Lezione 21 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-14

0.1 boh

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$g \in L^{p'}(X)$ questa induce un funzionale lineare continuo $L_g : L^p(X) \to \mathbb{R}$
$f \in L^p(X) \to L_f(g) = \int_X fg \; d\mu$
$|L_g(f)| = |\int_X f \cdot g d\mu| \le \int_X |f||g| d\mu \le \|g\|_{p'} \|f\|_p$ Per Holder
$\Rightarrow L_g$ è limitato, quindi continuo.

$$\|L_g\| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p = 1}} |L_f(g)| = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ f \neq 0}} \frac{|L_g(f)|}{\|f\|_p} \le \|g\|_{p'}.$$

$f = |g|^{\frac{p'}{p}-1} g$
$|f| = |g|^{\frac{p'}{p}}$
$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |g|^{p'} d\mu < +\infty$
$\Rightarrow d \in L^p$

$$\|f\|_p = (\int_X |g|^{p'} d\mu)^{1/p} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}} = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}}.$$

$$L_g(f) = \int_X fg d\mu = \int_X |g|^{\frac{p'}{p}}.$$

$$\int_X |g|^{\frac{p'}{p}+1} d\mu = \int_X |g|^{\frac{1}{p'}+1} d\mu = \int_X |g|^{p'} d\mu$$
$$= \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_p \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{p'-1}$$
$$= \|g\|_{p'} \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{p'} \|f\|_p$$
$$\Rightarrow \frac{|L_{g(}f)|}{\|f\|_{p'}} = \|g\|_{p'} \Rightarrow \|L_g\| = \|g\|_{p'}$$

i : $\mathrm{L}^{p'}(X) \to (L^p(X))'$ $\quad \|i(g)\| = \|L_g\| = \|g\|_{p'}$ (isometria)
$\quad g \to L_g$

Il teorema di rappresentazione di Resz dice che i è suriettiva ($\forall p \in [1, +\infty)$), ovvero

$$(L^p(X))' = i(L^{p'}(X)).$$

con isomorfismo isometrico
$\Rightarrow (L^p(X))' \equiv L^{p'}(X)$
per $p = 2$ $\quad g \in L^2(X) \Rightarrow g$ induce un funzionale su $L^2(X)$

$$f \in L^2(X) \to \int_X gf \; d\mu.$$

Per $p = 2$ abbiamo in realtà una funzione

$$L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{R}$$
$$(f, g) \to \int_X fg \; d\mu^{\cdot}$$

che è bilineare, simmetrica e definita positiva. $((f,f) \to \int_X f^2 d\mu \geq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow f = 0 \;\; q.o.$
$\Rightarrow$ la forma bilineare

$$(f,g) \to \int_X fg \; d\mu.$$

è un prodotto scalare che indicheremo come (f,g)
Ricordo:
V spazio vettoriale con prodotto scalare $(\cdot,\cdot) \Rightarrow V$ si dice spazio euclideo e $\sqrt{(f,f)} = \|f\|$ è una norma
Se V è completo rispetto alla norma indotta da $(\cdot,\cdot) \Rightarrow V$ si dice spazio di Hilbert.
Osservazione
$\sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_X f d\mu} = (\int_X f^2 d\mu)^{1/2} = \|f\|_2$
$\Rightarrow L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert (già dimostrato che con questa norma è completo)

Teorema 1 (Identità del parallelogramma)
Sia $(V, \| \;\|)$ uno spazio normato, Allora V è uno spazio euclideo $\Leftrightarrow f, g \in V$

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Dimostrazione
Idea: $(f,g) := \frac{1}{2}(\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2)$
è un prodotto scalare. $\square$
Osservazione
Per gli spazi $L^p(X)$ L^2 è l'unico spazio di Hilbert perché $\| \;\|_p$ non verifica l'identità del parallelogramma per $p \neq 2$

Teorema 2 (della proiezione)
Sia H uno spazio di Hilbert e sia $C \subseteq H$ un convesso, chiuso, non vuoto.
$\Rightarrow \forall f \in H \quad \exists! u \in C$ *tale che* $\|u - f\| = \min\limits_{v \in C} \|f - v\|$ $(u := p_C(f))$ *Inoltre*

$$u = p_C(f) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in C \\ \text{(f-u,v-u)} \leq 0 \quad \forall v \in C \end{cases}$$

Dimostrazione
esistenza:
se $f \in C \quad \Rightarrow u = f$
se $f \notin C$ *Th:* $\inf_{v \in C} \|f - v\| = \min_{v \in C} \|f - v\|$
$d = \inf_{v \in C} \|f - c\|$
Esiste una successione minimizzante $\{v_n\} \subset C$ *tale che* $\|f - v_n\| \to d$
Dimostriamo che $\{v_n\}$ *è di Cauchy.*
$v_n, v_m \in C$ *convesso*
$\Rightarrow \dfrac{v_n + v_m}{2} \in C \Rightarrow d^2 \leq \|f - \dfrac{v_m + v_n}{2}\|^2 = \|\dfrac{f - v_n}{2} + \dfrac{f - v_m}{2}\|^2$

$$= \frac{1}{2}(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2) - \|\frac{f-v_n}{2} - \frac{f-v_m}{2}\|^2.$$

$$= \frac{1}{2}(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2.$$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2) - d^2 \xrightarrow{n,m\to+\infty} 0$
dato che $\|f-v_n\| \to d^2$ *e* $\|f-v_m\| \to d^2$
$\Rightarrow \{v_n\}$ *di Cauchy*
H *Hilbert* $\Rightarrow \exists u = \lim_{n\to+\infty} v_n, \qquad \{v_n\} \subset C, C$ *chiuso* $\Rightarrow u \in C$
$\|u-f\| = \lim_{n\to+\infty} \|v_n - f\| = d$

Unicità:

Siano $u_1, u_2 \in C$ *tale che* $\|u_1 - f\| = \|u_2 - f\| = d = \min_{v\in C}\|f-v\|$
$\Rightarrow \frac{u_1+u_2}{2} \in C$ *e* $d^2 \leq \|f - \frac{u_1+u_2}{2}\|^2 = \|\frac{f-u_1}{2} + \frac{f-u_2}{2}\|^2$
$= \frac{1}{2}(\|f-u_1\|^2 + \|f-u_2\|^2) = \|\frac{f-u_1}{2} - \frac{f-u_2}{2}\|^2$
$d^2 - \frac{\|u_2-u_1\|^2}{4} \Rightarrow \frac{\|u_1-u_2\|^2}{4} \leq 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

Caratterizzazione:

Sia $u = p_C(f) \Leftrightarrow \|u-f\| = \min_{v\in C}\|f-v\|$ *con* $u \in C$
$\Rightarrow \forall v \in C\ \|u-f\|^2 \leq \|f - ((1-\lambda)u + \lambda v)\|^2\ \forall \lambda \in [0,1]$
$\|f-u+\lambda(u-v)\|^2 = \|f-u\|^2 + \lambda^2\|u-v\|^2 + 2\lambda(f-u, u-v)$
Quindi

$$\cancel{\|u-f\|^2} \leq \cancel{\|f-u\|^2} + \lambda^2\|u-v\|^2 + 2\lambda(f-u,u-v).$$

$\Rightarrow \cancel{\lambda}(f-u,u-v) \leq \lambda^{\cancel{2}}\|u-v\|^2 \quad \forall \in (0,1]$
per $\lambda \to 0^+$
$\Rightarrow (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C$
Viceversa, sia $u \in C$ *tale che* $(f-u, u-v) \leq 0 \quad \forall v \in C$
$\Rightarrow \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2$ *con* $v \in C$

$$\|f-u\|^2 - \|f-v\|^2 = \|u^2\| - 2(f,u) - \|v\|^2 + 2(f,v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(f, v-u)$$

$$\|u\|^2 - \|v\|^2(f-u, v-u) + 2(u, v+u) \leq -\|u\|^2 - \|v\|^2 + 2(u,v) = -\|u-v\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \|f-u\|^{\cancel{2}} \leq \|f-v\|^{\cancel{2}} \quad \forall v \in C \qquad \square$$

Corollario 1
Sia H *uno spazio di Hilbert e sia* $M \subset H$ *un sottospazio vettoriale chiuso.*
$\Rightarrow \forall f \in H \quad \exists! u \in M$ *tale che* $\|u-f\| = \min_{v\in M}\|f-v\|$
e $u = p_M(f) \Leftrightarrow u \in M, (f-u, v) = 0 \quad \forall v \in M (f-u \in M^\perp)$

Dimostrazione

Dal teorema della proiezione $\exists u \in M \quad u = p_M(f)$ *e* $u = p_M(f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ (f-u, v-m) \leq 0 \quad \forall v \in M \end{cases}$$

$\forall v \in M$

$\Rightarrow u + v \in M$ *perché* M *sottospazio*
$\Rightarrow (f - u, v) \leq 0 \ \ \forall v \in M$ *ma anche* $-v \in M$
$-(f - u, v) \geq 0 \ \forall v \in M$
$\Rightarrow (f - u, v) = 0 \ \ \forall v \in M$
Viceversa
se $u \in M$ *tale che* $(f - u, v) = 0 \ \ \forall v \in M \Rightarrow v - u \in M \ \ \forall v \in M$
$(f - u, v - u) = 0 \ \ \forall v \in M \Rightarrow u = p_M(f)$ □

Osservazione

Se ci chiede la proiezione e non riusciamo bene a trovare la proiezione, ci si fa un idea e si verifica se soddisfa la caratterizzazione