Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-15

1 Conclusione Spazi proiettivi (godo)

V spazio vettoriale, $V^\star$, $\mathbb{P}^V = \mathbb{P}(V^\star)$ spazio proiettivo duale
Se B è una base di V (ottenuta ad esempio a partire da un riferimento proiettivo di $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$), la base duale $B^\star$ di V^* può essere usata per introdurre in $\mathbb{P}^V$ un sistema di coordinate omogenee "duali"

$$0 \neq L \in V^\star \quad [L] \in \mathbb{P}^V.$$

se $x_1, \ldots, x_n$ sono coordinate in V rispetto a $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$$L(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = a_0 x_0 + \ldots + a_n x_n.$$

e L ha coordinate $(a_0, \ldots, a_n)$ rispetto alla base $B^\star = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$
$(v_i^*(v_j) = \delta_{ij})$
Questa Lezione è venuta una merda, non c'è modo apparente di studiare questo argomento se non quello di leggerlo dal Sernesi
Qui il professore prende letteralmenete un altro file e iniza a scriverci sotto, non sappiamo a cosa si stia riferendo
Sia $S = \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ di dimensione k.

$$W^\# = \{F \in V^* | F|_W = 0\}.$$

$\dim W = n - k$

$$\delta : \{\text{s.s.p. di} \dim k \text{ di } \mathbb{P}\} \to \{\text{s.s.p. di } \mathbb{P}^V \text{ di dim } n-k-1\}.$$

$$\mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W^\#).$$

Per s.s.p. si intende sottospazi proiettivi
Osservazione
Se prendiamo $k = n-1$ sottospazi proiettivi di $\dim n-1$ in $\mathbb{P}$ = iperpiani di $\mathbb{P}$
Sottospazi proiettivi di $\dim 0$ in $\mathbb{P}^V$ = punti di $\mathbb{P}^V$
Quindi è facile vedere che $\delta = \widetilde{\delta}^{-1}$

Nomenclatura 1
δ (o δ^{-1}) si chiama corrispondenza di dualità

Lemma 1 (Proprietà della corispodenza di dualità)
1. *δ è biunivoca*
2. *δ rovescia le inclusioni*
3. $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$
$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$

Dimostrazione
1. Segue dal caso vettoriale
2. Segue dal fatto che $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1^{\#} W_2^{\#}$
3. $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$
$\delta(S_1 \cap S_2) = \delta(\mathbb{P}(W_1 \cap S_2)) = \mathbb{P}((W_1 \cap W_2)^{\#}) = \mathbb{P}(W_1^{\#} + W_2^{\#} = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$
$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) = \mathbb{P}((W_1 + W_2)^{\#}) = \mathbb{P}(W^{\#} \cap W^{\#})$ *(manca una minchiata da finire)* $\square$

Definizione 1
Un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^V$ *si chiama sistema lineare*
Il centro S *di un sistema lineare* L *è l'intersezione degli iperpiani del sistema lineare*
Allora L *coincide con tutti gli iperpiani di* $\mathbb{P}$ *che contengono* S

$$L \leftrightarrow \Lambda_1(S) \text{ sistema lineare degli iperipani di centro } S.$$

Osservazioni
H iperpiano di $\mathbb{P}$ $\quad HS \Leftrightarrow \delta(H) \in \delta(S)$
Ne segue che se $\dim S = k$ allora $\dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 & (H_1) \\ \vdots \\ a_{n-k\ 0}x_0 + \ldots + a_{n-k\ n}x_n = 0 & (H_{n-k}) \end{cases} \qquad n-k \quad \text{equazioni indipendenti.}$$

$S = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-k}$
$\Lambda_1(S) = \delta(S) = \delta(H_1 \cap \ldots \cap H_{N-k}) = L(\delta(H_1), \ldots, \delta(H_{n-k}))$
$\Rightarrow \dim \Lambda_1(S) = n - k - 1$
$k = n - 2 \quad \Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di iperpiani di centro S
$n = 2$ e S è una retta, allora $\Lambda_1(S)$ ha dimensione 1 ed è il fascio di piani di asse la retta

---

$T : V \to W$ lineare

$$\begin{aligned} [T] : \mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(\ker T) &\to \mathbb{P}(W) \\ [v] &\to [T(v)] \end{aligned} \quad \text{È definita se } v \in V \setminus \ker T, \lambda \neq 0$$

$$[T][tv] = [T(tv)] = [\lambda T(v)] = [T(v)].$$

Osservazione
Se $\lambda \neq 0$, $\ker T = \ker \lambda T$, inoltre

$$[\lambda T] = [T].$$

Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi e sia $\mathbb{P}(U)$ un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$

Definizione 2
$f : \mathbb{P}(V) \setminus P(U) \to \mathbb{P}(W)$ si dice applicazione proiettiva se esiste $T : V \to W$ lineare tale che $[T] = f$ $\qquad (\ker T \subset U)$

Problema
È possibile che un'applicazione proiettiva sia indotta da due applicazioni lineari diverse?

Proposizione 1
Siano $T, S : V \to W$ due applicazioni lineari supponiamo che
1. *Esiste U sottospazio di V tale che* $\ker T. \ker S \subset U$
2. $\forall v \in V \setminus U \quad \exists \lambda = \lambda(v) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *t.c.*

$$T(w) = \lambda S(v).$$

Allora $\lambda =$const e $T = \lambda S$ in particolare $\ker T = \ker S$

Corollario 1
Se $f : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(W)$ è indotta da $T, S : V \to W$ allora, $T = \lambda S, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
In particolare $\ker T = \ker S$ e il dominio di f si può estendere a $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T)$ cioè esiste una trasformazione proiettiva $\widetilde{f} : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker T) \to \mathbb{P}(W)$ tale che

$$\widetilde{f}|_{\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)} = f.$$

Tale dominio di definizione è massimale

Definizione 3
Un'applicazione proiettiva si dice non degenere se è indotta da un'applicazione lineare iniettiva, si dice degenere altrimenti.
Un'applicazione proiettiva non degenere $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice proiettività

Osservazione
Le proiettività formano un gruppo, denotato $PGL(V)$
Esempio
$PGL(n+1, \mathbb{K}) = PGL(\mathbb{P}^n_k) = PGL(\mathbb{K}^{n+1})$
sono le matrici di $GL(n_1, \mathbb{K})$ identificate se differiscono per uno scalare non nullo

$$PGL(n_1, \mathbb{K})/\text{matrici scalari non nulle.}$$

dove le matrici scalari non nulle $\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$

Dimostrazione (Proposizione)
Proviamo anzitutto che $\ker T = \ker S$
Sia Z *un complementare di* U : $V = U \oplus Z \quad u + z \in V \setminus U$ *(poiché se* $u + z \in U$
anche z *appartiene a* U *escluso* $\square$