Lezione 7 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-14

1 Esercizi Vari

Piccola definizione per esercizio

$f_{A,b}(X) = AX + b$

$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{f_{a,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}$ $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$ **Esercizio 1**

$f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1) = e_1 + e_3, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2$ Dove φ è la parte lineare di

e chiamiamo

$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f.

Trovare l'espressione di f in coordinate affini canoniche
e trovare i punti fissi di f.

Svolgimento $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}$

$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Se $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la stessa base standard di $\mathbb{R}^3$

$$[\varphi]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dove abbiamo utilizzato il fatto che $F(p) =$

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2-1 \\ -x_2+x_3+1 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix}$

$f(p_0) + \varphi(\overrightarrow{p_0p}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$

Cerchiamo ora i punti fissi

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2

Dimostrare che un'affinità di piano affine che ha tre punti fissi non allineati è l'identità

Svolgimento

Osservo che in un piano affine tre punti p_0, p_1, p_2 sono non allineati se e solo se

$\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}$ sono linearmente indipendenti, ovvero p_0, p_1, p_2 sono affinamente indipendenti. D'altra parte, un'affinità è univocamente determinatta dall'immagine di tre punti indipendenti. L'identità è un'affinità con (almeno) tre punti fissi. Per l'unicità si ha $f = Id$.

Esercizio 3
In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ consideriamo la retta $r : x + y = 1$
i. Determinare le affinità che fissano tutti i punti di r
ii. Tra le affinità determinate in (i), trovare quelle che mandano $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$ in $\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}\right)$
iii. Tra le affinità determinate in i, trovare le traslazioni
Svolgimento

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Basta scegliere $f(p) = p$ per due punti distinti $p \in r$. Posso scegliere $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases}a + \alpha = 1\\c + \beta = 0\\d + \alpha = 0\\d + \beta = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a = 1 - \alpha\\b = -\alpha\\c = -\beta\\d = 1 - \beta\end{cases} \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\alpha & -\alpha\\-\beta & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha\beta = 1 - \alpha - \beta \neq 0 \quad \alpha + \beta \neq 1$

ii $\begin{pmatrix}1-\alpha & -\alpha\\-\beta & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}1 - -3\alpha + \alpha = 2\\-\beta + 3 - 3\beta + \beta = -2\end{cases} \qquad \begin{cases}-3\alpha = 1\\-3\beta = -5\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha = -\frac{1}{3}\\\beta = \frac{5}{3}\end{cases}$$

iii $\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\\hline \alpha & 1-\alpha & -\alpha\\\beta & -\beta & 1-\beta\end{array}\right) \to \begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\-\beta & 1-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$
e quindi l'unica traslazione è l'identità

Nota

$f_{A,b} = AX + b \quad f_{A,b} \circ f_{C,b} = f_{AC,Ad+b}$

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}) \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline d & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline Ad+b & AC \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 + a_{11}d_1 + a_{12}d_2 & a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ b_2 + a_{21}d_1 + a_{22}d_2 & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{22} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{array}\right)$$

Esercizio 4

In $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}} \quad L : \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad W =< \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} >$

Scrivere le matrici delle proiezioni su L parallela a W e la matrice della simmetria di asse L e direzione W

Svolgimento

$L = P + W_1 \quad V = W_1 \oplus W_2$

$p_L^{W_2}(X) = P + \pi_L^{W_2}(\overrightarrow{px})$ Cerco ora l'equazione parametrica di L

$s_L^{W_2}(X) = P + \sigma_L^{W_2}(\overrightarrow{px})$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V + W : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qui il professore utilizza la sacra formula di Antani per giungere al seguente risultato

$\gamma = -2 + x_1 - 2x_3$

$\delta = -2 + 2x_2 + x_4 \quad p_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & - & -2 \end{array}$$

$s_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right)$$