Lezione Boh Analisi Numerica

Federico De Sisti

2025-10-16

0.1 Algoritmo di Thomas

Se esiste la fattorizzazione LU c'è un algoritmo per non fare il pivoting.
Se A è tridiagonale (e $!\exists$ fattorizzazione LU)
allora L è bidiagonale inferiore con 1 sulla diagonale
e U è bidiagonale superiore

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Notiamo che
$\alpha_1 = a_1$
$\gamma_1 = c_1$
$\alpha_1 \beta_1 = b_2$
$\beta_2 \gamma_1 + \alpha_2 = a_2$
$\gamma_2 = c_2$
Più in generale possiamo dire

$$\alpha_{i-1}\beta_i = b_i$$
$$\beta_i \gamma_{i-1} + \alpha_i = a_i$$
$$\gamma_i = c_i$$
$$2 \leq i \leq n-1$$

e per n

$$\alpha_{n-1}\beta_n = b_n$$
$$\beta_n \gamma_{n-1} + \alpha_n = a_n$$

$\alpha_1 = a_1$ e $\gamma_i = c_i \quad 1 \leq i \leq n-1$
$\beta_i = \dfrac{b_i}{\alpha_{i-1}}; \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \qquad 2 \leq i \leq n$
Costo computazionale
$3(n-1) \quad O(n)$
Proprietà:
Se A è tridiagonale e hermitiana definita positiva oppure a dominanza diagonale.
si ha stabilità in senso forte dell'algoritmo LU.
$\tilde{L}\tilde{U} = A + \delta\tilde{A}$
$\|\tilde{L}\|_\Delta \|\tilde{U}\|_\Delta \leq \rho \|A\|$
$\dfrac{\|\delta\tilde{A}\|_\Delta}{\|A\|_\Delta} = O(\rho\ eps)$

In generale $Ly = f$ con L bidiagonale inferiore (Considero L con (α_i) sulla diagonale superiore e (β_i) su quella inferiore
$y_1 = \frac{f_1}{\alpha_{11}}$
$y_i = \dfrac{f_i - \beta_i y_{i-1}}{\alpha_i} \quad i = 2 : n$
abbiamo quindi una complessità di $2(n-1)$
$Ux = y$ con U che ha α_i sulla diagonale centrale e c_i su quella superiore
$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}$
$x_i = \dfrac{y_i - c_u x_{i+1}}{\alpha_i} \quad u = n-1 : -1 : 1 \qquad n + 2(n-1)$
Costo complessivo per risolvere il sistema $Tx = f$
$3n - 3 + 2n - 2 + n + 2n - 2 = 8n - 7$
guarda codice *thomas.m*

0.2 Metodi iterativi per sistemi lineari

matrice dei coefficienti "sparsa" (con numero di elementi diversi da zero (n)) e di grandi dimensioni.

0.2.1 Tecnica dello splitting additivo

Consideriamo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare, $A = P - N$ con P non singolare (!)
Allora i l sistema

$$\begin{gathered} Ax = b \\ (P - N)x = b \\ Px = Nx + b \\ P^{-1}(Px) = P^{-1}(Nx + b) \\ x = P^{-1}Nx + P^{-1}b \end{gathered}$$

quindi sappiamo che $x^* : Ax^* = b$ è anche tale che $x^* = P^{-1}Nx^* + P^{-1}b$
Costruisco la relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{dato} \\ x^{(k+1)} = P^{-1}Nx^{(k)} + P^{-1}b & k \geq 0 \end{cases}.$$

$B := P^{-1}N$ è la matrice di iterazioni
$f := P^{-1}b$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f.$$

questo dà una classe di metodi iterativi "lineari" ($x^{(k+1}$ dipende linearmente da $x^{(k)}$)
1) La successione generata dalla relazione di ricorrenza converge a x^*?
2) se sì, dipende da $x^{(0)}$?
B, matrice di iterazione, non costruita con la tecnica dello splitting additivo:

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{dato} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f & k \geq 0 \end{cases}.$$

B deve essere consistente, ovvero deve valere $x^* = Bx^* + f$
Ovvero il metodo è consistente.
Un metodo consistente è convergente se $\{x^{(k)}\}$ è tale che $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$
ovvero esiste una norma vettoriale $\|\cdot\|$ tale che $\lim_{k\to+\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$
$e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$ errore al passo k
ovvero $\lim_{k\to+\infty} \|e^{(k)}\| = 0$

Teorema 1
Un metodo consistente è convergente per ogni $x^{(0)}$ se e solo se $\rho(B) < 1$ (raggio spettrale della matrice d'iterazione)

Dimostrazione
il metodo è consistente.
Quindi $e^{(k)} = x^* - x^{(k)} = (Bx^* + f) - (Bx^{(k-1)} + f) = B(x^* - x^{(k-1)}) = Be^{(k-1)} = B^2 e^{(k-2)} = \ldots = B^k e^{(0)} \quad \forall k \geq 0$

1. *Sia $\rho(B) < 1$. Scelgo $\|\cdot\|$ naturale tale che*
   $\|B\| < 1 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \|B^k\| \leq \lim_{k\to+\infty} \|B\|^k = 0$
   Considero la norma vettoriale che induce la norma naturale che ho scelto.
   $$\lim_{k\to+\infty} \|e^{(k)}\| = \lim_{k\to+\infty} \|B^k e^{(0)}\| \leq \lim_{k\to\infty} \|B^k\| \|e^{(0)}\| = 0 \quad \forall e^{(0)}.$$
   ovvero $\forall x^{(0)}$
2. *Esiste una norma vettoriale tale che*
   $$\lim_{k\to+\infty} \|e^{(k)}\| = 0 \quad \forall x^{(0)} \quad (\text{ ovvero } \forall e^{(0)}.$$
   Supponiamo p.a. che $\rho(B) \geq 1$. Quindi $\exists \lambda : |\lambda| \geq 1$. Sia $e^{(0)}$ un autovettore corrispondente a λ $Be^{(e_0)} = \lambda e^{(0)} \Rightarrow B^k e^{(0)} = \lambda^k e^{(0)}$
   $\Rightarrow e^{(k)} = \lambda^k e^{(0)} \Rightarrow \|e^{(k)}\| = |\lambda|^k \|e^{(k)}\|$
   Allora però $\lim_{k\to+\infty} \|e^{(k)}$ non può tendere a 0.
   1) Se $|\lambda| = 1$ allora $\|e^{(k)}\| = \|e^{(0)}\| \; \forall k$
   2) Se $|\lambda| > 1$ allora $\lim_{k\to+\infty} \|e^{(k)}\| = +\infty$.

$\square$