Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

1 Ultima Parte teorica prima del compito

$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$
$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 1 (Riflessione)
Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"
Possiamo fissare $c = 0 \ \ p_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$
Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \quad \rightarrow \quad \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

altrimenti è una traslazione (che è l'identità $= D$)
Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$
Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \qquad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$
TODO disegno
In coordinate rispetto ad un riferimetno cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \qquad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d) + d - x) + x.$$

dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente
$\underbrace{R_{\theta+\varphi}(x-d)}_{\text{parte lineare}} + R_\theta(d-c) + c$

T T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 2 (Glissoriflessione)
Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ *di una riflessione di asse* r *con una traslazione* $t_v \neq Id$ *con* $v \neq 0, v \parallel r$

TODO disegno

Teorema 1 (Charles, 1831)
Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione
Sia $f \in Isom(E)$
Se f *ha un punto fisso abbiamo già visto che* f *è una rotazione se è diretta o una riflessione se* f *è inversa* $\square$