Lezione 24 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-06

1 Spazi proiettivi e Antani

Servirebbe un'introduzione per tutto ciò, ma non sarà il Posta a darcela, la motivazione matematica è che la formula di Grassmann vale sempre (antani)

Definizione 1 (Spazio Proiettivo)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Lo ***spazio proiettivo*** *associato a V denominato con $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V*

$$\mathbb{K}v \leftrightarrow [v] \leftrightsquigarrow \textit{punto di } \mathbb{P}(v).$$

$\dim V = 0 \quad \mathbb{P}(V) = \emptyset$
$\dim V = 1 \quad \mathbb{P}(V) = \{pt\}$
$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ *retta proiettiva*
$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ *piano proiettivo*
Quindi $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$
Caso importante $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n (= \mathbb{P}^n(K)).$$

Osservazione
1. Dati $v \in V \setminus \{0\}$, $\mathbb{K}v$ è un sottospazio 1-dimensionale, quindi esso dà luogo a un punto nello spazio proiettivo che denotiamo $[v]$
2. La nozione di spazio proiettivo di V può introdursi in modo equivalente tramite la seguente relazione d'equivalenza su $V \setminus \{0\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ t.c. } v = \lambda w.$$

Allora

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$$

Riprendendo l'osservazione 1, nel caso $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightsquigarrow [x_0 \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n.$$

$$[x_0, \ldots, x_n] = [y_0, \ldots, y_n].$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \quad y_i = \lambda x_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

Definizione 2
Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *ed* $\{e_0, \dots, e_n\}$ *una base di* V.
Diciamo che $\{e_0, \dots, e_n\}$ *definisce un sistema di coordinate omogenee (o riferimento proiettivo) su* V, *denotato con* $e_0, \dots, e_n$

Dato $v \in V\{0\}$

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n.$$

$\rightsquigarrow (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$P[x_0, \dots, x_n] \leftrightarrow P = [v].$$

$x_0, \dots, x_n$ si dicono coordinate omogenee di v
Ad esempio, fissata la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ in $\mathbb{P}^2$,
$P[1, 2, 3]$ è il sottospazio 1-dim di V generato da $e_0 + 2e_1 + 3e_2$

Nomenclatura 1
Fissato $e_0 \dots e_n$, *i punti*

$$F_0[1, 0, \dots, 0] = [e_0], \dots, F_n[0, \dots, 1] = [e_n].$$

sono i punti fondamentali del riferimento
$U[1, \dots, 1]$ *punto unità del riferimento*
Nota Bene
Poichè $[v] = [\lambda v]$ *risulta*

$$\lambda v = \lambda x_0 e_0 + \dots + \lambda x_n e_n.$$

quindi le coordinate omogenee sono determinate solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

Osservazione
se $e_0, \dots, e_n$ è un riferimento proiettivo, anche $(\mu e_0), \dots, (\mu e_n), \quad \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un riferimento proiettivo e i punti hanno le stesse coordinate omogenee rispetto ai due riferimenti.
Quindi
consideriamo identici due riferimenti se definiti da basi proporzionali

$$e_0, \dots, e_n = (\mu e_0), \dots, (\mu e_n).$$

Un riferimento in $\mathbb{P}^n$ determinato dalla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$ si dice riferimento standard.
i punti fondamentali sono

$$[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1].$$

Dato $W \subset V$ sottospazio vettoriale possiamo considerare $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(V)$
$\mathbb{P}(W)$ è detto sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = (\dim V - 1) - (\dim W - 1) = \dim V - \dim W.$$

Definizione 3
Un iperpiano in $\mathbb{P}^n$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 1

Supponiamo che in $\mathbb{P}^n$ sia fissato un riferimento $e_0, \dots, e_n$ con coordinate omogenee $x_0, \dots, x_n$

$$\circledast \quad a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se leggiamo quest'equazione in V è l'equazione cartesiana di un iperpiano vettoriale $H \subset V$
I punti di $P = [v] \in \mathbb{P}$ le cui coordinate omogenee verificano $\circledast$ sono quelli tali che $v \in H, \quad v \neq 0$ quindi sono i punti di $\mathbb{P}(H)$
Nota bene
Se $[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ e

$$a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

allora anche $a_0y_0 + \ldots + a_ny_n = 0$ perché $[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ significa $y_i = \mu x_i \quad \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e

$$a_0y_0 + \ldots + a_ny_n = a_0\mu x_0 + \ldots + a_n\mu x_n = \mu(a_0x_0 + \ldots_{a\ n}x_n) = 0.$$

Iperpiani coordinati su $\mathbb{P}^n$ (rispetto al riferimento standard)

$$H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n | x_i = 0\} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Ad esempio, in $\mathbb{P}^2$,

$$\begin{gathered} \mathrm{H}_0 = \{x_0 = 0\} \\ \mathrm{H}_1 = \{x_1 = 0\} \\ \mathrm{H}_2 = \{x_2 = 0\} \end{gathered}$$

Più in generale consideriamo un sistema di t equazioni omogenee

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{t0}x_0 + \ldots + a_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

Se $W \subset V$ è il sottospazio definito dal sistema precedente, l'insieme di punti $P \in \mathbb{P}$ le cui coordinate verificano il sistema è $\mathbb{P}(W)$
Sia $A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq n$ e sia $r = rk(A)$ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim W - 1 = \dim V - r - 1 = \dim \mathbb{P}(V) - r$ Quindi $\mathbb{P}(W)$ ha codimensione r su $\mathbb{P}$

Intersezione
$A_1x = 0 \;\; \mathbb{P}(W_1)$
$A_2x = 0 \;\; \mathbb{P}(W_2)$
$\begin{cases} A_1x = 0 \\ A_2x = 0 \end{cases}$ In particolare $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Definizione 4
$\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)$ *si dicono*
Incidenti se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$
Sghembi se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

Osservazione
La formula si generalizza in

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

Definizione 5
Se $\emptyset \neq J \subset \mathbb{P}$*, il sottospazio proiettivo generato da* J *è*

$$L(J) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq J} \mathbb{P}(W).$$

con W *sottospazio di* V

Caso speciale
$J = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Scriveremo in tal caso $L(p_1, \ldots, p_y)$ Notiamo che se

$$p_1 = [v_1], \ldots, p_t = [v_t].$$

$$L(p_1, \ldots, p_t) = \mathbb{P}(< v_1, \ldots, v_t >).$$

In particolare
$\dim(L(p_1, \ldots, p_t)) \leq t - 1$

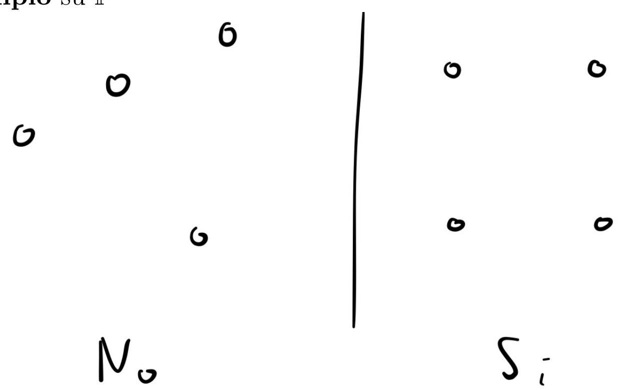
Definizione 6
$p_1, \ldots, p_t$ *si dicono linearmente indipendenti se*

$$\dim(L(p_1, \ldots, p_t)) = t - 1.$$

Esempio
p_1, p_2 sono indipendenti $\Leftrightarrow$ sono distinti
p_1, p_2, p_3 sono indipendenti $\Leftrightarrow$ non sono allineati

> **Definizione 7**
> $p_1, \ldots, p_t$ *in* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\dim(V) = n + 1$ *si dicono in posizione generale se*
> $\circ$ *sono linearmente indipendenti* ($t \leq n + 1$)
> $\circ$ *se* $t > n + 1$ *e* $n + 1$ *tra essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti*

Esempio su $\mathbb{P}^2$



1.1 Equazioni parametriche di un sottospazio

$k + 1$ punti linearmente indipendenti $[v_0], \ldots, [v_n]$ in un sottospazio proiettivo S di dimensione k.
Per ogni $P \in S$,

$$P = [\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k].$$

Fissiamo ora un riferimento $e_0, \ldots, e_n$ su $\mathbb{P}$
Allora se v_i ha coordinate $(p_{i0}, \ldots, p_{in})^t$ rispetto a $\{e_0, \ldots, e_n\}$ e $P = P[x_0, \ldots, x_n]$ si ha

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \ldots + \lambda_k p_{k0} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \ldots + \lambda_k p_{k1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \ldots + \lambda_k p_{kn} \end{cases}$$

Caso importante: rette $[v_0], [v_1]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} \\ x_0 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} \\ \vdots \\ x_0 = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} \end{cases}$$

$\mathbb{P}$ piano proiettivo, r retta per $P[p_0, p_1, 2], Q[q_0, q_1, q_2]$ r è un iperpiano in $\mathbb{P}$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esercizio Se in $\mathbb{P}^3$ sono dati punti non allineati

$$P[p_0, p_1, p_2, p_3], Q[q_0, q_1, q_2, q_3], R[r_0, r_1, r_2, r_3].$$

l'equazione del piano per P, Q, E è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempio Retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per $[-1, 1, 1], [1, 3, 2i]$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2i \end{pmatrix} = 0.$$

$\circ$ Verificare che i punti $A = [1, 2, 2], B = [3, 1, 4], C = [\dots]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e scrivere un'equazione ella retta che li contiene

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

$\circ$ Verificare che le rette per $\mathbb{P}(\mathbb{C})$
$ix_1 - x_2 + 3ix_0 = 0$

$x_0 + x_1 - ix_2 = 0$

$5x_0 + x_1 + 3ix_2$
hanno intersezione non vuota (basta verificare che il determinante sia nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & -1 \\ 1 & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$\det A = 0$

Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ due sottospazi proiettivi

$$L(S_1 \cup S_2) \text{ è detto sottospazio somma.}$$

$$L(S_1, S_2) = P(W_1 + W_2).$$

Infatti, se $\mathbb{P}(W) \supset S_1 \cup S_2$, allora contiene $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ perché W deve contenere sia W_1 che W_2
D'altra parte, $W_1 + W_2 \supseteq W_1, \quad W_1 + W_2 \supseteq W_2$
quindi $\quad \mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_1) = S_1$
$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_2) = S_2 \Rightarrow \supseteq L(S_1, S_2)$

Teorema 1 (Forumla di Grassmann proiettiva)

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

($S1, S_2$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

Dimostrazione
La dimostrazione segue subito dalla formula di Grassmann vettoriale

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

$\dim L(S_1, S_2) - 1 = \dim S + 1 + \dim S_2 + 1 - (\dim S1 \cap S_2 + 2)$ $\square$
Osservazione
Poiché $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$, risulta dalla formula di Grassmann

$$\dim S_1 \cap S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

In particolare

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P} \Rightarrow S_1, S_2 \text{ sono incidenti.}$$

(Infatti $\dim S_1 \cap S_2 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \geq S_2 \neq \emptyset$)

Corollario 1
1. In un piano proiettivo due rette si intersecano
2. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano si intersecano e due piani distinti si intersecano in una retta