Lezione 5 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-10

0.1 Funzioni continue

Osservazione
Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$.
Siano $A \subseteq Y$ un sottoinsieme,

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\} = \{x \in X | f(x) \in Y \setminus A\} = f^{-1}(Y \setminus A).$$

Analogamente, con $A, B \subseteq Y$ e $C, D \subseteq X$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$$f(C \cup D) \neq f(C) \cup f(D).$$

$$f^{-1}(f(C)) \supsetneq C.$$

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap Im(f).$$

Tornando a $f : X \to Y$
f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ chiuso $A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow$ con $C = Y \setminus A$ $f^{-1}(C)$ chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso.

Definizione 1 (Continuità)
Sia $f : X \to Y$ applicazione fra spazi topologici. Sia $p \in X$, f è continua in p se

$$\forall U \subseteq Y \text{ intorno di } f(p)\ \exists V \subseteq X \text{ intorno di } p \text{ t.c } f(V) \subseteq U.$$

Teorema 1
Sia $f : X \to Y$ applicazione fra spazi topologici, sono equivalenti:

1. $\forall p \in X :$ *f è continua in p*
2. $\forall Z \subseteq X :$ $f(\bar{Z}) \subseteq \overline{f(X)}$
3. *f continua*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Sia $p \in \overline{Z}$ so che f è continua in p.*
Voglio dimostrare che

$$f(p) \in \overline{f(Z)}.$$

Formuliamo questa condizione in termini di intorni:
devo dimostrare che in ogni intorno di $f(p)$ ci sono punti di $f(Z)$. Sia $U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ per continuità in p $\exists V \subseteq X$intorno di p tale che $f(V) \subseteq V$
Visto che $p \in \overline{Z}$ esiste $z \in Z$ tale che $z \in V$
Allora $f(z)$ è in U e in $f(Z)$
cioè ogni intorno U di $f(p)$ contenente punti di $f(Z)$, cioè $f(p) \in \overline{f(Z)}$

2) $\Rightarrow$ 3) *Dimostriamo che* $f^{-1}(C)$
è chiuso $\forall C \subseteq Y$ *chiuso. Considero* $f^{-1}(C)$*, voglio dimostrare che è chiuso confrontandolo con* $\overline{f^{-1}(C)}$.
L'ipotesi 2) dice:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C \cap f(X)} \subseteq C.$$

Dato che C *è un chiuso che contiene* $C \cap f(X)$
Allora $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$
D'altronde vale sempre $\overline{f^{-1}(C)} \supseteq f^{-1}(C)$
quindi $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$
da cui $f^{-1}(C)$ *è chiuso.*

3) $\Rightarrow$ 1) *suppongo* f *continua, sia* $p \in X$*, sia* $U \subseteq Y$ *intorno di* $f(p)$ *scegliamo* $a \subseteq Y$ *aperto con* $f(p) \in A \subseteq U$
per continuità: $f^{-1}(A)$ *aperto di* X *e contiene* p*,*
posso prendere $V = f^{-1}(A)$*, intorno aperto di* p*, ed è tale che* $f(V) \subseteq A \subseteq U$
$\square$

Proposizione 1
La composizione di applicazioni continue qualsiasi è continua

Dimostrazione
Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$
applicazioni fra spazi topologici, suppongo $f \circ g$ *continue,*
dimostriamo che $g \circ f$ *è continua.*
Sia Z *aperto dimostriamo che*

$$(g \circ f)^{-1}(A) \text{ è aperto .}$$

$$(g \circ f)^{-1}(A) = \{x \in X \mid (g \circ f)(x) \in A\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(A)\} = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

g manda aperti in aperti, stesso per f*, segue che la composizione fa lo stesso.* $\square$

Definizione 2
Siano X, Y *spazi topologici,* $f : X \to Y$.

1. f *si dice omeomorfismo se* f *è continua, biettiva, e* $f^{-1} : Y \to X$ *è continua*

2. X *e* Y *si dicono omeomorfi se esiste* $f : X \to Y$ *omeomorfismo*

3. f *(non necessariamente omeomorfismo, non necessariamente continua) si dice aperta se* $f(A)$ *è aperto* $\forall A \subseteq X$ *aperto, e* f *si dice chiusa quando* $f(C)$ *è chiuso* $\forall C \subseteq X$ *chiuso*

Esempi:
$\mathbb{R}$ con topologia euclidea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ applicazione costante $f(x) = q \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Questa f non è aperta, perché $\mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$ e $f(\mathbb{R}) = \{q\}$ non è aperto in topologia euclidea.
Esempio importante:
Applicazione non chiusa.
p : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(x, $y) \to x$
($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ con topologia euclidea)
Non è chiusa, prendiamo ad esempio $C = \{(x, y) \mid x \cdot y = 1\}$
è un chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma $p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso.

C è chiuso di $\mathbb{R}^2$ perché C è uguale a $f^{-1}(\{1\})$ dove
f:R$^2 \to \mathbb{R}$
(x,y) $\to xy$
Infatti f è continua e $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ è un chiuso.

0.2 Spazi metrici

Definizione 3
sia X *un insieme e* $d : X \times X \to \mathbb{R}$
d si dice distanza se:

1. $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$,
   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall x, y \in X$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   $\forall x, y, z \in X$

In tal caso $(X, d)(oX$ *stesso*) *si chiama spazio metrico*

Esempio

Sia X insieme, poniamo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

d è una distanza.

Definizione 4
Sia (X,d) spazio metrico.

1. *La palla aperta di centro x e raggio $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ è:*
   $B_\varepsilon(x) = \{p \in X \mid d(p,x) < \varepsilon\}$

2. *La topologia indotta da d su X è definita da:*
   A *aperto* $\Leftrightarrow\ \forall a \in A\ \exists \varepsilon < 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A$
   La denotiamo con T_d

Verifica che T_d è topologia

1. $\emptyset, X$ sono aperti: ovvio

2. unione di aperti è aperto: ovvio

3. Siano $A_1, A_2 \in T_d$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in T_d$, sia $a \in A_1 \cap A_2$ quindi $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A_1$ e $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(a) \subseteq A_2$
   sia $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ allora soddisfa $B_\gamma(a) \subseteq A_1 \cap A_2$

Lemma 1
Sia (X,d) spazio metrico e T_d la topologia indotta da d

1. $\forall p \in X\ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(p) \in T_d$

2. $B = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$
   è una base di T_d

3. *Un sottoinsieme $U \subseteq X$ è intorno di $p \in X$ se e solo se*
   $\exists \varepsilon > 0\ |B_\varepsilon(p) \subseteq U$

Dimostrazione
Per esercizio. □

Osservazione
Gli spazi metrici in generale si comportano in modo simile a $\mathbb{R}n$ con distanza euclidea, ma attenzione: non tutto è uguale, ad esempio se (X,d) è uno spazio metrico e $x \in X$:

$$\{p \in X \mid d(x,p) \leq \varepsilon\}.$$

con $\varepsilon > 0$ fissato, è un chiuso di X (verifica per esercizio) ma non è sempre la chiusura di $B_\varepsilon(x)$.

Ad esempio $X = \mathbb{R}$ con distanza $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

Considero $\{p \in \mathbb{R} \mid d(p,x) \leq 1\} = \mathbb{R}$
ma $B_1(x) = \{x\}$
Questo vale $\forall x \in \mathbb{R}$
cioè ogni ogni singoletto è aperto, allora T_d è discreta, quindi $\{x\}$ è anche chiuso.
Cioè $B_1(x) = \{x\}$.

Osservazione:
Siano X, Y spazi metrici sia $p \in X$
$f : X \to Y$, allora f è continua in p
(come applicazione fra spazi topologici, dove su X e Y metto le topologie indotte dalle distanze) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \delta > 0 \mid$ se $d(x,p) < \delta$ allora $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$
Verifica per esercizio

Corollario 1
Siano d, h distanze su uno stesso insieme X.
Allora T_d è più fine di T_h se $\forall p \in X \;\; \forall > 0 \;\; \exists \delta > 0 \mid B^d_\delta(p) \subseteq B^h_\varepsilon(p)$

Dimostrazione
Usiamo $id_X : X \to X$ dove nel dominio prendiamo d e T_d, e nel codominio la distanza h e T_h. Con questa scelta l'identità su X è continua $\Leftrightarrow T_d \supseteq T_h$
La carindalità di Id_X è equivalente alla condizione con ε e δ per l'osservazione.
□

Definizione 5 (Distanze equivalenti)
Date distanze d, h su un insieme X, esse si dicono equivalenti se $T_d = T_h$

Definizione 6 (Spazio topologico metrizzabile)
Sia X uno spazio topologico con topologia T. Se esiste una distanza d su X tale che $T = T_d$ allora X si dice metrizzabile.

0.3 Sottospazi topologici

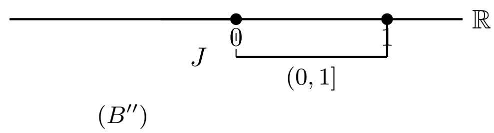
Definizione 7
Sia X spazio topologico, sia $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi, allora su Y è definita la topologia di sottospazio ponendo $A \subseteq Y$ aperto in topologia di sottospazio $\Leftrightarrow \exists B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = B \cap Y$

Esempi:
1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea
$Y = [0,1]$
Allora Y è aperto in topologia di sottospazio
$A = Y$ soddisfa $A = B \cap Y$

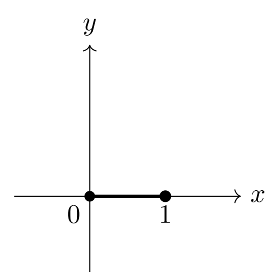
Anche $I =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\subseteq Y$ è aperto in topologia di sottospazio basta prendere $B' = I$ per avere $I = B' \cap Y$
Considero $[0, \frac{1}{2}[= J \subseteq Y$
non è aperto in $\mathbb{R} = X$, ma è aperto in Y in topologia di sottospazio, basta prendere $B'' =]-1, \frac{1}{2}[$ è aperto in X e soddisfa

$$J = B'' \cap Y.$$

Idea intuitiva:



J non è aperto in $\mathbb{R}$ perché $\forall \varepsilon > 0 \exists$ punti di $\mathbb{R}$, a distanza $< \varepsilon$ da 0, punti che non sono in J.
Ma J aperto in Y in topologia di sottospazio perché Y non contiene tali punti
2) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, sia $Y = \mathbb{Z}$ con topologia di sottospazio, Ad esempio $A =]-100, 23[\cap Y = \{-99, -98, \ldots, 22\}$
Anche $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z} = \{0\}$ è aperto.
Analogamente
$]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z} = \{n\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ è aperto in $\mathbb{Z}$ in topologia di sottospazio. Quindi la tipologia di sottospazio è discreta.
3) $X = \mathbb{R}^2$ con topologia euclidea, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, l'asse x.



allora $A =]0, 1[\times \{0\}$ è aperto in topologia di sottospazio, ad esempio $B =]0, 1[\times \mathbb{R}$
Osservazione Verifichiamo che la topologia di sottospazio è una topologia:

$$T_Y = \{A \subseteq Y \mid \exists B \subseteq X \text{ aperto t.c.} B \cap Y = A\}.$$

Assiomi di topologia

1. $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$
2. Siano $A_i, i \in I$ elemento di T_Y, verifica che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è in T_y
   Scegliamo $B_i \quad \forall i \in I$ aperto in X t.c. $\quad A_i = B_i \cap Y$

$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap U) = \bigcup_{i\in I} B_i \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
da cui $\bigcup_{i\in I} A_i \in T_Y$.

3. Siano $A_1, A_2 \in T_Y$, scegliamo B_1, B_2 aperti in X con $A_i = B_i \cap Y \quad \forall i \in \{1, 2\}$ allora
   $A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = B_1 \cap B_2) \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
   quindi $A_1 \cap A_2 \in I_y$

Osservazione.
Sia $C \subseteq Y$ chiuso in topologia di sottospazio. Allora $A = Y \setminus C$ è scrivibile come $A = B \cap Y$ con B aperto in X, Allora $D = X \setminus B$ è chiuso in X, e vale $D \cap Y = C$
Cioè se C è chiuso in topologia di sottospazio allora esiste $D \subseteq X$ chiuso tale che $C = D \cap Y$.
Vale il viceversa se il sottoinsieme C di Y è scrivibile come $C = D \cap Y$ con $D \subseteq X$ chiuso, allora C è chiuso in topologia di sottospazio (esercizio)