Lezione 5 Algebra I

Federico De Sisti

2024-10-15

1 Teoremi di isomorfismo

Teorema 1 (Secondo teorema di isomorfismo)
$(G, \cdot)$ gruppo
$H, N \trianglelefteq G$ tali che $N \subseteq H$ Allora

1. $H/M \trianglelefteq G/N$

2. $G/N/H/N \cong G/H$

Dimostrazione

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi=\pi_H"] \arrow[d, "\pi"'] & G/H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

π_H proiezione sul quoziente H

$N \subseteq H = ker(\varphi)$
Inoltre $Im(\bar{\varphi}) = Im(\varphi) = G/H$
***Idea:** applicare il primo teorema di isomorfismo*
<u>suriettiva</u> $\bar{\varphi} : G/N \to G/H$
basta quindi dimostrare che $ker(\bar{\varphi}) = H/N$
Studiamo

$$ker(\bar{\varphi}) = \{gN \in G/N | \bar{\varphi}(gN) = H\}.$$

$$\{gN \in G/N | gH = H\}.$$

$$\{gN \in G/N | g \in H\} = H/N.$$

$\square$

Corollario 1
In $(\mathbb{Z}, +)$ gruppo abeliano
$a, n \in \mathbb{Z}$ interi non nulli
Denotiamo con

$$[a] = a + (n) \in \mathbb{Z}/(n) = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}.$$

Allora $ord_{\mathbb{Z}/(n)}([a]) = \frac{n}{MCD(a,n)}$

Nota:
se $MCD(n, a) = 1$ allora a genera il gruppo ciclico $\mathbb{Z}/(n)$
Dimostrazione
Consideriamo $G = \mathbb{Z}$ $H = (a) + (n)$ $N = (n)$
Dal II Teorema di isomorfismo

$$\mathbb{Z}/(n) \Big/ ([a]) \cong \mathbb{Z}/(n) \Big/ (a) + (n)/(n) \cong G/N \Big/ H/N \cong G/N \cong \mathbb{Z}/(MCD(a, n)).$$

$\square$

Confrontiamo le cardinalità

$$MCD(a,n) = |\mathbb{Z}/(MCD(a,n))|.$$
$$= |\mathbb{Z}/(n) \big/ ([a])|$$

.

$$\frac{|Z/(n)|}{([a])} = \frac{n}{ord([a])}.$$
$$ord([a]) = \frac{n}{MCD(a,n)}.$$

Lemma 1
$a, bg \in Z$ non nulli
tali che $a|b$ (allora $(b) \subseteq (a)$
Allora

$$|(a)/(b)| = \frac{b}{a}.$$

Dimostrazione
Studiamo $(a)/(b)$
Per definizione è l'insieme dei laterali

$$(a)/(b) = \{ta + (b) | t \in \mathbb{Z}\}.$$

dobbiamo capire quanti laterali distinti esistono
Dati $t, s \in \mathbb{Z}$ tali che

$$ta + (b) = sa + (b).$$
$$\Leftrightarrow ta \equiv sa \; mod(b).$$
$$\Leftrightarrow -ta + sa \in (b).$$

Allora

$$(a)/(b) = \{ta + (b) | tt \in \{1, \ldots, \frac{b}{a}\}\}.$$

$\square$

Teorema 2 (III teorema di isomorfismo)
$(G, \cdot)$ gruppo

- $N \trianglelefteq G$

- $H \leq G$

Allora

1. $H \cap N \trianglelefteq H$
2. $^{H}/_{H \cap N} \cong HN/N$

Dimostrazione
$\pi_N : G \to G/N$
$g \to gN$
consideriamo la restrizione

$$\begin{gathered} \pi_N|_H : H \to G/H \\ h \to hN \\ ker(\pi_N|_H) = \{h \in H | \pi_N|_H(h) = N\} \\ = \{h \in H | hN = N\} \\ = \{h \in H | h \in N\} \\ = H \cap N \end{gathered}$$

Deduciamo che $H \cap N \trianglelefteq N$
Idea: Applicare il I teorema di isomorfismo all'omomorfismo

$$\varphi = \pi_N|_H : H \to G/N.$$

Avremo $Im(\varphi) \cong H/ker(\varphi) = H/H \cap N$
Studiamo $Im(\varphi)$

$$Im(\varphi) = Im(\pi_N|_H) = \pi_N(H) = \pi_N(HN) = HN/N.$$

Il penultimo passaggio deriva da un lemma già visto a lezione □

Corollario 2
$a, b \in \mathbb{Z}$ *non nullli*
Allora $mcm(a, b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}$

Dimostrazione
$G = \mathbb{Z}$
$H = (a)$
$N = (b)$
$H + N = (MCD(a, b))$

$H \cap N = (mcm(a,b))$
Dal III teorema di isomorfismo

$$(a) \Big/ (mcm(a,b)) \cong H / H \cap N \cong HN / N \cong (MCD(a,b)) \Big/ (b).$$

Confrontiamo la cardinalità
Per il lemma

$$\frac{mcm(a,b)}{a} = |(a)(mcm(a,b))| = |(MCD(a,b)) \Big/ (b) = \frac{b}{MCD(a,b)}.$$

Quindi

$$mcm(a,b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}.$$

□

2 Classificazione di gruppi di ordine "piccolo" a meno di isomorfismo

Ordine 1
Se $|G| = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \{e\}$
Ordine p primo:
Abbiamo mostrato che se $|G| = p$ allora G non ammette sottogruppi non banali
Sia $g \in G$ tale che $g \neq e \Rightarrow ord(g) = p \ \Rightarrow G =< g >$

$$\varphi : G \to G_p =< p >$$
$$g \to p$$

Obiettivo: classificare a meno di isomorfismo i gruppi di ordine 4 e di ordine 6

Definizione 1 (Klein,1884)
Il gruppo di Klein, K_4 è il gruppo delle isometrie del piano che preservano un rettangolo fissato.

Esercizio
Verificare che $K_4 = \{id, \rho, \sigma, \rho\sigma\}$
dove $\rho =$ rotazione di angolo π
e dove $\sigma =$ riflessione rispetto ad un lato **Osservazione**
tutti gli elementi in K_4 hanno ordine ≤ 2 Quindi $K_4 \neq C_4$
Dato che $K_4 =< \rho, \sigma >$
denoteremo anche

$$K_4 = D_2 \text{ (gruppo diedrale).}$$

Esercizio
$(G, \cdot)$ gruppo in cui ogni elemento ha ordine ≤ 2 (equivalentemente ogni elemento è inverso di se stesso)
1) Dimostrare che G è abeliano
2) Se $|G| = 4$ dimostrare che $G \cong K_4$ **Svolgimento** 1) Dati $f, g \in G$
$fg = (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1} = gf$
2) Sia $|G| = 4$
Scelgo $g, f \in G$ distinti tali che $\begin{cases} g \neq e \\ f \neq e \end{cases}$
Considero $H =< g, h >$
Per Lagrange
$H \geq 3$
$\Rightarrow H = H$
$\Rightarrow G = \{e, f, g, fg\}$
abeliano
Costruisco l'isomorfismo esplicito con K_4

$$\begin{gathered} \varphi : G \rightarrow K_4 =< \rho, \sigma > \\ e \rightarrow e \\ f \rightarrow \rho \\ g \rightarrow \sigma \\ fg \rightarrow \rho\sigma \end{gathered}$$

che è chiaramente biunivoca ed è un omomorfismo $\Rightarrow \varphi$ è un isomorfismo