Lezione 3 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-04

0.1 Parte interna, chiusura,intorni

Definizione 1
Sia X spazio topologico, sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme, la parte interna di D è
$$D^o = \bigcup_{A \subseteq D, A \ aperto} A.$$
La chiusura di D è
$$\overline{D} = \bigcap_{C \supseteq D, C \ chiuso} C.$$
la frontiera di D è
$$\partial D = \overline{D} \setminus D^o.$$
I punti di D^o si dicono interni a D, quelli di $\overline{D}$ si chiamano aderenti a D.

Osservazioni
1) D^o è un aperto e $\overline{D}$ è un chiuso (posso vederlo come l'intersezione tra $\overline{D}$ e il complementare di D^o, che è chiuso)
2) Anche ∂D è chiuso perché
$D = \overline{D} \cap (X \setminus D^o)$ dove $(X \setminus D^o)$ è un chiuso
Esempio
1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea. Sia $D = [0, 1]$.
Allora $D^o =]0, 1[$, verifica:
$D^o \supseteq]0, 1[$:
La parte interna di D contiene tutti gli aperti, dato che $]0, 1[$ è un aperto è contenuto.
A $D^o \subseteq]0, 1[$:
supponiamo per assurdo che $D^o \not\subseteq]0, 1[$, allora $0 \in D^o$ oppure $1 \in D^o$ (mi limito a considerare i punti di D perché $D^o \subseteq D$).
Supponiamo $0 \in D^o$, allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c. $A \subseteq D, A \ni 0$ (è uno degli A della definizione).
Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\subseteq a \subseteq D$.
assurdo, Analogamente $1 \notin D^o$ quindi vale $\subseteq$
2) $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita $D = [0, 1]$. Allora $D^o = \bigcup_{A \subseteq D, A \text{ aperto}}$
Sia A aperto.
$A \subseteq D$ abbiamo
$A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{R} \setminus \{\text{insieme finito}\}$
Ma questa ultima è impossibile
allora $D^o = \emptyset$ in questa topologia (con questo D)
esercizio: calcolare $\overline{D}$
3) $X = \mathbb{R}$, $T =$ topologia per cui A è aperto $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oppure $A \ni 0$
Considero $\overline{\{1\}} = \{1\}$, questo insieme non contiene lo zero, quindi $\{1\}$ è esso stesso un chiuso.
Però $\overline{\{0\}} =?$
I chiusi in T sono $\mathbb{R}$ e i sottoinsiemi che non contengono lo 0. Quindi l'unico insieme chiuso che contiene $\{0\}$ è $\mathbb{R}$, allora $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$

Definizione 2
Sia X spazio topologico, un sottoinsieme di $D \subseteq X$ si dice denso se $\overline{D} = X$

Esempio
$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea,
$D = \mathbb{Q}$. Dimostriamo che è denso
L'unico chiuso che contiene D è X stesso.
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso con $C \supseteq \mathbb{Q}$
sia $a \in \mathbb{R} \setminus C$ aperto
allora $\exists \varepsilon > 0 \mid]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus C$
allora $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$
assurdo.
Allora a non esiste e $C = \mathbb{R}$. **Osservazione:**
1) Sia $D \subseteq X$ spazio topologico
vale:

$$X \setminus (\overline{D}) = (X \setminus D)^o.$$

Dimostrazione
Usando direttamente la definizione:

$$X \setminus (\overline{D}) = X \setminus (\bigcap_{C \supseteq D, C \ chiuso} C) = \bigcup_{C \supset D, C \ chiuso} (X \setminus C).$$

(ultima eguaglianza per esercizio)

$$= \bigcup_{A = X \setminus C, C \supset D, C \ chiuso} A = \bigcup_{A \ aperto, X \setminus A \supset D} A = \bigcup_{A \ aperto, A \subseteq X \setminus D} A.$$

□

2) D denso
$\Updownarrow$
D interseca ogni aperto non vuoto (esercizio)

Definizione 3
Sia X spazio topologico,
$U \subseteq X, x \in U^o$
Allora U si dice intorno di x.
Equivalentemente, un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice intorno di $x \in X$ se esiste $A \subseteq X$ aperto t.c. $x \in A \subseteq U$

Esempio
$X = \mathbb{R}$ topologia euclidea, $x = 0, U =]-1, 1[$ è intorno di x (si prende ad esempio $A = U$, o anche $A =]-1/2, 1/2[$
Anche $V = [-1, 1] \cup \{5\}$ è un intonro di 0, ad esempio $A =]-1/2, 16[\cup]3/16, 7/16[$
Osservazione
$U \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow U = U^o \Leftrightarrow U$ è un intorno di ogni suo punto.

Lemma 1
Siano X spazio topologico, $x \in X$ $D \subseteq X$. Allora $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \forall U$ intorno di x vale $U \cap X \neq \emptyset$

Dimostrazione
Supponiamo $x \in \overline{D}$ sia U intorno di x
per assurdo suppongo $D \cap U = \emptyset$ Considero $A \subseteq X$ aperto con $x \in A \subseteq U$
Considero il chiuso $X \setminus A = C$
Abbiamo $C \supseteq D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset A$
Abbiamo $C \supset D$ perché $D \cap U = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$ e allora anche $D \cap A = \emptyset$. Cioè C compare nella definizione di D e $C \not\ni x$ perché $x \in A$
Ma $x \in \overline{D}$ quindi x è in tutti i chiusi che contengono D, assurdo
Viceversa, supponiamo D intorno di x, per assurdo però $x \neq \overline{D}$, Allora esiste un chiuso C che contiene D ma non x.
Considero $A = X \setminus C$ è un aperto contenente x. Cioè A è un intorno di x e A non interseca D; assurdo. Quindi $x \in D$ □

Definizione 4 (Famiglia degli intorni, sistema fondamentale)
Sia X spazio topologico e $x \in X$ La famiglia di tutti gli intorni di x si denota con $I(x)$.
Un sottoinsieme $J \subseteq I(x)$ è detto sistema fondamentale di intorni di x (o base locale in x) se $\forall U \in I(x) \quad \exists V \in J \mid V \subseteq U$

Esempi:
$X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.
$x \in \mathbb{R}$ qualsiasi
$J = \{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\mid \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}$
è sistema fondamentale di intorni di x
$J'\{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
è un sistema fondamentale di interni di x

$$J'' = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{2}{n}[\cup\{x + \frac{3}{n}\}|n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

è un sistema fondamentale di riferimento

$$J''' = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cup\{10\}|n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

$(10 \neq x)$
non è un sistema fondamentale di riferimento

0.2 Applicazioni continue

Definizione 5
Siamo X, Y spazio topologico $f : X \to Y$ un'applicazione. f si dice continua se $f^{-1}(A)$ è aperto (in X) $\forall A$ aperto (Y)

Nota (per la tesi)
non iniziare mai una frase con un simbolo, è facile fare errori (lui può ma solo per essere veloce)
Esempi:
1) Se X ha topologia discreta, ogni f è continua (qualsiasi sia Y)
2) Se Y ha una topologia banale, allora $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$
quindi ogni f è continua.
3) Supponiamo X, Y con topologia cofinita e $f : X \to Y$ iniettiva
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
gli altri aperti sono del tipo $Y \setminus \{$ insieme finito $\} = Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$
allora:
$f^{-1}(Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}) = X \setminus \{f^{-1}(y_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(y_n)\}$