Lezione 17 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-17

1 Prodotto Hermitiano

V spazio vettoriale complesso

Definizione 1 (Funzione sesquilineare)
Una funzione sesquilineare su V è un'applicazione $h : V \times V \to \mathbb{C}$ che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$
\begin{aligned}
&h(v + v', w) = h(v, w) + g(v', w) \\
&h(\alpha v, w) = \alpha h(v, w) \\
&h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w') \\
&h(v, \alpha w) = \overline{\alpha} h(v, w)
\end{aligned}
$$

per ogni scelta di $v, w, v', w' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

Definizione 2 (Forma hermitiana)
Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

Osservazione
Se h è hermitiana, $h(v, v) \in \mathbb{R}$, infatti deve risultare $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

Definizione 3 (Forma antihermitiana)
Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

Osservazione
In questo caso $h(v, v) \in \sqrt{1}\mathbb{R}$

Definizione 4
Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Definizione 5
Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

Esempio
$V = \mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

$$h(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

Dato V, consideriamo una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V Se h è una forma heritiana, diciamo che $(h_{ij}) = h(v_i, v_j)$ è la matrice che rappresenta h nella base B e la denoto come $(h)_B$
se $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(v,w) &= h(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i h_i(v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \overline{y} \end{aligned}$$

Poiché h è hermitiana, $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$

$$\begin{aligned} X^t H Y &= \overline{Y^t H X} \\ &= \overline{Y}^t \overline{HX} \\ &= (\overline{Y}^t \overline{HX})^t \\ &= \overline{X}^t \overline{H}^t \overline{Y} \quad \Rightarrow \quad H = \overline{H}^t \end{aligned}$$

Definizione 6
Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$

Esercizio
le matrici hermitiane 2×2 sono un $\mathbb{R}$-sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ di dimensione 4

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 & a_3 - ib_3 \\ a_2 - ib_2 & a_4 - ib_4 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} & a_1 + ib_1 = a_1 - ib_1 \Rightarrow b_1 = 0 \\ & a_2 + ib_2 = a_3 - ib_3 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ & a_3 + ib_3 = a_2 - ib_2 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ & a_4 + ib_4 = a_4 - ib_4 \Rightarrow b_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{M}_2 = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$
il professore qui lascia un esercizio, non penso che realisticamente qualcuno lo farà

Si definiscano allo stesso modo del caso reale simmetrico S^t
coefficiente di Fourier

$$|\langle v, w \rangle| \leq ||v||||w||.$$

disuguaglianza triangolare $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$
Operatore unitario: $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ t.c.

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Verifichiamo le caratteristiche degli operatori unitari dati nel caso reale
Gram Schmidt
$T \in End(V)$ operatore unitario
1. Gli autovalori hanno modulo 1
2. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali
1. Sia v un autovettore di autovalore λ

$$\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle tv, tv \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \quad |\lambda|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

2. Sia $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w \rangle.$$

Se $\langle v, w \rangle \neq 0 \neq 0 \Rightarrow \lambda\overline{\mu} = 1. Perilpunto 1$
$\lambda\overline{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \overline{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \quad$ assurdo.

Definizione 7
Diciamo che $U \in M_n(\mathbb{C})$ *è unitaria se*

$$U\overline{U}^t = Id.$$

Proposizione 1
$T \in End(V)$ *è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria*

Dimostrazione
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base ortonormale di* V

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i^t A^t \overline{A} e_j = A_i^t \overline{A}_j$$

dove abbiamo posto $A = (T)_B$ *e* $\{e_i\}$ *è una base di* $\mathbb{C}^n$
TODO *dimostrazione da finire*

$\square$

Come nel caso reale si dimostra

Teorema 1
Sia $T \in End(V)$ *un operatore unitario Esiste una base standard di autovettori per* T

In particolare, per ogni matrice unitaria $A \in U(n)$ esiste $M \in U(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale a volte si pone

$$A^* = \overline{A}^t.$$