Lezione 3 Meccanica Razionale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Relatività e Determinismo $\Rightarrow$ Prima legge di Newton

Sia R un sistema di riferimento t.c. $R = \{0_V, e_1, e_2, e_3\}$
Un signore nell'origine misura le coordinate di un punto P nel tempo.
$R' = \{0'_V, e'_1, e'_2, e'_3\}$ è un secondo osservatore in un piano traslato ($N = 1$)
Il determinismo ci dice che sapendo la situazione iniziale del punto P posso ricavare il moto.
Vogliamo dimostrare la prima legge di newton, ovvero $\ddot{x} = 0$

Dimostrazione
In R $\quad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$
In R' $\quad \ddot{y} = f(y, \dot{y})$ *per la relatività.*
$\overline{OO'}$ *ha coordinate* $\overline{x} + \overline{v}t$ *al tempo* $t, \overline{x}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$
$\overline{O'P}$ *ha coordinate* $Ry \quad R \in SO(3)$

$$x = \overline{x} + \overline{v}t + Ry, \quad \dot{x} = \overline{v} + R\dot{y}, \quad \ddot{x} = R\ddot{y}.$$

$$\underline{Rf(y, \dot{y})} = R\ddot{y} = \ddot{x} = f(x, \dot{x}) = \underline{f(\overline{x} + \overline{v}t + Ry, \overline{v} + R\dot{y})}.$$

$\overline{v} = 0 \quad R = I_3$
$f(y, \dot{y}) = f(\bar{x} + y, \dot{y}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = \tilde{f}(v) \quad \tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\tilde{f}(v) = \tilde{f}(\bar{v} + Rv) \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall R \in SO(3).$$

$\tilde{f}$ *è costante ed è invariante per rotazioni* $\Rightarrow \tilde{f} = 0$ *(esercizio)* $\square$

Definizione 1 (Sistema meccanico conservativo)
Sistema meccanico per il quale $\exists U$

$$U : D \to \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^{3N} \quad \textit{aperto.}$$

(spazio delle configurazioni)
$U \in C^2(D)$ *tale che la legge di forza ha la forma gradiente.*

$$F^{(k)}(x) = -\nabla_{X^{(k)}} U(x) \quad k = 1, \ldots, N.$$

U *è detta energia potenziale*

$$(F_i^{(k)} = n_k \ddot{x}_i^{(k)} = -\frac{\partial U}{\partial x_i^{(k)}}(x) \quad k = 1, \ldots, N, \quad i = 1, 2, 3)$$

Esempi

$N = 1$ grave, molla ...

$N = 2 \quad D = \mathbb{R}^6 \setminus \{x^{(1)} = x^{(2)}\}$, $U(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{-m_1 m_2}{|x^{(2)} - x^{(1)}|}$

$$f^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = -_{x^{(1)}} U(x^{(1)}, x^{(2)}) = m_1 m_2 \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{|x^{(2)} - x^{(1)}|}.$$

$N = 3 \quad U(x) = -\frac{m_1 m_2}{|x^{(2)} - x^{(1)}|} - \frac{m_1 m_3}{|x^{(3)} - x^{(1)}|} - \frac{m_2 m_3}{|x^{(3)} - x^{(2)}|}$

$D = \mathbb{R}^9 \setminus$ diagonali

Definizione 2

In un sistema conservativo, l'energia totale $H = T + U$

$$T := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k |v^{(k)}|^2 \quad \textit{energia cinetica totale.}$$

$$T = \sum_{k=1}^{N} T^{(k)} \qquad \textit{energia cinetica di } P_k.$$

Teorema 1 (Conservazione dell'energia)

In un sistema conservativo, H è costante sulle traiettorie.

Dimostrazione

$$\frac{d}{dt} H(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} T(\dot{x}(t)) + \frac{d}{dt} U(x(t)) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \langle \dot{x}^{(k)}(t), \ddot{x}^{(k)} \rangle + \sum_{k=1}^{N} \langle \nabla_{x^{(k)}} U(x(t)), \dot{x}^{(k)}(t) \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \langle \dot{x}^{(k)}(t), m_k \ddot{x}^{(k)}(t) + \nabla_{x^{(k)}} U(x(t)) \rangle = 0$$

Dato che il secondo termine del prodotto scalare è nullo. □

Definizione 3 (Lavoro)

Il lavoro del sistema meccanico da t_1 a $t_2 > t_1$ è

$$L_{t_1 \to t_2} := \sum_{k=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \langle F^{(k)}, x^{(k)} \rangle.$$

Osservazione

Nel caso conservativo

$$L_{t_1 \to t_2} = U(x, t_1) - U(x, t_2).$$

Teorema 2 (Forze vive)

$$T(\dot{x}(t_2)) - T(\dot{x}(t_1)) = L_{t_1 \to t_2}.$$

La dimostrazione è simile al teorema di conservazione dell'energia
Esercizio(Oscillatore armonico)
$m\ddot{x} = -kx \quad k > 0 \quad x\mathbb{R}$
(i) si dimostri che il sistema è conservativo
(ii) si trovino le traiettorie nello spazio delle fasi ("curve di fase")
(iii) Dedurre dal teorema di conservazione dell'energia (senza usare l'(E_qN)) la legge del moto $t \to x(t)$
Svolgimento
$H(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\dot{x}(t)) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \ \ \forall t.$$

(ii) **Osservazione**
Gli insiemi di livello H sono invarianti per la dinamica

$$\Gamma_E = \{(x,v)|H(x,v) = E\}.$$

$E \in \mathbb{R}$ livello di energia,
se $E < 0 \ \ \Gamma_E = \emptyset$, non ci sono moti
se $E = 0 \quad \Gamma_E = \{((0,0)\}$ moto stazionario
se $E > 0 \quad \Gamma_E = \{(x,v)|\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E\}$
$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ moto periodico.
(iii) $E = 0 \ x(t) = 0 \ \ \forall t$
Sia $E > 0$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 \ \ \forall t.$$

$$\cdot x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}.$$

$$x_0, v_0 \quad x_0 \ni \left(-\sqrt{\frac{2E}{k}}, \sqrt{\frac{2E}{k}}\right) \quad v_0 > 0.$$

$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{E-\frac{k}{2}y^2}}}$
$x_0 \in \left(-\sqrt{\frac{2E}{k}}, \sqrt{\frac{2E}{k}}\right)$

$$t(x) = \frac{1}{b}\int_{x_0}^{x} dy \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}$$

$$\frac{a}{b}\int_{x_0/a}^{x/a} dy \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{a}{b}(cos^{-1}\frac{x_0}{a} - cos^{-1}\frac{x}{a}).$$

$cos^{-1}(\frac{x}{a}) = cos^{-1}(\frac{x_0}{a}) - \omega t$
$\omega = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \alpha_0 = cos^{-1}(\frac{x_0}{a})$
$x(t) = a\cos(\alpha_0 - \omega t)$
$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \quad t \in \mathbb{R}$ **Osservazione** [Isocromia delle oscillazioni]
il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ non dipende da E (specialità di U)
Esercizio
Si ripeta per $k < 0$

0.2 SDO1: Teoria Generale

Studiamo

$$\begin{cases} \dot{z} = g(t,z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}.$$

Pbm Cauchy per sistemi differenziali I ordine in forma normale
$t_0 \in \mathbb{R} \quad z_0 \in \Omega \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
Cerca $t \to z(t_0) \quad I \subseteq \mathbb{R}$ intorno t_0
campo $g : I \to \mathbb{R}^n$
Osservazione 1
è caso particolare $z = (x, v)$
$z = (z_1, z_2, \dots, z_{6N}) = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}, v_1, \dots, v_{3N})$
$z_0 = (x_0, v_0) \in \Omega$
Ω spazio delle fasi $\Omega = D \times \mathbb{R}^{3N}$
$g : I \times D \times \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{6N}$
$g(t, z,) = (v, f(t, x, v))$
Osservazione 2
(EqN) per sistema isolato (SDO1) è "autonomo"

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}.$$

dove ho scelto $t_0 = 0$ senza perdita di generalità
(se $t \to z(t)$ soluzione (SDO1)
$t- > z(t - t_0)$ soluzione di $\begin{cases} \dot{z} = g(z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$

Definizione 4 (SDO1)
ammette soluzione locale se $\exists I_0$ *intorno di* t_0, $\delta > 0$
e $\varphi : I_0 \to B_\delta(z_0)$ *t.c.*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = g(t, \varphi(t)) & \forall t \in I_0 \\ \varphi(t_0) = z_0 \end{cases}.$$

Globale se posso estendere a $I_0 = \mathbb{R}$

Teorema 3
$\exists!$ *soluzione locale/globale (SDO1)*

0.3 SDO1: Casi integrabili

Esempi
1)$g = 0 \;\; z(t) = z_0 \;\; \forall t$
2) $g = z$
$z(t) = z_0 e^t \quad \forall t$
per $z_0 = 0$ soluzione stazionaria $z(t) = 0$
$(z : g(z) = 0, \quad$ p.t: singolare del campo z_0 sing $\quad z(t) = z_0)$