Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-29

0.1 Boh

Proposizione 1
(X, μ) spazio di misura; $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque; $f_n \to f$ q.o. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *Già visto*
($\Leftarrow$) $\forall y \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) = 0$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{y=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{ \ |f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) := \mu(N) = 0$
$x \in X \setminus N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{y=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{y}\}$
Vuol dire che $\forall y \quad \exists k_y$ *(dipendente da y) tale che* $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{y}$
$\forall n \geq k_y \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n \to f$ *quasi ovunque* ☐

Se io so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$
È una condizione più forte o debole? Osserviamo che $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ forma una successione decrescente $(F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots)$
$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n^{\varepsilon} = \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n \to +\infty} \ \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$
Se poi diventano di misura finita (da un certo punto in poi) vale $=$

Definizione 1
$f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili finite quasi ovunque; $f_n \to f$ in misura se $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Proposizione 2
Sia (X, μ) spazio di misura finita ($\mu(X) < +\infty$). Se $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunque $\Rightarrow f_n \to f$ in misura

Dimostrazione
Per la proposizione precedente:
$\forall \varepsilon > 0, f_n \to f$ *q.o.* $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$
ma questo per ipotesi è uguale a

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{k \to +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

se il $\limsup = 0 \Rightarrow \lim = 0$ *Quindi* $\mu(\{f_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$ ☐

Proposizione 3
Se $f_n, f \in L^1(X, \mu); f_n \to f$ in $L^1(X) \Rightarrow f_n \to f$ in misura

Dimostrazione
$\forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \int_{\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}} |f_n - f|d\mu \leq \int_X |f_n - f|d\mu \to 0. \Rightarrow f_n \to f$ *in misura* □

$f_n \to f$ in misura $\overset{?}{\Rightarrow} f_n \to f$ quasi ovunque
$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$
definiamo $g_n := |f_n - f|$, $f_n : X \to [0, +\infty] \Rightarrow \mu(\{g_n > \varepsilon\}) \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} g_n \to 0$ quasi ovunque
L'insieme di sopralivello può muoversi sull'asse x. Non è detto che fissata x allora le successioni di funzioni tendano a 0.
Esempio
$\forall n$ dividiamo $[0, 1]$ in 2^n intervalli di ampiezza $\frac{1}{2^n}$
$I_{n,m} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\ \ 1 \leq k \leq 2^n$
$\{\chi_{I_{k,n}}\}_{1\leq k\leq 2^n, n\geq 1}$ successione di funzioni misurabili secondno *Lebesgue* su $[0, 1]$.
Cosa succede per $n \to +\infty$ C'è convergenza solo a 0
$\forall \varepsilon > 0, n(\{X_{I_{n,k}} \geq \varepsilon\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon > 1 \\ \frac{1}{2^n} = m(I_{k,n}) & \text{se } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases} \xrightarrow{n\to+\infty}$
$\Rightarrow \chi_{I_{n,k}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ in misura.
$\forall x \in [0, 1), \chi_{I_{k,n}}(x) = 1$ per infiniti indici

$$\int_{[0,1)} |\chi_{I_k,n}|dm = m(I_{k,n}) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

.

$$\chi_{I_{k,n}} \to 0 \quad \text{in } L^1([0, 1]).$$

Quindi c'è anche la convergenza in L^1
Quindi la convergenza in misura (e in L^1) $\not\Rightarrow$ convergenza puntuale (quasi ovunque)
Ma $\{\chi_{I_{n,m}}$ ha un'estratta che converge puntualmente a 0

$$\chi_{I_{n,m}} = \chi_{[0,\frac{1}{2^n})} \to 0 \ \text{ q.o. in } [0, 1).$$

Teorema 1
Siano $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabili, finite quasi ovunqe. Se $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow \exists$ sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque

Dimostrazione (Errata)
$a_n \geq 0, a_n \to 0\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ *no!*
$\varepsilon > 0$ *fissato,* $\forall k\ \exists n_k$ *tale che* $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} < +\infty$

$$\mu(\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \to 0.$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{j=1}^{+\infty}\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) = \lim_{j\to+\infty} \mu(\bigcup_{n=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Dov'è l'errore? Qui l'estratta dipende da ε, invece io voglio un'estratta che valga $\forall\varepsilon > 0$. In questo caso presa un'estratta questa vale $\forall\varepsilon' \geq \varepsilon$. Quindi voglio sostituire ε con una cosa infinitesima. La dimostrazione è lasciata per esercizio.
□

Corollario 1
Se $f_N, f \in L^1(X,\mu), f_n \to f$ in $L^1 \Rightarrow \exists$ estratta $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque.

Dimostrazione
$f_n \to$ *in* $L^1 \Rightarrow f_n \to f$ *in misura* *(disuguaglianza di Chebychev (?))*
$\Rightarrow \exists\{f_{n_k}\} : f_{n_k} \to f$ *quasi ovunque.* □

Osservazione
In generale non tutta $\{f_n\}$ converge puntualmente. Per esempio $\chi_{I_{n,k}}$

Osservazione
Se $\mu(X) = +\infty, f_n \to f$ quasi ovunque $\Rightarrow f_n \to$ in misura?
$\mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$
Può essere che si formino tutte misure finite e l'intersezione faccia 0.
In generale non vale per esempio $f_n = \chi_{[n,+\infty)}, f_n(x) \to 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
Ma $m(\{f_n > \varepsilon\}) = +\infty$ per $\varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad f_n \not\to 0$ in misura
Ma quindi bisogna che i sottoinsiemi vadano a $+\infty$, quindi di un ambiente di misura infinita.
Se $\mu(X) < +\infty, f_n \to f$ quasi ovunque $\Leftrightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\})$
$\Rightarrow \forall\delta > 0 \; \exists k = k(\delta,\varepsilon)$ tale che $\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$
$x \in X \setminus F_{\delta,\varepsilon} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| < \varepsilon\} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq k$
Abbiamo trovato il k per cui l'ultima disequazione è piccola. Questo è vero $\forall x$.
Ma allora $\sup_{X\setminus F_{\delta,\varepsilon}} |f_n - f| < \varepsilon \;\; \forall n \geq k \Rightarrow f_n \to f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$

Definizione 2
Siano (X,μ) uno spazio di misura e $f_n, f : X \to [-\infty,+\infty]$ misurabili finita quasi ovunque si dice $f_n \to f$ quasi uniformemente se $\forall\delta > 0 \;\; \exists F_\delta \subset X, F_\delta$ misurabile, $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $f_n \to f$ uniforme in $X \setminus F_\delta$.

Esempio
$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$

$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} = f(x)$
$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f_n - f| = 1$
Se tolgo $1, \sup_{[0,1)} |f_n - f| = \sup_{[0,1)} x^n = 1$ comunque le cose vanno male!
Dobbiamo togliere un intorno di $1 \Rightarrow \sup_{[0,1-\delta]} |f_n - f| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1 - \delta)^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
$\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente in $[0, 1-\delta] \forall \delta > 0$