Lezione 3 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Nella lezione precedente...

Abbiamo introdotto i sottospazi affini di (A, V) come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

2 Nuova lezione

Osservazione
Se $\Sigma_1 = p_1 + W_1$, $\quad_2 = p_2 + W_2$ sono sottospazi affini , la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_{12}.$$

Lemma 1
$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$
$H_p = \{\overrightarrow{px} \mid x \in S\}$ $H_q = \{\overrightarrow{qy} \mid y \in S\}$
Allora $< H_p >=< H_q >$ e $p+ < H_p >= q+ < H_q >$
(sottospazio generato da S)

Dimostrazione
$v_0 = \overrightarrow{pq} \quad v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$
$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in < H_q >$
$H_p \subseteq < H_q > \Rightarrow < H_p > \subseteq < H_q >$
$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in < H_q > \Rightarrow < H_q > \subseteq < H_p >$
Quindi ¡$H_p >=< H_q >$
$\overrightarrow{pq} \in < H_p >=< H_q >$
$p+ < H_p >= q+ < H_q >$ □

Nomenclatura 1
Σ_1, Σ_2 sottospazi affini

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \textit{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Lemma 2
Siano $\Sigma_i = p_i + W_i, \quad i = 1, 2$ *sottospazi affini. Allora*
(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in W_1 + W_2$
(b) $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} >)$

Dimostrazione
(a) $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ *allora* $\Sigma_1 = p_0 + W_1 \quad _2 = p_0 + W_2$
$\exists w_i \in W_i, \quad i = 1, 2 \quad t.c$
$p_1 = p_0 + W_1, p_2 = p_0 + W_2$
$\overrightarrow{p_1p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$
Viceversa, se $\overrightarrow{p_1p_2} = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$
$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} = p_1 + w_1 + w_2$
$p_2 - w_2 = p_1 + w_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
(2) Dato $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, *risulta*
$\overrightarrow{p_1x} \in W_1$ *se* $x \in \Sigma_1$
oppure

$$\overrightarrow{p_1x} \in \overrightarrow{p_1p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1x} = \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2x}).$$

Dunque la giacitura di $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ *è*

$$W_1 + W_2 + < \overrightarrow{p_1p_2} > .$$

□

3 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

Definizione 1
Siano Σ_1, Σ_2 *sottospazi affini di* (A, V) *di giacitura rispettivamente* W_1, W_2
Diciamo che
1) Σ_1, Σ_2 *sono* ***incidenti****, se* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
2)Σ_1, Σ_2 *sono* ***paralleli*** *se* $W_1 \subseteq W_2$ *p* $W_2 \subseteq W_1$
3) Σ_1, Σ_2 *sono* ***sghembi*** *se* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ *e* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Osservazione
Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

4 Esercizi Elementari

Esercizio 1
Dire se $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Svolgimento**
Scriviamo l'equazione parametrica della retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \end{cases} .$$

alternativamente avrei potuto cercare le coordinate cartesiane

---

Esercizio 2
Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$
$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

Esercizio 3
Scrivere equazioni per il piano identificato dalla retta
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Svolgimento
modo 1, scelgo due punti distinti sulla retta e riduco al punto precedente
modo 2, sia $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
considero il piano $P = q + tv + s\overrightarrow{Oq}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$
$3(x_1 - 1) - (x_3 - 3) = 0$
$3x_1 - x_3 = 0$
Fascio di piani di asse una retta r è l'insieme dei piani che contengono r

$$r = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \end{cases} .$$

Equazione del fascio

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ogni piano del fascio si ottiene con una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Coppie proporzioneali per un fattore non nulla invidiano lo stesso piano