Lezione 10 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-03-25

0.1 Continuando sulle funzioni misurabili

Definizione 1 (Funzione semplice)
Sia (X, A, μ) uno spazio di misura. Una funzione semplice in X è una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}(x), \text{ con } c_i \in \mathbb{R}, N \geq 1, E_i \in A.$$

con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = X$

Teorema 1
Sia (X, A, μ) uno spazio di misura, e $f : X \to [-\infty, +\infty]$
Allora f misurabile $\Leftrightarrow \exists \{s_m\}$ successione di funzioni semplici tale che $s_m(x) \xrightarrow{m \to +\infty} f(x) \quad \forall x \in X$
Inoltre

1. *se $f \geq 0 \Rightarrow$ si può scegliere $\{s_m\}$ tale che $s_m(x) \leq s_{m+1}(x) \quad \forall x \in X, \forall m \geq 1$.*
2. *se f è limitata $\Rightarrow s_m \to f$ uniformemente in X.*

Dimostrazione
($\Leftarrow$) *ovvia, perché f è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili*

($\Rightarrow$) *Primo caso: $f \geq 0$, limitata, si può supporre $0 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in X$*

$\forall n \geq 1$ $[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$
$E_k^n = \{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\} \quad k = 1, \ldots, 2^n$
f *misurabile* $\Rightarrow E_k^n$ *misurabile* $\forall k = 1, \ldots, 2^n, \ \forall n \geq 1$
$E_k^n \cap E_j^n = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *e* $X = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_k^n$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n}(x)$$

$\forall x \in X, \forall n \geq 1 \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^n$ *tale che* $x \in E_k^n$
$\Rightarrow 0 \leq s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x)$
$x \in E_k^n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2^n} f(x), \frac{k}{2^n}$
$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$
$\Rightarrow$ *sono possibili due casi*

$$s_n(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \Leftarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}.$$

oppure

$$s_n(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \Leftarrow x \in E_{2k-1}^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}.$$

nel caso 1
$s_n(x) = \frac{k_-1}{2^n} = s_{n+1}(x)$
nel caso 2
$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$
$\forall x \in X \quad \exists! 1 \leq k \leq 2^{n+1}$
tale che $x \in E_k^n$
$\Leftrightarrow s_n(x) \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$
$\sup_{x \in X} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2^n}$
$\Rightarrow s_m \to f$ *uniformemente in* X

$(\Rightarrow)$ *secondo caso:* $f \geq 0$
$\forall n \geq 1$

$$E_I^n = \{f < n\}, \qquad E_{II}^n = \{f \geq n\}.$$

$E_{I,k}^n = \{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}$
$\bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = E_I^n$

$$s_n(x) = n\chi_{E_{II}^n}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k+1}{2^n} \chi_{E_{I,k}^n}(x).$$

$$E_{II}^n \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n = X.$$

$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x$ *(come nel caso 1)*
Se $f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) \geq m \quad \forall m$
$\Leftrightarrow x \in E_{II}^n$
$\Rightarrow s_n(x) = n \to +\infty = f(x)$
Se $f(x) < +\infty \Rightarrow \exists \bar{n}$ *tale che* $f(x) \leq \bar{n}$
$\Rightarrow x \in E_I^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E_{I,k}^n$
$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$
$\Rightarrow 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq \bar{n}$
la convergenza non è uniforme perché $\bar{n}$ *dipende da* f.
$\Rightarrow s_n(x) \to f(x)$

Terzo caso
f *di segno variabile*
$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$
$f^+(x) = max\{f(x), 0\}$
$f^-(x) = -min\{f(x), 0\}$
f *misurabile* <=> f^-, f^+ *misurabili*
Per il secondo caso
$\exists \{s_n\}$ *funzioni semplici* $s_n(x) \to f^+(x) \quad \forall x$
$\{t_n\}$ *funzioni semplici* $t_n(x) \to f^-(x) \quad \forall x$
$\Rightarrow s_n - t_n$ *è funzione semplice,* $s_n(x) - t_n(x) \to f(x) \quad \forall x$ $\square$

Definizione 2
Sia (X, A, μ) *spazio di misura e sia* $s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}(x),\; c_i \geq 0$
si definisce

$$\int_X s \; d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i).$$

dove si usa la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$
e, inoltre, $\forall E \in A$

$$\int_E s \; f\mu = \int_X s \cdot \chi_E \; d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E \cap E_i).$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i \cap E}.$$

dato che $\chi_{E_i} \cdot \chi_e = \chi_{E_i \cap E}$

Definizione 3
Sia $(X, A, \mu$ *spazio di misura e sia* $f : X \to [0, +\infty]$ *misurabile*
$\Rightarrow \int_X f \; d\mu = \sup\{\int_X s \; d\mu$ *s funzione semplice* $0 \leq s \leq f\}$ *e* $\forall E \in A$

$$\int_E f \; d\mu = \int_X \chi_E \; d\mu.$$

Proprietà immediate dell'integrazione

1. $f = 0$ quasi certamente in $X \Rightarrow \int_X f \; d\mu = 0$
2. Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f \; d\mu = 0$
3. $0 \leq f \leq g, \quad f, g$ misurabili $\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g \; du$
4. Se $E, F \in A \;\; E \subseteq F \quad \int_E f \; d\mu = \leq \int_F f \; d\mu$

Esempio
$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \; d\mu = 1\mu(\mathbb{Q}) = 0$
s funzione semplice $0 \leq s \leq f$

Proposizione 1
Sia $s(x)$ funzione semplice, ≥ 0, e sia $\mu_s : A \to [0, +\infty)$ definita da

$$\mu_s(E) = \int_E s \ d\mu.$$

μ_s è una misura su A (cioè $\mu_S(\emptyset) = 0$ ed è additiva su misurabili disgiunti)

Dimostrazione
$\mu_s(\emptyset) = \int_s \ d\mu = 0$
Siano $\{E_i\} \subset A$ disgiunti e sia $s(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{F_k}(x)$ $F_k \in A$ $F_k \cap F_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$ $\bigcup_{k=1}^{N} F_k = X$

$$\mu_s \left(\bigcup_{i-1}^{K} E_i \right) = \int_{\bigcup_{i-1}^{K} E_i} s \ d\mu = \int_X s \chi_{\bigcup_{i=1}^{K} E_i} \ d\mu.$$

con

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{+K} E_i} = \sum_{i=1}^{K} \chi_{E_i}.$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{K} E_i \Leftrightarrow \exists! i \ x \in E_i.$$

$$\int_X s \sum_{i=1}^{K} \chi_{E_i} \ d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{K} s \chi_{E_i} \ d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j \cap E_i} \ d\mu.$$

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(E_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} s \ d\mu = \sum_{i=1}^{K} \mu_s(E_i).$$

$$\mu_s(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \geq \mu_S \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i \right) = \sum_{i=1}^{K} \mu_s(E_i) \Rightarrow \mu_s \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i).$$

□

Osservazione
Se $N \subseteq X, \mu(N) = 0$
$\Rightarrow \int_N S \ d\mu = 0$
$\mu_s(N) = 0 \ \ \forall N : \mu(N) = 0$
$\mu_s << \mu$ μ_s è assolutamente continua rispetto a μ.