

Lezione 21 Algebra I

Federico De Sisti

2024-12-10

1 Esercizi Schede

$$G = GL_2(\mathbb{C})$$

$$X = Mat_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$G \times X \rightarrow X$$

$(A, B) \rightarrow A \cdot B$ è un'azione tra gruppi

Studiare le orbite

Soluzione

$$O_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$O_{Id} = \{ \text{matrici invertibili} \}$$

Restano da studiare solo i casi di matrici non invertibili e non nulle

$$\text{Se } \det(B) = 0 \text{ allora } B = \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix} \quad x, y, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$O_B = ?$$

Caso 1

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow y \neq 0$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & \lambda y \end{pmatrix}$$

Allora scelgo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dove ho messo al posto dei punti interrogativi numeri appositi per arrivare alla matrice e_{12}

$$\text{Quindi se } x \neq 0 \Rightarrow O_B = O_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Caso II

$$\text{Se } x \neq 0$$

$$\text{Scelgo } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_B = O_{\begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambia le righe di B

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} c & b \\ a & d \end{pmatrix}$$

1.1 Ideali

Definizione 1 (Ideali) $(R, +, \cdot)$ anelloUn ideale è un sottogruppo $(I, +) \leq (R, +)$ tale che

$$1. \forall a \in I \quad \forall x \in R \Rightarrow x \cdot a \in I \quad [Ideale Sinistro]$$

$$2. \forall a \in I \quad \forall x \in R \Rightarrow a \cdot x \in I \quad [Ideale Destro]$$

$$3. \forall a \in I, \forall x \in R \Rightarrow \begin{cases} x \cdot a \in I \\ a \cdot x \in I \end{cases} \quad [Ideale bilatero]$$

OsservazioneSe R è commutativo allora un sottogruppo (additivo) $I \leq R$ è ideale sinistro \Leftrightarrow è un ideale destro \Leftrightarrow è un ideale bilatero.**Notazione 1** R anello I ideale bilatero lo chiameremo semplicemente **ideale****Osservazione** R anello $\Rightarrow (R, +)$ è un gruppo abeliano $\Rightarrow I \subseteq R$ ideale è un sottogruppo additivo normale**Esercizio:** R anello $I \subseteq R$ ideale $\Rightarrow (R/I, +)$ gruppo abeliano.

Dimostrare che l'operazione

$$\cdot : R/I \times R/I \rightarrow R/I$$

$$(aI, bI) \rightarrow (ab)I$$

è ben definita e dedurre che $(R/I, +, \cdot)$ è un anello.**Esempio** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un sottoanello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un ideale in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Infatti $\sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$ **Esempi** R anello $\Rightarrow I = \{0\}$ è un ideale $\Rightarrow I = R$ è un ideale**Definizione 2** R anello commutativo. $I \subseteq R$ ideale I si dice primo se $I \neq R$ e $ab \in I \Rightarrow a \in I$ oppure $b \in I$ **Esercizio** $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Determinare tutti gli ideali primi di R

Esercizio:

R anello $I \subseteq R$ ideale

Dimostrare che le seguenti sono equivalenti

1. R/I è un dominio d'integrità
2. Se $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I$ oppure $b \in I$

Teorema 1 (Omomorfismo per anelli)

Dato $\varphi : R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli abbiamo

1. $\ker(\varphi) \subseteq R$ è un ideale
2. esiste un unico omomorfismo di anelli $\bar{\varphi} : R/\ker(\varphi) \rightarrow S$ tale che

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ R/\ker(\varphi) & & \end{array}$$

3. Esiste un isomorfismo di anelli $R/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$

Dimostrazione (Esercizio)

- 1) Basta verificare che se $x \in \ker(\varphi)$ e $y \in R$ allora $\begin{cases} x \cdot y \in \ker(\varphi) \\ y \cdot x \in \ker(\varphi) \end{cases}$

$$x \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \cdot \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ &= 0 \cdot \varphi(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \cdot y \in \text{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \cdot \varphi(y \cdot x) &= \varphi(y) \cdot \varphi(x) \\ &= \varphi(y) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \cdot x \in \ker(\varphi)$$

□

1.2 Caratteristica

Voglio associare ad ogni anello un numero intero che ci possa dare qualche informazione su di esso.

Definizione 3

$(R, +, \cdot)$ anello.

Considero l'omomorfismo di anelli

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow R$$

$$1 \rightarrow 1_R$$

$$n \rightarrow (1_R + \dots + 1_R)$$

Osserviamo che ψ è un omomorfismo di anelli

$$\psi(nm) = \psi(n) \cdot \psi(m).$$

Infatti

$$\psi(n) \cdot \psi(m) =$$

$$= \underbrace{(1_R + \dots + 1_R)}_{n \text{ volte}} \underbrace{(1_R + \dots + 1_R)}_{m \text{ volte}}$$

$$= \underbrace{1_R(1_R + \dots + 1_R)}_{m \text{ volte}} + \dots + \underbrace{1_R(1_R + \dots + 1_R)}_{m \text{ volte}}$$

$$= \psi(n \cdot m)$$

Allora $\ker(\psi) = (m) \subseteq \mathbb{Z}$ per qualche $m \geq 0$

m si dice caratteristica di R .

Osservazione

Supponiamo che R abbia caratteristica positiva $m > 0$ allora $m = \text{ord}_{(R,+)}(1_R)$

Esercizio:

$(R, +, \cdot)$ campo

Dimostrare che la caratteristica R è 0 oppure un numero primo

Esempi:

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

sono campi di caratteristica 0

Mentre $\mathbb{Z}/(p)$ è un campo di caratteristica p (con p primo)

Esercizio

Un anello commutativo è un campo se e solo se non possiede ideali non banali

Soluzione

Supponiamo che R sia un campo e sia $I \subseteq R$ un ideale $I \neq \{0\}$

Allora dobbiamo mostrare che $I = R$.

Se $a \in I \neq \{0\}$ considero $a^{-1} \in R$

$$a^{-1} \cdot a = 1 \in I$$

[Dato che è un ideale]

Dato $b \in R$:

$$b = b \cdot 1 \in I$$

[Dato che 1 è nell'ideale]

Viceversa:

dato $a \in R \setminus \{0\}$ dobbiamo verificare che esiste $b \in R$ tale che $a \cdot b = 1$

Definiamo $I := \{a \cdot r \mid r \in R\} \subseteq R$

I è un ideale. Inoltre $I \neq \{0\}$ poiché $a \in I$

$\Rightarrow I = R \Rightarrow 1 \in I$

[Per ipotesi]

Quindi esiste $b \in R$ tale che $a \cdot b = 1$

Osservazione

Se R campo e $\psi : R \rightarrow S$ è un omomorfismo di anelli, allora ψ è iniettivo oppure ψ è l'omomorfismo nullo.

Abbiamo verificato che $\ker(\psi)$ è un ideale in R .

Quindi:

- $\ker(\psi) = \{0\}$
 \Rightarrow iniettivo
- $\ker(\psi) = R$
 $\Rightarrow \psi(r) = 0 \quad \forall r \in R$