Lezione N+5 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-05-27

0.1 Zenobobi

Definizione 1 (Parametrizzazione di Monge)

$f : V \to \mathbb{R}$ *differenziabile aperto di* $\mathbb{R}^{n-1} \Rightarrow \begin{array}{rl} \varphi : & V \to U = Im(\varphi) \\ & (a_1, \ldots, a_{n-1}) \to (a_1, \ldots, a_{n-1}, f) \end{array}$

èunaparametrizzazione.

Teorema 1
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$
una superficie differenziabile immersa allora $\exists$ *una parametrizzazione di Monge per ogni punto di* S

Dimostrazione
$p \in S$
$\begin{array}{l} \psi : V \to U \\ \quad q \to p \end{array}$ *parametrizzazione*
$d\psi$ *è iniettivo,* $q = \psi^{-1}(p)$
ed è dato della matrice Jacobiana
GUARDA 17 25

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

proiezione su (x, y)
$\pi \circ \psi$ *ha differenziale in* q *che è isomorfismo*
$\Rightarrow$ *a meno di restringere l'aperto* U *abbiamo* $\pi \circ \psi : U \to W = \pi(U)$ *invertibile con inversa* C^∞
INSERISCI IMMAGINE 5 28
Otteniamo la parametrizzazione di Mange definita da

$$\begin{array}{rl} \tilde{\psi} = & \psi \circ (\pi \circ \psi)^{-1} : W \to U \\ & (x, y) \to (x, y, f(x, y)) \end{array}.$$

È C^∞ *sui punti di* W *componibile con l'inversa della restrizione* $\pi|_U$ $\square$

0.2 Applicazioni differenziabile tra superfici

Definizione 2

1. *Sia* S *una superficie differenziabile*
   Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ *si dice differenziabile in* $x \in S$ *se* $\exists$ *un intorno coordinato* U *di* x *è carta* $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^2$
   tale che $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ *differenziabile in* $\varphi(x)$
   f *si dice differenziabile se è differenziabile in* x $\forall x \in S$

2. $f : S \to \mathbb{R}^n$
   è differenziabile se lo sono tutte le sue componenti

3. *S_1, S_2 superfici differenziabili*
   $f : S_1 \to S_2$ è differenziabile su $x§_1$ se $\exists \varphi : U \to V$ carta locale intonro ad x
   $\varphi' : U' \to V'$ carta locale intorno ad $f(x)$ tale che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$ è differenziabile

4. *$f : S_1 \to S_2$ è un diffeomorfismo se è iniettivo, differenziabile e $f^{-1} : S_2 \to S_1$ è differenziabile*

Esempi

1. $\begin{aligned} f :& S \to \mathbb{R} \\ &\text{x} \to \|x-u\|^2 \text{ differenziabile} \end{aligned} \quad \mathrm{S}_1 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$
   $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1\}$
   $\tilde{S}_1 = S_2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,1)\}$
   $f : \tilde{S}_1 \to S_2$
   $(x,y,z) \to (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$

Esercizio
Dimostrare che f è differenziabile
Suggerimento
usare la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \psi :& V \to \tilde{S}_1 \\ &(\theta,\rho) \to (\cos(\rho)\cos(\theta), (\rho)\sin(\theta)\sin(\rho)) \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} \psi^{-1} :& V' \to S_2 \\ &(\theta,t) \to (\cos\theta, \sin\theta, t) \end{aligned}.$$

Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile
A aperto di $\mathbb{R}^n$, $p \in A$
$d_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed è definito
$v \to \mathcal{J} f_p \cdot v$, dove $\mathcal{J}$ è la Jacobiana
Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$ per $t_0 \in I$
Allora $df_p(v) = \beta'(0)$
$\beta(t) = f(\alpha(t))$