Lezione 12 Geometira

Federico De Sisti

2024-03-27

1 Operatori Lineari Unitari

Sia V uno spazio vettoriale euclideo

Definizione 1
Un operatore lineare $T : V \to V$ *si dice unitario se*
$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V$

Proposizione 1
Sia V *spazio vettoriale euclideo* $n-$ *dimensionale e sia* $T : V \to V$ *un applicazione, TFAE (The Following Are Equivalent)*
1. T *è unitario*
2. T *è lineare e*$||T(w)|| = ||v|| \quad \forall v \in V$
3. $T(O) = O, ||T(v) - T(w)|| = ||v - w|| \quad \forall v, w \in V$
4. T *è lineare e manda basi ortonormali in basi ortonormali*
5. T *è lineare ed esiste una base* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *ortonormale di* V *tale che* $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ *è una base ortonormale*

Dimostrazione
$1 \Rightarrow 2.$ *Unitario* $\Rightarrow \langle T_(v), T(v)\rangle = ||T(v)||^2 = \langle v, v\rangle = ||v||^2$

$2 \Rightarrow 3$ T *lineare* $\Rightarrow T(O) = O \quad ||T(v) - T(w)|| = ||T(v - w)|| = ||v - w||$

$3 \Rightarrow 1 ||T(v)|| = ||T(v) - O|| = ||T(v) - T(O)|| = ||v - O|| = ||v||$
Esplicitiamo $||T(v) - T(w)||^2 = ||v - w||^2$
$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w)\rangle = \langle v - w, v - w\rangle$
$\Rightarrow \cancel{||T(v)||^2} - 2\langle T(v), T(w)\rangle + \cancel{||T(w)||^2} = \cancel{||v||^2} - 2\langle v, w\rangle + \cancel{||w||^2}$
Dunque $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$
Resta da vedere che T *è lineare.*
Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ *una base ortonormale di* V *allora* $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ *è una base ortonormale per quanto dimostrato prima.*

$$\langle T(e_j), T(e_i)\rangle = \langle e_j, e_i\rangle = \delta_{ij}.$$

$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (\Rightarrow x_i = \langle v, e_i\rangle)$
$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v), T(e_i)\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_j)$
Dunque $T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$ *quindi* T *è lineare*

$1 \Rightarrow 4 \{e_1, \dots, e_n\}$ *è una base ortonormale*

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

$4 \Rightarrow 5$ *Ovvio*

$5 \Rightarrow 1$ *Sia* $e_1, \ldots, e_n$ *la base ortonormale dell'enunciato. Considero* $u, v \in V$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(w) \rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, T(\sum_{j=1}^{n} y_i e_i)\rangle = \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_i T(e_i)\rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \langle T(e_i), T(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle u, w\rangle
\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \delta_{ij}$ $\square$

$\alpha \in V\{0\}$ $\quad S_\alpha = v - 2\dfrac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$ riflessione rispetto ad α^2

1. S_α è unitaria
2. $S_\alpha^2 = Id$
3. Esiste una base B di V tale che $(S_\alpha)_B = diag(1, \ldots, 1, -1)$

Dimostrazione

1. $\langle S_\alpha(v), S_\alpha(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

$\langle v - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha, w - 2\frac{\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\rangle =$

$\langle v, w\rangle - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle \alpha,w\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} - 2\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} + 4\frac{\langle v,\alpha\rangle\langle w,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle\cancel{\langle \alpha,\alpha\rangle}}\cancel{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \langle v, w\rangle$

$$V = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp.$$

Quindi presa una base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ *di* $\alpha^\perp$,
$B = \{w_1, \ldots, w_{n-1}, \alpha\}$ *è una base di* V *e*
$S_\alpha(w_i) = w_i, i = 1, \ldots, n-1$

$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$

$$(S_\alpha)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

In particolare $S_\alpha = Id$ *poiché* $M^2 = Id$ $\square$

2 Osservazioni sugli operatori unitari

1. Se T è unitario, e $v \in Ker(T)$, allora

$$0 = ||T(v)|| = ||v|| \Rightarrow v = 0.$$

Dunque T è invertibile.
È facile vedere che se T_1, T_2 sono unitarie, lo è anche $T_1 T_2^{-1}$, quindi, posto

$$O(V) = \{T \in End(V) | T \text{ è unitario}\}.$$

$$O(V) \leq GL(V).$$

e $O(V)$ viene chiamato gruppo ortogonale di V.

2. Se fissiamo in V una base ortonormale B, e $T \in O(V), [T]_B^B$ è ortogonale. Infatti sia $A = [T]_B^B,\ B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Le colonne di A sono le coordinate di $T(e_i)$ rispetto a B, quindi T è unitario se e solo se

$$\langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}.$$

dove A^i, A^j rappresentano la riga i-esima e j-esima della matrice A

3. Se $T \in O(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora $\lambda = \pm 1$
Se λ è autovalore, esiste $v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$

$$||v|| = ||T(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Poiché $v \neq 0, ||v|| \neq 0$ quindi $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

4. Se V è uno spazio euclideo di dimensione n, ogni $T \in O(V)$ è composizione di al più n riflessioni S_n

Dimostrazione
per induzione su n, con base ovvia $n = 1$.
Supponiamo il teorema valga per ogni spazio euclideo di dimensione $n - 1$ e dimostriamo per uno spazio euclideo di dimensione n. Sia $f \in O(V)$
Primo caso
f ha un punto fisso non nullo

$$v \in V, \quad v \neq 0, \quad f(v) = v.$$

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^\perp.$$

$W = v^\perp, \quad (W, \langle , \rangle|_{W \times W})$ *è euclideo di dimensione $n - 1$*
$F|_W : W \to W$, *infatti, se $u \in W$*

$$\langle f(u), v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0.$$

Per induzione $f|_W = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n - 1$
e quindi $f = S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_r}, \quad r \leq n - 1$

Secondo caso
Sia $v \neq 0$ *tale che* $f(v) \neq v$. *Allora*

$$S_{f(v)-v}(f(v)) = v.$$

Infatti $S_{f(v)-v}(f(v)) = f(v) - 2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(f(v)-v)$
Ma $\qquad = f(w) = +2\dfrac{\langle f(v), f(v)-v\rangle}{\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle}(v - f(v))$
Ora $\langle f(v), f(v)-v\rangle = ||v||^2 - \langle f(v), v\rangle$
$\langle f(v)-v, f(v)-v\rangle = 2||v||^2 - 2\langle f(v), v\rangle$.
Dunque $(S_{f(v)-v} \circ f)$ *ha un punto fisso. Per il primo caso* $S_{f(v)-v} \circ f = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r} \quad r \leq n-1$
Dunque $S_{f(v)-v} \circ S_{f(v)-v} \circ f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \ldots \circ S_{\alpha_r}$
$\Rightarrow f = S_{f(v)-v} \circ S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_r}$
quindi f *è composizione di al più* n *riflessioni* $\square$

3 Spazi affini euclidei

Uno spazio affine euclideo è uno spazio affine $(E, V, +)$ dove V è uno spazio euclideo.
Si può definire una distanza tra punti di E

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||.$$

Un riferimento cartesiano per uno spazio affine euclideo è il dato $Oe_1 \ldots e_n$ di un punto e di una base ortonormale di V
In particolare se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 2
Due sottospazi affini si dicono ortogonali se le loro giaciture sono ortogonali

$$(\textit{cioè se } S = P + U, \quad T = Q + W, \langle u, w\rangle = 0 \quad \forall u \in U, \quad \forall w \in W).$$