Lezione 28 Geometria I

Federico De Sisti

2024-05-16

1 Riguardare appunti/ vedere sernesi

Dimostrazione

Supponiamo che esista una base $\{z'_1, \ldots, z'_r\}$ *di* Z' *con* $z'_v \in V \setminus U$ *e* $\Sigma z'_i \in V \setminus U$
Sia $\lambda'_i = \lambda(z'_i), \quad \lambda_0 = \lambda(\Sigma z'_i)$
$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i)$
$T(\Sigma z'_i) = \lambda_i S(_i') = \lambda_0 \Sigma S(z'_i)$
$T(\Sigma z'_i) = \Sigma T(z'_i) = \Sigma \lambda_i S_(z'_i)$
quindi $\lambda_0 \Sigma S(z'_i) = \Sigma \lambda_i S(z'_i)$
$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)S(z_i) = 0 \quad S(\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z'_i) = 0$

$$\Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z'_i \in \ker S = U.$$

$$\Rightarrow \Sigma(\lambda_i - \lambda_0)z'_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_0 \forall i.$$

$$T(z'_i) = \lambda_i S(z'_i) \Leftrightarrow T(Z'_i) = \lambda_0 S(z'_i) \Rightarrow T = \lambda_0 S.$$

Poichè gli z_i *sono una base)*
Resta da vedere che esiste una base con le proprietà richieste. Posso supporre (esercizio) che U *sia un iperpiano. Allora*

$$\dim Z' \cap U = \dim Z' - 1 \qquad \textit{perchè } Z \not\subset \ U.$$

(se fosse $Z' \subseteq U \quad V = U' \oplus Z' \subset U \neq V$*)*
Prendiamo $z'_1 \in Z' \setminus U, \ \{z_2", \ldots, z_r"\}$ *base di* $Z' \cap U$
Poniamo:

$$\begin{aligned} z'_2 &= z'_1 + z_2" \\ z'_3 &= z'_1 + z_3" \\ &\vdots \\ z'_r &= z'_1 + z_r" \end{aligned}$$

Dato che $\{z'_1, \ldots, z'_r\}$ *è la base cercata, inatti i suoi elementi non appartengono ad* U*, perchè sono somma di un elemento in* U *e di uno fuori da* U*, Inoltre*
$\sum_{i=1}^{r} z'_i = rz'_1 + \sum_{i=1}^{r} z_i" \Rightarrow \notin U$
Tutto questo funziona se $(char\mathbb{K} = 0)$ $\square$

Teorema 1 (Teorema Fondamentale sulla proiettività)
Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $\mathbb{P}(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di dimensione n.
Date due $(n+2)$-ple $[v_0], \ldots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$ e $[z_0], \ldots, [z_n], [w]$ in $\mathbb{P}(Z)$ entrambe in posizione generale, esiste un'unica trasformazione proiettiva non degenere $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che

$$f([v_i]) = [z_i], \ 0 \leq i \leq n, \ \ e \ f([u]) = [w].$$

$Imf = \mathbb{P}(Z)$

Corollario 1
Dati $n+2$ punti in posizione generale $[v_0], \ldots, [v_n], [u]$ in $\mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = n$ esiste un unico isomorfismo $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n$ tale che

$$f([v_i]) = [e_i] \ \ e \ f([u]) = [e_0 + \ldots + e_n].$$

In altre parole, esiste un riferimento proiettivo in cui $[v_i]$ ha coordinate omogenee $[0 \ldots, 0, 1, \ldots, 0]$e $[w] = [1, \ldots, 1]$

Dimostrazione
Il fatto che $[v_0], \ldots, [v_n], [u]$ sono in posizione generale implica che
1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \{\alpha_0 v_0, \ldots, \alpha_n v_n\}$ *è una base di V*
2. $u = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n$ *con* $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i$
(infatti, se fosse $\lambda_{j0} = 0$, avremmo che $u \in Span\{v_0, \ldots, \cancel{v_{j0}}, \ldots, v_n\}$
$\dim Span\{v_0, \ldots, v_{j_0 - 1}, u, v_{j_0+1}, \ldots, v)n\} = 0$
Sia $B = \{v'_0, \ldots, v'_n\}$ la base di V con $v'_i = \lambda_i v_i$. Ovviamente $[v_i] = [v'_i]$
Scegliamo similarmente $\{z'_0, \ldots, z'_n\}$ base di Z con $z'_0 + \ldots + z'_n = w$ e $\quad [z'_i] = [z_i]$
Sia $T : V \to W$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(v'_i) = z'_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

T è iniettiva poiché gli $\{z'_i\}$ sono indipendenti e $ImT = Span\{z'_0, \ldots, z'_n\} = Z$.
Inoltre
$T(u) = T(\sum_{i=1}^n v'_i) = \sum_{i=1}^n T(v'_i) = \sum_{i=1}^n z'_i = w$
quindi $f = [T]$ è non degenere e ha le proprietà indicate

$$f([v_i]) + f([\delta v'_i] = [T(v'_i)] = [z'_i] = [z_i].$$

$$f([u]) = [T(u)] = [w].$$

$\square$

Esempio
Determinare la proiettività di f in $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ tale che

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a coppie li denotiamo v_1, z_1
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
quindi $\lambda = -1, \quad \mu = +1, \quad \lambda' = 2, \quad \mu' = 2$
$v_0' = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \quad v_1' = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ inoltre $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = v_0' + v_1'$
$z_0' = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix} \quad z_1' = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$
Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(v_i') = z_i' \quad i = 0, 1$

$$[\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{v_0',v_1'\}} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

$[\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{e_1,e_2\}} = [\varphi]^{\{e_1,e_2\}}_{\{v_0',v_1'\}}[\varphi]^{\{v_0',v_1'\}}_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix}1/4 & -3/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_0 - 3x_1\\x_0 + x_1\end{bmatrix}.$$