Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-29

0.1 Boh

Proposizione 1
(X, μ) spazio di misura; $f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque; $f_n \to f$ q.o. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$

Dimostrazione
($\Rightarrow$) *Già visto*
($\Leftarrow$) $\forall y \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) = 0$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{y=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{ \ |f_n - f| \geq \frac{1}{y}\}) := \mu(N) = 0$
$x \in X \setminus N \Leftrightarrow x \in \bigcap_{y=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \frac{1}{y}\}$
Vuol dire che $\forall y \quad \exists k_y$ (dipendente da y) tale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{y}$
$\forall n \geq k_y \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n \to f$ *quasi ovunque* $\square$
Se io so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Leftrightarrow ?$