Lezione 1 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-02-27

1 Informazioni pratiche

Giovedì esercitazioni
Ci sono gli esercizi settimanali! Alcuni di questi sono da sapere per l'orale
Se vogliamo essere avvertiti per urgenze possiamo mandare una mail
C'è il sito del corso
Per la maggior parte del corso di studia su Topologia di Marco Manetti
Esami:
Ci sono 2 esoneri
L'esame è scritto e orale
Prerequisiti
1) Familiarità con le funzioni continue
2) Un po' di teoria dei gruppi
3) Derivate di applicazioni in più variabili

Il corso è diviso in 3 parti:
1)Topologia generale
2) Topologia algebrica
3) Geometria differenziale

2 Topologia Generale

2.1 Introduzione

Nasce per studiare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, cosa posso fare con un sottoinsieme di R^n con un applicazione continua?
Studieremo:
1) Proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, come ad esempio la compattezza, da un punto di vista astratto.
2) Applicheremo le stesse proprietà ad insiemi dotati di "geometria" meno intuitiva
Ad esempio la topologia generale si applica in

- Analisi
- Algebra
- Logica

Esempio
In $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$$X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}.$$

Poniamo, in maniera informale, questa relazione d'equivalenza:

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il quoziente "assomiglia" ad una sola retta, gli elementi equivalenti vengono "appiccicati".
Seconda relazione d'equivalenza:

$$(x,0) \sim (x,1) \text{ solo per } x \leq 0.$$

$X/\sim$ in questo caso assomiglia a :
Terza relazione d'equivalenza:

$$(x,0) \sim (x,1) \text{ solo per } x < 0.$$

Una specie di analogo della figura precedente, ma il punto $[0,0]$ è raddoppiato

Definizione 1 (Funzioni continue)
Dati $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ insiemi qualsiasi, si definisce continua un'applicazione $f : X \to Y$ se

$$\forall p \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad se \quad x \in X \quad soddisfa.$$

$$||x-p|| < \delta \quad allora \quad ||f(x) - f(p)|| < \epsilon.$$

Definizione 2 (Omeomofrismo)
Data $f : X \to Y$ si dice omeomorfismo se è biettiva, continua, e $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Osservazione
In topologia generale gli omeomorfismo hanno un ruolo analogo agli isomorfismi in algebra e algebra lineare.
Esempio:
1) $[0,1]$ (in $\mathbb{R}$) è omeomorfo ad $[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$
ad esempio

$$f : [0,1] \to [a,b]$$
$$t \to (1-t)a + tb$$

è biettiva, continua e f^{-1} è continua.
2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ e $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | max\{|x|,|y|\} = 1\}$
Per esempio possiamo normalizzare i punti del quadrato

$$\text{Q} \to S^1$$
$$\text{p} \to \frac{p}{||p||}$$

che è continua, biettiva e ha inversa continua.
3)$[0,1] \cup]2,3]$ non è omeomorfo a $[0,2]$
ad esempio

$f : [0,1] \cup]2,3] \to [0,2]$

$$x \to \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Con l'analisi matematica si dimostra facilmente che non esiste alcuna biezione con inversa continua.

Osservazione

In algebra se f è un omomorfismo biettivo allora f^{-1} è un omomorfismo.
In topologia se f è continua e biettiva, f^{-1} non è sempre continua.
4) $]0,1[$ è omeomorfo a $]a,b[$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a < b$
Inoltre $]0,1[$ è omeomorfo a $]0,+\infty[$
ad esempio tramite
$]0,+\infty[\to]0,1[$

$x \to e^{-x}$

5)$]0,+\infty[$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$, ad esempio tramite $x \to log(x)$
6) $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1]$
7) $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | \ \ ||p|| = 1\}$
$S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ Ad esempio tramite la proiezione stereografica (esercizio: vedere la formula)
8) Ci sono molti esempi di figure omeomorfe fra loro, ma un omeomorfismo esplicito è difficile, ad esempio.
un l-agono regolare qualsiasi (in $\mathbb{R}^n$) e un r-agono qualsiasi sono omeomorfi ($\forall\ l, r \geq 3$)
9) $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono omeomorfi se e solo se $n = m$ (è un teorema difficile, nel corso vedremo la dimostrazione per qualche esponente specifico, $n \leq 2$)
Vediamo due riformulazioni della continuità.

Definizione 3
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall p \in A \quad \varepsilon > 0 \quad | \quad se \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$soddisfa \quad ||x - p|| < \quad allora\ x \in A.$$

Notazione 1
$B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x - p|| < \epsilon\}$
è la palla aperta di centro p e raggio

Definizione 4
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ p si dice aderente a X se $\forall > 0$ $\exists x \in X \mid ||x-p|| < \epsilon$ (chiaramente se pX allora è aderente a X, basta prendere $x = p$)

Esempio:
$1 \in \mathbb{R}$ è aderente a $X = [0,1[$

Proposizione 1
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Sono equivalenti:*

1. f *è continua*
2. $\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$ *se* p *è aderente a* Z *allora* $f(p)$ *è aderente a* $f(Z)$
3. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ *se* A *è aperto, allora* $f^{-1}(A)$ *è aperto.*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
Siano $Z \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$ *suppongo* p *aderente a* Z*, dimostriamo che* $f(p)$ *è aderente a* $f(Z)$
Sia $\epsilon > 0$ *qualsiasi, sia* $\delta > 0$*, dalla continuità di* f *in* p*. Dato che* p *è aderente a* Z *esiste* $z \in Z$ *tale che* $||z - p|| < \delta$.
Allora $f(z)$ *è un punto di* $f(Z)$ *e* $||f(p) - f(z)|| < \varepsilon$.
2) $\Rightarrow$ 3)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *aperto, dimostriamo che* $f^{-1}(A)$ *è aperto, dimostriamo che* $f^{-1}(A)$ *è aperto in* $\mathbb{R}^m$
Sia $p \in f^{-1}(A)$ *sia* $f(p) \in A$
Per assurdo supponiamo.
$\forall > 0 \exists q \in \mathbb{R}^n$ *fuori da* $f^{-1}(A)$ *ma* $||p - q|| < \varepsilon$.
Allora p *è aderente a* $\mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(A)$.
Segue, per 2), $f(p)$ *è aderente a* $f(\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A))$
quindi per ogni $\eta > 0$ *esistono punti a distanza* $< \eta$ *non in* $f(\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A))$ *punti che non vanno in* A
allora $f(p)$ *è aderente a* $\mathbb{R}^m \setminus A$*. Questo è assurdo perché* A *è aperto* $\square$

Lezione 02 Geometria II

Federico De Sisti

2025-03-08

1 Spazi Topologici

Definizione 1 (Topologia)
Sia X un insieme, $T \subset P(X)$
T è detta Topologia se:

1. $X, \emptyset \in T$
2. *Unione di una famiglia qualsiasi di elementi in T è un elemento di T*
3. *intersezione di 2 elementi qualsiasi di T è un elemento di T.*

In tal caso gli elementi di T sono detti aperti di T.
La coppia (X, T) è detta ***spazio topologico*** *(o anche semplicemente insieme X)*

Osservazione

- Famiglia qualsiasi vuol dire infinita numerabile, o finita, o non numerabile, o anche vuota
- L'intersezione di una famiglia finita di elementi di T è ancora un elemento di T
- Possiamo interscambiare la precedente affermazione e la proprietà 3 della definizione

Nota

- "intervallo aperto" $=]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ come al solito
- aperto = elemento della topologia T

Esempi 1) Ogni insieme è dotato almeno delle seguenti topologia

1. $T = \{X, \emptyset\}$, detta **topologia banale**
2. $T = P(x)$, detta **topologia discreta**

Osserviamo che, nella topologia discreta, $\{x\}$ è aperto $\forall x \in X$
2) $X = \mathbb{R}^n$
$T = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0\ t.c.\ B_\varepsilon(a) \subseteq A\}$ è la topologia euclidea
La dimostrazione del fatto che sia una topologia è un esercizio per casa
3) Sia X insieme, $p \in X$. Definiamo $T = \{A \subseteq X \mid p \in A$, oppure $A = \emptyset\}$ T è una topologia
4) X insieme, poniamo $T = \{A \subseteq X \mid X \setminus A$ è finito, oppure $A = \emptyset\}$
T è una topologia, detta **topologia cofinita**

Definizione 2
Sia (X, T) spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto

Lemma 1 (Proprietà degli insiemi chiusi)
Per gli insiemi chiusi di qualunque topologia valgono:

1. *$X, \emptyset$ sono chiusi*
2. *intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso*
3. *Unione finita di chiusi è un chiuso*

Dimostrazione
1. ovvio
2. $x \setminus \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcup_{X \setminus C_i}^{i \in I}$ *che è unione di aperti*
3. $(X \setminus (C \cup D)) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ *che è intersezione di 2 aperti.* □
Osservazione
In uno spazio topologico ci sono insiemi sia aperti che chiusi (clopen = closed + open)
Esempio
$X = \mathbb{R}$
Il sottoinsieme $[0, 1]$ è chiuso in topologia euclidea
è chiuso e aperto in topologia discreta
non è chiuso in topologia banale
non è chiuso in topologia cofinita, e neanche aperto

Definizione 3
Sia X spazio topologico con topologia T. Sia $B \subseteq T$ B è detta base se ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B

Esempi

1. Sia T topologia su $X, \Rightarrow B = T$ è una base
2. Sia T topologia discreta su $X, B = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è una base di T
3. Sia $X = \mathbb{R}$, $T =$ topologia euclidea. $B = \{]a, b[| a < b \in \mathbb{R}\}$ è una base di T
   Infatti $B \subseteq T$ perché $]a, b[$ è aperto in topologia euclidea. Inoltre ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B

Dimostrazione
Sia $A \in T$ euclidea su $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall p \in A \quad \exists \varepsilon > 0$ *t.c.* $\quad]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subseteq A$
$\Rightarrow A = \bigcup_{p \in A}]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\in B$ □

Osservazione
Data B base di T topologia, la topologia T è determinata da B Infatti:

$$T = \{ \text{ unione arbitraria di elementi di } B\}.$$

Proposizione 1
Sia X insieme, $B \subseteq P(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X. Esiste T topologia t.c. B è sua base se e solo se

1. *X è unione di elementi di B*
2. *$\forall A, A' \in B, A \cap A'$ è unione di elementi di B*

Dimostrazione
($\Rightarrow$)
$\exists T$ topologia di cui B è base (per ipotesi)

- *$\Rightarrow X \in T$ e B è base di $T \Rightarrow$ (1) vera*
- *$\Rightarrow A$ e $A' \in T \Rightarrow A \cap A' \in T \Rightarrow$ (2) vera*

($\Leftarrow$)
Definisco $T =$ unioni arbitrarie di elementi di B e verifico che sia una topologia

- *$X \in T, \emptyset \in T \Rightarrow$ (1) vera ($\emptyset \in T$ perché $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$)*
- *Per costruzione di T, unioni di elementi di T sono elementi di $T \Rightarrow$ (3) vera*
- *$D, E \in T \Rightarrow D = \bigcup_{i \in I} A_i, E = \bigcup_{i \in J} A'_j, \quad A_i, A'_j \in B \ \ \forall i, j$*
  $\Rightarrow D \cap E = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap A'_j)$

Osservazione:
Ciascuno $A_i \cap A'_j$ è unione di elementi di B.
$\Rightarrow D \cap E$ è unione di elementi di B
$\Rightarrow T$ è topologia (e B sua base per costruzione) $\square$

Osservazione
La proprietà (2) è equivalente a:

$$\forall A, A' \in B, \ \ \forall p \in A \cap A' \ \exists D \in B \ \ \text{t.c } p \in D \subseteq A \cap A'.$$

Esempio
Sia K un campo, consideriamo $x = \mathbb{K}^n$, Dato $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
Poniamo $x_f = \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) \neq 0\}$
$\Rightarrow B = \{x_f \mid f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}$
(esempio: $x = \mathring{,} n = 1, \daleth = \mathring{;} \ f(x) = (x-1)(x-2) \rightsquigarrow x_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$) (esempio: $X = \mathbb{R}, n = 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, x_f = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$)

Allora B è base di una topologia T su X
Verifichiamo usando la proposizione precedente
$X = X_f, f = 1$ polinomio costante, allora (1) ok
Prendiamo $A, A' \in B$ studiamo $A \cap A'$
$A = x_f,\ A' = x_g$ con $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, Allora
$A \cap A' = X_{fg}$ è essa stessa un elemento di B quindi (2) ok
per la proposizione precedente $\Rightarrow \exists$ topologia T
La topologia così definita è detta la topologia di Zariski in $\mathbb{K}^n$ **Esempio**
$\mathbb{K} = \mathbb{R}, n = 1$
$\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ è aperto in topologia euclidea e in topologia di Zariski.
$[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso in topologia euclidea, è chiuso in topologia di zariski? Esercizio per casa

Definizione 4
T_1, T_2 topologie su X, T_1 è detta più fine di T_2 se $T_2 \subseteq T_1$

Osservazione
Prese 2 topologie a caso, non è detto che siano confrontabili.
Esempio
La topologia banale è la meno fine di tutte, Quella discreta è la più fine.

Proposizione 2
Siano T_1, T_2 topologie su X. Allora
$T_1 \cap T_2$ è una topologia.
Inoltre $T = T_1 \cap T_2$ è meno fine di T_1 e meno fine di T_2
Dimostrazione
Esercizio lasciato al lettore □

Lezione 3 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-04

0.1 Parte interna, chiusura,intorni

Definizione 1
Sia X spazio topologico, sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme, la parte interna di D è

$$D^o = \bigcup_{A \subseteq D, A \text{ aperto}} A.$$

La chiusura di D è

$$\overline{D} = \bigcap_{C \supseteq D, C \text{ chiuso}} C.$$

la frontiera di D è

$$\partial D = \overline{D} \setminus D^o.$$

I punti di D^o si dicono interni a D, quelli di $\overline{D}$ si chiamano aderenti a D.

Osservazioni
1) D^o è un aperto e $\overline{D}$ è un chiuso (posso vederlo come l'intersezione tra $\overline{D}$ e il complementare di D^o, che è chiuso)
2) Anche ∂D è chiuso perché
$D = \overline{D} \cap (X \setminus D^o)$ dove $(X \setminus D^o)$ è un chiuso
Esempio
1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea. Sia $D = [0, 1]$.
Allora $D^o =]0, 1[$, verifica:
$D^o \supseteq]0, 1[$:
La parte interna di D contiene tutti gli aperti, dato che $]0, 1[$ è un aperto è contenuto.
A $D^o \subseteq]0, 1[$:
supponiamo per assurdo che $D^o \not\subseteq]0, 1[$, allora $0 \in D^o$ oppure $1 \in D^o$ (mi limito a considerare i punti di D perché $D^o \subseteq D$).
Supponiamo $0 \in D^o$, allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c. $A \subseteq D, A \ni 0$ (è uno degli A della definizione).
Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\subseteq a \subseteq D$.
assurdo, Analogamente $1 \notin D^o$ quindi vale $\subseteq$
2) $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita $D = [0, 1]$. Allora $D^o = \bigcup_{A \subseteq D, A \text{ aperto}}$
Sia A aperto.
$A \subseteq D$ abbiamo
$A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{R} \setminus \{\text{insieme finito}\}$
Ma questa ultima è impossibile
allora $D^o = \emptyset$ in questa topologia (con questo D)
esercizio: calcolare $\overline{D}$
3) $X = \mathbb{R}$, $T =$ topologia per cui A è aperto $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oppure $A \ni 0$
Considero $\overline{\{1\}} = \{1\}$, questo insieme non contiene lo zero, quindi $\{1\}$ è esso stesso un chiuso.
Però $\overline{\{0\}} =?$
I chiusi in T sono $\mathbb{R}$ e i sottoinsiemi che non contengono lo 0. Quindi l'unico insieme chiuso che contiene $\{0\}$ è $\mathbb{R}$, allora $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$

Definizione 2
Sia X spazio topologico, un sottoinsieme di $D \subseteq X$ si dice denso se $\overline{D} = X$

Esempio
$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea,
$D = \mathbb{Q}$. Dimostriamo che è denso
L'unico chiuso che contiene D è X stesso.
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso con $C \supseteq \mathbb{Q}$
sia $a \in \mathbb{R} \setminus C$ aperto
allora $\exists \varepsilon > 0 \mid]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus C$
allora $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$
assurdo.
Allora a non esiste e $C = \mathbb{R}$. **Osservazione:**
1) Sia $D \subseteq X$ spazio topologico
vale:

$$X \setminus (\overline{D}) = (X \setminus D)^o.$$

Dimostrazione
Usando direttamente la definizione:

$$X \setminus (\overline{D}) = X \setminus (\bigcap_{C \supseteq D, C \text{ chiuso}} C) = \bigcup_{C \supset D, C \text{ chiuso}} (X \setminus C).$$

(ultima eguaglianza per esercizio)

$$= \bigcup_{A = X \setminus C, C \supset D, C \text{ chiuso}} A = \bigcup_{A \text{ aperto}, X \setminus A \supset D} A = \bigcup_{A \text{ aperto}, A \subseteq X \setminus D} A.$$

□

2) D denso
$\Updownarrow$
D interseca ogni aperto non vuoto (esercizio)

Definizione 3
Sia X spazio topologico,
$U \subseteq X, x \in U^o$
Allora U si dice intorno di x.
Equivalentemente, un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice intorno di $x \in X$ se esiste $A \subseteq X$ aperto t.c. $x \in A \subseteq U$

Esempio
$X = \mathbb{R}$ topologia euclidea, $x = 0, U =]-1, 1[$ è intorno di x (si prende ad esempio $A = U$, o anche $A =]-1/2, 1/2[$
Anche $V = [-1, 1] \cup \{5\}$ è un intonro di 0, ad esempio $A =]-1/2, 16[\cup]3/16, 7/16[$
Osservazione
$U \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow U = U^o \Leftrightarrow U$ è un intorno di ogni suo punto.

Lemma 1
Siano X spazio topologico, $x \in X$ $D \subseteq X$. Allora $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \forall U$ intorno di x vale $U \cap X \neq \emptyset$

Dimostrazione
Supponiamo $x \in \overline{D}$ sia U intorno di x
per assurdo suppongo $D \cap U = \emptyset$ Considero $A \subseteq X$ aperto con $x \in A \subseteq U$
Considero il chiuso $X \setminus A = C$
Abbiamo $C \supseteq D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset A$
Abbiamo $C \supset D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$. Cioè C compare nella definizione di D e $C \not\ni x$ perché $x \in A$
Ma $x \in \overline{D}$ quindi x è in tutti i chiusi che contengono D, assurdo
Viceversa, supponiamo D intorno di x, per assurdo però $x \neq \overline{D}$, Allora esiste un chiuso C che contiene D ma non x.
Considero $A = X \setminus C$ è un aperto contenente x. Cioè A è un intorno di x e A non interseca D; assurdo. Quindi $x \in D$ □

Definizione 4 (Famiglia degli intorni, sistema fondamentale)
Sia X spazio topologico e $x \in X$ La famiglia di tutti gli intorni di x si denota con $I(x)$.
Un sottoinsieme $J \subseteq I(x)$ è detto sistema fondamentale di intorni di x (o base locale in x) se $\forall U \in I(x) \quad \exists V \in J \mid V \subseteq U$

Esempi:
$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.
$x \in \mathbb{R}$ qualsiasi
$J = \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\mid \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}$
è sistema fondamentale di intorni di x
$J'\{[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}] \mid n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
è un sistema fondamentale di interni di x

$$J'' = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{2}{n}[\cup \{x + \frac{3}{n}\} | n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

è un sistema fondamentale di riferimento

$$J''' = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cup \{10\} | n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

$(10 \neq x)$
non è un sistema fondamentale di riferimento

0.2 Applicazioni continue

Definizione 5
Siamo X, Y spazio topologico $f : X \to Y$ un'applicazione. f si dice continua se $f^{-1}(A)$ è aperto (in X) $\forall A$ aperto (Y)

Nota (per la tesi)
non iniziare mai una frase con un simbolo, è facile fare errori (lui può ma solo per essere veloce)
Esempi:
1) Se X ha topologia discreta, ogni f è continua (qualsiasi sia Y)
2) Se Y ha una topologia banale, allora $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$
quindi ogni f è continua.
3) Supponiamo X, Y con topologia cofinita e $f : X \to Y$ iniettiva
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
gli altri aperti sono del tipo $Y \setminus \{$ insieme finito $\} = Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$
allora:
$f^{-1}(Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}) = X \setminus \{f^{-1}(y_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(y_n)\}$

Lezione 04 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-06

1 Prima lezione di esercizi

mail del tipo degli esercizi: zenobi@altamatematica.it

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = [0,1] \times [0,1].$$

Lezione 5 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-10

0.1 Funzioni continue

Osservazione
Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$.
Siano $A \subseteq Y$ un sottoinsieme,

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\} = \{x \in X | f(x) \in Y \setminus A\} = f^{-1}(Y \setminus A).$$

Analogamente, con $A, B \subseteq Y$ e $C, D \subseteq X$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$$f(C \cup D) \neq f(C) \cup f(D).$$

$$f^{-1}(f(C)) \supsetneq C.$$

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap Im(f).$$

Tornando a $f : X \to Y$
f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ chiuso $A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow$ con $C = Y \setminus A$ $f^{-1}(C)$ chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso.

Definizione 1 (Continuità)
Sia $f : X \to Y$ applicazione fra spazi topologici. Sia $p \in X$, f è continua in p se

$$\forall U \subseteq Y \text{ intorno di } f(p)\ \exists V \subseteq X \text{ intorno di } p \text{ t.c } f(V) \subseteq U.$$

Teorema 1
Sia $f : X \to Y$ applicazione fra spazi topologici, sono equivalenti:

1. $\forall p \in X :\ f$ *è continua in* p
2. $\forall Z \subseteq X :\ f(\bar{Z}) \subseteq \overline{f(X)}$
3. f *continua*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Sia $p \in \overline{Z}$ so che f è continua in p.*
Voglio dimostrare che

$$f(p) \in \overline{f(Z)}.$$

Formuliamo questa condizione in termini di intorni:
devo dimostrare che in ogni intorno di $f(p)$ ci sono punti di $f(Z)$. Sia $U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ per continuità in p $\exists V \subseteq X$ intorno di p tale che $f(V) \subseteq V$
Visto che $p \in \overline{Z}$ esiste $z \in Z$ tale che $z \in V$
Allora $f(z)$ è in U e in $f(Z)$
cioè ogni intorno U di $f(p)$ contenente punti di $f(Z)$, cioè $f(p) \in \overline{f(Z)}$

2) $\Rightarrow$ 3) Dimostriamo che $f^{-1}(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso. Considero $f^{-1}(C)$, voglio dimostrare che è chiuso confrontandolo con $\overline{f^{-1}(C)}$.
L'ipotesi 2) dice:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C \cap f(X)} \subseteq C.$$

Dato che C è un chiuso che contiene $C \cap f(X)$
Allora $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$
D'altronde vale sempre $\overline{f^{-1}(C)} \supseteq f^{-1}(C)$
quindi $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$
da cui $f^{-1}(C)$ è chiuso.

3) $\Rightarrow$ 1) suppongo f continua, sia $p \in X$, sia $U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ scegliamo $a \subseteq Y$ aperto con $f(p) \in A \subseteq U$
per continuità: $f^{-1}(A)$ aperto di X e contiene p,
posso prendere $V = f^{-1}(A)$, intorno aperto di p, ed è tale che $f(V) \subseteq A \subseteq U$
□

Proposizione 1
La composizione di applicazioni continue qualsiasi è continua

Dimostrazione
Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$
applicazioni fra spazi topologici, suppongo $f \circ g$ continue,
dimostriamo che $g \circ f$ è continua.
Sia Z aperto dimostriamo che

$$(g \circ f)^{-1}(A) \text{ è aperto }.$$

$$(g \circ f)^{-1}(A) = \{x \in X \mid (g \circ f)(x) \in A\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(A)\} = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

g manda aperti in aperti, stesso per f, segue che la composizione fa lo stesso. □

Definizione 2
Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$.

1. *f si dice omeomorfismo se f è continua, biettiva, e $f^{-1} : Y \to X$ è continua*
2. *X e Y si dicono omeomorfi se esiste $f : X \to Y$ omeomorfismo*
3. *f (non necessariamente omeomorfismo, non necessariamente continua) si dice aperta se $f(A)$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto, e f si dice chiusa quando $f(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq X$ chiuso*

Esempi:
$\mathbb{R}$ con topologia euclidea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ applicazione costante $f(x) = q \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Questa f non è aperta, perché $\mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$ e $f(\mathbb{R}) = \{q\}$ non è aperto in topologia euclidea.
Esempio importante:
Applicazione non chiusa.
p : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(x, $y) \to x$
($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ con topologia euclidea)
Non è chiusa, prendiamo ad esempio $C = \{(x, y) \mid x \cdot y = 1\}$
è un chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma $p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso.

C è chiuso di $\mathbb{R}^2$ perché C è uguale a $f^{-1}(\{1\})$ dove
f:R$^2 \to \mathbb{R}$
(x,y) $\to xy$
Infatti f è continua e $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ è un chiuso.

0.2 Spazi metrici

Definizione 3
sia X un insieme e $d : X \times X \to \mathbb{R}$
d si dice distanza se:

1. $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$,
   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   $\forall x, y, z \in X$

In tal caso $(X, d)(oX$ stesso) si chiama spazio metrico

Esempio

Sia X insieme, poniamo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} .$$

d è una distanza.

Definizione 4
Sia (X, d) spazio metrico.

1. *La palla aperta di centro x e raggio $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ è:*
   $B_\varepsilon(x) = \{p \in X \mid d(p,x) < \varepsilon\}$
2. *La topologia indotta da d su X è definita da:*
   A aperto $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A\ \exists \varepsilon < 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A$
   La denotiamo con T_d

Verifica che T_d è topologia

1. $\emptyset, X$ sono aperti: ovvio
2. unione di aperti è aperto: ovvio
3. Siano $A_1, A_2 \in T_d$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in T_d$, sia $a \in A_1 \cap A_2$ quindi
   $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A_1$ e $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(a) \subseteq A_2$
   sia $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ allora soddisfa $B_\gamma(a) \subseteq A_1 \cap A_2$

Lemma 1
Sia (X, d) spazio metrico e T_d la topologia indotta da d

1. $\forall p \in X\ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(p) \in T_d$
2. $B = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$
   è una base di T_d
3. *Un sottoinsieme $U \subseteq X$ è intorno di $p \in X$ se e solo se*
   $\exists \varepsilon > 0\ |B_\varepsilon(p) \subseteq U$

Dimostrazione
Per esercizio. □

Osservazione
Gli spazi metrici in generale si comportano in modo simile a $\mathbb{R}n$ con distanza euclidea, ma attenzione: non tutto è uguale, ad esempio se (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$:

$$\{p \in X \mid d(x,p) \leq \varepsilon\}.$$

con $\varepsilon > 0$ fissato, è un chiuso di X (verifica per esercizio) ma non è sempre la chiusura di $B_\varepsilon(x)$.

Ad esempio $X = \mathbb{R}$ con distanza $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

Considero $\{p \in \mathbb{R} \mid d(p,x) \leq 1\} = \mathbb{R}$
ma $B_1(x) = \{x\}$
Questo vale $\forall x \in \mathbb{R}$
cioè ogni ogni singoletto è aperto, allora T_d è discreta, quindi $\{x\}$ è anche chiuso.
Cioè $B_1(x) = \{x\}$.
Osservazione:
Siano X, Y spazi metrici sia $p \in X$
$f : X \to Y$, allora f è continua in p
(come applicazione fra spazi topologici, dove su X e Y metto le topologie indotte dalle distanze) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \delta > 0 \mid$ se $d(x,p) < \delta$ allora $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$
Verifica per esercizio

Corollario 1
Siano d, h distanze su uno stesso insieme X.
Allora T_d è più fine di T_h se $\forall p \in X \;\; \forall > 0 \;\; \exists \delta > 0 \mid B^d_\delta(p) \subseteq B^h_\varepsilon(p)$

Dimostrazione
Usiamo $id_X : X \to X$ dove nel dominio prendiamo d e T_d, e nel codominio la distanza h e T_h. Con questa scelta l'identità su X è continua $\Leftrightarrow T_d \supseteq T_h$
La carindalità di Id_X è equivalente alla condizione con ε e δ per l'osservazione.
□

Definizione 5 (Distanze equivalenti)
Date distanze d, h su un insieme X, esse si dicono equivalenti se $T_d = T_h$

Definizione 6 (Spazio topologico metrizzabile)
Sia X uno spazio topologico con topologia T. Se esiste una distanza d su X tale che $T = T_d$ allora X si dice metrizzabile.

0.3 Sottospazi topologici

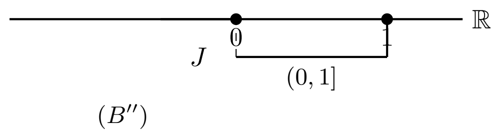
Definizione 7
Sia X spazio topologico, sia $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi, allora su Y è definita la topologia di sottospazio ponendo $A \subseteq Y$ aperto in topologia di sottospazio $\Leftrightarrow \exists B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = B \cap Y$

Esempi:
1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea
$Y = [0,1]$
Allora Y è aperto in topologia di sottospazio
$A = Y$ soddisfa $A = B \cap Y$

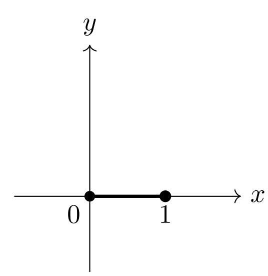
Anche $I =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\subseteq Y$ è aperto in topologia di sottospazio basta prendere $B' = I$ per avere $I = B' \cap Y$
Considero $[0, \frac{1}{2}[= J \subseteq Y$
non è aperto in $\mathbb{R} = X$, ma è aperto in Y in topologia di sottospazio, basta prendere $B'' =]-1, \frac{1}{2}[$ è aperto in X e soddisfa

$$J = B'' \cap Y.$$

Idea intuitiva:



J non è aperto in $\mathbb{R}$ perché $\forall \varepsilon > 0 \exists$ punti di $\mathbb{R}$, a distanza $< \varepsilon$ da 0, punti che non sono in J.
Ma J aperto in Y in topologia di sottospazio perché Y non contiene tali punti
2) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, sia $Y = \mathbb{Z}$ con topologia di sottospazio, Ad esempio $A =]-100, 23[\cap Y = \{-99, -98, \ldots, 22\}$
Anche $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z} = \{0\}$ è aperto.
Analogamente
$]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z} = \{n\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ è aperto in $\mathbb{Z}$ in topologia di sottospazio. Quindi la tipologia di sottospazio è discreta.
3) $X = \mathbb{R}^2$ con topologia euclidea, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, l'asse x.



allora $A =]0, 1[\times \{0\}$ è aperto in topologia di sottospazio, ad esempio $B =]0, 1[\times \mathbb{R}$
Osservazione Verifichiamo che la topologia di sottospazio è una topologia:

$$T_Y = \{A \subseteq Y \mid \exists B \subseteq X \text{ aperto t.c.} B \cap Y = A\}.$$

Assiomi di topologia

1. $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$
2. Siano $A_i, i \in I$ elemento di T_Y, verifica che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è in T_y
   Scegliamo $B_i \quad \forall i \in I$ aperto in X t.c. $\quad A_i = B_i \cap Y$

$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap U) = \bigcup_{i\in I} B_i \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
da cui $\bigcup_{i\in I} A_i \in T_Y$.

3. Siano $A_1, A_2 \in T_Y$, scegliamo B_1, B_2 aperti in X con $A_i = B_i \cap Y \quad \forall i \in \{1,2\}$ allora
$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = B_1 \cap B_2) \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
quindi $A_1 \cap A_2 \in I_y$

Osservazione.
Sia $C \subseteq Y$ chiuso in topologia di sottospazio. Allora $A = Y \setminus C$ è scrivibile come $A = B \cap Y$ con B aperto in X, Allora $D = X \setminus B$ è chiuso in X, e vale $D \cap Y = C$
Cioè se C è chiuso in topologia di sottospazio allora esiste $D \subseteq X$ chiuso tale che $C = D \cap Y$.
Vale il viceversa se il sottoinsieme C di Y è scrivibile come $C = D \cap Y$ con $D \subseteq X$ chiuso, allora C è chiuso in topologia di sottospazio (esercizio)

Lezione 6 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-11

0.1 boh

Osservazione:
Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio T_Y .
Considero l'inclusione di Y in X come applicazione

$$\begin{aligned} i : & Y \to X \\ & y \to y \end{aligned}$$

i è costruita (mettendo su Y la topologia T_Y). Verifica: sia $B \subseteq X$ aperto
la controimmagine è $i^{-1}(B)$ Questo è aperto in topologia di sottospazio.
Sia T una topologia su Y (non necessariamente $= T_Y$), suppongo che $i : Y \to X$ sia continua anche usando T come topologia su Y
Allora $\forall B \subseteq X$ aperto, $i^{-1}(B)$ è aperto in Y cioè $i^{-1}(B) \in T$.
Al variare di B aperto in X, gli insiemi $i^{-1}(B)$ formano T_Y, quindi $T_y \subseteq T$.
Possiamo considerare la famiglia di tutte le topologie su Y per cui l'inclusione è continua. L'intersezione di esse è contenuta in T_Y perché T_Y è una di esse, e contiene T_Y perché ogni T siffatta contiene T_Y.
Quindi T_Y è la topologia meno fine fra quelle per cui i è continua.

Proposizione 1
Sia $f : X \to Z$ applicazione continua fra spazi topologici, sia $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, allora $f|_Y : Y \to Z$ è continua

Dimostrazione
Usiamo l'inclusione $i : X \to Y$ e osserviamo $f|_Y : Y \to Z$ concateno con

$$f \circ i : Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Z.$$

f e i sono continue, lo è anche $f \circ i$ □

Proposizione 2
Siano X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, Z spazio topologico e $f : Z \to Y$.
Consideriamo l'estensione del codominio di f da Y a X che è l'applicazione $i \circ f : Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} X$
Allora f è continua se e solo se $i \circ f$ è continua.

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *ovvio poiché $i \circ f$ è composizione di applicazioni continue*
($\Leftarrow$) *Sia $A \subseteq Y$ aperto, scegliamo $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap Y = A$.*
Allora $f^{-1}(A) = (i \circ f)^{-1}(B)$
poiché chiedere che $z \in Z$ vada in A tramite f è equivalente a richiedere che vada in B.

Allora $f^{-1}(A)$ *è aperto per continuità di* $i \circ f$ $\square$

Osservazione

Data in generale $f : Z \to X$ spesso la si restringe all'immagine

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& Z \to Im(f) \\ & z - f(z) \end{aligned}$$

vale f continua $\Leftrightarrow \tilde{f}$ continua, perché posso considerare l'inclusione

$$i : Im(f) \to X.$$

e allora $f = i \circ \tilde{f}$

Esempio:

$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.

$Y = [0, 1[$ con topologia di sottospazio

$$Z =]0, 1[\quad (\subseteq Y).$$

Sia verifica facilmente (esercizio) che la chiusura di Z in Y è $[0, 1[$e la chiusura di Z in X è $[0, 1]$

Le chiusure sono diverse, ma

$$[0, 1[= [0, 1] \cap Y.$$

dove il primo intervallo è in Y e il secondo intervallo in X

Questo si generalizza.

Lemma 1

Sia X *spazio topologico,* $Y \subseteq X$ *con topologia di sottospazio,* $Z \subseteq Y$ *la chiusura di* Z *in* Y *è uguale a* Y *intersecato la chiusura di* Z *in* X

Dimostrazione

Chiusura di Z *in* $Y = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z}} C = \dots$

Per ogni tale C *scelgo un* $D \subseteq X$ *chiuso in* X *tale che* $C = D \cap Y$

$$\begin{aligned} \dots = & \bigcap_{\substack{C \subset U, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z, \\ D \subseteq X, \\ D \text{ chiuso in } X \\ \text{t.c. } D \cap Y = C}} D \cap Y. \\ = & \bigcap_{\substack{D' \subseteq X, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supset Z}} D' \cap Y. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale perché ogni D della prima intersezione compare fra i D della seconda intersezione, Per ogni D' della seconda seconda intersezione considero $C = D' \cap Y$ che è in Y, chiuso in Y, contenente Z, quindi compare fra i C della prima intersezione; ad esso corrisponde un D della prima intersezione, che soddisfa $D \cap Y = C = D' \cap Y$.
Quindi per ogni D' della seconda intersezione esiste un D della prima con la stessa intersezione con Y, ovvero $D \cap Y = D' \cap Y$, Quindi vale l'uguaglianza.
L'uguaglianza prosegue:

$$= \left(\bigcap_{\substack{D' Z, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supseteq Z}} D' \right) \cap Y.$$

dove la parentesi è la chiusura di Z in X □

Osservazione
Attenzione: non vale un enunciato analogo con la parte interna.
Ad esempio $X = \mathbb{R}$ cn topologia euclidea $Y = \mathbb{Z}$ $Z = \{0\}$
La parte interna di Z in X è vuota, perché Z non contiene alcun aperto di $\mathbb{R}$
Invece la topologia di sottospazio su Y è la topologia discreta e Z è aperto in Y.
Quindi Z è la propria parte interna come sottoinsieme di Y.

Definizione 1
Sia $f : X \Rightarrow Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, f è un'inversione topologica se la restrizione

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& X \to f(X) \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo, dove su $f(X) \subseteq Y$ metto la topologia di sottospazio.

Esempio
1) Considero

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to (x, 0) \end{aligned}$$

(qui $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$con topologia euclidea) è un immersione, la verifica è per esercizio.
2)

$$\begin{aligned} \text{f}: \ & [0{,}2\pi[\to \mathbb{C} \\ & \text{t} \to e^{it} \end{aligned}$$

Su $[0, 2\pi[\subseteq \mathbb{R}$
metto la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ metto la topologia euclidea
È continua, iniettiva e $f([0, 2\pi[) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
Questa f non è un'immersione, infatti $[0, \pi[$ è aperto nel dominio, ma $f([0, 2[)$ non è aperto in S_1 con topologia di sottospazio. quel chiuso dovrebbe essere interesezione tra la circonferenza e un aperto di $\mathbb{R}^2$, Ciò non è possibile perchè ci sarebbe un intorno su un estremo della circonferenza.

0.2 Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici.
vogliamo definire una topologia "naturale" su $P \times Q$.
Esempio:
Considero $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$P \times Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

La topologia su $\mathbb{R}^2$ sarà quella euclidea. Considero ad esempio

$$U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}, \quad V \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}.$$

il prodotto $U \times V$ sarà aperto in $\mathbb{R}^2$, posso pensare che questa sia quindi la mia topologia, ma vediamo qualche esempio con la topologia euclidea.
Ad esempio $U =]a, b[\quad V =]c, d[$, allora $UV =]a, b[\times]c, d[$ è un rettangolo aperto
Anche un disco aperto in $\mathbb{R}^2$ è aperto in topologia euclidea, ma non riesco a scriverlo con questo prodotto $U \times V$ con $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$
Potrei prendere

$$B = \{U \times V \mid \substack{U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto} \\ V \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto}}, \}.$$

come base per la topologia su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definizione 2
Siano P, Q spazi topologici, la topologia prodotto su $P \times Q$ è la meno fine fra quelle per cui le proiezioni:

$$\begin{aligned} p :& P \times Q \to P \\ &(a, b) \to a \\ q :& P \times Q \to Q \\ &(a, b) \to b \end{aligned}$$

Sono continue.

Osservazione
Esistono topologie su $P \times Q$ tali che p e q sono continue, per esempio la topologia discreta su $P \times Q$
La topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologia per cui p e q sono continue.

Lezione 7 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-17

0.1 Cotntinuo sulla topologia prodotto

Teorema 1
Siano P, Q spazio topologico, sia $P \times Q$ con topologia prodotto

1. $B = \{U \times V \mid U \subseteq P \quad \text{aperto} , V \subset Q \text{ aperto } \}$ *è una base della topologia prodotto.*

2. *Per ogni* $x_0 \in P, y_0 \in Q$ *le applicazioni*

$$p|_{P \times \{y_0\}} : P \times \{y_0\} \to P$$
$$(x,y_0) \to x$$

$$p|_{\{x_0\} \times Q} : \{x_0\} \times Q \to P$$
$$(x_0, y) \to y$$

   sono omomorfismi (dove $P \times \{y_0\}$ *e* $\{x_0\} \times Q$ *hanno topologia di sottospazio)*

3. *le proieizoni* $p : P \times Q \to P$
   $q : P \times Q \to Q$
   sono aperte

4. *Sia* X *spazio topologico* $f : X \to P \times Q$
   allora f *è continua se e solo se lo sono le sue componenti* $p \circ f$ *e* $q \circ f$

Dimostrazione
1) Dimostriamo prima di tutto che esiste una topologia T *su* $P \times Q$ *che ha* B *per base.*
Verifichiamo le condizioni date in una proposizione precedente
a) $P \times Q$ *dev'essere unione di elementi di* B*, è vero perché* $P \times Q \in B$
b) Siano $U, U' \subseteq P$ *aperti,* $V, V' \subseteq Q$ *aperti, allora l'intersezione.*

$$(U \times V) \cap (U' \times V').$$

(è l'intersezione di due elementi qualsiasi di B*) si deve poter scrivere come unione di elementi di* B*:*

$$(U \cap U') \times (V \cap V').$$

quindi questa intersezione è un elemento di B*.*
Abbiamo dimostrato che esiste T *che ha* B *per base.*
Confrontiamo T *con la topologia con la topologia prodotto. Prima cosa: dimostriamo che* p *e* q *sono continue se su* $P \times Q$ *mettiamo* T*.*
Vediamo $p : P \times Q \to P$

sia $A \subseteq P$ aperto, allora $p^{-1}(A) = A \times Q$
è un aperto di T, Quindi p è continua.
Analogamente q è continua.
Segue T è più fine della topologia prodotto (per definizione della topologia prodotto).
T topologia prodotto
Dimostriamo $T \subseteq$ topologia prodotto
Dimostriamo che $B \subseteq$ topologia prodotto
Siano $U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto
quindi $Y \times V \in B$ allora:

$$U \times Q = p^{-1}(U).$$

dev'essere aperto anche in topologia prodotto.
Anche $P \times V = q^{-1}(V)$ dev'essere aperto in topologia prodotto.

$$U \times V = (U \times Q) \cap (P \times V).$$

unione arbitraria di aperti è aperta, quindi $T \subseteq$ topologia prodotto.
Quindi B è base della topologia prodotto

2) Dimostriamo che

$$p|_{P \times \{y_0\}} P \times \{y_0\} \to P.$$

è omeomorfismo.
Quest'applicazione è biettiva, è continua perché è restrizione (su un sottospazio) di un'applicazione continua
Dobbiamo dimostrare che l'inversa è continua

$$\begin{gathered} \varphi : P \to P \times \{y_0\} \\ x \to (x, y_0) \end{gathered}$$

Basta verificare che le controimmagini di elementi della base sono aperti (esercizi settimanali).
Inoltre una base del sottospazio $P \times \{y_0\}$ è ottenuta intersecando gli elementi elementi dalla base B al sottospazio (esercizi settimanali). Sia $U \times V \in B$ ($U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto) e considero

$$A = (U \times V) \cap (P \times \{y_0\}).$$

Abbiamo $A = \begin{cases} U \times \{y_0\} & se\ y_0 \in V \\ \emptyset & se\ y_0 \notin V \end{cases}$
allora $\varphi^{-1}(A) = \begin{cases} U & se\ y_0 \in V \\ \emptyset & se\ y_0 \notin V \end{cases}$ *In entrambi i casi ho un aperto di P*
segue che $p|_{R \times \{y_0\}}$ è un omeomorfismo. Analogamente lo è anche $q|_{\{x_0\} \times Q}$

3)Dimostriamo che p, q sono aperti

Su $A \subseteq P \times Q$ aperto considero

$$A = \bigcup_{y_0 \in Q} A \cap (P \times y_0\}).$$

$$p(A) = \bigcup_{y_0 \in Q} p(A \cap (P \times y_0\})).$$

$$= \bigcup_{y_0 \in Q} p|_{P \times \{y_0\}}(A \cap (P \times \{y_0\})).$$

Ora l'insieme $A \cap (P \times \{y_0\})$ è aperto nel sottospazio $P \times \{y_0\}$, e $p|_{P \times \{y_0\}}$ è omemorfismo.
quindi $p|_{P \times \{y_0\}}(A \cap (P \times \{y_0\}))$ è aperto di P.
Segue: $p(A)$ aperto in P. Cioè p è aperta analogamente q è aperta
4) Abbiamo Se f è continua allora lo sono le mappe $p \circ f, q \circ f$
Viceversa, supponiamo $p \circ f$ continua. ALlora dimostriamo f continua. Di nuovo usiamo B, quindi $U =\subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto, dimostriamo che $f^{-1}(U \times V)$ è aperto in X. Abbiamo

$$f^{-1}(U \times V) = (p \circ f)^{-1}(U) \cap (q \times f)^{-1}(V).$$

è aperto per continuità di $p \circ f$ e $q \circ f$

$\square$

Osservazione
Siano P, Q spazi topologici, siano B_P base della topologia di P e B_Q base della topologia di Q allora

$$\{U \times V | U \in B_P, \quad V \in B_Q\}.$$

è una base della topologia prodotto.
Esempi
1) $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia euclidea prendiamo le basi $B_P = B_Q = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \ a < b\}$ della topologia euclidea su $\mathbb{R}$
Per l'osservazione $\{]a, b[\times]c, d[\ |a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \ a < b, \ c < d\}$
è base della topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Sappiamo anche che questa è una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ quindi questa è la topologia prodotto.
ANalogamente, la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è la topologia prodotto su

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

2) Considero $\mathbb{R}$ con topologia di Zarinksi, allora la topologia prodtto su

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

dove ogni $\mathbb{R}$ ha la topologia di Zarinski non è la topologia di Zarinksi su $\mathbb{R}^2$

Definizione 1 (Spazi di Hausdoff)
Uno spazio topologico X si dice di Hausdoff (o T2) se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists U$ intorno di x, V intorno di y t.c. $U \cap V = \emptyset$.

Esempi
1) Ogni spazio metrico è T2, basta prendere $U = B_{d(x,y)/2}(x)$ $V = B_{d(x,y)/2}(y)$
2) $X = \emptyset$ di Hausdoff
3) X qualsiasi con topologia banale allora:

- se $|X| \leq 1$ allora X è T2
- se $|X| \geq 2$ allora X non è T2

4) Se X ha topologia cofinita.

- se X è un insieme finito allora la topologia è discreta e X è T2
- se X è infinito allora X non è T2.

Osservazione
Dati $x, y \in X$ con $x \neq y$
se esistono intorni U di x, V di y con $U \cap V = \emptyset$ allora esistono aperti $(x \in) A (\subseteq U)$ e $(y \in) B (\subseteq V)$ e sono disgiunti.
Quindi X è T2 se e solo se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists U$ intorno aperto di x V intorno aperto di y con $U \cap V = \emptyset$

Lemma 1
Se X spazio topologico è T2, tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi.

Dimostrazione
Sia $x \in X$ per ogni $y \in X$ scegliamo intorni aperti

$$U \ni x, V \ni y.$$

con $U \cap V = \emptyset$ $V \not\ni x$, quindi $V \subseteq (X \setminus \{x\})$
Cioè $X \setminus \{x\}$ è intorno di ogni suo punto.
Segue $\{x\}$ è chiuso.
Allora tutti i sottoinsiemi finiti sono chiusi □

Proposizione 1
Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdoff sono di Hausdoff

Dimostrazione
Sia X T2 sia $Y \subseteq X$ sottospazio. Siano $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$
Scegliamo $U \ni y, U' \ni y'$ aperti in X e disgiunti $U \cap U' = \emptyset$
allora $U \cap Y$ e $U' \cap Y$ sono aperti in Y, disgiunti, e contengono rispettivamente y e y', Allora Y è T2.

Siano ora P, Q spazi topologici, entrambi T2, siano $(a, b) \neq (c, d) \in P \times Q$
Supponiamo $a \neq c$
siano $U \ni a, U' \ni x$ aperti in P, $U \cap U' = \emptyset$. Allora $U \times Q$ e $U' \times Q$ sono aperti disgiunti contenenti (a, b) e (c, d) rispettivamente.
Se $a = c$ allora $b \neq d$ e la dimostrazione è analoga con spazi del tipo $P \times U, P \times U'$
$\square$

Teorema 2
Sia X spazio topologia, considero $X \times X$ con topologia prodotto e la diagonale $\Delta = \{(a, a) \in X \times X \mid a \in X\}$
Vale: X T2 se e solo se Δ è chiusa in $X \times X$

Idea intuitiva dell'enunciato, parte $\Rightarrow$.
sia $x \in X$ un punto che "si muove" (ad esempio è un termine di una successione).
Supponiamo x "tende" ad un limite $a \in X$, cioè entra progressivamente in ogni intorno di a. Se x "tende" anche a $b \in X$ e X è T2, allora $a = b$ (perché se $a \neq b$ allora hanno intorni disgiunti).
Allora potrò dire che (x, x) "tende" alla coppia (a, b) e la proprietà T2 implica $a = b$, cioè la diagonale $\{(x, x) \mid$ è chiusa $\}$

Dimostrazione
$\Rightarrow$ suppongo X T2, dimostriamo che $(X \times X) \setminus \Delta$ è aperto in topologia prodotto
Sia $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, cioè $x \neq y$
Siano U, V aperti di X disgiunti con $U \ni x, V \ni y$, allora $U \times V$ è aperto in $X \times X$, contiene (x, y)
Inoltre $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, perché

$$(U \times V) \cap \Delta = \{(z, z) \in X \times X \mid z \in U \quad z \in V\}.$$

è vuoto perché z apparterrebbe a $U \cap V = \emptyset$
Quindi $(X \times X) \setminus \Delta$
è intorno di ogni suo punto, cioè è chiuso
($\Leftarrow$) Suppongo Δ chiuso, cioè $(X \times X) \setminus \Delta$ aperto di $X \times X$. Siano $x \neq y$ di X, allora $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$
Per la base B vista per la topologia prodotto esiste $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$
tale che $U \times V$ aperto di $X, U \times V \ni (x, y)$. Allora $U \cap V = \emptyset$
(ragionamento di prima, non esistono punti come z). Inoltre $x \in U$, $y \in V$.
Segue X è T2. $\square$

Osservazione
Ricordo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$
è chiusa perché $C = f^{-1}(\{1\})$
dove

$$\text{f: } \mathrm{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to xy$$

Pi u in generale siano X, Y spazi topologici $f : X \to Y$ continua. Suppongo Y di Hausdoff e sia $y \in Y$
Allora $\{y_0\}$ è chiuso in Y, quindi

$$\{x \in X \mid f(x) = y_0\} = f^{-1}(\{y_0\}) \quad \text{è chiuso.}$$

Corollario 1
X, Y spazi topologici.
Siano $f, g : X \to Y$ continue, e l'insieme

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Se Y è $T2$ allora C è chiuso in X.

Dimostrazione
Consideriamo

$$\varphi : X \to Y \quad \times \quad Y$$
$$x \to (f(x), g(x))$$

Per il primo teorema della lezione, questa è continua. Allora $C = \varphi^{-1}(\Delta)$ che è la diagonale in $Y \times Y$
Ma la diagonale è chiusa quindi C è chiuso □

Lezione 8 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-18

0.1 Spazi topologici connessi

Esempio
$\mathbb{R}$ con topologia euclidea,
$X = [0,1] \cup [2,3]$ sottospazio
intuitivamente è fatto da due "pezzi" gli intervalli $[0,1]$ e $[2,3]$
Come distinguere i "pezzi di X da altri sottospazio ad esempio $[0,1/3]$?
$[0,1/3]$ è chiuso in X.
anche $[0,1]$ e $[2,3]$ sono chiusi in X
$[0,1/2]$ non è aperto in X.
Invece $[0,1]$ è anche aperto in X in topologia di sottospazio, infatti $[0,1] \in X\cap\ ]-1,3/2[$, dove il secondo è aperto in $\mathbb{R}$
Anche $[2,3]$ è aperto in X

Definizione 1
Uno spazio topologico si dice connesso se gli unici sottospazi contemporaneamente aperti e chiusi sono solo $\emptyset$ e X Se X non è connesso si dice sconnesso

Esempio
1) Se $X = \emptyset$
allora X è connesso
2) se $|X| = 1$ è connesso
3) Anche se X ha topologia banale (qualsiasi cardinalità) è connesso
4) Se $|X| \geq 2$ e la topologia discreta allora X è connesso
5) $X = [0,1] \cup [2,3]$ di prima, è sconnesso ($[0,1]$ è contemporaneamente aperto e chiuso)
6) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (topologia di sottospazio da $\mathbb{R}$ con topologia euclidea)
è sconnesso ad esempio $]-\infty,0[$ è aperto e chiuso in X.

$$]-\infty,0[= \begin{cases} X\cap]-\infty,0[& \text{(aperto di } \mathbb{R}) \\ X\cap]-\infty,0] & \text{(chiuso di } \mathbb{R}) \end{cases}$$

7) $\mathbb{Q} = X$ (con topologia di sottospazio da $\mathbb{R}$ con topologia euclidea)
è sconnesso, ad esempio $\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}[$ è contemporaneamente aperto in $\mathbb{Q}$
è aperto ovviamente in topologia di sottospazio
ed è anceh chiuso $\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}[= \mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}]$ chiuso in $\mathbb{R}$

Lemma 1
Sia X spazio topologico allora sono equivalenti:

1. *X sconnesso*
2. *esistono aperti disgiunti non vuoti A_1, A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$*
3. *Esistono chiusi disgiunti non vuoti tali che $X = C_1 \cup C_2$*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Sia $A \subseteq X$ aperto e chiuso $A \notin \{\emptyset, X\}$, basta porre $A_1 = A,\ A_2 = X \setminus A$*

2) $\Rightarrow$ 3) *Poniamo* $C = A_1, C_2 = A_2$
3) $\Rightarrow$ 1) *Basta prendere* $A = C_1$ *è anche aperto, non vuoto* $\neq X$ *perché* $C_2 \neq 0$ $\square$

Nota
D'ora in poi, per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ daremo per scontata la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$

Teorema 1
$[0,1]$ *è connesso*

Dimostrazione
Suppongo per assurdo $[0,1]$ *sconnesso, usiamo il 3) del lemma, quindi esistono chiusi non vuoti disgiunti* C, D *tale che* $[0,1] = C \cup D$
Possiamo assumere che $0 \in C$ *(altrimenti scambio i nomi)*
Consideriamo $d = \inf D$*, allora* $d \in \mathbb{R}$ *perché* D *è limitato*
Visto che D *è chiuso* $d = \min D$
Inoltre $d \neq 0$ *poiché* $C \cap D = \emptyset$
Segue $[0, d[\subseteq C$ *ma* C *è chiuso e* d *è aderente a* $[0, d[$ *poiché* $d \in C$ *assurdo* $\square$

Lemma 2
Sia X *spazio topologico, sia* $Y \subseteq X$ *sottospazio connesso, sia* $A \subseteq X$ *sottoinsieme aperto e chiuso.*
Allora $Y \subseteq A$ *oppure* $Y \cap A = \emptyset$

Dimostrazione
$A \cap Y$ *è contemporaneamente aperto e chiuso in topologia di sottospazio quindi* $A \cap Y = Y$ *oppure* $A \cap Y = \emptyset$ $\square$

Definizione 2
Uno spazio topologico X *si dice connesso per archi se*
$\forall p, q \in X \exists \alpha : [0,1] \to X$ *continua tale che* $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$ *Una tale* α *è detto cammino da* p *a* q

Esempio
1) $X = \mathbb{R}^n$è connesso per archi, ad esempio.
$\alpha(t) = tq + (1-t)p$
percorre il segmento da p a q
2) $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||p|| = 1\}$
sfera n-dimensionale
$S^{-1} = \emptyset \subseteq \mathbb{R}^0 = \{0\}$
$S^0 = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{R}$ sconnesso
$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Ogni S^n è connesso per archi per ogni $n \geq 1$

Un cammino da p a q è dato ad esempio da $\alpha(t) = (\cos(t \cdot s + (1-t)$
DA COMPLETARE
Suppongo $n \geq 2$, dimostro che S^n connesso per archi
Scegliamo $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sottospazio vettoriale di dimensione 2 contenente p e q. Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ che preserva il prodotto scalare (quindi la norma) allora $\varphi(V \cap S^n) = S^1$
Scelgo β cammino tra $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$ allora $\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta$ è camino tra p e q
3) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme connesso, allora è connesso per archi

Teorema 2
Sia $f : C \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici

1. *Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso*
2. *Se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi*

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo $f(x)$ sconnesso, quindi esistono aperti non vuoti disgiunti $A, B \subseteq f(X)$ tale che $f(X) = A \cup B$
Supponiamo che la restrizione $\tilde{f} : X \to f(X)$ è continua
Allora $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti in X, non vuoti e disgiunti

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B).$$

Assurdo perché X è connesso.
2) Siano $p, q \in f(X)$ scegliamo $x \in f^{-1}(p), z \in f^{-1}(q)$ e $\beta : [0,1] \to X$ un cammino da x a z allora $f \circ \beta : [0,1] \to f(X)$ è un cammino da p a q $\square$

Corollario 1
Sia X spazio topologico. Se X è connesso per archi allora è connesso.

Dimostrazione
Suppongo per assurdo X sconnesso, esistono quindi disgiunti A, B non vuoti tali che $X = A \cup B$
Scegliamo $p \in A, q \in B$ e α cammino in X da p a q. $\alpha : [0,1] \to X$
Per il teorema precedente $\alpha([0,1])$ è connesso di X (e $[0,1]$ è connesso)
Osserviamo A è contemporaneamente aperto e chiuso, segue $\alpha([0,1]) \subseteq A$ assurdo perché $\alpha(1) = q \in B$ oppure $\alpha([0,1]) \cap A = \emptyset$ assurdo perché $\alpha(0) = p$ $\square$

Proposizione 1
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$
Sono equivalenti

1. I *è un intervallo*
2. I *è connesso per archi*
3. I *è connesso*

Nota
In $\mathbb{R}$ definiamo un intervallo se $\forall a, b \in I \ a < b$ e $\forall c \in \mathbb{R}$ tale che $a < c < b$ abbiamo $c \in I$
Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2) *Se* I *è intervallo allora è convesso, allora è connesso per archi*
2) $\Rightarrow$ 3)
Segue dal corollario precedente.
3) $\Rightarrow$ 1)
Supponiamo per assurdo che $I \subseteq \mathbb{R}$ *sia connesso ma non intervallo*
Allora $\exists a, b \in I, c \in \mathbb{R}$ *con* $a < c < b, \quad c \notin I$
Definisco $A := I \cap]-\infty, c[$ *e* $B := I \cap]c, +\infty[$
aperti in I *disgiunti non vuoti e* $I = A \cup B$*, assurdo.* $\square$
Osservazione
La connessione e la connessione per archi si usano per dimostrare che spazi topologici <u>non</u> sono omeomorfi.
Ad esempio $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi (fogli di esercizi)

Lemma 3
Sia $f : S^n \to \mathbb{R}$ *continua,* $n \geq 1$
Allora esiste $p_0 \in S^n$ *tale che* $f(p_0) = f(-p_0)$

Dimostrazione
Consideriamo
g:$S^n \to \mathbb{R}$
$p \to f(p) - f(-p)$
è continua e vale $g(-p) = -g(p)$ *l'immagine di* g *è connessa ed è sottoinsieme simmetrico di* $\mathbb{R}$*. Allora l'immagine di* g *contiene* $0 \in \mathbb{R}$ $\square$