Lezione 4 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-05

0.1 Misura di Lesbegue

Reminderi (misura di Lesbegue)

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \;\;:\;\; |I_i| \text{ intervalli} \quad E \subseteq \bigcup_{i-1}^{\infty} I_i.$$

Proposizione 1
1) $m(\emptyset) = 0$
2) $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
3) subadditività numerabile, $\{E_i\}$ *successione di insiemi*

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $\forall I$ *intervallo* $m(I) = |I|$
5) $\forall E \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m(E+x) = m(E)$

Dimostrazione
1) $m(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ *dato che l'insieme vuoto è un intervallo*
2) $\forall \{I_i\}$ *intervalli tale che* $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \{I_i\}$ *è un ricoprimento anche di* $E \Rightarrow m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ *prendendo l'inf rispetto a* $\{I_i\}$ $\;\; m(E) \leq m(F)$
3) Se $\exists i$ *tale che* $m(E_i) = +\infty \Rightarrow$ *tesi ovvia*
possiamo supporre $m(E_i) < +\infty \;\; \forall i > 1$
Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \{I_k^i\}_k$ *intervalli tali che* $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ *e*

$$\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^i| - \frac{\varepsilon}{2^i} < m(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i|$$

$\{I_k^i\}_{i,k}$ *successione di intervalli*
$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$
quindi

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) + \varepsilon.$$

e per $\varepsilon \to 0$

$$m(\bigcup_{i-1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

4) $E = I$ $m(E) \leq |I|$ scegliendo I stesso come sottoricoprimento
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \text{ per la numerabile additività di } | \ |.$$

$$\Rightarrow |I| \leq m(I) = m(E).$$

5) $E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$\forall \{I_i\}$ successione di intervalli tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow E + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i + x = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (I_i + x).$$

$$m(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i = x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

quindi sappiamo che $\Rightarrow m(E + x) \leq m(E)$
sappiamo che $E = E + x - x$

$$m(E) = m(E + x - x) \leq m(E + x).$$

$\Rightarrow m(E) = m(E + x)$

$\square$

Osservazione
È vero che se $\{E_i\}$ successione di insiemi disgiunti $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

è vero? In generale no.
Osserviamo che se valesse la finita additività, ovvero

$$m(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n).$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \Rightarrow$ sarebbe vera anche la finita additività.
Infatti

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \quad \text{sempre vero per subadditività.}$$

Se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\forall k \geq 1$ $\ m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)$
$\Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \geq m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i) \ \Rightarrow m(\bigcup_{i=2}^{\infty}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$

Il problema che impedisce la numerabile additività è che non sempre è vero che
$E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

perché nella famiglia di intorni ci possono essere intorni che ricoprono parte sia di E_1 che di E_2 quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \neq \sum_{i \quad I \cap E_2} |I_i| + \sum_{i \quad I_\cap E_2} |I_i|.$$

Tuttavia, è vero che Se $I_1, \ldots, I_n$ intervalli, $I_i \cap I_j = \emptyset$ per $i \neq j$
$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$
Si può supporre gli I_i limitati (sennò misura è infinita)
$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{n-1}^{i=1} J_i$

$$m(I) = |I| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |J_i| \geq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) + m(\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i)$$

$$\leq m(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i) = m(I).$$

ma ciò vuol dire che sono tutte uguaglianze

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |I_i| = m(\bigcup_{i-1}^{n} I_i).$$

se I_i intervalli con $I_i \cap I_j = \emptyset \quad i \neq j$

Definizione 1
Se X un insieme non vuoto, Una misura su X è una funzione

$$\mu : P(x) \to [0, +\infty].$$

tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *(monotonia)* $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
3. *(subadditività)* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

2.+3. $\Leftrightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(E_i)$

Esempi di misura
1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0} : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty).$$

$E \subseteq \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$ difatti:

- $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$
- se $E \subseteq F$ se $x_0 \notin E \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = 0 \leq \delta_{x_0}(F)$

se $x_0 \in E \to x_0 \in F \Rightarrow \delta_{x_0}(E) = \delta_{x_0}(F) = 1$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E \quad \forall i$

se $\delta_{x_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 \Rightarrow \ \exists i, \ \ t.c. \ \ x_0 \in E_i \Rightarrow \sum_1^{\infty} \delta_{x_0}(E_i) \geq 1$

2) misura "che conta"

$\mu^{\#} : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

$$\mu^{\#}(E) = \begin{cases} \text{cardinalità di } E \text{ se } E \text{ è finito} \\ +\infty \qquad\qquad \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} .$$

Esempio di insieme di misura di Lesbegue nulla

Non misurabile, insieme di Cantor

Al passo $n = 1, I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \ C_1 = J_1^1 \cup J_2^1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Reitero così, dividendo in 3 parte tutti gli insiemi J e rimuovendo gli intervalli centrali.

C_n è un insieme di 2^n intervalli chiusi, disgiunti, ogniuno di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

C_n è alternato da C_{n-1} eimuovendo 2^{n-1} intervalil aperti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definita da $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$

$$m(C) \leq m(C_n) = m(\bigcup_{i=1}^{2^n} J_i^n) = \sum_{i=1}^{2^n} |J_i^n| = \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n.$$

$\forall x \in [0, 1]$

si scrive nella forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \ \ x_i \in \{0, 1, 2\}$

$x = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \ldots + \frac{x_i}{3^i} + \ldots$