Lezione 15 Analisi Reale

Federico De Sisti

2025-04-16

0.1 Convergenze varie (alberto agostinelli)

Definizione 1 (Convergenza quasi uniforme)
$f_n \to f$ quasi uniformemente se $\forall\delta > 0 \;\; \exists F_\delta \subseteq X, F_\delta$ misurabile $\mu(F_\delta) < \delta$ tale che $\sup_{X\setminus F_\delta} |f_n - f| \to 0$ ($f_n \to f$ uniformemente in $X \setminus F_\delta$)

Proposizione 1
$f_n \to f$ quasi uniformemente $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

Dimostrazione
($\Rightarrow$)
$\forall\delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_s) < \delta$ *tale che,* $f_n \to f$ *uniformemente in* $X \setminus F_\delta$
$\Leftrightarrow \forall\delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$
tale che $\forall\varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon,\delta) \;\; : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X F_\delta$
$\Leftrightarrow \forall\delta > 0 \exists F_\delta \subset X, \mu(F_\delta) < \delta$ *tale che* $\forall\varepsilon > 0 \exists k = k(\delta,\varepsilon)$

$$X \setminus F_\delta \subseteq \bigcap_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| < \varepsilon\}.$$

$\Leftrightarrow \forall\delta > 0 \;\; \exists F_\delta \subset X \;\;\; \mu(F_\delta) < \delta$
tale che $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists k = k(\varepsilon,\delta)$

$$\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty}\{f_n - f| < \varepsilon\}\right)^c = \bigcup_{n=k}^{+}\{f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq F_\delta.$$

$\Rightarrow \forall\delta > 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k = k(\delta,\varepsilon)$

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

($\Leftarrow$)
$\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists k = k(\varepsilon,\delta)$ *tale che*

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ *per* $\varepsilon = \frac{1}{j}, \quad \delta = \frac{\nu}{2^j}, \nu > 0$ *fissato*
$\Rightarrow \exists k_j = k_j(j,\nu)$ *tale che* $\mu(\bigcup_{n=k_j}^{+\infty}(\{f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) < \frac{\nu}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k_j}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\nu}{2^j} = \nu.$$

$x \in X \setminus F_\nu$ *(dove* F_ν *è l'argomento della misura precedente)*
$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty}\bigcap_{n=k_j}^{+\infty}\{|f_n - f| < \frac{1}{j}\}$
$\Rightarrow \forall j \quad \exists k_j$ *tale che* $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall n \geq k_j$ — $\Rightarrow \sup_{X\setminus F_\nu}|f_n - f| \xrightarrow{n\to+\infty}$

$0 \Rightarrow f_n \to f$ *uniformemente su* $X \setminus F_\nu$
Abbiamo caratterizzato la convergenza quasi uniforme con la misura dei sopralivelli $\forall \varepsilon > 0$
conseguenza:

$$f_n \to f \;\; q.u. \Rightarrow \begin{cases} f_n \to f & q.u. \\ f_n \to f & \text{in misura} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq e\}\right) \xrightarrow{k \to +\infty} 0.$$

ma allora

$$0 = \lim_{k \to +\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = \mu(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{|f_n - f|\} \geq \varepsilon\}).$$

$$\forall k \quad \mu(\{f_k - f| \geq \varepsilon\} \leq \mu(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \{_n - f| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

$\Rightarrow f_n \to f$ *in misura*

$\square$

Teorema 1 (Egorov)
Sia (X, μ) *spazio di misura finita (* $\mu(X) < +\infty$ *)*
Allora:

$$f_n \to f \quad q.o. \quad \Leftrightarrow \quad f_n \to f \quad q.u..$$

Teorema 2 (Vitali)
Sia (X, μ) *uno spazio di misura finita e siano* $f_n, f \in L^1(X)$ *tale che* $f_n \to f$ *quasi ovunque quasi ovunque*
allora $f_n \to f$ *in* $L^1 \Leftrightarrow \{f_n\}$ *equi-assolutamente integrabili*
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tale che*

$$\int_E |F_n| d\mu < \varepsilon \text{ se } E \in M \quad \forall n, \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione
$(\Rightarrow)$ *già visto*
$(\Leftarrow)$
$f_n \to f$ *quasi ovunque* + $\mu(X) < +\infty$
$\Rightarrow$ *(per Egorov)*
$\forall \delta > 0 \exists f_\delta \in M, \mu(F_\delta) < \delta$ *tale che* $f_n \to f$ *uniformemente in* $X \setminus f_\delta$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato
$\Rightarrow$ *sia* $= \delta(\varepsilon)$ *dato dall'ipotesi di equi-assoluta integrabilità*
e sia $f_\delta \in M$ *dato dal teorema di Egorov*

$$\Rightarrow \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| d\mu + \int_{F_\delta} |f_n - f| d\mu.$$

$$\leq \sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f| \mu(X \setminus F_\delta) + \int_{F_\delta} |f_n| d\mu + \int_{F_\delta} |f| d\mu.$$

$$\leq (\sup_{X \setminus F_\delta} |f_n - f|) \mu(X) + \varepsilon + \varepsilon \quad (\textit{dato che } \mu(F_\delta) < \delta).$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \int_X \ |f_n - f| d\mu \to 0.$$

$\square$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, m)$
f continua $\Rightarrow f$ misurabile
f continua quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile
MANCA UNA PARTE

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,| f \text{ è discontinua in } X\}.$$

$m\mu(D_f) = 0$ f è misurabile, infatti:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \cap D_f \cup \{f > t\} \setminus D_f.$$

$\Rightarrow$ ha misura nulla $\Rightarrow$ è misurabile
$x \in \{f > t\} \setminus D_f$
$\lim_{y->x} f(y) \Longrightarrow f(x) > t$ e f è continua in X
$\Rightarrow \exists \delta_x > 0 \ : \ f(y) > t \quad \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$
$\Rightarrow \{f > t\} \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f>t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) \setminus D_f = \bigcup_{x \in \{f>t\} \setminus D_f} (x - \delta_x, x + \delta_x) D_f$ aperto è misurabile
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
se $\exists g \in C(\mathbb{R})$
tale che $f = g$ quasi ovunque $\Rightarrow f$ misurabile
$\exists N \subset \mathbb{R}, m(N) = 0$
tale che $f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$
$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{f > t\} = \{f > t\} \setminus N \cup \{f > t\} \setminus N$ è misurabile
$f = \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ quasi ovunque
$f = g$ quasi ovunque $\exists N, \mu(N) \quad f = g$ in $\mathbb{R} \setminus N$
$x \in \mathbb{R} \setminus N \quad \lim_{y \to x} f(y)$
$f = \chi_[0, 1]$ è continua quasi ovunque ma non può essere ugguale quasi ovunque ad una funzione continua

Teorema 3
Sia $f : \mathbb{R} \to R$ *misurabile* $\Rightarrow \forall \delta > 0 \;\; \exists g_\delta \in C(\mathbb{R})$
tale che $m(\{f \neq g\}) < \delta$
e $\sup_{\mathbb{R}} |g_\delta| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f|$