Appunti Terzo Esonero

Federico De Sisti

2025-06-03

1 Spazi $\mathbf{L}^p$

Proposizione 1
Sia (X,μ) *spazio di misura finito* $(m(X) < +\infty$ *se* $p, q \geq 1$ $p > q \Rightarrow L^p(X) \subsetneq L^q(X)$ *e* $\exists c > 0$ *tale che* $\|f\|_q \leq c\|f\|_p \quad \forall f \in L^p(X)$

Definizione 1
(X,μ) *spazio di misura* $L^\infty = \{f : X \to [-\infty, +\infty] \quad misur. \mid \exists M > 0 \mid |f| \leq M \quad q.o.\}$

Lemma 1
$f \in L^\infty(X) \Rightarrow |f| \leq \|f\|_\infty$ *q.o. su* X

Proposizione 2 (Holder)
Sia $p > 1$ *e* p' *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall f \in L^p(X), g \in L^{p'}(X) \Rightarrow fg \in L^1(X)$ *e*

$$\|f \cdot g\| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposizione 3 (Minkoski)
Sia $1 \leq p < +\infty \quad \forall f, g \in L^p(X) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_g + \|g\|_p$

Teorema 1
per $p \geq 1$ L^p *è spazio normato completo*

Definizione 2
X *spazio metrico si dice separabile se ammette sottoinsieme denso numerabile*

Teorema 2
$L^P(\mathbb{R})$ *è separabile per* $1 \leq p < +\infty$, L^∞ *non è separabile*

Definizione 3
$L : V_1 \to V_2$ *operatore lineare*
L *si dice limitato se* $\|L(c)\|_{V_2} \leq c\|v\|_{V_1} \quad \forall v \in V_1$

Teorema 3
Sia L operatore lineare, L limitato $\Leftrightarrow$ L continuo

Teorema 4 (Parallelogramma)

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \leq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Teorema 5 (della proiezione)
Sia H spazio di Hilbert, $C \subset H$ chiuso, connesso e non vuoto
$\Rightarrow \forall f \in H \quad \exists! \quad u \quad$ *t.c.* $\quad \|u-f\| = \min_{v\in C}\{\|f-v\|\}$

$$u = p_C(f) = \begin{cases} u \in C \\ (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C \end{cases} .$$

Corollario 1
Sia H spazio di Hilbert $M \subset H$ sottospazio vettoriale chiuso. $\forall f \in H \;\; \exists! v \in M$ tale che

$$\|u-f\| = \min_{v\in M} \|f-v\| \quad e \quad u = p_M(f) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ (f-u, v) = 0 \quad \forall v \in M \end{cases} .$$

Definizione 4
$S \subset H$ sottoinsieme

$$S^{\perp} = \{f \in H \mid (f,g) = 0 \quad \forall g \in S\}.$$

e il completamento ortogonale di S

Proposizione 4
Sia $S \subset H \quad S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale chiuso.

Teorema 6 (Ritz)
Sia H spazio di Hilbert $\forall L \in H^* \quad \exists! g \in H$ tale che $L(f) = (f,g) \quad \forall f \in H$ e $\|L\|_{H^*} = \|g\|_H$

Proposizione 5
Sia H spazio di Hilbert S sistema ortonormale S è al più numerabile

Definizione 5
Un sistema si dice completo se l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi $\{\varphi_k\}$ *è denso in* H *(* $\forall f \in H \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$)

Teorema 7
Sia H *spazio di Hilbert separabile* $\Rightarrow$ H *ammette un sistema ortonormale completo.*

Proposizione 6
Sia $M = < \varphi_1, \dots, \varphi_n > \quad \forall f \in H$

$$p_M(f) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Corollario 2
H *spazio di Hilbert* $\{\varphi_k\}$ *sistema fondamentale numerabile*

$$\Rightarrow f \in H \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

Teorema 8
Sia H *spazio di Hilbert e* $\{\varphi_k\}$ *sistema ortonormale in* H*, sono equivalenti*

1. $\{\varphi_k\}$ *è completo*
2. $f = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k \quad \forall f \in H$
3. $\forall f \in H \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)^2$ *Perseval*
4. $\forall f, g \in H \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)(g, \varphi_k)$
5. $f = 0 \Leftrightarrow (f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \geq 1$

Teorema 9 (Weierstrass)
Dato $f \in C(\mathbb{R})$ *periodica di periodo* $2\pi \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_n$ *polinomio trigonometrico atle che* $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$

Definizione 6 (Misura prodotto)

La misura $\mu \times \nu$ su $X \times Y$ è definita da $\forall E \subseteq X \times Y$

$$\mu \times \nu(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i),\ A_i \in M_\mu,\ B_i \in M_\nu, E = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i\}.$$

Se $A \in M_\mu$ e $B \in M_\nu \Rightarrow R = A \times B$ rettangolo (misurabile) e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \times B_i$ è un plurirettangolo (con A_i, B_i misurabili)

Proposizione 7
Se $P \subset X \times Y$ plurirettangolo

$$\mu \times \nu(P) = \int_Y \int_X \chi_P(x,y) d\mu d\nu = \int_X \int_Y \chi_P(x,y) d\nu d\mu.$$

Lemma 2
$E \subseteq X \times Y$ plurirettangolo $\Rightarrow \mu \times \nu(E) = \inf\{\mu \times \nu(P), P$ plurirettangolo $E \subseteq P\}$

Proposizione 8
$P \subseteq X \times Y$ plurirettangolo $\Rightarrow P$ è $\mu \times \nu$-misurabile

Lemma 3
Sia $\{P_k\}$ successione di plurirettangoli tale che $P_0 \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ allora $P_\infty = \bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$ $\forall y \in Y$ $\chi_{P_\infty}(\cdot, y)$ è μ-misurabile, $y \to \int_X \chi_{P_\infty}(x,y) d\mu$ e ν-misurabile

$$\mu \times \nu(P_\infty) = \int_Y \int_X \chi_{P_\infty}(x,y) d\mu d\nu = \int_X \int_Y \chi_{P_\infty} d\nu d\mu.$$

Definizione 7
Spazio di misura (X, μ) si dice σ-finito se $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ con X_i misurabili tali che $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\mu(X_i) < +\infty \quad \forall i$

Teorema 10 (Tonelli)
Siano $(X, \mu), (Y, \nu)$ Spazi di misura σ-finiti, sia $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ allora

$$\int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \times \nu) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu d\nu = \int_X \int_Y f(x,y) d\nu d\mu$$