Lezione 19 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-18

1 Esercizi vari

Esercizio 1 Foglio 6
$f : A \to A$ affinità ha un unico punto fisso se e solo se la sua parte lineare (φ) non ha l'autovalore 1
Svolgimento
Sia $F = \{x \in A | f(x) = x\}$
Supponiamo $F \neq \emptyset$ e $P \in F$ dico che

$$\star \;\; F = P + \ker(\varphi - Id).$$

dove $\ker(\varphi - Id)$ è l'autospazio di autovalore 1 di φ
$u \in V \quad P + u \in F \Leftrightarrow P + u = f(P + u) = f(P) + \varphi(u) = P + \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = u$
ovvero $u \in \ker(\varphi - Id)$
Se ora F ha un unico punto fisso $\star$ implica che

$$ker(\varphi - Id) = \{0\}.$$

cioè 1 non è autovalore di φ
Viceversa facciamo vedere che se $\ker(\varphi - Id) = \{0\}$ allora $F \neq \emptyset$ Cerchiamo $Q + v$ tale che
$f(Q + v) = Q + v$
$f(Q) + \varphi(v)$
$f(Q) - P = v - \varphi(v)$
$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\varphi - Id)(v)$
Quindi, poiché $(\varphi - Id)$ è invertibile (per ipotesi), dato Q trovo un unico $v = -(\varphi - Id)^{-1}(\overrightarrow{Qf(Q)})$
per cui $Q + v$ è un punto fisso

Esercizio 5 Foglio 6
$f(x) = Ax + b$ in $\mathbb{E}^2$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = 0$
1
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
SvolgimentoA
1. è una traslazione quindi non ha punti fissi
2. $\det A = 1$ e A ortogonale

$AX + b = X$
$(A - I)X = -b$
$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$x_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2)$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$
Esercizio da finire

---

2 Diangonalizzazione unitaria di operatori normali

($\mathbb{C}^n$, prodotto hermitiano standard) $M^\star = \overline{M}^t$
M è normale se $MM^\star = M^\star M$
siano normali le matrici

unitarie	$MM^\star = Id$
hermitiane	$M = M^\star$
antihermitiane	$M = -M^\star$

Teorema 1 (Spettrale)
M è normale se e solo se $\exists U \in U(n)$: $U^t MU$ è ortogonale

nota
$U(n)$ spazio delle matrici unitarie

$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad L^\star = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L$ matrice hermitiana
Trovo ora il polinomio caratteristico
$t^2 - 2t = 0$ che ha quindi autovalori $t = 0, t = 2$
$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$
$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad U^-1LU = 0002.$$

Dove il prodotto scalare standard è stato fatto per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato)

Esempio 2
$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione
il polinomio caratteristico è $t^2 - \sqrt{3}t + 1$ gli autovalori sono quindi $t = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$
$v_{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ultimo esempio

$L = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad L^\star = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$

$$LL^\star = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^\star L.$$

$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \;\; t_1, t_2$
$v_{t_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$
U come nell'esercizio precedente

3 Cenni sulla classificazione delle isometrie

Nomenclatura 1
· *rotazioni*
· *riflessioni*
· *traslazioni*
· *glissoriflessione* $= t_v \circ s_\alpha$ *con* $v \parallel \alpha^t$ *(disegno de li mortacci sua)*
· *glissorotazioni* $= t \circ R$ *dove* $v \parallel a$, a *asse di* R *(altro disegno)*
· *riflessioni rotatorie* $s_a \circ R$ R *rotazione di asse* $\underline{a}$, $s_{\underline{a}}$ *è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad* $\underline{a}$

Teorema 2 (Eulero 1776)
Ogni isometria di $\mathbb{E}^3$ *è di uno dei sei tipi sopra descritti*