Lezione 1 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-02-27

1 Informazioni pratiche

Giovedì esercitazioni
Ci sono gli esercizi settimanali! Alcuni di questi sono da sapere per l'orale
Se vogliamo essere avvertiti per urgenze possiamo mandare una mail
C'è il sito del corso
Per la maggior parte del corso di studia su Topologia di Marco Manetti
Esami:
Ci sono 2 esoneri
L'esame è scritto e orale
Prerequisiti
1) Familiarità con le funzioni continue
2) Un po' di teoria dei gruppi
3) Derivate di applicazioni in più variabili

Il corso è diviso in 3 parti:
1)Topologia generale
2) Topologia algebrica
3) Geometria differenziale

2 Topologia Generale

2.1 Introduzione

Nasce per studiare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, cosa posso fare con un sottoinsieme di R^n con un applicazione continua?
Studieremo:
1) Proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, come ad esempio la compattezza, da un punto di vista astratto.
2) Applicheremo le stesse proprietà ad insiemi dotati di "geometria" meno intuitiva
Ad esempio la topologia generale si applica in

- Analisi
- Algebra
- Logica

Esempio
In $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$$X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}.$$

Poniamo, in maniera informale, questa relazione d'equivalenza:

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il quoziente "assomiglia" ad una sola retta, gli elementi equivalenti vengono "appiccicati".
Seconda relazione d'equivalenza:

$$(x,0) \sim (x,1) \text{ solo per } x \leq 0.$$

$X/\sim$ in questo caso assomiglia a :
Terza relazione d'equivalenza:

$$(x,0) \sim (x,1) \text{ solo per } x < 0.$$

Una specie di analogo della figura precedente, ma il punto $[0,0]$ è raddoppiato

Definizione 1 (Funzioni continue)
Dati $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ insiemi qualsiasi, si definisce continua un'applicazione $f : X \to Y$ se

$$\forall p \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad se \quad x \in X \quad soddisfa.$$

$$||x - p|| < \delta \quad allora \quad ||f(x) - f(p)|| < \epsilon.$$

Definizione 2 (Omeomofrismo)
Data $f : X \to Y$ si dice omeomorfismo se è biettiva, continua, e $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Osservazione
In topologia generale gli omeomorfismo hanno un ruolo analogo agli isomorfismi in algebra e algebra lineare.
Esempio:
1) $[0,1]$ (in $\mathbb{R}$) è omeomorfo ad $[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$
ad esempio

$$f : [0,1] \to [a,b]$$
$$t \to (1-t)a + tb$$

è biettiva, continua e f^{-1} è continua.
2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ e $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | max\{|x|,|y|\} = 1\}$
Per esempio possiamo normalizzare i punti del quadrato

$$\text{Q} \to S^1$$
$$\text{p} \to \frac{p}{||p||}$$

che è continua, biettiva e ha inversa continua.
3)$[0,1] \cup]2,3]$ non è omeomorfo a $[0,2]$
ad esempio

$f : [0,1] \cup]2,3] \to [0,2]$

$$x \to \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Con l'analisi matematica si dimostra facilmente che non esiste alcuna biezione con inversa continua.

Osservazione

In algebra se f è un omomorfismo biettivo allora f^{-1} è un omomorfismo.
In topologia se f è continua e biettiva, f^{-1} non è sempre continua.
4) $]0,1[$ è omeomorfo a $]a,b[$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a < b$
Inoltre $]0,1[$ è omeomorfo a $]0,+\infty[$
ad esempio tramite
$]0,+\infty[\to]0,1[$

$x \to e^{-x}$

5)$]0,+\infty[$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$, ad esempio tramite $x \to log(x)$
6) $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1]$
7) $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | \ \ ||p|| = 1\}$
$S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ Ad esempio tramite la proiezione stereografica (esercizio: vedere la formula)
8) Ci sono molti esempi di figure omeomorfe fra loro, ma un omeomorfismo esplicito è difficile, ad esempio.
un l-agono regolare qualsiasi (in $\mathbb{R}^n$) e un r-agono qualsiasi sono omeomorfi ($\forall$ $l, r \geq 3$)
9) $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono omeomorfi se e solo se $n = m$ (è un teorema difficile, nel corso vedremo la dimostrazione per qualche esponente specifico, $n \leq 2$)
Vediamo due riformulazioni della continuità.

Definizione 3
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall p \in A \quad \varepsilon > 0 \quad | \quad se \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$soddisfa \quad ||x-p|| < \quad allora\ x \in A.$$

Notazione 1
$B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x-p|| < \epsilon\}$
è la palla aperta di centro p e raggio

Definizione 4
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ p si dice aderente a X se $\forall > 0$ $\exists x \in X$ $|$ $||x-p|| < \epsilon$ (chiaramente se pX allora è aderente a X, basta prendere $x = p$)

Esempio:
$1 \in \mathbb{R}$ è aderente a $X = [0,1[$

Proposizione 1
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Sono equivalenti:*

1. f *è continua*
2. $\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$ *se* p *è aderente a* Z *allora* $f(p)$ *è aderente a* $f(Z)$
3. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ *se* A *è aperto, allora* $f^{-1}(A)$ *è aperto.*

Dimostrazione
1) $\Rightarrow$ 2)
Siano $Z \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$ *suppongo* p *aderente a* Z*, dimostriamo che* $f(p)$ *è aderente a* $f(Z)$
Sia $\epsilon > 0$ *qualsiasi, sia* $\delta > 0$*, dalla continuità di* f *in* p*. Dato che* p *è aderente a* Z *esiste* $z \in Z$ *tale che* $||z - p|| < \delta$*.*
Allora $f(z)$ *è un punto di* $f(Z)$ *e* $||f(p) - f(z)|| < \varepsilon$*.*
2) $\Rightarrow$ 3)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *aperto, dimostriamo che* $f^{-1}(A)$ *è aperto, dimostriamo che* $f^{-1}(A)$ *è aperto in* $\mathbb{R}^m$
Sia $p \in f^{-1}(A)$ *sia* $f(p) \in A$
Per assurdo supponiamo.
$\forall > 0 \exists q \in \mathbb{R}^n$ *fuori da* $f^{-1}(A)$ *ma* $||p - q|| < \varepsilon$*.*
Allora p *è aderente a* $\mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(A)$*.*
Segue, per 2), $f(p)$ *è aderente a* $f(\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A))$
quindi per ogni $\eta > 0$ *esistono punti a distanza* $< \eta$ *non in* $f(\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A))$ *punti che non vanno in* A
allora $f(p)$ *è aderente a* $\mathbb{R}^m \setminus A$*. Questo è assurdo perché* A *è aperto* $\square$