Lezione 03 (La prima con la Leoni)

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Misura di Lebegque

1.1 Porprietà dellle afunzioen lunghezza di intervalli

I intervallo in $\mathbb{R}$

$$|I| = \begin{cases} +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato} \\ supI - infI \quad (b-a) & \text{Se } I \text{ è limitato di estremi } a < b \end{cases}$$

Esempi di intervallo

$\emptyset = (a, a)\ \forall a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$— $\{x\} = [x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà:

1. $|\emptyset| = 0$

2. monotonia

   $I \subseteq J \Rightarrow |I| \leq |J|$

3. finita additività

   $$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad I_i \text{ interevallo}$$

   $I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

   $$\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$$

Nota

se I illimitato

$\Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n$ tale che I_i illimitato

$\Rightarrow |I| = +\infty = |I_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_k|$

Se I limitato $\Rightarrow I_i$ limitato $\forall i = 1, \ldots, n$

$|I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$

4. I intervallo

   $$|I| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$$

   $$= |I| = \sum_{n=0}^{\infty} |I \cap [n, n+1)| + \sum_{n=0}^{-\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Nota

Se I illimitato

$\Rightarrow I \cap [n, n+1] = [n, n+1)$ per infiniti indici $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |I| = +\infty = \sum^{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)|$ per infiniti n

Se I limitato

$\Rightarrow I = \bigcup_{n=l}^{k} I \cap [n, n+1]$ per $l, k \in \mathbb{Z}$

5. Numerabile subadditività

   Se I intervallo, $\{I_i\}$ successione di intervalli tale che

$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$
$\Rightarrow |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione 5.
Si può assumere I_i limitato $\forall i$
1) caso, I compatto, I_i aperti $\forall i$
$I = [a, b], I_i = (a_i, b_i) \quad a_i < b_i$
I compatto, $\{I_i\}$ ricoprimento aperto
$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Dato che sono un numero finito di intervalli dico che I_1 è quello con l'estremo più a sinistra di tutti.
si può supporre che $a_1 < a < b_1$ se $b_1 > b \Rightarrow I \subseteq I_1 \Rightarrow |I| \leq |I_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Reiterando trovo l'aperto contenente a_1, se questo contiene anche b mi fermo sennò continuo.
abbiamo quindi rinumerato $I_1, \ldots, I_n$ in modo che $a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq n$
$\sum_{i=1}^{n} |I| = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i = b_1 - a_1 + \ldots + b_n - a_n$
notiamo che $b_1 > a_2$ quindi $b_1 - a_2 > 0$, procedendo così per ogni coppia otteniamo

$$\geq b_n - a_1 \geq b - a = |I|.$$

2) caso I limitato, I_i limitati
$\forall \varepsilon > 0 \exists I^{\varepsilon}$ chiuso, $I^{\varepsilon} \subset I$ tale che $|I^{\varepsilon}| = (1 - \varepsilon)|I|$
$\forall i \ \ \exists I_i^{\varepsilon}$ aperto tale che $I_i \subset I_i^{\varepsilon}$ e $|\sum_i^{\varepsilon}| = (1 - \varepsilon)|I_i|$
$I^{\varepsilon} \subset I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i^{\varepsilon}$
$I_i = \frac{1}{1-\varepsilon} |I^{\varepsilon}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I^{\varepsilon}| = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
Quindi $|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$
3) caso I illimitato, I_i limitati $n \in \mathbb{Z}$
$n \in \mathbb{Z} \quad I \cap [n, n+1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_i \cap [n, n+1))$
Quindi ho un intervallo limitato coperto da intervalli limitati
per il 2 caso

$$|I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I \cap [n, n+1)|$$

Per la 4)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_i \cap [n, n+1)|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

6. numerabile additività
   $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\Rightarrow |I| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

Dimostrazione
$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ vero per la 5)
Ci basta dimostrare l'altro verso della disuguaglianza
se I limitato, (con estremi $a < b$)
$\forall k \geq 1$ consideriamo $I_1, I_2, \ldots, I_k$ sono contenuti in I e disgiunti
questi possono essere rinumerati in modo che $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k$
$\sum_{i=1}^{k} \leq b - a$
$\sum_{i=1}^{k} |I_i| = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$
$= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_k - a_k \leq b_k - a_1 \leq b - a = |I|$
per lo stesso ragionamento di prima, possiamo formare coppie positive

$$|I| \geq \sum_{i=1}^{k} |I_i| \quad \forall k \geq 1.$$

$$\Rightarrow |I| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Se I illimitato
$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \cap I_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
$I \cap [n, n+1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap [n, n+1)$
$\Rightarrow |I \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)|$
$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |I \cap [n, n+1)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i \cap [n, n+1)| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$

$\square$

7. I intervallo, $x \in \mathbb{R}$
   $I + x$ traslato di I
   $|I + x| = |I|$
   (invarianza per traslazioni)

Definizione 1 (Misura esterna)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$
Si definisce misura (esterna) di Lebesgue di E

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \ : \ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \ \textit{intervalli}\}.$$

$M : P(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$

Osservazione
Se $D \subset$ è un insieme nullo:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \{I_i\} \text{ successione di intervalli tale che } D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Ricordiamo che tra gli insiemi di misura nulla, ci sono gli insiemi numerabili
2) Per definire m si usano ricoprimenti numerabili ma anche i ricoprimenti finiti sono ammessi,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset$$

C'è una differenza enorme tra considerare ricoprimenti finiti o ricoprimenti numerabili
$E \subseteq \mathbb{R}$
$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ intervallo}\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervalli}\}$
La disuguaglianza può essere stretta
Esempio
$E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$
è numerabile $\Rightarrow m(E) = 0$
Sia $\{I_1, \ldots, I_n\}$ ricoprimento finito di E con intervalli
$E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |I_i| \geq 1$
Infatti
$R = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow [0,1] \subseteq_{i=1}^{n} I_i$
$\Rightarrow [0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$
$\leq (\bigcup\limits_{i=1}^{n}) \leq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{I_i} \Rightarrow 1 = |[0,1]| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overline{I}_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
$\Rightarrow \inf\{\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i \text{ intervallo }\} \geq 1$ ma $E \subseteq [0,1]$
$\Rightarrow \inf\{\sum_{i=1}^{n} |I_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i\} \leq 1$
Se avessi ricoprimenti finiti $\mathbb{Q}$ avrebbe misura 1, e questo non ci piace perché è un insieme numerabile, questo è il motivo per cui ammetto ricoprimenti infiniti.