Lezione 1 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-02-26

1 Introduzione al corso

1.1 Regole varie

Esoneri validi solamente per il primo appello
3 esoneri
Con le prove di esonero possiamo essere esonerati dall'orale.
Lo scritto vale solamente per l'orale successivo.
L'orale sono 2/3 domande tra definizioni, esempi, teoremi, cose sbagliate agli scritti.

1.2 Inizio lezione

Il corso sarà sulla teoria dell'integrazione/teoria della misura.
La teoria dell'integrazione è il primo passo dell'analisi infinitesimale, la derivata è un'operazione che viene ben definita grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale
Viene formalizzata relativamente tardi, la prima sistemazione teorica è stata quella di Riemann (quella studiata in Analisi I).
Dal punto di vista teorico ha vari problemi. Questa teoria è stata subito soppiattata da una nuova teoria di integrazione, quella di Lebesgue (1902).
Uno dei punti fondamentali da cui partire è quello delle Serie di Fourier.

1.3 Serie di Fourier

Già nel XIIX secolo Fourier riusciva a risolvere varie equazioni differenziali, riguardanti fenomeni fisici.
Parliamo ora di modelli "ondulosi"
Parliamo della **corda vibrante**: continua in 1D, con moti ondulatori
$u : [0, \pi] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$(x, t) \to u(x, t)$

Equazione della corda vibrante: $\begin{cases} \partial^2 u \frac{}{\partial t^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0} \\ \mathrm{u(0,t)} = \mathrm{u}(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \mathrm{u(x,0)} = \mathrm{h}_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t} = h_1(x) \quad \forall x \in (0, \pi) \end{cases}$

Condizioni di compatibilità:

$$h_0(0) = h_1(0) = h_0(\pi) = h_1(\pi) = 0.$$

1.4 Due principi:

- esistenza di onde stazionarie:
$u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$ variabili separate
- sovrapposizione:
u_1, u_2 soluzioni $\Rightarrow \quad u_1 + u_2$ soluzione

1.5 Onde stazionarie

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi''(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$
$\Rightarrow \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \text{costante } = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$

Spiegazione:
$\psi''(t) = -m^2\psi(t)$
$\psi(t) = a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}$
$\phi(x) = A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt) \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}$

$u(x,t) = \psi(t)\phi(x) = (a_m \cos(mt) + b_m \cos(mt))(\cancel{A_m \cos(mt)} + B_m \sin(mt))$
$\Rightarrow u(0,t) = 0 = \psi(t)A_m \Rightarrow A_m = 0$
$(u(\pi,t) = 0 = \psi_m(t)B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow u(x,t) = (a_m(\cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx)$ Tutti gli m interi mi danno una soluzione, quindi anche la loro somma è soluzione (principio di sovrapposizione).

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m cos(mt) + b_m \sin(mt))B_m \sin(mx).$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos(mt) + \beta_m \sin(mt)) \sin(mx).$$

Dove $\alpha_m := a_m B_m$ e $\beta_m := b_m B_m$
Condizioni Iniziali:
$u(x,0) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(mx) = h_0(x) \quad x \in (x,\pi)$
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(\alpha,0) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m\beta_m \sin(mx) = h_1(x)$

Come trovare α_m, β_m
$\rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq b \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$
$\rightsquigarrow \displaystyle\int_0^{m} h_0(x)\sin(mx)dx = \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \sin(lx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\alpha_m$ (coefficienti di Fourier)

Passaggi al limite sotto il segno di integrale:
La teoria di Riemann non permette quasi mai di fare questi passaggi.
Esempio: Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

ma $D(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, f_n Rimeann integrabile.
Numeriamo $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n\in N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{altriment} \end{cases}.$$

Inoltre:
$D(x) = \lim_{k\to+\infty} \left(\lim_{j\to+\infty} cos(k!\pi x)^{2j}\right)$ Esercizio "facile"
Esercizio difficile:
non è possibile con una successione di funzioni continue con un parametro
Esempio:
$C([0,1]) \ni f, g$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

$$||f - g||_1 = \ldots.$$

$(C([0,1], d_1)$ non è completo! (le successioni in questo spazio possono convergere al di fuori)
$||f_m - f_n||_1 \to 0$ se $n, m \to +\infty$
$f_n \to f_\infty = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

> **Teorema 1**
> *Il completamenteo di $(C[0,1], d_1)$ è lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili* ***secondo Lebesgue***

1.6 Problema della misura

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo associare la sua misura (in $\mathbb{R}^n$)
Stabilire la misura è come definire un integrale.
$|E| = \int X_E$
Prerequisiti:

1. $|[a,b]| = b - a$
   $|[a,b] \times [c,d]| = (d-c) \cdot (b-a)$
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

3. $\forall E, \forall \tau \in \mathbb{R}^n \quad |E + \tau| = |E|$

3' $\forall E \quad \forall\ \sigma$ isometria $\ |E| = |\sigma(E)|$

Teorema 2 (Paradosso di Banach-Tanski)
in $\mathbb{R}^3$ non esiste nessunna funzione che soddisfa 1,2 e 3.

Consideriamo la palla unitaria:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\} = A_1 \cup \ldots \cup A_5.$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
Troviamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ t.c.
$\sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_5(A_5) = B_1 \cup B_1(P)$ (La sfera viene scomposta in 2 sfere con lo stesso volume della sferainiziale)
Per avere una teoria consistente dobbiamo studiare il problema della misura rinunciando alla proprietà di additività.

Assioma 1 (della scelta)
Data una famiglia di insiemi non vuoti $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è sempre possbile trovare un insieme E composto da uno e un solo elemento di ogni A_x

Equivalentemente

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \Leftrightarrow x_\lambda \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$