Lezione 5 Geometria I

ebbene sì, sta accadendo davvero

Federico De Sisti

2024-03-17

V, V' spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $(A, V, +), (A', V', +)$ spazi affini

Definizione 1
$f : A \to A'$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che:

$$f(p + v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left(ovvero \quad \begin{array}{ll} f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) & \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

Nomenclatura
Se f è biunivoca, f è detto isomorfismo affine
Un isomorfismo affine $A \to A$ è detto affinità.
Osservazione
vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come $\mathrm{Aff}(A)$
Esempio
$Ov_1 ... v_n$ rifermento affine in A

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Dico che f è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare
$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i v_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$
Verifichiamo che $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$
$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ . \\ . \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$
$\varphi(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

3 Esempi di affinità
I traslazioni
Fissato $v \in V$ definiamo
$t_v : A \to A, \quad t_v(P) = p + v$ Dico che t_v è un'affinità con associato isomorfismo Id_V dato che:
$t_V(p + w) = (p + w) + v = p + (w + v) = p + (v + w) = (p + v) + w =$
$= t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V$

la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto
$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$
Dico che σ_C è un'affinità con parte lineare $\varphi = -Id$
$\sigma_C(p+v) = c - \overrightarrow{CQ} \quad Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$
$\sigma_C(p) + \phi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$
III Otetia di centro O e fattore $\gamma \in R \backslash \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma\overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare $\phi = \gamma Id_V$
$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O+\gamma\overrightarrow{OQ} = O+\gamma(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = (O+\gamma\overrightarrow{OP})+\gamma\overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) = \varphi(v)$

Lemma 1
Fissato $O \in \mathbb{A}$, per ogni $O' \in \mathbb{A}$ e per ogni $\varphi \in GL(V)$ esiste un'unica affinità tale che $f(O) = O'$ e che ha φ come isomorfismo associato

Dimostrazione
Esistenza
Pongo $f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + O = O'$
$f(p+v) = O'+\varphi(\overrightarrow{OQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}) = O'+\varphi(\overrightarrow{OP})+\varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p)+\varphi(v)$
dove abbiamo usato $Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$
Unicità
Supponiamo che g abbia le stesse proprietà di f, allora
$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$
$\Rightarrow f = g$ □

Definizione 2
Definiamo $Aff_O(A) = \{f \in Aff(A) | f(O) = O\} \leq Aff(A)$
tale gruppo è anche isomorfo a $GL(V)$

Lemma 2
Sia $O \in A, f \in Aff(A)$ Esistono $v, v' \in V$ e $g \in Aff_O(A)$, univocamente determinate da f tale che

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

Dimostrazione

poniamo $v = -\overrightarrow{Of^{-1}(O)}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v'}, \quad g' = t_{-v} \circ f$
Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_v) = f.$$

quindi vale $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che $g = g'$*, per cui ho dimostrato anche* $f = t_{v'} \circ g$

$$\begin{aligned} g(O) = (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) = \\ = f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0 \end{aligned}$$

$$g'(O) = t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0.$$

d'altra parte g, g' *hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi* O *in* O*, dunque coincidono* $\square$

Descrizione in coordinate delle affinità di $\mathbb{A}^n$

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$b = f(O) \quad \varphi = L_A \qquad \begin{aligned} L_A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ X &\to AX \end{aligned}$$

con $det(A) \neq 0$ ovviamente
Viceversa, per $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$ è un'affinità con parte lineare L_A

$$\begin{aligned} f_{A,b}(x + v) = f_{A,b}(x) + \varphi(v) \\ f_{A,b}(x + y)) = f_{A,b}(x) + L_A y \end{aligned}$$

$$f_{A,b}(x+y) = A(x+y)+b = AX + AY + b = (AX+b)+AY = f_{A,b}(x)+L_A(y).$$

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n = \{f_{A,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

Osservazione
Aff $\mathbb{A}^n$ è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX + d) = \\ &= A(CX + d) + b = \\ &= ACX + Ad + b = f_{AC,Ad+b}(x) \end{aligned}$$

Osservo che $f_{I,O}$ è l'elemento neutro

$$\begin{aligned} &(f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) = f_{A,b}(Ix + O) = f_{A,b}(x) \\ &(f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) = f_{A,b}(x) \end{aligned}$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di $f_{A,b}$,
ovvero che esiste $f_{C,d}$ tale che $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned}
(f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) = f_{I,O}(x) = x \\
ACX + Ad + b + X \quad \forall\, X \in \mathbb{K}^n \\
\Rightarrow AC = Id \quad Ad + b = 0 \\
C = A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\
(f_{A,b})^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}b}
\end{aligned}$$