Lezione 6 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-11

1 Insieme di Vitali

Controesempio all'additività di m
Insieme di Vitali
In $\mathbb{R}$ consideriamo la relazione d'equivalenza

$$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

sia $[x]$ la classe di equivalenza di un elemento $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}.$$

V insieme di Vitali è costruito scegliendo un elemento in $[0, 1]$ da ogni classe d'equivalenza. $V \subseteq [0, 1],\ x \in V$
$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \exists \hat{x} \in V$ tale che $x \sim \hat{x} \Leftrightarrow x - \hat{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - \hat{x} = q \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow x = \hat{x} + q \in V + q$ dove $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$
$-1 \leq x - \hat{x} \leq x \leq 1$
Quindi abbiamo dimostrato

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + q \subseteq [-1, 2].$$

L'osservazione cruciale è che tutti questi insiemi sono disgiunti
siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$
se $V + q_1 \cap V + q_2 \neq$
$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x_1 + q_1 = x_2 + q_2.$$

$$x_1 - x_2 = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}.$$

Ciò vuol dire che $x_1 \sim x_2$ che è assurdo dato che in V prendiamo solo un rappresentate per ogni classe di equivalenza.
Ciò vuol dire che $\cup_{i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}$ è unione numerabile di insiemi disgiunti
Vediamo la misura di questo insieme
$m([0, 1]) = 1 \leq mi \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V + 1 \right)$ per monotonia
Supponiamo che valga l'additività. (1)

$$= \sum_{q \in Q \cap [-1,1]} m(V + q).$$

$$= \sum m(V) \leq m([-1, 2]) = 3.$$

$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V) \leq 3$
Però le due disuguaglianze indicano che $m(V) > 0$ e $m(V) = 0$ (la somma deve

essere di termini positivi, e deve essere finita), che è assurdo. Ma qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha una misura, quindi l'assurdo deriva dal fatto che utilizziamo l'additività (1).

Tuttavia non vogliamo rinunciare all'additività, possiamo quindi considerare l'insieme degli insiemi per cui vale l'additività della misura.

Definizione 1 (Caratheodory)
X insieme non vuoto μ misura su X
Un insieme $E \subseteq X$ si dice μ-misurabile se $\forall F \subseteq X$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Ovvero E spezza additivamente ogni altro insieme

Osservazione

1. $E \subseteq X$ è μ misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \cap(F \setminus E) \quad \forall F \subseteq X$
   perché $\geq$ è sempre vero per la subadditività
   Quindi si può anche supporre $\mu(F) < +\infty$
2. La definizione di misurabilità è simmetrica per E e $E^c = X \setminus E$, E misurabile $\Leftrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F \setminus E^c) + \mu(F \cap E^c)$
   che è la misura che dovrei testare per E^c
   Quindi E è μ-misurabile $\Leftrightarrow$ E^c è μ-misurabile
3. Se $\mu(E) = 0 \Rightarrow E$ è μ-misurabile.
   $\forall F \subseteq X$
   $\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \cancel{\mu(E)} + \mu(F) \Rightarrow E$ è μ-misurabile.

Indicheremo con η_μ la classe dei sottoinsiemi μ-misurabili
$\eta_\mu = \{E \subseteq X \mid E \ \ \mu\text{-misurabile } \} = \{\emptyset, X, \ldots\}$

Teorema 1
Sia μ una misura su X, η_μ la classe degli insiemi μ-misurabili, Allora:

1. *se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
2. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$ *tale che* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E)i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$
3. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
   tale che $E_1 E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_i \subseteq E_{i+1} \subseteq \ldots$
   $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty)\mu(E_i)}$
4. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\nu$
   tale che $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \subseteq E_i \supseteq E_{i+1} \supseteq \ldots$
   e $\mu(E_1) < +\infty$
   $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$

Dimostrazione
Primo passo, l'unione finita di numerabili è misurabile

$$E_1, E_2 \in \eta_\mu \quad th: \; E_1 \cup E_2 \in \eta_\mu.$$

$\forall F \subseteq X$
$\mu(F) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1 \cap E_2) + \breve{(}F \setminus E_1 \setminus E_2) \geq \mu(F \cap E_1 \cup (F \setminus E_1 \cap E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)) = \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2))$
per subadditività
Induttivamente:
se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k \in \eta_\mu$
Se $E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu \Rightarrow E_1^c, \ldots, E_k^c \in \eta_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} E^c \in \eta_\mu \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c)^c \in \eta_\mu$
Secondo passo finita additività:
$E_1, \ldots, E_k \in \eta_\mu, \quad E_1, \ldots, E_k$ *disgiunti*
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \mu(\bigcup_{i=1}^{k} E_i \cap E_k) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \setminus E_k\right) = \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{i-1}^{k-1} E_i\right)$
terzo passo: Numerabile additività
$\{E_i\} \subset \eta_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Osserviamo che $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$, *disgiunti*
$F \subseteq X$
$\Rightarrow \mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i-1}^{k} F \cap E\right.$

e $\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \sum_{i=1}^{+} \mu(F \cap E_i)$
quarto passo
$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \eta_\mu$
$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$
$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \lim_{i\to+\infty} \mu(E_i)$
$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E_1 \cup E_2 \setminus E_2 \cup E_{\dots\cup 2\setminus E_2 \dots \cup E_k \setminus E_{k-1}}$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} E - iE_{i-1}$
$\{E_1, E_i \setminus E_{i-1}\}_{i\geq 2}$
successione di insiemi disgiunti e misurabili.
$E_i \setminus E_{i+1} = E_i \cap (E_{i-1})^c$
per il passo 3 $\quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$
$= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{+\infty}(\mu(E_i) - \mu(E_{i-1}))$
$E_i = E_{i-1} \cup E_i \setminus E_{i-1}$
$\Rightarrow \mu(E_i) = \mu(E_{i-1}) + \mu(E_i \setminus E_{i-1})$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(E_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=2}^{k}(\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})).$$

$$= \mu(E_2) + \lim_{k\to+\infty} (\cancel{\mu(E_2)} - \mu(E_1) + \cancel{\mu(E_3)} - \cancel{\mu(E_2)} + \dots + \mu(E_k) - \cancel{\mu(E_{k-1})}.$$

Inoltre:
se $E_1 \subseteq \dots \quad \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(F \cap E_i)$
Quinto passo
$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \eta_\mu$
$E_2 \supseteq E_2 \supseteq \dots \qquad \mu(E_1) < +\infty$
$E_1 E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \dots$
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_1 \setminus E_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(E_1 \setminus E_i) = \lim_{i\to+\infty}(\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i\to+\infty} \mu(E_i)$. sesto passo
$\{E_i\} \subset \eta_\mu$
$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \eta_\mu$
$\forall F \subseteq X$
$\mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) + \mu(F \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \mu(F \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k) + \mu(F \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k)$
$B_j = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$
$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$
$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$
$\lim_{k\to+\infty} \mu(F \cap B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(F \setminus B_k)$
$= \lim_{k\to+}(\mu(F \cap B_k) + \mu(F \setminus B_k)) = \mu(F)$ $\square$