

Lezione 24 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-06

1 Spazi proiettivi e Antani

Servirebbe un'introduzione per tutto ciò, ma non sarà il Posta a darcela, la motivazione matematica è che la formula di Grassmann vale sempre (antani)

Definizione 1 (Spazio Proiettivo)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Lo **spazio proiettivo** associato a V denominato con $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V

$$\mathbb{K}v \leftrightarrow [v] \leftarrow \text{punto di } \mathbb{P}(v).$$

$$\dim V = 0 \quad \mathbb{P}(V) = \emptyset$$

$$\dim V = 1 \quad \mathbb{P}(V) = \{pt\}$$

$$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V) \text{ retta proiettiva}$$

$$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V) \text{ piano proiettivo}$$

$$\text{Quindi } \dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$$

$$\text{Caso importante } V = \mathbb{K}^{n+1}$$

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n (= \mathbb{P}^n(K)).$$

Osservazione

1. Dati $v \in V \setminus \{0\}$, $\mathbb{K}v$ è un sottospazio 1-dimensionale, quindi esso dà luogo a un punto nello spazio proiettivo che denotiamo $[v]$
2. La nozione di spazio proiettivo di V può introdursi in modo equivalente tramite la seguente relazione d'equivalenza su $V \setminus \{0\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ t.c. } v = \lambda w.$$

Allora

$$\mathbb{P}(v) = V \setminus \{0\} / \text{INSERISCIQUOTIENTSPACE}.$$

Riprendendo l'osservazione 1, nel caso $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightsquigarrow [x_0 \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n.$$

$$[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n].$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \quad y_i = \lambda x_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

Definizione 2

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V .

Diciamo che $\{e_1, \dots, e_n\}$ definisce un sistema di coordinate omogenee (o riferimento proiettivo) su V , denotato con $e_0 \dots e_n$

Dato $v \in V \setminus \{0\}$

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n.$$

$$\rightsquigarrow (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$P[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow P = [v].$$

x_0, \dots, x_n si dicono coordinate omogenee di v

Ad esempio, fissata la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ in \mathbb{P}^2 ,

$P[1, 2, 3]$ è il sottospazio 1-dim di V generato da $e_0 + 2e_1 + 3e_2$

Nomenclatura 1

Fissato $e_0 \dots e_n$, i punti

$$F_0[1, 0, \dots, 0] = [e_0], \dots, F_n[0, \dots, 1] = [e_n].$$

sono i punti fondamentali del riferimento

$U[1, \dots, 1]$ *punto unità del riferimento*

Nota Bene

Poichè $[v] = [\lambda v]$ risulta

$$\lambda v = \lambda x_0 e_0 + \dots + \lambda x_n e_n.$$

quindi le coordinate omogenee sono determinate solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

Osservazione

se $e_0 \dots e_n$ è un riferimento proiettivo, anche $(\mu e_0) \dots (\mu e_n)$, $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un riferimento proiettivo e i punti hanno le stesse coordinate omogenee rispetto ai due riferimenti.

Quindi

consideriamo identici due riferimenti se definiti da basi proporzionali

$$e_0, \dots, e_n = (\mu e_0), \dots, (\mu e_n).$$

Un riferimento in \mathbb{P}^n determinato dalla base canonica di \mathbb{K}^{n+1} si dice riferimento standard.

i punti fondamentali sono

$$[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1].$$

Dato $W \subset V$ sottospazio vettoriale possiamo considerare $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(V)$
 $\mathbb{P}(W)$ è detto sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = (\dim V - 1) - (\dim W - 1) = \dim V - \dim W.$$

Un iperpiano in \mathbb{P}^n è un sottospazio proiettivo di codimensione 1

$$(*) \quad a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se $[x_0, \dots, x_{n2}] = [y_0, \dots, y_n]$ e

allora anche $a_0y_0 + \dots + a_ny_n = 0$ perché $[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ significa $y_i = \mu x_i$ $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e

Iperpiano coordinati su \mathbb{P}^n (rispetto al riferimento standard)

Ad esmpio, in \mathbb{P}^2 , $H_0 = \{x_0 = 0\}$

$$H_1 = \{x_1 = 0\}$$

$H_2 = \{x_2 = 0\}$ Più in generale consideriamo un sistema di t equazioni omogenee

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10}x_0 + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t0}x_0 + \dots + a_{tn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Se $W \subset V$ è il sottospazio definito dal sistema precedente, l'insieme di punti $P \in \mathbb{P}$ le cui coordinate verificano il sistema è $\mathbb{P}(W)$

Sia $A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq n$ e sia $r = rk(A)$ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim W - 1 = \dim V - r - 1 = \dim \mathbb{P}(V) - r$ Quindi $\mathbb{P}(W)$ ha codimensione r su \mathbb{P}

$$A_1 x = 0 \quad \mathbb{P}(W_1)$$

$$A_2 x = 0 \quad \mathbb{P}(W_2)$$

$$\int A_1 x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 x = 0 \\ A_2 x = 0 \end{array} \right. \quad \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

In particolare $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq 0 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Definizione 4

$\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)$ si dicono

Incidenti se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ *Sghembi* se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) =$

Osservazion

La formula si generalizza in

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} W_i \right).$$

Definizione 5

Se $\emptyset \neq J \subset \mathbb{P}$, il sottospazio proiettivo generato da J è

$$L(J) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq J} \mathbb{P}(W).$$

con W sottospazio di V

Caso speciale

$J = \{p_1, \dots, p_t\}$. Scriveremo in tal caso $L(p_1, \dots, p_t)$. Notiamo che se

$$p_1 = [v_1], \dots, p_t = [v_t].$$

$$L(p_1, \dots, p_t) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_t \rangle).$$

In particolare

$$\dim(L(p_1, \dots, p_t)) \leq t - 1$$

Definizione 6

p_1, \dots, p_t si dicono *linearmente indipendenti* se

$$\dim(L(p_1, \dots, p_t)) = t - 1.$$

Esempio

p_1, p_2 sono indipendenti \Leftrightarrow sono distinti

p_1, p_2, p_3 sono indipendenti \Leftrightarrow non sono allineati

Definizione 7

p_1, \dots, p_t in $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\dim(V) = n + 1$ si dicono *in posizione generale* se

◦ sono *linearmente indipendenti* ($t \leq n + 1$)

◦ se $t > n + 1$ e $n + 1$ tra essi, comunque scelti, sono *linearmente indipendenti*

AGGIUGNI ESMEPIO SU POSIZIONE GENERALE

2 Equazioni parametriche di un sottospazio

$k + 1$ punti linearmente indipendenti $[v_0], \dots, [v_n]$ in un sottospazio proiettivo S di dimensione k .

Per ogni $P \in S$,

$$P = [\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k].$$

Fissiamo ora un riferimento e_0, \dots, e_n di \mathbb{P}

Allora se v_i ha coordinate $(p_{i0}, \dots, p_{in})^t$ rispetto a e_0, \dots, e_n e $P = P[x_0, \dots, x_n]$ si ha

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \dots + \lambda_k p_{k0} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \dots + \lambda_k p_{k1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \dots + \lambda_k p_{kn} \end{cases}$$

Caso importante: rette $[v_0], [v_1]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} \end{cases}$$

\mathbb{P} piano proiettivo, r retta per $P[p_0, p_1, 2], Q[q_0, q_1, q_2]$ r è un iperpiano in \mathbb{P}

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esercizio Se in \mathbb{P}^3 sono dati punti non allineati

$$P[p_0, p_1, p_2, p_3], Q[q_0, q_1, q_2, q_3], R[r_0, r_1, r_2, r_3].$$

l'equazione del piano per P, Q, R è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempio Retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per $[-1, 1, 1], [1, 3, 2i]$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2i \end{pmatrix} = 0.$$

◦ C'è da notare che i punti $A = [1, 2, 2], B = [3, 1, 4], C = [\dots]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e scrivere un'equazione della retta che li contiene

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

◦ Verificare che le rette per $\mathbb{P}(\mathbb{C})$

$$ix_1 - x_2 + 3ix_0 = 0$$

$$x_0 + x_1 - ix_2 = 0$$

5...

hanno intersezione non vuota (basta verificare che il determinante sia non nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & -1 \\ 1 & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0$$

Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ due sottospazi proiettivi

$L(S_1 \cup S_2)$ è detto sottospazio somma.

$$L(S_1, S_2) = P(W_1 + W_2).$$

Infatti, se $\mathbb{P}(W) \supset S_1 \cup S_2$, allora contiene $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ perché W deve contenere sia W_1 che W_2

D'altra parte, $W_1 + W_2 \supseteq W_1, W_1 + W_2 \supseteq W_2$

quindi $\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_1) = S_1$

$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_2) = S_2 \Rightarrow \supseteq L(S_1, S_2)$

Teorema 1 (Formula di Grassmann proiettiva)

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

(S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$)

Dimostrazione

La dimostrazione segue subito dalla formula di Grassmann vettoriale

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

$$\dim L(S_1, S_2) - 1 = \dim S + 1 + \dim S_2 + 1 - (\dim S_1 \cap S_2 + 2)$$

□

Osservazione

Poiché $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$, risulta dalla formula di Grassmann

$$\dim S_1 \cap S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

In particolare

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P} \Rightarrow S_1, S_2 \text{ sono incidenti.}$$

(Infatti $\dim S_1 \cap S_2 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \geq S_2 \neq \emptyset$)

Corollario 1 (Antani²)

1. *In un piano proiettivo due rette si intersecano*
2. *In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano si intersecano e due piani distinti si intersecano in una retta*