1 Moto Circolare uniforme

1.1 Velocità

Da semplici considerazioni geometriche si ricava la formula

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = R\cos\omega t \\ v_y = R\sin\omega t \end{cases} .$$

1.2 Accelerazione

Iniziamo prima con il calcolo del modulo

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v2\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} = v \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v \cdot \omega.$$

Il modulo del vettore delta della velocità è stato ricavato dalla considerazione geometrica mostrata in figura

modulo_velocita.jpeg

Per quanto riguarda la direzione del vettore invece, notiamo che il triangolo in figura è isoscele, per tanto gli angoli alla base (che chiameremo per comodità α e β) sono congruenti, dunque:

$$\alpha \cong \beta \quad \alpha + \beta + \Delta\theta = 180 \quad \text{se } \Delta\theta \to 0 \Rightarrow \alpha \cong \beta \cong 90.$$

Dunque la differenza tra le velocità ha direzione ortogonale a quella del vettore delle velocità, in un moto circolare uniforme questo corrisponde ad un vettore che punta verso il centro. Indicheremo questo versore con $\hat{n}$
Infine per il calcolo finale del vettore possiamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\omega\hat{n}.$$

Un modo alternativo per scriverlo è:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Dove il versore $\hat{\omega}$, è direzionato in modo tale da poter vedere la rotazione in senso antiorario, (uscente se antiorario, entrante se orario) Se $|v|$ è è costante allora

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

è la formula di Poisson
Altrimenti possiamo generalmente scrivere

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}.$$

Per indicare la componente tangenziale (a_t) e normale (a_n) del moto.
Troveremo queste due componenti in moti di piani di traiettoria qualsiasi, difatti definiamo:

Definizione 1 (Cerchio osculatore)
Il cerchio osculatore è il cerchio che meglio approssima la traiettoria in un determinato punto P.

Grazie a questo cerchio osculatore possiamo trattare ogni istante di una traiettoria qualsiasi come se si muovesse su un pezzo di questo cerchio con velocità tangenziale $\overrightarrow{v}$ in P. In questo senso il moto coincide con un moto circolare su un cerchio di raggio R pari al raggio del cerchio osculatore, con velocità angolare istantanea $\omega = \frac{v}{R}$, il vettore dell'accelerazione normale invece:

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\hat{n} = v\omega\hat{n}.$$

Ovviamente avendo l'accelerazione e la velocità in un istante di tempo specificato possiamo ricavare la legge oraria