

Lezione 4 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-16

1 Formula di Grassmann affine

Richiami dalla scorsa lezione

Dati $\Sigma_i = p_i + W_i$, $i = 1, 2$ sottospazi affini (di $(A, V, +)$) allora:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2.$$

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle).$$

Inoltre Σ_1, Σ_2 si dicono:

incidenti se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$

paralleli se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

sghembi se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Proposizione 1 (Formula Grassmann per spazi affini)

Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di A , Allora

$$\dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq \dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 - \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

*e vale l'uguaglianza se Σ_1, Σ_2 sono incidenti o sghembi
si usa la notazione $\dim(\emptyset) = -1$*

Dimostrazione

- Supponiamo Σ_1, Σ_2 incidenti, allora esiste

$$p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$

$$\Sigma_1 = p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale

- Sia ora $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ allora $\Sigma_i = p_i + W_i$ $i = 1, 2$

risulta $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin W_1 + W_2$ (per lemma)

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) &= \dim(W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle) = \dim(W_1 + W_2) + 1 \leq \\ &\leq \dim(W_1) + \dim(W_2) - (-1) = \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \end{aligned}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2)$ ovvero $W_1 \cap W_2 = 0$ ovvero se Σ_1, Σ_2 sono sghembi \square

Proposizione 2

siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ definiti dai sistemi lineari

$$A_i X = b_i \quad i = 1, 2.$$

Allora:

(a) Σ_1, Σ_2 sono incidenti se e solo se

$$rk \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array} \right) = rk \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right).$$

detto r tale rango, $\dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$

(b) Σ_1, Σ_2 sono sghembi se e solo se

$$rk \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array} \right) \geq rk \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = n.$$

(c) Se

$$rk \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array} \right) \geq rk \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = r < n.$$

allora Σ_1 (rispetto a Σ_2) contiene un sottospazio affine di dimensione $n - r$ parallelo a Σ_2 (rispetto a Σ_1)

Dimostrazione

(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli

(b) la disuguaglianza tra i ranghi dice che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;

il fatto che $rk \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = n$ implica che $W_1 \cap W_2 = 0$

(c) Di nuovo la disuguaglianza dei ranghi implica $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;

Se ora $W_1 \cap W_2 = W$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = n - r$

Scelto $p_1 \in \Sigma_1$ risulta

$p_1 + W \subset \Sigma_1$ ($W_1 \cap W_2 = W$ sottospazio di W_1)

e $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$ è parallelo a Σ_2 e $\dim(p_1 + W) = \dim(W) = n - r$ \square

Esempio

\mathbb{A}^3 π_1, π_2 piani distinti

A_1, A_2 vettori riga ($A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$)

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

piani distinti $\Rightarrow rk(C) = 2$

$$rg \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \text{ è una retta}$$

$$rg \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = 1 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \text{ piani paralleli poiché } W_1 = W_2$$

$\mathbb{A}^4, \pi_1 \pi_2$ piani distinti tali che $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) \in M_{45} \quad rk(C) \leq 4.$$

$rk \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix} \right)$	$rk(C)$	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	$\{p\}$
3	4	\emptyset e W_1, W_2 hanno una direzione in comune
3	3	r
2	3	\emptyset