Lezione 20 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-22

1 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

Lemma 1
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$
Siano $P, Q \in End(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P, risulta
$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione
Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)
$\dim(V) < +\infty$

Teorema 1
Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in End(V)$ operatore, sono equivalenti

- *L è normale (rispetto ad h)*
- *esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L*

Lemma 2
(V, h) spazio hermitiano, $L \in End(V)$ normale
sono equivalenti

- *$Lv = \lambda v$*
- *$L^\star v = \overline{\lambda} v$*

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per $L^\star$

$$V_\lambda(L) = V_{\overline{\lambda}}(L^\star).$$

Dimostrazione
Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\overline{\lambda}}(L^\star)$. L'inclusione contraria segue da $L^{\star t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$\begin{aligned} h(L^\star(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \overline{\lambda} h(v, w) = h(\overline{\lambda} v, w) \\ h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, w) &= 0 \quad \circledast \end{aligned}$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$L^\star(v) \in V_\lambda(L), \quad \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

$$\Rightarrow \quad L^\star(v) - \overline{\lambda} v \in V_\lambda(L)$$

Quindi nella $\circledast$ posso prendere $w = L^\star(v) - \overline{\lambda} v$, ottenendo

$$h(L^\star(v) - \overline{\lambda} v, L^\star(v) - \overline{\lambda} v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$L^\star(v) - \overline{\lambda} v = 0$$

cioè $\quad L^\star(v) = \overline{\lambda} v$

□

Osservazione
Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v,w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^\star w) = h(v, \overline{\mu} w) = \mu h(v,w) \Rightarrow h(v,w) = 0$$

Dato che $\lambda \neq \mu$

Dimostrazione (Teorema Spettrale)
1) $\Rightarrow$ 2) *Procediamo per induzione su* $\dim V$*,con base ovvia* $\dim V = 1$
Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ e sia $\dim_{\mathbb{C}} V = n$
Sia $v_1 \in V$ un autovettore per L, che possiamo assumere di norma 1. Sia $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^perp$.
Allora $V = V_1 \oplus W$.
Poiché V_1 è L-invariante (per costruzione) e $L^\star$-invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per W.
Inoltre $L|_W \in End(V)$ è normale.
Per induzione, esiste una base $h|_W$-ortonormale formata da autovettori per $L|_W$, sia $\{v_2, \ldots, v_n\}$. Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base h-ortonormale di V formata da autovettori per L.
2) $\Rightarrow$ 1). *Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base h-ortonormale di autovettori per L. Allora*

$$[L]_B^B = \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[L^\star]_B^B = \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge}$$

$$[L \circ L^\star]_B^B = [L]_B^B [L^\star]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^\star]_B^B [L]_B^B = [L^\star \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \to [A]_B^B$ è un isomorfismo tra $End(V)$ e $M_{nn}(\mathbb{C})$, segue

$$L \circ L^\star = L^\star \circ L.$$

cioè L è normale $\square$

Osservazioni

1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x,y) = x^t H\overline{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$h(L_A X, Y) = h(X, L_A Y)$$
$$(L_A X)^t H\overline{Y} = X^t H\overline{L_A Y}$$
$$X^t A^t H\overline{Y} = X^t H\overline{AY} \quad \forall X, Y$$
$$A^t H = H\overline{A}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$\det\begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) + 1 = (t+1)^2.$$

Ma $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, in particolare non è diagonalizzabile

2. Vediamo in dettaglio il fatto che $L|_W$ è normale

Ritornando alla dimostrazione del teorema spettrlae, osserviamo che se W è L-invariante è anche $L^\star$-invariante.

Infatti, se $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(L)$ (per esercizio da dimostrare)

$W = \bigoplus_\lambda (V_\lambda(L) \cap W)$

$=\bigoplus_\lambda (V_{\overline{\lambda}}(L^\star) \cap W)$

$=> W$ è $L^\star$-invariante

Adesso osservo che $(L|_W)^\star = (L^\star)|_W$

$(\mathrm{L}\big|_{W)} \circ (L\big|_W)^\star = (L|_W) \circ (L^s tar|_W) =$

$(L \circ L^\star)|_W = (L^\star \circ L)|_W = (L^\star|_W) \circ L|_W = (L|_W)^\star \circ L|_W$

2 Richiami su spazi vettoriali duali

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita

$$V^V = V^{\acute{s}tar = Hom(V,\mathbb{K}).}$$

sia $A \leq V$

$$Ann(A) = A^{\#} = \{f \in V^{\star} | f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

Osservazioni

1) $A^{\#}$ è un sottospazio

2) $A^{\#\#} = < A >$

$$i : V \to V^{\star\star}$$

$$v \in V, \quad f \in V^{\star}$$

$$i(v)(f) = f(v)$$

V, W spazi vettoriali di dimensione finita $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $f^{\star} \in Hom_{\mathbb{K}}(W^{\star}, V^{\star})$, la trasposta di f è definita con $\phi \in W^{\star}$

$f^{\star}(\phi) = \phi \circ f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "f^{\#}(\phi)"'] & W \arrow[dl, "\phi"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

> **Definizione 1**
> *Definisco la dualità standard su V come*
>
> $$\langle \ , \ \rangle : V^{\star} \times V \to \mathbb{K}.$$
>
> $\langle v, f \rangle = \langle f, v \rangle = f(v)$
> *con questa proprietà*
>
> $$\langle f(v), w^{\star} \rangle = \langle v, f^{\star}(w^{\star}) \rangle.$$

Ricordo che se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora i funzionali $v_i^{\star}$ definiti da

$$\langle v_i^{\star}, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

per $1 \leq i \leq n$ formano una base $B^{\star}$ di $V^{\star}$ detta base duale di B

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, siano $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, L = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi di V, W consideriamo $f^{\star} : W^{\star} \to V^{\star}$ Allora:

$$\begin{array}{ccc} [f]_B^B & = & [f^{\star}]_{L^{\star}}^{B^{\star}\, t} \\ \| & & \| \\ (a_{ij}) & & (a_{ij}^{\star}) \end{array}$$

Tesi $\quad a_{ih} = a_{hi}^{\star}$

$f^{\star}(w_i^{\star}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\overset{\star}{i}}$

$f^{\star}(w_i^{\star})(v_h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\star} v_i^{\star}(v_h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\star} \delta_{ih} = a_{hi}^{\star}$

$\|$

$w_i^{\star}(f(w_h)) = w_i^{\star}(\sum_{i=1}^{n} a_{ih} w_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ih} w_i^{\star}(w_i) =$
$= \sum_{i=1}^{n} a_{ih} \delta_{ij} = a_{ih}$

Teorema 2 (Qualche proprietà importante)
$f : V \to W$ *lineare* $\quad f^\star : W^\star \to V^\star$
$1)(Imf)^\# = \ker f^\star$
$2)(\ker f)^\# = Imf^\star$
$3)(\lambda f + \mu g)^\star = \lambda f^\star + \mu g^\star \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, g \in Hom(V, W))$
$4)(h \circ f)^\star = f^\star \circ h^\star \qquad h : W \Rightarrow U$ *lineare*

Dimostrazione (Il punto 2, 3 e 4 vengono lasciati per esercizio)
1) $\emptyset \in (Imf)^\#$
$\Leftrightarrow \forall w \in Imf \quad \emptyset(w) = 0$
$\Leftrightarrow \forall v \in V \emptyset(f(v)) = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \circ f = 0$
$\Leftrightarrow \emptyset \in kerf^\star$
Quindi abbiamo visto che $(Imf)^\# = \ker F^\star$ $\square$

Proposizione 1
Sia V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *su* $\mathbb{K}$ *e* W *un sottospazio. Allora*
$$\dim(W) + \dim W^\# = n.$$

Dimostrazione
Da quanto visto, la mappa
$$Hom(V_1, V_2) \to Hom(V^star_2, V^star_1)$$
$$f \quad \to \quad f^t$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre f è iniettiva (rispettivamente suriettiva) se e solo se $f^\star$ *è suriettiva (rispettivamente iniettiva)*
Consideriamo la proiezione $\pi : V \to V|_W := U$
Poiché π *è suriettiva* $\pi^\star : U^\star \to V^\star$ *è iniettiva e*
$$W^\# = (\ker \pi)^\# = Im\pi^\star.$$
per cui
$$\dim W^\# = \dim(Im\pi^\star) = \dim U^\star = \dim V - \dim W.$$
$\square$