# Lezione 3 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-08

# 1 Altra roba sui gruppi

**Proposizione 1** (Caratterizazzione dei sottogruppi normali)
*$(G, \cdot)$ gruppo, $N \leq G$*
*Le seguenti sono equivalenti:*
1)$gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$
2)$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$
3)$N \trianglelefteq G$
4) *L'operazione* $G/N \times G/N \to G/N$
*è ben posta* $\qquad (fN, gN) \to fgN$
*o equivalentemente* $N\backslash G \times n\backslash G \to n\backslash G$
$\qquad (Nf, Ng) \to Nfg$

**Dimostrazione**
$1 \to 2$
*Verifichiamo che* $N \subseteq gNg^{-1}$
*Dato che* $n \in N \Rightarrow n = g(g^{-1}ng)g^{-1}$ *basta dimostrare che* $g^{-1}ng \in N$
*D'altra parte* $g^{-1}ng \in g^{-1}Ng \subseteq N$ *(per ipotesi 1)*
$2 \to 3$
$\forall g \in G \;\; \forall n \in N$
$gng^{-1} \in N$ *(per ipotesi 2)*

$$\begin{cases} gn \in Ng \\ ng^{-1} \in g^{-1}N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} gN \subseteq Ng(1) \\ Ng^{-1} \subseteq g^{-1}N(2) \end{cases} .$$

*Il che è equivalente a dire che* $gN = Ng$ *la prima condizione mi dice* $G/N \subseteq G/N$ *e la seconda dell'arbitrarietà di g*
$G/N \subseteq G/N$
*3* $\to 4$
*Datifeg*$\in G$ *abbiamo*

$$(Nf)(Ng) = (fN)(Ng) = fNg = (fN)g = (Nf)g = Nfg.$$

$4 \to 1$
*Per ipotesi 4* $(Nf)(Ng) = Nfg \;\; \forall f, g \in G$ *quindi*

$$nfn'g \in Nfg \quad \forall n, n' \in N.$$

*dall'arbitrarietà di g, scelgo* $g = f^{-1}$, *quindi*

$$nfn'f^{-1} \in N \;\; \forall f \in G.$$

*Moltiplico (a sinistra) per* $n^{-1}$ *e ottengo*

$$fn'f^{-1} \in N \;\; \forall f \in G.$$

*Dall'arbitrarietà di* $n'$ *otteniamo* $fNf^{-1} \subseteq N \;\; \forall f \in G$ *che è la condizione (1)*
$\square$

**Osservazione**
$(G,\cdot)$ gruppo, la proposizione ci dice che un sottogruppo $H$ è normale se e solo se l'operazione indotta su $G/H$ è ben definita

**Teorema 1**
*$(G,\cdot)$ gruppo $N \trianglelefteq G$*
*Allora $(G/N,\cdot)$ è un gruppo (detto gruppo quoziente)*

**Dimostrazione**
*Associatività, ovvia*
*elemento neutro : $N = Ne$*
*elemento inverso di $Ng$ è $Ng^{-1} \quad \forall g \in G$* □

**Osservazione**
$(G,\cdot)$ gruppo e $H \leq G$ t.c. $[G:H]=2$ Allora $H \trianglelefteq G$
Infatti esistono solo due laterali sinistri o destri: H, G/H

**Osservazione**
$(G,\cdot)$ gruppo abeliano $\Rightarrow$ ogni sottogruppo è normale
**<u>Non</u> vale sempre il viceversa**

**Esempio**
Dimostrare che $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
è un gruppo (rispetto al prodotto) non abeliano in cui però tutti i sottogruppi sono normali

**Prodotti:**
$i^2 = k^2 = j^2 = -1$
$ij = k \quad jk = i \quad ki = j$
$ji = -k \quad kh = -i \quad ik = -j$

**Definizione 1**
*Siano $(G_1,\cdot)$ e $(G_2,*)$ gruppi*
*Sia $\varphi$ un'applicazione*
*$\varphi : G_1 \to G_2$ si dice omomorfismo se:*

$$\varphi(g\cdot f) = \varphi(g) * \varphi(f) \quad \forall g,f \in G_1.$$

**Osservazione**
Graficamente $\varphi$ è un omomorfismo se

$$\begin{array}{c} (g,f) \\ \big\downarrow \\ (\varphi(g),\varphi(f)) \end{array} \qquad \begin{tikzcd} G_1 \times G_1 \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ G_2 \times G_2 \arrow[r, "*"] & G_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,f) \arrow[r] & g\cdot f \arrow[d] \\ & \varphi(g\cdot f) \end{tikzcd}$$

**Esempi:**
$(\mathbb{R}, +)$ gruppo additivo reali
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ gruppo moltiplicativo reali positivi
**Allora**
$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$
$x \to e^x$
è un omomorfismo infatti: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

**Esempio**
$ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
è un omomorfismo, infatti $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
**Osservazione:**
$l^0 = 1 \;\; ln(1) = 0$
0 è l'elemento neutro in $(\mathbb{R}, +)$
1 è l'elemento neutro in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
**Osservazione:**
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Inverso di $x$ in $(\mathbb{R}, +)$
è invero di $e^x$ in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
**Esercizio**
$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo. Dimostrare
1)$\varphi(e_1) = e_2$
2)$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \quad \forall g \in G_1$
**Soluzione:**
$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 \cdot e_2) = \varphi(e_1) * \varphi(e_1)$
moltiplico per $\varphi(e_1)^{-1}$
$\Rightarrow e_2 = \varphi(e_1)^{-1} * \varphi(e_1) = \varphi(e_1)^{-1} * (\varphi(e_1) * \varphi(e_1)) = \varphi(e_1)$
**Esempio:** $(G, \cdot)$ gruppo, $N \trianglelefteq G$
Allora
$\pi : G \to G/N$
$g \to gN$
è un omomorfismo
**Esempio**
$det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$
dove $\mathbb{K}$ campo
$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un gruppo rispetto l prodotto
allora $det$ è un omomorfismo
infatti:

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \quad det(AB) = det(A)det(B).$$

in particoalre:
$det(Id) = 1$
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{K})$

**Definizione 2**
*$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo*
*il nucleo di $\varphi$ è $ker(\varphi) := \{g \in G_1 | \varphi(g) = e\}$*
*L'immagine di $\phi$ è*
*$Im(\varphi) = \{h \in H_2 | \exists g \in G_1 : \varphi(g) = h\}$*

**Esercizio:**
$\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo
Allora $ker(\varphi) \trianglelefteq G_1)$
**Soluzione**
Chiamo $H : ker(\varphi)$
vorrei verificare che $gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in G_1$
scegliamo $h \in H$ (ovvero $\varphi(g) = e_2$)
$\Rightarrow \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) =$ per esercizio $= \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = e_2$
$\Rightarrow ghg^{-1} \in H \forall h \in H, \forall g \in G \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H$
**Osservazione**
$(G, \cdot)$ gruppo, $H \leq G$. Allora $HG$ se e solo se esiste $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo tale che $H = ker(\varphi)$

**Dimostrazione**
*Resta solo l'implicazione $\Rightarrow$*
*Sia $H \trianglelefteq G$. considero l'omomorfismo*
$\pi : G \to G/H$
$\quad g \to gH$
*chi è $ker(\pi)$*
$ker(\pi) = \{g \in G | gH = H\} = \{g \in G | g \in H\} = H$ □

**Esempio**
$det : GL_n(\mathbb{K}) \to K^*$
$ker(det) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) | det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K})$
*quindi*
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$
**Esercizio**
$(G, \cdot)$ gruppo $g \in G$ fissato
$\varphi : \mathbb{Z} \to G$
$\quad n \to g^n$
è un omomorfismo
determinare $ker\varphi$ e $Im\varphi$
**Esercizio**
Sia $\varphi : G_1 \to G_2$ omomorfismo
1) Se $H_1 \leq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \leq G_2$
se $H_1 \trianglelefteq G_1 \Rightarrow \varphi(H_1) \trianglelefteq \varphi(G_1)$
1) Se $H_2 \leq G_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(H_2) \leq G_1$
se $H_1 \trianglelefteq G_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq \varphi(G_1)$