Lezione 26 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-05-28

0.1 Ricapitolando

$$\int_{X\times Y}\chi_P(x,y)d(\mu\times\nu)=\mu\times\nu(P)=\int_X\int_Y\chi_P(x,y)d\mu d\nu=\int_X\int_Y\chi_P d\nu d\mu.$$

In particolare se $P=A\times B\Rightarrow\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$
$\forall E\subseteq X\times Y\quad\mu\times\nu(E)=\inf\{\mu\times\nu(P),P$ plurirettangolo, $E\subseteq P\}$
$E\subseteq P\Rightarrow\mu\times\nu(E)\leq\mu\times\nu(P)\Rightarrow\mu\times\nu(E)\leq\inf\{\mu\times\nu(P),P\supseteq E\}$
Se $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\times B_i=P\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(A_i)\nu(B_i)\geq\mu\times\nu(P)\geq\inf\{\mu\times\nu(P),\ P\supseteq E\}$
$\mu\times\nu(E)\inf\{\mu\times\nu(P),P\supseteq E\}$
$\Rightarrow P$ plurirettangolo $\Rightarrow P\in M_{\mu\times\nu}$
$\forall E\subseteq X\times Y\quad\exists P_\infty=\bigcap_{k=1}^{+\infty}P_k,P_k$ plurirettangolo.
tale che $P_\infty\supseteq E$ e $\mu\times\nu(P_\infty)=\mu\times\nu(E)$
Quindi integrare secondo la misura prodotto è equivalente a integrare prima su una misura e poi sull'altra.

Lemma 1
Sia $\{P_k\}$ una successione decrescente di plurirettangoli di misura $\mu\times\nu$ finita.
$P_1\supseteq P_2\supseteq\ldots,\ \mu\times\nu(P_k)<+\infty\quad\forall k$ *e sia* $P_\infty=\bigcap_{k=1}^{+\infty}P_k$
Allora $\forall y\in Y,\chi_{P_\infty}(\cdot,y)$ *è* μ*-misurabile,* $y\to\int_X\chi_{P_\infty}(x,y)d\mu$ *è* ν*-misurabile*
$\forall x\in X,\chi_{P_\infty}(X,\cdot)$ *è* ν*-misurabile,* $x\to\int_X\chi_{P_\infty}(x,y)d\nu$ *è* μ*-misurabile.*
Inoltre

$$\mu\times\nu(P_\infty)=\int_Y\int_X\chi_{P_\infty}(x,y)d\mu d\nu=\int_X\int_Y\chi_{p_\infty}d\nu d\mu.$$

Osservazione
Quindi ciò che vale in generale per i plurirettangoli vale anche per il limite dell'intersezione.

Dimostrazione
$\mu\times\nu(P_\infty)=\lim_{k\to+\infty}\mu\times\nu(P_k)=\lim_{k\to+\infty}\int_Y\int_X\chi_{P_k}(x,y)d\mu d\nu$
Il primo passaggio è giustificato dal fatto che $\{P_k\}$ è una successione decrescente di misurabili di misura finita.

$$\chi_{P_\infty}(x,y)=\lim_{k\to+\infty}\chi_{p_k}(x,y)\quad\forall x\in X,\ \forall y\in Y.$$

$\chi_{P_\infty}(\cdot,y)$ *è* μ*-misurabile* $\forall y\in Y$
$\chi_{P_\infty}(x,\cdot)$ *è* ν*-misurabile* $\forall x\in X$
Per passare al limite all'interno dell'integrale devo dimostrare che la prima funzione (la più grande) abbia integrale finito.

$$\mu\times\nu(P_1)=\int_Y\int_X\chi_{P_1}(x,y)d\mu d\nu<+\infty.$$

$\Rightarrow$ *per quasi ogni y* $\quad \int_X \chi_{P_1}(x,y)d\mu < +\infty$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X \chi_{P_k}(x,y)d\mu = \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu.$$

per ν*-quasi ovunque* $y \in Y$

$$\psi_k(y) = \int_X \chi_{P_k}(x,y)d\mu.$$

$\psi_k(y) \xrightarrow{k\to+\infty} \psi(y) = \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu$ *per* ν *quasi ogni* y

$\lim_{k\to+\infty} \int_Y \psi_k(Y)d = \int_Y \psi(y)d\nu$ *per convergenza monotona*

$$\int_Y \psi(y)d\nu = \int_Y \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu d\nu.$$

$\square$

Lemma 2
Sia $N \subseteq X \times Y$ *tale che* $\mu \times \nu(N) = 0$
$\Rightarrow$ *per* ν*-quasi ogni* $y \in Y$ *fissato,* $\chi_N(\cdot,y)$ *è* μ*-misurabile* $y \to \int_X \chi_N(x,y)d\mu$ *è* ν*-misurabile (definita q.o.)*
per μ*-quasi ogni* $x \in X$ *fissato,* $\chi_N(x,\cdot)$ *è* ν*-misurabile e* $x \to \int_Y \chi_N(x,y)d\nu$ *è* μ*-misurabile (definita q.o.)*
e inoltre $\int_Y \int_X \chi_{N(x,y)} d\mu d\nu = \int_X \int_Y \chi_N(x,y)d\nu d\mu = 0 = \mu \times \nu(N)$

Dimostrazione
$\mu \times \nu(N) = 0 = \inf\{\mu \times \nu(P), P$ *plurirettangolo,* $P \supseteq N\}$
$\exists\{P_k\}$ *successione di plurirettangoli con* $P_k \supseteq N$ *tale che* $\mu \times \nu(P_k) < \frac{1}{k} \quad \forall k$
Eventualmente sostituendo

$$P_k \quad con \quad P'_k = \bigcap_{j=1}^{k} P_j.$$

si può supporre $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$
$N \subseteq P_k \quad \forall k \Rightarrow N \subseteq \bigcap_{k-1}^{+\infty} P_k = P_\infty$ *con* $\mu \times \nu(P_\infty) = 0 = \int_Y \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu d\nu = \int_X \int_Y \chi_{P_\infty}(x,y)d\nu d\mu$
$\chi_N(x,y) \leq \chi_{P_\infty}(x,y)$ $\qquad (N \subseteq P_\infty)$
per $y \in Y$ *fissato*

$$\chi_N(\cdot,y) \leq \chi_{P_\infty}(\cdot,y).$$

$$\int_Y \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu d\nu \Rightarrow \int_X \chi_{P_\infty}(x,y)d\mu = 0.$$

Per ν-quasi ogni $y \in Y$

$$\Rightarrow \chi_{P_\infty}(\cdot, y) = 0.$$
$$\Rightarrow \chi_N(\cdot, y) = 0 \quad q.o. \quad in \quad X.$$

per ν-quasi ogni $y \in Y$
$\Rightarrow$ *per ν-quasi ogni $y \in Y$, $\chi_N(\cdot, y)$ è μ-misurabile (= 0 quasi ovunque)*
e $\displaystyle\int_X \chi_N(x, y) d\mu = 0$ *per ν-quasi ogni $y \in Y$*
$\Rightarrow \displaystyle\int_Y (\int_X \chi_N(x, y) d\mu) d\nu = 0$

$\square$

Proposizione 1
Sia $E \subseteq X \times Y$ tale che E è $\mu \times \nu$-misurabile e $\mu \times \nu(E) < +\infty$
Allora:

- *per ν-q.o. $y \in Y$ fissato, $\chi_E(\cdot, y)$ è μ-misurabile e $y \to \int_X \chi_E(x, y) d\mu$ è ν-misurabile*
- *per μ-q.o. $x \in X$ fissato, $\chi_E(x, \cdot)$ è ν-misurabile e $x \to \int_Y \chi_E(x, y) d\nu$ è μ-misurabile*

Inoltre $\displaystyle\int_Y \int_X \chi_E(x, y) d\mu d\nu = \int_X \int_Y \chi_E(x, y) d\nu d\mu$
$\displaystyle= \mu \times \nu(E) = \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \nu)$

Dimostrazione
$\mu \times \nu(E) = \inf\{\mu \times \nu(P), E \subseteq P, P$ *plurirettangolo*$\}$
$\Rightarrow \exists P_\infty = \bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$, $\{P_k\}$ *pulrirettangi* $P_k \subseteq P_{k+1}$
tale che $E \subseteq P_\infty$ e $\mu \times \nu(E) = \mu \times \nu(P_\infty) < +\infty$
E $\mu \times \nu$-misurabile $\Rightarrow \mu \times \nu(P_\infty \setminus E) = \mu \times \nu(P_\infty) - \mu \times \nu(E) = 0$
$\Rightarrow \chi_E(x, y) = \chi_{P_\infty} - \chi_{P_\infty \setminus E}(x, y)$
La prima verifica la tesi per lemma 1 e la seconda parte verifica il la tesi per lemma 2 $\square$

Definizione 1
Uno spazio di misura (X, μ) si dice σ-finita se $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ con X_i misurabili, $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\mu(X_i) < \infty$ $\forall i$

Teorema 1 (Tonelli)
Siano $(X,\mu),(Y,\nu)$ *spazi di misura* σ*-finiti, sia* $f : X \times Y \to [0,+\infty)$ $\mu \times \nu$*-misurabile.*
Allora:

1. *per* ν*-q.o.* $y \in Y$, $f(\cdot,y)$ *è* μ*-misurabile e* $y \to \int_X f(x,y)d\mu$ *è* ν*-misurabile*

2. *per* μ*-q.o,* X, $f)x,\cdot)$ *è* ν*-misurabile e* $x \to \int_Y f(x,y)d\nu$ *è* μ*-misurabile*

Inoltre

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int_Y\int_X f(x,y)d\mu d\nu = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu d\mu.$$

Dimostrazione
Primo caso: $\mu(X) < +\infty, \mu(Y) < +\infty$
$f \geq 0$, *misurabile* $\Rightarrow \exists\{s_k\}$ *successione di funzioni semplici* $s_k(x,y) \xrightarrow{k\to+\infty} f(x,y) \quad \forall (x,y) \in X \times Y \quad s_k \leq s_{k+1} \quad \forall k$

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \lim_{k\to+\infty}\int_{X\times Y} s_k(x,y)d(\mu\times\nu).$$

verifica la tesi perché combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche.
secondo caso $X, Y \quad \sigma$*-finiti*
$X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i, \quad \mu(X_i) < +\infty \ \forall i \ Y = \bigcup_{j=1}^{+\infty} Y_j, \quad \mu(Y_j) < +\infty \ \forall j$
$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} f(x,y)\chi_{X_i}(x)\chi_{Y_j}(y)$
$= \sum_{i,j=1}^{+\infty} f(x,y)\chi_{X_i\times Y_j}(x,y)$
Quindi è combinazione di funzioni che verificano la tesi, quindi anche f *verifica la tesi*

$\square$

Teorema 2 (Fubini)
Siano $(X,\mu),(Y,\nu)$ *spazi di misura* σ*-finiti*
Se $f \in L^1(X\times Y, \mu\times\nu)$
$\Rightarrow$ *stessa tesi del teorema di Tonelli*

Dimostrazione
$f = f^+ - f^-$ *si applica teorema di Tonelli a* f^+ *e* f^- $\square$
Osservazione
Non è vero per funzioni non in L^1 oppure anche negative.