Lezione 6 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-13

1 Equivalenza per affinità

Definizione 1
Equivalenza per affinità Due sottoinsiemi $F, F' \subseteq A$ spazio affine, si dicono affinamente equivalenti se esiste $f \in Aff(A)$ tale che $f(F) = F'$
Definiamo anche una proprietà ***affine*** *se è equivalente per affinità*

Proposizione 1
Se $f \in Aff\,(A)$ e F un sottospazio affine di A di dimensione k, allora $f(F)$ è un sottospazio affine di dimensione k

Dimostrazione
$F = p + W \quad dim(W) = k$ *Sia* φ *la parte lineare di* f*, che è un omomorfismo* $\varphi : V \to V$.
Poniamo $F' = f(p) + W'$ *dove* $W' = \varphi(W)$
Chiaramente, $dim(W') = dim(\varphi(W)) = k$
risulta $f(F) = F'$

$$Q \in F \qquad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \in \varphi(W) = W'.$$

e dato che $\overrightarrow{PQ} \in W \ \Rightarrow f(F) \subseteq F'$ *Viceversa, dato* $R \in F$

$$\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W \Rightarrow f^{-1}(R) \in F, R \in f(F).$$

dunque $F' \subseteq f(F)$ □

Teorema 1
Sia $(A, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e siano $\{p_0, \ldots, p_n\}$, $\{a_0, \ldots, a_n\}$ due $(n+1)$-ple di punti indipendenti. Allora esiste un'unica affinità $f \in Aff(A)$ tale che $f(p_i) = q_i, \quad 0 \leq i \leq n$

Dimostrazione
Per ipotesi $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ *Sono basi di* V*, dunque esiste un unico operatore lineare* $\varphi \in GL(V)$ *tale che* $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = \overrightarrow{q_0q_i}) \quad 1 \leq i \leq n$
Pongo $f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$
$f(p_i) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i} = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$
f *è chiaramente biettiva* $\overrightarrow{f(p)f(p')} = \overrightarrow{q_0f(p)} - \overrightarrow{q_0f(p')} = \varphi(\overrightarrow{p_0p'}) - \varphi(\overrightarrow{p_0p}) =$
$= \varphi(\overrightarrow{p_0p'} - \overrightarrow{p_0p}) = \varphi(pp')$
L'unicità di f *segue da quella di* φ *e dal fatto che* $f(p_0) = q_0$ *(un'affinità è determinata dalla parte lineare e dall'immagine di un punto).* □

Esempio

Determino $f \in Aff(\mathbb{A}^2)$ t.c.

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\} \to \{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}\}$$

Cercherò quindi $\varphi \in GL(V)$ tale che

$$\varphi(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{q_0q_1}, \varphi(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{q_0q_2}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

$$P = \{\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\} \quad \varepsilon\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

$$[\varphi]^{\varepsilon}_{B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix} \qquad [Id]^{\varepsilon}_{B} = \begin{pmatrix}-3 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$[\varphi]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = [\varphi]^{\varepsilon}_{B}[Id]^{B}_{\varepsilon} = [\varphi]^{\varepsilon}_{B}[Id]^{\varepsilon}_{B}{}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-2\\x_2-1\end{pmatrix}$$

$$f(p) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p})$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (t_V \circ L_A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

Corollario 1

$(A, V, +)$ spazio affine di dimensione n

1. per ogni $1 \leq k \leq n+1$ due qualsiasi k-uple di punti sono affinamente equivalenti

2. Due sottospazi affini sono affinamente equivalenti se e solo se hanno al stessa dimensione

Dimostrazione

1. Se $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}, \{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ sono le k-ple date, completiamole a $(n+1)$-ple di punti indipendenti $\{p_0, \dots, p_n\}, \{q_0, \dots, q_n\}$ e usiamo il teorema 2. Abbiamo già visto che un'affinità preserva la dimensione dei sottospazi.

Viceversa, se S, S' sono sottospazi affini della stessa dimensione k, possiamo trovare $k+1$ punti indipendenti in S, e $k+1$ punti indipendenti in S' tali che

$$S = \overline{p_0, \dots, p_k}, \quad S' = \overline{q_0, \dots, q_n}.$$

Per la parte 1, esiste un'affinità che manda P_i in q_i, $0 \leq i \leq k$, dunque

$$f(S) = S'.$$

$\square$

2 Proiezioni e Simmetrie

Definizione 2 (Proiezioni e Simmetrie)
In $(A, V, +)$ *Sia* L *un sottospazio affine,* $L = P + W$
Sia U *un complementare di* W *in* V*, ovvero* $V = W \bigoplus U$

$$\begin{array}{rl} \pi_W^U(w+u) = w & \pi_W^U : V \to V \\ \sigma_W^U(w+u) = w - u & \sigma_W^U : V \to V \\ p_L^U(x) = p + \pi_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{proiezione su } L \textit{ parallela a } U \\ s_L^U(x) = p + \sigma_W^U(\overrightarrow{px}) & \textit{simmetria di asse } L \textit{ e direzione } U \end{array}$$