Lezione 02 Meccanica Razionale

Federico De Sisti

2025-03-04

1 Meccanica Newtoniana

Alla base della meccanica newtoniana c'è il tempo che è un assoluto e lo spazio euclideo tridimensionale

Definizione 1 (Spazio fisico)
Sia $\mathbb{V}_3$ spazio vettoriale euclideo a 3 dimensioni con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$|\overrightarrow{v}| := \sqrt{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle} \quad \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3.$$

Spazio fisico : $\mathbb{E}_3$ è il corrispondente spazio affine euclideo.
(possiamo immagine l'origine come il punto d'osservazione del fenomeno)

Spazio Affine (reminder):
$p_1, p_2 \in \mathbb{E}_3 \quad \exists! \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{p_1 p_2}$
$\overrightarrow{v} = p_2 - 1$
$\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3 \quad p_1 \in \mathbb{E}_3 \quad \exists! p_2 \in \mathbb{E}_3 | \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_3}$
$\mathbb{E}_3$ ha metrica $d(p_1, p_2) := |\overrightarrow{p_1 p_2}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{p_1 p_2}, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle}$
Questo è lo spazio che useremo in futuro.

Definizione 2 (Sistema meccanico)
(guarda scorsa lezione)

Definizione 3 (Sistema di riferimento dell'osservatore)
$O = \{0_V; e_1; e_2; e_3\}$ *dove* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *formano una base ortonormale*
$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Osservazione
Nel sistema O dato $p \in \mathbb{E}_3$
$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
è la configurazione di P in coordinate cartesiane
$d(p_1, p_2) = |x^{(2)} - x^{(1)}| = \sqrt{(x_3^{(2)} - x_3^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2}$

Definizione 4 (Moto)

1. *Moto di P nell'intervallo temporale* (t_1, t_2)
$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $\quad t_1 < t_2$ *è la funzione* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^3$ $t \in (t_1, t_2)$ *ovvero*
$t \to P(t) = 0_V + x_1(t)e_1 + x_2(t)r_2 + x_3(t)e_3$

2. *Orbita (o traiettoria) la curva* $\{x(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$
(Assumiamo $x(t) \in C^k((t_1, t_2), \mathbb{R}^3)$ $k \geq 2)$ A

3. *Velocità di P è la funzione* $t \to v(t) := x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$
ovvero $\mathbb{V} \ni \overrightarrow{v}(t) = v_1(t)e_1 + v_2(t)e_2 + v_3(t)e_3 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(t+\varepsilon) - P_(t)}{\varepsilon}$

4. *Accelerazione di P* $t \to a(t) \in \mathbb{R}^3$
$a(t) := \ddot{x}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$ *ovvero*
$\mathbb{V}_3 \ni \overrightarrow{a}(t) = a_1(t)e_1 + a_2(t)e_2 + a_3(t)e_3$

5. *Stato del sistema meccanico al tempo t è la coppia* $(x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^{6N}$

Definizione 5

1. *Moto di sistema meccanico*
$\{P_1, \ldots, P_n\}$ *la funzione* $t \to P(t) \quad t \to x(t) = (x^{(1)}(t), \ldots, x^{(N)}(t))$
è la funzione del moto di tutto il sistema
$x(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ *(ovvero lo spazio delle configurazioni*

(da completare per tutti gli altri moti)

1.1 Origini delle leggi di Newton

Fatto 1 [Principio di relatività galileiana]
Esistono sistemi di coordinate, detti inerziali, tali che:

1. Tutte le leggi della natura, a tutti gli istanti di tempo sono identiche in tutti i sistemi di coordinate inerziali;

2. Tutti i sistemi di coordinate in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema inerziale sono anche essi inerziali

Il sistema di riferimento di Galileo è quello delle stelle fisse

Definizione 6 (Spazio delle fasi (degli stati))
$\{(x, v) | x \in \mathbb{R}^{3N}, v \in \mathbb{R}^n\}$

Fatto 2 [Principio di determinismo]
Lo stato iniziale del sistema meccanico determina univocamente tutto il moto
Fatto 3

Esiste una procedura empirica per definire la forza esercitata da un corpo su un altro.
Commenti:
Fatto 2:
Se conosco $x(t_*), v(t*) \Rightarrow$ conosco $(x(t), v(t))$ $\forall t$ (almeno in un intorno di t_*)
Data $(x(t_0), v(t_0)) = (x_0, v_0)$
conosco $\ddot{x}(t_0) = f(t_0, x_0, v_0)$ per qualche $f : A \Rightarrow \mathbb{R}^{3M}$
$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ con f sufficientemente regolare
Esempio
D aperto di $\mathbb{R}^{3N}$
$I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di t_0
$f \in C^k(I \times D \times \mathbb{R}^{3N}; \mathbb{R}^{3N})$ con $k \geq 1$
Ne segue $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), v(t)) \quad \forall t$
questa è l'equazione di Newton (Seconda legge del moto)
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \text{x(t}_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 k \end{cases}$$
Questa equazione di Newton sarà denotata con $E_q N$

Definizione 7 (Legge di accelerazione)
f si dice legge di accelerazione
$$f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) \qquad f^{(k)} = f^{(k)}(t, x, v) \in \mathbb{R}^3.$$

Definizione 8 (Legge di forza)
$F^{(k)} := m_k f^{(k)}$ è la legge di forza
Forma equivalente con $E_q N$
$$F^{(k)}(t, x, v) = \ddot{x}^{(k)}(t) m_k \quad k = 1, \dots, N.$$

Fatto 1 $E_q N$ è invariante per cambi di coordinate inerziali $R = \{0_V, e_1, e_2, e_3\}, R' = \{0'_V, e'_1, e'_2, e'_3\}$
Un po di conseguenze:

1. La legge del moto è costante nel tempo (se il sistema è isolato)
2. lo spazio è omogeneo
3. Lo spazio è isotropo

1)Se $x(t)$ è soluzione $(E_q N)$ $x(t+s)$ è ancora soluzione $\forall s \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow$ in un sistema isolato $f = f(x, v)$
2) $(x^{(k)}(t)_{k=1,\dots,N}$ soluzione $(E_q N) \Rightarrow (x^{(k)}(t) + a)_k$ è ancora soluzione $\forall a \in \mathbb{R}$
3) $(Rx^{(k)}(t))_k$ soluzione $(E_q N) R \in SO(3)$ è ancora soluzione (invariante per rotazioni)
Esercizio:
Dedurre la I legge di Newton dai fatti I e II

$N = 1$ usando I, esiste un sistema di riferimento inerziale R, il sistema è isolato
Vogliamo dimostrare che necessariamente $\ddot{x}(t) = 0 \quad \forall t$