

Lezione 19 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-18

1 Esercizi vari

Esercizio 1 Foglio 6

$f : A \rightarrow A$ affinità ha un unico punto fisso se e solo se la sua parte lineare (φ) non ha l'autovalore 1

Svolgimento

Sia $F = \{x \in A \mid f(x) = x\}$

Supponiamo $F \neq \emptyset$ e $P \in F$ dico che

$$\star \quad F = P + \ker(\varphi - Id).$$

dove $\ker(\varphi - Id)$ è l'autospazio di autovalore 1 di φ

$u \in V \quad P + u \in F \Leftrightarrow P + u = f(P + u) = f(P) + \varphi(u) = P + \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = u$
ovvero $u \in \ker(\varphi - Id)$

Se ora F ha un unico punto fisso \star implica che

$$\ker(\varphi - Id) = \{0\}.$$

cioè 1 non è autovalore di φ

Viceversa facciamo vedere che se $\ker(\varphi - Id) = \{0\}$ allora $F \neq \emptyset$ Cerchiamo

$Q + v$ tale che

$$f(Q + v) = Q + v$$

$$f(Q) + \varphi(v)$$

$$f(Q) - P = v - \varphi(v)$$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\varphi - Id)(v)$$

Quindi, poiché $(\varphi - Id)$ è invertibile (per ipotesi), dato Q trovo un unico $v =$

$$-(\varphi - Id)^{-1}(\overrightarrow{Qf(Q)})$$

per cui $Q + v$ è un punto fisso

Esercizio 5 Foglio 6

$f(x) = Ax + b$ in \mathbb{E}^2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = 0$$

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento A

1. è una traslazione quindi non ha punti fissi

2. $\det A = 1$ e A ortogonale

$$AX + b = X$$

$$(A - I)X = -b$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2) \text{ rotazione di } \frac{\pi}{2}$$

Esercizio da finire

2 Diagonalizzazione unitaria di operatori normali

(\mathbb{C}^n , prodotto hermitiano standard) $M^* = \overline{M}^t$

M è normale se $MM^* = M^*M$

siano normali le matrici

unitarie	$MM^* = Id$
hermitiane	$M = M^*$
antihermitiane	$M = -M^*$

Teorema 1 (Spettrale)

M è normale se e solo se $\exists U \in U(n) : U^t M U$ è ortogonale

nota

$U(n)$ spazio delle matrici unitarie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \text{ matrice hermitiana}$$

Trovo ora il polinomio caratteristico

$t^2 - 2t = 0$ che ha quindi autovalori $t = 0, t = 2$

$$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad U^{-1} L U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dove il prodotto scalare standard è stato fatto per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato)

Esempio 2

$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione

il polinomio caratteristico è $t^2 - \sqrt{3}t + 1$ gli autovalori sono quindi $t = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

$$v_{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ultimo esempio

$$L = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$LL^* = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^*L.$$

$$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \quad t_1, t_2$$

$$v_{t_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

U come nell'esercizio precedente