Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

1 Ultima Parte teorica prima del compito

$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$

$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 1 (Riflessione)
Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

"e viceversa"
Possiamo fissare $c = 0 \;\; p_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$
Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \quad \to \quad \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

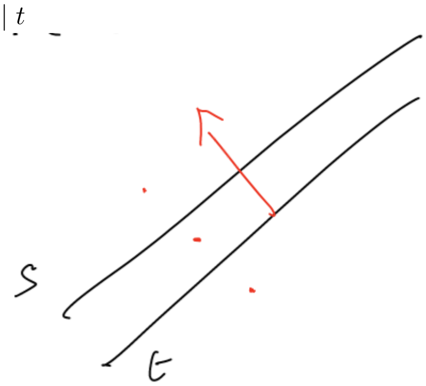
altrimenti è una traslazione (che è l'identità $= D$)
Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$
Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \qquad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$



$\rho_s \circ \rho_t = t_v$

con v ortogonale alla comune direzione di s, t

In coordinate rispetto ad un riferimetno cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv \binom{x_1}{x_2}$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \quad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d)+d-x)+x.$$

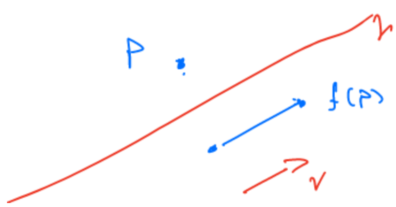
dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente
$\underbrace{R_{\theta+\varphi}(x-d)}_{\text{parte lineare}} + R_\theta(d-c)+c$

T T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

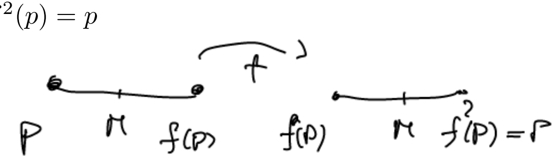
che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 2 (Glissoriflessione)
Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ di una riflessione di asse r con una traslazione $t_v \neq Id$ con $v \neq 0, v \parallel r$



Teorema 1 (Charles, 1831)
Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione
Sia $f \in Isom(E)$
Se f ha un punto fisso abbiamo già visto che f è una rotazione se è diretta o una riflessione se f è inversa
se f diretta priva di punti fissi. Allora anche f^2 non ha punti fissi, perché se $f^2(p) = p$



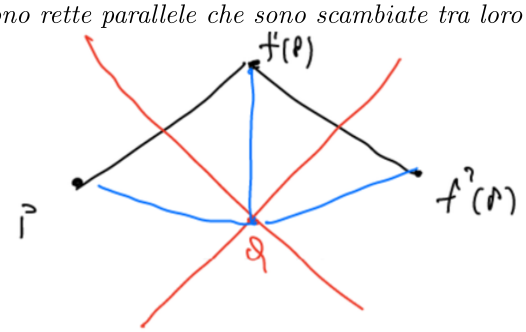
Dunque $f(M) = M$ escluso.
DIco che $p, f(p), f^2(p)$ che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati,

Altrimneti ***Disegno TODO***

$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p))(\text{ poichè } f \text{ è un'isometria}).$$
$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché f preserva l'orientazione, il triangolo $QPf(P)$ viene trasformato in $Q, f(P), f^2(P)$ da cui $f(Q) = Q$
Dunque tutti i punti $f^i(P), \quad i \geq 0$ sono allineati, quindi se r è la retta che li contiene, f agisce su r come una traslazione.
Poiché f è diretta, f agisce su tutto il piano come una traslazione.

Sia ora f inversa senza punti fissi,
Allora f^2 è diretta e come prima $f^2 = t_v$ per qualche v
Sia $P \in E$ un punto $r_0 = \overrightarrow{Pf^2(P)}, \quad r_1 = \overrightarrow{f(P)f^2(P)}$
sono rette parallele che sono scambiate tra loro da f



Sia r la retta equidistante da r_0 e r_1.
Allora $f(r) \subseteq r$ Ma $f^2 = t_v$ $f|_r = t_{v/2}$
Se ora consideriamo $t_{-v/2} \circ f$
questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente r,
quindi è una riflessione che indichiamo con ρ. Dunque

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

□

1.1 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Ricorda
$f \in End(V)$ diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f
$\Leftrightarrow A = [f]_B^B$ B base $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$ è diagonale

Lemma 1
Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ha solo radici reali

Dimostrazione
$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C}) \quad L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$
Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ *un autovalore e* $x \neq 0$ *un corrispondente autovettore*

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t(Ax) = \overline{x}^t(\lambda x) = \lambda \overline{x}^t x$
$\overline{x}^t Ax = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda}\overline{x}^t x$
$\overline{x}^t x = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i \leftarrow$ *è un numero reale positivo poiché* $x \neq 0$

$$\lambda \overline{x}^t x = \overline{\lambda} x^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda.$$

$\square$

Teorema 2 (Teorema Spettrale)
Sia V *uno spazio euclideo di dimensione finita e* $T \in End(V)$ *un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per* T

Corollario 1
Per ogni matrice reale simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ *esiste una matrice ortogonale* $N \in O(n)$ *tale che*

$$N^{-1}AM = N^t AN \qquad \text{è ortogonale.}$$

Dimostrazione (Teorema)
Per induzione su $n = dim(V)$. *Base* $n = 1$ *ovvia*
Supponiamo $n = dim(v) \geq 2$. *Poichè* T *è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi* T *ammette un autovalore* λ *d sia* e_1 *il suo corrispondente autovettore di lunghezza* 1

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp.$$

Chiamo $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^\perp$
Dico che $T|_U : U \to$, *per cui* $T|_U \in End(U)$
Infatti, dimostro che $u \in U \to T(u) \in U$
ipotesi: $\langle u, e_1 \rangle = 0$
Tesi: $\langle Tu, e_1 \rangle = \langle u, T^t e_1 \rangle = \langle u, Te_1 \rangle = \langle u, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0$
dove abbiamo usato la simmetria di T
Chiaramente $T|_U$ *è simmetrico, quindi per induzione* U *ha una base ortonormale di autovettori* $\{e_2, \dots, d_n\}$.
Ne segue che $\{e_1, \dots, e_n\}$ *è una base ortonormale di* V *formata da autovettori per* T $\square$