Appunti Primo Esonero

Federico De Sisti

2024-11-11

1 Preambolo

Qui sono scritti i principali concetti, teoremi, e definizioni che sono utili per lo svolgimento degli esercizi del primo esonero

2 Appunti

2.1 Curve

Definizione 1 (Curva parametrica)
Una curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ *è una funzione a valori vettoriali* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ *per la quale ogni componente* φ_i *è continua in* I*. Se* $I = [a, b]$ *allora i punti* $\varphi(a)$ *e* $\varphi(b)$ *sono detti estremi della curva, la sua immagine viene detta sostegno della curva parametrica*

Definizione 2 (Curva chiusa, curva semplice)
Una curva parametrica $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *si dice chiusa se* $\varphi(a) = \varphi(b)$*.*
Una curva parametrica si dice semplice se per ogni $t_1 \neq t_2 \in [a, b]$ *con* t_1 *o* $t_2 \in (a, b)$ *si ha* $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$

Definizione 3 (Curve equivalenti)
Le curve parametriche $\varphi \in C(I, R^n)$ *e* $\psi \in C(J, \mathbb{R}^n)$ *si dicono equivalenti se esiste una funzione* $g \in C^1(I, J)$ *suriettiva, tale che* $g' \neq_0 \in I$ *interno e* $\varphi = \psi \circ g$ *in* I
Il diffeomorfismo g *è detto cambiamento di variabile ammissibile*

Proposizione 1 (Curve come classi di equivalenza)
La relazione definita da $\varphi \sim \psi$ *se* φ *e* ψ *sono equivalenti secondo la precedente definizione è una relazione di equivalenza. Ogni classe di equivalenza* $\gamma = [\varphi]$*, sarà detta curva*

Definizione 4 (Curve orientate)
Due curve parametriche equivalenti, $\varphi \in C(I, R^n)$ *e* $\psi \in C(J, R^n)$ *hanno verso concorde se* $\phi = \psi \circ g$ *con* $g' > 0$ *in* I*, discorde altrimenti*

Definizione 5 (versore tangente)
Una curva γ si dice regoalre se $\gamma = [\varphi]$ con $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ tale che $||\varphi'(t)|| \neq 0$ per ogni $t \in I$ interno. In questo caso è ben definito il vettore

$$T(P) = \frac{\varphi'(t)}{||\varphi'(t)||}.$$

che prende il nome di versore tangente a γ nel punto $P = \varphi(t)$

Definizione 6 (Lunghezza e curva rettificabile)
La lunghezza di una curva $\varphi \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ è definita da

$$l(\varphi) := sup\{l(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

dove P è una partizione della curva nell'insieme delle partizioni e $l(P)$ è definito come

$$l(p) := \sum_{i=1}^{n} ||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})||.$$

se $l(\varphi) < +\infty$ la curva viene detta rettificabile

Teorema 1 (Rettificabilità delle curve C^1)
Se $\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, allora $\gamma = [\varphi]$ è rettificabile e

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)|| dt.$$

Definizione 7 (Connessione per archi)
$E \subseteq R^n$ si dice connesso per archi se per ogni $x, y \in E$ esiste una curva tutta contenuta in E che ha questi due punti come estremi

Teorema 2
sia $g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$ una funzione continua, Allora se E è un insieme connesso, anche $f(E)$ è un insieme connesso

Teorema 3
Ogni insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si può scrivere come unione di aperti connessi disgiunti a due a due. Ognuno di questi aperti prende il nome di componente connessa di A

2.2 Limiti e continuità

Teorema 4 (Teorema ponte sulle curve)
Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e un punto* x_0 *di accumulazione per l'insieme aperto* Ω*, allora si ha che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

se e solo se per ogni curva $\varphi \in C([a, b], \Omega \cup \{x_0\})$ *tale che* $\varphi(t_0) = x_0$ *e* $\varphi(t) \neq x_0$*se* $t \neq t_0$ *si ha*

$$\lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = l.$$

In particolare, il limite è indipendente dalla curva scelta

Definizione 8 (grafico)
Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *il suo grafico è definito da*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega, y = f(x)\}.$$

Definizione 9 (Restrizione ad una curva)
Data una $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e una curva parametrica* $\varphi \in C(I, \Omega)$*,* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo, la restrizione di* $f a \gamma = [\varphi]$ *è la composizione tra* f *e* $\varphi, f(\varphi(t)), t \in I$ *(notazione:* $f_{|_\gamma}$*)*

Definizione 10 (Insieme di livello)
Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, il suo insieme di livello* λ

$$L_\lambda = \{x \in \Omega : f(x) = \lambda\}.$$

Definizione 11
dato $\alpha \in \mathbb{R}$*, una funzione* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è positivamente* α*-omogenea se* $f(tx) = t^\alpha f(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

Definizione 12 (Simmetria radiale)
Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è a simmetria radiale se esiste una funzione* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = g(||x||)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$

Definizione 13 (Forma polare di un numero complesso)
Ogni numero complesso si può scrivere nella forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}.$$

dove $\rho = |z|$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$, *se* $z \neq 0$, *è un angolo che determina* z *nel piano complesso in coordinate polari*

2.3 Calcolo differenziale per funzioni scalari di più variabli

Definizione 14 (Derivate parziali)
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Omega$ *insieme aperto,* $x_0 \in \Omega$ *Indichiamo con* e_i *l'i-esimo vettore della base canonica. Diremo che* f *è derivabile parzialmente rispetto alla variabile* x_i *in* x_0 *se esiste finito il limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}.$$

rispetto ad x_i *nel punto* x_0, *con notazione* $f_{x_i}(x_0)$. *Se esistono in* x_0 *tutte le derivate parziali di* f *diremo che* f *è derivabile in* x_0. *In questo caso il vettore di* $\mathbb{R}^n$

$$Df(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_n)).$$

prenderà il nome di gradiente di f *in* x_0

Definizione 15 (Derivata direzionale)
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Omega$ *insieme aperto,* $x_0 \in \Omega$ *e* $v \in \mathbb{R}^n$ *con* $||v|| = 1$. *La derivata direzionale di* f *in* x_0 *nella direzione* v *è data dal limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

posto che tale limite esista e sia finito. La derivata direzionale sarà indicata con $f_v(x_0)$

Definizione 16 (Differenziabilità)
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Omega$ *insieme aperto,* $x_0 \in \Omega$ *la funzione* f *è differenziabile in* x_0 *se esiste* $v \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle v, h\rangle}{||h||} = 0.$$

o equivalentemente

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle v, h\rangle + o(||h||) \quad ||h|| \to 0.$$

Teorema 5
Se f è differenziabile in x_0 allora è derivabile in x_0 e $v = Df(x_0)$

Teorema 6
Se f è differenziabile in x_0, allora è continua in x_0

Teorema 7 (Derivabilità delle restrizioni)
Sia $\varphi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ derivabile in $t_0 \in (a,b)$ e sia f differenziabile in $x_0 = \varphi(t_0)$. Allora la composizione $f(phi(t))$ è derivabile in t_0 e si ha

$$\left[\frac{d}{dt} f(\varphi(t))\right]_{t=t_0} = \langle Df(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0)\rangle.$$

Teorema 8 (Formula del gradiente)
Se f e'differenziabile in x_0 allora esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e $f_v(x_0) = \langle Df(x_0), v\rangle$

Teorema 9 (Del differenziale totale)
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$ e $f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ Supponiamo che tutte le derivate parziali
- *esistano in $B_\delta(x_0)$*
- *siano continue in x_0*

Allora f è differenziabile in x_0

Proposizione 2 (Lipschitzianità delle funzioni a gradiente limitato)
Se f è una funzione differenziabile in un aperto convesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e se esiste una costante $M > 0$ tale che $||Df|| \leq M$ allora f è Lipschitziana in Ω con costante di Lipschitz minore o uguale ad M

Proposizione 3
Sia f una funzione differenziabile in un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso. Se $Df(x) = 0$, allora f è costante in Ω

Definizione 17 (Matrice Hessiana)
Se esistonno tutte le n^2 derivate parziali seconde di f in un punto x_0 diremo che la funzione f è derivabile due volte in x_0. In questo caso

$$D^2 f(x_0) = (f_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,\dots,n}.$$

prende il nome di matrice Hessiana di f in x_0.
Se la funzione è derivabile due volte ion tutti i punti di un aperto Ω e le detrivate parziali seconde sono tutte continue in Ω diremo che f è di classe C^2 in Ω

Teorema 10 (Schwarz)
Sia $f : \Omega\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'aperto Ω e sia $x_0 \in \Omega$. Supponiamo che esista in Ω la derivata parziale seconda $f_{x_i x_j}$ e sia continua in x_0. Allora esiste anche $f_{x_j x_i}$ e

$$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0).$$

Proposizione 4 (Derivate seconde delle restrizioni)
Se $f \in C^2(\Omega), \Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto, e se $x, x+h \in \Omega$ sono tali che il segmento che li congiunge sia tutto contenuto in Ω, allora la restrizione $g(t) = f(x+th)$ è di classe C^2 nell'intervallo [0,1]e

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \langle D^2 f(x+th)h, h\rangle \quad t \in [0,1].$$

Teorema 11 (Forumaa di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange)
Sia $f \in C^2(\Omega)$ e siano $x, x+h \in \Omega$ tali che il segmento che li congiunge sia tutto contenuto in Ω Allora esiste $\in (0,1), \theta = \theta(x,h)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + \langle Df(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(x+\theta h)h, h\rangle.$$

2.4 Ottimizzazione libera

Definizione 18
Data $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \Omega$ *è un punto di massimo relativo per* $f \in \Omega$ *se esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

Analogamente, $x_0 \in \Omega$ *è un punto di minimo relativo per* $f \in \Omega$ *se esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

In entrambi i casi parleremo di punti di estremo relativo.

Teorema 12 (Fermat in $\mathbb{R}^n$)
Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e sia* x_0 *un punto interno ad* Ω*. Se* f *è derivabile in* x_0 *e* x_0 *è un punto di estremo relativo, allora* $Df(x_0) = 0$

Proposizione 5 (Condizione necessaria del secondo ordine)
Sia $f \in C^2(\Omega), \Omega$ *aperto,* $x_0 \in \Omega$ *punto di estremo relativo per* f *in* Ω*. Allora*

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo } \Rightarrow \langle D^2 f(x_0)h, h\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo } \Rightarrow \langle D^2 f(x_0)h, h\rangle \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 13
Una matrice simmetrica $A \in M_n$ *è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi ed è definita negativa se e solo se tutti i suoi autovalori sono negativi.*

Definizione 19
Sia $A \in M_n$.

- A *è definita positiva se* $\langle Ah, h\rangle > 0$ *per ogni* $h \neq 0$
- A *è definita negativa se* $\langle Ah, h\rangle < 0$ *per ogni* $h \neq 0$

Teorema 14
Sia $f \in C^2(\Omega), \Omega$ *aperto,* $x_0 \in \Omega$ *punto critico per* g*. Allora si ha*
- $D^2 f(x_0)$ *definita positiva* $\Rightarrow$ x_0 *punto di minimo relativo;*
- $D^2 f(x_0)$ *definita negativa* $\Rightarrow$ x_0 *punto di massimo relativo;*
- $D^2 f(x_0)$ *indefinita* $\Rightarrow$ x_0 *punto né di massimo né di minimo*

Teorema 15 (Dei minori principali del nord-ovest)
Sia $A = (a_{ij}) \in M_n$ *una matrice simmetrica. Se per ogni* $k = 1, \dots, n$ *si ha che*

$$d_k = det[(a_{ij})^k_{i,j=1}] \neq 0.$$

Allora:
A *è definita positiva se e solo se* $d_k > 0$ *per ogni* $k = 1, \dots, n$*;*
A *è definita negativa se e solo se* $(-1)^k d_k > 0$ *per ogni* $k = 1, \dots, n$*;*
negli altri casi è indefinita

Teorema 16
Sia $f \in C^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aperto,* $(x_0, y_0) \in \Omega$*. Allora se*

$$Df(x_0, y_0) = 0, \quad detD^2 f(x_0, y_0) > 0, \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0.$$

allora (x_0, y_0) *è un punto di minimo relativo per* f *in* Ω
Se invece

$$Df(x_0, y_0) = 0, \quad detD^2 f(x_0, y_0) > 0, \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0.$$

allora (x_0, y_0) *è un punto di massimo relativo per* f *in* Ω
Infine se

$$Df(x_0, y_0) = 0, \quad detD^2 f(x_0, y_0) < 0.$$

Allora (x_0, y_0) *è un punto di sella per* f

2.5 Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali

Definizione 20 (Derivabilità e matrice Jacobiana)
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una funzione definita nell'insieme* Ω *aperto e sia* $x_0 \in \Omega$*. Diremo che* f *è derivabile in* x_0 *se ogni sua componente è derivabile. Le derivate parziali delle componenti saranno raccolte in una matrice* $m \times n$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)^{n,m}_{i,j=1}.$$

che prende il nome di matrice Jacobiana di f *nel punto* x_0

Definizione 21 (Differenziabilità)
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una funzione definita nell'insieme* Ω *aperto e sia* $x_0 \in \Omega$. *Diremo che* f *è differenziabile in* x_0 *se esiste una matrice* $A \in M_{m\times n}$ *tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{||h||} = 0.$$

Teorema 17 (Differenziabilità delle funzioni composte)
Se f *e* g *sono differenziabili allora*

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0).$$

Definizione 22 (Jacobiano)
Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è una funzione derivabile in* $x_0 \in \Omega$, *la matrice Jacobiana è quadrata. Il suo determinante viene indicato con* $J_f(x_0) = detDf(x_0)$ *e prende il nome di determinante Jacobiano o, semplicemente, Jacobiano*

Definizione 23 (Diffeomorfismo)
Una funzione $f : \subset \mathbb{R}^n \to \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ *è un diffeomorfismo di* Ω *in* $\tilde{\Omega}$ *se è una funzione* $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *invertibile con inversa* $f^{-1} \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$

Teorema 18 (Invertibilità locale)
Una funzione $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Ω*aperto,* $x_0 \in \Omega$ *take che* $J_f(x_0) \neq 0$ *è un diffemorfismo locale in* x_0

Corollario 1 (Teorema della mappa aperta)
Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega$ *aperto, è tale che* $J_f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \Omega$, *allora* f *è una mappa aperta, ovvero manda aperti in aperti*

Teorema 19
Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *aperto,* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *tale che*
(1) $f(x_0, y_0) = 0$
(2) $detD_y f(x_0, y_0) \neq 0$
Allora esistono un intorno U *di* x_0 *in* $\mathbb{R}^n$, *un intorno* A *di* (x_0, y_0) *in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *e una funzione* $g \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ *tali che per ogni* $(x, y) \in A$ *si ha*

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Definizione 24 (Varietà grafico)
Una varietà grafico di dimensione k in $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega, y = f(x_1, \dots, x_k)\}.$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$

Definizione 25 (k-varietà differenziabile)
Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$, $k < n$. Allora la k-varietà differenziabile in $\mathbb{R}^n$ definita da g è l'insieme

$$\Sigma := \{x \in U : g(x) = 0 \text{ e } Dg(x) \text{ ha rango } n - k\}.$$

Definizione 26 (Spazio tangente)
Sia Σ una k-varietà differenziabile in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Sigma$. Lo spazio tangente a Σ in x_0 è

$$T_\Sigma(x_0) := \{h \in \mathbb{R}^n : \exists \tilde{\varphi} \in C^1((-\delta, \delta), \Sigma) \text{ regolare, t.c. } \tilde{\varphi}(0) = x_0 \text{ e } \varphi'(0) = h\}.$$

Proposizione 6
Sia $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k}), U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione tale che il rango della matrice Jacobiana Dg sia uguale a $n - k$ in U e sia

$$\Sigma = \{x \in U : g(x) = 0\}.$$

Allora lo spazio tangente $T_\Sigma(x_0)$ a Σ in $x_0 \in U$ coincide con il sottospazio $ker Dg(x_0)$ ossia

$$T_\Sigma(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n : Dg(x_0)h = 0\}.$$

Definizione 27 (Spazio normale)
Sia Σ una k-varietà differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio normale a Σ in x_0 è il completamento ortogonale $T_\Sigma^\perp(x_0)$ al sottospazio $T_\Sigma(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$

2.6 Ottimizzazione vincolata

Definizione 28 (Punti di estremo vincolato)
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^n$ e sia $\Sigma \subseteq \Omega$. Diremo che $x_0 \in \Sigma$ è un punto di minimo di f vincolato in Σ se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap \Sigma$

Teorema 20 (Moltiplicatori di Lagrange)
Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *una* k*-varietà differenziabile della forma* $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ *dove* $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k}$ *è una funzione tale che il rango* Dg *è uguale a* $n-k$ *su* Σ*. Supponiamo che* $x_0 \in \Sigma$ *sia un punto di massimo o minimo vincolato in* Σ *per la funzione* $f \in C^1(B_r(x_0))$*. Allora esiste* $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ *tale che*

$$Df(x_0) = \lambda_1(Dg_1(x_0) + \ldots + \lambda_{n-k}Dg_{n-k}(x_0).$$

Tale Λ *prende il nome di moltiplicatore di Lagrange*