Lezione 8 Algebra I

Federico De Sisti

2025-03-31

0.1 Esercizio 14 scheda 15

R anello commutativo. $E \subseteq R$ sottoinsieme.
$V(E) := \{P \subseteq R \mid P \text{ ideale primo tale che } E \subseteq P\}$
$Spec(R) = \{P \subseteq R \mid P \text{ ideale primo}\}$ (spettro di R)
Obiettivi
Definire una topologia su $Spec(R)$
Idea
Definire gli aperti come complementari dei $V(E)$ (che saranno quindi i chiusi di $Spec(R)$)
dato un omomorfismo di anelli $f : R \to S$, definire una funzioen continua

$$f^* : Spec(S) \to Spec(R).$$

Osservazione
$I \subseteq R$ ideale

1. $\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$
   $Nil(R) = \sqrt{0} = \{\text{elementi nilpotenti in } R\}$ (elementi che ad una certa potenza fanno 0)
2. $\pi : R \to R/I$
   $$\sqrt{I} = \pi^{-1}(Nil(R/I)).$$
   $[a] \in Nil(R/I) \Leftrightarrow [a]^n = [0]$ in R/I
   $\Leftrightarrow [a^n] = [0]$ in $R/I \Rightarrow a^n \in I$
3. $V(E) = V(I) = V(\sqrt{I})$ dove $I = (E)$

0.2 Moduli

Definizione 1
R anello, Un gruppo abeliano $(M, +)$ è un R-modulo sinistro tramite un'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M &\to M \\ (r, m) &\to r \cdot m \end{aligned}.$$

se valgono le seguenti proprietà:

1. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m \quad \forall r, s \in R \;\; \forall m \in M$
2. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m) \quad \forall r, s \in R \quad \forall m \in M$
3. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n \quad \forall r \in R \;\; \forall m, n \in M$
4. $1_R \cdot m = m \quad \forall m \in M$

Esempi

1. Se R è un campo gli R-moduli sinistri sono gli spazi vettoriali su R

2. $(G,+)$ gruppo abeliano è uno $\mathbb{Z}$-modulo (sinistro), basta definire

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \times G \to \mathbb{Z} \\ &(n,g) \to n \cdot g \end{aligned}.$$

dove

$$\text{n}\cdot g = \begin{cases} 0 \quad \text{se } n = 0 \\ \frac{n}{|n|}(g + \ldots + g) \quad \text{se } n \neq 0 \end{cases} .$$

3. R è un R-modulo sinistro tramite

$$\begin{aligned} &R \times R \to R \\ &(r,s) \to r \cdot s \end{aligned}.$$

4. $R^n = R \times \ldots \times R \quad n \geq 1$
è un R-modulo sinistro tramite

$$\begin{aligned} &R \times R^n \to R^n \\ &(r, \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}) \to \begin{pmatrix} r \cdot r_1 \\ \vdots \\ r \cdot r_n \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Esercizio
R anello, M R-modulo (sinistro)
Dimostrare:

1. $0_R \cdot m = 0_M \quad \forall m \in M$
2. $r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall r \in R$
3. $-1_R) \cdot m = -m \quad \forall m \in M$

Definizione 2
R anello
M, N R-moduli sinistri, Un omomorfismo di R-moduli è una funzione $f : M \to N$ tale che:

1. $f(m + m') = f(m) + f(m') \quad \forall m, m' \in M$
2. $f(r \cdot m) = r \cdot f(m) \quad \forall m \in M, \ \forall r \in R$

Definizione 3
M, N due R-moduli sinistri,

$$Hom_R(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ omomorfismo di } R\text{-moduli}\}$$

Esercizio:
Se R commutativo allora $Hom_R(M,N)$ è un R-modulo sinistro tramite:

$$R \times Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N) \quad (r,f) \to (r \cdot f)(m) = r \cdot f(m).$$

Attenzione
R commutativo garantisce che $(r \cdot f)$ sia un omomorfismo $\forall r \in R$
$\forall f \in Hom_R(M,N)$
Esempio:
R anello, $I \subseteq R$ ideale sinistro.
Allora I è un R-modulo sinistro tramite

$$\begin{aligned} &R \times I \to I \\ &(r,m) \to (r \cdot m) \end{aligned}.$$

Osservazione:
R anello, M R-modulo sinistro.

$$End_R(M) := Hom_R(M,M).$$

è un anello con le operazioni di somma tra funzioni

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m).$$

e prodotto dato dalla composizione. (verificare per esercizio)
Osservazione
R anello, M R-modulo sinistro
$\rightsquigarrow End_R(M)$ anello
Definiamo

$$\begin{aligned} \mu : &R \to End_R(M) \\ &r \to \mu_r \end{aligned}.$$

dove $\mu_r(m) = r \cdot m \quad \forall r \in R, \quad \forall m \in M$
μ è un omomorfismo di anelli.
Dobbiamo verificare:

1. $\mu_{r+s} = \mu_r + \mu_s$
   $\mu_{r+s}(m) = (r+s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m = \mu_r(m) + \mu_s(m) \qquad \forall m \in M$
2. (prodotto in R) $\mu_{r \cdot s} = \mu_r \circ \mu_s$ (composizione di funzioni)
   $\mu_{r \cdot s}(m) = (r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m) = \mu_r(\mu_s(m)) = \mu_r \circ \mu_s(m) \qquad \forall m \in M$

Definizione 4
R anello, M R-modulo sinistro
Un sottogruppo abeliano $A \subseteq M$ si dice R-sottomodulo di M se

$$r \cdot n \in N \quad \forall n \in N \quad \forall r \in R.$$

Osservazione
Se R campo e M spazio vettoriale su R allora i sottomoduli di M sono i sottospazi vettoriali

Definizione 5
R anello $f : M \to N$ omomorfismo di R-moduli sinistri

- *Il nucleo di f è*

$$\ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0_N\}.$$

- *L'immagine di f è*

$$Im(f) = \{n \in n \mid \exists m \in M \quad f(m) = n\}.$$

Esercizio
Verificare le seguenti affermazioni:

1. $\ker(f) \subseteq M$ è un R-sottomodulo
2. $Im(f) \subseteq N$ è un R-sottomodulo
3. f è iniettivo se e solo se $\ker(f) = \{O_M\}$
4. f è suriettiva se e solo se $Im(f) = N$.

Obiettivo: Teorema di omomorfismo per moduli
Osservazione
R anello. M R-sottomodulo sinistro.
Ogni R-sottomodulo N di M è in particolare un sottogruppo ($N \trianglelefteq M$ poiché M abeliano)
Abbiamo il gruppo quoziente M/N su cui definiamo la struttura di R-modulo sinistro

$$R \times M/N \to M/N(r, m + N) \to r \cdot m + N.$$

Osservazione
è ben definita!

$$m - m' \in N \Rightarrow N \ni r \cdot (m - m') = r \cdot m - r \cdot m'.$$

Teorema 1 (di omomorfismi)
R anello
$f : M \to M'$ omomorfismo di R-moduli sinistri
$N \subseteq M$ R-sottomodulo tale che $N \subseteq \ker(f)$
Allora esiste un unico omomorfismo

$$\bar{f} : M/N \to M'.$$

tale che AGGIUNGI DIAGRAMMA 2:49 sia commutativo (ovvero $\pi \circ \bar{f} = f$)

Corollario 1
R anello. M, M' R-moduli sinistri. $N \subseteq M$ R-sottomodulo.
Allora esiste una corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{omomorfismi } f : M \to M' \textit{ t.c.} \\ N \subseteq \ker(f) \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\textit{omomorfismi } \bar{f} : M/N \to M'\}.$$

Dimostrazione (del teorema)
dato il teorema di omomorfismo per gruppi, basta verificare che l'omomorfismo $\bar{f}$ sia R-lineare
Ricordo

$$\bar{f}(m + N) = f(m).$$

Abbiamo

$$\bar{f}(r \cdot (m + N)) = \bar{f}(r \cdot m + N) = f(r \cdot m) = r \cdot f(m) = r \cdot \bar{f}(m + N).$$

□