Ultima lezione di teoria del nostro caro papi

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Boh

Osservazioni
1. Metrico = euclideo
2. Per distinguere l'ellisse non degenere a punti reali da quella a punti immaginari, si può usare il seguente criterio

$$A = (a_{ij})^2_{i,j=0} \quad A_0 = (a_{ij})^2_{i,j=1}.$$

$tr A_0 \det A \begin{cases} > 0 \text{ellisse a punti immaginari} \\ < 0 \text{ellisse a punti reali} \end{cases}$
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{\det A}{\det A_0} = 0$
Non ci sono soluzioni reali se e solo se $\lambda_1($ o $\lambda_2)$ hanno lo stesso segno di $\det A$, è equivalente dire

$$tr A_0 \det A > 0.$$

2 geometria delle coniche euclidee

Ellissi
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$
$a = b \quad x^2 + y^2 = a^2$ circonferenza di centro l'origine e rango a
Il supporto dell'ellisse è chiuso e limitato, infatti esso è centrato nel rettangolo delimitato dalle rette $x \pm a, \quad y = \pm b$

$$supp \quad \ell \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, \ |y| \leq b\}.$$

TODO INSERISCI IMMAGINI
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \rightsquigarrow y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y == \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Definizione 1
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\pm c, 0)$ *fuori di* ℓ

$$e = \frac{c}{a} \quad \textit{eccentriche di } \ell.$$

Nota
$0 \leq e < 1, \quad e = 0 \Leftrightarrow$ circonferenza

$$x = \pm\frac{a}{c}\text{manca qualcosa.}$$

Iperbole
$\dfrac{x^2}{e^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$
TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 2
$c = \sqrt{a^2+b^2}$ $(\pm c, 0)$ *fuochi di* ℓ

$$e = \frac{c}{a} \qquad \textit{eccentricità } e > 1.$$

$$x = \pm\frac{a}{c} \qquad \textit{direttrici.}$$

Parabola
$y^2 = 2px \;\; p > 0 \quad y = \pm\sqrt{2px}$
TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 3
Il fuoco di ℓ $\quad (\frac{p}{2}, 0)$

$$\textit{direttrice} \quad x = -\frac{p}{2} \quad e = 1 \quad \textit{eccentricità.}$$

Proposizione 1
L'ellisse (1) e l'iperbole (2) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze dai due fuochi ha somma (rispettivamente differenza) costante (rispettivamente costante in valore assoluto) uguale a $2a$

Proposizione 2
L'ellisse (1), l'iperbole (2), la parabola (3) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale ad e l'eccentricità della conica

Dimostrazione (proposizione 1)
Siano F, F' *i fuochi, di coordinate* $(c, 0), (-c, 0)$ *rispettivamente. Imponiamo la condizione*

$$|d(P, F) \pm d(P, F')| = 2a.$$

Se P *ha coordinate* (x, y) *risulta*

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a \quad \circledast\,.$$

Elevando due volte al quadrato, otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \quad .$$

Se $c = \sqrt{a^2-b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ellisse*
Se $c = \sqrt{a^2+b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *iperbole*
Per concludere, osserviamo che il luogo rappresentato da $\circledast$ *è precisamente (1) nel caso dell'ellisse e (2) nel caso dell'iperbole*

A questo scopo, basta osservare che il procedimento è reversibile a meno di affinità di segni nei radicali. Però la conclusione

$$c < a \quad \textit{è compatibile col prendere} + \textit{nell'equazione} \circledast\circledast.$$

$$c > a \quad \textit{è compatibile col prendere} - \textit{nell'equazione} \circledast\circledast.$$

$\square$

Dimostrazione (proposizione 2)
La condizione che definisce il luogo cercato è

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e.$$

$P = (x, y)$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - \frac{a}{c}|} = e.$$

$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a}{e})^2$
$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$
$x^2(1-e^2) + y^2 = \cancel{2(c-ea)x} + a^2 - c^2$ *dato che* $c = \frac{e}{a}$ *e* $e = \frac{c}{a}$
$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{b^2}{e^2}x^2 + y^2 = b^2$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Gli altri cambi per l'iperbole sono analoghi e lasciati per esercizio $\square$

$\mathbb{P}^2$ TODO AGGIUNGI IMMAGINE
Più in generale, dati S_1, S_2 spazi proiettivi tali che $\dim S_1 = \dim S_2 = k$ in $\mathbb{P}^n$, e H sottospazio $H \cap S_1 = H \cap S_2 = \emptyset$ e $\dim H = n - k - 1$, la prospettività di centro M è la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H ; è un isomorfismo $S_1 \to S_2$
Esercizio
Siano in $\mathbb{P}^3$ T_1 il piano $x_3 = 0$ e T_2 il piano $x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0$

$$Q = [0, 1, -1, 1], \quad f : T_1 \to T_2 \quad \text{di centro } Q.$$

Trova equazioni cartesiane dell'immagine di $r = T_1 \cap T_3$ dove $T_3 : x_0 + x_1 = 0$
Risulta $f(r) = L(Q, r) \cap T_2$
r ha equazioni $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \end{cases}$
Il fascio di piani di asse r ha equazione

$$\lambda(x_0 + x_1) + \mu x_3 = 0 \qquad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Imponendo il passaggio per $[0, 1, -1, 1]$ otteniamo

$$\lambda + \mu = 0 \quad [\lambda, \mu] = [1, -1].$$

$L(Q, r) : x_0 + x_1 - x_3 = 0 \;\; f(r) \quad \begin{cases} x_0 + x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

Siano $r, s \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rette distinte, $A = r \cap s$ e $f : r \to s$ un isomorfismo proiettivo allora.
(a) f è una prospettività se e solo se $f(A) = A$
(b) Se $f(A) \neq A$, esiste una retta t in $\mathbb{P}^2$ e due prospettività $g : r \to t, \;\; h : t \to s$ tale che

$$f = h \circ g.$$

(c) Ogni proiettività $p : r \to r$ è composizione di al più tre prospettività
(a) per costruzione una prospettività fissa il punto A
TODO AGGIUNGI IMMAGINE
Viceversa, supponiamo che $f : r \to s$ sia tale che $f(A) = A$ **TODO AGGIUNGI IMMAGINE**
$L(P_1, Q_1) \cap L(P_2, Q_2) = 0 \notin r \cup s$
Se g è la rpospettività di centro O, risulta $g(A) = A, \;\; g(P_1) = Q_1, \;\; g(P_2) = Q_2$
Ma $A, P_1, P_2, \quad A, Q_1, Q_2$ sono punti in posizione generale
e pertanto, per il teorema fondamentale, $f = g$