

Lezione 3 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Nella lezione precedente...

Abbiamo introdotto i sottospazi affini di (A, V) come i sottospazi del tipo

$$p + W \quad W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale.}$$

Ricordiamo anche che $p + W = q + W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

2 Nuova lezione

Osservazione

Se $\Sigma_1 = p_1 + W_1$, $\Sigma_2 = p_2 + W_2$ sono sottospazi affini, la loro intersezione, se non vuota, è un sottospazio affine. Infatti $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = p + W_{12}.$$

Lemma 1

$$\emptyset \neq S \subset A \quad p, q \in S$$

$$H_p = \{\overrightarrow{px} \mid x \in S\} \quad H_q = \{\overrightarrow{qy} \mid y \in S\}$$

Allora $\langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$ e $p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle$
(sottospazio generato da S)

Dimostrazione

$$v_0 = \overrightarrow{pq} \quad v_0 \in H_p \quad -v_0 = \overrightarrow{qp} \in H_q$$

$$H_p \ni \overrightarrow{px} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} = v_0 + \overrightarrow{qx} \in \langle H_q \rangle$$

$$H_p \subseteq \langle H_q \rangle \Rightarrow \langle H_p \rangle \subseteq \langle H_q \rangle$$

$$H_q \ni \overrightarrow{qy} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{py} \in \langle H_p \rangle \Rightarrow \langle H_q \rangle \subseteq \langle H_p \rangle$$

$$\text{Quindi } \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$\overrightarrow{pq} \in \langle H_p \rangle = \langle H_q \rangle$$

$$p + \langle H_p \rangle = q + \langle H_q \rangle$$

□

Nomenclatura 1

Σ_1, Σ_2 sottospazi affini

$$\Sigma_1 \vee \Sigma_2 := \text{sottospazio generato da } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Lemma 2

Siano $\Sigma_i = p_i + W_i$, $i = 1, 2$ sottospazi affini. Allora

- (a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2$
- (b) $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle)$

Dimostrazione

(a) $p_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ allora $\Sigma_1 = p_0 + W_1$ $\Sigma_2 = p_0 + W_2$

$\exists w_i \in W_i$, $i = 1, 2$ t.c.

$p_1 = p_0 + W_1$, $p_2 = p_0 + W_2$

$\overrightarrow{p_1 p_2} = w_2 - w_1 \in W_1 + W_2$

Viceversa, se $\overrightarrow{p_1 p_2} = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$

$p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1 p_2} = p_1 + w_1 + w_2$ (2) Dato $x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, risulta

$\overrightarrow{p_1 x} \in W_1$ se $x \in \Sigma_1$

oppure

$$\overrightarrow{p_1 x} \in \overrightarrow{p_1 p_2} + W_2 \quad (\overrightarrow{p_1 x} = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 x}).$$

Dunque la giacitura di $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ è

$$W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle.$$

□

3 Posizioni Reciproche di sottospazi affini

Definizione 1

Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di (A, V) di giacitura rispettivamente W_1, W_2

Diciamo che

- 1) Σ_1, Σ_2 sono **incidenti**, se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$
- 2) Σ_1, Σ_2 sono **parallelî** se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$
- 3) Σ_1, Σ_2 sono **sghembi** se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Osservazione

Queste posizioni non sono mutuamente esclusive e non costituiscono tutte le possibilità

4 Esercizi Elementari

Esercizio 1

Dire se $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene alla retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Svolgimento**
Scriviamo l'equazione parametrica della retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \end{cases}.$$

alternativamente avrei potuto cercare le coordinate cartesiane

Esercizio 2

Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + s \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Esercizio 3

Scrivere equazioni per il piano identificato dalla retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e dal punto } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

modo 1, scelgo due punti distinti sulla retta e riduco al punto precedente

$$\text{modo 2, sia } q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

considero il piano $P = q + tv + s\overrightarrow{Oq}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1-1 & x_2-2 & x_3-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x_1-1) - (x_3-3) = 0$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

Fascio di piani di asse una retta r è l'insieme dei piani che contengono r

$$r = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \end{cases}.$$

Equazione del fascio

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ogni piano del fascio si ottiene con una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Coppie proporzionali per un fattore non nulla invidiano lo stesso piano

Lezione 4 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-16

1 Formula di Grassmann affine

Richiami dalla scorsa lezione

Dati $\Sigma_i = p_i + W_i$, $i = 1, 2$ sottospazi affini (di $(A, V, +)$) allora:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 + W_2. \\ \Sigma_1 \vee \Sigma_2 &= p_1 + (W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle).\end{aligned}$$

Inoltre Σ_1, Σ_2 si dicono:

incidenti se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$

parallelî se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

sghembi se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Proposizione 1 (Fromula Grassmann per spazi affini)

Siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di A . Allora

$$\dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) \leq \dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 - \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

*e vale l'uguaglianza se Σ_1, Σ_2 sono incidenti o sghembi
si usa la notazione $\dim(\emptyset) = -1$*

Dimostrazione

- Supponiamo Σ_1, Σ_2 incidenti, allora esiste

$$\begin{aligned}p_0 &\in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \Sigma_1 &= p_0 + W_1, \Sigma_2 = p_0 + W_2 \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 &= p_0 + W_1 \cap W_2, \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = p_0 + W_1 + W_2\end{aligned}$$

dunque vale l'uguaglianza per Grassman vettoriale

- Sia ora $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ allora $\Sigma_i = p_i + W_i$ $i = 1, 2$
risulta $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin W_1 + W_2$ (per lemma)

$$\begin{aligned}\dim(\Sigma_1 \vee \Sigma_2) &= \dim(W_1 + W_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle) = \dim(W_1 + W_2) + 1 \leq \\ &\leq \dim(W_1) + \dim(W_2) - (-1) = \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)\end{aligned}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2)$ ovvero
 $W_1 \cap W_2 = 0$ ovvero se Σ_1, Σ_2 sono sghembi $\square \quad \square$

Proposizione 2

siano Σ_1, Σ_2 sottospazi affini di $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ definiti dai sistemi lineari

$$A_i X = b_i \quad i = 1, 2.$$

Allora:

(a) Σ_1, Σ_2 sono incidenti se e solo se

$$\text{rk} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array} \right) = \text{rk} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right).$$

detto r tale range, $\dim(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = n - r$

(b) Σ_1, Σ_2 sono sgombri se e solo se

$$\text{rk} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array} \right) \geq \text{rk} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = n.$$

(c) Se

$$\text{rk} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array} \right) \geq \text{rk} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = r < n.$$

allora Σ_1 (rispetto a Σ_2) contiene un sottospazio affine di dimensione $n - r$ parallelo a Σ_2 (rispetto a Σ_1)

Dimostrazione

(a) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ il sistema è compatibile quindi tutto segue da Rochè-Capelli

(b) la disegualanza tra i ranghi dice che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;

il fatto che $\text{rk} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = n$ implica che $W_1 \cap W_2 = 0$

(c) Di nuovo la disegualanza dei ranghi implica $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$;

Se ora $W_1 \cap W_2 = W$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = n - r$

Scelto $p_1 \in \Sigma_1$ risulta

$p_1 + W \subset \Sigma_1$ ($W_1 \cap W_2 = W$ sottospazio di W_1)

e $W \subset W_2 \Rightarrow p_1 + W$ è parallelo a Σ_2 e $\dim(p_1 + W) = \dim(W) = n - r$ \square \square

Esempio

$\mathbb{A} \pi_1, \pi_2$ piani distinti

A_1, A_2 vettori riga ($A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$)

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

piani distinti $\Rightarrow \text{rk}(C) = 2$

$$\text{rg} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \text{ è una retta}$$

$$\text{rg} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right) = 1 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \text{ piani paralleli poiché } W_1 = W_2$$

\mathbb{A}^4 , $\pi_1\pi_2$ piani distinti tali che $rk(A_i|b_i) = 2$

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{45} \quad rk(C) \leq 4.$$

$rk \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$	$rk(C)$	$\pi_1 \cap \pi_2$
4	4	{p}
3	4	\emptyset e W_1, W_2 hanno una direzione in comune
3	3	r
2	3	\emptyset

Lezione 5 Geometria I

ebbene sì, sta accadendo davvero

Federico De Sisti

2024-03-17

V, V' spazi vettoriali su \mathbb{K} , $(A, V, +)$, $(A', V', +)$ spazi affini

Definizione 1

$f : A \rightarrow A'$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \rightarrow V'$ tale che:

$$f(p + v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{ovvero} & f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \\ & \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

Nomenclatura

Se f è biunivoca, f è detto isomorfismo affine

Un isomorfismo affine $A \rightarrow A$ è detto affinità. **Oss**

vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come $\text{Aff}(A)$

Esempio

$Ov_1 \dots v_n$ riferimento affine in A

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Dico che f è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$$

$$\varphi(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

3 Esempi di affinità

I Transazioni

Fissato $v \in V$ definiamo

$t_v : A \rightarrow A$, $t_v(P) = p + v$ Dico che t_v è un'affinità con associato isomorfismo Id_V dato che:

$$t_V(p + w) = (p + w) + v = p + (w + v) = p + (v + w) = (p + v) + w = t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V$$

la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto

$$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$$

Dico che σ_C è un'affinità con parte lineare $\varphi = -Id$

$$\sigma_C(p+v) = c - \overrightarrow{CQ} \quad Q = p + v \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

$$\sigma_C(p) + \varphi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$$

III Oretia di centro O e fattore $\gamma \in R \setminus \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma \overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare $\phi = \gamma Id_V$

$$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O + \gamma \overrightarrow{OQ} = O + \gamma(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = (O + \gamma \overrightarrow{OP}) + \gamma \overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) + \gamma \overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) + \varphi(v)$$

Lemma 1

Fissato $O \in \mathbb{A}$, per ogni $O' \in \mathbb{A}$ e per ogni $\varphi \in GL(V)$ esiste un'unica affinità tale che $f(O) = O'$ e che ha φ come isomorfismo associato

Dimostrazione

esistenza

$$Pongo f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + O = O'$$

$$f(p+v) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p) + \varphi(v)$$

dove abbiamo usato $Q = p + v \quad v = \overrightarrow{PQ}$

unicità

Supponiamo che g abbia le stesse proprietà di f , allora

$$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = g(O)\overrightarrow{g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$$

$$\Rightarrow f = g$$

□

Definizione 2

Definiamo $Aff_O(A) = \{f \in Aff(A) | f(O) = O\} \leq Aff(A)$

tale gruppo è anche isomorfo a $GL(V)$

Lemma 2

Sia $O \in A$, $f \in Aff(A)$. Esistono $v, v' \in V$ e $g \in Aff_O(A)$, univocamente determinate da f tale che

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

Dimostrazione

$$poniamo v = -\overrightarrow{Of^{-1}}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v}, \quad g' = t_{-v} \circ f$$

Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_v) = f.$$

quindi vale $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che $g = g'$, per cui ho dimostrato anche $f = t_{v'} \circ g$

$$\begin{aligned} g(O) &= (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) = \\ &= f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0 \\ g'(O) &= t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0. \end{aligned}$$

d'altra parte g, g' hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi O in O , dunque coincidono \square **Descrizione in coordinate delle affinità di \mathbb{A}^n**

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$\begin{aligned} b &= f(O) \quad \varphi = L_A \quad L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ &\quad X \rightarrow AX \end{aligned}$$

con $\det(A) \neq 0$ ovviamente

Viceversa, per $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$ è un'affinità con parte lineare L_A

$$\begin{aligned} f_{A,b}(x + v) &= f_{A,b}(x) + \varphi(v) \\ f_{A,b}(x + y) &= f_{A,b}(x) + L_A y \end{aligned}$$

$$f_{A,b}(x + y) = A(x + y) + b = AX + AY + b = (AX + b) + AY = f_{A,b}(x) + L_A(y).$$

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n) = \{f_{A,b} \mid A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

Osservazione

$\text{Aff } \mathbb{A}^n$ è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX + d) = \\ &= A(CX + d) + b = \\ &= ACX + Ad + b = f_{AC,Ad+b}(x) \end{aligned}$$

Osservo che $f_{I,O}$ è l'elemento neutro

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) &= f_{A,b}(Ix + O) = f_{A,b}(x) \\ (f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) &= f_{A,b}(x) \end{aligned}$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di $f_{A,b}$,
ovvero che esiste $f_{C,d}$ tale che $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned}
& (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) = f_{I,O}(x) = x \\
& ACX + Ad + b + X \quad \forall X \in \mathbb{K}^n \\
& \Rightarrow AC = Id \quad Ad + b = 0 \\
& C = A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\
& (f_{A,b})^{-1} = f_{A^{-1}, -A^{-1}b}
\end{aligned}$$

Lezione 6 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-13

1 Equivalenza per affinità

Definizione 1

Equivalezza per affinità Due sottoinsiemi $F, F' \subseteq A$ spazio affine, si dicono affinamente equivalenti se esiste $f \in \text{Aff}(A)$ tale che $f(F) = F'$
*Definiamo anche una proprietà **affine** se è equivalente per affinità*

Proposizione 1

Se $f \in \text{Aff}(A)$ e F un sottospazio affine di A di dimensione k , allora $f(F)$ è un sottospazio affine di dimensione k

Dimostrazione

$F = p + W$ $\dim(W) = k$ Sia φ la parte lineare di f , che è un omomorfismo $\varphi : V \rightarrow V$.

Poniamo $F' = f(p) + W'$ dove $W' = \varphi(W)$
 Chiaramente, $\dim(W') = \dim(\varphi(W)) = k$
 risulta $f(F) = F'$

$$Q \in F \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che $\overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow f(F) \subseteq F'$ Viceversa, dato $R \in F$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^{-1}(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque $F \subseteq f(F)$

□

Teorema 1

Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e siano $\{p_0, \dots, p_n\}$, $\{a_0, \dots, a_n\}$ due $(n+1)$ -ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità $f \in \text{Aff}(A)$ tale che $f(p_i) = q_i$, $0 \leq i \leq n$

Dimostrazione

Per ipotesi $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}\}$ Sono basi di V , dunque esiste un unico operatore lineare $\varphi \in GL(V)$ tale che $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i}$ $1 \leq i \leq n$

Pongo $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$

$$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$$

$$f \text{ è chiaramente biettiva } \overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) = \\ = \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(pp')$$

L'unicità di f segue da quella di φ e dal fatto che $f(p_0) = q_0$ (un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto). □

Esempio

Determino $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^2)$ t.c.

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\} \rightarrow \{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}\}$$

Cercherò quindi $\varphi \in GL(V)$ tale che

$$\varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}, \varphi(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{q_0q_2}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \\ P &= \left\{\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\} \quad \varepsilon\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\} \\ [\varphi]_B^\varepsilon &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right) \quad [Id]_B^\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ [\varphi]_\varepsilon^\varepsilon &= [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_\varepsilon^B = [\varphi]_B^\varepsilon [Id]_B^{\varepsilon^{-1}} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right) \left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}\right) \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}\right) \left(\begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2-1 \end{pmatrix}\right) \\ f(p) &= q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p}) \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}\right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (t_V \circ L_A)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \quad v = \left(\begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Corollario

$(A, V, +)$ spazio affine di dimensione n

1. per ogni $1 \leq k \leq n+1$ due qualsiasi k -uple di punti sono affinamente equivalenti
2. Due sottospazi affini sono affinamente equivalenti se e solo se hanno al stessa dimensione

Dimostrazione

1. Se $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}, \{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ sono le k -uple date, completiamole a $(n+1)$ -uple di punti indipendenti $\{p_0, \dots, p_n\}, \{q_0, \dots, q_n\}$ e usiamo il teorema 2. Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi. Viceversa, se S, S' sono sottospazi affini della stessa dimensione k , possiamo trovare $k+1$ punti indipendenti in S , e $k+1$ punti indipendenti in S' tali che

$$S = \overrightarrow{p_0, \dots, p_k}, \quad S' = \overrightarrow{q_0, \dots, q_n}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda P_i in q_i , $0 \leq i \leq k$, dunque

$$f(S) = S'.$$

□

2 Proiezioni e Simmetrie

Definizione 2 (Proiezioni e Simmetrie)

In $(A, V, +)$ Sia L un sottospazio affine, $L = P + W$

Sia U un complementare di W in V , ovvero $V = W \oplus U$

$$\pi_W^U(w + u) = w \quad \pi_W^U : V \rightarrow V$$

$$\sigma_W^U(w + u) = w - u \quad \sigma_W^U : V \rightarrow V$$

$p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\vec{px})$ proiezione su L parallela a U

$s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\vec{px})$ simmetria di asse L e direzione U

Lezione 7 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-14

1 Esercizi Vari

Piccola definizione per esercizio

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \text{ Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n) = \{f_{a,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}$$

$$f_{A,b}(X) = AX + b$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right)$$

Esercizio 1

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

$$f \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \quad f \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$\varphi(e_1) = e_1 + e_3, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2$$

e chiamiamo

$$p_0 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right), \quad q_0 = \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \quad p_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right), \quad q_1 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right)$$

Dove φ è la parte lineare di f .

Trovare l'espressione di f in coordinate affini canoniche
e trovare i punti fissi di f .

Svolgimento

$$\varphi \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \varphi(\overrightarrow{p_0 p_1}) = \overrightarrow{q_0 q_1}$$

$$\varphi \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right)$$

$$\varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$$

$$\varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) - \varphi \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

Se $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la stessa base standard di \mathbb{R}^3

$$[\varphi]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

$$f \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 \end{array} \right)$$

$$f \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$f \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_1 + x_2 - 1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{array} \right)$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che $F(p) = f(p_0) + \varphi(\vec{p_0}\vec{p}) = q_0 + \varphi(\vec{p_0}\vec{p})$
Cerchiamo ora i punti fissi

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2

Dimostrare che un'affinità di piano affine che ha tre punti fissi non allineati è l'identità

Svolgimento

Osservo che in un piano affine tre punti p_0, p_1, p_2 sono non allineati se e solo se $\vec{p_0}\vec{p_1}, \vec{p_0}\vec{p_2}$ sono linearmente indipendenti, ovvero p_0, p_1, p_2 sono affinamente indipendenti. D'altra parte, un'affinità è univocamente determinata dall'immagine di tre punti indipendenti. L'identità è un'affinità con (almeno) tre punti fissi. Per l'unicità si ha $f = Id$.

Esercizio 3

In $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ consideriamo la retta $r : x + y = 1$

- i. Determinare le affinità che fissano tutti i punti di r
- ii. Tra le affinità determinate in (i), trovare quelle che mandano $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix})$ in $(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix})$
- iii. Tra le affinità determinate in i, trovare le traslazioni

Svolgimento

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0.$$

Basta scegliere $f(p) = p$ per due punti distinti $p \in r$. Posso scegliere $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} a + \alpha = 1 \\ c + \beta = 0 \\ d + \alpha = 0 \\ d + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - \alpha \\ b = -\alpha \\ c = -\beta \\ d = 1 - \beta \end{cases} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha\beta = 1 - \alpha - \beta \neq 0 \quad \alpha + \beta \neq 1$$

ii $\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ -\beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1 - -3\alpha + \alpha = 2 \\ -\beta + 3 - 3\beta + \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3\alpha = 1 \\ -3\beta = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases}$$

iii $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta & 1-\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -\beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$
e quindi l'unica traslazione è l'identità

Nota

$$f_{A,b} = AX + b \quad f_{A,b} \circ f_{C,b} = f_{AC,Ad+b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{K}) \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ad + b & AC \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ b_1 + a_{11}d_1 + a_{12}d_2 & & & a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ b_2 + a_{21}d_1 + a_{22}d_2 & & & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

$$\text{In } \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^4 \quad L : \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

Scrivere le matrici delle proiezioni su L parallela a W e la matrice della simmetria di asse L e direzione W

Svolgimento

$$L = P + W_1 \quad V = W_1 \oplus W_2$$

$$p_L^{W_2}(X) = P + \pi_L^{W_2}(\vec{px}) \quad \text{Cerco ora l'equazione parametrica di } L$$

$$s_L^{W_2}(X) = P + \sigma_L^{W_2}(\vec{px})$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ V + W : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Qui il professore utilizza la sacra formula di Antani per giungere al seguente risultato

$$\gamma = -2 + x_1 - 2x_3$$

$$\delta = -2 + 2x_2 + x_4 \quad p_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & - & -2 \end{array}$$

$$s_L^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & 5 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{array}$$

Lezione 8 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-18

1 Complementi

\mathbb{A} spazio affine reale con associato spazio vettoriale V

Definizione 1 (Semiretta)

Possiamo definire la semiretta di origine $Q \in \mathbb{A}$ e direzione $v \in V \setminus \{0\}$

$$P = Q + tv, t \geq 0 \quad (\overrightarrow{QP} = tv, t \geq 0).$$

Definizione 2 (Segmento)

Possiamo definire il segmento di estremi $A, B \in \mathbb{A}$ ($A \neq B$)

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

i punti p_1, \dots, p_t che dividono il segmento AB in t parti uguali sono dati, cioè

$$\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_3} = \dots = \overrightarrow{p_{t-1}B}.$$

sono dati da

$$\overrightarrow{AP_i} = \frac{i}{t}\overrightarrow{AB} \quad 1 \leq i \leq t-1.$$

In un riferimento affine $Oe_1 \dots, e_n$, in cui

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \\ &\begin{pmatrix} x_1^i - a_1 \\ \vdots \\ x_n^i - a_n \end{pmatrix} = \frac{i}{t} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}. \\ &\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} ib_1(t-i)a_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

in particolare, il punto medio del segmento AB ha coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

A, B, C non allineati

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

se $t, n \geq 0$ e $t + n \leq 1$ allora abbiamo un triangolo ABC

se $0 \leq t, n \leq 1$ abbiamo il parallelogramma individuato da A, B, C

Osservazione

Questo procedimento funziona in ogni dimensione, Ad esempio se A,B,C,D sono quattro punti indipendenti

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}.$$

se $0 \leq t, n, v \leq 1$ tetraedro di vertici ABCD

se $n, t, v \geq 0$ e $n + t + v \leq 1$ si ha un parallelogramma
in generale dati p_0, \dots, p_k punti indipendenti:

$$\overrightarrow{p_0p} = \sum_{i=1}^k t_i p_0 p_i, \quad \sum_{i=1}^k t_i \leq 1.$$

definisce il **k -simplesso di vertici** p_0, \dots, p_k

Definizione 3 (Sottosime Convesso)

$S \subseteq \mathbb{A}$ si dice Convesso se per ogni $A, B \in S$ il segmento AB è contenuto in S

2 Cambiamenti di riferimento affine

Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine n -dimensionale

$$R = Ee_1, \dots, e_n; \quad R' = Ff_1, \dots, f_n \quad \text{due riferimenti affini.}$$

$$\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$\overrightarrow{EP} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \overrightarrow{FE} = \sum_{i=1}^n b_i e_i \quad \overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^n y_i f_i.$$

$$A = (e_{ij}) = {}_{\varepsilon}(Id_V)_{\Gamma}.$$

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EP} = -\sum_{i=1}^n b_i e_i + \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (1)$$

$$\overrightarrow{FP} = \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1, j=1}^n y_i a_{ij} - e_i \quad (2)$$

Comparando (1), (2) troviamo

$$X = AY + b.$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ Y \end{array} \right).$$

$$Y = A^{-1}X - A^{-1}b.$$

3 Esercizi

Trovare l'affinità $F : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad f(r) = r', \quad f(s) = s.$$

dove $r : x = 0, \quad s : 2x - y = 0 \quad r' : x - 2y = 1$

f è del tipo $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right)$ con $ad + bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \quad \left(\frac{1}{f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & a & b \\ \alpha_2 & c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

Imponiamo le condizioni del testo

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{cases} a + \alpha_1 + 3b = 1 \\ \alpha_2 + c + 3d = 1 \end{cases}.$$

Un punto in $r(x_1 = 0)$ è del tipo $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) \in r \quad \forall t \in$

$$\left(\begin{pmatrix} 1+bt \\ \alpha_2+dt \end{pmatrix}\right) \in r'.$$

$$x_1 - 2x_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + bt - 2(\alpha_2 + dt) = 1 \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1.$$

$$b - 2d = 0.$$

Sicuramente il punto di S ha coordinate

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}\right), \quad \text{e imponiamo } f\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}\right) \in s \\ &f\left(\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1+at+2bt \\ \alpha_2+ct+2dt \end{pmatrix}\right) \\ &2(\alpha_1 + at + 2bt) = \alpha_2 + ct + 2dt \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - alpha_2 = 0 \\ 2a + 4b - c - 2d = 0 \end{cases} \\ &a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{2}{3} = c, \quad d = \frac{1}{3}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{3} \\ &f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}c_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \left< \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \right> \quad \pi_2 : \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \left< \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right>.$$

Dire se sono incidenti, paralleli o sghembi

$$\pi_1 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Dalle equazioni cartesiane è chiaro che $pi_1 \cap pi_2 = \emptyset$, quindi $\pi_1\pi_2$ non sono incidenti la giacitura di π_1, π_2 sono $W_1 = e_1 + e_2$, $W_2 = e_1 + e_2$
dunque **APPUNTI DA RECUPERARE**

$$f : A \rightarrow A$$

$$\begin{array}{cc} R_1 & R'_1 \\ R_2 & R'_2 \end{array}$$

$$[f]_{R_1}^{R'_1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right).$$

$$[f]_{R_2}^{R'_2} = [Id]_{R'_1}^{R_2} [f]_{R_1}^{R'_1} [Id]_{R_2}^{R_1}.$$

Troviamo l'affinità che manda ordinatamente A, B, C in A', B', C' ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = \{A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}\}$ è un riferimento affine

$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}\}$ è un riferimento affine

$$[F]_{R_1}^{R_2} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$f(\overrightarrow{AB}) = \alpha \overrightarrow{A'B'} + \beta \overrightarrow{B'C'}.$$

$$R = \{(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\}.$$

$$[f]_R^R = [Id]_{R_2}^R [f]_{R_1}^{R_2} [Id]_R^{R_1}.$$

$$R_2 = \{A', \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\}\} = \{(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}), \{(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix})\}\}.$$

Quindi la matrice del cambio di base da R a R_2 è

$$[Id]_{R_2}^R = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Analogamente si fa con $R_1 = \{(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \{(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})\}\}$

4 Forme Bilineari e Simmetriche

V Spazio vettoriale su \mathbb{K}

Definizione 4

Una funzione $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Si dice **Forma bilineare** se è lineare in ciascuna variabile fissata l'altra

in altre parole:

$$g(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha g(v_1, v_3) + g(v_2, v_3) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Definizione 5

g si dice **simmetrica** se

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esempio

Sia A una matrice quadrata $n \times n$

$$\text{Allora } g_A(x, y) = X^t A Y.$$

è una forma bilineare su \mathbb{K}^n

Esempio

g_A è bilineare con

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = x_1(2y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + 3y_2) = \\ &= 2x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 \end{aligned}$$

Osservazione

g_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica

Esempio (Importante)

in \mathbb{K}^n prendiamo $A = I_n$

$$g_{I_m}(X, Y) = X^t Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Se g è una forma bilineare simmetrica su V e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , definisco la matrice di g rispetto a B come

$$[g]_B \rightarrow a_{ij} = g(v_i, v_j) \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_i g(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_i a_{ij} = X^t A Y.$$

Ricorda: X^t è la matrice trasposta di X

5 Prodotto Scalare

V spazio vettoriale Reale

Definizione 6 (Prodotto Scalare)

Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica
 $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Nomenclatura 1. 1. $v, w \in V$ si dicono **ortogonali** se

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

2. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ è la norma di v

3. In \mathbb{R}^n , $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ è detto **prodotto scalare standard**

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Proposizione 1 (Diseguaglianza di Schwarz)

$$v, w \in V \quad \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

e vale l'uguaglianza se e solo se v, w sono dipendenti

Dimostrazione

Se $w=0$ la diseguaglianza è ovvia, quindi possiamo assumere $w \neq 0$. Per $v, w, a, b \in$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle av + bw, av + bw \rangle = a \langle v, av + bw \rangle + b \langle w, av + bw \rangle = \\ &= a(a \langle v, v \rangle + b \langle v, w \rangle) + b(a \langle w, v \rangle + b \langle w, w \rangle)i = \\ &= a^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle v, w \rangle + b^2 \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la simmetria del prodotto scalare $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
Notiamo che vale l'uguaglianza solo se $av + bw = 0$, cioè v, w sono paralleli.

La relazione

$$a^2 \langle v, v \rangle + 2ab \langle v, w \rangle + b^2 \langle w, w \rangle \geq 0.$$

vale per ogni scelta di a, b .

Prendo $a = \langle w, w \rangle$ e $b = -\langle v, w \rangle$

$$0 \leq \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - 2 \langle w, w \rangle \langle v, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 \langle w, w \rangle.$$

Poiché $W \neq 0$, $\langle w, w \rangle > 0$ quindi posso dividere la relazione precedente per $\langle w, w \rangle$, per altro senza cambiare verso dato che il prodotto scalare è definito positivo

$$0 \leq \langle w, w \rangle \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

ovvero

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

□

Osservazione

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

Proprietà della lunghezza

1. $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Lezione 9 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-20

1 Rimembranze dalla scorsa lezione

V spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione bilineare simmetrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{aligned}\langle v, v \rangle &\geq 0 \quad \forall v. \\ \langle v, v \rangle = 0 &\Leftrightarrow v = 0.\end{aligned}$$

2 Nuova effettiva lezione

Dimostriamo alcune proprietà del prodotto scalare:

Lemma 1

1. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, v \in V$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Dimostrazione

1. segue dalla definizione
2. $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + 2 \langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
Ci basta ora prendere le radici quadrate del primo e del secondo termine (possiamo farlo poiché sono entrambi positivi) \square

Nomenclatura 1

- $v, w' \in V$ si dicono ortogonali se $\langle v, v' \rangle = 0$
- Un insieme S di vettori è detto ortogonale se

$$0 \in S \text{ e } \langle s_1, s_2 \rangle = 0 \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

- Una base di V si dice ortogonale se è un insieme ortogonale · Una base $\{v_i\}_{i \in I}$ si dice ortonormale se $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Definizione 1 (Versore)

Sia $v \in V$ tale che $\|v\| = 1$ allora v è un versore

Oss

Dat $u \neq 0$, $\frac{u}{\|u\|}$ è un versore

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1.$$

Proposizione 1

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme ortogonale allora v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti. In particolare se $\dim(V) = n$, un insieme ortogonale di n vettori è una base

Dimostrazione

$$\begin{aligned} & \text{Supponiamo } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \\ & \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0 \\ & = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle \\ & = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Dato che $\langle v_i, v_i \rangle > 0$ poiché $v_i \neq 0$ per ipotesi, dunque $\alpha_i = 0$, dato che posso scegliere qualunque v_i □

Osservazioni

1. La base standard di \mathbb{R}^n è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
2. Sia $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su V . Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g -ortonormale allora $[g]_B = Id_n$ ovvero $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$
Inoltre, se $X = [v]_B$, $Y = [Id]_B$
 $g(v, w) = X^t [g]_B Y = X^t Y$ (sempre con B ortonormale)

Proposizione 2

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, per ogni $v \in V$ risulta

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Dimostrazione

$$(1) \quad \text{Sia } v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$$

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_j v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ij} = a_i$$

Basta poi sostituire in (1) a_j con $\langle v, v_j \rangle$ □

Nomenclatura 2

Dato $v \neq 0$ viene detto coefficiente di Fourier di $w \in V$ rispetto a v

$$a_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Nota

In sostanza il coefficiente di Fourier è il modulo della proiezione di w rispetto a v (moltiplicato quindi per il versore di v otteniamo il vettore della proiezione)

Abbiamo quindi una definizione canonica della proiezione.

$$\langle w - a_v(w)v, v \rangle = \langle w - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \rangle = \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\leq v, v \geq}$$

3 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Lemma 2

Sia v_1, v_2, \dots una successione di vettori in V spazio vettoriale euclideo.
Allora:

1. Esiste una successione w_1, w_2, \dots in V tale che per ogni $k \geq 1$

$$a) \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle.$$

$$b) \quad \langle w_i, w_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

2. Se u_1, u_2, \dots è un'altra successione che verifica le proprietà a e b, allora esistono non nulli $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tali che

$$u_k = \gamma_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dimostrazione

Costruiamo i w_i per induzione su k .

Base $k = 1$

$$v_1 \rightarrow w_1 = v_1 \text{ verifica a, b.}$$

Supponiamo per induzione di aver costruito w_1, \dots, w_t , $t > 1$ verificanti a e b e costruiamo w_{t+1}

$$\phi w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

Verifichiamo a

$$v_{t+1} = w_{t+1} + \sum_{i=1}^t a_{w_i}(v_{t+1}) w_i.$$

per induzione $v_i \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \quad 1 \leq i \leq t$
dunque

$$\langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle.$$

D'altra parte $w_{t+1} \in \langle w_1, \dots, v_{t+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$ perché per induzione

$w_i \in \langle v_1, \dots, v_t \rangle \quad 1 \leq i \leq t$

Quindi $\langle w_1, \dots, w_{t+1} \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_{t+1} \rangle$ e quindi le proprietà a è verificata.

Verifichiamo ora b, sia $w_i \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle w_{t+1}, w_i \rangle &= \langle v_{t+1} - \sum_{j=1}^t a_{w_j}(v_{t+1}) w_j, w_i \rangle = \\ &= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - a_{w_j} \langle v_{t+1}, w_j \rangle, w_i \rangle = \\ &= \langle v_{t+1}, w_i \rangle - \frac{\langle v_{t+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

2. Di nuovo procedo per induzione su k , con base ovvia $k = 1$

Supponiamo $t > 1$ e apponiamo che esistano $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ con $u_k = \delta_k w_k$ per ogni $k \leq t$. per (a)

$$u_{t+1} = z + \gamma_{t+1} w_{t+1} \quad z \in \langle w_1, \dots, w_t \rangle = \langle u_1, \dots, u_t \rangle.$$

D'altra parte, $\langle u_{t+1}, z \rangle = \langle w_{t+1}, z \rangle = 0$

Quindi $\langle u_{t+1} - \gamma_{t+1} w_{t+1}, w \rangle = 0$ ovvero $\langle z, z \rangle$

$$\Rightarrow z = 0 \text{ e } u_{t+1} = \gamma_{t+1} w_{t+1}$$

□

Lezione 10 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-21

1 Utilizzo del procedimento di Gram Schmidt

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, V spazio euclideo
 $w_1 = v_1$

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \sum_{i=1, w_i \neq 0}^t \frac{\langle v_{t+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e i w_i sono a due a due ortogonali

Esercizio 1

Applicare il procedimento di G.S ai vettori di \mathbb{R}^4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere le corrispondente base ortonormale

Svolgimento

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} - \frac{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il procedimento è analogo e banale per w_4 .

I vettori della alla fine dello svolgimento sono:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vanno solo normalizzare (fatto dal professore ma non da me)

Esercizio 2

Ortogonalizzare la base standard di \mathbb{R}^4 rispetto al prodotto scalare

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + y_4x_3 + 2x_4y_4.$$

ε base standard i \mathbb{R}^4

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

Notare come a_{ij} sia il coefficiente di $x_i y_j$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 - \frac{v_2^t A w_1}{w_1^t A w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il procedimento continua, ma non è niente di che.

Foglio 2**Esercizio 2**

$$p_1, \dots, p_n \in A, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Dimostrare che dato qualunque $q \in A$

$$p = q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i}.$$

non dipende da q

$\sum_{i=1}^n c_i p_i$ combinazione baricentrica dei punti p_i con coefficienti c_i
Dobbiamo dimostrare che se $q' \in A$

$$q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} = q' + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{q'p_i}.$$

$$\begin{aligned} q &= q' + \overrightarrow{q'q} \\ q + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} &= q' - \overrightarrow{q'q} + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{qp_i} = q' - \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{q'p_i} = q' - \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{q'p_i} \end{aligned}$$

non sono riuscito a finire l'esercizio in tempo pene pene TODO

Punto b dell'esercizio 3

$f : A \rightarrow A'$, $\varphi : V \rightarrow V'$ parte lineare

Devo vedere che $f(\sum_{i=1}^n c_i p_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i)$ $\sum_{i=1}^n c_i = 1$

$$\begin{aligned} f(p_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{p_0 p_i}) &= f(p_i) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \\ &= f(p_0) + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} = \sum_{i=1}^n c_i f(p_i) \\ &= (1 - \sum_{i=1}^n c_i) f(p_0) + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si spezza la somma

Viceversa supponiamo che $f : A \rightarrow A'$ rispetti le combinazioni baricentriche; verifichiamo che $\varphi : V \rightarrow V'$

$$p_0 \in A \quad \varphi(v) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v)}.$$

è lineare

$$v_1, v_2 \in V \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad p_1 = p_0 + v_1 \quad p_2 = p_0 + v_2$$

$$v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1} \quad v_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} = \\ &= \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \alpha_2 \overrightarrow{p_1 p_2})} = \\ &\xrightarrow{\quad f(p_0) f(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) =} \\ &= \alpha_0 \overrightarrow{f(p_0) f(p_0)} + \alpha_1 \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{f(p_0) f(p_2)} = \alpha_2 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2) \end{aligned}$$

$$\text{infatti } f(p_1) = f(p_0 + v_1), \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + v_1)} = \varphi(v_1)$$

Lezione 11 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Varie robe su basi ortonormali

Proposizione 1

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale dello spazio euclideo V , la base $L = \{w_1, \dots, w_n\}$ è ortonormale se e solo se $M = [Id_V]_L^B$ è ortogonale ($MM^t = Id_v$)

Dimostrazione

Sia $M = (m_{ij})$ per definizione di M $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji}v_j$ $1 \leq i \leq n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n m_{ki}v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj}v_h \right\rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki}m_{hj}\langle v_k, v_h \rangle = \sum_{k=1}^n m_{ki}m_{kj} = (M^t M)_{i,j}.$$

□ Osservazione

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ è un prodotto scalare

Definizione 1 (Angolo non orientato tra vettori)

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \quad (v, w \neq 0)$$

allora

$$\exists! \in [0, \pi] : \cos = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

è detto angolo non orientato tra v, w

Definizione 2

Sia $S \subseteq V$ con V spazio euclideo, $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Osservazione

S^\perp è un sottospazio vettoriale di V .

Siano $v_1, v_2 \in S^\perp$ e $\alpha_{1,2} \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v_1, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$$

Proposizione 2

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e W un sottospazio di V allora

$$V = W + W^\perp$$

Dimostrazione

Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortogonale di W consideriamo $\pi : V \rightarrow W$ con $\pi(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$, dobbiamo mostrare che $V = W + W^\perp$ e che $W \cap W^\perp = \{0\}$ ma la seconda è ovvia poiché se $w \in W \cap W^\perp$ è ortogonale a se stesso $\Rightarrow \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$
Osserviamo inoltre che se $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ la richiesta è dunque $v - \pi(v) \in W^\perp$. Basta verificare che $\langle v - \pi(v), w_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0.$$

□ Osservazione

1- Se V è spazio euclideo e W è sottospazio di V , $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W})$ è uno spazio euclideo

2- Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è base ortogonale di W risulta:

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $a_h = \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle}$

Dimostrazione (Punto 2)

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|;$$

$$\|v - w\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle =$$

$$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u \rangle = \langle v - w, v - w \rangle + \langle w - u, w - u \rangle \geq \|v - w\|^2$$

□ La lezione prosegue con lo svolgimento di alcuni esercizi

2 Prodotto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo per cui $\dim(V) = 3$ sia $\{v, j, k\}$ una base ortonormale di V

Definizione 3 (Prodotto vettoriale)

$$\text{Dati } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ pongo } v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

B_1, B_2 si dicono concordemente orientate se $\det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$, questa è inoltre una relazione di equivalenza.

$$\begin{aligned} \text{Di fatti se } B_1 &\sim B_2, \quad B_2 \sim B_3 \quad \det([Id]_{B_1}^{B_3}) = \det([Id]_{B_2}^{B_3} [Id]_{B_1}^{B_2}) = \\ &= \det([Id]_{B_2}^{B_3}) \det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_2 \end{aligned}$$

Lezione 12 Geometria

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Operatori Lineari Unitari

Sia V uno spazio vettoriale euclideo

Definizione 1

Un operatore lineare $T : V \rightarrow V$ si dice unitario se $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$

Proposizione 1

Sia V spazio vettoriale euclideo $n-$ dimensionale e sia $T : V \rightarrow V$ un applicazione, TFAE (The Following Are Equivalent)

1. T è unitario
2. T è lineare e $\|T(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$
3. $T(O) = O, \|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in V$
4. T è lineare e manda basi ortonormali in basi ortonormali
5. T è lineare ed esiste una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale di V tale che $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ è una base ortonormale

Dimostrazione

$$1 \Rightarrow 2. \text{ Unitario} \Rightarrow \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2 = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$$2 \Rightarrow 3. T \text{ lineare} \Rightarrow T(O) = O \quad \|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| = \|v - w\|$$

$$3 \Rightarrow 1. \|T(v)\| = \|T(v) - O\| = \|T(v) - T(O)\| = \|v - O\| = \|v\|$$

$$\text{Esplicitiamo } \|T(v) - T(w)\|^2 = \|v - w\|^2$$

$$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle$$

$$\Rightarrow \|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

Dunque $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$

Resta da vedere che T è lineare.

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V allora $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale per quanto dimostrato prima.

$$\langle T(e_j), T(e_i) \rangle = \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (\Rightarrow x_i = \langle v, e_i \rangle)$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \langle T(v), T(e_i) \rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i)$$

$$\text{Dunque } T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \text{ quindi } T \text{ è lineare}$$

$1 \Rightarrow 4. \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

$4 \Rightarrow 5$ Ovvio

$5 \Rightarrow 1$ Sia e_1, \dots, e_n la base ortonormale dell'enunciato. Considero $u, v \in V$

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(w) \rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), T\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{j=1}^n y_j T(e_j) \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \delta_{ij}$

□

$$\alpha \in V\{0\} \quad S_\alpha = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \text{ riflessione rispetto ad } \alpha^2$$

1. S_α è unitaria
2. $S_\alpha^2 = Id$
3. Esiste una base B di V tale che $(S_\alpha)_B = diag(1, \dots, 1, -1)$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} 1. \quad &\langle S_\alpha(v), S_\alpha(w) \rangle = \langle v, w \rangle \\ &\langle v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, w - 2 \frac{\langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \rangle = \\ &\langle v, w \rangle - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle \alpha, w \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 4 \frac{\langle v, \alpha \rangle \langle w, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle} \cancel{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp.$$

Quindi presa una base $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ di α^\perp ,

$B = \{w_1, \dots, w_{n-1}, \alpha\}$ è una base di V e

$S_\alpha(w_i) = w_i, i = 1, \dots, n-1$

$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$

$$(S_\alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

In particolare $S_\alpha = Id$ poiché $M^2 = Id$

□

2 Osservazioni sugli operatori unitari

- Se T è unitario, e $v \in Ker(T)$, allora

$$0 = ||T(v)|| = ||v|| \Rightarrow v = 0.$$

Dunque T è invertibile.

È facile vedere che se T_1, T_2 sono unitarie, lo è anche $T_1 T_2^{-1}$, quindi, posto

$$O(V) = \{T \in End(V) | T \text{ è unitario}\}.$$

$$O(V) \leq GL(V).$$

e $O(V)$ viene chiamato gruppo ortogonale di V .

- Se fissiamo in V una base ortonormale B , e $T \in O(V)$, $[T]_B^B$ è ortogonale.
Infatti sia $A = [T]_B^B$, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Le colonne di A sono le coordinate di $T(e_i)$ rispetto a B , quindi T è unitario se e solo se

$$\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}.$$

dove A^i, A^j rappresentano la riga i -esima e j -esima della matrice A

- Se $T \in O(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T , allora $\lambda = \pm 1$
Se λ è autovalore, esiste $v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$

$$||v|| = ||T(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Poiché $v \neq 0, ||v|| \neq 0$ quindi $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

- Se V è uno spazio euclideo di dimensione n , ogni $T \in O(V)$ è composizione di al più n riflessioni S_n

Dimostrazione

per induzione su n , con base ovvia $n = 1$.

Supponiamo il teorema valga per ogni spazio euclideo di dimensione $n - 1$ e dimostriamo per uno spazio euclideo di dimensione n . Sia $f \in O(V)$

Primo caso

f ha un punto fisso non nullo

$$v \in V, \quad v \neq 0, \quad f(v) = v.$$

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^\perp.$$

$W = v^\perp$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W})$ è euclideo di dimensione $n - 1$
 $F|_W : W \rightarrow W$, infatti, se $u \in W$

$$\langle f(u), v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0.$$

Per induzione $f|_W = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$, $r \leq n - 1$
e quindi $f = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$, $r \leq n - 1$

Secondo caso

Sia $v \neq 0$ tale che $f(v) \neq v$. Allora

$$S_{f(v)-v}(f(v)) = v.$$

$$\text{Infatti } S_{f(v)-v}(f(v)) = f(v) - 2 \frac{\langle f(v), f(v) - v \rangle}{\langle f(v) - v, f(v) - v \rangle} (f(v) - v)$$

$$\text{Ma } = f(w) = +2 \frac{\langle f(v), f(v) - v \rangle}{\langle f(v) - v, f(v) - v \rangle} (v - f(v))$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } & \langle f(v), f(v) - v \rangle = \|v\|^2 - \langle f(v), v \rangle \\ & \langle f(v) - v, f(v) - v \rangle = 2\|v\|^2 - 2\langle f(v), v \rangle. \end{aligned}$$

Dunque $(S_{f(v)-v} \circ f)$ ha un punto fisso. Per il primo caso $S_{f(v)-v} \circ f = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$ $r \leq n - 1$

Dunque $S_{f(v)-v} \circ S_{f(v)-v} \circ f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \dots \circ S_{\alpha_r}$

$$\Rightarrow f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}$$

quindi f è composizione di al più n riflessioni □

3 Spazi affini euclidei

Uno spazio affine euclideo è uno spazio affine $(E, V, +)$ dove V è uno spazio euclideo.

Si può definire una distanza tra punti di E

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Un riferimento cartesiano per uno spazio affine euclideo è il dato $Oe_1 \dots e_n$ di un punto e di una base ortonormale di V

In particolare se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 2

Due sottospazi affini si dicono ortogonali se le loro giaciture sono ortogonali

(cioè se $S = P + U$, $T = Q + W$, $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall u \in U, \quad \forall w \in W$).

Lezione 14 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-04

1 Precisazione

Siano S, T sottospazi affini in uno spazio euclideo δ di dimensione n . Diciamo che S, T sono ortogonali se, posto $S = p + U$, $T = q + W$, $p \in S, q \in T$ U, W sottospazi vettoriali di V ,

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad \text{se } \dim(S) + \dim(T) < n.$$

$$\langle U^\perp, W^\perp \rangle = 0 \quad \text{se } \dim(S) + \dim(T) \geq n.$$

Esempi

1. Due rette r, s in \mathbb{E}^3 con vettori direttori v_s, v_r

COMPLETARE CON DISEGNI

2. retta e piano in \mathbb{E}^3

COMPLETARE CON DISEGNI

3. due piani in \mathbb{E}^3

COMPLETARE CON DISEGNI

sarò sincero, non si capisce un cazzo

2 Esercizi foglio 4

es 3

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad r' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Posizione reciproca

La direzione di r è $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quella di r' è $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Essendo tali vettori indipendenti, le rette non sono parallele

$$p' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in r', \quad O \in r$$

$$\overrightarrow{Op'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

quindi r, r' sono sghembi

$S = \pi \cap \pi'$ π piano per r parallelo a $v \wedge v'$

π' piano per r' parallelo a $v \wedge v'$

$$v \wedge v' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v \wedge v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\pi' : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

trasformiamo in coordinate cartesiane

$$\pi \rightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

analogo per π'

es 4

proiezione ortogonale su π

simmetria ortogonale di asse π

$$\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0.$$

vettore normale a π $P_0 \in \pi$

$$p(P) = P_0 + \tilde{p}(\overrightarrow{p_0P})$$

$$\sigma(P) = P_0 + \tilde{\sigma}(\overrightarrow{p_0P})$$

$$\text{scelgo } p_0 \in \pi \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W \text{ giacitura di } \pi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$$

$$\text{Dobbiamo decomporre } \overrightarrow{P_0P} \text{ rispetto a } W \oplus W^\perp \quad W^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo poi è solo un sistema noioso da risolvere

$$p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\text{guarda le lavagnate, è un super vettore}).$$

sulle lavagnate trovi anche il risultato della simmetria ma non lo svogliamento

es 5

Lezione 15 Geometria

Federico De Sisti

2024-04-08

1 Definizioni su operatori

Definizione 1

$T \in End(V)$ è

- Simmetrico o Autoaggiunto se

$$T = T^t.$$

- Antisimmetrico se

$$T = -T^t.$$

Proposizione 1

T è unitario se e solo se $T^t \circ T = Id_V$

Definizione 2

Sia E uno spazio euclideo. Un'affinità $f : E \rightarrow E$ si dice Isometria se la sua parte lineare $\varphi : V \rightarrow V$ è un operatore unitario

Osservazione

Le isometrie formano un gruppo denotato con $Isom(E)$ (difatti, $Isom(E) \leq Aff(E)$)

Infatti la composizione di isometrie è un isometria.

se φ_1, φ_2 sono le parti lineari di $f_1, f_2 \in Isom(E)$

Per ipotesi $\varphi_1 \circ \varphi_1 = Id$, $\varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^t \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_2^t \circ \varphi_1^t \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^t \circ \varphi_2 = Id.$$

Inoltre, dalla definizione, l'inversa di un operatore unitario è unitario.

In effetti, ho dimostrato che

$$O(V) = \{f \in End(V) | f^t \circ f = Id\}.$$

è un gruppo, e un sottogruppo di $GL(V)$

Data $f \in Isom(E)$ diciamo che:

f è diretta se $\det(\varphi) = 1$

f è inversa se $\det(\varphi) = -1$

Le isometrie dirette formano un sottogruppo

$$Isom^+(E) \leq Isom(E).$$

Osservazione

1. Sia $O \in E$

$$Isom^+(E)_O \leq Isom(E)_O = \{f \in Isom(E) | f(O) = O\} \leq Isom(E).$$

Dove $Isom^+(E)_O$ sono le rotazioni di centro O

2. Se nello spazio euclideo E è assegnato con riferimento cartesiano $R = Oe_1, \dots, e_n$, ogni isometria $f \in Isom(E)$ con parte lineare $\varphi \in O(V)$ si scrive in coordinate rispetto al riferimento nella forma

$$Y + AX + c \quad A \in O(n).$$

dove $p \in E$, $X = [P]_R$, $Y = [f(P)]_R$
 $A = [\varphi]_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e_1, \dots, e_n\}}$, $c = [f(O)]_R$

Teorema 1

Sia E uno spazio euclideo, Un'applicazione $f : E \rightarrow E$ è un'isometria se e solo se

$$\circledast d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \quad \forall P, Q \in E.$$

Dimostrazione

supponiamo che f sia un'isometria, con parte lineare φ

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q).$$

Viceversa se $f : E \rightarrow E$ un'affinità verificante l'equazione \circledast , fissiamo $O \in E$ e definiamo $\varphi : V \rightarrow V$ ponendo

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Poiché ogni vettore $v \in V$ è del tipo \overrightarrow{OP} per qualche $P \in E$, φ è definita, e tale che se \underline{O} è il vettore nullo in V

$$\varphi(\underline{O}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \underline{O}.$$

Inoltre se $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\| &= \|\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})\| = \\ &= \|\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)}\| = \|\overrightarrow{f(Q)f(P)}\| = \\ &= d(f(Q), f(P)) = d(Q, P) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|v - w\| \end{aligned}$$

Quindi, per una delle caratterizzazioni già dimostrate, φ è un operatore unitario.

Dimostro ora che f è un'affinità con parte lineare φ

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O) - f(Q)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

□

2 Isometrie di piani e spazi euclidei di dimensione 3

$$A \in SO(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che:} \quad \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

$a^2 + c^2 = 1 \rightsquigarrow a = \cos \theta, \quad c = \sin \theta$
 altre condizioni $\rightsquigarrow b = -\sin \theta, \quad d = \cos \theta$

Dunque

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che se $\det(A) = \det(B) = -1$ allora $\det(AB) = 1$, quindi se $A \in O(2) \setminus SO(2)$

$$A = (AB)B^{-1} = (AB)B^t.$$

con $B \in O(2) \setminus SO(2)$ fissato.

Scegliendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tutti gli elementi di $O(2) \setminus SO(2)$ sono del tipo

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Lemma 1

- 1) $A_\theta = R_\theta A_O = A_O R_{-\theta}$
- 2) $A_\varphi \circ A_\theta = R_{\varphi-\theta}$
- 3) A_θ ha autovalori 1 e -1 con autospazi ortogonali

Dimostrazione

1. ovvio
2. $A_\varphi A_\theta = R_\varphi A_O R_\theta A_O = R_\varphi A_O A_O R_{-\theta} = R_\varphi R_{-\theta} = R_{\varphi-\theta}$
3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_φ :

$$\det \begin{pmatrix} T - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & T + \cos \theta \end{pmatrix} = (T - \cos \theta)(T + \cos \theta) - \sin^2 \theta = T^2 - 1.$$

quindi A_θ ha autovalori 1. Si capisce direttamente che gli autospazi sono ortogonali. In realtà

$$V_1 = \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} \cos \theta - 1 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right), \quad V_{-1} = \left(\begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right).$$

□

Sia $c \in E$ $\sigma : E \rightarrow E$ rotazione di centro c .

La parte lineare di σ appartiene a $SO(2)$, quindi è del tipo R_θ . Se Oe_1e_2 è un riferimento cartesiano

$$R_{c,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ R_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OC}}.$$

riflessione: isometria diretta che fissa tutti i punti di una retta, detta asse di riflessione

Osservazione

Riflessioni per $O \Leftrightarrow O(w) \setminus SO(2)$

Lemma 2

1. $r \subset E$ retta, $C \in r$, $R_{C,\theta}$ rotazione di centro C . Esistono rette s, t contenenti C tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette r, s passanti per C $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro C e

$$\rho_r \circ \rho_s = Id \Leftrightarrow r = s.$$

2. $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ è una rotazione di angolo $\theta + \varphi$ a meno che $\theta + \varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, in tal caso è una traslazione che è diversa dall'identità se e solo se $C \neq D$

3. Se $C, D \in E$, $C \neq D$ e r è la retta per C e D . Se $R_{C,\theta}, R_{D,\varphi}$ sono non banali e $\theta + \varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ e $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\varphi}$ hanno centri destini e simmetrici rispetto ad r .

Lezione 15 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-10

1 Ultima Parte teorica prima del compito

$$O(2) = SO(2) \cup O(2) \setminus SO(2)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_\theta = R_\theta A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$

$$A_\theta A_\varphi = R_{\theta-\varphi}.$$

Definizione 1 (Riflessione)

Isometria che fissa puntualmente una retta (detta asse della riflessione)

E piano euclideo $C \in E, r \subset E$ retta $\exists s, t$ rette passanti per C tali che

$$R_{c,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

”e viceversa”

Possiamo fissare $c = 0$ $\rho_r = A_{o,\alpha}$. Allora

$$R_\theta = A_\alpha \circ A_{\alpha-\theta} = A_{\theta+\alpha} \circ A_\alpha.$$

dove $\rho_r = A_\alpha$ e $A_{\alpha-\theta} \equiv \rho_s$

Il viceversa segue, sostituendo $c \equiv 0$, da $A_\alpha \circ A_\beta = R_{\alpha-\beta}$

$$R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} \rightarrow \text{rotazione di angolo } \theta + \varphi \text{ Se } \theta + \varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

altrimenti è una traslazione (che è l'identità = D)

Se $C = D$ chiaramente $R_{C,\theta} \circ R_{C,\varphi} = R_{C,\theta+\varphi}$

Se $C \neq D$ sia r la retta per C e D Per la parte precedente possiamo scrivere

$$R_{C,\theta} = \rho_t \circ \rho_r, \quad R_{D,\varphi} = \rho_r \circ \rho_s.$$

per certe rette s, t

$$T = R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi} = \rho_t \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_s.$$

Se s, t sono incidenti allora per la parte precedente T è una rotazione, altrimenti $s \parallel t$

TODO disegno

In coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano Oe_1e_2 Se $P \equiv (\frac{x_1}{x_2})$

$$(R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi})(P) \quad \text{ha coordinate.}$$

$$R_\rho(R(x-d) + d - x) + x.$$

dove c, d sono i vettori delle coordinate di C, D rispettivamente

$$\underline{R_{\theta+\varphi}(x-d)} + R_\theta(d-c) + c$$

parte lineare

T è una translazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in tal caso

$$T(x) = x + R_\theta(d-c) = (d-c).$$

che è l'identità se e solo se $d = c$ cioè $D = C$

Definizione 2 (Glissoriflessione)

Una glissoriflessione è un'isometria di un piano euclideo ottenuta come composizione $t_v \circ \rho_r$ di una riflessione di asse r con una traslazione $t_v \neq Id$ con $v \neq 0, v \parallel r$

TODO disegno

Teorema 1 (Charles, 1831)

Un'isometria di un piano euclideo che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria senza punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa

Dimostrazione

Sia $f \in Isom(E)$

Se f ha un punto fisso abbiamo già visto che f è una rotazione se è diretta o una riflessione se f è inversa

se f diretta priva di punti fissi. Allora anche f^2 non ha punti fissi, perché se $f^2(p) = p$

Disegno TODO

Dunque $f(M) = M$ escluso.

Dico che $p, f(p), f^2(p)$ che sono distinti per quanto abbiamo visto, sono allineati, Altrimneti **Disegno TODO**

$$d(P, f(p)) = d(f(p), f^2(p)) \text{ (poichè } f \text{ è un'isometria).}$$

$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)).$$

Poiché f preserva l'orientazione, il triangolo $QPF(P)$ viene trasformato in $Q, f(P), f^2(P)$ da cui $f(Q) = Q$

Dunque tutti i punti $f^i(P)$, $i \geq 0$ sono allineati, quindi se r è la retta che li contiene, f agisce su r come una traslazione.

Poiché f è diretta, f agisce su tutto il piano come una traslazione.

Sia ora f inversa senza punti fissi,

Allora f^2 è diretta e come prima $f^2 = t_v$ per qualche v

Sia $P \in E$ un punto $r_0 = \overrightarrow{Pf^2(P)}$, $r_1 = \overrightarrow{f(P)f^2(P)}$
sono rette parallele che sono scambiate tra loro da f

Disegno TODO

Sia r la retta equidistante da r_0 e r_1 .

Allora $f(r) \subseteq r$ Ma $f^2 = t_v$ $f|_r = t_{v/2}$

Se ora consideriamo $t_{-v/2} \circ f$

questa è un'isometria inversa che fissa puntualmente r , quindi è una riflessione che indichiamo con ρ . Dunque

$$f = t_{v/2} \circ t_{-v/2} \circ f = t_{v/2} \circ \rho.$$

□

2 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Ricorda

$f \in End(V)$ diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f
 $\Leftrightarrow A = [f]_B^B$ B base $\exists N \in GL(n, \mathbb{K}) : N^{-1}AN$ è diagonale

Lemma 1

Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ha solo radici reali

Dimostrazione

$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq (\mathbb{C}) \quad L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore e $x \neq 0$ un corrispondente autovettore

$$Ax = \lambda x.$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}.$$

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

$$\bar{x}^t Ax = \bar{x}^t(Ax) = \bar{x}^t(\lambda x) = \lambda \bar{x}^t x$$

$$\bar{x}^t Ax = \bar{x}^t A^t x = (A\bar{x})^t x = (\bar{\lambda}\bar{x})^t x = \bar{\lambda} \bar{x}^t x$$

$\bar{x}^t x = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \leftarrow$ è un numero reale positivo poiché $x \neq 0$

$$\lambda \bar{x}^t x = \bar{\lambda} \bar{x}^t x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

□

Teorema 2 (Teorema Spettrale)

Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $T \in End(V)$ un operatore simmetrico, esiste una bas ortonormale di autovettori per T

Corollario 1

Per ogni matrice reale simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $N \in O(n)$ tale che

$$N^{-1}AM = N^t AN \quad \text{è ortogonale.}$$

Dimostrazione (Teorema)

Per induzione su $n = \dim(V)$. Base $n = 1$ ovvia

Supponiamo $n = \dim(v) \geq 2$. Poichè T è simmetrico il polinomio caratteristico ha radici reali (per il lemma precedente) quindi T ammette un autovalore λ d sia e_1 il suo corrispondente autovettore di lunghezza 1

$$V = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp.$$

Chiamo $U \equiv (\mathbb{R}e_1)^\perp$

Dico che $T|_U : U \rightarrow$, per cui $T|_U \in End(U)$

Infatti, dimostro che $u \in U \rightarrow T(u) \in U$

ipotesi: $\langle u, e_1 \rangle = 0$

Tesi: $\langle Tu, e_1 \rangle = \langle u, T^t e_1 \rangle = \langle u, Te_1 \rangle = \langle u, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0$

dove abbiamo usato la simmetria di T

Chiaramente $T|_U$ è simmetrico, quindi per induzione U ha una base ortonormale di autovettori $\{e_2, \dots, d_n\}$.

Ne segue che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di V formata da autovettori per T \square

Lezione 17 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-17

1 Prodotto Hermitiano

V spazio vettoriale complesso

Definizione 1 (Funzione sesquilineare)

Una funzione sesquilineare su V è un'applicazione $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda, cioè

$$\begin{aligned} h(v + v', w) &= h(v, w) + h(v', w) \\ h(\alpha v, w) &= \alpha h(v, w) \\ h(v, w + w') &= h(v, w) + h(v, w') \\ h(v, \alpha w) &= \bar{\alpha} h(v, w) \end{aligned}$$

per ogni scelta di $v, w, v', w' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

Definizione 2 (Forma hermitiana)

Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

$$h(v, w) = \overline{h(w, v)}.$$

Osservazione

Se h è hermitiana, $h(v, v) \in \mathbb{R}$, infatti deve risultare $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$

Definizione 3 (Forma antihermitiana)

Una forma sesquilineare si dice antihermitiana se

$$g(v, w) = -\overline{h(v, w)}.$$

Osservazione

In questo caso $h(v, v) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$

Definizione 4

Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

$$h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Definizione 5

Una forma hermitiana si dice definita positiva se

$$h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

ovvero

$$(h(v, v) \geq 0 \text{ e } h(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0).$$

Esempio

$V = \mathbb{C}^n$

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}.$$

questo viene chiamato prodotto hermitiano standard su \mathbb{C}^n

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$$

Dato V , consideriamo una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V . Se h è una forma hermitiana, diciamo che $(h_{ij}) = h(v_i, v_j)$ è la matrice che rappresenta h nella base B e la denoto come $(h)_B$

se $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$\begin{aligned} h(v, w) &= h\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h_i(v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} h(v_i, v_i) = \\ &= x^t H \bar{y} \end{aligned}$$

Poiché h è hermitiana, $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$
 $X^t H Y = \overline{Y^t H X}$

$$\begin{aligned} &= \overline{Y^t H X} \\ &= (\overline{Y^t H X})^t \\ &= \overline{X^t H^t Y} \quad \Rightarrow \quad H = \overline{H}^t \end{aligned}$$

Definizione 6

Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice hermitiana se

$$H = \overline{H}^t.$$

Esercizio

le matrici hermitiane 2×2 sono un \mathbb{R} -sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ di dimensione 4

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 & a_3 - ib_3 \\ a_2 - ib_2 & a_4 - ib_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a_1 + ib_1 &= a_1 - ib_1 \Rightarrow b_1 = 0 \\ a_2 + ib_2 &= a_3 - ib_3 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ \Rightarrow \quad a_3 + ib_3 &= a_2 - ib_2 \Rightarrow a_2 = a_3 \quad b_2 = -b_3 \\ a_4 + ib_4 &= a_4 - ib_4 \Rightarrow b_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) \oplus \mathbb{R} \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix} \right)$$

il professore qui lascia un esercizio, non penso che realisticamente qualcuno lo farà

Si definiscano allo stesso modo del caso reale simmetrico S^t
coefficiente di Fourier

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

disuguaglianza triangolare $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
Operatore unitario: $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ t.c.

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Verifichiamo le caratteristiche degli operatori unitari dati nel caso reale

Gram Schmidt

$T \in End(V)$ operatore unitario

1. Gli autovalori hanno modulo 1
2. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali
3. Sia v un autovettore di autovalore λ

$$\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle tv, tv \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle.$$

$$v \neq 0 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

2. Sia $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu$ $\lambda \neq \mu$

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Se $\langle v, w \rangle \neq 0 \neq 0 \Rightarrow \lambda \bar{\mu} = 1$. Per il punto 1
 $\lambda \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda = \bar{\mu} \Rightarrow \lambda = \mu$ assurdo.

Definizione 7

Diciamo che $U \in M_n(\mathbb{C})$ è unitaria se

$$U\bar{U}^t = Id.$$

Proposizione 1

$T \in End(V)$ è unitario se e solo se la sua matrice in una base ortonormale è unitaria

Dimostrazione

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di V

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i^t A^t \bar{A} e_j = A_i^t \bar{A}_j$$

dove abbiamo posto $A = (T)_B$ e $\{e_i\}$ è una base di \mathbb{C}^n

TODO dimostrazione da finire

□

Come nel caso reale si dimostra

Teorema 1

Sia $T \in End(V)$ un operatore unitario Esiste una base standard di autovettori per T

In particolare, per ogni matrice unitaria $A \in U(n)$ esiste $M \in U(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale a volte si pone

$$A^* = \bar{A}^t.$$

A unitario $AA^* = Id$

A hermitiano $A = A^*$

A antihermitiano $A = -A^*$

Definizione 8 (Operatore Aggiunto)

Dato $T \in End(V)$, esiste unico $S \in End(V)$ tale che

$$\langle Tu, w \rangle = \langle u, Sw \rangle \quad \forall u, w \in V.$$

Tale operatore è detto aggiunto hermitiano di T e denotato con T^*

Definizione 9 (operatore normale)

Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto hermitiano (forma hermitiana definita positiva), un operatore $L \in End(V)$ è normale se

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

Osservazione

L unitario, hermitiano, antihermitiano $\Rightarrow L$ diagonale

Teorema 2

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1) L è normale
- 2) esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di L

Lezione 19 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-18

1 Esercizi vari

Esercizio 1 Foglio 6

$f : A \rightarrow A$ affinità ha un unico punto fisso se e solo se la sua parte lineare (φ) non ha l'autovalore 1

Svolgimento

Sia $F = \{x \in A | f(x) = x\}$

Supponiamo $F \neq \emptyset$ e $P \in F$ dico che

$$\star \quad F = P + \ker(\varphi - Id).$$

dove $\ker(\varphi - Id)$ è l'autospazio di autovalore 1 di φ

$u \in V \quad P + u \in F \Leftrightarrow P + u = f(P + u) = f(P) + \varphi(u) = P + \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = u$
ovvero $u \in \ker(\varphi - Id)$

Se ora F ha un unico punto fisso \star implica che

$$\ker(\varphi - Id) = \{0\}.$$

cioè 1 non è autovalore di φ

Viceversa facciamo vedere che se $\ker(\varphi - Id) = \{0\}$ allora $F \neq \emptyset$ Cerchiamo $Q + v$ tale che

$$f(Q + v) = Q + v$$

$$f(Q) + \varphi(v)$$

$$f(Q) - P = v - \varphi(v)$$

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = -(\varphi - Id)(v)$$

Quindi, poiché $(\varphi - Id)$ è invertibile (per ipotesi), dato Q trovo un unico $v = -(\varphi - Id)^{-1}(\overrightarrow{Qf(Q)})$

per cui $Q + v$ è un punto fisso

Esercizio 5 Foglio 6

$f(x) = Ax + b$ in \mathbb{E}^2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = 0$$

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento A

1. è una traslazione quindi non ha punti fissi
2. $\det A = 1$ e A ortogonale

$$AX + b = X$$

$$(A - I)X = -b$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2) \text{ rotazione di } \frac{\pi}{2}$$

Esercizio da finire

2 Diagonalizzazione unitaria di operatori normali

$(\mathbb{C}^n, \text{ prodotto hermitiano standard}) M^* = \overline{M}^t$

M è normale se $MM^* = M^*M$

siano normali le matrici

unitarie	$MM^* = Id$
hermitiane	$M = M^*$
antihermitiane	$M = -M^*$

Teorema 1 (Spettrale)

M è normale se e solo se $\exists U \in U(n) : U^t MU$ è ortogonale

nota

$U(n)$ spazio delle matrici unitarie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \text{ matrice hermitiana}$$

Trovo ora il polinomio caratteristico

$t^2 - 2t = 0$ che ha quindi autovalori $t = 0, t = 2$

$$v_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 2 + i \cdot i = 0$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 1 - i^2 = 2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad U^{-1}LU = 0002.$$

Dove il prodotto scalare standard è stato fatto per verificare che siano ortogonali, il secondo mi serve per normalizzare la matrice (di fatti divido per la radice del risultato)

Esempio 2

$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale con determinante 1, quindi rotazione

il polinomio caratteristico è $t^2 - \sqrt{3}t + 1$ gli autovalori sono quindi $t = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

$$v_{\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ultimo esempio

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} & L^* &= \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix} \\ && LL^* &= \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = L^*L. \end{aligned}$$

$$t^2 - 2(i+1) + 2i - 1 = 0 \quad t_1, t_2$$

$$v_{t_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{t_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

U come nell'esercizio precedente

3 Cenni sulla classificazione delle isometrie

Nomenclatura 1

- *rotazioni*
- *riflessioni*
- *traslazioni*
- *glissoriflessione* = $t_v \circ s_\alpha$ con $v \parallel \alpha^\perp$ (*disegno de li mortacci sua*)
- *glissorotazioni* = $t \circ R$ dove $v \parallel a$, a asse di R (*altro disegno*)
- *riflessioni rotatorie* $s_a \circ R$ R rotazione di asse \underline{a} , $s_{\underline{a}}$ è una riflessione rispetto ad una retta parallela ad \underline{a}

Teorema 2 (Eulero 1776)

Ogni isometria di \mathbb{E}^3 è di uno dei sei tipi sopra descritti

Lezione 20 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-22

1 Teoremi vari su spazi Hermitiani e company

Lemma 1

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{R}

Siano $P, Q \in \text{End}(V)$ tali che $PQ = QP$. Allora, se V_λ è l'autospazio di autovalore λ su P , risulta

$$Q(V_\lambda) \subseteq V_\lambda.$$

Dimostrazione

Sia $v \in V_\lambda$ (cioè $P(v) = \lambda v$). Dobbiamo vedere che $Qv \in V_\lambda$.

$$P(Q(v)) = (P \circ Q)(v) = (Q \circ P)(v) = Q(\lambda v) = \lambda Q(v).$$

□

(V, h) spazio Hermitiano (Spazio vettoriale complesso h forma hermitiana definita positiva in V)

$\dim(V) < +\infty$

Teorema 1

Sia (V, h) uno spazio hermitiano, $L \in \text{End}(V)$ operatore, sono equivalenti

- L è normale (rispetto ad h)
- esiste una base ortonormale B di V composta da autovettori per L

Lemma 2

(V, h) spazio hermitiano, $L \in \text{End}(V)$ normale

sono equivalenti

- $Lv = \lambda v$
- $L^*v = \bar{\lambda}v$

In particolare λ è l'autovalore per L se e solo se $\bar{\lambda}$ è autovalore per L^*

$$V_\lambda(L) = V_{\bar{\lambda}}(L^*).$$

Dimostrazione

Se $v = 0$ non c'è niente da dimostrare.

Se $v \neq 0$ basta far vedere che se $v \in V_\lambda(L)$ allora $v \in V_{\bar{\lambda}}(L^*)$. L'inclusione contraria segue da $L^{*t} = L$

$$w \in V_\lambda(L), \quad v \in V_\lambda(L).$$

$$\begin{aligned} h(L^*(v), w) &= h(v, L(w)) = h(v, \lambda w) \\ &= \bar{\lambda}h(v, w) = h(\bar{\lambda}v, w) \\ h(L^*(v) - \bar{\lambda}v, w) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Per il lemma, siccome per ipotesi L è normale,

$$\begin{aligned} L^*(v) &\in V_\lambda(L), \quad \bar{\lambda}v \in V_\lambda(L) \\ \Rightarrow \quad L^*(v) - \bar{\lambda}v &\in V_\lambda(L) \end{aligned}$$

Quindi nella \circledast posso prendere $w = L^*(v) - \bar{\lambda}v$, ottenendo

$$h(L^*(v) - \bar{\lambda}v, L^*(v) - \bar{\lambda}v) = 0.$$

Poiché h è definito positivo, segue

$$\begin{aligned} L^*(v) - \bar{\lambda}v &= 0 \\ \text{cioè} \quad L^*(v) &= \bar{\lambda}v \end{aligned}$$

□

Osservazione

Dal lemma segue $V_\lambda(L) \perp V_\mu(L)$ se $\lambda \neq \mu$

$$v \in V_\lambda, \quad w \in V_\mu$$

$$\lambda h(v, w) = h(\lambda v, w) = h(Lv, w) = h(v, L^*w) = h(v, \bar{\mu}w) = \mu h(v, w) \Rightarrow h(v, w) = 0$$

Dato che $\lambda \neq \mu$

Dimostrazione (Teorema Spettrale)

1) \Rightarrow 2) Procediamo per induzione su $\dim V$, con base ovvia $\dim V = 1$

Supponiamo il teorema vero per gli spazi hermitiani di dimensione $\leq n-1$ e sia $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

Sia $v_1 \in V$ un autovettore per L , che possiamo assumere di norma 1. Sia $V_1 = \mathbb{C}v_1, W = v_1^p \text{erp}$.

Allora $V = V_1 \oplus W$.

Poiché V_1 è L -invariante (per costruzione) e L^* -invariante per il lemma precedente, lo stesso accade per W .

Inoltre $L|_W \in \text{End}(V)$ è normale.

Per induzione, esiste una base $h|_W$ -ortonormale formata da autovettori per $L|_W$, sia $\{v_2, \dots, v_n\}$. Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base h -ortonormale di V formata da autovettori per L .

2) \Rightarrow 1). Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base h -ortonormale di autovettori per L . Allora

$$\begin{aligned} [L]_B^B &= \bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ [L^*]_B^B &= \overline{[L]_B^B}^t = \overline{\bigwedge} \end{aligned}$$

$$[L \circ L^*]_B^B = [L]_B^B [L^*]_B^B = \bigwedge \overline{\bigwedge} = \overline{\bigwedge} \bigwedge = [L^*]_B^B [L]_B^B = [L^* \circ L]_B^B$$

Poiché la mappa $A \rightarrow [A]_B^B$ è un isomorfismo tra $\text{End}(V)$ e $M_{nn}(\mathbb{C})$, segue

$$L \circ L^* = L^* \circ L.$$

cioè L è normale □

Osservazioni

1. È essenziale che h sia definita positiva.

$$h(x, y) = x^t H \bar{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non è definita positiva $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$

$$L_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}.$$

Dico che L_A è autoaggiunto, quindi normale

$$h(L_AX, Y) = h(X, L_AY)$$

$$(L_AX)^t H \bar{Y} = X^t H \bar{L_A Y}$$

$$X^t A^t H \bar{Y} = X^t H \bar{A Y} \quad \forall X, Y$$

$$A^t H = H \bar{A}$$

Calcolo il poli-

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

nomio caratteristico di A

$$\det \begin{pmatrix} t & -i \\ -i & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) + 1 = (t+1)^2.$$

Ma $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, in particolare non è diagonalizzabile

2. Vediamo in dettaglio il fatto che $L|_W$ è normale

Ritornando alla dimostrazione del teorema spettrale, osserviamo che se W è L -invariante è anche L^* -invariante.

Infatti, se $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}(L)$ (per esercizio da dimostrare)

$$W = \bigoplus_{\lambda} (V_{\lambda}(L) \cap W)$$

$$= \bigoplus_{\lambda} (V_{\lambda}(L^*) \cap W)$$

$\Rightarrow W$ è L^* -invariante

Adesso osservo che $(L|_W)^* = (L^*)|_W$

$$(L|_W) \circ (L|_W)^* = (L|_W) \circ (L^*|_W) =$$

$$(L \circ L^*)|_W = (L^* \circ L)|_W = (L^*|_W) \circ L|_W = (L|_W)^* \circ L|_W$$

2 Richiami su spazi vettoriali duali

V spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita

$$V^V = V^{\text{star}=\text{Hom}(V, \mathbb{K})}.$$

sia $A \leq V$

$$Ann(A) = A^\# = \{f \in V^* \mid f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

Osservazioni

- 1) $A^\#$ è un sottospazio
- 2) $A^{\#\#} = \langle A \rangle$

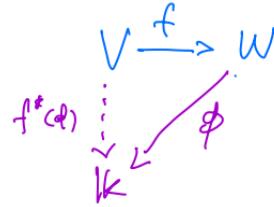
$$i : V \rightarrow V^{**}$$

$$v \in V, \quad f \in V^*$$

$$i(v)(f) = f(v)$$

V, W spazi vettoriali di dimensione finita $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $f^* \in Hom_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$, la trasposta di f è definita con $\phi \in W^*$

$$f^*(\phi) = \phi \circ f$$



Definizione 1

Definisco la dualità standard su V come

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}.$$

$$\langle v, f \rangle = \langle f, v \rangle = f(v)$$

con questa proprietà

$$\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, f^*(w^*) \rangle.$$

Ricordo che se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora i funzionali v_i^* definiti da

$$\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

per $1 \leq i \leq n$ formano una base B^* di V^* detta base duale di B

Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $L = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V, W consideriamo $f^* : W^* \rightarrow V^*$. Allora:

$$[f]_B^B = [f^*]_{L^*}^{B^* t}$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$(a_{ij}) \quad (a_{ij}^*)$$

Tesi $a_{ih} = a_{hi}^*$

$$f^*(w_i^*) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* v_i^*$$

$$f^*(w_i^*)(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* v_i^*(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* \delta_{ih} = a_{hi}^*$$

$$\begin{aligned} w_i^*(f(w_h)) &= w_i^*(\sum_{i=1}^n a_{ih} w_i) = \sum_{i=1}^n a_{ih} w_i^*(w_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ih} \delta_{ij} = a_{ih} \end{aligned}$$

Teorema 2 (Qualche proprietà importante)

$f : V \rightarrow W$ lineare $f^* : W^* \rightarrow V^*$

$$1) (Imf)^\# = \ker f^*$$

$$2) (\ker f)^\# = Imf^*$$

$$3) (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^* \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, g \in Hom(V, W))$$

$$4) (h \circ f)^* = f^* \circ h^* \quad h : W \Rightarrow U \text{ lineare}$$

Dimostrazione (Il punto 2, 3 e 4 vengono lasciati per esercizio)

$$1) \emptyset \in (Imf)^\#$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in Imf \quad \emptyset(w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in V \emptyset(f(v)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \circ f = 0$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \in \ker f^*$$

Quindi abbiamo visto che $(Imf)^\# = \ker F^*$

□

Proposizione 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su \mathbb{K} e W un sottospazio.

Allora

$$\dim(W) + \dim W^\# = n.$$

Dimostrazione

Da quanto visto, la mappa

$$Hom(V_1, V_2) \rightarrow Hom(V^{\text{star}_2}, V^{\text{star}_1})$$

$$f \quad \rightarrow \quad f^t$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre f è iniettiva (rispettivamente suriettiva) se e solo se f^t è suriettiva (rispettivamente iniettiva)

Consideriamo la proiezione $\pi : V \rightarrow V|_W := U$

Poiché π è suriettiva $\pi^* : U^* \rightarrow V^*$ è iniettiva e

$$W^\# = (\ker \pi)^\# = Im \pi^*.$$

per cui

$$\dim W^\# = \dim(Im \pi^*) = \dim U^* = \dim V - \dim W.$$

□

Lezione 21 Geometria 1

Federico De Sisti

2024-04-24

1 Nuove informazioni sulle forme bilineari

V spazio vettoriale su \mathbb{R}

Ricordiamo che una forma bilineare è un'applicazione

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che se $A = [b]_B$

$$X = [v]_B, \quad Y = [w]_B$$

$$b(v, w) = X^t A Y.$$

Come cambia $[b]_B$ se cambio B

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad X = [v]_B \quad X' = [v]'_B$$

$$B' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \quad Y = [w]_B \quad Y' = [w]'_B$$

$$A = [b]_B \quad A' = [b]_{B'}$$

$$b(v, w) = X^t A Y = X'^t A' Y'$$

$$X = MX', \quad Y = MY' \quad M = [Id_V]^B_B$$

$$(MX)^t A (MY') = X'^t A' Y'$$

$$X'^t A M Y' = X'^t A' Y'$$

$$A' = M^t A M$$

Definizione 1

Diciamo che due matrici A, B sono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^t A M$

Proposizione 1

Due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diversi se e solo se sono congruenti

Osservazione

1. La congruenza è una relazione di equivalenza
2. Il rango è invariante per la congruenza
3. Per matrici reali invertibili, il segno del determinante è invariante
4. Se M è ortogonale

$$M^t A M = M^{-1} A M.$$

Se ho una forma bilineare $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ posso definire due applicazioni $V \rightarrow V^*$ nel modo seguente.

$$\text{Fissato } v \in V, \text{ prendo} \quad b_v(w) = b(v, w) \\ b'_v(w) = b(w, v)$$

È chiaro che $b_v, b'_v \in V^*$ (usiamo il fatto che b è bilineare)

Dunque ho due applicazioni $V \rightarrow V^*$

$$\delta_b(v) = b_v \quad \delta'_b(v) = b'_v.$$

Definizione 2

Il rango di una funzione bilineare è il rango di una qualsiasi matrice che la rappresenta

Definizione 3

Una forma bilineare è non degenere se ha rango (massimo) $\dim V$

Proposizione 2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita,

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \text{ una forma bilineare.}$$

Sono equivalenti

- b è non degenere ovvero $b(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\forall v \in V, v \neq 0 \quad \exists w \in V : b(v, w) \neq 0$
- $\forall w \in V, w \neq 0 \quad \exists v \in V : b(v, w) \neq 0$
- $\delta_b : V \rightarrow V^*$ è un isomorfismo
- $\delta'_b : V \rightarrow V^*$ è un isomorfismo

Dimostrazione

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $A = [b]_B$

*1) \Rightarrow 2) per ipotesi $\det A \neq 0$ se $X = [v]_B \quad X \neq 0 \Rightarrow X^t A \neq 0$
quindi esiste $Y \in \mathbb{K}^n : X^t A Y \neq 0$.*

*Se $w \in V$ è tale che $[w]_B = Y$ ho dimostrato che $b(v, w) = X^t A Y \neq 0$
2) \Rightarrow 1) Riscrivendo l'ipotesi in coordinate abbiamo*

$$\begin{aligned} \forall X \neq 0 \quad \exists Y : X^t A Y \neq 0 \\ \Rightarrow X^t A \neq 0 \quad \forall X \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile} \end{aligned}$$

1) \Leftrightarrow 3) è come sopra

2) \Rightarrow 4) Poiché $\dim V = \dim V^$ basta vedere che δ_b è iniettiva, cioè $\ker \delta_b = \{0\}$
 $v \in \ker \delta_b \Rightarrow \delta_b(v) = b_v \neq 0$ è il funzionale nullo, cioè*

$$b_v(w) = 0 \quad \forall w \in V$$

$$b_v(w) = b(v, w) \Rightarrow v = 0$$

*4) \Rightarrow 2) Dato $v \neq 0$, $\delta_b(v) = b_v \neq 0$ perché δ_b è un isomorfismo,
quindi esiste $w \in V$:*

$$b(v, w) = b_v(w) \neq 0$$

3) \Leftrightarrow 5) è simile a 2) \Leftrightarrow 4)

□

2 Caso Simmetrico

$$b(v, w) = b(w, v).$$

Osservazione

b è simmetrica se e solo se lo è qualsiasi matrice che la rappresenta. **Dato** $S \subset V$ definiamo

$$S^\perp = \{v \in V | b(v, s) = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Esercizio S^\perp è un sottogruppo e, $S^\perp = <s>^\perp$

Definizione 4

Due sottospazi U, W si dicono ortogonali se

$$Y \subseteq W^{\text{perp}} \Leftrightarrow W \subset U^\perp)$$

Definizione 5

$v \in V$ si dice isotropo se $b(v, v) = 0$

Definizione 6

$$\ker b = \{v \in V | b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\} = V^\perp$$

Osservazione

b è non degenere se e solo se $\ker b = \{0\}$

Proposizione 3

Sia b non degenere, $W \subseteq V$ sottospazio,

Allora, se $\delta_b : V \rightarrow V^*$ è l'isomorfismo canonico indotto da b , $\delta_b(W^t) = W^*$. In particolare risulta sempre $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$

Nota

Non è vero, anche nel caso non degenere, che $V = W \oplus W^\perp$

Dimostrazione

$w \in W^\perp \quad \delta_b(w) = b_w$ Voglio vedere che

$b_w \in W^*$ $b_w(w') = b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W$

Quindi $\delta_b(W^\perp) \subseteq W^*$

Prendo ora $f \in W^*$; poiché b è non degenere, δ_b è un isomorfismo, quindi esiste $v \in V$

$$f = \delta_b(v) = b_v \quad b(v, w) = b_v(w) = 0 \quad \forall w \Rightarrow v \in W^\perp.$$

quindi $f = \delta(b_v)$ con $v \in W^\perp$

□

Proposizione 4

Sia V spazio vettoriale, $W \subset V$ sottospazio, $b \in Bi(V)$. Sono equivalenti:

- $V = W \oplus W^\perp$
- $b|_W$ è non degenere

Lemma 1

$$\ker b|_W = W \cap W^\perp$$

Dimostrazione (lemma)

$$w \in \ker b|_W \Leftrightarrow b(w, w') = 0 \quad \forall w' \in W \Leftrightarrow w \in W \cap W'$$

□

Dimostrazione (proposizione)

1) \Rightarrow 2) segue dal lemma perché dall'ipotesi $W \cap W^\perp = \{0\}$

2) \Rightarrow 1) Sia $\{w_1, \dots, w_s\}$ una base di W

Per ipotesi $A = (b(w_i, w_j))$ è invertibile, in particolare dato $v \in V$, il sistema lineare

$$* \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, w_1) \\ \vdots \\ b(v, w_s) \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica. Poniamo

$$w = v - \sum_{h=1}^s x_h w_h.$$

Notiamo che * significa

$$\sum_{h=1}^s b(v_h, w_j) x_h = b(v, w_j) \quad 1 \leq j \leq s.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} b(w, w_i) &= b(v - \sum_{h=1}^s x_h w_h, w_i) = b(v, w_i) - \sum_{h=1}^s x_h b(w_h, w_i) = b(v, w_i) = \\ &= b(v, w_i) - b(v, w_i) = 0 \end{aligned}$$

Poiché i $\{w_i\}$ sono una base di W , risulta $b(w, u) = 0 \quad \forall u \in W$, cioè $w \in W^\perp$
Allora

$$v = w + \sum_{h=1}^s x_h w_h.$$

Pertanto $V = W + W^\perp$, per ipotesi $W \cap W^\perp = \ker b|_W = \{0\}$, quindi $V = W \oplus W^\perp$

□

Lezione 22 Geometria I

Federico De Sisti

2024-04-29

1 Boh non ero a lezione

$W \subseteq V$ sottospazio $g \in Bi(V)$

$g|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$

Cosa dimostreremo oggi

Sia V spazio vettoriale di dimensione finita e $g \in Bi_s(V)$ (forma bilineare simmetrica)

\mathbb{K} qualsiasi, esiste una base g – ortogonale

\mathbb{K} algebricamente chiuso ($\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$), esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = rg(g)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r +$

$s = rg(g)$ $n - r - s$ indice di nullità, \ker della forma

V spazio vettoriale ($\dim(V) < +\infty$), $g \in Bi_s(V)$

Definizione 1

la forma quadratica associata a V è l'applicazione $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ definita da $q(v) = g(v, v)$ e questa è una funzione omogenea di grado 2

Esempio

$V \cong \mathbb{K}^n$, g = prodotto scalare standard

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Osservazione

Valgono:

$$1) q(kv) = k^2 q(v)$$

$$2) 2g(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$$

dove $g(v, w)$ è la forma polare di q

Dimostrazione

$$1. q(kv) = g(kv, kv) = k^2 g(v, v) = k^2 q(v)$$

$$2. q(v + w) - q(v) - q(w) = g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) =$$

$$= g(v, v) + 2g(w, v) + g(w, w) - g(v, v) - g(w, w) = 2g(w, v)$$

□

Osservazione

$$V = \mathbb{R}^4 \text{ e sia } q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_1x_2$$

Voglio trovare la matrice della forma polare di q rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale ci sono i coefficienti delle componenti al quadrato $(x_i)^2$ gli altri li ottieni dividendo per 2 ogni altro coefficiente

Teorema 1 ((Caratteristica di \mathbb{K}) $\neq 2$)

Dato V spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V , allora esiste una base g -ortogonale.

Dimostrazione

Per induzione su $\dim V = n$. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.
 se g è la forma bilineare nulla ($g(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in V$) ogni base è g -ortogonale.
 Altrimenti esistono, $v, w \in V$ con $g(v, w) \neq 0$.
 Assumo che almeno uno tra $v, w, v + w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi

$$g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, w) = 2g(v, w) \neq 0.$$

quindi $\exists v_1 \in V$ t.c $g(v_1, v_1) \neq 0$. Allora $g|_{\mathbb{K}v_1}$ è non degenere quindi $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$ con $W = (\mathbb{K}v_1)^\perp$
 $\dim(W) = n - 1$, per induzione \exists una base $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W con $g(v_1, v_j) = 0$
 se $2 \leq j \leq n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base g -ortogonale di V \square

Teorema 2

Supponiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso. Sia V spazio vettoriale dimensione $n \geq 1$ e g forma bilineare simmetrica su V , esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di g è $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix}$ $r = \text{rg}(D)$

In modo equivalente, ogni matrice simmetrica a coefficienti in \mathbb{K} è congruente a D

Dimostrazione

Per il teorema precedente, esiste una base $B = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di V rispetto alla

$$\text{quale } (g)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Possiamo assumere che a_{11}, \dots, a_{rr} siano non nulli e che $a_{r+i, r+i} = 0$ con $1 \leq i \leq n - r$.

Poiché \mathbb{K} è algebricamente chiuso, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha_i^2 = a_{ii}$, $1 \leq i \leq r$ poniamo.

$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} v'_i, & 1 \leq i \leq r \\ v'_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

è chiaro che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base. Risulta

$$g(v_i, v_i) = \begin{cases} g(\frac{v'_i}{\alpha_i}, \frac{v'_i}{\alpha_i}) = 1\alpha_i^2 g(v'_i, v'_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 & 1 \leq i \leq r \\ g(v'_i, v'_i) = 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

\square

Osservazione

Se g è non degenere, esiste una base B rispetto alla quale $(g)_B = Id_n$

Caso Reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

V spazio vettoriale reale ($\dim V = n \geq 1$)

$g \in Bi_s(V)$

Sia B una base g -ortogonale. Definiamo

Definizione 2

Chiamiamo $i_+(g), i_-(g), i_0(g)$ indice di positività, negatività e nullità di g , e sono rispettivamente

$$i_+(g) = \{v \in B \mid g(v, v) > 0\}$$

$$i_-(g) = \{v \in B \mid g(v, v) < 0\}$$

$$i_0(g) = \{v \in B \mid g(v, v) = 0\}$$

Teorema 3 (Sylvester)

Gli indici non dipendono dalla scelta di B . Posto $p = i_+(g), q = i_-(g)$ allora $1 + q = n - r$ ($r = rg(g)$)

ed esiste una base di V rispetto alla quale la matrice E di g è tale che

$$E = \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale A è congruente ad una matrice della forma E in cui $r = rg(A)$ e p dipende solo da A

Dimostrazione

Dal teorema di esistenza di una base g -ortogonale deduciamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ di V rispetto alla quale, se $v = \sum_{i=1}^n y_i f_i$

$$q(v) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$$

con esattamente n coefficienti diversi da 0, che possiamo supporre essere a_{11}, \dots, a_{rr}

Siano $a_{11}, \dots, a_{pp} > 0, a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr} < 0$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha_i^2 = a_{ii} \quad 1 \leq i \leq p \quad \alpha_i^2 = -a_{ii} \quad p+1 \leq i \leq r$$

$$\text{Allora posto } e_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & 1 \leq i \leq r \\ f_i & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\text{la matrice di } g \text{ rispetto a } \{e_1, \dots, e_n\} \text{ è } \begin{pmatrix} Id_p & \dots & 0 \\ \vdots & -Id_q & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Resta da dimostrare che p dipende solo da g e non dalla base B usata per definirlo

Supponiamo che rispetto ad un'altra base g -ortogonale $\{b_1, \dots, b_n\}$, risultino per

$$v = \sum_{i=1}^n z_i b_i$$

$$q(v) = z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2.$$

mostriamo che $p = t$

se per assurdo $p \neq t$ assumo $t \leq p$ considero quindi i sottospazi $S = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$
 $T = \langle b_{t+1}, \dots, b_n \rangle$

Poiché $\dim S + \dim T = p + n - t > n$ perché $t < p$ per Grassman vettoriale
 $S \cap T \neq \{0\}$ sia $0 \neq v \in S \cap T$

allora $r = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = z_{t+1} b_{t+1} + \dots, z_n b_n$
contraddizione:

$$q(v) = \sum_{i=1}^p x_i^2 > 0.$$

$$q(v) = - \sum_{i=1}^r z_i^2 + z_{r+1}^2 + \dots + z_n^2 < 0.$$

□

Osservazioni

1. Esiste una definizione più intrinseca degli indici. Ricordiamo che $g \in \text{Bil}_S(V)$, V spazio vettoriale su $/R$ è definita positiva se $g(v, v) > 0$, $\forall v \in V \setminus \{0\}$ e che g è definita negativa se $-g$ è definita positiva.

2. Il teorema di Sylvester si estende, con la stessa dimostrazione alla forma hermitiana.

In particolare ogni matrice hermitiana è congruente a una matrice diagonale del tipo

$$\begin{pmatrix} I_p & \dots & 0 \\ \vdots & I_{r-p} & \vdots \\ 0 & \dots & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposizione 1

Sia (V, g) uno spazio vettoriale su \mathbb{R} dotati di una forma bilineare simmetrica g

Siano dati un prodotto scalare h e una forma bilineare simmetrica k

Allora esiste una base di V che sia h -ortonormale e k -ortogonale

Dimostrazione

(V, h) è uno spazio euclideo, quindi per il teorema di rappresentazione delle forme bilineari, esiste un operatore $L \in \text{End}(V)$ tale che

$$h(L(v), w) = k(v, w).$$

Poiché k è simmetrica, L è simmetrica, per il teorema spettrale siste una base h -ortonormale costituita da autovettori per L .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale base. Voglio dimostrare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è k -ortogonale

$$k(v_r, v_s) = h(L(v_r), v_s) = h(\lambda_r v_r, v_s) = \lambda_r h(v_r, v_s) = \lambda_r \delta_{rs}.$$

□

Corollario 1

Sia (V, h) uno spazio euclideo, e k una forma bilineare simmetrica su V . Allora $i_+(k), i_-(k), i_0(k)$ corrispondono al numero di autovalori positivi, negativi, nulli, dell'endomorfismo di V che rappresenta k rispetto ad h

Dimostrazione

Sia come nella proposizione, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una h -ortonormale e k -ortogonale, per il teorema di Sylvester

$$i_+(k) = |\{v_i | k(v_i, v_i) > 0\}|.$$

Ma abbiamo visto che $k(v_i, v_i) = \lambda_i$
quindi $i_+(k) = |\{\lambda_i > 0\}|$. La dimostrazione non è terminata. □

Definizione 3

Una matrice simmetrica reale si dice definita positiva se tutti gli autovalori sono positivi

Definizione 4

Data una matrice quadrata $n \times n$, i minori principali leading, sono quelli ottenuti estraendo righe e colonne come segue

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$$

Teorema 4

A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori principali leading sono positivi

$$q\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

1. Determinare gli indici
2. Calcolare W^\perp se $W = \mathbb{R}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)$

Scriviamo la matrice della forma bilineare associata rispetto alla base standard

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad i_- = 2$$

Lezione 23 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-02

- 1 In questa lezione il signorino ha semplicemente riportato gli esoneri e fatto esercizi della scherda 7, nnon è roba mia

Lezione 24 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-06

1 Spazi proiettivi e Antani

Servirebbe un'introduzione per tutto ciò, ma non sarà il Posta a darcela, la motivazione matematica è che la formula di Grassmann vale sempre (antani)

Definizione 1 (Spazio Proiettivo)

*Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Lo **spazio proiettivo** associato a V denominato con $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensional di V*

$$\mathbb{K}v \leftrightarrow [v] \sim \text{punto di } \mathbb{P}(v).$$

$$\dim V = 0 \quad \mathbb{P}(V) = \emptyset$$

$$\dim V = 1 \quad \mathbb{P}(V) = \{pt\}$$

$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva

$\dim V = 2 \quad \mathbb{P}(V)$ piano proiettivo

Quindi $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$

Caso importante $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n (= \mathbb{P}^n(K)).$$

Osservazione

1. Dati $v \in V \setminus \{0\}$, $\mathbb{K}v$ è un sottospazio 1-dimensionale, quindi esso dà luogo a un punto nello spazio proiettivo che denotiamo $[v]$

2. La nozione di spazio proiettivo di V può introdursi in modo equivalente tramite la seguente relazione d'equivalenza su $V \setminus \{0\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ t.c. } v = \lambda w.$$

Allora

$$\mathbb{P}(v) = V \setminus \{0\} / \sim.$$

Riprendendo l'osservazione 1, nel caso $V = \mathbb{K}^{n+1}$

$$(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n + 1 \setminus \{0\} \rightsquigarrow [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n.$$

$$[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n].$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : y_i = \lambda x_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

Definizione 2

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V .

Diciamo che $\{e_1, \dots, e_n\}$ definisce un sistema di coordinate omogenee (o riferimento proiettivo) su V , denotato con $e_0 \dots e_n$

Dato $v \in V \setminus \{0\}$

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n.$$

$$\rightsquigarrow (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$P[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow P = [v].$$

x_0, \dots, x_n si dicono coordinate omogenee di v

Ad esempio, fissata la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ in \mathbb{P}^2 ,

$P[1, 2, 3]$ è il sottospazio 1-dim di V generato da $e_0 + 2e_1 + 3e_2$

Nomenclatura 1

Fissato $e_0 \dots e_n$, i punti

$$F_0[1, 0, \dots, 0] = [e_0], \dots, F_n[0, \dots, 1] = [e_n].$$

sono i punti fondamentali del riferimento

$U[1, \dots, 1]$ punto unità del riferimento

Nota Bene

Poichè $[v] = [\lambda v]$ risulta

$$\lambda v = \lambda x_0 e_0 + \dots + \lambda x_n e_n.$$

quindi le coordinate omogenee sono determinate solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

Osservazione

se $e_0 \dots e_n$ è un riferimento proiettivo, anche $(\mu e_0) \dots (\mu e_n)$, $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un riferimento proiettivo e i punti hanno le stesse coordinate omogenee rispetto ai due riferimenti.

Quindi

consideriamo identici due riferimenti se definiti da basi proporzionali

$$e_0, \dots, e_n = (\mu e_0), \dots, (\mu e_n).$$

Un riferimento in \mathbb{P}^n determinato dalla base canonica di \mathbb{K}^{n+1} si dice riferimento standard.

i punti fondamentali sono

$$[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1].$$

Dato $W \subset V$ sottospazio vettoriale possiamo considerare $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(V)$
 $\mathbb{P}(W)$ è detto sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = (\dim V - 1) - (\dim W - 1) = \dim V - \dim W.$$

Definizione 3

Un iperpiano in \mathbb{P}^n è un sottospazio proiettivo di codimensione 1

Supponiamo che in \mathbb{P}^n sia fissato un riferimento e_0, \dots, e_n con coordinate omogenee x_0, \dots, x_n

$$\circledast \quad a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se leggiamo quest'equazione in V è l'equazione cartesiana di un iperpiano vettoriale $H \subset V$

I punti di $P = [v] \in \mathbb{P}$ le cui coordinate omogenee verificano \circledast sono quelli tali che $v \in H$, $v \neq 0$ quindi sono i punti di $\mathbb{P}(H)$

Nota bene

Se $[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ e

$$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0.$$

allora anche $a_0y_0 + \dots + a_ny_n = 0$ perché $[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ significa $y_i = \mu x_i \quad \mu \in \mathbb{K}\{0\}$ e

$$a_0y_0 + \dots + a_ny_n = a_0\mu x_0 + \dots + a_n\mu x_n = \mu(a_0x_0 + \dots + a_nx_n) = 0.$$

Iperpiano coordinati su \mathbb{P}^n (rispetto al riferimento standard)

$$H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Ad esempio, in \mathbb{P}^2 , $H_0 = \{x_0 = 0\}$

$$H_1 = \{x_1 = 0\}$$

$H_2 = \{x_2 = 0\}$ Più in generale consideriamo un sistema di t equazioni omogenee

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{t0}x_0 + \dots + a_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

Se $W \subset V$ è il sottospazio definito dal sistema precedente, l'insieme di punti $P \in \mathbb{P}$ le cui coordinate verificano il sistema è $\mathbb{P}(W)$

Sia $A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq n$ e sia $r = rk(A)$ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim W - 1 = \dim V - r - 1 = \dim \mathbb{P}(V) - r$ Quindi $\mathbb{P}(W)$ ha dimensione r su \mathbb{P}

Intersezione

$$A_1x = 0 \quad \mathbb{P}(W_1)$$

$$A_2x = 0 \quad \mathbb{P}(W_2)$$

$$\begin{cases} A_1x = 0 \\ A_2x = 0 \end{cases} \quad \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

In particolare $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq 0 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Definizione 4

$\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)$ si dicono

Incidenti se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ Sghembi se $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

Osservazion

La formula si generalizza in

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

Definizione 5

Se $\emptyset \neq J \subset \mathbb{P}$, il sottospazio proiettivo generato da J è

$$L(J) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq J} \mathbb{P}(W).$$

con W sottospazio di V

Caso speciale

$J = \{p_{1,t}\}$. Scriviamo in tal caso $L(p_1, \dots, p_t)$ Notiamo che se

$$p_1 = [v_1], \dots, p_t = [v_t].$$

$$L(p_1, \dots, p_t) = \mathbb{P}(< v_1, \dots, v_t >).$$

In particolare

$$\dim(L(p_1, \dots, p_t)) \leq t - 1$$

Definizione 6

p_1, \dots, p_t si dicono linearmente indipendenti se

$$\dim(L(p_{1,t})) = t - 1.$$

Esempio

p_1, p_2 sono indipendenti \Leftrightarrow sono distinti

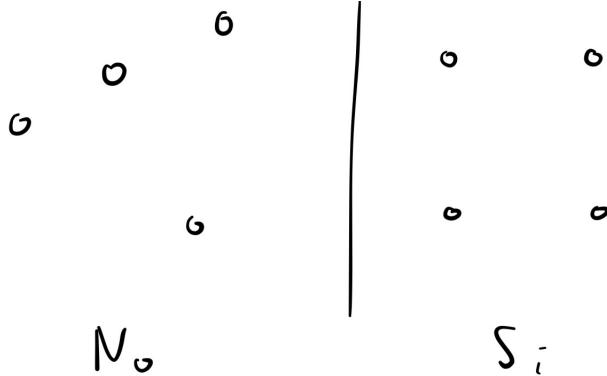
p_1, p_2, p_3 sono indipendenti \Leftrightarrow non sono allineati

Definizione 7

p_1, \dots, p_t in $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\dim(V) = n + 1$ si dicono in posizione generale se

- sono linearmente indipendenti ($t \leq n + 1$)
- se $t > n + 1$ e $n + 1$ tra essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti

Esempio su \mathbb{P}^2



2 Equazioni parametriche di un sottospazio

$k + 1$ punti linearmente indipendenti $[v_0], \dots, [v_n]$ in un sottospazio proiettivo S di dimensione k .

Per ogni $P \in S$,

$$P = [\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k].$$

Fissiamo ora un riferimento e_0, \dots, e_n du \mathbb{P}

Allora se v_i ha coordinate $(p_{i0}, \dots, p_{in})^t$ rispetto a $e_0, \dots, e_n\}$ e $P = P[x_0, \dots, x_n]$ si ha

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \dots + \lambda_k p_{k0} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \dots + \lambda_k p_{k1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \dots + \lambda_k p_{kn} \end{cases}$$

Caso importante: rette $[v_0], [v_1]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} \\ x_0 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} \\ \vdots \\ x_0 = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} \end{cases}$$

\mathbb{P} piano proiettivo, r retta per $P[p_0, p_1, 2], Q[q_0, q_1, q_2]$ r è un iperpiano in \mathbb{P}

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esercizio Se in \mathbb{P}^3 sono dati punti non allineati

$$P[p_0, p_1, p_2, p_3], Q[q_0, q_1, q_2, q_3], R[r_0, r_1, r_2, r_3].$$

l'equazione del piano per P, Q, E è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempio Retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per $[-1, 1, 1], [1, 3, 2i]$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2i \end{pmatrix} = 0.$$

- C'eradicare che i punti $A = [1, 2, 2], B = [3, 1, 4], C = [\dots]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e scrivere un'equazione della retta che li contiene

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

- Verificare che le rette per $\mathbb{P}(\mathbb{C})$

$$ix_1 - x_2 + 3ix_0 = 0$$

$$x_0 + x_1 - ix_2 = 0$$

5...

hanno intersezione non vuota (basta verificare che il determinante sia nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i & -1 \\ 1 & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0$$

Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ due sottospazi proiettivi

$L(S_1 \cup S_2)$ è detto sottospazio somma.

$$L(S_1, S_2) = P(W_1 + W_2).$$

Infatti, se $\mathbb{P}(W) \supset S_1 \cup S_2$, allora contiene $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ perché W deve contenere sia W_1 che W_2

D'altra parte, $W_1 + W_2 \supseteq W_1, W_1 + W_2 \supseteq W_2$

quindi $\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_1) = S_1$

$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq P(W_2) = S_2 \Rightarrow \supseteq L(S_1, S_2)$

Teorema 1 (Formula di Grassmann proiettiva)

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

(S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$)

Dimostrazione

La dimostrazione segue subito dalla formula di Grassmann vettoriale

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

$$\dim L(S_1, S_2) - 1 = \dim S_1 + \dim S_2 + 1 - (\dim S_1 \cap S_2 + 2)$$

□

Osservazione

Poiché $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$, risulta dalla formula di Grassmann

$$\dim S_1 \cap S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

In particolare

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P} \Rightarrow S_1, S_2 \text{ sono incidenti.}$$

(Infatti $\dim S_1 \cap S_2 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \geq S_2 \neq \emptyset$)

Corollario 1 (Antani²)

1. In un piano proiettivo due rette si intersecano
2. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano si intersecano e due piani distinti si intersecano in una retta

Lezione 26 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-09

1 Mappe tra spazi proiettivi

Siano V, W \mathbb{K} -spazi vettoriali

Definizione 1

Un'applicazione $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ si dice trasformazione proiettiva se esiste un'applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \rightarrow W$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Osservazione

Scriviamo $f = \bar{\varphi}$ e diciamo che φ induce f .

Notiamo che $\bar{\varphi} = \overline{\lambda\varphi} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi la famiglia $\{\lambda\varphi | \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$ induce la stessa trasformazione proiettiva

Nomenclatura 1

- Se φ è un isomorfismo $f = \bar{\varphi}$ si chiama isomorfismo proiettivo
- Se $\varphi : V \rightarrow V$ è un isomorfismo, $f = \bar{\varphi}$ si chiama proiettività
- $A, B \subseteq \mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se esiste proiettività f tale che $f(A) = B$

Formula di Grassmann Proiettiva

$$S_1 = \mathbb{P}(W_1) \quad S_2 = \mathbb{P}(W_2)$$

$$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \quad L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Dove $L(S_1, S_2)$ è il minimo sottospazio che contiene S_1, S_2

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

$$\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}.$$

\Rightarrow se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}$ allora S_1, S_2 sono incidenti

2 Sottospazi in posizione Generale

Definizione 2

S_1, S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale se $S_1 \cap S_2$ ha dimensione minima

Osservazione

Se $\dim S_1 = h, \dim S_2 = k, \dim \mathbb{P} = n$ allora S_1, S_2 sono in posizione generale se

$$\dim S_{12} = h + k - n \quad \text{se } h + k \geq n.$$

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad \text{se } h + k < n.$$

Definizione 3 (Cono proiettivo)

$$J \subseteq \mathbb{P}(V), \quad P \in \mathbb{P}$$

Il Cono proiettivo J di p è definito con

$$C_p(J) = \bigcup_{Q \in J} L(P, Q).$$

Esercizio 1. $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo, allora

$$C_p(S) = L(P, S).$$

2. S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi, allora

$$L(S_1, S_2) = \bigcup_{P_1 \in S_1, P_2 \in S_2} L(P_1, P_2) = \bigcup_{P_2 \in S_2} C_{P_2}(S_1).$$

$H \in \mathbb{P}$ iperpiano $P \in \mathbb{P} \setminus H$

La proiezione di H di centro P è l'applicazione

$$\pi_{P,H} : \mathbb{P} \setminus \{P\} \rightarrow H.$$

$$\pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H.$$

Osserviamo che se $J \subseteq \mathbb{P}$ e $p \notin J$

$$\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J).$$

Esempio[Corazzata Cotionkin]

Nota

$$\mathbb{P}^N, \quad H_0 = \{x_0 = 0\} = \{[0, x_1, \dots, x_N] \in \mathbb{P}^N\}$$

Dato che punti proporzionali ci danno lo stesso risultato dire $x_0 = 1$ non avrebbe senso, sarebbe identico a $x_0 = 3$

Se $P = [1, 0, \dots, 0] \notin H_0$

Se $Q = [x_0, \dots, x_N]$, allora

$$\pi_{P,H}(Q) = [0, x_1, \dots, x_N].$$

$$L(P, Q) = [\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \dots, \mu x_n]$$

$$L(P, Q) \cap H_0$$

Esempio

$$[1, 2, 1][0, 1, -1]$$

$$\{\lambda[1, 2, 1] + \mu[0, 1, -1] | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \neq (0, 0)\}.$$

Qui c'è lo spazio quoziante $(\lambda, \mu)/\lambda \sim \mu$

3 Posizione generale di sottospazi in $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^4$

$$\begin{aligned}\dim S_1 &= h \\ \dim S_2 &= k \quad \dim S_1 \cap S_2 = \begin{cases} h+k-n & h+k \geq n \\ -1 & h+k < n \end{cases} \\ \dim \mathbb{P} &= n\end{aligned}$$

qui ci sono un bel po di tabelle, conviene copiarle a mano

Osserviamo che in un riferimento proiettivo in \mathbb{P}^n sia e_0, \dots, e_n individua i punti fondamentali ed il punto unità, e questi sono in posizione generale

$$F_0 = [e_0], \dots, F_n = [e_n], u = [e_0 + \dots + e_n].$$

$$1 \ 0 \dots \ 0$$

ogni $(n+1)$ -ple di righe ha rango massimo
 $\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \dots & 1 \\ 1 & 1 \dots & 1 \end{array}$

Esempio \mathbb{P}^2 $[e_0] \begin{array}{c} 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$ tutti i minori di rango 3 sono non zero
 $1 \ 1 \ 1$

Viceversa, data una $(n+2)$ -pla di punti in posizione generale, esiste un unico riferimento proiettivo che li ammette come punti fondamentali e punti unità.

Siano dati P_0, \dots, P_n n punti in posizione generale,

supponiamo che $P_i = [v_i]$, $i = 0, \dots, n$

Allora $\{v_0, \dots, v_n\}$ è una base di V . Se $n \in V$ è tale che $N = [n]$, allora

$$n = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n.$$

in modo unico.

Osserviamo che per l'ipotesi di posizione generale, tutti i λ_i sono diversi da zero.

Allora $(\lambda_0 v_0) \dots (\lambda_n v_n)$ è un riferimento con le proprietà valide: infatti i punti fondamentali sono

$$[\lambda_i v_i] = [v_i] = P_i.$$

$$[(\lambda_0 v_0) + \dots + (\lambda_n v_n)] = [n] = V.$$

4 Esercizi

Verificare che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$[\frac{1}{2}, 1, 1], \quad [1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}], \quad [2, -1, 2].$$

Sono allineati e trovare un'equazione della retta che li contiene

Svolgimento

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 12 - 2 - 10 = 0$$

Altro Esercizio:

Determinare i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui le rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$ax_1 - x_2 + 3ix_0 = 0.$$

$$-iax_1 + x_1 - ix_2 = 0.$$

$$3ix_2 + 3x_0 + x_1 = 0.$$

sono concorrenti (si intersecano in un punto)

Svolgimento

Le rette sono concorrenti se e solo se il sistema delle tre equazioni ha una soluzione non nulla

$$A = \begin{pmatrix} 3i & a & -1 \\ -ia & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0 \quad ra^2 + 4ia + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{-ra^2 - 21a^2}}{3} = \begin{cases} i \\ -\frac{7}{3}i \end{cases}$$

Here we go again

Si considerano i punti seguenti in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \quad P_2 = [0, 1, 1, 1], \quad P_3 = [2, 1, 2, 2], \quad P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

- Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale
- Calcola $\dim L(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e trovare equazioni cartesiane
- Completare, se possibile, P_1, P_2, P_3 a un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Svolgimento

I punti dati sono in posizione generale se posto $P_i = [v_i]$, v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tuttavia il determinante del minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diverso da 0

$$L(P_1, P_2, P_3, P_4) = L(P_1, P_2, P_3).$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_0 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Ultimo punto dell'esercizio

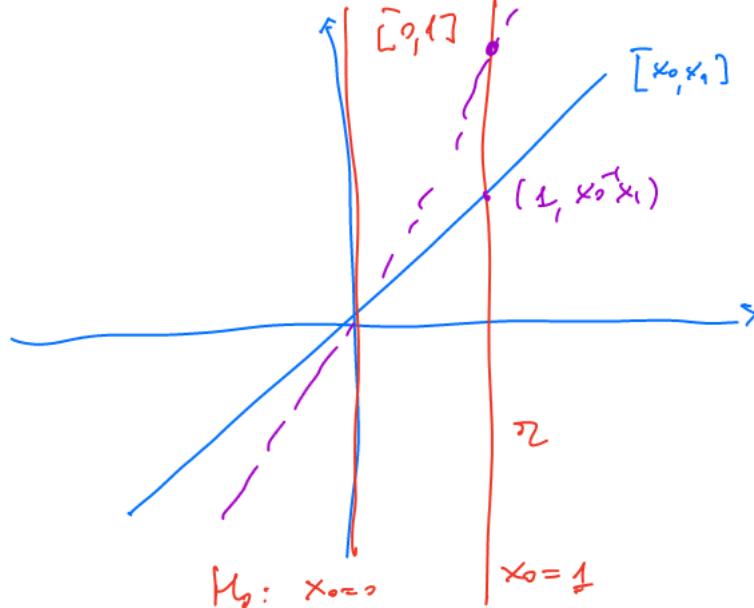
Per prima cosa si completa ad una base, si può completare con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il determinante è diverso da 0, a questo punto possiamo prendere P_1, P_2, P_3 come prima, $\tilde{P}^4 = [0, 0, 0, 1] \ U = [3, 2, 4, 6]$

Lezione 27 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-13

1 Ancora da definire



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \text{rette passanti per } O [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \ (\lambda x_0, \lambda x_1) \in \mathbb{A}^2, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Osserviamo che ogni punto $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ individua una retta parallela ad r (in \mathbb{A}^2), che interseca r nell'unico punti $(1, x_0^{-1}x_1)$

(Infatti dobbiamo imporre che $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ abbia prima coordinata 1, cioè $\lambda x_0 = 1$ cioè $\lambda = x_0^{-1}$

Viceversa ogni punto $(1, x)$ appartiene ad un'unica retta per l'origine, quella che corrisponde al punti $[1, x] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$

In definitiva, abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\mathbb{P}^1 \setminus H_0 \leftrightarrow r$$

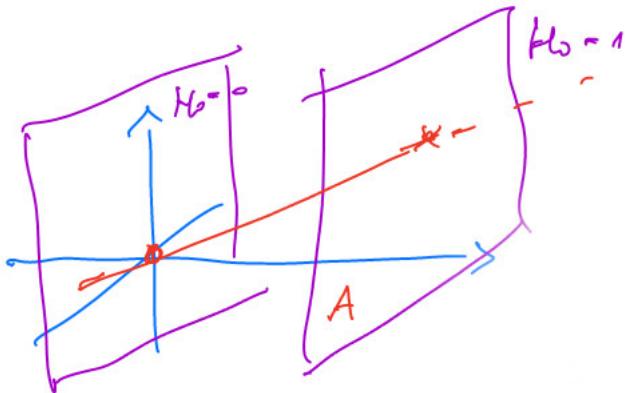
$$\mathbb{P}^1 \leftrightarrow r \cup \{\infty\}$$

$H_0 \leftarrow \infty$ punto all'infinito di r

La costruzione si generalizza a $\mathbb{P}^n \leftrightarrow$ rette per l'origine di \mathbb{A}^{n+1}

$$[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \leftrightarrow \text{rette } \{x_0, \dots, \lambda x_{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \quad H_0 = \{x_0 = 0\}$$

Consideriamo l'iperpiano affine $A : \{x_0 = 1\} = \{(1, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^{n+1}\}$



$$\begin{aligned}
 j : A &\rightarrow \mathbb{P}^n \setminus \{H_0\} \\
 (1, y_1, \dots, y_n) &\mapsto [1, y_1, \dots, y_n] \\
 j_0^{-1}([x_0, \dots, x_n]) &= \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right]
 \end{aligned}$$

Quindi come sopra, ho una corrispondenza biunivoca

$$A \cup \{H_0\} \rightarrow \mathbb{P}^n.$$

Se nella costruzione precedente identificavamo A con \mathbb{A}^n tramite $(1, y_1, \dots, y_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ otteniamo

$$j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \setminus \{H_0\}$$

$j_0(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n]$ passaggio a coordinate omogenee rispetto a x_0

$j_0^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$ passaggio a coordinate non omogenee rispetto ad x_0
 ci sono analoghe mappe per ogni $i \ 0 \leq i \leq n$

Modello di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

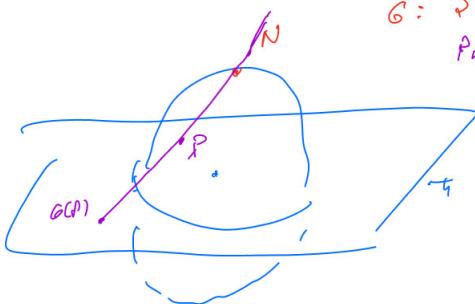
$$\begin{aligned}
 E^3 &\text{ spazio euclideo con coordinate } x, y, z \\
 \pi = \{z = 0\} \quad S^2 &= \{(x, y, z) \in E^3 \mid d(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1\}
 \end{aligned}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Proiezione stereografica

$$G: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$P \mapsto \overline{NP/N}$



$$\text{Se } P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NP} \quad \begin{cases} x = x't \\ t = y't \\ z = (z-1)t + 1 \end{cases}$$

$$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{1-z'} \\ \frac{y'}{1-z'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio
σ è invertibile con inversa

$$\sigma^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix}$$

identifichiamo π con \mathbb{C} tramite

$$\pi \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(u \ v \ 0) \rightarrow u + iv$$

Allora abbiamo ottenuto una corrispondenza biunivoca

$$\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

$$\sigma(N) = \infty.$$

$$\sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{x' + iy'}{1 - z'} \quad (z \neq 1).$$

3 Alcuni degli esercizi svolti a lezione

Esercizio

Determinare un'equazione cartesiana del piano da $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[1, 1, 0, 1]$ e per i punti impropri delle rette

$$r = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} .$$

$$s = \begin{cases} 2x - y - 2x + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Il punto improprio di r è $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow [0, 0, -1, -1]$$

Per quanto riguarda s

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_0 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [0, 1, -2, 2]$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

4 Dualità

$$\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^*) \quad \dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}^V \text{ poichè } \dim V = \dim V^*$$

Osserviamo che $F, F' \in V^*$ definiscono lo stesso punto in \mathbb{P}^V se e solo se

$$F' = \lambda F \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Ma in questo caso $\ker F = \ker F'$

Ne segue che l'iperpiano $\ker F$ dipende solo da $[F]$ Quindi si ha un'applicazione di dualità

$$\delta : \mathbb{P}^V \rightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}\}.$$

$$\delta([F]) = \mathbb{P}(\ker F).$$

δ è biunivoca

è iniettiva perché due funzionali non nulli che hanno lo stesso nucleo sono proporzionali.

Inoltre l'iperpiano di V è il nucleo di un funzionale, quindi δ è suriettiva

Diciamo che gli iperpiani H_1, \dots, H_s in \mathbb{P} sono linearmente indipendenti se lo sono $\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_s)$

Sia $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$ la corrispondente base duale di $V^* : \eta_i(e_i) = \delta_{e_i}$

$$H \subseteq \mathbb{P}^n \quad a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0.$$

$$H = \mathbb{P}(\ker F) \quad F \in V^* \text{ definita :}$$

$$F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Dove le a_i sono le coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo $\{\eta_0, \dots, \eta_n\}$

$$\text{In particolare } H = \delta([F]) \quad H = H[a_0, \dots, a_n]$$

$$H_0 = H_0[1, \underline{0}, \dots, \underline{0}] = \delta([\eta_0])$$

\vdots

$$H_n = H_n[0, \dots, 0, 1] = \delta([\eta_n])$$

Definizione 1

$$S \subset \mathbb{P} \text{ sottospazio, } \dim S = k \leq n - 1$$

$$\bigwedge_1(S) = \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P} \text{ che contengono } S \}.$$

dove $\bigwedge_1(S)$ è il sistema lineare di iperpiani di centro S

Esempi

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \quad S = \{Q\}$$

$$\bigwedge_1(Q) = \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}^2 \text{ che contengono } Q = \text{fascio di rette di centro } Q \}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^3 \quad S = \{r\}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1(r) &= \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}^3 \text{ che contengono } r = \text{fascio di rette di centro } r \\ \mathbb{P} &= \mathbb{P}^3 \quad S = \{Q\} \\ \Lambda_1(Q) &= \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}^3 \text{ che contengono } Q = \text{stella di rette di centro } Q\}\end{aligned}$$

Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-15

1 Conclusion Spazi proiettivi (godo)

V spazio vettoriale, V^* , $\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^*)$ spazio proiettivo duale

Se B è una base di V (ottenuta ad esempio a partire da un riferimento proiettivo di $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$), la base duale B^* di V^* può essere usata per introdurre in \mathbb{P}^V un sistema di coordinate omogenee "duali"

$$0 \neq L \in V^* \quad [L] \in \mathbb{P}^V.$$

se x_1, \dots, x_n sono coordinate in V rispetto a $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n.$$

e L ha coordinate (a_0, \dots, a_n) rispetto alla base $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

$$(v_i^*(v_j) = \delta_{ij})$$

Qui il professore prende letteralmente un altro file e inizia a scriverci sotto, non sappiamo a cosa si stia riferendo

Sia $S = \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di \mathbb{P} di dimensione k .

$$W^\# = \{F \in V^* | F|_W = 0\}.$$

$$\dim W = n - k$$

$$\delta : \{\text{sottospazi proiettivi di dim } k \text{ di } \mathbb{P}\} \rightarrow \{\text{sottospazi proiettivi di } \mathbb{P}^V \text{ di dim } n-k-1\}.$$

$$\mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(W^\#).$$

Osservazione

Se prendiamo $k = n - 1$ sottospazi proiettivi di dim $n - 1$ in \mathbb{P} = iperpiani di \mathbb{P}

Sottospazi proiettivi di dim 0 in \mathbb{P}^V = punti di \mathbb{P}^V

Quindi è facile vedere che $\delta = \tilde{\delta}^{-1}$

Nomenclatura 1

δ (o δ^{-1}) si chiama corrispondenza di dualità

Lemma 1 (Proprietà della corrispondenza di dualità)

1. δ è biunivoca
2. δ rovescia le inclusioni
3. $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$
 $\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$

Dimostrazione

1. Segue dal caso vettoriale

2. Segue dal fatto che $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1^\# \supseteq W_2^\#$

3. $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$

$$\delta(S_1 \cap S_2) = \delta(\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)) = \mathbb{P}((W_1 \cap W_2)^\#) = \mathbb{P}(W_1^\# + W_2^\# = L(\delta(S_1), \delta(S_2)))$$

$$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) = \mathbb{P}((W_1 + W_2)^\#) = \mathbb{P}(W_1^\# \cap W_2^\#) \text{ (manca una minchiata da finire)} \quad \square$$

Definizione 1

Un sottospazio proiettivo di \mathbb{P}^V si chiama sistema lineare

Il centro S di un sistema lineare L è l'intersezione degli iperpiani del sistema lineare

Allora L coincide con tutti gli iperpiani di \mathbb{P} che contengono S

$L \leftrightarrow \Lambda_1(S)$ sistema lineare degli iperipiani di centro S .

Osservazioni

H iperpiano di \mathbb{P} $HS \Leftrightarrow \delta(H) \in \delta(S)$

Ne segue che se $\dim S = k$ allora $\dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 & (H_1) \\ \vdots & n-k \text{ equazioni indipendenti.} \\ a_{n-k\ 0}x_0 + \dots + a_{n-k\ n}x_n = 0 & (H_{n-k}) \end{cases}$$

$$S = H_1 \cap \dots \cap H_{n-k}$$

$$\Lambda_1(S) = \delta(S) = \delta(H_1 \cap \dots \cap H_{n-k}) = L(\delta(H_1), \dots, \delta(H_{n-k}))$$

$$\Rightarrow \dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$$

$k = n - 2$ $\Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di iperpiani di centro S

$n = 2$ e S è una retta, allora $\Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di piani di asse la retta

$T : V \rightarrow W$ lineare

$$[T] : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T) \rightarrow \mathbb{P}(W) \quad \text{È definita se } v \in V \setminus \ker T, \lambda \neq 0$$

$$[v] \rightarrow [T(v)]$$

$$[T][tv] = [T(tv)] = [\lambda T(v)] = [T(v)].$$

Osservazione

Se $\lambda \neq 0$, $\ker T = \ker \lambda T$, inoltre

$$[\lambda T] = [T].$$

Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi e sia $\mathbb{P}(U)$ un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$

Definizione 2

$f : \mathbb{P}(V) \setminus P(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ si dice applicazione proiettiva se esiste

$T : V \rightarrow W$ lineare tale che $[T] = f$ $(\ker T \subset U)$

Problema

È possibile che un'applicazione proiettiva sia indotta da due applicazioni lineari diverse?

Proposizione 1

Siano $T, S : V \rightarrow W$ due applicazioni lineari supponiamo che

1. *Esiste U sottospazio di V tale che $\ker T, \ker S \subset U$*
2. $\forall v \in V \setminus U \quad \exists \lambda = \lambda(v) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c.

$$T(w) = \lambda S(v).$$

Allora $\lambda = \text{const}$ e $T = \lambda S$ in particolare $\ker T = \ker S$

Corollario 1

Se $f : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è indotta da $T, S : V \rightarrow W$ allora, $T = \lambda S, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

In particolare $\ker T = \ker S$ e il dominio di f si può estendere a $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T)$ cioè esiste una trasformazione proiettiva

$\tilde{f} : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che

$$\tilde{f}|_{\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)} = f.$$

Tale dominio di definizione è massimale

Definizione 3

Un'applicazione proiettiva si dice non degenere se è indotta da un'applicazione lineare iniettiva, si dice degenere altrimenti.

Un'applicazione proiettiva non degenere $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ si dice proiettività

Osservazione

Le proiettività formano un gruppo, denotato $PGL(V)$

Esempio

$$PGL(n+1, \mathbb{K}) = PGL(\mathbb{P}_k^n) = PGL(\mathbb{K}^{n+1})$$

sono le matrici di $GL(n_1, \mathbb{K})$ identificate se differiscono per uno scalare non nullo

$PGL(n_1, \mathbb{K})$ /matrici scalari non nulle.

dove le matrici scalari non nulle $\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$

Dimostrazione (Proposizione)

Proviamo anzitutto che $\ker T = \ker S$

Sia Z un complementare di U : $V = U \oplus Z$ $u + z \in V \setminus U$ (poiché $u + z \in U$ anche z appartiene a U escluso) \square

Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-16

1 Parte mancante

Dimostrazione

Supponiamo che esista una base $\{z'_1, \dots, z'_r\}$ di Z' con $z'_v \in V \setminus U$ e $\Sigma z'_i \in V \setminus U$

Sia $\lambda'_i = \lambda(z'_i)$, $\lambda_0 = \lambda(\Sigma z'_i)$

$$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i)$$

$$T(\Sigma z'_i) = \lambda_i S(z'_i) = \lambda_0 \Sigma S(z'_i)$$

$$T(\Sigma z'_i) = \Sigma T(z'_i) = \Sigma \lambda_i S(z'_i)$$

$$\text{quindi } \lambda_0 \Sigma S(z'_i) = \Sigma \lambda_i S(z'_i)$$

$$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)S(z_i) = 0 \quad S(\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z_i) = 0$$

$$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z'_i \in \ker S = U.$$

$$\Rightarrow \Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z'_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_0 \forall i.$$

$$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i) \Leftrightarrow T(Z'_i) = \lambda_0 S(z'_i) \Rightarrow T = \lambda_0 S.$$

Poichè gli z_i sono una base)

Resta da vedere che esiste una base con le proprietà richieste. Posso supporre (esercizio) che U sia un iperpiano. Allora

$$\dim Z' \cap U = \dim Z' - 1 \quad \text{perchè } Z \not\subset U.$$

(se fosse $Z' \subseteq U \quad V = U' \oplus Z' \subset U \neq V$)

Prendiamo $z'_1 \in Z' \setminus U$, $\{z_2'', \dots, z_r''\}$ base di $Z' \cap U$

Poniamo:

$$z'_2 = z'_1 + z_2''$$

$$z'_3 = z'_1 + z_3''$$

\vdots

$$z'_r = z'_1 + z_r''$$

Dato che $\{z'_1, \dots, z'_r\}$ è la base cercata, inatti i suoi elementi non appartengono ad U , perchè sono somma di un elemento in U e di uno fuori da U . Inoltre

$$\sum_{i=1}^r z'_i = r z'_1 + \sum_{i=1}^r z_i'' \Rightarrow \notin U$$

Tutto questo funziona se ($\text{char}\mathbb{K} = 0$)

□

Teorema 1 (Teorema Fondamentale sulla proiettività)

Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $\mathbb{P}(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di dimensione n .

Date due $(n+2)$ -ple $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$ e $[z_0], \dots, [z_n], [w]$ in $\mathbb{P}(Z)$ entrambe in posizione generale, esiste un'unica trasformazione proiettiva non degenera $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che

$$f([v_i]) = [z_i], \quad 0 \leq i \leq n, \quad e \quad f([u]) = [w].$$

$$Im f = \mathbb{P}(Z)$$

Corollario 1

Dati $n+2$ punti in posizione generale $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = n$ esiste un unico isomorfismo $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n$ tale che

$$f([v_i]) = [e_i] \quad e \quad f([u]) = [e_0 + \dots + e_n].$$

In altre parole, esiste un riferimento proiettivo in cui $[v_i]$ ha coordinate omogenee $[0 \dots, 0, 1, \dots, 0]$ e $[w] = [1, \dots, 1]$

Dimostrazione

Il fatto che $[v_0], \dots, [v_n], [u]$ sono in posizione generale implica che

1. $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\{\alpha_0 v_0, \dots, \alpha_n v_n\}$ è una base di V

2. $u = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i$

(infatti, se fosse $\lambda_{j_0} = 0$, avremmo che $u \in Span\{v_0, \dots, \cancel{v_{j_0}}, \dots, v_n\}$

$\dim Span\{v_0, \dots, v_{j_0-1}, u, v_{j_0+1}, \dots, v_n\} = 0$

Sia $B = \{v'_0, \dots, v'_n\}$ la base di V con $v'_i = \lambda_i v_i$. Ovviamente $[v_i] = [v'_i]$

Scegliamo similmente $\{z'_0, \dots, z'_n\}$ base di Z con $z'_0 + \dots + z'_n = w$ e $[z'_i] = [z_i]$

Sia $T : V \rightarrow W$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(v'_i) = z'_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

T è iniettiva poiché gli $\{z'_i\}$ sono indipendenti e $Im T = Span\{z'_0, \dots, z'_n\} = Z$.

Inoltre

$T(u) = T(\sum_{i=1}^n v'_i) = \sum_{i=1}^n T(v'_i) = \sum_{i=1}^n z'_i = w$
quindi $f = [T]$ è non degenera e ha le proprietà indicate

$$f([v_i]) + f([\delta v'_i]) = [T(v'_i)] = [z'_i] = [z_i].$$

$$f([u]) = [T(u)] = [w].$$

□

Esempio

Determinare la proiettività di f in $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ tale che

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a coppie li denotiamo v_1, z_1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\lambda = -1, \mu = +1, \lambda' = 2, \mu' = 2$

$$v'_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{inoltre } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v'_0 + v'_1$$

$$z'_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad z'_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(v'_i) = z'_i \quad i = 0, 1$

$$[\varphi]_{\{v'_0, v'_1\}}^{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$[\varphi]_{\{e_1, e_2\}}^{\{e_1, e_2\}} = [\varphi]_{\{v'_0, v'_1\}}^{\{e_1, e_2\}} [\varphi]_{\{e_1, e_2\}}^{\{v'_0, v'_1\}} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$f \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_0 - 3x_1 \\ x_0 + x_1 \end{bmatrix}.$$

Lezione 31 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-22

1 Due Teoremi Classici

Teorema 1 (Desgardes)

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ piano proiettivo, $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}$ punti distinti tali che le tre rette

$$L(P_1, P_4) \quad L(P_2, P_4) \quad L(P_3, P_6).$$

abbiano in comune un punto $P_0 \neq P_i \quad 1 \leq i \leq 6$. Allora

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6), L(P_2, P_5) \cap L(P_5, P_6), L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5).$$

sono allineati

Dimostrazione

TODO AGGIUNGI DISEGNO

Siano $v_i \in V, \leq i \leq 6$, t.c. $[v_i] = P_i$. Per ipotesi

$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6.$$

Inoltre poiché $P_0 \neq P_i, i > 1$, tutti gli α_i sono non nulli. I punti

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$$

$$L(P_2, P_5) \cap L(P_5, P_6)$$

$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$ sono associati ai vettori

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$$

$$= \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_5 v_4 - \alpha_6 v_6$$

$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 - \alpha_5 v_5$ la loro somma è zero. Dunque i punti corrispondenti sono allineati

TODO Non ho capito se sta cosa deve terminare così (rivedere) \square

Teorema 2 (Pappo)

A_1, \dots, A_6 distinti $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \dots, L(A_6, A_1)$ distinte

esistono r, s rette con $A_i \in r, i$ dispari, $A_i \in s$ i pari

Supponiamo poi $0 = r \cap s \neq A_i$. Allora

$$L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5), \quad L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6), \quad L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1).$$

sono allineati

TODO AGGIUNGI DISEGNO

Dimostrazione

Poiché $r = L(A_1, A_3), s = L(A_2, A_4)$ sono distati e $0 \neq A_i$

A_1, A_2, A_3, A_4 è un riferimento proiettivo. Ma

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)b(1-1+a) + ab(1-a) = 0$$

□

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo di dimensione n $S = \mathbb{P}(U)$, $H = \mathbb{P}(W)$ sottospazi proiettivi tali che

$$S \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad L(S, H) = \mathbb{P}.$$

Se $\dim S = k$, $\dim H = h$ per le formule di Grassmann

$$k + h = n - 1.$$

$$\forall P \in \mathbb{P} \setminus H, \quad \dim L(H, \{P\}) = h + 1$$

Quindi $S \cap L(H, \{0\})$ è un punto

Posso definire la proiezione su S di centro H come

$$\pi_S^H : \mathbb{P} \setminus H \rightarrow \mathbb{P}.$$

$$P \mapsto S \cap L(H, \{P\}).$$

π_S^H è una trasformazione proiettiva degenere indotta da $\mathbb{P}_U^W : V \rightarrow V$ proiezione su U parallela ad H

TOOD AGGIUNGI DISEGNO

2 Proiettività

Siano in \mathbb{P}^2 r, s rette distinte con $A = r \cap s$

Definizione 1

Dato $O \notin r \cup s$, la restrizione ad r della proiezione su s di centro O è detta **proiettività di centro O**

TODO UN ALTRA IMMAGINE

f è un isomorfismo proiettivo. La notazione si generalizza a \mathbb{P}^n nel modo seguente.

S_1, S_2 sottospazi di dimensione k , H sottospazio tale che

$$H \cap S_1 = G \cap S_2 = \emptyset.$$

$$\dim H = n - k - 1.$$

Allora la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H è un isomorfismo proiettivo $f : S_1 \rightarrow S_2$ detto prospettività di centro H

Definizione 2

Una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathbb{K}[x, y]$. Se $f(x, y)$ è un rappresentante della classe, l'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

si dice equazione della curva

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2 \mid f(x, y) = 0 \right\}.$$

è il supporto della curva

$\deg f$ grado della curva

Caso affine

Sia $T : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ l'affinità $T(X) = AX + C$

$$A = (a_{ij}) \in GL(2, \mathbb{L}) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sia l una curva di equazioni $f(x, y) = 0$ La curva D di equazione

$$g(x, y) = 0.$$

ove $g(x, y) = f(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + c_1, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + c_2)$
è detta la trasformata di l tramite T^{-1}

$$D = T^{-1}(l).$$

Se $T^{-1}X = BX + d$ ($B = A^{-1}, \dots$)

allora $g(b_{11}x_1 + b_{12}y_1 + d_1, b_{21}x_1 + b_{22}y_1 + d_2) = A(x, y)$ quindi $l = T(D)$

è chiaro che se $p(x, y) \in D$ allora $T(p) \in l$ e viceversa.

quindi i supporti si dicono affinamente equivalenti

Definizione 3

Data l curva affine, una curva affine D si dice affinamente equivalente a l
se esiste un'affinità T tale che $l = T(D)$

Lezione 32 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-23

1 Omogeneizzati e Curvy

Curva algebrica affine in \mathbb{A}^2 (proiettivo su \mathbb{P}^2) La nozione si generalizza in modo ovvio al concetto di ipersuperficie (algebrica)

Definizione 1

Una ipersuperficie algebrica in \mathbb{A}^n (rispettivamente \mathbb{P}^n) è una classe di proporzionalità di polinomi in

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \text{ (polinomi omogenei in } \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]).$$

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (x_1, \dots, x_n) \quad \underline{X} = (X_0, \dots, X_n) \\ \ell &= f(\underline{x}) = 0 \text{ equazione della curva} \quad F(\underline{X}) = 0 \\ (x \text{ sono coordinate affini}, X \text{ riferimento proiettivo}) \\ \text{supporto di } \ell &= \{\underline{x} \in \mathbb{A}^n | f(x) = 0\} \quad \{[X_0, \dots, X_n] | F(X) = 0\} \\ \varphi \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n) &\quad \psi \in \text{PGL}(n) \\ \ell \text{ ipersuperficie definita da } f(\underline{x}) &= 0 \\ \varphi(\ell) : \text{ipersuperficie definita da} \\ f(\varphi^{-1}(\underline{x})) &= 0 \end{aligned}$$

Qui il tipo ha corso un po troppo, TODO finire la definizione e ci sta una mezza osservazione

$$\begin{aligned} \ell : x^2 + y^2 = 1 \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} \quad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ \varphi(\ell) := (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\text{ ipersuperficie} \end{aligned}$$

Definizione 2

Due ipersuperfici affini ℓ_1, ℓ_2 (proiettivi) sono affinamente equivalenti (proiettivamente equivalenti), se esiste $\varphi \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ ($\psi \in \text{PGL}(n)$) tale che $\varphi(\ell_1) = \ell_2$ ($\psi(\ell_1) = \ell_2$)

Nota:

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0}$$

$f(\underline{x}) \rightarrow F(\underline{X})$ e questo si chiama polinomio omogeneizzato di F

Esempio

$$x + y + z - 3 = 0 \rightsquigarrow X_1 + X_2 + X_3 - 3X_0 = 0$$

2 Chiusura proiettiva di ℓ

La chiusura proiettiva dell'ipersuperficie affine di equazione $f(\underline{x}) = 0$ è l'ipersuperficie proiettiva di equazione $F(\underline{X}) = 0$ dove F è il polinomio omogeneizzato di f
I punti di $\ell^\star \cap H_0$ si chiama punti impropri di ℓ (ℓ^\star è la chiusura proiettiva)
Se scriviamo f come

$$f(\underline{x}) = f_0 + f_1(\underline{x}) + \dots + f_n(\underline{x}).$$

con gli f_i omogenei di grado i

$$F(X) = f_0 X_0^n + f_1(\underline{X}) X_0^{n-1} + \dots + f_n(\underline{X}).$$

ad esempio

$$x^2 + 2xy + y^2 + z + 2x - 3 = 0.$$

diventa

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_3X_0 + 2X_1X_0 - 3X_0^2 = 0.$$

punti impropri: intersecano con $X_0 = 0$

$$[0, X_1, X_2, X_3] : X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

Quindi l'equazione dei punti omogenei è data da

$$f_n(\underline{X}) = 0.$$

3 Classificazione delle coniche proiettive

Le coniche proiettive sono le curve di secondo grado in \mathbb{P}^2
a generica equazione può scriversi

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{12}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2.$$

Posto $a_{21} = a_{12}, a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}$, la forma precedente si scrive come

$$(1) \quad \underline{X}^t A \underline{X} = 0 \quad \text{ove } A = (a_{ij}).$$

Se ora $M \in GL(3, \mathbb{K})$ e rimpiazziamo \underline{X} con $M\underline{X}$ da (1) si ottiene

$$(2) \quad (M\underline{X}^t) A M \underline{X} = 0$$

$$\underline{X}^t M A M \underline{X} = 0$$

$$\underline{X}^t B \underline{X} = 0 \quad B = M^t A M \text{ TODO}$$

Per definire ℓ_2 è proiettivamente a ℓ_1

Viceversa ogni conica poriettiva equivalente a (ℓ_1) si ottiene in questo modo a partire da $M \in GL(3, \mathbb{K})$ in definitiva

classi di quivalenza proiettiva di coniche \leftrightarrow classi di congruenza di matrici simmetriche

Definizione 3

La conica $\underline{X}^t A \underline{X} = 0$ è:

non degenere se $\det A \neq 0$

semplicemente degenere se $\text{rk } A = 2$ e $\det A = 0$

doppialmente degenere se $\text{rk } A = 1$ e $\det A = 0$

Teorema 1

Sia \mathbb{K} algebricamente chiuso. Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ conica generale

$x_0^2 + x_1^2 = 0$ conica semplicemente degenera

$x_0^2 = 0$ conica doppialmente degenera

Tali coniche non sono equivalenti tra loro

Dimostrazione

Dobbiamo solo classificare le matrici simmetriche 3×3 complesse rispetto alle componenti. Sappiamo che il rango è un invariante completo, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sono le uniche possibilità. □

Nota:

Un invariante completo caratterizza la matrice (se hanno rango uguale allora sono equivalenti e viceversa)

Teorema 2

Ogni conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad \text{conica generale}$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad \text{conica generale a punti non reali}$$

$$x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$x_0 + x_1^2 = 0 \quad \text{sono coniche semplicemente degeneri}$$

$x_0^2 = 0$ *conica doppiamente degenera* Queste coniche non sono equivalenti tra loro

Dimostrazione

Utilizziamo il teorema di Sylvester per classificare le matrici reali simmetriche 3×3 a meno di congruenza

Sappiamo che gli indici sono invariante completo,

ora ricordiamo che stiamo classificando polinomi omogenei a meno di proporzionalità

$$(i_+, i_-, i_0)$$

$$(3, 0, 0)$$

$$(0, 3, 0)$$

$$(0, 0, 3)$$

$$(2, 1, 0)$$

$$(2, 0, 1)$$

$$(0, 2, 1)$$

$$(1, 0, 2)$$

$$(0, 1, 2)$$

$$(1, 1, 1)$$

TODO aggiungi immagine che sennò finisce male

Quindi ogni conica proiettiva è equivalente a unna delle cinque elencate.

Tali coniche non sono equivalenti perché hanno rango diverso oppure stesso rango ma supporti diversi

□

Caso generale: quadriche proiettive

$$\ell \quad \underline{X}^t A \underline{X} = 0 \quad A \text{ matrice simmetrica } (n+1) \times (n+1)$$

Teorema 3

1. \mathbb{K} algebricamente chiuso: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è proiettivamente equivalente a una e una sola quadrica poichè

$$\sum_{i=1}^r x_i^2 = 0 \quad 0 \leq r \leq n.$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una e una sola quadrica

$$\sum_{i=1}^p z_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2 = 0.$$

$$0 \leq p \leq r \leq n, \quad 2p \geq r - 1, \quad r \geq 1$$

Esempio

$$x_0^2 - 1x_1^2 + x_1x_2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \det A = -\frac{1}{4} \neq 0 \quad \ell \text{ è generale}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad i_+ \geq 1 \rightsquigarrow i_+ = 2, \quad i_- = 1, i_+ = 0 \\ \rightsquigarrow \text{equivalente a } x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Lezione 33 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Classificazione affine ed Euclidea

$\ell \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ conica

$$\circledast a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$$

pongo $a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}, a_{21} = a_{12}$ dunque la matrice $A = (a_{ij})$ è simmetrica.

Chiamo

$$\tilde{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Allora } \circledast \text{ diventa.}$$

$$\tilde{\underline{X}}^t A \tilde{\underline{X}}.$$

Considera l'affinità $T_{M,C}(\underline{X}) = M\underline{X} + c$ ove $M \in GL(2, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^2$

Abbiamo visto che c'è un omomorfismo iniettivo

$$Aff(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2) \rightarrow GL(3, \mathbb{K}).$$

$$T_{M,C} \rightarrow \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & M \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se effettuo il cambio di coordinate

$$\tilde{\underline{X}} = \widetilde{M} \tilde{\underline{X}}'.$$

$$\text{l'equivalenza } \tilde{\underline{X}}^t A \tilde{\underline{X}} = 0$$

diventa $(\widetilde{M} \tilde{\underline{X}}')^t A \widetilde{M} \tilde{\underline{X}}' = 0$

$$\tilde{\underline{X}}'^t B \tilde{\underline{X}}' = 0.$$

$$\text{con } B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$$

Questa equazione ci dice che il rango di A è una proprietà affine di ℓ . Chiameremo tale numero rango di ℓ (notazione $r(\ell)$)

Diciamo che ℓ è

non degenere se $r(\ell) = 3$

semplicemente degenere se $r(\ell) = 2$

doppialmente degenere se $r(\ell) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

In altri termini, A_0 è la matrice della forma quadratica associata ai termini quadratici del polinomio $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ (A_0 è il minore ottenuto togliendo prima riga e prima colonna)

$$\tilde{\underline{X}} = \widetilde{M} \tilde{\underline{X}}'$$

$$A \leftrightarrow B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$$

$$A_0 \leftrightarrow B_0 = M^t A_0 M \circledast$$

Dunque anche rkA_0 è un invariante affine di ℓ

$$\det A_0 \begin{cases} \neq 0 & \ell \text{ conica a centro} \\ = 0 & \ell \text{ parabola} \end{cases}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Da \circledast deduciamo che anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine (infatti $\det B = (\det M)^2 \det A_0$)

$$\det B \begin{cases} > 0 & \ell \text{ ellisse} \\ < 0 & \ell \text{ iperbole} \end{cases}.$$

Teorema 1

Ogni conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ è affinamente equivalente a una delle seguenti:

1) \mathbb{K} algebricamente chiuso

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{conica a centro 1}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{conica a centro degenera 2}$$

$$y^2 - x = 0 \quad \text{parabola 3}$$

$$y^2 - 1 = 0 \quad \text{parabola degenera 4}$$

$$y^2 = 0 \quad \text{conica doppiamente degenera 5}$$

2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{ellisse 1}$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{ellisse a punti non reali 2}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{ellisse degenera 3}$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad \text{iperbole 4}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{iperbole degenera 5}$$

$$y^2 - x = 0 \quad \text{parabola 6}$$

$$y^2 - 1 = 0 \quad \text{parabola degenera 7}$$

$$y^2 + 1 = 0 \quad \text{parabola degenera 8}$$

$$y^2 = 0 \quad \text{conica doppiamente degenera 9}$$

Le coniche di ognuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affineamente equivalenti

Dimostrazione

Partiamo da $\tilde{\underline{X}}^t A \underline{X} = 0$ e tramite affinità vogliamo ridurci ad uno dei casi elencati

Passo 1:

eliminazione del termine in xy

Poichè A_0 è simmetrica, esiste $M \in GL(2, \mathbb{K})$ tale che $M^t A M$ è diagonale.

Quindi effettua la sostituzione $\underline{X} = M \underline{X}'$. L'equazione, nelle nuove coordinate \underline{X}' , che per comodità indichiamo ancora \underline{X} è

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0.$$

Osserviamo che la conica è a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$

Passo 2

Eliminazione dei termini lineari e costanti

Supponiamo ℓ a centro

effettuiamo la traslazione $\begin{cases} x = x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$ che cambia l'equazione in $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_0 = 0$

Se ℓ non è a centro possiamo supporre, a meno di scambiare le variabili (ovvero effettuare l'affinità $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) che risulti

$$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0.$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

Tramite la traslazione $\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$ l'equazione diventa

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x' + d_{00} = 0.$$

Se $a_{01} \neq 0$ eseguo $\begin{cases} x' = x'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ y' = y'' \end{cases}$

$$\text{ottenendo } a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0$$

$$\text{se } a_{01} = 0 \quad a_{22}y'^2 + d_{00} = 0$$

Passo 3

Normalizzazione dei coefficienti

$\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$. Sia ℓ a centro. Partiamo da

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_{00} = 0.$$

se $c_{00} = 0 \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 0 \quad (2)$

Se $c_{00} \neq 0$

$$-\frac{a_{11}}{c_{00}}x'^2 - \frac{a_{12}}{c_{00}}y'^2 - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{11}}}x \\ y' = \sqrt{-\frac{c_{00}}{a_{22}}}y \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + y^2 - 1 = 0(1).$$

Sia ora ℓ non a centro, trasformata in

$$a_{22}y'^2 + d_{00} = 0.$$

$$d_{00} = 0 \quad y'^2 = 0 \rightsquigarrow y^2 = 0(5)$$

$$d_{00} \neq 0 \quad -\frac{a_{22}}{d_{00}}y'^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-\frac{d_{00}}{a_{22}}}y \\ x' = x \end{cases} \rightsquigarrow y^2 - 1 = 0(4).$$

Resta da vedere il caso ℓ non a centro trasformata in

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow y^2 - x = 0(3).$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ℓ a centro

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c_{00} = 0.$$

Posso supporre $c_{00} = 0$ o $c_{00} = -1$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (1) - (5).$$

ℓ non a centro del tipo

$$a_{22}y'^2 + d_{00} = 0.$$

Posso supporre $d_{00} = 0$ o $d_{00} = -1$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases} \rightsquigarrow (7) - (9).$$

ℓ a centro del tipo

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x'' = 0.$$

Posso supporre $a_{22} > 0$ e effettuare $\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{01}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases} \rightsquigarrow 6$

□

Osservazioni

1) Se ℓ è a centro, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{22}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}.$$

Ha soluzione unica (poichè $\det A_0 \neq 0$) (x_0, y_0)

Il punto con tali coordinate è il centro di simmetria, infatti la simmetria rispetto a tale punto

$$\begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases}.$$

manda ℓ in ℓ

Le rette passanti per $c = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si dicono diametri di ℓ

2) per calcolare i punti impropri di ℓ di equazione

$$\tilde{\underline{X}}^t A \tilde{\underline{X}} = 0.$$

bisogna risolvere l'equazione omogenea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

$\left(x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \right)$ che ha discriminante $-det A_0$. Quindi le soluzioni sono
 reali distinte ℓ iperbole
 reali coincidenti ℓ parabola
 complesse conugate ℓ ellisse

Teorema 2

Ogni conica di \mathbb{E}^2 è congruente a una delle seguenti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse a punti non reali}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse degenera}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0 \quad \text{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad a > 0, b > 0 \quad \text{iperbole degenera}$$

$$y^2 - 2px = 0 \quad p > 0 \quad \text{parabola}$$

$$y^2 - a^2 = 0 \quad a \geq 0 \quad \text{parabola degenera}$$

$$y^2 + a^2 = 0 \quad a > 0 \quad \text{parabola degenera}$$

$$y^2 = 0 \quad \text{conica doppiamente degenera}$$

le coniche elencate sono a due a due non equivalenti

Lezione 34 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-31

1 Classificazione coniche ed Esercizi

$$\ell \quad f(x, y) = 0 \\ f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} \text{ A}$$

Sia $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ℓ è a centro se $\det A_0 \neq 0$

$$(x_0, y_0) \text{ è il centro di } \ell \quad \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{01} = 0 @ \\ a_{22}y + a_{11}x + a_{01} = 0 @ @ \end{cases} .$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}(x+x_0)^2 + a_{22}(y+y_0)^2 + 2a_{12}(x+x_0)(y+y_0) + 2a_{01}(x+x_0) + 2a_{02}(y+y_0) + a_{00} = 0$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{11}xx_0 + a_{22}y^2 + 2a_{22}yy_0 + 2a_{12}xy + a_{12}xy_0 + 2a_{12}x_0y + 2a_{01}x + 2a_{02}y + \text{termini costanti} = 0$$

$$\Rightarrow 2x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{01}) = 0 \text{ per } @$$

$$2y(a_{22}y_0 + a_{12}x_0 + a_{02}) = 0 \text{ per } @ @$$

Ultima lezione di teoria del nostro caro papi

Federico De Sisti

2024-05-30

1 Boh

Osservazioni

1. Metrico = euclideo
2. Per distinguere l'ellisse non degenere a punti reali da quella a punti immaginari, si può usare il seguente criterio

$$A = (a_{ij})_{i,j=0}^2 \quad A_0 = (a_{ij})_{i,j=1}^2.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_0 \det A &\begin{cases} > 0 & \text{ellisse a punti immaginari} \\ < 0 & \text{ellisse a punti reali} \end{cases} \\ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\det A}{\det A_0} &= 0 \end{aligned}$$

Non ci sono soluzioni reali se e solo se λ_1 (o λ_2) hanno lo stesso segno di $\det A$, è equivalente dire

$$\operatorname{tr} A_0 \det A > 0.$$

2 geometria delle coniche euclidee

Ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b > 0$$

$a = b$ $x^2 + y^2 = a^2$ circonferenza di centro l'origine e rango a

Il supporto dell'ellisse è chiuso e limitato, infatti esso è centrato nel rettangolo delimitato dalle rette $x \pm a$, $y = \pm b$

$$\operatorname{supp} \ell \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, |y| \leq b\}.$$

TODO INSERISCI IMMAGINI

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightsquigarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Definizione 1

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(\pm c, 0)$ fuori di ℓ

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{eccentriche di } \ell.$$

Nota

$0 \leq e < 1$, $e = 0 \Leftrightarrow$ circonferenza

$$x = \pm \frac{a}{c} \quad \text{manca qualcosa.}$$

Iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$$

TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 2

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($\pm c, 0$) fuochi di ℓ

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{eccentricità } e > 1.$$

$$x = \pm \frac{a}{c} \quad \text{direztrici.}$$

Parabola

$$y^2 = 2px \quad p > 0 \quad y = \pm\sqrt{2px}$$

TODO AGGIUNGI DISEGNO

Definizione 3

Il fuoco di ℓ $(\frac{p}{2}, 0)$

$$\text{direztrice } x = -\frac{p}{2} \quad e = 1 \quad \text{eccentricità.}$$

Proposizione 1

L'ellisse (1) e l'iperbole (2) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze dai due fuochi ha somma (rispettivamente differenza) costante (rispettivamente costante in valore assoluto) uguale a $2a$

Proposizione 2

L'ellisse (1), l'iperbole (2), la parabola (3) hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direztrice hanno rapporto costante uguale ad e l'eccentricità della conica

Dimostrazione (proposizione 1)

Siano F, F' i fuochi, di coordinate $(c, 0), (-c, 0)$ rispettivamente. Imponiamo la condizione

$$|d(P, F) \pm d(P, F')| = 2a.$$

Se P ha coordinate (x, y) risulta

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a \quad \circledast.$$

Elevando due volte al quadrato, otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad .$$

Se $c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellisse

Se $c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ iperbole

Per concludere, osserviamo che il luogo rappresentato da \circledast è precisamente (1) nel caso dell'ellisse e (2) nel caso dell'iperbole

A questo scopo, basta osservare che il procedimento è reversibile a meno di affinità di segni nei radicali. Però la conclusione

$c < a$ è compatibile col prendere + nell'equazione $\circledast \circledast$.

$c > a$ è compatibile col prendere - nell'equazione $\circledast \circledast$.

□

Dimostrazione (proposizione 2)

La condizione che definisce il luogo cercato è

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e.$$

$$P = (x, y)$$

$$\frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{|x - \frac{a}{c}|} = e.$$

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a}{e})^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = \cancel{2(c - ea)x} + a^2 - c^2 \text{ dato che } c = \frac{e}{a} \text{ e } e = \frac{c}{a}$$

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 = b^2$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$

$$\frac{b^2}{e^2}x^2 + y^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gli altri cambi per l'iperbole sono analoghi e lasciati per esercizio

□

\mathbb{P}^2 TODO AGGIUNGI IMMAGINE

Più in generale, dati S_1, S_2 spazi proiettivi tali che $\dim S_1 = \dim S_2 = k$ in \mathbb{P}^n , e H sottospazio $H \cap S_1 = H \cap S_2 = \emptyset$ e $\dim H = n - k - 1$, la prospettività di centro M è la restrizione a S_1 della proiezione su S_2 di centro H ; è un isomorfismo $S_1 \rightarrow S_2$

Esercizio

Siano in \mathbb{P}^3 T_1 il piano $x_3 = 0$ e T_2 il piano $x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0$

$$Q = [0, 1, -1, 1], \quad f : T_1 \rightarrow T_2 \quad \text{di centro } Q.$$

Trova equazioni cartesiane dell'immagine di $r = T_1 \cap T_3$ dove $T_3 : x_0 + x_1 = 0$

Risulta $f(r) = L(Q, r) \cap T_2$

$$r \text{ ha equazioni } \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani di asse r ha equazione

$$\lambda(x_0 + x_1) + \mu x_3 = 0 \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Imponendo il passaggio per $[0, 1, -1, 1]$ otteniamo

$$\lambda + \mu = 0 \quad [\lambda, \mu] = [1, -1].$$

$$L(Q, r) : x_0 + x_1 - x_3 = 0 \quad f(r) \quad \begin{cases} x_0 + x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Siano $r, s \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rette distinte, $A = r \cap s$ e $f : r \rightarrow s$ un isomorfismo proiettivo allora.

- (a) f è una prospettività se e solo se $f(A) = A$
- (b) Se $f(A) \neq A$, esiste una retta t in \mathbb{P}^2 e due prospettività $g : r \rightarrow t$, $h : t \rightarrow s$ tale che

$$f = h \circ g.$$

- (c) Ogni proiettività $p : r \rightarrow r$ è composizione di al più tre prospettività
(a) per costruzione una prospettività fissa il punto A

TODO AGGIUNGI IMMAGINE

Viceversa, supponiamo che $f : r \rightarrow s$ sia tale che $f(A) = A$ **TODO AGGIUNGI IMMAGINE**

$$L(P_1, Q_1) \cap L(P_2, Q_2) = 0 \notin r \cup s$$

Se g è la rprospettività di centro O , risulta $g(A) = A$, $g(P_1) = Q_1$, $g(P_2) = Q_2$

Ma A, P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono punti in posizione generale

e pertanto, per il teorema fondamentale, $f = g$