Лабораторная работа № 1

Численные расчеты в системе *Mathematica*

Цель работы:

1) познакомиться с системой Mathematica и изучить особенности создаваемых в ней документов;

2) изучить основные особенности выполнения численных расчетов;

3) изучить встроенные функции для численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений.

I. Загрузка системы, создание документа, сохранение результатов работы

1. С помощью мыши щелкните иконку *Mathematica* в меню "Программы". После загрузки системы на экране появляются два окна, одно из которых является основным и имеет заголовок **Mathematica 5.1 - [Untitled-1]**, где **5.1** соответствует номеру используемой версии системы, а выражение **Untitled-1** обозначает, что имя текущего документа еще не определено. Это окно размещается в верхней части экрана и содержит главное меню системы со стандартным набором разделов: **File**, **Edit**, **Cell**, **Format**, **Input**, **Kernel**, **Find**, **Window**, **Help**. Второе окно имеет заголовок **Untitled-1** и представляет собой бланк нового документа, в котором следует вводить свои данные. Обратите внимание на тонкую горизонтальную линию в верхней части рабочего поля этого окна. При вводе любого символа с помощью клавиатуры или мыши он будет изображаться под этой линией.

2. Введите какое-либо простое выражение, например,

2 + 2

Обратите внимание, что с появлением первого символа горизонтальная линия исчезает и появляется курсор в виде мигающего вертикального отрезка, который показывает место, в котором будет изображаться следующий вводимый символ. Кроме того, вводимые данные автоматически выделяются квадратной скобкой в правой части рабочего поля окна и составляют одну секцию или ячейку (**cell**) документа. Напомним, что секция является наименьшей частью данных, которые обрабатываются ядром системы *Mathematica*. Для обработки секции (т.е. выполнения содержащихся в ней команд и вычислений) достаточно выделить ее, подведя указатель мыши к]-скобке и щелкнув левой кнопкой мыши (при этом скобка выделяется темным фоном), или просто поместить курсор в любое место этой секции и нажать клавиши: **Shift+Enter** (удерживая клавишу **Shift**, нажимаем клавишу **Enter**). В качестве альтернативы комбинации **Shift+Enter** можно использовать клавишу **Enter** на цифровой части клавиатуры.

3. Вычислите сумму **2+2**. Обратите внимание, что результат вычислений помещается в отдельную секцию, а у введенного выражения и полученного результата появляются метки *In[1]:=* и *Out[1]=*. Такие метки будут появляться при обработке каждого последующего выражения, причем число в квадратных скобках будет увеличиваться на единицу. Две секции, содержащие команду, вводимую пользователем, и получаемый результат, объединяются в группу с помощью еще одной]-скобки. Под этой группой секций появляется горизонтальная линия, показывающая, что вводимые символы следующего выражения будут изображаться под ней в новой секции.

Документ, получаемый в системе *Mathematica*, состоит из набора секций, каждая из которых имеет свой тип или стиль (**Style**), определяющий ее роль в документе. Например, секция, содержащая команды или выражения, предназначенные для обработки ядром, имеет тип **Input**. Результаты вычислений помещаются в секции, имеющие тип **Output**. Текст, поясняющий вычисления, можно поместить в отдельную секцию, которая имеет тип **Text** и не обрабатывается ядром. Секция, содержащая заголовок документа, имеет тип **Title**. Для определения подзаголовков имеются секции типа **Subtitle**, и **Subsubtitle**, а для выделения названий глав и параграфов – секции типа **Section**, **Subsection** и **Subsubsection**. В зависимости от стиля всего документа, который определяется опцией **Style Sheet** в разделе **Format** главного меню (по умолчанию каждый вновь создаваемый документ имеет стиль **Default**), количество различных типов секций может изменяться.

По умолчанию каждая новая секция в любом документе имеет тип **Input**. Для изменения типа секции необходимо выделить ее и затем с помощью мыши выбрать нужный тип в подразделе **Style** раздела **Format** главного меню (щелкнуть левой кнопкой мыши, поместив ее указатель на соответствующее название). Для удобства работы с документом рекомендуется вывести дополнительный ряд кнопок и выпадающее меню, в котором указывается тип текущей секции. Для этого необходимо выбрать опцию **Show ToolBar** в разделе **Format** главного меню. Тогда для изменения типа секции достаточно выделить ее и щелкнуть левой кнопкой мыши, поместив ее указатель на соответствующее название в выпадающем меню. Кроме того, выбирая в разделе **Format** опцию **Show Ruler**, мы помещаем в верхней части документа масштабную линейку, на которой отмечены границы рабочего поля окна и правая граница страницы при печати документа.

4. Перемещая мышь по коврику, обратите внимание на то, как изменяется форма указателя мыши в зависимости от его положения. Если указатель мыши находится в пределах какой-либо секции, то он имеет вид вертикального отрезка. Щелкнув в этот момент левой кнопкой мыши, мы перемещаем курсор в соответствующую секцию и можем редактировать введенное ранее выражение или продолжить ввод данных. Если же указатель мыши находится между секциями, то он принимает вид горизонтального отрезка. Если щелкнуть левой кнопкой мыши в этот момент, то между секциями появится тонкая горизонтальная линия, которая показывает, что следующее выражение будет вводиться под ней в новой секции. Следует отметить, что точно так же будет изменяться форма курсора при его перемещении с помощью стрелок на клавиатуре.

5. *Добавьте в свой документ название и номер лабораторной работы в качестве заголовка.* Для этого переместите указатель мыши к верхней границе документа и щелкните ее левой кнопкой. В результате над первой секцией должна появиться горизонтальная линия. Это означает, что с началом ввода заголовка в верхней части документа откроется новая секция. Введите в этой секции текст:

Лабораторная работа № 1

Численные расчеты в системе Mathematica

После ввода заголовка установите для этой секции тип **Title**. При этом *размер букв заголовка изменится. Если вы хотите изменить тип шрифта* или размер букв в каком-либо выражении или во всей секции, с помощью мыши выделите это выражение или секцию и затем установите нужный шрифт или размер, выбирая последовательно соответствующие опции в разделе **Format** главного меню, например: **Format** ↦ **Font** ↦ **Arial** (выбираем шрифт **Arial**) *или* **Format** ↦ **Size** ↦ **18 Point** (устанавливаем размер символов 18 пикселей). Таким же образом можно изменить цвет какого-либо выражения (опция **Text Color**), выделить его с помощью фона (опция **Background Color**) и т.д.

6. В новой секции в качестве подзаголовка (тип **Subtitle**) добавьте фамилию и инициалы студента, выполняющего работу, и номер группы, например:

Выполнил: И.И.Иванов, гр. Т-55

Затем в следующей секции введите текст "Арифметические вычисления" и установите для нее тип **Section**. Все вычисления и пояснения, относящиеся к первому заданию, теперь нужно вводить ниже в последующих секциях, устанавливая для них подходящий стиль. Аналогично оформляются остальные задания.

7. Сохраните свой документ на диске, выбрав команду **Save** или **Save As** в разделе **File** главного меню. При этом открывается дополнительное окно, в котором нужно указать директорию или папку, куда следует поместить соответстующий файл, и имя файла (в строке **File name**). По умолчанию сохраняемый файл будет иметь тип *Mathematica* Notebook и расширение **.nb**. После сохранения имя файла будет автоматически внесено в заголовок окна вместо слова **Untitled-1**.

II. Арифметические вычисления

1. В отдельных секциях наберите последовательно следующие простые арифметические выражения, обращая внимание на дополнительные пробелы и точки в них, и произведите вычисления.

```
3 * 5

3 5

3   5

2 +   7
```

```
2 / 3
17^(1 / 2)
3  / 7.
17.^(1 / 2)
```

Объясните полученные **результаты и выполните** следующее задание.

Задание 1

На основе проделанных выше вычислений подберите примеры, подтверждающие справедливость следующих утверждений:

а) Пробел выполняет роль знака умножения.

б) Введение дополнительных пробелов не изменяет результата вычислений.

в) Целые, рациональные и иррациональные числа считаются заданными точно. Поэтому в выражениях, содержащих только такие числа, при обработке производятся лишь возможные упрощения, но сами они остаются точными и преобразуются в числа, заданные приближенно, только по команде пользователя.

г) Действительные числа, содержащие десятичную точку, считаются заданными приближенно. Поэтому выражения, в которые входят действительные числа, вычисляются при обработке секции без специальной команды.

д) Для изменения стандартного порядка выполнения операций используются круглые скобки.

В отчете приведите примеры вместе с вычислениями и пояснениями.

2. Для вычисления приближенного значения числа или арифметического выражения в системе *Mathematica* используется функция **N**. Одним из способов получить информацию об этой функции (а также о любой встроенной функции) является следующий. После знака вопроса набираем имя функции и нажимаем клавиши **Shift+Enter**.

In[6]:= `? N`

```
N[expr] gives the numerical value of expr. N[expr, n]
   attempts to give a result with n-digit precision. More...
```

В результате получаем сообщение, что **N[expr]** выдает численное значение выражения **expr**, а **N[expr, n]** пытается получить численный результат с точностью до **n** значащих цифр. Таким образом, команда для вычисления $\sqrt{5}$, например, имеет вид:

In[7]:= `N[Sqrt[5]]`

Out[7]= `2.23607`

Для вычисления квадратного корня используется функция **Sqrt[x]**. Чтобы выяснить, с какой точностью произведено вычисление, применим к полученному результату функцию **Precision[x]**, которая показывает, с точностью до скольких значащих цифр получен результат.

In[8]:= `Precision[%]`

Out[8]= `MachinePrecision`

Обратите внимание на аргумент у функции **Precision**. Напомним, что в системе *Mathematica* знак процента используется для ссылки на полученные ранее результаты. Так, один знак % означает последний полученный результат, два знака %% – предпоследний и т.д.. При этом знак %*n* соответствует результату, полученному в секции с меткой *Out[n]*.

Запомните правило: "**Имена всех встроенных функций в системе *Mathematica* пишутся с заглавной буквы, а их аргумент заключается в квадратные скобки**".

Задание 2

а) С помощью функции **N** вычислите $\sqrt{17}$ с точностью до 200 значащих цифр. Проверьте точность полученного результата с помощью функции **Precision**.

б) Найдите приближенное значение числа $e^{\pi\sqrt{163}}$ с точностью до 40 значащих цифр. Вычислите, на сколько полученный результат отличается от ближайшего к нему целого числа. Для стандартного округления чисел в системе *Mathematica* используется функция **Round[x]**.

в) Вычислите:

$$\left(10\times\left(\frac{10.8\times10^3}{300}\right)^{1/2}+4\right)^{1/3}; \qquad \frac{10^{-24}\times10^{12}}{10^{-14}}\sqrt{\frac{32768}{2^9}}.$$

г) Последовательно введите выражения

5 > 3

5 < 2

и посмотрите, что выдает *Mathematica* при их обработке. Затем определите, справедливо или нет неравенство: $\pi^e > e^\pi$. Найдите численные значения левой и правой частей неравенства и убедитесь в правильности полученного результата.

Замечание. Известные постоянные π и e в системе *Mathematica* обозначаются соответственно **Pi** и **E**. Кроме того, предусмотрен дополнительный ряд панелей с кнопками, позволяющими записать эти постоянные, буквы греческого алфавита и многие математические выражения в традиционном виде. Если с помощью мыши выбрать последовательно следующие опции в разделе **File** главного меню **File** ↦ **Palettes** ↦ **BasicInput**, например, то открывается дополнительное окно, в котором содержится ряд кнопок с греческими буквами и шаблонами для набора символов с верхним и нижним индексами, дробей, интегралов, сумм и т.д. При этом для основания натуральных логарифмов *e* используется обозначение вида e, для мнимой единицы – i , а соответствующие строчные буквы латинского алфавита являются обычными символами, которые могут использоваться по усмотрению пользователя.

III. Численное решение уравнений

1. Для численного решения полиномиального уравнения или системы уравнений в системе *Mathematica* используется функция **NSolve**. Чтобы выяснить правила обращения к этой функции, воспользуемся справкой.

In[9]:= ? NSolve

```
NSolve[lhs==rhs, var] gives a list of numerical
   approximations to the roots of a polynomial equation.
   NSolve[{eqn1, eqn2, ... }, {var1, var2, ... }]
   solves a system of polynomial equations. More
```

Как видим, у функции **NSolve** должно быть два аргумента, разделенных запятой. Первый аргумент представляет собой уравнение или список уравнений, заключенных в фигурные скобки и разделенных запятыми, а второй – имя переменной или список имен, относительно которых необходимо разрешить уравнение или систему. Запомните, что признаком уравнения в системе *Mathematica* является двойной знак равенства "==", причем символы "=" набираются без пробела. В качестве примера найдем корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

In[10]:= `NSolve[x^3 - 3x^2 + 1 == 0, x]`

Out[10]= `{{x → -0.532089}, {x → 0.652704}, {x → 2.87939}}`

Функция **NSolve** выдает список из трех корней, которые представлены в виде правил подстановки, т.е. конструкций вида: **имя → значение**, причем каждое решение заключено в фигурные скобки. Найденные корни могут быть легко подставлены в любое выражение. Пример:

In[11]:= `x^3 - 3x^2 /. %[[2]]`

Out[11]= `-1`.

Напомним, что два символа "/" и ".", набираемые один за другим без пробела, обозначают оператор подстановки, после которого должно следовать правило замены или список правил замены. Напомним также, что знак % обозначает последний полученный результат. В данном случае этот результат представляет собой список из трех решений уравнения. Чтобы выделить второй элемент списка, сразу после знака процента в двойных квадратных скобках набирается его номер, т.е. 2.

Задание 3

а) Решить уравнения:

$$\sqrt{x+2} + 4x = 4; \qquad x^3 - 3x^2 + 5 = 0.$$

б) Решить системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3 = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y^2 + 3z = 34, \\ x + y - z = -1, \\ -x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$$

в) Придумайте уравнение или систему полиномиальных уравнений и найдите ее численное решение.

2. Для решения произвольных уравнений и их систем используется функция **FindRoot**, которая находит только одно численное решение при каждом обращении к ней. Правила обращения легко видеть из следующего сообщения.

In[12]:= `? FindRoot`

```
FindRoot[lhs==rhs, {x, x0}] searches for
   a numerical solution to the equation lhs==rhs,
   starting with x=x0. FindRoot[{eqn1, eqn2, ... },
   {{x, x0}, {y, y0}, ... }] searches for a numerical
   solution to the simultaneous equations eqni. More...
```

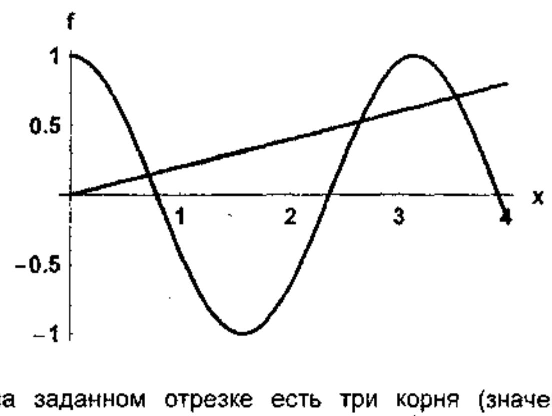
Подчеркнем, что при обращении к функции **FindRoot** необходимо указать приближенное значение корня, с которого начинается поиск его точного значения. Найти это приближенное значение проще всего графически. В качестве примера найдем корни уравнения

$$\cos 2x = 0.2x$$

на отрезке $x \in [0,\ 4]$.

Решение. Чтобы найти приближенные значения корней, построим графики левой и правой частей уравнения.

In[13]:=
```
Plot[{Cos[2 x], 0.2 x}, {x, 0, 4},
       PlotStyle →
     {{Thickness[0.009], RGBColor[0, 0, 1]},
      {Thickness[0.009], RGBColor[1, 0, 0]}},
       AxesLabel → {"x", "f"}];
```



Как видим, на заданном отрезке есть три корня (значения x, соответствующие точкам пересечения кривой $y = \cos 2x$ и прямой $y = 0.2x$). Из графика находим приближенные значения корней.

In[14]:= `x1 = .8; x2 = 2.6; x3 = 3.5;`

Точные значения корней находим с помощью функции **FindRoot**.

```
In[15]:= FindRoot[Cos[2 x] == 0.2 x, {x, x1}]
Out[15]= {x → 0.713776}
In[16]:= FindRoot[Cos[2 x] == 0.2 x, {x, x2}]
Out[16]= {x → 2.63356}
In[17]:= FindRoot[Cos[2 x] == 0.2 x, {x, x3}]
Out[17]= {x → 3.53445}
```

Задание 4

Используя функцию **FindRoot**, найти решения следующих **уравнений**:

1. $x^4 - 5x + 2 = \exp(x - 1)$ на отрезке $x \in [0, 2]$.
2. $x^4 - 8x^2 + 3 = 2x^3$ на отрезке $x \in [-2, 1]$.
3. $\sqrt{x^4 - 5x + 5} = 3x^2$ на отрезке $x \in [-2, 2]$.
4. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x - 2 = x^3$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
5. $e^x = 3\cos x$ на отрезке $x \in [-2, 2]$.
6. $x^2 + e^{-x} - 2 = \sin(2x)$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
7. $\ln x + 10 = \mathrm{tg}(2x)$ на отрезке $x \in [0, 3]$.
8. $8\cos(x) = x$ на отрезке $x \in [-2, 6]$.
9. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = \ln x$ на отрезке $x \in [0, 5]$.
10. $\mathrm{sh}(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ на отрезке $x \in [-2, 2]$.
11. $2\sin(x) + 1 = x^2 - 2x - 3$ на отрезке $x \in [-2, 4]$.
12. $e^{-x} = \sin(2x)$ на отрезке $x \in [0, 4]$.
13. $\mathrm{ch}\, x - 2 = \sin(x)$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
14. $\sin(x^2) = \cos(2x)$ на отрезке $x \in [-1, 3]$.
15. $2\cos^2(x) = \exp(x/2)$ на отрезке $x \in [-3, 1]$.
16. $2\cos(x) = \exp(-2x)$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
17. $3\cos(x - 1) = 2\,\mathrm{Sin}^2(x)$ на отрезке $x \in [-1, 3]$.
18. $\mathrm{ch}(x + 1) = \cos(x) + 1$ на отрезке $x \in [-2, 1]$.
19. $\mathrm{ch}(x + 1) = x^3 - 5x^2 + 3$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
20. $x^5 - 2x^2 - 3x + 5 = \exp(x)$ на отрезке $x \in [-2, 2]$.
21. $2x^4 - 3x^3 + 4x - 1 = \mathrm{th}(x)$ на отрезке $x \in [-2, 1]$.
22. $2x^3 - 14x + 4 = 2\ln(x + 1)$ на отрезке $x \in [0, 3]$.
23. $2x^2 - 9x - 5 = 7\,\mathrm{th}(x + 1)$ на отрезке $x \in [-2, 6]$.
24. $\sin(x^2 + 1) = \mathrm{ch}(x - 1) - 2$ на отрезке $x \in [-2, 3]$.
25. $\sin(2x) = x/8$ на отрезке $x \in [0., 2\pi]$.

IV. Численное решение дифференциальных уравнений

1. Для численного решения дифференциальных уравнений и их систем имеется функция **NDSolve**, которая вызывается по крайней мере с тремя аргументами: **NDSolve[eqns, y, {x, xmin, xmax}]**, где **eqns** – список, который включает дифференциальное уравнение и необходимое число граничных или начальных условий, **y** – имя функции, относительно которой решается уравнение, **x** – имя независимой переменной, причем решение ищется на отрезке от **xmin** до **xmax**. В качестве примера найдем решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5xy = 0$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ на отрезке $x \in [0, 2]$ и назовем его **sol1**.

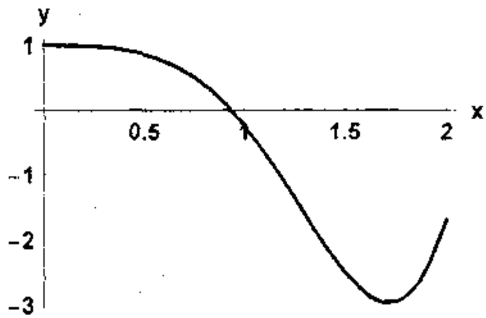
```
In[18]:= sol1 = NDSolve[{y''[x] - 2 y'[x] + 5 x y[x] == 0,
            y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, {x, 0, 2}]

Out[18]= {{y → InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]}}
```

Обратите внимание на наличие двойного знака равенства как в самом дифференциальном уравнении, так и в уравнениях, выражающих начальные условия. Это общее правило записи всех уравнений. Кроме того, функция и все ее производные должны быть записаны с аргументом, заключенным в квадратные скобки: **y[x]**, **y'[x]** и т.д. Для производных можно использовать стандартные обозначения, набирая после **y** необходимое число штрихов (для обозначения второй производной нельзя использовать кавычки). Решение получается в виде правила подстановки для искомой функции $y(x)$, в правой части которого находится интерполяционная функция.

Чтобы найти корни уравнения $y(x) = 0$, например, построим график найденной функции.

```
In[19]:= Plot[y[x] /. sol1, {x, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y"},
            PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.009]}];
```



Из графика видим, что на отрезке [0, 2] есть один корень уравнения $y(x) = 0$, приближенное значение корня $x = 0.9$. Точное значение находим с помощью функции **FindRoot**.

```
In[20]:= sol2 = FindRoot[(y[x] /. sol1[[1]]) == 0, {x, 0.9}]

Out[20]= {x → 0.935004}
```

Вычисляем значение производной в найденной точке.

```
In[21]:= D[y[x] /. sol1[[1]], x] /. sol2

Out[21]= -3.34414
```

Найденная функция имеет около точки $x = 1.7$ локальный минимум. Приравнивая производную этой функции к нулю и решая полученное уравнение, находим точное значение x.

```
In[22]:= sol3 = FindRoot[D[y[x] /. sol1[[1]], x] == 0, {x, 1.7}]

Out[22]= {x → 1.71173}
```

Соответствующее значение функции равно:

```
In[23]:= y[x] /. sol1[[1]] /. sol3

Out[23]= -2.95436
```

Минимальное значение функции $y(x)$ вместе с соответствующим значением x в окрестности точки $x = 1.7$ можно найти с помощью функции **FindMinimum**.

```
In[24]:= FindMinimum[y[x] /. sol1[[1]], {x, 1.7}]

Out[24]= {-2.95436, {x → 1.71173}}
```

Как видим, полученные значения совпадают с найденными ранее.

Задание 5

Найдите решение одного из следующих дифференциальных уравнений на заданном отрезке.

1. $y'' + 2y'\cos(x) + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [0, 5]$.
2. $y'' + x^2 y - 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [0, 4]$.
3. $y'' + \cos(x)\, y + x^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [-2, 3]$.
4. $y'' + \cos(x)\, y' - x^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [-5, 2]$.
5. $y'' + x\, y - \cos(2x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [0, 5]$.
6. $y'' + \mathrm{tg}(x)\, y' - \sin(x) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [0, 9]$.
7. $y'' + 3x^2 y' - 6\cos(2x)\, y^2 = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 3$ на отрезке $x \in [0, 5]$.
8. $y'' - x^2 y' + 5y^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ на отрезке $x \in [-2, 1]$.
9. $y'' + x^2 y' + 3\cos^2(x)\, y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ на отрезке $x \in [-2, 4]$.
10. $y'' + (1 + \cos x)\, y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [-4, 4]$.
11. $y'' + (5 + \cos^2(x))\, y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ на отрезке $x \in [0, 3]$.
12. $y'' + 0.5y' + (1 + \cos(x))\, y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ на отрезке $x \in [0, 8]$.
13. $y'' - 2y' + 3xy^3 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [0, 2]$.
14. $y'' + 7y^3 - 15y - 3x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ на отрезке $x \in [0, 4]$.
15. $y'' - 5xy^3 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [-3, 2]$.
16. $y'' + 2y'\,\mathrm{th}(x) + 3y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [-3, 2]$.
17. $y'' - y' + 2y\cos^2(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ на отрезке $x \in [-1, 5]$.
18. $y'' - y'\cos^2(x) + 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ на отрезке $x \in [0, 3]$.
19. $y'' + 2y' + (5x + \cos^2(x))\, y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [0, 3]$.
20. $y'' + y'\,\mathrm{tg}(x) + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [0, 5]$.
21. $y'' - 4xy' + (4x^2 + 3x + 4)\, y = 0$, $y(0) = -10$, $y'(0) = -5$ на отрезке $x \in [-1, 2]$.
22. $y'' + 3y'\cos(x - 1) - (x^2 - 3)\, y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ на отрезке $x \in [-3, 3]$.
23. $y'' + 3xy' + (4x^2 + 3)\, y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [-2, 3]$.
24. $y'' - xy' + (x + 1)\, y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$ на отрезке $x \in [-1, 3]$.
25. $y'' - y' + \sin^2(x)\, y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ на отрезке $x \in [-8, 2]$.

Используя найденное решение,

а) найдите на заданном отрезке корни уравнения $y(x) = 0$;

б) найдите значения производной $y'(x)$ в точках, где $y(x) = 0$;

в) выберите одну из точек, в которых производная функции $y(x)$ равна нулю, и вычислите значение функции в этой точке;

г) с помощью функции **FindMinimum** найдите точки, в которых функция $y(x)$ имеет локальный минимум или максимум, и сравните полученные результаты со значениями, найденными в пункте в).

V. Обработка численных данных

1. Предположим, что в ходе эксперимента производится ряд измерений некоторой величины y при заданных значениях x. Например, измеряется координата тела в заданные моменты времени. В результате получается таблица численных данных. Чтобы смоделировать такую ситуацию, рассмотрим, например, функцию вида:

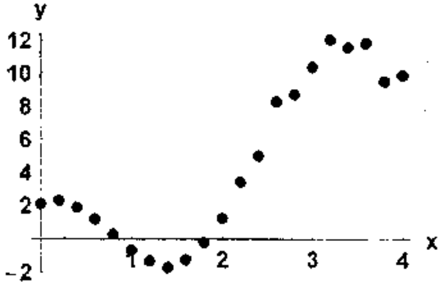
$$y = -2 + 3x + 4\cos(2x).$$

Вычислим значения этой функции, задавая значения x из интервала $0 \le x \le 4$ с шагом 0.2. Поскольку в реальном эксперименте измерения производятся с некоторой погрешностью, в каждой точке x введем случайное возмущение $|\Delta y| < 0.1|y|$, генерируемое с помощью функции **Random**. Используя функцию **Table**, получаем список, каждый элемент которого является списком из двух соответствующих значений (x, y).

```
In[25]:= dat1 = Table[{x, (-2 + 3 x + 4 Cos[2 x])
              (1 + Random[Real, {-0.1, 0.1}])}, {x, 0, 4, 0.2}]
Out[25]= {{0, 2.12834}, {0.2, 2.32993}, {0.4, 1.92634},
          {0.6, 1.19582}, {0.8, 0.286804}, {1., -0.665702},
          {1.2, -1.3162}, {1.4, -1.70866}, {1.6, -1.23162},
          {1.8, -0.203953}, {2., 1.26946}, {2.2, 3.4598},
          {2.4, 5.07342}, {2.6, 8.34072}, {2.8, 8.76947},
          {3., 10.4274}, {3.2, 12.1107}, {3.4, 11.6169},
          {3.6, 11.9038}, {3.8, 9.60057}, {4., 9.9647}}
```

Напомним, что в реальном эксперименте мы не знаем численные значения коэффициентов зависимости $y = y(x)$, а имеем только таблицу численных данных. Чтобы представить себе эту зависимость, отметим экспериментальные точки на координатной плоскости xOy. Для этого используем функцию **ListPlot**.

```
In[26]:= p1 = ListPlot[dat1, PlotStyle → PointSize[0.03],
            AxesLabel → {"x", "y"}];
```



Чтобы найти наилучшие, с точки зрения метода наименьших квадратов, значения коэффициентов *a*, *b*, *c* в выражении $y = a + bx + c\cos(2x)$, используем функцию **Fit**. При обращении к ней нужно указать три аргумента. Первым аргументом является список численных данных, в данном случае *dat1*. Второй аргумент представляет собой список функций, линейная комбинация которых должна аппроксимировать искомую зависимость. Третий аргумент указывает имя независимой переменной. Соответствующая команда имеет вид:

```
In[27]:= y1 = Fit[dat1, {1, x, Cos[2 x]}, x]

Out[27]= -2.03563 + 3.01166 x + 4.02323 Cos[2 x]
```

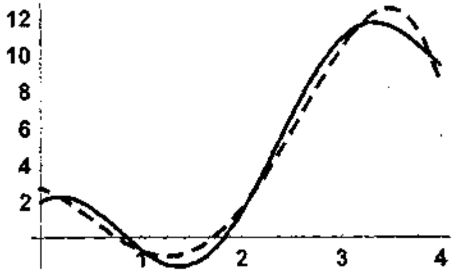
Как видим, найденные значения коэффициентов *a*, *b*, *c* близки к тем, которые мы использовали при генерации численных данных. Для сравнения попробуем провести через эксперимертальные точки наилучшую кривую, уравнение которой представляет собой, например, полином четвертой степени. Команда для поиска такого полинома имеет вид:

```
In[28]:= y2 = Fit[dat1, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x]
```

Out[28]= $2.74496 - 1.70841\,x - 5.59515\,x^2 + 4.5576\,x^3 - 0.740496\,x^4$

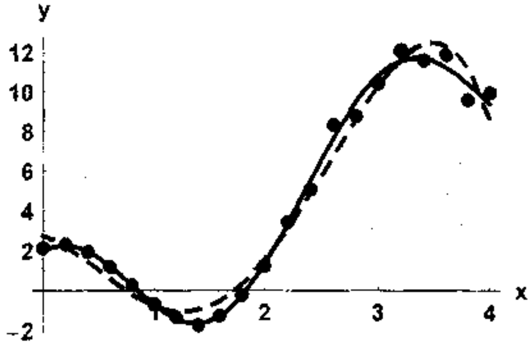
Теперь можно построить графики найденных функций.

```
In[31]:= p2 = Plot[{y1, y2}, {x, 0, 4},
          PlotStyle → {{Thickness[0.01]},
            {Thickness[0.01], Dashing[{0.03}]}}];
```



Чтобы посмотреть, насколько хорошо найденные кривые проходят через экспериментальные точки, совместим два графика, используя функцию **Show**.

```
In[32]:= Show[p1, p2];
```



Как видим, сплошная кривая, полученная при использовании реальной зависимости $y = y(x)$, лучше соответствует экспериментальным результатам, чем полиномиальная зависимость (кривая, изображаемая штриховой линией).

Задание 6

а) Задайте произвольные численные значения параметров *a*, *b*, *c*, *d*, *e* в следующих зависимостях:

$$y(x) = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4,$$

$$y(x) = a + b x + c \sin x + d \cos x,$$

$$y(x) = a + b x + c \sin x + d \cos(2x),$$

$$y(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin(2x) + d \cos(2x).$$

Используя функцию **Table**, определите список численных данных, каждый элемент которого содержит два соответствующих элемента (x, y). Область изменения x и шаг выберите самостоятельно. С помощью функции **Random** внесите в каждой точке x случайное возмущение Δy.

б) Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

в) С помощью функции **Fit** найдите наилучшую кривую, аппроксимирующую численные данные.

г) На одной координатной плоскости изобразите найденную кривую вместе с экспериментальными точками.

VI. Окончание работы

Для окончания работы с системой *Mathematica* достаточно с помощью мыши выбрать опцию **Exit** в разделе **File** главного меню. При следующем сеансе работы с системой *Mathematica* сохраненный файл может быть открыт путем выбора опции **Open** в разделе **File** главного меню для дальнейшей работы с ним.