Lezione 4 Algebra I

Federico De Sisti

2025-03-10

0.1 Nuova lezione

Esercizio (scheda 12)
Calcolare u_i $\forall i \geq 0$ nel caso $R = \mathbb{Z}/(4)$
Osservazione:
$\mathbb{Z}/(4)$ non è un dominio d'integrità
$\Rightarrow \mathbb{Z}/(4)$ non è dominio Euclideo
Però avremo $\mathbb{Z}/(4) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} u_i$
Soluzione
$u_0 = \{0\}$
$u_1 \setminus u_0 = \{$ invertibili in $\mathbb{Z}/(4)\} = \{[1], [3]\}$
$u_2 =?$
L'unica domanda è $[2] \in u_2$, se non ci dovesse essere, allora rimarremmo in u_1, e si stabilizzerebbe.
Devo studiare la suriettività della funzione

$$\{[0], [1], [3]\} \to \frac{\mathbb{Z}/(4)}{([2])} \cong \mathbb{Z}/(2).$$

siccome $[1] \to [1]$ allora $u_2 = \mathbb{Z}/(4)$
Esercizio
Determinare gli u_i per $R = \mathbb{Z}[x]$

- $u_0 = \{0\}$
- $u_1 = \{0, 1, -1\}$
- $u_2 =?$

Se $p \in u_2$ allora:

$$\{0, 1, -1\} \to \mathbb{Z}[x]/(p) \text{ è suriettiva.}$$

Se $deg(p)$ allora $\mathbb{Z}[x]/(p)$ ha infiniti elementi distinti $\Rightarrow p \notin u_2$
Quindi possiamo assumere p costante
· Se $|p| > 3$ abbiamo almeno p costanti diverse in $\mathbb{Z}[x]/(p) p \notin u_2$
· $o = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ sono gli unici casi rimanenti
Ora $\pm 1 \in U_2$ poiché $\pm 1 \in u_1$
Se $p = \pm 2, \pm 3$
abbiamo $[x] \in \mathbb{Z}/(p)$ che è distinta dalla classe ci ciascuna costante
Quindi:

$$\begin{gathered} 0 \to [0] \\ 1 \to [1] \\ -1 \to [1] \end{gathered}$$