Lezione 12 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-01

0.1 Boh

(X, m, μ)
$s = \sum_{i=1}^{N} c_j x_{E_j}, c_j \geq 0 \quad E_j \in m$
$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j)$
$\mu_S(E) = \int_E s d\mu = \int_X s x_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{N} c_i \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap E)$

Proposizione 1
Sia (X, m, μ) *spazio di misura sia* $s(x) = \sum_{j-1}^{N} c_j \chi_{E_j}(x)$ *funzione semplice* $\geq 0 \quad (c_j \geq 9 \quad \forall j)$
$\Rightarrow \mu_S : m \to [0, +\infty]$

$$\mu_S(E) = \int_E s d\mu \qquad \forall E \in m.$$

è una misura.

Dimostrazione
$\mu_S(\emptyset) = \int_\emptyset s \ d\mu = 0$
$\{F_i\} \subset m, F_i \cap F_l = \emptyset$ *se* $i \neq l$
$F = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$
$\mu_S(F) = \int_F s \ d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap F) = \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i)$
$= \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_j \cap F_i)$
$= \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_j \cap F_i)$ *dato che* $E_j \cap F_i$ *sono disgiunti e misurabili*
$= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap F_i)$
$= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{F_i} s \ d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_S(F_i)$ $\square$

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono risultati che garantiscono la proprietà:
$\{f_n\}$ succesione di funzioni misurabili
$f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \ d\mu = \int_x \lim_{n \to +\infty} f_n \ d\mu = \int_X f \ d\mu$$

Osservazione
Per l'integrale di Riemann la validità del passaggio al limite sotto il segno d'integrale richiede la convergenza uniforme.
Esempio
$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_n\}$
$\forall n \geq 1 s_n(x) = \chi_{\{q_1, \ldots, q_n\}}$
s_n è discontinua in $\{q_1, \ldots, q_n\}$
$\Rightarrow s_n \in R([0, 1])$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x).$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0,1]$
ma $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin R([0,1])$

Teorema 1 (convergenza monotona, B. Levi)
Sia (X, m, μ) *spazio di misura e sia* $\{f_n\}$ *successione di funzioni misurabili*
$f_n : X \to [0, +\infty] \quad \forall n$
monotona crescente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \geq,$ *q.o.*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x).$$

$f : X \to [0, +\infty]$ *definita quasi ovunque è misurabile e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu = \int_X f \ d\mu.$$

Dimostrazione
$\int_X f_n \ d\mu$ *è una successione numerica monotona crescente*
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \leq \int_X f \ d\mu$
$f_n \leq f \quad \forall n \quad \int_X f_n \ d\mu \leq \int_X f \ d\mu$
Tesi: $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \geq \int_X f \ d\mu = \sup\{\int_X s \ d\mu. s$ *Semplice* $0 \leq s \leq f\}$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \geq \int_X s \ d\mu \quad \forall s$ *funzione semplice* $0 \leq s \leq f$
Sia s *funzione semplice,* $0 \leq s \leq f$ *Sia* $\varepsilon > 0$ *e* $\forall n$

$$E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)s\}.$$

- $E_n \in m \quad \forall n$ *perché* $f_n - (1-\varepsilon)s$ *è misurabile*
- $E_n \subseteq E_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$ *poiché* $f_n \leq f_{n+1}$
- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$ *poiché sia* $x \in X$
  se $s(x) = 0 \Rightarrow x \subseteq E_n \quad \forall n$
  se $s(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \sup_{n\geq 1} f_n(x) \quad \exists \bar{n}$ *tale che*
  $(1-\varepsilon)s \leq (1-\varepsilon)f(x) < f_{\bar{n}}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in E_{\bar{n}}$
  $(1-\varepsilon)\int_X s \ d\mu = \mu_{(1-\varepsilon)s}(X) = \mu_{(1-\varepsilon)s}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$
  $= \lim_{n\to+\infty} \mu_{(1-\varepsilon)s}(E_n)$
  $= \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{E_n} (1-\varepsilon)s \ d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{E_n} f_n \ d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$
  Per $\varepsilon \to 0$
  $\Rightarrow \int_X d \ d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu \qquad \forall s$
  $\Rightarrow \int_X f \ d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \ d\mu$

$\square$

Osservazione

1. $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile
   $\Rightarrow \exists\{s_n\}$ successione di funzioni misurabili tale che

$$s_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \in X.$$

$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + n\chi_{\{f \geq n\}}.$$

Per il teorema di B. Levi
$\lim_{n\to+\infty} \int_X s_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu$

2. Se $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabile $\forall n$
   $f_n(X) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n$
   $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{n1} f_n \geq 0$
   $\int_X f_n \; d\mu \to \int_X f \; d\mu$
   $g_n = f_1 - f_n \geq 0 \quad \forall n$
   g_n è monotona crescente
   $\int_X g_n \; d\mu \to \int_X \; (f_1 - f)d\mu$
   $\int_X (f_1 - f_n)d\mu$
   Se $\int_X f_1 d\mu < +\infty$
   $\Rightarrow \int_X f_n \; d\mu \to \int_X f d\mu$
   In generale non vale se $\int_X f_1 \; d\mu = +\infty$
   Esempio: $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$
   $\int_{\mathbb{R}} f_n \; dm = 1m([n, +\infty]) = +\infty$

Corollario 1
Siano $f_n : X \to [0, +\infty]$ *misurabili* $\forall n$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X d_n \; d\mu.$$

Dimostrazione
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty$ *oppure* $+\infty \Rightarrow f : X \to [0, +\infty]$ *è misurabile*
$= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$
$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \forall x$
$\Rightarrow \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k \; d\mu$
$= \int_x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu \doteq \lim_{k\to+\infty} \int_X \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$
dove il penultimo passaggio ($\doteq$) *è ancora da giustificare* □

Proposizione 2
Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ *misurabili*
$\Rightarrow \int_X (f + g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dimostrazione
primo caso: f, g *funzioni semplici,* $f = s = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \chi_{E_j}$ $\quad c_j \geq 0$ $E_j \in m$ *disgiunti* $\quad \cup E_j = X$
$g = t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{F_k}$ $d_k \geq 0, F_k \in m$ *disgiunti* $\cup F_k = X$
$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^{M} F_k = \bigcup_{k=1}^{M} E_j \cap F_k$

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{\bigcup_{k=1}^{M} E_j \cap F_k} = \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{k=1}^{M} \chi_{E_j \cap F_k}$$

Vero poiché unione di insiemi disgiunti

$$t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^{N} F_k \cap E_j}.$$

$$t = \sum_{k=1}^{M} d_k \chi_{\bigcup_{j=1}^{N} F_k \cap E_j} = \sum_{k=1}^{M} d_k \sum_{j=1}^{N} chi_{F_k \cap E_j}.$$

quindi

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} c_j \chi_{F_k \cap E_j} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} d_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu.$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} (c_j + d_k) \mu(F_k \cap E_j) = \int_X s \ d\mu + \int_X t \ d\mu.$$

secondo caso $f, g \geq 0$ *misurabili*
$\exists s_n \uparrow f$ *e* $\exists t_n \uparrow g$ $\qquad$ ($\uparrow =$ *tende*)
$\Rightarrow s_n + t_n \uparrow f + g$

$$\int_X (f+g) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_X s \ d\mu + \int_X t_n d\mu \right).$$

$$\int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu.$$

□

Esercizio
Sia $\{a_n\}$ una successione a termini mai negativi $a_n \geq 0$
$\{a_n\}$ può essere pensata come una funzione
f:$\mathbb{N} \to [0, +\infty]$
$\quad n \to f(n) = a_n$
$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu^*)$ $\quad \int_{\mathbb{N}} f \ d\mu^* =$? dove μ^* calcola la cardinalità dei sottoinsiemi