Lezione 1 Meccanica Razionale

Federico De Sisti

2025-02-28

1 Introduzione al corso

1.1 Contatti

sergio.simonella@uniroma1.it, stanza 17, mercoledì alle ore 11:00
Testi consigliati
Truesdell 1974 Essays of the history of mechanics (punto di vista critico sull'inizio della meccanica analitica)
Buttà-Negrini "Note del corso di meccanica razionale"
Arnold metodi matematici della meccanica classica

1.2 Cosa è la meccanica razionale

È la teoria del moto (meccanica), cerca di collegare risultati sperimentali con prove matematiche (raizonale).

1.3 Assomi (leggi del moto)

Assioma 1
Every body continues in its state of rest, or of uniform motion straight ahead, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

Questa è la prima legge, essenzialmente risale a Galileo

Assioma 2
The change of motion is proportional to the motive force impressed, and it takes place along the right line in which that force is impressed

Assioma 3
To each action there is always a contrary and equal reaction, or the mutual action of two bodies are always equal and directed to contrary parts

1 + 2 + 3 determinano la legge del moto (intesa come evoluzione temporale del corpro)

$$t \to x(t).$$

dove t è il tempo (assoluto)
$x(t)$ = configurazione spaziale (uno o più punti nello spazio fisico)
Dato di fatto
$x \to x(t)$ non è esplicita (non abbiamo $x(t)$ polinomio o integrale, a meno di casi abbastanza semplici)

$$\text{Sistema meccanico} = \begin{cases} \text{non integrabile (solito)} \\ \text{integrabile (eccezioni)} \end{cases}$$

qualitativamente:
moto "caotico"
moto "regolare"
Poincaré diceva che essenzialmente ci interessava capire le loro proprietà geometriche
i moti regolari sono 16 e sono fondamentali

Definizione 1 (Sistema meccanico)
Sistema di N "particelle" ($N \in \mathbb{N}$) o "punti materiali" $p_0, p_1, \ldots, p_N$ in $\mathbb{R}^3$ di "masse inerziali" $m_1, m_2, \ldots, m_N \quad m_i > 0 \ i = 1, \ldots, N$

Notazione 1
Moto $t \to P(t)$
$P(t) = (P_1(t), P_2(t), \ldots, P_N(t))$
configurazione (in coordinate cartesiane)
$x(t) = (x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t))$
$x^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad x^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \quad k = 1, \ldots, N$
velocità $\quad v(t) = (v^{(1)}(t), \ldots, v^{(n)}(t)) \quad v^{(k)}(t) = (v_1^{(k)}(t), v_2^{(k)}(t), v_3^{(k)}(t))$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t_0 + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}.$$

accellerazione $a(t) = \ldots$
$a(t) = (t) = (t) = d\frac{}{dtv(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)}$

Esempi:
1)Caduta libera:
$N = 1 \quad m = 1 \quad g > 0$
$x \in \mathbb{R}^3 \quad \ddot{x}(t) = -g(0, 0, 1)$
Condizioni iniziali $(x(0), \cdot x(0)) = (x_0, \cdot x_0) \quad x_0, \cdot x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = 0 \\ \ddot{x}_2(t) = 0 \\ \ddot{x}_3(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(t) = \dot{x}_3(0) - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + \dot{x}_1(0)t \\ x_2(t) = x_2(0) + \dot{x}_2(0)t \\ x_3(t) = x_3(0) + \dot{x}_3(0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$

2) Molla attaccata alla parete
$\ddot{x}(t) = -\alpha x(t) \quad \alpha > 0$
$\frac{m}{m'} = \frac{\alpha'}{\alpha}$
$m\ddot{x}(t) = -m\alpha x(t) = -kx(t) \ k > 0$ costante
da qui possiamo ricavare l'equazione del moto (oscillatore armonico)
$x(t) = x(0)\cos(\sqrt{\alpha}t) + \frac{x(0)}{\sqrt{\alpha}}\sin(\sqrt{\alpha}t)$
3) Pianeti $N = 2$
configurazione $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1^{(1)}(t) = F_{12} \\ \mathrm{m}_2^{(2)}(t) = F_{21} \end{cases} \qquad F_{12} = -F_{21} = -Gm_1m_2\frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{|x^{(2)} - x^{(1)}|^3}$$

Osservazione

I tre esempi hanno struttura "$F = ma$" con $F = -\nabla U$
Caduta libera:
$U_g = mgx_3$
Molla:
$U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$
Pianeti
$U(x) = U(x^{(1)}, x^{(2)}) = -G\frac{m_1m_2}{|x^{(2)}-x^{(1)}}$
$F_{12} = -\nabla_{x^{(1)}}U_G = Gm_1m_2 - \frac{1}{x^{(2)}-x^{(1)}}\frac{x^{(2)}-x^{(1)}}{|x^{(2)}-x^{(1)}|}$
$F_{21} = -\nabla_{x^{(2)}}U_G(x^{(1)}, x^{(2)})$
Nota: Indice in alto indica il punto materiale, in basso indica la coordinata