Lezione 9 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-19

0.1 Funzione di Lebesgue-Vitali

$L : [0,1] \to [0,1]$ $n = 1$ $[0,1] = [0,1/3] \cup [2/3,1] \cup (1/3,2/3)$
Al primo passo abbiamo questa situazione, gli intervalli restanti (chiusi) sono gli J_i^1 e quelli rimossi (aperti) sono gli I_i^1
al passo $n = 2$ abbiamo $[0,1] = J_1^2 \cup J_2^2{}_3^2 \cup J_4^2 \cup I_1^2 \cup I_{2\,1^2 \cup I_3^2}$
In generale al passo n-esimo abbiamo $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \cup \bigcup_{i=1}^{2^n-1} I_i^n$ con $|J_i^n| = \frac{1}{3^n}$ e $|J_i^n| = \frac{1}{2^n}$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} 3/2 \text{ su } J_1^1 \cup J_2^1 \\ \text{ costante } \quad \text{su} I_1^1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} (3/2)^2 \text{ su } \bigcup_{i=1}^4 J_i^2 \\ \text{ costante } \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{ lineare con pendenza} (3/2)^n \text{ su } \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n \\ \text{ costante } \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)|.$$

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) \quad \forall x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n.$$

$$= \sup_{x \in [0,\frac{1}{3^n}]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = L_{n+1}(\frac{1}{3^{n+1}}) - L_n(\frac{1}{3^{n+1}}).$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n \cdot 3} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}$$

$\forall m > n$

$$\sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_n(x)| = \sup_{[0,1]} |L_n(x) - L_{m-1}(x) + L_{m-1}(x) - L_{m-2}(x) + \ldots + L_{n+1} - L_n(x)|.$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{[0,1]} |L_{k-1}(x) - L - k(x)| \leq \sup_{[0,1]} |L_m(x) - L_{m-1}(x)| + \ldots + \sup_{[0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \to n \to \infty 0.$$

$$\{L_n(x)\} \text{ è uniformemente di Cauchy in } [0,1].$$

$\Rightarrow \exists L \in C([0,1])$ tale hce $L_n \to L$ uniformemente in $[0,1]$
$L_n(x) \leq L_n(y) \quad \forall x \leq y \;\Rightarrow\; L(x) \leq L(y)$
$L : [0,1] \to [0,1]$ è continua, monotona crescente
$L(0) = 0, L(1) = 1$

L è localmente costante su $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^m$
$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_k^n$
$\Rightarrow \exists m, \exists k \; x \in I_k^n \quad L = \text{costante in } I_k^n \Rightarrow L'(x) = 0$
$\Rightarrow L$ è derivabile quasi ovunque (in $[0,1]\setminus C$) e $L' = 0$ quasi certamente.

$$\int_0^1 L'(x)dx = 0 \neq L(1) - L(0).$$

Integrale di Riemann perché L' è discontinua in C, non funziona quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale

Proposizione 1
$L(C) = [0,1] \; \forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0,2\}$
$L(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}$

Dimostrazione
Primo caso $x \in C$ *tale che* $\exists n \geq 1 \quad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{e^i}$
Usiamo l'induzione su n
se $n = 1 \Rightarrow x = 0$ *oppure* $x = \frac{2}{3} \Rightarrow L(0) = 0 L(2/3) = L_1(2/3) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ *ok*
Supponiamo vero per $L(\sum_{n-1}^{i=1} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{n-1}^{i=1} \frac{x^i/2}{2^i}$
e sia $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}$, *con* $x_n = 2$
$L(x) = L_n(x) = L_n(x - \frac{1}{3^n} = L_n(x - \frac{2}{3^n}) + (\frac{3}{2})^n \frac{1}{3^n}$
$L(x + \frac{2}{3^n}) + \frac{1}{2^n} = L(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{3^i}) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i/2}{2^i} + \frac{x/2}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x/2}{2^i}$
secondo caso
$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}$
è continua

$$\Rightarrow L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i/2}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i/2}{2^i}.$$

$L(C) = [0,1]$
Quindi L *manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva.*
Consideriamo
$\phi(x) = L(x) + x$
$\phi : [0,1] \to [0,2]$ *strettamente crescente*
$\exists \phi^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ *strettamente crescente, con immagine in un intervallo* $\Rightarrow$ *continua*
$\Rightarrow \phi$ *è un omomorfismo di* $[0,1]$ *in* $[0,2]$ $\phi([0,1]) = \phi(C \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^n)$
$= \phi(C) \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \phi(I_i^n)$ *insiemi misurabili e disgiunti*
$\phi(x) = 2 = m(\phi([0,1]) = m(\phi(C)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(\phi(I_i^n))$
$x \in I_i^n \; \phi(x) = x + L(x) = x + a_i^n \Rightarrow \phi(I_i^n)) = I_i^n + a_i^n$
$\Rightarrow m(\phi(I_i^n)) = |I_i^n| = \frac{1}{3^n}$
$= m(\phi(C)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^2$
$= m(\phi(C)) + 1$

$\Rightarrow m(\phi(C)) = 1$

$\square$

$m(\phi(C)) > 0$
$\Rightarrow \exists V \subset \phi(C)$ tale che $V \notin \eta$
ma $E = \phi^{-1}(V) \subset C \Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \eta$
quindi $E \in \eta$ ma $\phi(E) \notin \eta$

Proposizione 2
La σ-algebra η non è chiusa per omeomorfismi continui

Dimostrazione
$E \in \eta$ *ma* $\phi(E) = V \notin \eta$
$E \in \eta$ *se* $E \in B \Rightarrow \phi(E) = (\phi^{-1})^{-1}(E)$
ϕ^{-1} *è continua* $\Rightarrow \phi^{-1}$ *è misurabile secondo Lesbegue*
$\Rightarrow (\phi)^{-1}(E) \in \eta \quad \forall E \in B$
da capire come finisce sta roba (non so manco se questa sia la dimostrazione)

$\square$

Proposizione 3
$\eta \setminus B \neq \emptyset$