

Compendio Lezioni del Corso: Geometria₂

March 12, 2025

1 Informazioni pratiche

Giovedì esercitazioni

Ci sono gli esercizi settimanali! Alcuni di questi sono da sapere per l'orale

Se vogliamo essere avvertiti per urgenze possiamo mandare una mail

C'è il sito del corso

Per la maggior parte del corso di studia su Topologia di Marco Manetti

Esami:

Ci sono 2 esoneri

L'esame è scritto e orale

Prerequisiti

- 1) Familiarità con le funzioni continue
- 2) Un po' di teoria dei gruppi
- 3) Derivate di applicazioni in più variabili

Il corso è diviso in 3 parti:

- 1) Topologia generale
- 2) Topologia algebrica
- 3) Geometria differenziale

2 Topologia Generale

2.1 Introduzione

Nasce per studiare sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , cosa posso fare con un sottoinsieme di \mathbb{R}^n con un'applicazione continua?

Studieremo:

- 1) Proprietà dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , come ad esempio la compattezza, da un punto di vista astratto.
- 2) Applicheremo le stesse proprietà ad insiemi dotati di "geometria" meno intuitiva

Ad esempio la topologia generale si applica in

- Analisi
- Algebra
- Logica

Esempio

In \mathbb{R}^2 prendiamo

$$X = \times \{0, 1\}.$$

Poniamo, in maniera informale, questa relazione d'equivalenza:

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in .$$

Il quoziente "assomiglia" ad una sola retta, gli elementi equivalenti vengono "appiccicati".

Seconda relazione d'equivalenza:

$$(x, 0) \sim (x, 1) \text{ solo per } x \leq 0.$$

X/\sim in questo caso assomiglia a :

Terza relazione d'equivalenza:

$$(x, 0) \sim (x, 1) \text{ solo per } x < 0.$$

Una specie di analogo della figura precedente, ma il punto $[0, 0]$ è raddoppiato
 [Funzioni continue] Dati $X \subseteq^n$ e $Y \subseteq^m$ insiemi qualsiasi, si definisce continua un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ se

$$\forall p \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{se } x \in X \quad \text{soddisfa.}$$

$$\|x - p\| < \delta \quad \text{allora} \quad \|f(x) - f(p)\| < \epsilon.$$

[Omeomorfismo] Data $f : X \rightarrow Y$ si dice omeomorfismo se è biettiva, continua, e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua. **Osservazione**

In topologia generale gli omeomorfismi hanno un ruolo analogo agli isomorfismi in algebra e algebra lineare.

Esempio:

1) $[0, 1]$ (in \mathbb{R}) è omeomorfo ad $[a, b]$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$
 ad esempio

$$f : [0, 1] \rightarrow [a, b] \\ t \rightarrow (1 - t)a + tb$$

è biettiva, continua e f^{-1} è continua.

2) $S^1 = \{(x, y) \in^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e $Q = \{(x, y) \in^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

Per esempio possiamo normalizzare i punti del quadrato

$$Q \rightarrow S^1 \\ p \rightarrow \frac{p}{\|p\|}$$

che è continua, biettiva e ha inversa continua.

3) $[0, 1] \cup [2, 3]$ non è omeomorfo a $[0, 2]$

ad esempio

$$f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow [0, 2]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Con l'analisi matematica si dimostra facilmente che non esiste alcuna biiezione con inversa continua.

Osservazione

In algebra se f è un omomorfismo biiettivo allora f^{-1} è un omomorfismo.

In topologia se f è continua e biettiva, f^{-1} non è sempre continua.

4) $]0, 1[$ è omeomorfo a $]a, b[$ $\forall a, b \in a < b$

Inoltre $]0, 1[$ è omeomorfo a $]0, +\infty[$

ad esempio tramite

$]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$

$$x \rightarrow e^{-x}$$

5) $]0, +\infty[$ è omeomorfo a \mathbb{R} , ad esempio tramite $x \rightarrow \log(x)$

6) $]0, 1[$ non è omeomorfo a $[0, 1]$

7) $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$

$S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n . Ad esempio tramite la proiezione stereografica (esercizio: vedere la formula)

8) Ci sono molti esempi di figure omeomorfe fra loro, ma un omeomorfismo esplicito è difficile, ad esempio.

un l -agone regolare qualsiasi (in \mathbb{R}^n) e un r -agone qualsiasi sono omeomorfi ($\forall l, r \geq 3$)

9) \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m sono omeomorfi se e solo se $n = m$ (è un teorema difficile, nel corso vedremo la dimostrazione per qualche esponente specifico, $n \leq 2$)

Vediamo due riformulazioni della continuità. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall p \in A \quad \varepsilon > 0 \quad \mid \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{soddisfa } \|x - p\| < \varepsilon \quad \text{allora } x \in A.$$

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < \varepsilon\}$$

è la palla aperta di centro p e raggio ε . Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Si dice aderente a X se $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \mid \|x - p\| < \varepsilon$ (chiaramente se $p \in X$ allora è aderente a X , basta prendere $x = p$) **Esempio:**

$1 \in \mathbb{R}$ è aderente a $X = [0, 1]$

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sono equivalenti:

1. f è continua

2. $\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$ se p è aderente a Z
allora $f(p)$ è aderente a $f(Z)$

3. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ se A è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto.

1) \Rightarrow 2)

Siano $Z \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$ suppongo p aderente a Z , dimostriamo che $f(p)$ è aderente a $f(Z)$

Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi, sia $\delta > 0$, dalla continuità di f in p . Dato che p è aderente a Z esiste $z \in Z$ tale che $\|z - p\| < \delta$.

Allora $f(z)$ è un punto di $f(Z)$ e $\|f(p) - f(z)\| < \varepsilon$.

2) \Rightarrow 3)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto, dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto in \mathbb{R}^n

Sia $p \in f^{-1}(A)$ sia $f(p) \in A$

Per assurdo supponiamo.

$\forall \varepsilon > 0 \exists q \in {}^n$ fuori da $f^{-1}(A)$ ma $\|p - q\| < \varepsilon$.

Allora p è aderente a ${}^m \setminus f^{-1}(A)$.

Segue, per 2), $f(p)$ è aderente a $f({}^n \setminus f^{-1}(A))$

quindi per ogni $\eta > 0$ esistono punti a distanza $< \eta$ non in $f({}^n \setminus f^{-1}(A))$ punti che non vanno in A

allora $f(p)$ è aderente a ${}^m \setminus A$. Questo è assurdo perché A è aperto

La terza implicazione la vediamo lunedì

3 Spazi Topologici

[Topologia] Sia X un insieme, $T \subset P(X)$

T è detta Topologia se:

1. $X, \emptyset \in T$
2. Unione di una famiglia qualsiasi di elementi in T è un elemento di T
3. intersezione di 2 elementi qualsiasi di T è un elemento di T .

In tal caso gli elementi di T sono detti aperti di T .

La coppia (X, T) è detta **spazio topologico** (o anche semplicemente insieme X) **Osservazione**

- Famiglia qualsiasi vuol dire infinita numerabile, o finita, o non numerabile, o anche vuota
- L'intersezione di una famiglia finita di elementi di T è ancora un elemento di T
- Possiamo interscambiare la precedente affermazione e la proprietà 3 della definizione

Nota

- "intervallo aperto" $=]a, b[$ come al solito
- aperto = elemento della topologia T

Esempi 1) Ogni insieme è dotato almeno delle seguenti topologia

1. $T = \{X, \emptyset\}$, detta **topologia banale**
2. $T = P(X)$, detta **topologia discreta**

Osserviamo che, nella topologia discreta, $\{x\}$ è aperto $\forall x \in X$

2) $X = \mathbb{R}^n$

$T = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B_\varepsilon(a) \subseteq A\}$ è la topologia euclidea

La dimostrazione del fatto che sia una topologia è un esercizio per casa

3) Sia X insieme, $p \in X$. Definiamo $T = \{A \subseteq X \mid p \in A, \text{ oppure } A = \emptyset\}$ T è una topologia

4) X insieme, poniamo $T = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ è finito, oppure } A = \emptyset\}$

T è una topologia, detta **topologia cofinita**

Sia (X, T) spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto [Proprietà degli insiemi chiusi] Per gli insiemi chiusi di qualunque topologia valgono:

1. X, \emptyset sono chiusi
2. intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso
3. Unione finita di chiusi è un chiuso

1. ovvio
2. $x \in \left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} C_i$ che è unione di aperti
3. $(X \setminus (C \cup D)) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ che è intersezione di 2 aperti. **Osservazione**
In uno spazio topologico ci sono insiemi sia aperti che chiusi (clopen = closed + open)

Esempio

$X =$

Il sottoinsieme $[0, 1]$ è chiuso in topologia euclidea

è chiuso e aperto in topologia discreta

non è chiuso in topologia banale

non è chiuso in topologia cofinita, e neanche aperto

Sia X spazio topologico con topologia T . Sia $B \subseteq T$ B è detta base se ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B **Esempi**

1. Sia T topologia su X , $\Rightarrow B = T$ è una base
2. Sia T topologia discreta su X , $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è una base di T
3. Sia $X = \mathbb{R}$, $T =$ topologia euclidea. $B = \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{R}\}$ è una base di T
Infatti $B \subseteq T$ perché $]a, b[$ è aperto in topologia euclidea. Inoltre ogni aperto si può scrivere come unione di elementi di B
Sia $A \in T$ euclidea su
 $\Rightarrow \forall p \in A \quad \exists \varepsilon > 0$ t.c. $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subseteq A$
 $\Rightarrow A = \bigcup_{p \in A}]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\in B$

Osservazione

Data B base di T topologia, la topologia T è determinata da B Infatti:

$$T = \{ \text{unione arbitraria di elementi di } B \}.$$

Sia X insieme, $B \subseteq P(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X . Esiste T topologia t.c. B è sua base se e solo se

1. X è unione di elementi di B
2. $\forall A, A' \in B, A \cap A'$ è unione di elementi di B

(\Rightarrow)

$\exists T$ topologia di cui B è base (per ipotesi)

- $\Rightarrow X \in T$ e B è base di $T \Rightarrow$ (1) vera
- $\Rightarrow A \text{ e } A' \in T \Rightarrow A \cap A' \in T \Rightarrow$ (2) vera

(\Leftarrow)

Definisco $T =$ unioni arbitrarie di elementi di B e verifico che sia una topologia

- $X \in T, \emptyset \in T \Rightarrow$ (1) vera ($\emptyset \in T$ perché $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$)

- Per costruzione di T , unioni di elementi di T sono elementi di $T \Rightarrow (3)$ vera
- $D, E \in T \Rightarrow D = \bigcup_{i \in I} A_i, E = \bigcup_{j \in J} A'_j, A_i, A'_j \in B \quad \forall i, j$
 $\Rightarrow D \cap E = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap A'_j)$

Osservazione:

Ciascuno $A_i \cap A'_j$ è unione di elementi di B .

$\Rightarrow D \cap E$ è unione di elementi di B

$\Rightarrow T$ è topologia (e B sua base per costruzione) **Osservazione**

La proprietà (2) è equivalente a:

$$\forall A, A' \in B, \quad \forall p \in A \cap A' \quad \exists D \in B \quad \text{t.c.} \quad p \in D \subseteq A \cap A'.$$

Esempio

Sia K un campo, consideriamo $x = {}^n$, Dato $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Poniamo $x_f = \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) \neq 0\}$

$\Rightarrow B = \{x_f \mid f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$

(esempio: $x = {}^n, n = 1, \mathbb{K} = \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-2) \rightsquigarrow x_f = \setminus \{1, 2\}$) (esempio:

$X = {}^n, n = 2, \mathbb{K} = \mathbb{C}, f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, x_f = {}^2 \setminus S^1$)

Allora B è base di una topologia T su X

Verifichiamo usando la proposizione precedente

$X = X_f, f = 1$ polinomio costante, allora (1) ok

Prendiamo $A, A' \in B$ studiamo $A \cap A'$

$A = x_f, A' = x_g$ con $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, Allora

$A \cap A' = x_{fg}$ è essa stessa un elemento di B quindi (2) ok

per la proposizione precedente $\Rightarrow \exists$ topologia T

La topologia così definita è detta la topologia di Zariski in \mathbb{K}^n **Esempio**

$=, n = 1$

$\setminus \{1, 2\}$ è aperto in topologia euclidea e in topologia di Zariski.

$[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso in topologia euclidea, è chiuso in topologia di zariski? Esercizio per casa

T_1, T_2 topologie su X , T_1 è detta più fine di T_2 se $T_2 \subseteq T_1$ **Osservazione**

Prese 2 topologie a caso, non è detto che siano confrontabili.

Esempio

La topologia banale è la meno fine di tutte, Quella discreta è la più fine.

Siano T_1, T_2 topologie su X . Allora

$T_1 \cap T_2$ è una topologia.

Inoltre $T = T_1 \cap T_2$ è meno fine di T_1 e meno fine di T_2 Esercizio lasciato al lettore

3.1 Parte interna, chiusura, interni

Sia X spazio topologico, sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme, la parte interna di D è

$$D^\circ = \bigcup_{A \subseteq D, A \text{ aperto}} A.$$

La chiusura di D è

$$\overline{D} = \bigcap_{C \supseteq D, C \text{ chiuso}} C.$$

la frontiera di D è

$$\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ.$$

I punti di D° si dicono interni a D , quelli di \overline{D} si chiamano aderenti a D . **Osservazioni**

1) D° è un aperto e \overline{D} è un chiuso (posso vederlo come l'intersezione tra \overline{D} e il complementare di D° , che è chiuso)

2) Anche ∂D è chiuso perché

$D = \overline{D} \cap (X \setminus D^\circ)$ dove $(X \setminus D^\circ)$ è un chiuso

Esempio

1) $X =$ con topologia euclidea. Sia $D = [0, 1]$.

Allora $D^\circ =]0, 1[$, verifica:

$D^\circ \supseteq]0, 1[$:

La parte interna di D contiene tutti gli aperti, dato che $]0, 1[$ è un aperto è contenuto.

A $D^\circ \subseteq]0, 1[$:

supponiamo per assurdo che $D^\circ \not\subseteq]0, 1[$, allora $0 \in D^\circ$ oppure $1 \in D^\circ$ (mi limito a considerare i punti di D perché $D^\circ \subseteq D$).

Supponiamo $0 \in D^\circ$, allora esiste $A \subseteq D$ aperto t.c. $A \subseteq D$, $A \ni 0$ (è uno degli A della definizione).

Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\subseteq A \subseteq D$.

assurdo, Analogamente $1 \notin D^\circ$ quindi vale \subseteq

2) $X =$ con topologia cofinita $D = [0, 1]$. Allora $D^\circ = \bigcup_{A \subseteq D, A \text{ aperto}} A$

Sia A aperto.

$A \subseteq D$ abbiamo

$A = \emptyset$ oppure $A = X \setminus \{\text{insieme finito}\}$

Ma questa ultima è impossibile

allora $D^\circ = \emptyset$ in questa topologia (con questo D)

esercizio: calcolare \overline{D}

3) $X =, T =$ topologia per cui A è aperto $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oppure $A \ni 0$

Considero $\overline{\{1\}} = \{1\}$, questo insieme non contiene lo zero, quindi $\{1\}$ è esso stesso un chiuso.

Però $\overline{\{0\}} = ?$

I chiusi in T sono e i sottoinsiemi che non contengono lo 0. Quindi l'unico insieme chiuso che contiene $\{0\}$ è X , allora $\overline{\{0\}} = X$

Sia X spazio topologico, un sottoinsieme di $D \subseteq X$ si dice denso se $\overline{D} = X$ **Esempio**

$X =$ con topologia euclidea,

$D = \cdot$. Dimostriamo che è denso
 L'unico chiuso che contiene D è X stesso.
 Sia $C \subseteq X$ chiuso con $C \supsetneq D$
 sia $a \in X \setminus C$ aperto
 allora $\exists \varepsilon > 0 \mid]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq X \setminus C$
 allora $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D = \emptyset$
 assurdo.
 Allora a non esiste e $C = X$. **Osservazione:**
 1) Sia $D \subseteq X$ spazio topologico
 vale:

$$X \setminus (\overline{D}) = (X \setminus D)^o.$$

Usando direttamente la definizione:

$$X \setminus (\overline{D}) = X \setminus \left(\bigcap_{C \supseteq D, C \text{ chiuso}} C \right) = \bigcup_{C \supset D, C \text{ chiuso}} (X \setminus C).$$

(ultima eguaglianza per esercizio)

$$= \bigcup_{A = X \setminus C, C \supset D, C \text{ chiuso}} A = \bigcup_{A \text{ aperto}, X \setminus A \supset D} A = \bigcup_{A \text{ aperto}, A \subseteq X \setminus D} A.$$

2) D denso

\Leftrightarrow

D interseca ogni aperto non vuoto (esercizio) Sia X spazio topologico,
 $U \subseteq X, x \in U^o$

Allora U si dice intorno di x .

Equivalentemente, un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice intorno di $x \in X$ se esiste $A \subseteq X$ aperto t.c. $x \in A \subseteq U$ **Esempio**

$X =$ topologia euclidea, $x = 0, U =]-1, 1[$ è intorno di x (si prende ad esempio $A = U$, o anche $A =]-1/2, 1/2[$

Anche $V = [-1, 1] \cup \{5\}$ è un intorno di 0 , ad esempio $A =]-1/2, 16[\cup]3/16, 7/16[$

Osservazione

$U \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow U = U^o \Leftrightarrow U$ è un intorno di ogni suo punto. Siano
 X spazio topologico, $x \in X, D \subseteq X$. Allora $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \forall U$ intorno di x vale
 $U \cap D \neq \emptyset$ Supponiamo $x \in \overline{D}$ sia U intorno di x

per assurdo suppongo $D \cap U = \emptyset$ Considero $A \subseteq X$ aperto con $x \in A \subseteq U$

Considero il chiuso $X \setminus A = C$

Abbiamo $C \supseteq D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$

Abbiamo $C \supset D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$. Cioè C compare nella definizione di \overline{D} e $C \not\ni x$ perché $x \in A$

Ma $x \in \overline{D}$ quindi x è in tutti i chiusi che contengono D , assurdo

Viceversa, supponiamo D intorno di x , per assurdo però $x \notin \overline{D}$, Allora esiste un chiuso C che contiene D ma non x .

Considero $A = X \setminus C$ è un aperto contenente x . Cioè A è un intorno di x e A non interseca D ; assurdo. Quindi $x \in \overline{D}$ [Famiglia degli intorni, sistema

fondamentale] Sia X spazio topologico e $x \in X$ La famiglia di tutti gli intorno di x si denota con $I(x)$.

Un sottoinsieme $J \subseteq I(x)$ è detto sistema fondamentale di intorno di x (o base locale in x) se $\forall U \in I(x) \exists V \in J \mid V \subseteq U$ **Esempi:**

$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.

$x \in \mathbb{R}$ qualsiasi

$$J = \{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\mid \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \}$$

è sistema fondamentale di intorno di x

$$J' = \{ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \geq 1, n \in \mathbb{N} \}$$

è un sistema fondamentale di intorno di x

$$J'' = \{ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{2}{n} \cup \{x + \frac{3}{n}\} \mid n \geq 1, n \in \mathbb{N} \}.$$

è un sistema fondamentale di riferimento

$$J''' = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \cup \{10\} \mid n \geq 1, n \in \mathbb{N} \}.$$

$(10 \neq x)$

non è un sistema fondamentale di riferimento

3.2 Applicazioni continue

Siamo X, Y spazio topologico $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. f si dice continua se $f^{-1}(A)$ è aperto (in X) $\forall A$ aperto (Y) **Nota (per la tesi)**

non iniziare mai una frase con un simbolo, è facile fare errori (lui può ma solo per essere veloce)

Esempi:

1) Se X ha topologia discreta, ogni f è continua (qualsiasi sia Y)

2) Se Y ha una topologia banale, allora $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$

quindi ogni f è continua.

3) Supponiamo X, Y con topologia cofinita e $f : X \rightarrow Y$ iniettiva

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

gli altri aperti sono del tipo $Y \setminus \{ \text{insieme finito} \} = Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$

allora:

$f^{-1}(Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}) = X \setminus \{f^{-1}(y_1) \cup \dots \cup f^{-1}(y_n)\}$ e tutte le controimmagini di questi elementi sono o vuote o di cardinalità 1, quindi è aperto.

4 Prima lezione di esercizi

mail del tipo degli esercizi: zenobi@altamatematica.it

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1].$$

Esempio

4.1 Funzioni continue

Osservazione

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$.

Siano $A \subseteq Y$ un sottoinsieme,

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\} = \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\} = f^{-1}(Y \setminus A).$$

Analogamente, con $A, B \subseteq Y$ e $C, D \subseteq X$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$$f(C \cup D) \supseteq f(C) \cup f(D).$$

$$f^{-1}(f(C)) \supseteq C.$$

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap \text{Im}(f).$$

Tornando a $f : X \rightarrow Y$

f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ chiuso

$A \subseteq Y$ aperto \Leftrightarrow con $C = Y \setminus A$ $f^{-1}(C)$ chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso. [Continuità]

Sia $f : X \rightarrow Y$ applicazione fra spazi topologici. Sia $p \in X$, f è continua in p se

$$\forall U \subseteq Y \text{ intorno di } f(p) \exists V \subseteq X \text{ intorno di } p \text{ t.c. } f(V) \subseteq U.$$

Sia $f : X \rightarrow Y$ applicazione fra spazi topologici, sono equivalenti:

1. $\forall p \in X : f$ è continua in p
2. $\forall Z \subseteq X : f(\bar{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$
3. f continua

1) \Rightarrow 2) Sia $p \in \bar{Z}$ so che f è continua in p .

Voglio dimostrare che

$$f(p) \in \overline{f(Z)}.$$

Formuliamo questa condizione in termini di intorni:

devo dimostrare che in ogni intorno di $f(p)$ ci sono punti di $f(Z)$. Sia $U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ per continuità in $p \exists V \subseteq X$ intorno di p tale che $f(V) \subseteq U$

Visto che $p \in \bar{Z}$ esiste $z \in Z$ tale che $z \in V$

Allora $f(z)$ è in U e in $f(Z)$

cioè ogni intorno U di $f(p)$ contenente punti di $f(Z)$, cioè $f(p) \in \overline{f(Z)}$

2) \Rightarrow 3) Dimostriamo che $f^{-1}(C)$

è chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso. Considero $f^{-1}(C)$, voglio dimostrare che è chiuso confrontandolo con $\overline{f^{-1}(C)}$.

L'ipotesi 2) dice:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C \cap \text{Im}(f)} \subseteq C.$$

Dato che C è un chiuso che contiene $C \cap f(X)$

Allora $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$

D'altronde vale sempre $\overline{f^{-1}(C)} \supseteq f^{-1}(C)$

quindi $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$

da cui $f^{-1}(C)$ è chiuso.

3) \Rightarrow 1) suppongo f continua, sia $p \in X$, sia $U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ scegliamo

$a \subseteq U$ aperto con $f(p) \in a \subseteq U$

per continuità: $f^{-1}(a)$ aperto di X e contiene p ,

posso prendere $V = f^{-1}(a)$, intorno aperto di p , ed è tale che $f(V) \subseteq a \subseteq U$

La composizione di applicazioni continue qualsiasi è continua. Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

applicazioni fra spazi topologici, suppongo $f \circ g$ continue,

dimostriamo che $g \circ f$ è continua.

Sia Z aperto dimostriamo che

$(g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto .

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(A) &= \{x \in X \mid (g \circ f)(x) \in A\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(A)\} = f^{-1}(g^{-1}(A)).\end{aligned}$$

g manda aperti in aperti, stesso per f , segue che la composizione fa lo stesso.

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$.

1. f si dice omeomorfismo se f è continua, biettiva, e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua
2. X e Y si dicono omeomorfi se esiste $f : X \rightarrow Y$ omeomorfismo
3. f (non necessariamente omeomorfismo, non necessariamente continua) si dice aperta se $f(A)$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto, e f si dice chiusa quando $f(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq X$ chiuso

Esempi:

con topologia euclidea, $f : \rightarrow$ applicazione costante $f(x) = q \quad \forall x \in$.

Questa f non è aperta, perché $\{q\}$ è aperto in Y e $f^{-1}(\{q\}) = X$ non è aperto in topologia euclidea.

Esempio importante:

Applicazione non chiusa.

$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow$

$(x, y) \rightarrow x$

(\mathbb{R}^2 , con topologia euclidea)

Non è chiusa, prendiamo ad esempio $C = \{(x, y) \mid x \cdot y = 1\}$ è un chiuso in \mathbb{R}^2 , ma $p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso.

C è chiuso di \mathbb{R}^2 perché C è uguale a $f^{-1}(\{1\})$ dove $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow$

$(x, y) \rightarrow xy$

Infatti f è continua e $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ è un chiuso.

4.2 Spazi metrici

sia X un insieme e $d : X \times X \rightarrow$

\mathbb{R} si dice distanza se:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$,
 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
 $\forall x, y, z \in X$

In tal caso (X, d) (o X stesso) si chiama spazio metrico **Esempio**

Sia X insieme, poniamo

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

d è una distanza. Sia (X, d) spazio metrico.

1. La palla aperta di centro x e raggio $\varepsilon \in_{>0}$ è:

$$B_\varepsilon(x) = \{p \in X \mid d(p, x) < \varepsilon\}$$

2. La topologia indotta da d su X è definita da:

$$A \text{ aperto} \Leftrightarrow \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A$$

La denotiamo con T_d

Verifica che T_d è topologia

1. \emptyset, X sono aperti: ovvio
2. unione di aperti è aperto: ovvio
3. Siano $A_1, A_2 \in T_d$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in T_d$, sia $a \in A_1 \cap A_2$ quindi $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A_1$ e $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(a) \subseteq A_2$
sia $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ allora soddisfa $B_\gamma(a) \subseteq A_1 \cap A_2$

Sia (X, d) spazio metrico e T_d la topologia indotta da d

1. $\forall p \in X \forall \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \in T_d$
2. $B = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in X, \varepsilon \in_{>0}\}$
è una base di T_d
3. Un sottoinsieme $U \subseteq X$ è intorno di $p \in X$ se e solo se $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subseteq U$

Per esercizio. **Osservazione**

Gli spazi metrici in generale si comportano in modo simile a n con distanza euclidea, ma attenzione: non tutto è uguale, ad esempio se (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$:

$$\{p \in X \mid d(x, p) \leq \varepsilon\}.$$

con $\varepsilon > 0$ fissato, è un chiuso di X (verifica per esercizio) ma non è sempre la chiusura di $B_\varepsilon(x)$.

$$\text{Ad esempio } X = \text{con distanza } d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Considero $\{p \in X \mid d(p, x) \leq 1\} =$

$$\text{ma } B_1(x) = \{x\}$$

Questo vale $\forall x \in X$

cioè ogni singolo punto è aperto, allora T_d è discreta, quindi $\{x\}$ è anche chiuso.

Cioè $B_1(x) = \{x\}$.

Osservazione:

Siano X, Y spazi metrici sia $p \in X$

$f : X \rightarrow Y$, allora f è continua in p

(come applicazione fra spazi topologici, dove su X e Y metto le topologie indotte dalle distanze) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \text{ se } d(x, p) < \delta \text{ allora } d(f(x), f(p)) < \varepsilon$

Verifica per esercizio Siano d, h distanze su uno stesso insieme X .

Allora T_d è più fine di T_h se $\forall p \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid B_\delta^d(p) \subseteq B_\varepsilon^h(p)$ Usiamo

$id_X : X \rightarrow X$ dove nel dominio prendiamo d e T_d , e nel codominio la distanza h e T_h . Con questa scelta l'identità su X è continua $\Leftrightarrow T_d \supseteq T_h$
 La cardinalità di Id_X è equivalente alla condizione con ε e δ per l'osservazione.
 [Distanze equivalenti] Date distanze d, h su un insieme X , esse si dicono equivalenti se $T_d = T_h$ [Spazio topologico metrizzabile] Sia X uno spazio topologico con topologia T . Se esiste una distanza d su X tale che $T = T_d$ allora X si dice metrizzabile.

4.3 Sottospazi topologici

Sia X spazio topologico, sia $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi, allora su Y è definita la topologia di sottospazio ponendo $A \subseteq Y$ aperto in topologia di sottospazio $\Leftrightarrow \exists B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = B \cap Y$ **Esempi:**

1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$Y = [0, 1]$

Allora Y è aperto in topologia di sottospazio

$A = Y$ soddisfa $A = B \cap Y$

Anche $I =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\subseteq Y$ è aperto in topologia di sottospazio basta prendere $B' = I$ per avere $I = B' \cap Y$

Considero $[0, \frac{1}{2}[= J \subseteq Y$

non è aperto in X , ma è aperto in Y in topologia di sottospazio, basta prendere $B'' =]-1, \frac{1}{2}[$ è aperto in X e soddisfa

$$J = B'' \cap Y.$$

Idea intuitiva:

```
[thick] (-3,0) -- (3,0);
[thick, decoration=brace, mirror, raise=5pt, decorate] (-1,0) -- (0,0)
node[midway, below=7pt] J;
(0,0) circle (2pt) node[below] 0; (2,0) circle (2pt) node[below] 1;
[thick] (0,-0.5) -- (2,-0.5); [thick] (2,-0.5) -- (2,0); [dashed] (0,-0.5) -- (0,0);
[below] at (1,-0.5) (0,1); [right] at (3,0) R;
[below] at (-1.5,-1) (B'');
```

J non è aperto in X perché $\forall \varepsilon > 0 \exists$ punti di J , a distanza $< \varepsilon$ da 0, punti che non sono in J .

Ma J aperto in Y in topologia di sottospazio perché Y non contiene tali punti

2) $X = \mathbb{Z}$ con topologia euclidea, sia $Y = \mathbb{Z}$ con topologia di sottospazio, Ad esempio

$A =]-100, 23[\cap Y = \{-99, -98, \dots, 22\}$

Anche $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap Y = \{0\}$ è aperto.

Analogamente

$]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap Y = \{n\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ è aperto in Y in topologia di sottospazio. Quindi la topologia di sottospazio è discreta.

3) $X = \mathbb{R}^2$ con topologia euclidea, $Y = \times \{0\}$, l'asse x .

```

[scale=1] [-i] (-1,0) -- (2,0) node[right] x;
[-i] (0,-1) -- (0,2) node[above] y;
[very thick] (0,0) -- (1,0);
(0,0) circle (2pt) node[below left] 0; (1,0) circle (2pt) node[below] 1;
(1,0) circle (2pt);

```

allora $A =]0, 1[\times \{0\}$ è aperto in topologia di sottospazio, ad esempio $B =]0, 1[\times$
Osservazione Verifichiamo che la topologia di sottospazio è una topologia:

$$T_Y = \{A \subseteq Y \mid \exists B \subseteq X \text{ aperto t.c. } B \cap Y = A\}.$$

Assiomi di topologia

1. $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$
2. Siano $A_i, i \in I$ elemento di T_Y , verifica che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è in T_Y
 Scegliamo $B_i \forall i \in I$ aperto in X t.c. $A_i = B_i \cap Y$
 $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap Y) = \bigcup_{i \in I} B_i \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
 da cui $\bigcup_{i \in I} A_i \in T_Y$.
3. Siano $A_1, A_2 \in T_Y$, scegliamo B_1, B_2 aperti in X con $A_i = B_i \cap Y \forall i \in \{1, 2\}$ allora
 $A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = (B_1 \cap B_2) \cap Y$ dove il primo termine è aperto in X
 quindi $A_1 \cap A_2 \in T_Y$.

Osservazione.

Sia $C \subseteq Y$ chiuso in topologia di sottospazio. Allora $A = Y \setminus C$ è scrivibile come $A = B \cap Y$ con B aperto in X , Allora $D = X \setminus B$ è chiuso in X , e vale $D \cap Y = C$

Cioè se C è chiuso in topologia di sottospazio allora esiste $D \subseteq X$ chiuso tale che $C = D \cap Y$.

Vale il viceversa se il sottoinsieme C di Y è scrivibile come $C = D \cap Y$ con $D \subseteq X$ chiuso, allora C è chiuso in topologia di sottospazio (esercizio)

4.4 boh

Osservazione:

Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio T_Y .
 Considero l'inclusione di Y in X come applicazione

$$\begin{aligned} i : Y &\rightarrow X \\ y &\rightarrow y \end{aligned}$$

i è costruita (mettendo su Y la topologia T_Y). Verifica: sia $B \subseteq X$ aperto la controimmagine è $i^{-1}(B)$ Questo è aperto in topologia di sottospazio.
 Sia T una topologia su Y (non necessariamente $= T_Y$), suppongo che $i : Y \rightarrow X$ sia continua anche usando T come topologia su Y
 Allora $\forall B \subseteq X$ aperto, $i^{-1}(B)$ è aperto in Y cioè $i^{-1}(B) \in T$.
 Al variare di B aperto in X , gli insiemi $i^{-1}(B)$ formano T_Y , quindi $T_Y \subseteq T$.
 Possiamo considerare la famiglia di tutte le topologie su Y per cui l'inclusione è continua. L'intersezione di esse è contenuta in T_Y perché T_Y è una di esse, e contiene T_Y perché ogni T siffatta contiene T_Y .
 Quindi T_Y è la topologia meno fine fra quelle per cui i è continua. Sia $f : X \rightarrow Z$ applicazione continua fra spazi topologici, sia $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, allora $f|_Y : Y \rightarrow Z$ è continua. Usiamo l'inclusione $i : X \rightarrow Y$ e osserviamo $f|_Y : Y \rightarrow Z$ concatenato con

$$f \circ i : Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Z.$$

f e i sono continue, lo è anche $f \circ i$. Siano X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, Z spazio topologico e $f : X \rightarrow Z$.
 Consideriamo l'estensione del codominio di f da Y a X che è l'applicazione $i \circ f : Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} X$
 Allora f è continua se e solo se $i \circ f$ è continua. (\Rightarrow) ovvio poiché $i \circ f$ è composizione di applicazioni continue
 (\Leftarrow) Sia $A \subseteq Y$ aperto, scegliamo $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap Y = A$.
 Allora $f^{-1}(A) = (i \circ f)^{-1}(B)$
 poiché chiedere che $z \in Z$ vada in A tramite f è equivalente a richiedere che vada in B .
 Allora $f^{-1}(A)$ è aperto per continuità di $i \circ f$ **Osservazione**
 Data in generale $f : Z \rightarrow X$ spesso la si restringe all'immagine

$$\begin{aligned} \tilde{f} : Z &\rightarrow \text{Im}(f) \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

vale f continua $\Leftrightarrow \tilde{f}$ continua, perché posso considerare l'inclusione

$$i : \text{Im}(f) \rightarrow X.$$

e allora $f = i \circ \tilde{f}$

Esempio:

$X =$ con topologia euclidea.

$Y = [0, 1[$ con topologia di sottospazio

$$Z =]0, 1[\quad (\subseteq Y).$$

Sia verifica facilmente (esercizio) che la chiusura di Z in Y è $[0, 1[$ e la chiusura di Z in X è $[0, 1]$

Le chiusure sono diverse, ma

$$[0, 1[= [0, 1] \cap Y.$$

dove il primo intervallo è in Y e il secondo intervallo in X

Questo si generalizza. Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con topologia di sottospazio, $Z \subseteq Y$ la chiusura di Z in Y è uguale a Y intersecato la chiusura di Z in X

$$\text{Chiusura di } Z \text{ in } Y = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z}} C = \dots$$

Per ogni tale C scelgo un $D \subseteq X$ chiuso in X tale che $C = D \cap Y$

$$\begin{aligned} \dots &= \bigcap_{\substack{C \subseteq U, \\ C \text{ chiuso in } Y, \\ C \supseteq Z, \\ D \subseteq X, \\ D \text{ chiuso in } X \\ \text{t.c. } D \cap Y = C}} D \cap Y. \\ &= \bigcap_{\substack{D' \subseteq X, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supseteq Z}} D' \cap Y. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale perché ogni D della prima intersezione compare fra i D della seconda intersezione, Per ogni D' della seconda intersezione considero $C = D' \cap Y$ che è in Y , chiuso in Y , contenente Z , quindi compare fra i C della prima intersezione; ad esso corrisponde un D della prima intersezione, che soddisfa $D \cap Y = C = D' \cap Y$.

Quindi per ogni D' della seconda intersezione esiste un D della prima con la stessa intersezione con Y , ovvero $D \cap Y = D' \cap Y$, Quindi vale l'uguaglianza.

L'uguaglianza prosegue:

$$= \left(\bigcap_{\substack{D' \supseteq Z, \\ D' \text{ chiuso in } X, \\ D' \supseteq Z}} D' \right) \cap Y.$$

dove la parentesi è la chiusura di Z in X **Osservazione**

Attenzione: non vale un enunciato analogo con la parte interna.

Ad esempio $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea $Y = Z = \{0\}$

La parte interna di Z in X è vuota, perché Z non contiene alcun aperto di

Invece la topologia di sottospazio su Y è la topologia discreta e Z è aperto in Y .

Quindi Z è la propria parte interna come sottoinsieme di Y . Sia $f : X \Rightarrow Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, f è un'inversione topologica se la restrizione

$$\begin{aligned}\tilde{f} : X &\rightarrow f(X) \\ x &\rightarrow f(x)\end{aligned}$$

è un omeomorfismo, dove su $f(X) \subseteq Y$ metto la topologia di sottospazio. **Esempio**

1) Considero

$$\begin{aligned}&\rightarrow \\ x &\rightarrow (x, 0)\end{aligned}$$

(qui, con topologia euclidea) è un'immersione, la verifica è per esercizio.

2)

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[&\rightarrow \\ t &\rightarrow e^{it}\end{aligned}$$

Su $[0, 2\pi[\subseteq$

metto la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su \mathbb{C} , su S^1 metto la topologia euclidea

È continua, iniettiva e $f([0, 2\pi[) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Questa f non è un'immersione, infatti $[0, \pi[$ è aperto nel dominio, ma $f([0, 2\pi[)$ non è aperto in S^1 con topologia di sottospazio. Quel chiuso dovrebbe essere l'intersezione tra la circonferenza e un aperto di \mathbb{C} , Ciò non è possibile perché ci sarebbe un intorno su un estremo della circonferenza.

4.5 Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici.

vogliamo definire una topologia "naturale" su $P \times Q$.

Esempio:

Considero $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia euclidea

$$P \times Q = \mathbb{R}^2.$$

La topologia su \mathbb{R}^2 sarà quella euclidea. Considero ad esempio

$$U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto, } V \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto.}$$

il prodotto $U \times V$ sarà aperto in \mathbb{R}^2 , posso pensare che questa sia quindi la mia topologia, ma vediamo qualche esempio con la topologia euclidea.

Ad esempio $U =]a, b[$ $V =]c, d[$, allora $UV =]a, b[\times]c, d[$ è un rettangolo aperto. Anche un disco aperto in \mathbb{R}^2 è aperto in topologia euclidea, ma non riesco a scriverlo con questo prodotto $U \times V$ con $U \subseteq \mathbb{R}, V \subseteq \mathbb{R}$.

Potrei prendere

$$B = \{U \times V \mid \begin{matrix} U \subseteq \text{aperto} \\ V \subseteq \text{aperto} \end{matrix}, \}.$$

come base per la topologia su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siano P, Q spazi topologici, la topologia prodotto su $P \times Q$ è la meno fine fra quelle per cui le proiezioni:

$$p : P \times Q \rightarrow P$$

$$(a, b) \rightarrow a$$

$$q : P \times Q \rightarrow Q$$

$$(a, b) \rightarrow b$$

Sono continue. **Osservazione**

Esistono topologie su $P \times Q$ tali che p e q sono continue, per esempio la topologia discreta su $P \times Q$.

La topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologie per cui p e q sono continue.