

# Lezione 5 Geometria I

ebbene sì, sta accadendo davvero

Federico De Sisti

2024-03-17

$V, V'$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ ,  $(A, V, +)$ ,  $(A', V', +)$  spazi affini

### Definizione 1

$f : A \rightarrow A'$  è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow V'$  tale che:

$$f(p + v) = f(p) + \phi(v) \quad \forall p \in A, \forall v \in V.$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ovvero} \quad f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in A \end{array} \right)$$

### Nomenclatura

Se  $f$  è biunivoca,  $f$  è detto isomorfismo affine

Un isomorfismo affine  $A \rightarrow A$  è detto affinità. **Oss**

vedremo che le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazione che denoteremo come  $\text{Aff}(A)$

### Esempio

*Ov<sub>1</sub>...vn riferimento affine in A*

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n \quad f(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Dico che  $f$  è un isomorfismo affine con associato isomorfismo lineare

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che  $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad f(Q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} =$$

$$\varphi(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) v_i) = \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

### 3 Esempi di affinità

I Transazioni

Fissato  $v \in V$  definiamo

$t_v : A \rightarrow A$ ,  $t_v(P) = p + v$  Dico che  $t_v$  è un'affinità con associato isomorfismo

$Id_V$  dato che:

$$\begin{aligned} t_V(p + w) &= (p + w) + v = p + (w + v) = p + (v + w) = (p + v) + w = \\ &= t_V(p) + w = t_V(p) + \varphi(w) \leftarrow Id_V \end{aligned}$$

la biunicità segue dagli assiomi per A

II Simmetria rispetto ad un punto

$$\sigma_C(p) = C - \overrightarrow{CP}$$

Dico che  $\sigma_C$  è un'affinità con parte lineare  $\varphi = -Id$

$$\sigma_C(p+v) = c - \overrightarrow{CQ} \quad Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

$$\sigma_C(p) + \phi(v) = c - \overrightarrow{CP} - v = c - \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{PQ} = c - \overrightarrow{CQ}$$

III Otetia di centro O e fattore  $\gamma \in R \setminus \{0\}$

$$\omega_{O,\gamma}(p) = O + \gamma \overrightarrow{OP}.$$

è un'affinità con parte lineare  $\phi = \gamma Id_V$

$$\omega_{O,\gamma}(p+v) = O + \gamma \overrightarrow{OQ} = O + \gamma(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = (O + \gamma \overrightarrow{OP}) + \gamma \overrightarrow{PQ} = \omega_{O,\gamma}(p) + \varphi(v)$$

### Lemma 1

Fissato  $O \in \mathbb{A}$ , per ogni  $O' \in \mathbb{A}$  e per ogni  $\varphi \in GL(V)$  esiste un'unica affinità tale che  $f(O) = O'$  e che ha  $\varphi$  come isomorfismo associato

### Dimostrazione

#### esistenza

$$Pongo \quad f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) \quad f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OO}) = O' + O = O'$$

$$f(p+v) = O' + \varphi(\overrightarrow{OQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP}) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = f(p) + \varphi(v)$$

dove abbiamo usato  $Q = p+v \quad v = \overrightarrow{PQ}$

#### unicità

Supponiamo che  $g$  abbia le stesse proprietà di  $f$ , allora

$$\overrightarrow{f(O)f(p)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(p)} = \overrightarrow{O'f(p)} = \overrightarrow{f(O)g(p)} \Rightarrow f(p) = g(p)$$

$$\Rightarrow f = g$$

□

### Definizione 2

Definiamo  $Aff_O(A) = \{f \in Aff(A) | f(O) = O\} \leq Aff(A)$   
tale gruppo è anche isomorfo a  $GL(V)$

### Lemma 2

Sia  $O \in A$ ,  $f \in Aff(A)$  Esistono  $v, v' \in V$  e  $g \in Aff_O(A)$ , univocamente determinate da  $f$  tale che

$$f = g \circ t_v = t_{v'} \circ g.$$

### Dimostrazione

$$poniamo \quad v = \overrightarrow{Of^{-1}(O)}, \quad v' = \overrightarrow{Of(O)}, \quad g = f \circ t_{-v}, \quad g' = t_{-v} \circ f$$

Allora

$$(g \circ t_v) = (f \circ t_{-v})t_v = f \circ (t_{-v} \circ t_v) = f.$$

quindi vale  $f = g \circ t_v$

$$t_{v'} \circ g' = t_{v'} \circ (t_{-v'} \circ f) = (t_{v'} \circ t_{-v'}) \circ f = f.$$

Vedremo che  $g = g'$ , per cui ho dimostrato anche  $f = t_{v'} \circ g$

$$\begin{aligned} g(O) &= (f \circ t_{-v})(O) = f(O - v) = f(O + \overrightarrow{Of^{-1}(O)}) = \\ &= f(O + f^{-1}(O) - O) = f(f^{-1}(O)) = f(O + f^{-1}(O)) = 0 \end{aligned}$$

$$g'(O) = t_{-v}(f(O)) = f(O) - v' = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = 0.$$

d'altra parte  $g, g'$  hanno lo stesso isomorfismo associato e mandano entrambi  $O$  in  $O$ , dunque coincidono

**Descrizione in coordinate delle affinità di  $\mathbb{A}^n$**

$$\delta(x) = f(O) + L_A X = AX + b.$$

$$\begin{aligned} b = f(O) \quad \varphi = L_A \quad L_A : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\rightarrow AX \end{aligned}$$

con  $\det(A) \neq 0$  ovviamente

Viceversa, per  $A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$

$$f_{A,b} = AX + b.$$

$f_{A,b}$  è un'affinità con parte lineare  $L_A$

$$\begin{aligned} f_{A,b}(x + v) &= f_{A,b}(x) + \varphi(v) \\ f_{A,b}(x + y) &= f_{A,b}(x) + L_A y \end{aligned}$$

$$f_{A,b}(x + y) = A(x + y) + b = AX + AY + b = (AX + b) + AY = f_{A,b}(x) + L_A(y).$$

$$\text{Aff}(\mathbb{A}^n) = \{f_{A,b} | A \in GL(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n\}.$$

**Osservazione**

$\text{Aff } \mathbb{A}^n$  è un gruppo per composizione

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{A,b}(f_{C,d}(x)) = \\ &= f_{A,b}(CX + d) = \\ &= A(CX + d) + b = \\ &= ACX + Ad + b = f_{AC, Ad+b}(x) \end{aligned}$$

Osservo che  $f_{I,O}$  è l'elemento neutro

$$\begin{aligned} (f_{A,b} \circ f_{I,O})(x) &= f_{A,b}(Ix + O) = f_{A,b}(x) \\ (f_{I,O} \circ f_{A,b})(x) &= f_{A,b}(x) \end{aligned}$$

Manca solo dimostrare l'esistenza dell'inverso di  $f_{A,b}$ ,  
ovvero che esiste  $f_{C,d}$  tale che  $f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{C,d} \circ f_{A,b} = f_{I,O}$

$$\begin{aligned}
(f_{A,b} \circ f_{C,d})(x) &= f_{I,O}(x) = x \\
ACX + Ad + b + X &\quad \forall X \in \mathbb{K}^n \\
\Rightarrow AC &= Id \quad Ad + b = 0 \\
C &= A^{-1} \quad d = -A^{-1}b \\
(f_{A,b})^{-1} &= f_{A^{-1}, -A^{-1}b}
\end{aligned}$$