Lezione 7 Geometria 2

Federico De Sisti

2025-03-17

0.1 Cotntinuo sulla topologia prodotto

Teorema 1
Siano P, Q spazio topologico, sia $P \times Q$ con topologia prodotto

1. $B = \{U \times V \mid U \subseteq P \quad \text{aperto}\ , V \subset Q \text{ aperto }\}$ *è una base della topologia prodotto.*
2. *Per ogni $x_0 \in P, y_0 \in Q$ le applicazioni*

$$p|_{P \times \{y_0\}} : P \times \{y_0\} \to P$$
$$(x, y_0) \to x$$

$$p|_{\{x_0\} \times Q} : \{x_0\} \times Q \to P$$
$$(x_0, y) \to y$$

   sono omomorfismi (dove $P \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Q$ hanno topologia di sottospazio)

3. *le proieizoni $p : P \times Q \to P$*
   $q : P \times Q \to Q$
   sono aperte
4. *Sia X spazio topologico $f : X \to P \times Q$*
   allora f è continua se e solo se lo sono le sue componenti $p \circ f$ e $q \circ f$

Dimostrazione
1) Dimostriamo prima di tutto che esiste una topologia T su $P \times Q$ che ha B per base.
Verifichiamo le condizioni date in una proposizione precedente
a) $P \times Q$ dev'essere unione di elementi di B, è vero perché $P \times Q \in B$
b) Siano $U, U' \subseteq P$ aperti, $V, V' \subseteq Q$ aperti, allora l'intersezione.

$$(U \times V) \cap (U' \times V').$$

(è l'intersezione di due elementi qualsiasi di B) si deve poter scrivere come unione di elementi di B:

$$(U \cap U') \times (V \cap V').$$

quindi questa intersezione è un elemento di B.
Abbiamo dimostrato che esiste T che ha B per base.
Confrontiamo T con la topologia con la topologia prodotto. Prima cosa: dimostriamo che p e q sono continue se su $P \times Q$ mettiamo T.
Vediamo $p : P \times Q \to P$

sia $A \subseteq P$ *aperto, allora* $p^{-1}(A) = A \times Q$
è un aperto di T*, Quindi* p *è continua.*
Analogamente q *è continua.*
Segue T *è più fine della topologia prodotto (per definizione della topologia prodotto).*
T *topologia prodotto*
Dimostriamo $T \subseteq$ *topologia prodotto*
Dimostriamo che $B \subseteq$ *topologia prodotto*
Siano $U \subseteq P$ *aperto,* $V \subseteq Q$ *aperto*
quindi $Y \times V \in B$ *allora:*

$$U \times Q = p^{-1}(U).$$

dev'essere aperto anche in topologia prodotto.
Anche $P \times V = q^{-1}(V)$ *dev'essere aperto in topologia prodotto.*

$$U \times V = (U \times Q) \cap (P \times V).$$

unione arbitraria di aperti è aperta, quindi $T \subseteq$ *topologia prodotto.*
Quindi B *è base della topologia prodotto*

2) Dimostriamo che

$$p|_{P\times\{y_0\}} P \times \{y_0\} \to P.$$

è omeomorfismo.
Quest'applicazione è biettiva, è continua perché è restrizione (su un sottospazio) di un'applicazione continua
Dobbiamo dimostrare che l'inversa è continua

$$\begin{aligned} \varphi : P &\to P \times \{y_0\} \\ x &\to (x, y_0) \end{aligned}$$

Basta verificare che le controimmagini di elementi della base sono aperti (esercizi settimanali).
Inoltre una base del sottospazio $P \times \{y_0\}$ *è ottenuta intersecando gli elementi elementi dalla base* B *al sottospazio (esercizi settimanali). Sia* $U \times V \in B$ *(* $U \subseteq P$ *aperto,* $V \subseteq Q$ *aperto) e considero*

$$A = (U \times V) \cap (P \times \{y_0\}).$$

Abbiamo $A = \begin{cases} U \times \{y_0\} & \textit{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \textit{se } y_0 \notin V \end{cases}$

allora $\varphi^{-1}(A) = \begin{cases} U & \textit{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \textit{se } y_0 \notin V \end{cases}$ *In entrambi i casi ho un aperto di* P

segue che $p|_{R\times\{y_0\}}$ *è un omeomorfismo. Analogamente lo è anche* $q|_{\{x_0\}\times Q}$

3)Dimostriamo che p, q *sono aperti*

Su $A \subseteq P \times Q$ aperto considero

$$A = \bigcup_{y_0 \in Q} A \cap (P \times y_0\}).$$

$$p(A) = \bigcup_{y_0 \in Q} p(A \cap (P \times y_0\})).$$

$$= \bigcup_{y_0 \in Q} p|_{P \times \{y_0\}}(A \cap (P \times \{y_0\})).$$

Ora l'insieme $A \cap (P \times \{y_0\})$ è aperto nel sottospazio $P \times \{y_0\}$, e $p|_{P \times \{y_0\}}$ è omemorfismo.
quindi $p|_{P \times \{y_0\}}(A \cap (P \times \{y_0\}))$ è aperto di P.
Segue: $p(A)$ aperto in P. Cioè p è aperta analogamente q è aperta
4) Abbiamo Se f è continua allora lo sono le mappe $p \circ f, q \circ f$
Viceversa, supponiamo $p \circ f$ continua. ALlora dimostriamo f continua. Di nuovo usiamo B, quindi $U = \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto, dimostriamo che $f^{-1}(U \times V)$ è aperto in X. Abbiamo

$$f^{-1}(U \times V) = (p \circ f)^{-1}(U) \cap (q \times f)^{-1}(V).$$

è aperto per continuità di $p \circ f$ e $q \circ f$

□

Osservazione
Siano P, Q spazi topologici, siano B_P base della topologia di P e B_Q base della topologia di Q allora

$$\{U \times V | U \in B_P, \quad V \in B_Q\}.$$

è una base della topologia prodotto.
Esempi
1) $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia euclidea prendiamo le basi $B_P = B_Q = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \ a < b\}$ della topologia euclidea su $\mathbb{R}$
Per l'osservazione $\{]a, b[\times]c, d[\ |a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \ a < b, \ c < d\}$
è base della topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Sappiamo anche che questa è una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ quindi questa è la topologia prodotto.
ANalogamente, la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è la topologia prodotto su

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

2) Considero $\mathbb{R}$ con topologia di Zarinksi, allora la topologia prodtto su

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

dove ogni $\mathbb{R}$ ha la topologia di Zarinski non è la topologia di Zarinksi su $\mathbb{R}^2$

Definizione 1 (Spazi di Hausdoff)
Uno spazio topologico X si dice di Hausdoff (o T2) se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists U$ intorno di x, V intorno di y t.c. $U \cap V = \emptyset$.

Esempi
1) Ogni spazio metrico è T2, basta prendere $U = B_{d(x,y)/2}(x)$ $V = B_{d(x,y)/2}(y)$
2) $X = \emptyset$ di Hausdoff
3) X qualsiasi con topologia banale allora:

- se $|X| \leq 1$ allora X è T2
- se $|X| \geq 2$ allora X non è T2

4) Se X ha topologia cofinita.

- se X è un insieme finito allora la topologia è discreta e X è T2
- se X è infinito allora X non è T2.

Osservazione
Dati $x, y \in X$ con $x \neq y$
se esistono intorni U di x, V di y con $U \cap V = \emptyset$ allora esistono aperti $(x \in)A(\subseteq U)$ e $(y \in)B(\subseteq V)$ e sono disgiunti.
Quindi X è T2 se e solo se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists U$ intorno aperto di x V intorno aperto di y con $U \cap V = \emptyset$

Lemma 1
Se X spazio topologico è T2, tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi.

Dimostrazione
Sia $x \in X$ per ogni $y \in X$ scegliamo intorni aperti

$$U \ni x, V \ni y.$$

con $U \cap V = \emptyset$ $V \not\ni x$, quindi $V \subseteq (X \setminus \{x\})$
Cioè $X \setminus \{x\}$ è intorno di ogni suo punto.
Segue $\{x\}$ è chiuso.
Allora tutti i sottoinsiemi finiti sono chiusi □

Proposizione 1
Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdoff sono di Hausdoff

Dimostrazione
Sia X T2 sia $Y \subseteq X$ sottospazio. Siano $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$
Scegliamo $U \ni y, U' \ni y'$ aperti in X e disgiunti $U \cap U' = \emptyset$
allora $U \cap Y$ e $U' \cap Y$ sono aperti in Y, disgiunti, e contengono rispettivamente y e y', Allora Y è T2.

Siano ora P, Q spazi topologici, entrambi T2, siano $(a, b) \neq (c, d) \in P \times Q$
Supponiamo $a \neq c$
siano $U \ni a, U' \ni x$ aperti in P, $U \cap U' = \emptyset$. Allora $U \times Q$ e $U' \times Q$ sono aperti disgiunti contenenti (a, b) e (c, d) rispettivamente.
Se $a = c$ allora $b \neq d$ e la dimostrazione è analoga con spazi del tipo $P \times U, P \times U'$
$\square$

Teorema 2
Sia X spazio topologia, considero $X \times X$ con topologia prodotto e la diagonale $\Delta = \{(a, a) \in X \times X \mid a \in X\}$
Vale: X T2 se e solo se Δ è chiusa in $X \times X$

Idea intuitiva dell'enunciato, parte $\Rightarrow$.
sia $x \in X$ un punto che "si muove" (ad esempio è un termine di una successione).
Supponiamo x "tende" ad un limite $a \in X$, cioè entra progressivamente in ogni intorno di a. Se x "tende" anche a $b \in X$ e X è T2, allora $a = b$ (perché se $a \neq b$ allora hanno intorni disgiunti).
Allora potrò dire che (x, x) "tende" alla coppia (a, b) e la proprietà T2 implica $a = b$, cioè la diagonale $\{(x, x) \mid$ è chiusa $\}$

Dimostrazione
$\Rightarrow$ suppongo X T2, dimostriamo che $(X \times X) \setminus \Delta$ è aperto in topologia prodotto
Sia $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, cioè $x \neq y$
Siano U, V aperti di X disgiunti con $U \ni x, V \ni y$, allora $U \times V$ è aperto in $X \times X$, contiene (x, y)
Inoltre $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, perché

$$(U \times V) \cap \Delta = \{(z, z) \in X \times X \mid z \in U \quad z \in V\}.$$

è vuoto perché z apparterrebbe a $U \cap V = \emptyset$
Quindi $(X \times X) \setminus \Delta$
è intorno di ogni suo punto, cioè è chiuso
$(\Leftarrow)$ Suppongo Δ chiuso, cioè $(X \times X) \setminus \Delta$ aperto di $X \times X$. Siano $x \neq y$ di X, allora $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$
Per la base B vista per la topologia prodotto esiste $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$
tale che $U \times V$ aperto di $X, U \times V \ni (x, y)$. Allora $U \cap V = \emptyset$
(ragionamento di prima, non esistono punti come z). Inoltre $x \in U$, $y \in V$.
Segue X è T2. $\square$

Osservazione
Ricordo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$
è chiusa perché $C = f^{-1}(\{1\})$
dove

$$\text{f: } \mathrm{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to xy$$

Pi u in generale siano X, Y spazi topologici $f : X \to Y$ continua. Suppongo Y di Hausdoff e sia $y \in Y$
Allora $\{y_0\}$ è chiuso in Y, quindi

$$\{x \in X \mid f(x) = y_0\} = f^{-1}(\{y_0\}) \quad \text{è chiuso.}$$

Corollario 1
X, Y spazi topologici.
Siano $f, g : X \to Y$ continue, e l'insieme

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Se Y è $T2$ allora C è chiuso in X.

Dimostrazione
Consideriamo

$$\varphi : X \to Y \quad \times \quad Y$$
$$x \to (f(x), g(x))$$

Per il primo teorema della lezione, questa è continua. Allora $C = \varphi^{-1}(\Delta)$ che è la diagonale in $Y \times Y$
Ma la diagonale è chiusa quindi C è chiuso $\square$