Lezione 5 Meccanica Razionale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Problemi differenziali

Stiamo studiando problemi del tipo

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} .$$

$g \in C_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
$g(Zq) = 0$ punto di equilibrio
$Z_q = \begin{cases} \text{stabile (se } (0,0) \text{ per ogni oscillatore armonico)} \\ \text{Instabile (se } (0,0) \text{ per repulsione lineare } m\ddot{x} = \gamma x \quad \gamma > 0) \\ \text{asimmetricamente stabile (sistema meccanico con "attrito")} \end{cases}$ **Osservazione**
z_{eq} stabile $\Leftrightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |z(t) - z_{eq}| \xrightarrow{z_0 \to z_e q} 0$
Proprietà di uniforme (nel tmepo) continuità nei dati iniziali
dove $z(t)$ soluzione di $SDO1$ con dato iniziale z_0
Osservazione 2
z_{eq} asintoticamente stabile per sistema meccanico con potenziale $U \in C^2(D)$ (D aperto di $\mathbb{R}^{3N}$). Allora H non si conserva. $z_0 = (x_0, v_0) \in B_{\delta'}(z_{eq})$
Supponiamo $H(x_0, v_0) = H(x(t), v(t)) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}'$
$H(x_0, v_0) = \lim_{t \to +\infty} H((x(t), v(t)) = H(x_{eq}, 0) = U(x_{eq}) \Rightarrow H$ costante in $B_{\delta'}(z_{eq})$ Assurdo
Abbiamo trovato un punto di equilibrio, vogliamo capire se questo è stabile

1.1 Metodi per lo studio degli equilibri

1. Linearizzazione (Sviluppo in serie di Taylor)
   $g(z) = g(z_{eq}) + D_g(z_{eq})(z - z_{eq}) + R(z) \quad R(z) = o(|z - z_{eq}|$
   dove $D_g(z(eq)) = L$ matrice del campo linearizzata.
   $\eta := z - z_{eq}, \quad \eta_0 := z_0 - z_{eq}$
   $\begin{cases} \dot{\eta} = L\eta + R(\eta + z_{eq}) \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases}$
   Abbiamo quindi un SDO1 linearizzato
   di tipo oscillatore armonico (autovalori a parte reale negativa) o di tipo repulsione (un autovalore a parte reale positiva)
   se un autovalore a parte reale nulla, boh

   Se posso trascurare R deduco il comportamento intorno a $\mu = 0$

2. Lyapunov "W" funzione di Lyapunov

Teorema 1
Sia $U \subset \Omega$ intorno di $z_{eq}, W \in C(U, \mathbb{R})$, differenziabile in $U \setminus \{z_{eq}\}$ e tale che $W(z_{eq}) = 0,\ W|_{U\setminus\{z_{eq}\}} > 0$
Allora:

(a) *se $\dot{W}(z) \leq 0 \quad \forall z \in U \setminus \{z_{eq}\} \Rightarrow z_{eq}$ stabile.*

(b) *se $\dot{W}(z) < 0 \quad \in U \setminus \{z_{eq}\} \Rightarrow z_{eq}$ è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione
(a) Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario tale che $\overline{B}_\varepsilon(z_{eq}) \subset U \subset \Omega$
$\alpha := \min\limits_{\partial B_\varepsilon(z_{eq})} W > 0$
$U' \subset B_\varepsilon(z_{eq})$ aperto tale che $W|_{U'} < \alpha$ e $z_{eq} \in U'$
Sia $\delta > 0$ tale che $B_\delta(z_{eq}) \subseteq U'$ e sia $z_0 \in B_\delta(z_{eq}) \quad z_0 \neq z_{eq}$
Sia $z(t)$ soluzione di SDO1 con dato iniziale z_0
Supponiamo $\exists \tau > 0$ tale che $z(t) \in B_\varepsilon(z_{eq}) \quad \forall t \in [0, \tau)$
e $z(\tau) \in \partial B_\varepsilon(z_{eq})$. Allora $W(z(\tau)) \geq \alpha$. Assurdo z_{eq} stabile (b) negli appunti.
□

Come cerco W?
Cerco forme quadratiche, energia o quantità conservata

Corollario 1
Sia x_{eq} posizione equilibrio di un sistema meccanico conservativo con $U \in C^2(D)$
x_{eq} è minimo (stretto) di $U \Rightarrow x_{eq}$ stabile.

Dimostrazione
$W := T(v) + U(x) - U(x_{eq})$ è funzione di Lyapanov per lo stato $(x_eq, 0)$
Infatti $\dot{W} = \dot{H} = 0\ \forall t$
e inoltre $W(x_{eq}, 0) = 0$ e $W > 0$ in un intorno di $(x_{eq}, 0)$ □

Esercizio Famoso (Letka-Volterra)
x, y concentrazione di preda, predatore
$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$
α è la riproduzione delle prede, β quanto vengono mangiate, γ quanto muoiono i predatori, δ i predatori vengono favoriti dall'uccisione delle prede
Questo è un sistema differenziale di ordine 1, si studino i punti id equilibrio.
$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ \text{-}\gamma y + = 0 \end{cases} \quad z_{eq,1} = (0,0)\ z_{eq,2} = (\tfrac{\gamma}{\delta}, \tfrac{\alpha}{\beta})$$
Equilibrio 1 $(0,0)$
Linearizzata di $g(x,y) = (\alpha x - \beta xy, -\gamma y + \delta xy)$,
$$L = Dg(z_{eq}) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}$$

$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$ α è positiva, quindi è di tipo "repulsore", $(0,0)$ è instabile
$E_q(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$
$Dg(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\frac{\gamma}{\delta} \\ \delta\frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$
autovalori immaginari puri, quindi il metodo linearizzato non è utile.
$H(x,y) := \delta x + \beta y - \gamma \ln x - \alpha \ln y$
$-\gamma\frac{x}{\dot{x}} - \alpha\frac{y}{\dot{y}} + \delta\dot{x} + \beta\dot{y} = \delta(\alpha x - \beta xy) + \beta(-\gamma y + \delta xy) - \gamma(\alpha - \beta y) - \alpha(-\gamma + \delta x) = 0$
$\dot{H} = \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0 \quad W(x,y) =:= H(x,y) - H(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$
Se $z_{eq,2}$ è un punto minimo stretto di W, allora W è Lyapunov e $z_{eq,2}$ stabile
$\triangledown W = (\delta - \frac{\gamma}{x}, \beta - \frac{\alpha}{y}), \triangledown W(z_{eq,2}) = (0,0)$

$$D^2W = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{y^2} \end{pmatrix}.$$

$D^2W(z_{eq,2}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix}$ Per il teorema di Lyap. $\Rightarrow (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ stabile