

# Lezione 11 Geometria I

Federico De Sisti

2024-03-27

# 1 Varie robe su basi ortonormali

## Proposizione 1

Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormale dello spazio euclideo  $V$ , la base  $L = \{w_1, \dots, w_n\}$  è ortonormale se e solo se  $M = [Id_V]_L^B$  è ortogonale ( $MM^t = Id_v$ )

## Dimostrazione

Sia  $M = (m_{ij})$  per definizione di  $M$   $w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \quad 1 \leq i \leq n$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n m_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n m_{hj} v_h \right\rangle = \sum_{k,h=1}^n m_{ki} m_{hj} \langle v_k, v_h \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = (M^t M)_{i,j}$$

□

## Osservazione

Sia  $V = \mathbb{R}[x]$   $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$  è un prodotto scalare

## Definizione 1 (Angolo non orientato tra vettori)

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \quad (v, w \neq 0)$$

allora

$$\exists! \theta \in [0, \pi] : \cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

è detto angolo non orientato tra  $v, w$

## Definizione 2

Sia  $S \subseteq V$  con  $V$  spazio euclideo,  $S^\perp := \{v \in V | \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

## Osservazione

$S^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Siano  $v_1, v_2 \in S^\perp$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v_1, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$$

**Proposizione 2**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo e  $W$  un sottospazio di  $V$  allora

$$V = W + W^\perp$$

**Dimostrazione**

Sia  $\{w_1, \dots, w_k\}$  una base ortogonale di  $W$

consideriamo  $\pi : V \rightarrow W$  con  $\pi(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$ , dobbiamo mostrare che  $V = W + W^\perp$  e che  $W \cap W^\perp = \{0\}$  ma la seconda è ovvia poiché se  $w \in W \cap W^\perp$  è ortogonale a se stesso  $\Rightarrow \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$

Osserviamo inoltre che se  $v \in V \Rightarrow v = \pi(v) + (v - \pi(v))$  la richiesta è dunque  $v - \pi(v) \in W^\perp$ . Basta verificare che  $\langle v - \pi(v), w_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\langle v - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0.$$

□

**Osservazione**

1- Se  $V$  è spazio euclideo e  $W$  è sottospazio di  $V$ ,

$(W, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W})$  è uno spazio euclideo

2- Se  $\{w_1, \dots, w_k\}$  è base ortogonale di  $W$  risulta:

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|$$

e vale l'uguaglianza se e solo se  $a_h = \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle}$

**Dimostrazione (Punto 2)**

$$\|v - \sum_{h=1}^n a_h w_h\| \geq \|v - \sum_{h=1}^n \frac{\langle v, w_h \rangle}{\langle w_h, w_h \rangle} w_h\|;$$

$$\|v - w\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle =$$

$$= \langle v - w + w - u, v - w + w - u \rangle = \langle v - w, v - w \rangle + \langle w - u, w - u \rangle \geq \|v - w\|^2$$

□

La lezione prosegue con lo svolgimento di alcuni esercizi

## 2 Prodotto vettoriale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo per cui  $\dim(V) = 3$  sia  $\{v, j, k\}$  una base ortonormale di  $V$

**Definizione 3** (Prodotto vettoriale)

$$\text{Dati } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ pongo } v \wedge w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$B_1, B_2$  si dicono concordemente orientate se  $\det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0$ , questa è inoltre una relazione di equivalenza.

$$\begin{aligned} \text{Di fatti se } B_1 \sim B_2, B_2 \sim B_3 \quad \det([Id]_{B_1}^{B_3}) &= \det([Id]_{B_2}^{B_3} [Id]_{B_1}^{B_2}) = \\ &= \det([Id]_{B_2}^{B_3}) \det([Id]_{B_1}^{B_2}) > 0 \Rightarrow B_1 \sim B_3 \end{aligned}$$