# Lezione 14 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-09

## 0.1 Integrali dipendenti da un parametro

$(X, \mu)$ spazio di misura

$$f : I \times X \to [-\infty, +\infty].$$

$I$ intervallo di $\mathbb{R}$, tale che

- per quasi ogni $x \in X$
  $t \in I \to f(t, x), f(\cdot, x)$ continua
- $\forall t \in I \quad f(t, \cdot) \in L^1(X, \mu)$

$$h(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x).$$

**Teorema 1**
*Sia $(X, \mu)$ spazio di misura, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \times X \to [-\infty, +\infty]$*

1. *se $f(\cdot, x)$ è continua su $I$ per quasi ogni $x \in X \quad f(t, \cdot) \in L^1(X) \quad \forall t \in I$ e $\exists g \in L^1(X)$ t.c. $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$ per quasi ogni $x \in X$*
   *$\Rightarrow$ la funzione $h(t) = \int_X f(t, x) d\mu$ è continua su $I$*
2. *Se per quasi ogni $x \in X, \quad f(\cdot, x)$ è derivabile su $I$ e se $\exists g_1 \in L^1(X)$ tale che*
   $$|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g_1(x) \qquad \text{per q.o. } x \in X \quad \forall t \in I.$$
   *$\Rightarrow h$ è derivabile e*
   $$h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

*stiamo dicendo che la derivata dell'integrale è l'integrale della derivata.*

**Dimostrazione**
*Da recupearare (Chat con Alberto Agostinelli)* □

**Osservazione**
$f : I \times X \to [-\infty, +\infty]$
nelle ipotesi del teorema continua in $t_0 \in I$ e $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I$ quasi ovunque in $X$.
Posso considerare non tutti gli $t \in I$ ma selezionar e i $t$ in sottointervalli di $I$ quindi in un intorno di $t_0$per avere la continuità in $t_0$

## 0.2 Assoluta continuità dell'integrale

Ricordiamo che $s$ funzione semplice $s \geq 0$
$\forall E \in M$ e definiamo

$$\mu_s(E) = \int_E s d\mu \Rightarrow \mu_S \text{ è una misura.}$$

adesso se $f \in L^1(X)$
$\mu_f(E) = \int_E |f| d\mu$ è una misura su $X$
$\mu_f(E) = 0 \ \ \forall E \in M$ tale che $\mu(E) = 0$

**Teorema 2** (Assoluta continutià dell'integrale)
*sia* $f \in L^1(X)$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ *tale che* $\int_E |f| d\mu < \varepsilon \ \ \forall E \in M, \ \ \mu(E) < \delta$
*enunciato più "suggestivo":*

$$\lim_{\mu}(E) \to 0 \quad \int_E |f| d\mu = 0.$$

il punto sta nel fatto che sti cazzi di chi è $E$ basta che la sua misura tenda a 0
**Dimostrazione**
*non la scrivo, mancano 3 giorni all'esonero, parla con Alberto Agostinelli.* □
**Osservazione**
Sia $\{f_n\} \subset L^1(X)$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, f_n) = \delta(\varepsilon, n)$ tale che $\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$ se $\mu(E) < \delta(\varepsilon, n)$
Se $\exists f \in L^1(X)$ tale che
$f_n \to f$ in $L^1(X)$ ( $\int_X |f_N - f| d\mu \to 0$)
$\Rightarrow$ la proprietà di assoluta continuità dell'integrale e'verificata uniformemente rispetto a $n$
$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_f(\varepsilon)$
tale che $\int_E |f| d\mu < \varepsilon \quad$ se $\mu(E) < \delta_f$

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_E |f| d\mu < \varepsilon + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ per $\delta = \min\{\delta_{f_1}, \ldots, \delta_{f_{n_\varepsilon}}, \delta_f\} > 0$

$$\int_E |f| d\mu < 2\varepsilon \text{ se } \mu(E) < \delta \forall n \in \mathbb{N}$$

Piccolo conto apparentemente poco utile:
**Riscrittura delle convergenza quasi ovunqe**
$(X, \mu)$ spazio di misura
$f_n, f : X \to [-\infty, +\infty]$ finite quasi ovunque $f_n \to f$quasi ovunque
$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$ tale che $f_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \in X \setminus N$
$\Leftrightarrow \exists N \subset X \ \ \mu(N)$ tale ceh $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k = k(x, \varepsilon)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x X \setminus B.$$

$\Leftrightarrow \exists N \subset X, \mu(N) = 0$ tale che

$$X \setminus N \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$

$$\left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| < \varepsilon\} \right)^c \subseteq N.$$

ovvero

$$\left( \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \right) \subseteq N.$$

quindi tutta sta roba ha misura nulla poiché contenuta in $N$ che ha misura nulla.