Lezione 12 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-04-01

0.1 Nuovo sito del prof

Sito del corso www.sites.google.com/uniroma1.it/guidopezzini/

0.2 Gruppi topologici

Definizione 1
Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico tale che l'operazione di gruppo

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\to g \cdot h \end{aligned}.$$

e l'inverso

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\to g^{-1} \end{aligned}.$$

sono applicazioni continue

Esempi

1. Se G è un gruppo qualsiasi diventa un gruppo topologico con topologia banale o discreta.

2. $(\mathbb{R}^n, +)$ $\mathbb{R}^n$ con topologia euclidea è un gruppo topologico.

3. $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$ con prodotto di matrici
   Identifichiamo
   $Mat_n(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ e $Mat_N(\mathbb{C})$ con $\mathbb{R}^{2n^2}$
   mettiamo su $GL(n)$ la topologia di sottospazio. Allora $GL(n, \mathbb{R})$ e $Gl(n, \mathbb{C})$ sono gruppi topologici

4. Anche sottogruppi noti quali $Sl(n), So(n), U(n), \ldots$
   sono gruppi topologici.

Esercizio(difficile)
Sia G un gruppo topologico $T2$, Sia $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso. Consideriamo

$$G/H = \{\text{classi laterali } gH \text{ con } g \in G\}.$$

Ricordo: $G/H = G/\sim$
dove $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H$
Dimostrare che G/H è $T2$ (con la topologia quoziente)

0.3 Proprietà di numerabilità

Definizione 2
Sia X spazio topologico

1. *X si dice 1^o-numerabile se ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabili*
2. *X si dice 2^o-numerabile se la sua topologia ha una base numerabile.*
3. *X si dice separabile se X ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

Esempi

1. $\mathbb{R}^n \ni p$, sistema fondamentale di intorni e $\{B_{\frac{1}{n}}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$
   quindi $\mathbb{R}^n$ è 1^o-numerabile
   Base numerabile
   $$\{B_{\frac{1}{n}}(q) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, q \in \mathbb{Q}^n\}.$$
   quindi $\mathbb{R}^n$ è 2-numerabile. Inoltre $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ ed è numerabile quindi $\mathbb{R}^n$ è separabile.
2. Ogni spazio topologico finito è 1^o-numerabile, 2^o-numerabile, separabile.
3. Ogni spazio topologico numerabile è separabile
4. Sia X spazio topologico discreto, di qualsiasi cardinalità: è 1^o-numerabile,
   Per ogni $x \in X$
   $\{x\}$ è intorno di x, $\{\{x\}\}$ è un sistema fondamentale di intorni.

Lemma 1
Ogni spazio topologico 2^o-numerabile è 1^o numerabile

Dimostrazione
Sia B base numerabile, Sia $x \in X$ e consideriamo $J = \{C \in B \mid C \ni x\}$.
Allora J è sistema fondamentale di intorni. Infatti sia U intorno di x,
sia $A \subseteq X$ aperto tale che $x \in A \subseteq U$ scriviamo $A \bigcup_{i \in I} B_i$
con $B_i \in B$. Esiste $i_0 \in I \mid B_{i_0} \ni x$ allora $B_{i_0} \in J$ e $B_{i_0} \subseteq U$. Segue J è sistema fondamentale di intorni $\square$

Proposizione 1
Ogni spazio metrico:

1. *è 1^o-numerabile*
2. *se è separabile allora è 2^o-numerabile*

Dimostrazione
Procediamo per ogni punto

1. *Sia $p \in X$ (X spazio metrico)*
   allora $\{B_{\frac{1}{n}}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ è sistema fondamentale d'intorni

2. *Sia E sottoinsieme denso numerabile di X,*

$$B = \{B_{\frac{1}{n}}(e) \mid e \in E \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}.$$

Verifichiamo che è una base. Sia $A \subseteq X$ aperto.
Dato $a \in A$
scegliamo $n(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $B_{\frac{2}{n(a)}}(a) \subseteq A$
Consideriamo $B_{\frac{1}{n(a)}}(a)$ e un punto $e \in E$ tale che

$$e \in B\frac{1}{n(a)}(a) \ .$$

ricordiamo: $B_{\frac{2}{n(a)}}(a) \subseteq A$. Allora
$B_{\frac{1}{n(a)}}(e) \ni a$
Segue $a \in B_{\frac{1}{n(a)}}(e) \subseteq B_{\frac{2}{n(a)}}(a) \subseteq A$ per la disuguaglianza triangolare.
Chiamiamo $e = e(a)$ Abbiamo

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{1}{n(a)}}(e(a)).$$

Segue B è base.

□

Lemma 2
Ogni spazio topologico 2^o-numerabile è separabile.

Dimostrazione
Sia B base numerabile, $B = \{A_1, A_2, \ldots\}$
basta scegliere $e_i \in A_i \quad \forall i$ e porre $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ □

Esempio:
Non è vero che ogni spazio topologico 1^o-numerabile è separabile e 2^o-numerabile.
Ad esempio con topologia di Sorgenfey
Una base è $B = \{[a, b[\mid a < b\}$
Quindi $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ anche con questa topologia, quindi $\mathbb{R}$ è separabile.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la famiglia $\{[a, a + \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$
è un sistema di intorni di a. Ma $\mathbb{R}$ con questa topologia non è 2^o-numerabile.
Veridica per esercizio (suggerimento, considero $[x, x+1[\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ e usare il fatto che x è il minimo di qualsiasi sottoinsieme A tale che $x \in A \subseteq [x, x+1[$)
Segue anche che questo spazio topologico non è metrizzabile (ma è T2)

0.4 Successioni

Definizione 3
Sia X spazio topologico.
Una successione in X è un'applicazionea

$$\begin{aligned} a :& \mathbb{Z}_{\geq 1} \to X \\ & n \to a_n \end{aligned}$$

Si dice che a converge a $p \in X$ se $\forall U$ intorno di p $\exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid a(n) \in U \quad n \geq N$

Osservazione:
Se X ha topologia banale ogni successione converge a ogni $p \in X$
Se X è $T2$ allora i limiti delle successioni sono unici se a (succ.) converge a p e q allora $p = q$

Proposizione 2
Sia X spazio topologico 1^o-numerabile, Siano $A \subseteq X, p \in X$ sono equivalenti:

1. *esiste una successione in A che converge a p*
2. *$p \in \overline{A}$*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
Se vale 1) ogni intorno di p interseca A quindi $p \in \overline{A}$
2) $\Rightarrow$ 1)
Supponiamo $p \in \overline{A}$.
Sia $\{U_n\}$ sistema fondamentale di intorni numerabile.
Considero $\forall n \geq 1$ $U_1 \cap \ldots \cap U_n$
è intorno di p, scelgo $a(n) \in A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$
Allora la successione

$$\begin{aligned} a :& \mathbb{Z}_{\geq 1} A \to A \\ & n \to a(n) \end{aligned}.$$

converge a p. Verifica sia U intorno di p sia N tale che $U_n \subseteq U$
per ogni $n \geq N$ abbiamo

$$a(n) \in U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap \ldots \cap U_n.$$

quindi $a(n) \in U$ e la successione converge a p. $\square$

Definizione 4 (Sottosuccessioni)

1. *Una sottosucceisone di una successione* $a : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to X$ *è una successione del tipo*

$$b(n) = a(f(n)).$$

dove $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *è strettamente crescente.*

2. *Uno spazio topologico è compatto per successioni se ogni successione ha sottosuccessioni convergenti.*

Osservazioni
La compattezza e la compattezza per successioni non sono equivalenti.
Esistono compatti per successioni ma non compatti. (esempio della linea lunga, long line)
Esistono spazi topologici compatti ma non compatti per successioni (prodotti di infiniti spazi topologici).