

Lezione 5 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-07

1 Qui manca la parte precedente della lezione

$f \text{ s.c.i} \Leftrightarrow f^{-1}(a, +\infty))$ aperto $\forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

$(\Rightarrow) f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x)$

$c- \in \{f > a\} \Leftrightarrow f(x_0) > a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \inf(fx) \geq f(x_0) > a \Rightarrow \inf(fx) > a$ per δ sufficientemente piccolo

$\Rightarrow f(x) > a$ per $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{f > a\}$

$\Rightarrow \{f > a\}$ aperto

$(\Leftarrow)_0 \in \mathbb{R} \quad \forall a < f(x_0) \quad x_0 \in \{f > a\}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) > a$

$\Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a \quad \forall a < f(x_0)$

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$

$\Rightarrow f \text{ s.c.i}$

□