
Solleviamo α^{n+m} ottenendo (partendo da 0)
$(\alpha^{n+m})^{\uparrow}_0(t) = (n+m)t$, parte da 0 e finisce in $n+m \in \mathbb{R}$.
Solleviamo $\alpha^{(n)} \star \alpha^{(m)}$ in questo modo:
solleviamo $\alpha^{(n)}$ partendo da 0, otteniamo $(\alpha^{(n)})^{\uparrow}_0(t) = nt$, parte da 9 e finisce in n.
Poi solleviamo $\alpha^{(m)}$ partendo da n, otteniamo

$$(\alpha^m)^{\uparrow}_n = n + nt.$$

La giunzione $(\alpha^{(n)})^{\uparrow}_0 \star (\alpha^{(m)})^{\uparrow}_n$ è definita e solleva $\alpha^{(n)} \star \alpha^{(m)}$.
Allora i sollevamenti partono da 0 e finiscono in $n+m$ entrambi. Visto che $\mathbb{R}$ è convesso, questi sollevamenti sono equivalenti, segue

$$\alpha^{(n+m)} \sim \alpha^{(n)} \star \alpha^{(m)}.$$

Quindi Σ è omeomorfismo di gruppi.
Dimostriamo che Σ è suriettiva.
Sia $\alpha \in \Omega(S^1, a, a)$ dimostriamo che $\exists n \in \mathbb{Z} \quad [a]^{(?)} = [\alpha^{(n)}] = \Sigma(n)$
Solleviamo α partendo da 0, otteniamo

$$\alpha^{\uparrow}_0 : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

fissiamo un punto di $\mathbb{R}$ che non viene mandato in $a \in S^1$ da ρ, Cioè $\alpha^{\uparrow}_0$ finisce in $n \in \mathbb{Z}$
Confrontiamo α con $\alpha^{(n)}$, i loro sollevamenti $\alpha^{\uparrow}_0, (\alpha^{(n)})^{\uparrow}_0$ partono da 0, finiscono in n, e sono equivalenti ($\mathbb{R}$ convesso). Segue $\alpha \sim \alpha^{(n)}$, cioè

$$\Sigma(n) = [\alpha^{(n)}] = [\alpha].$$

□

Corollario 1
S^1 non è retratto di D^2, e $a = (1,0)$ non è retratto per deformazione di S^1.

Dimostrazione
Se per assurdo S^1 fosse retratto di D^2

$$i_* : \pi(S^1, a) \to \pi(D^2, a).$$

sarebbe iniettiva, assurdo perché avrei

$$\mathbb{Z} \to \{[1_a]\}.$$

iniettiva.

Per assurdo se $\{a\}$ fosse retratto per deformazione di S^1, allora $\pi_1(S^1, a) \cong \pi(\{a\}, a)$ che è banale, assurdo. □

0.2 Teoremi di Brouwer e Barsuk

Teorema 1 (Brouwer)
Sia $f : D^2 \to D^2$ continua, allora $\exists p \in D^2$ $f(p) = p$

Dimostrazione
Per assurdo suppongo $f(p) \neq p \quad \forall p \in D^2$
Sia $g(p)$ il punto di intersezione fra S^1 e la retta che contiene p e $f(p)$, quello più vicino a p (vedi esercizi settimanali per formula di $g(p)$)
Si verifica dalla formula che

$$g : D^2 \to S^1.$$

è continua.
Se $q \in S^1$ allora $g(q) = q$, cioè g è retrazione, assurdo. □

Esercizio:
Sia $p : \exists \to X$ rivestimento e sia $f : \S^2 \to X$ continua, siano $y \in S^2$ e $e \in E$ tale che $p(e) = f(p)$
Dimostrare che $\exists g : S^2 \to E$ sollevamento di f tale che $g(y) = e$
(Suggerimento: Dimostrare che S^2 è omeomorfa a $\frac{[0,1]\times[0,1]}{\sim}$ per una relazione d'equivalenza $\sim$.
Usare questo per avere un'applicazione $\tilde{f} : [0,1] \times [0,1] \to X$ e sollevare $\tilde{f}$).

Teorema 2 (Borsuk)
Non esistono applicazioni continue dispari $S^2 \to S^1$,
cioè tali che $f(-p) = -f(p)$.

Dimostrazione
Sia $\rho : \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento, per l'esercizio ogni $f : S^2 \to S^1$ si solleva

a $g : S^2 \to \mathbb{R}$.
supponiamo per assurdo f *continua dispari. D'altronde* $\exists p_0 \in S^2$ *tale che* $g(p_0) = -g(-p_0)$
Allora $f(p_0) = f(-p_0) = -f(p_0)$. *(dispari)*
cioè $f(p_0) \in S^1$ *assurdo* □

Corollario 2
Sia $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ *continua, allora esiste* $x_0 \in S^1$ *tale che* $g(x_0) = g(-x_0)$

Dimostrazione
Per assurdo supponiamo $g(x) \neq g(-x) \quad \forall x \in S^1$
allora:

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}.$$

Allora f *è continua e dispari* $S^2 \to S^1$, *assurdo* □

Corollario 3
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *aperto non vuoto con* $m \geq 3$, *sia* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto. Allora* A *e* B *non sono omeomorfi (in particolare* $\mathbb{R}^2$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{R}^m$ *con* $m \geq 3$*)*

Dimostrazione
Sia $a \in A$ *allora* $\exists \varepsilon > 0$ *tale che* $B_\varepsilon(a) \subseteq A$. *Allora* $S = \partial B_{\varepsilon/2}(a)$
è contenuta in A *e* S *è omeomorfo a* S^{m-1}.
S^{m-1} *contiene sottospazi omeomorfi a* S^2 *(ad esempio* $S^{m-1} \cap$ *(span dei primi 3 vettori della base canonica)*
Allora anche S *contiene almeno un sottospazio* $\tilde{S}$ *omeomorfo a* S^2
Sia per assurdo $h : A \to B$ *omeomorfismo allora* $h|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to \mathbb{R}^2$ *è continua e iniettiva con* $\tilde{S}$ *omeomorfo a* S^2 *assurdo.* □

0.3 Altri legami fra rivestimenti e gruppi fondamentali

Teorema 3
Sia $p : E \to X$ *rivestimento, sia* $e \in E, x = p(e)$.

1. $p_* \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, x)$ *è iniettiva.*
2. *L'immagine di* p_* *è l'insieme delle classi* $[\alpha]$ *dei cammini* α *tale che* $\alpha_e^\uparrow$ *è un cammino chiuso.*

3. *Se E è connesso per archi allora c'è una biezione*

$$p_*(\pi(E,e)\backslash\pi_1(X,x) \to p^{-1}(x).$$

dove il primo è il quoziente delle classi laterali destre data da

$$p_*(\pi(E,e))[\alpha] \to \alpha_e^{\uparrow}(1).$$

$(\alpha \in \Omega(X,x,x)[\alpha \in \pi_1(X,x), p_*(\pi_1(E,e))[\alpha]$ *è la classe laterale destra*$)$

Dimostrazione
Dimostriamo singolarmente le affermazioni

1. *Supponiamo che* $p_* : \pi_1(E,e \to \pi_1(X,e)$ *è omeomorfismo di gruppi. Dimostriamo che è iniettivo, calcoliamo* $\ker(p_*)$. *Sia* $[\beta] \in \pi_1(E,e)$ *con* $\beta \in \Omega(E,e,e)$, *allora* $p_*([\beta]) = [p \circ \beta]$
Supponiamo sia l'elemento neutro $[1_x]$ *cioè* $p \circ \beta \sim 1_x$ *in* X
Solleviamo partendo da e. otteniamo β *(che solleva* $p \circ \beta$*) e* 1_e
Segue $\beta \sim 1$ *e cioè*
$[\beta] = [1_e]$ *elemento neutro, cioè* p_* *iniettiva.*

2. *Da dimostrare* $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ *è in* $Im(p_*)$ *se e solo se è cammino chiuso.*
Sia $[\alpha] \in Im(p_*)$ *allora*

$$[\alpha] = [p \circ \beta] \text{ dove } \beta \in \Omega(E,e,e).$$

Solleviamo α *e* $p \circ \beta$ *partendo da* $e \in E$: *otteniamo* $\alpha_e^{\uparrow}$ *e* β. *Questi sollevamenti hanno stesso punto finale* $\beta(1) = e$, *quindi* $\alpha(1) = e$, *cioè* $\gamma = \alpha_e^{\uparrow}$ *è un cammino chiuso.*
Quindi definisce la classe $[\alpha_e^{\uparrow}] \in \pi_1(E,e)$ *e vale*
$p_*([\alpha_e^{\uparrow}]) = [p \circ \alpha_e^{\uparrow}] = [\alpha]$

3. *L'applicazione è*

$$\phi : p_*(\pi(E,e)\backslash\pi_1(X,x) \to p^{-1}(x).$$

$p_*(\pi_1(E,e))[\alpha] \to \alpha_e^{\uparrow}(1)$
Dobbiamo dimostrare che ϕ *è ben definita. Intanto se* $\alpha' \sim \alpha$ *in* $\pi_1(X,x)$ *allora*

$$(a')_e^{\uparrow}(1) = \alpha_e^{\uparrow}(1).$$

Quindi ϕ *non dipende da* $\alpha \in [\alpha']$.
Supponiamo di cambiare rappresentante nella stessa classe laterale destra, cioè consideriamo $[\gamma] = [\alpha]$ *dove* $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,e))$.
Per 2) *quando sollevo* γ *rimane chiuso. Per definire* ϕ *usando* $[\gamma] \cdot [\alpha]$ *al posto di* α, *uso il punto finale di* $(\gamma * \alpha)_e^{\uparrow}$ *perché* $[\gamma][\alpha] = [\gamma \star \alpha]$
Solleviamo $\gamma \star \alpha$: *è*

$$\gamma_e^{\uparrow} \star \alpha^{\uparrow}_{\gamma_e^{\uparrow}(1)}.$$

ma essendo $\gamma_e^{\uparrow}$ un cammino chiuso, i punto finale è e stesso, e il sollevamento di $\gamma \star \alpha$ è $\gamma_e^{\uparrow} \star \alpha_e^{\uparrow}$, il suo punto finale è $\alpha_e^{\uparrow}(1)$, che è lo stesso ottenuto prima. Quindi ϕ è ben definita.
Dimostriamo che ϕ è iniettiva, siamo $[\alpha], [\delta] \in \pi_1(X, x)$, supponiamo le loro classi laterali destre vengano mandate nello stesso punto da ϕ. Cioè $\alpha_e^{\uparrow}$ e $\delta_e^{\uparrow}$ finiscono nello stesso punto. Allora è definita la giunzione $\alpha_e^{\uparrow} \star i(\delta_e^{\uparrow})$ che è un cammino chiuso in E, e solleva $\alpha \star i(\delta)$, quindi $\alpha \star i(\delta)$ se lo solleva rimane chiuso, e allora la sua classe

$$[\alpha \star i(\delta) = [\alpha] \cdot [\delta]^{-1}.$$

è in $p_\star(\pi_1(E, e))$ per 2)
Segue che $[\alpha]$ e $[\delta]$ sono nella stessa classe laterale destra modulo $p_*(\pi_1(E, e)$.
Quindi ϕ è iniettiva, dimostriamo che è suriettiva.
Cioè $\forall e \in p^{-1}(x)$ deve esistere $\alpha \in \pi_1(X, x)$ tale che $\alpha_e^{\uparrow}(1) = e'$
Dato che E è connesso per archi, scegliamo $\gamma \in \Omega(E, e, e')$.
Allora γ solleva $\alpha = p \circ \gamma$.
La classe $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ soddisfa $p_*(\pi(E, e))[\alpha] \xrightarrow{\varphi} \gamma(1) = e'$.
Quindi ϕ è suriettiva.

$\square$

Corollario 4
$\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ *se* $n \geq 2$

Osservazione
$n = 2$ considero la proiezione

$$\mathrm{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \qquad v \to [v].$$

e la restringo a S^2

$$p : S^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

Si dimostra che p è un rivestimento.
Consideriamo $X = S^2 \cap \{z \geq 0\}$ ovvero la semisfera positiva.
INSERISCI IMMAGINE 5:35
$\alpha \neq 1_N$

0.4 Classificazione dei rivestimenti

Esempio:
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Sottogruppi: $\mathbb{Z}, \{0\}, n\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$
Rivestimenti connessi per archi di S^1:
Id: $\mathrm{S}^1 \to S^1$

$\rho : \mathbb{R} \to S^1$

$\mathrm{S}^1 \to S^1$

$\mathrm{z} \to z^n$

Teorema 4
Sia X spazio topologico, $a \in X$. Supponiamo $x \in X$ abbia un sistema fondamentale di intorni semplicemente connessi. Supponiamo X abbia un rivestimento con spazio totale semplicemente connesso. Allora esiste una biezione tra

$$\left\{ {\textit{rivestimenti } p:E\to X \atop \textit{con } E \textit{ conn. per archi}} \right\} \to \{\textit{sottogruppi di } \pi_1(X,a)\}.$$

$$[p] \to p_*(\pi(E,a)).$$

dove $e \in E$ soddisfa $p(e) = a$, e due rivestimenti $p : E \to X$ e $p' : E' \to X$ sono equivalenti se $\exists f : E \to E'$ omeomorfismo tale che
INSERISCI IMMAGINE 5 50
commuta, cioè $p = p' \circ f$.