UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CÓRDOBA

TEÓRICOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROFESOR TITULAR

MBA ROBERTO P. FUGIGLANDO

Año Lectivo 2021

(SEGUNDA PARTE)

<u>UNIDAD Nº IV</u>

“<u>ÁLGEBRA DE PROBABILIDADES</u>”

<u>FENÓMENOS ALEATORIOS</u>

En la vida real, se plantean situaciones o experimentos tales que a *iguales causas y en condiciones uniformes,* *<u>siempre</u> se producen los mismos efectos,* dando lugar a los denominados ***“Fenómenos Determinísticos”***, de naturaleza ***“<u>causística</u>”.*** Por ejemplo, la Ley de Newton, expresa que la relación entre la fuerza **F** de un cuerpo en movimiento, de masa **m** con aceleración **a**, está dada por:

$$\boxed{\mathbf{F = m\ .\ a}}$$

En contraposición a los anteriores, existes situaciones o experimentos tales que, *a iguales causas y en condiciones uniformes,* *<u>no siempre</u> se producen los mismos efectos*, dando lugar a los denominados ***“Fenómenos Aleatorios, Contingentes, Eventuales o Probabilísticos”***, de naturaleza ***“<u>casuística</u>”.*** Por ejemplo, qué número saldrá en el próximo sorteo de una lotería. Es decir:

Fenómenos
- **determinísticos**: a = causas $\Rightarrow$ = efectos $\Rightarrow$ ***causísticos***
- **aleatorios:** a = causas $\not\Rightarrow$ **=** efectos $\Rightarrow$ ***casuísticos***

<u>ESPACIO MUESTRAL</u>

Se denomina de esta forma al conjunto formado por *todos los resultados posibles* asociados a un *“fenómeno aleatorio”,* denotándoselo con **S**.

Se lo clasifica en:

1) Discreto, y
2) Continuo.

1) Es **Discreto** cuando asume resultados separables y contables, pudiendo ser:

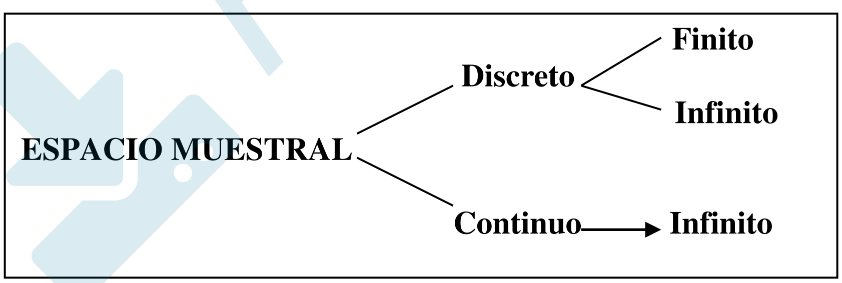
a) **Finito:** cuando asume un número *limitado* de resultados. Por ejemplo, la nota que podrá un alumno sacar en un examen, considerando la escala de calificación utilizada en la universidad, que está dado por:

$$\mathbf{S} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9, 10 \}$$

b) **Infinito:** cuando asume un número *ilimitado* de resultados. Por ejemplo, el número de lanzamientos de un dado perfecto hasta que salga el cuatro, siendo el espacio muestral:

$$\mathbf{S} = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

2) Es **Continuo** cuando los resultados no son separables o contables, admitiendo infinitos valores. Por ejemplo, dar en el blanco a los puntos de un círculo (infinitos puntos), tiempo de vida útil de un motor, etc.



<u>EVENTOS o SUCESOS ELEMENTALES o SIMPLES</u>

Cada componente de un Espacio Muestral, recibe el nombre de ***"Evento Elemental o Simple"*** y tienen las características de ser:

1) Mutuamente Excluyentes, y
2) Exhaustivos.

Lo anterior significa que, al darse uno de ellos en una prueba, no puede <u>simultáneamente</u> darse otro, aunque *cualquiera* de los fenómenos que integran el Espacio Muestral, podría haberse presentado. Por ejemplo, si se lanza al aire una moneda perfecta y sale ceca, **<u>simultáneamente</u>,** no podría haber salido cara (mutuamente excluyentes), aunque ***podría*** haber salido (exhaustivos).

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{S} = \{ \underset{\downarrow}{\mathbf{C}} , \underset{\downarrow}{\mathbf{S}} \}$$

eventos elementales

<u>EVENTOS o SUCESOS</u>

Se denomina de esta forma, a todo *subconjunto de un Espacio Muestral*, conformado por *eventos elementales o simples*. La importancia de los **eventos,** radica en que, sólo ellos, tienen asignado *un número real que es su* ***probabilidad***. Se los denota con letras mayúsculas: A, B, C,…..etc.

Así por ejemplo, si en el experimento consistente en el lanzamiento de un dado, consideramos el evento: "número salido", podríamos definir los eventos:

Espacio Muestral $\Rightarrow$ **S =** {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

$$\Downarrow$$

A = "Salida de número par" $\Rightarrow$ A = { 2 ; 4 ; 6 }

B = "Salida de múltiplo de 3" $\Rightarrow$ B = { 3 ; 6 }

EVENTO SEGURO o CIERTO

Es aquel evento, en el que **todos** los eventos elementales le son favorables, siendo por lo tanto el **espacio muestral**. Esto es así puesto que, con toda certeza podemos afirmar que alguno de sus componentes, se va a presentar en una prueba.

$$\Downarrow$$

Evento Seguro a Cierto ⇒ Espacio Muestral ⇒ S

EVENTO IMPOSIBLE

Es aquel evento, en el cual ***ningún evento elemental le es favorable***. Es decir, con ***toda certeza,*** podemos afirmar ***que no se va a presentar en una prueba***. Se lo denota con **θ.** Por ejemplo, que en la tirada una vez de un dado perfecto, salga el 7.

Lanzamiento de un dado perfecto ⇒ "Salida de 7" ⇒ **Evento imposible = θ**

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Dos eventos **A** y **B** son ***"Mutuamente Excluyentes o Disjuntos"***, y se los denota de la forma **A)(B**, si la *ocurrencia conjunta es el evento imposible***.** Es decir:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Si } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ son } \textbf{eventos Mutuamente Excluyentes} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \theta}$$

Por ejemplo, si en el experimento asociado al lanzamiento de un dado se definen los eventos:

A = "Salida de Nº par" ⇒ **A =** { 2 , 4 , 6 }

B = "Salida de Nº impar" ⇒ **B =** { 1 , 3 , 5 }

⇒ **A)(B**

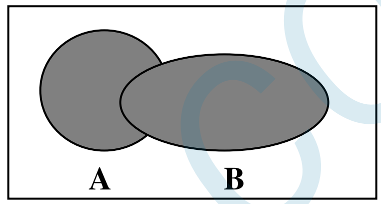
UNIÓN DE EVENTOS

Dados los eventos **A** y **B**, la ***"Unión",*** denotada de la forma: $\mathbf{A \cup B}$, es ***otro evento*** formado por los ***eventos elementales que están en*** **A,** ***agregándole*** los que están en **B**, considerando ***una sola vez*** *a los* eventos elementales ***que se repiten***.

Puede representarse gráficamente la ***Unión de Eventos***, a través del denominado Diagrama de Venn, utilizado en la Teoría de Conjuntos, de la forma:

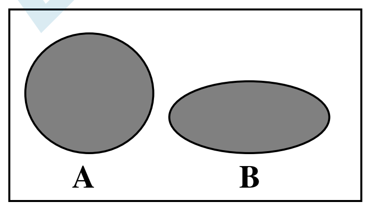
a) Si **A y B** son **eventos cualesquiera:**

$\mathbf{A \cup B} \Rightarrow$



b) Si **A y B** son **eventos mutuamente excluyentes o disjuntos** $\Rightarrow \mathbf{A \cap B = \theta}$**:**

$\mathbf{A \cup B} \Rightarrow$



Observación:

Debe tenerse presente que:

Unión de eventos $\Rightarrow \cup$ **= o = + =** $\vee$

Ejemplo

Considerando el experimento del lanzamiento de un dado perfecto una vez, y definidos los eventos:

A = "Salida de número par" $\Rightarrow$ **A = { 2 , 4 , 6 }**

B = “Salida de múltiplo de 3” $\Rightarrow$ **B = { 3 , 6 }**
C = “Salida de número impar” $\Rightarrow$ **C = { 1 , 3 , 5 }**

<u>Obtener los Eventos</u>:

1. “Salida de número par **o** múltiplo de 3”.
2. “Salida de número par **o** número impar”.

<u>Solución</u>:

1. **A o B $\Rightarrow$ $A \cup B$ = { 2, 3 , 4 , 6 }**

2. **A o C $\Rightarrow$ $A \cup C$ = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }** $\Rightarrow$ ***Evento Seguro o Cierto***

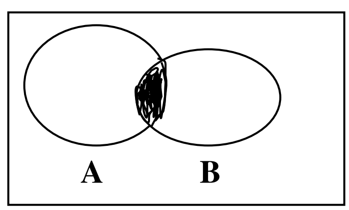
<u>INTERSECCIÓN DE EVENTOS</u>

Dados los eventos **A** y **B**, la ***“Intersección”*** denotada de la forma: $A \cap B$, es ***otro evento*** formado por los ***eventos elementales que están <u>simultáneamente</u> en*** **A** y **B**.

Gráficamente:

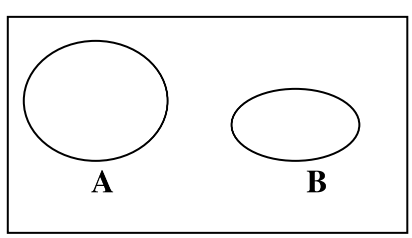
a) Si **A y B** son **eventos cualesquiera**:

$A \cap B$ $\Rightarrow$



b) Si **A y B** son **eventos mutuamente excluyentes o disjuntos**:

$A \cap B$ $\Rightarrow$
$\Downarrow$
= θ



Observación:

Debe tenerse presente que:

Intersección de eventos $\Rightarrow \cap = y = x = \wedge$

Ejemplo

Considerando el experimento del lanzamiento de un dado perfecto una vez, y definidos los eventos:

A = "Salida de número par" $\Rightarrow$ **A = { 2 , 4 , 6 }**

B = "Salida de múltiplo de 3" $\Rightarrow$ **B = { 3 , 6 }**

C = "Salida de número impar" $\Rightarrow$ **C = { 1 , 3 , 5 }**

Obtener los Eventos:

1. "Salida de número par **y** múltiplo de 3".
2. "Salida de número par **y** número impar".

Solución:

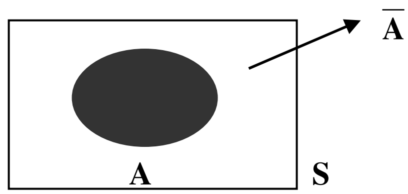
1. **A y B** $\Rightarrow A \cap B = \{ 6 \}$

2. **A y C** $\Rightarrow A \cap C = \theta \Rightarrow$ ***Evento Imposible.***

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

Dado un evento **A,** su complemento, denotado con $\overline{\mathbf{A}}$ o **A´** es ***otro evento,*** formado por ***todos los eventos elementales que están en el Espacio Muestral*** (**S**)*, y* ***no están en el evento A.***

Gráficamente:



Ejemplo

Considerando el experimento del lanzamiento de un dado perfecto una vez, y definido el evento:

A = "Salida de μ de 3" $\Rightarrow$ **A =** { 3 , 6 }

$\Downarrow$ $\Downarrow$

múltiplo $\overline{\mathbf{A}}$ = {1 , 2 , 4 , 5 }

TEORÍAS PROBABILÍSTICAS

I. Teoría Clásica, Principio de la Razón Insuficiente o Enfoque de Laplace

Acorde a esta teoría, **todos** los eventos elementales que conforman un espacio muestral **tienen la misma probabilidad** de aparecer en un experimento cualquiera, determinándose la probabilidad de ocurrencia de un evento **A** mediante el cociente:

$$\mathbf{P(\ A\ ) = \frac{Número\ de\ eventos\ elementales\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ eventos\ elementales\ igualmente\ posibles}}$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{P\ (\ A\ )\ = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ igualmente\ posibles}}$$

La aplicación de esta fórmula de cálculo, está supeditada a que se conozca el número de eventos elementales que conforman el numerador y el denominador, debiendo ser estos últimos "igualmente posibles". Lo expuesto, no siempre es factible conocerlo en la práctica, motivo por el cual, su aplicación es limitada.

Ejemplos

1. *La probabilidad que salga el 17 en una ruleta (con un solo cero):*

$$\Downarrow$$

P(salida 17) = **1/37**

2. *La probabilidad que salga un número par en una tirada de un dado perfecto:*

$$\Downarrow$$

P(salida de número par) = **3/6**

3. *La probabilidad que salga una carta de oro de un mazo de 40 cartas:*

$$\Downarrow$$

P(salida de oro) = **10/40**

4. *La probabilidad de ganar apostando a color en una ruleta (con un solo cero):*

$$\Downarrow$$

[P (color) = 18/37] < **1/2**

5. *La probabilidad de ganar apostando a docena en una ruleta (con un solo cero):*

$$\Downarrow$$

[P(primera docena) = 12/37] < **1/3**

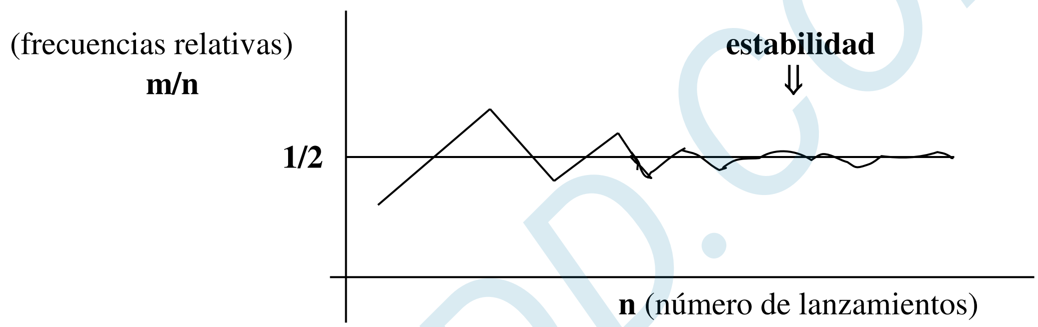
II. Teoría Objetiva o Enfoque Frecuencial

Dadas las limitaciones prácticas de la teoría anterior, el *Enfoque Frecuencial,* establece que la probabilidad de un evento **A,** *sólo puede determinarse a través de pruebas empíricas*, repitiendo un experimento un número grande de veces (replicar el experimento), de modo tal que: *"Si un experimento se repite un número grande de veces* **(n),** *y se obtienen* **(m)** *resultados favorables a un evento* **A**, *siendo* **m ≤ n**, *la probabilidad de dicho evento, surge del cálculo:*

$$\boxed{\mathbf{P(A) = \lim_{n \to \infty} m/n \quad ; \quad m/n = h_i} \Rightarrow \textit{Frecuencia relativa}}$$

Lo anterior, significa decir que las frecuencias relativas ($\mathbf{h_i}$) tienden a estabilizarse, cuando **n** aumenta, alrededor de un número real no negativo, que es la *Probabilidad del Evento*, dando lugar al denominado *"Principio de la Estabilidad de Probabilidad"*, siendo éste el sustento teórico en los procesos de investigación.

Así por ejemplo, si se tira al aire una moneda perfecta un *número grande de veces,* (**n**), y se cuenta el número de caras salidas (**m**), el comportamiento gráfico de las frecuencias relativas $\mathbf{h_i = m/n}$ responderá a la forma:



Si bien el sustento teórico de este enfoque es válido, su implementación práctica no siempre es posible, en especial, cuando los procesos de experimentación son *destructivos*, como ocurre por ejemplo, cuando se quiere probar una droga para una cierta patología en seres humanos.

III. Teoría o Enfoque Subjetivista

Según este enfoque, la probabilidad de un evento **A** *depende del juicio personal del investigador, en base a las experiencias por él recogidas.* Así por ejemplo, cuando en la zona de Cuyo, los lugareños suponen que va a ocurrir un temblor en la tierra, al ver el comportamiento de los animales, ya que, según esas personas, siempre que observaron que los animales reaccionaban de cierta forma, ocurrió un temblor.

IV. Teoría Axiomática

Acorde a esta teoría, los Eventos que pueden deducirse de un Espacio Muestral, deben satisfacer los siguientes ***Axiomas****:*

1. Existencial:

"Todo evento **A,** *tiene asociado un* ***número real*** *que es* ***su probabilidad****".*

$$\Downarrow$$

$$\forall\, \mathbf{A} : \exists\, \mathbf{P(A)} / \mathbf{P(A)} \in \Re$$

2. No Negatividad:

"La probabilidad de un evento **A,** *es un número real no negativo".*

$$\Downarrow$$

$$\forall\, \mathbf{A} :\ \mathbf{P(A)} \geq 0$$

3. Certeza:

"La probabilidad del Evento Seguro o Cierto, es igual a ***1****".*

$$\Downarrow$$

S → Evento Seguro o Cierto ⇒ P (S) = 1

Relacionando los Axiomas anteriores, podemos concluir en que: ***La probabilidad de un evento A, es un Número Real comprendido en el intervalo:***

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \mathbf{P(A)} \leq 1$$

Observaciones:

a) *"La probabilidad del* ***evento imposible,*** *es igual a cero".*

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{P(\theta) = 0}}$$

b) *"La probabilidad del* ***complemento de un evento*** (**A'**), *es igual a* ***uno*** *menos la* ***probabilidad del evento dado*** (**A**)*".*

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}}$$

<u>LEY DE PROBABILIDAD TOTAL o TEOREMA DE LA SUMA</u>

I. *"La probabilidad de la* ***UNIÓN*** *de* ***dos eventos <u>cualesquiera</u>*** **A** y **B**, *es igual a la <u>suma</u> de las probabilidades de cada uno de los eventos dados, <u>menos</u> la probabilidad de la intersección entre los mismos".*

$\Downarrow$

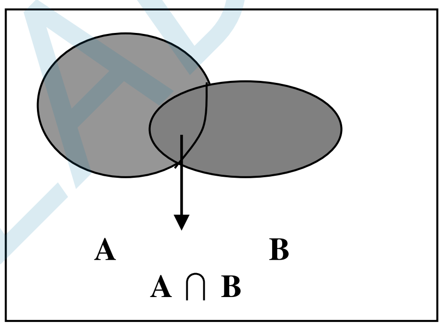
Unión $\Rightarrow$ A $\cup$ B $\Rightarrow$ A o B

$\Downarrow$

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Gráficamente:

A $\cup$ B $\Rightarrow$



II. *"Si* **A** y **B** *son eventos* ***mutuamente excluyentes o disjuntos*** **[A)(B)]** *, la probabilidad de la* ***UNIÓN*** *será igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos dados".*

$\Downarrow$

Si : **A)(B** $\Rightarrow$ **A $\cap$ B = θ** $\Rightarrow$ **P (A $\cap$ B) = 0**

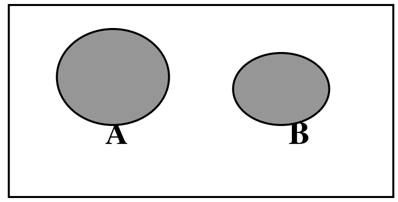
$\Downarrow$

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Gráficamente:

$\Downarrow$

A)(B $\Rightarrow$ **A** $\cap$ **B = θ** $\Rightarrow$ **A** $\cup$ **B** $\Rightarrow$



Ejemplo

Si de un mazo de 40 cartas españolas, se escoge una al azar, calcular la probabilidad que sea:

1) As o Espada.
2) Oro o Copa.

Solución:

Si definimos los eventos de la forma:

A = "Salida de As" $\Rightarrow$ **P(A) =** 4/40

B = "Salida de Espada" $\Rightarrow$ **P(B) =** 10/40

C = "Salida de Oro" $\Rightarrow$ **P(C) =** 10/40

D = "Salida de Copa" $\Rightarrow$ **P(D) =** 10/40

1) P(sea As o Espada) $\Rightarrow$ **P (A o B) = P (A** $\cup$ **B)**

$\Downarrow$

P (A $\cup$ **B) = P (A) + P(B) – P (A** $\cap$ **B)** $\Rightarrow$ **P (A** $\cup$ **B) =** 4/40 + 10/40 - 1/40 **= 13/40**

$\downarrow$

as de espada

2) P(sea Oro o Copa) $\Rightarrow$ **P (C o D) = P (C** $\cup$ **D)**

$\Downarrow$

P(C $\cup$ **D) = P(C) + P(D) – P (C** $\cap$ **D)** $\Rightarrow$ **P (C** $\cup$ **D) =** 10/40 + 10/40 - 0 **= 20/40 = 1/2**

$\downarrow$

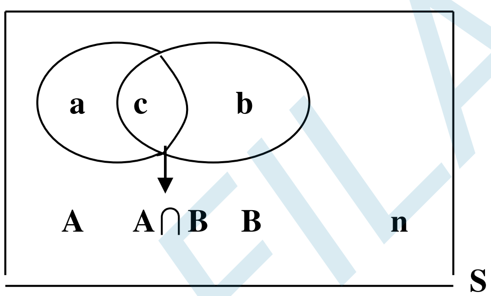
θ

PROBABILIDAD CONDICIONAL O CONDICIONADA

Dado un Espacio Muestral **S,** formado por **n** eventos elementales favorables, todos con la misma probabilidad, y considerando dentro de él a dos eventos **A** y **B**, con **a** y **b** eventos elementales favorables respectivamente, todos *con la misma probabilidad*, existiendo **c** eventos elementales favorables al evento ***intersección entre*** **A** y **B** , **($A \cap B$):** *La probabilidad de presentación del evento* **A** ***condicionada*** *a la ocurrencia del evento* **B**, *denotada de la forma:* **P(A/B)**, *que se lee "Probabilidad* ***de A dado B"*** *o también "Probabilidad de* ***A condicionada a B"***, va a estar dada por el cociente:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{\text{Número de eventos elementales favorables a } A \cap B}{\text{Número de eventos elementales favorables a } B}} \quad (\text{I})$$

$\Downarrow$



S $\Rightarrow$ **n:** eventos elementales

A $\Rightarrow$ **a:** eventos elementales

B $\Rightarrow$ **b:** eventos elementales

$A \cap B$ $\Rightarrow$ **c:** eventos elementales

Reemplazando en **(I)** por sus iguales resulta:

$$P(A/B) = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{b}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \; P(B) \neq 0} \quad (\text{II})$$

Análogamente:

$$\mathbf{P(B/A)} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{n}}}{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}}} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{P(B/A)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}};\ \mathbf{P(A) \neq 0}} \quad \mathbf{(\ II\ )}$$

Acorde a lo deducido en **(II)**, puede decirse que "*La probabilidad condicionada de un evento a otro, es igual a la probabilidad de **la intersección entre los eventos dados**, sobre la probabilidad del **evento condición**, debiendo ser la probabilidad de éste, distinta de cero".*

Ejemplo

De un mazo de 40 cartas españolas se escoge una al azar:

1) Si se sabe que es de Oro, calcular la probabilidad que sea un As.
2) Si se sabe que es un As, calcular la probabilidad que sea de Oro.

Solución:

Definiendo los eventos:

A = "Salida de As" $\Rightarrow$ **P(A) = 4/40**

B = "Salida de Oro" $\Rightarrow$ **P (B) = 10/40**

$\mathbf{A \cap B}$ = "Salida de As y Oro" $\Rightarrow \mathbf{P(\ A \cap B\ ) = 1/40}$

resulta:

1) $$\boxed{\mathbf{P(A/B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}\ \mathbf{; P(B) \neq 0} \Rightarrow \mathbf{P(A/B)} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}}}{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{40}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{P(A/B\ )} = \frac{\textbf{Número de eventos elementales favorables a } \mathbf{A \cap B}}{\textbf{Número de eventos elementales favorables a B}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}}$$

2) $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; ; P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B/A) = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{4}{40}} = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$P(B/A) = \frac{\text{Número de eventos elementales favorables a } A \cap B}{\text{Número de eventos elementales favorables a } A} = \frac{1}{4}$$

PROBABILIDAD COMPUESTA

I. Eventos Dependientes:

Se dice que dos *eventos* **A** y **B** son ***dependientes,*** cuando la ocurrencia de uno de ellos en una prueba, ***afecta*** a la probabilidad de presentación del otro en una prueba siguiente, lo que significa que si el experimento consiste en *extracciones sucesivas*, se trabaja ***sin reposición o sin reemplazo***.

La *probabilidad de presentación conjunta* de dos eventos dependientes **A** y **B**, es decir de la *intersección* entre ambos, está dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \text{ x } P(A/B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \text{ x } P(B/A)$$

Lo anterior se denomina "***Regla Multiplicativa para Eventos Dependientes"***, pudiéndosela generalizar, suponiendo tres eventos dependientes, de la forma:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \text{ x } P(B/A) \text{ x } P(C/A \cap B)$$

Ejemplo

Una caja contiene 10 repuestos: 6 Buenos y 4 Defectuosos. Si se escogen sucesivamente 2 repuestos, de modo tal que el primero sacado **no sea devuelto a la caja**. Calcular la probabilidad de que:

1) Ambos sean Buenos.

2) Sólo uno sea Defectuoso.

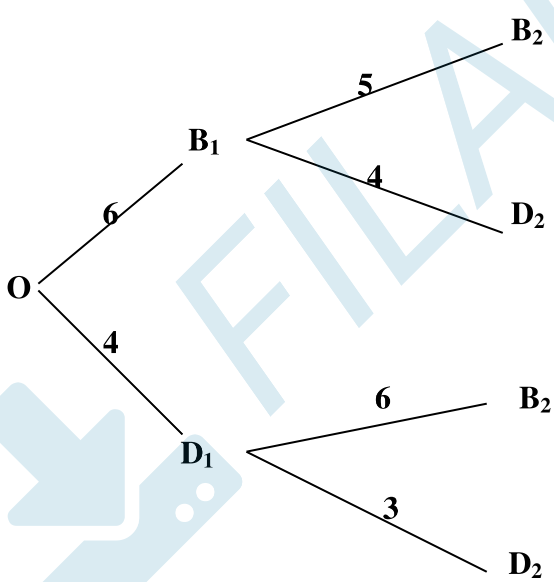
Solución:

Definidos los eventos:

B = "Salida de repuesto Bueno".

D = "Salida de repuesto Defectuoso".

1era. extracción **2da. extracción**



El gráfico anterior, se denomina ***"diagrama del árbol o arborescente"***, y es particularmente útil como método, para describir gráficamente los eventos posibles asociados a pruebas u observaciones secuenciales, indicando los subíndices el orden de la extracción, y en cada rama, el número de elementos resultantes, luego de cada extracción.

1) **P(ambos Buenos) = P(B_1 y B_2)**
.

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1)$$

$$\Downarrow$$

$$= \boxed{\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}}$$

2) **P(sólo un Defectuoso) = P[(B_1 y D_2) o ((D_1 y B_2)]**

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap B_2)$$

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1) \times P(D_2/B_1) + P(D_1) \times P(B_2/D_1)$$

$$\Downarrow$$

$$= \boxed{\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}}$$

II. Eventos Independientes:

Se dice que dos eventos **A** y **B** son ***independientes***, cuando la ocurrencia de uno de ellos en una prueba, ***no afecta*** a la probabilidad de ocurrencia del otro en una prueba siguiente, lo que significa que en experimentos consistentes en *extracciones sucesivas*, se trabaja ***con reposición o con reemplazo.***

La *probabilidad de ocurrencia conjunta*, es decir de la *intersección de dos eventos independientes* **A** y **B**, va a estar dada por:

Si **A** y **B** son ***eventos independientes*** $\Rightarrow$
- **P(A/B) = P(A)**
- **P(B/A) = P(B)**

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(A)\,x\,P(B/A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\,x\,P(B) \\ \mathbf{o} \\ P(A\cap B)=P(B)\,x\,P(A/B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\,x\,P(A) \end{array}}$$

De lo expuesto se deduce que: *"La **probabilidad de la intersección**, es decir, de la presentación conjunta de **dos eventos independientes**, es igual al producto de las probabilidades de cada uno de los eventos dados".*

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\,x\,P(B)\Leftrightarrow A\ y\ B\ \text{son eventos independientes}}$$

Lo anterior se denomina "***Regla Multiplicativa para Eventos Independientes"***, pudiéndosela generalizar, suponiendo tres eventos independientes, de la forma:

$$\boxed{P(A\cap B\cap C)=P(A)\ x\ P(B)\ x\ P(C)}$$

Observación:

> ***"**Los **eventos independientes** __NUNCA__ **son mutuamente excluyentes**, ya que éstos **son dependientes".***

Ejemplo

Calcular las probabilidades del problema anterior, pero suponiendo que el experimento se efectúa, **reponiendo el primer repuesto escogido,** antes de extraer el siguiente.

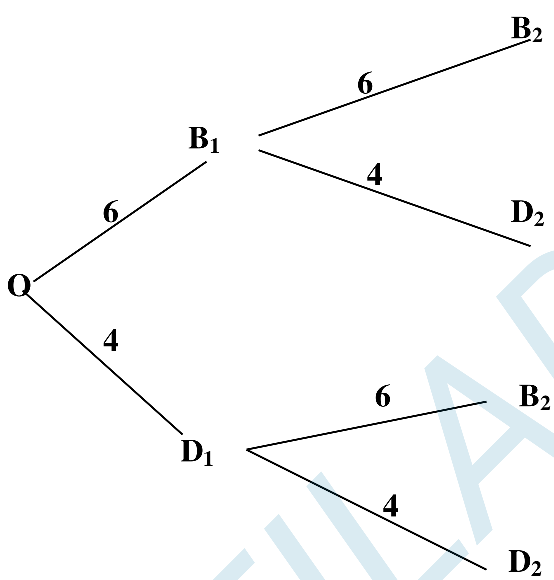
Solución:

Definidos los eventos:

B = "Salida de repuesto Bueno".

D = "Salida de repuesto Defectuoso".

1era. extracción **2da. extracción**



1) P(ambos Buenos) = P(B_1 y B_2)

.

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = P(B_1) \times P(B_2)$$

$$\Downarrow$$

$$= \boxed{\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0{,}36}$$

2) P(sólo un Defectuoso) = P[(B_1 y D_2) o ((D_1 y B_2)]

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap B_2)$$

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1) \times P(D_2/B_1) + P(D_1) \times P(B_2/D_1)$$

$$\Downarrow$$

$$= P(B_1) \times P(D_2) + P(D_1) \times P(B_2)$$

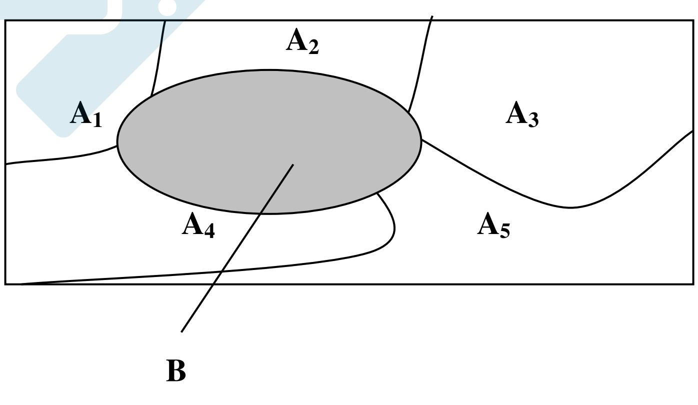
$$\Downarrow$$

$$= \boxed{\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{100} = 0{,}48}$$

REGLA DE BAYES O TEOREMA DE LAS CAUSAS

Generalmente, cuando se efectúa el cálculo de alguna probabilidad, la operación se realiza ***antes*** de la ocurrencia de un cierto acontecimiento aleatorio, dando lugar a lo que se denomina *"Probabilidad a priori"*, en contraposición a los casos en los que el cálculo de las probabilidades, se efectúa ***después*** de la ocurrencia de un cierto acontecimiento aleatorio, dando lugar a lo que se denomina *"Probabilidad a posteriori"*, siendo en estas situaciones aplicables la ***Regla de Bayes o Teorema de las Causas.***

Suponiendo un espacio muestral **S,** formado por **k** eventos mutuamente excluyentes: A_1 , A_2 , ………., A_k **,** que conforman una partición del espacio muestral, y considerando un evento **B,** *que **sólo puede presentarse** por la ocurrencia previa de alguno de los* A_i *eventos mutuamente excluyentes.* Gráficamente:



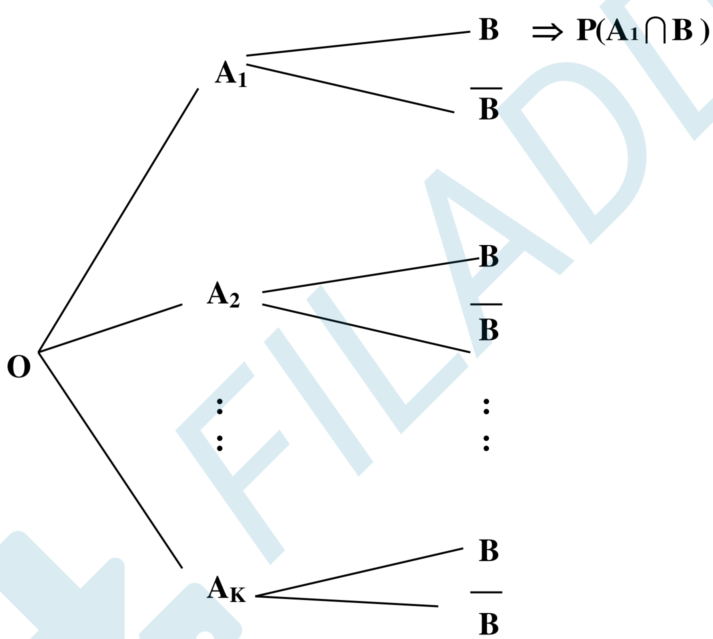
Habiéndose presentado **B** (*a posteriori*), interesa calcular la probabilidad de que el mismo, haya sido generado, por ejemplo por $\mathbf{A_1}$**.** Es decir, debemos calcular la probabilidad condicionada:

$$\mathbf{P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}} \qquad \mathbf{(\ 1\ )}$$

Para poder efectuar el cálculo de una probabilidad *"a posteriori"*, es necesario conocer las probabilidades *"a priori"*:

$$\mathbf{P(A_1) \quad y \quad P(B/A_1)}$$

Aplicando el diagrama arborescente, se tiene:



Se observa que:

$$\mathbf{P(A_1 \cap B\ ) = P(A_1\ ) \times P(B/A_1) \quad (\ 2\ )}$$

Por otra parte, del gráfico se desprende que:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1 \cap B\ ) + P(A_2 \cap B\ ) + \ldots + P(A_k \cap B\ )\ ,}$$

puesto que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ***son*** ***eventos mutuamente excluyentes*.**

Dado que $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P(B/A_i)$, segundo miembro resulta igual a:

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \ldots + P(A_k) \times P(B/A_k)$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B/A_i) \qquad (3)$$

Reemplazando en el numerador y denominador de **(1),** por sus iguales obtenidos en **(2) y (3),** resulta:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B/A_i)}$$

Que es la Fórmula de la Regla de Bayes a aplicar para calcular la probabilidad de que el evento **B** haya sido generado en A_1.

Generalizando:

$$P(A_r/B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_r) \times P(B/A_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B/A_i)}$$

Que es la Fórmula de la Regla de Bayes a aplicar para calcular la probabilidad de que el evento **B** haya sido generado en un evento genérico A_r.

<u>Observación</u>:

En la práctica ***no es necesario recordar la fórmula antes deducida***, puesto que diseñando el diagrama del árbol, puede efectuarse el cálculo ***de la probabilidad a posteriori.***

Ejemplo 1

Tres máquinas $\mathbf{A_1}$ **,** $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$ producen el 50%, 30% y 20% respectivamente del total de artículos en una fábrica. Se sabe por estudios realizados que cada máquina produce artículos defectuosos en el orden del 3%, 4%, y 5% respectivamente. Si se extrae un artículo al azar y resulta defectuoso, calcular la probabilidad de que haya sido elaborado en la máquina:

a) $\mathbf{A_1}$

b) $\mathbf{A_2}$

c) $\mathbf{A_3}$

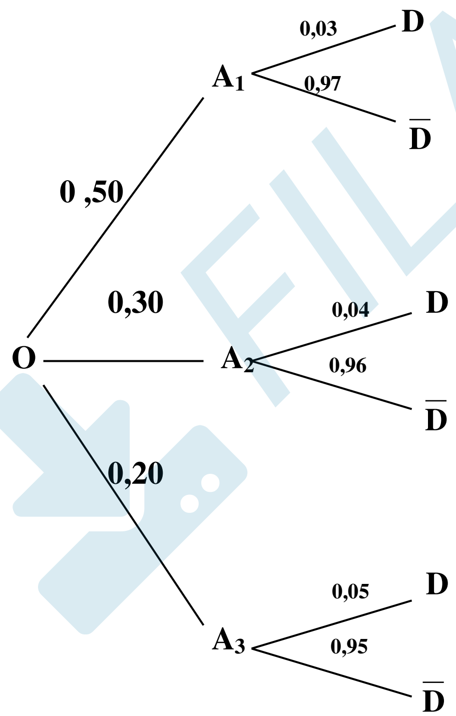
Solución:

Siendo:

D = "Artículo Defectuoso"

$\overline{\mathbf{D}}$ = "Artículo No defectuoso"

El diagrama del árbol responderá a la estructura:



a) $\mathbf{P(A_1/D) = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A_1)xP(D/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\ x\ P(D/A_i)}}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P(A_1/D) =} \frac{0{,}50 \text{ x } 0{,}03}{0{,}50 \text{ x } 0{,}03 + 0{,}30 \text{ x } 0{,}04 + 0{,}20 \text{ x } 0{,}05} = \frac{0{,}015}{0{,}037} = \mathbf{0{,}41}$$

b) $$\mathbf{P(A_2/D) =} \frac{\mathbf{P(A_2 \cap D)}}{\mathbf{P(D)}} = \frac{\mathbf{P(A_2)xP(D/A_2)}}{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{P(A_i) \text{ x } P(D/A_i)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P(A_2/D) =} \frac{0{,}30 \text{ x } 0{,}04}{0{,}50 \text{ x } 0{,}03 + 0{,}30 \text{ x } 0{,}04 + 0{,}20 \text{ x } 0{,}05} = \frac{0{,}012}{0{,}037} = \mathbf{0{,}32}$$

c) $$\mathbf{P(A_3/D) =} \frac{\mathbf{P(A_3 \cap D)}}{\mathbf{P(D)}} = \frac{\mathbf{P(A_3)xP(D/A_3)}}{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{P(A_i) \text{ x } P(D/A_i)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P(A_3/D) =} \frac{0{,}20 \text{ x } 0{,}05}{0{,}50 \text{ x } 0{,}03 + 0{,}30 \text{ x } 0{,}04 + 0{,}20 \text{ x } 0{,}05} = \frac{0{,}01}{0{,}037} = \mathbf{0{,}27}$$

Ejemplo 2

Un empleado puede ir a su lugar de trabajo por dos caminos alternativos: **A y B,** escogiendo el primer camino 7 de cada 10 días de trabajo. De 5 veces que toma el camino **A** llega tarde a su lugar de trabajo una vez, mientras que de 6 veces que toma el camino **B** llega tarde 4 veces. Hoy llegó tarde. Calcular la probabilidad de que haya tomado el camino **B.**

Solución:

Considerando a los eventos:

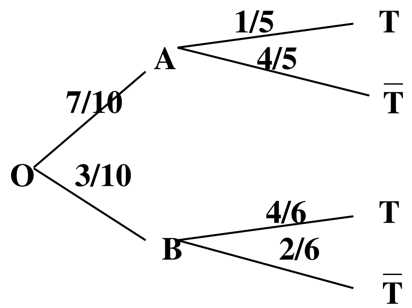
A = “Tomar el camino **A”**

B = “Tomar el camino **B”**

$\mathbf{T}$ = "Llegar tarde"

$\overline{\mathbf{T}}$ = "Llegar a horario"

El diagrama del árbol responderá a la estructura:



La probabilidad buscada es:

$$\mathbf{P(B/T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P(B/T) = \frac{P(B) \text{ x } P(T/B)}{P(A) \text{ x } P(T/A) + P(B) \text{ x } P(T/B)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P(B/T) =} \frac{\frac{3}{10} \text{ x } \frac{4}{6}}{\frac{7}{10} \text{ x } \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \text{ x } \frac{4}{6}} = \frac{0{,}20}{0{,}34} = \mathbf{0{,}5882}$$

Ejemplo 3

Dados los eventos **A** y **B**, siendo: **P(A) = 0,30** y **P(B) = 040**

$\mathbf{P(A \cup B) = ?}$

a) Si **A** y **B** son eventos **independientes**.

b) Si **A** y **B** son eventos **mutuamente excluyentes**.

Solución:

a) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\Downarrow$

Si **A y B son eventos independientes** $\Rightarrow$ $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

$\Downarrow$

$\mathbf{P(A \cup B) = 0{,}30 + 0{,}40 - 0{,}30 \times 0{,}40}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = 0{,}70 - 0{,}12 = \underline{\underline{0{,}58}}}}$$

b) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\Downarrow$

Si **A y B son eventos mutuamente excluyentes** $\Rightarrow$ $\mathbf{P(A \cap B) = P(\ \theta\ ) = 0}$

$\Downarrow$

$\mathbf{P(A \cup B) = 0{,}30 + 0{,}40 - 0}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) \ = \ \underline{\underline{0{,}70}}}}$$

Ejemplo 4

Dados los eventos **A** y **B**, siendo **P(A) = 0,20** y **P(B) = 040,**

Obtener:

a) $\mathbf{P(A/B)}$

b) $\mathbf{P(A \cup B)}$

c) $P(A \cap B)$

Suponiendo que los eventos son:

1) Independientes.
2) Mutuamente Excluyentes.

Solución:

1) Suponiendo que los eventos sean **Independientes:**

a) $\boxed{P(A/B) = P(A) = \underline{\underline{0{,}20}}}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cup B) = 0{,}20 + 0{,}40 - 0{,}20 \times 0{,}40$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A \cup B) = \underline{\underline{0{,}52}}}$$

c) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0{,}20 \times 0{,}40 = \underline{\underline{0{,}08}}}$$

2) Suponiendo que los eventos sean **Mutuamente Excluyentes:**

a) $\boxed{P(A/B) = P(\theta) = 0}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(\theta) = 0$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cup B) = 0{,}20 + 0{,}40$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A \cup B) = \underline{\underline{0{,}60}}}$$

c) $P(A \cap B) = P(\theta)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = \underline{\underline{0}}}$$

Ejemplo 5

En una gran ciudad, se seleccionó una muestra aleatoria de 500 encuestados a los efectos de obtener información diversa respecto al comportamiento de los consumidores. Entre las preguntas formuladas estaba: "Disfruta comprar ropa?". De 240 hombres, 136 respondieron que sí. De las 260 mujeres, 244 respondieron que sí.

a) Construir una tabla de 2 x 2.
b) Dar un ejemplo de evento simple.
c) Dar un ejemplo de evento conjunto.
d) Cuál es el complemento del evento "disfruta comprar ropa"?,
e) Calcular la probabilidad que un encuestado elegido aleatoriamente:

1. Sea hombre.
2. Disfrute comprar ropa.
3. Sea mujer.
4. No disfrute comprar ropa.
5. Sea mujer y disfrute comprar ropa.
6. Sea hombre y no disfrute comprar ropa.
7. Sea un hombre y disfrute comprar ropa.
8. Sea mujer o disfrute comprar ropa.
9. Sea hombre o no disfrute comprar ropa.
10. Disfrute o no disfrute comprar ropa.
11. Si el encuestado elegido es mujer, cuál es la probabilidad que no disfrute comprar ropa?.

12. Si el encuestado elegido disfruta comprar ropa, cuál es la probabilidad que sea hombre?.
13. Si el encuestado elegido no disfruta comprar ropa, cuál es la probabilidad que sea mujer?.
14. Si el encuestado elegido es hombre, cuál es la probabilidad que disfrute comprar ropa?.
15. Disfrutar comprar ropa y el género del individuo, son estadísticamente independientes?. Fundamentar.

Solución:

a) Definidos los eventos:

A = *"Ser hombre".*
B = *"Ser mujer".*
C = *"Sí disfruta".*
D = *"No disfruta".*

Sexo / ***Disfruta***	***Hombre* (A)**	**Mujer (B)**	***TOTAL***
Sí **(C)**	136	244	380
No **(D)**	104	16	120
TOTAL	240	260	500

b) *"Sí disfruta".* $\Rightarrow$ **C**

c) *"Disfruta y es mujer".* $\Rightarrow$ **C** $\cap$ **B**

d) *"No disfruta comprar ropa"* $\Rightarrow$ **C' = D**

e)

1. $P(\mathbf{A}) = \frac{240}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0,48}}}$

2. $P(\mathbf{C}) = \frac{380}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0,76}}}$

3. $P(\mathbf{B}) = \frac{260}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0,52}}}$

4. $P(\mathbf{D}) = \frac{120}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0,24}}}$

5. $P(\mathbf{B\ y\ C}) = P(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \dfrac{244}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}488}}}$

6. $P(\mathbf{A\ y\ D}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D}) = \dfrac{104}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}208}}}$

7. $P(\mathbf{A\ y\ C}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \dfrac{136}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}272}}}$

8. $P(\mathbf{B\ o\ C}) = P(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = P(\mathbf{B}) + P(\mathbf{C}) - P(\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$

$$= \frac{260}{500} + \frac{380}{500} - \frac{244}{500} = \frac{396}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}792}}}$$

9. $P(\mathbf{A\ o\ D}) = P(\mathbf{A} \cup \mathbf{D}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{D}) - P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D})$

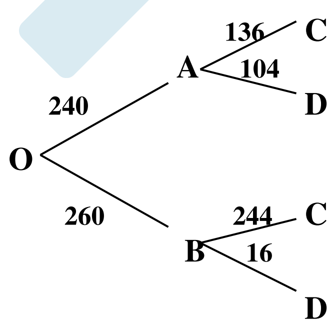
$$= \frac{240}{500} + \frac{120}{500} - \frac{104}{500} = \frac{256}{500} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}512}}}$$

10. $P(\mathbf{C\ o\ D}) = P(\mathbf{C} \cup \mathbf{D}) = P(\mathbf{C}) + P(\mathbf{D}) - \underset{\theta}{\underset{\downarrow}{P(\mathbf{C} \cap \mathbf{D})}}$

$$\mathbf{=}\ \frac{380}{500} + \frac{120}{500} - 0 = \frac{500}{500} = \underset{\text{evento seguro}}{\underset{\Downarrow}{\underline{\underline{\mathbf{1}}}}}$$

11. $P(\mathbf{D/B}) = \dfrac{P(\mathbf{D} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{B})} = \dfrac{\frac{16}{500}}{\frac{260}{500}} = \dfrac{16}{260} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}062}}}$

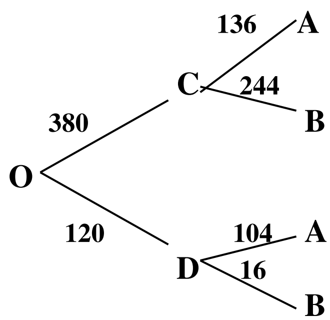
Utilizando un diagrama arborescente, resulta:



$\Rightarrow P(\mathbf{D/B}) = \dfrac{16}{260} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}062}}}$

12. $P(\mathbf{A/C}) = \dfrac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{C})}{P(\mathbf{C})} = \dfrac{\frac{136}{500}}{\frac{380}{500}} = \dfrac{136}{380} = \mathbf{0{,}358}$

Utilizando en diagrama del árbol, resultaría:



$\Rightarrow$ **P (A/C) =** $\dfrac{136}{380} = \mathbf{0{,}358}$

13. $P(\mathbf{B/D}) = \dfrac{P(\mathbf{B} \cap \mathbf{D})}{P(\mathbf{D})} = \dfrac{\frac{16}{500}}{\frac{120}{500}} = \dfrac{16}{120} = \mathbf{0{,}133}$

14. $P(\mathbf{C/A}) = \dfrac{P(\mathbf{C} \cap \mathbf{A})}{P(\mathbf{A})} = \dfrac{\frac{136}{500}}{\frac{240}{500}} = \dfrac{136}{240} = \mathbf{0{,}567}$

15. A y C son independientes $\Leftrightarrow$ P(C/A) = P(C)

$\Downarrow$

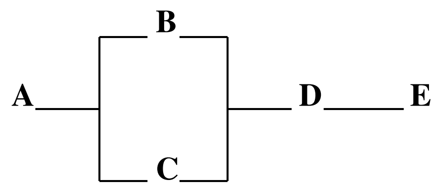
P(C/A) = $\dfrac{136}{240} = \mathbf{0{,}57}$

P(C) = $\dfrac{380}{500} = \mathbf{0{,}76}$

Dado que **P(C/A) $\neq$ P(C)** $\Rightarrow$ el evento: *"disfrutar comprar ropa"* **<u>no es independiente</u>** del evento: *" género del individuo"*.

Ejemplo 6

Un sistema está conectado de la forma:



Siendo el funcionamiento de una componente en particular *independiente de las demás*, con probabilidades de funcionamiento dadas por:

P(**A**) = 0,96 ; P(**B**) = 0,95 ; P(**C**) = 0,94 ; P(**D**) = 0,97 ; P(**E**) = 0.95

Calcular ***la probabilidad de que el sistema funcione***.

Solución:

Sistema ***funciona*** **(F)** $\Leftrightarrow$ **A y (B o C) y D y E**

y $\Rightarrow \cap \Rightarrow$ **multiplicación**
o $\Rightarrow \cup \Rightarrow$ **suma**

$$\mathbf{F = \{ A \cap (B \cup C) \cap D \cap E \} \quad (I)}$$

B y C funcionan en forma **independiente** $\Rightarrow$ $\mathbf{P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)}$

$\Downarrow$

$\mathbf{P(B \cap C) = P(B) \times P(C)} \Rightarrow \mathbf{P(B \cup C)} = 0{,}95 + 0{,}94 - 0{,}95 \times 0{,}94 = \mathbf{0{,}997} \quad \mathbf{(II)}$

Tomando probabilidades en **(I)** $\Rightarrow$ $\mathbf{P(F) = P(A) \times P(B \cup C) \times P(D) \times P(E)}$

$\Downarrow$

$$\mathbf{P(F)} = 0{,}96 \;\mathbf{x}\; 0{,}997 \;\mathbf{x}\; 0{,}97 \;\mathbf{x}\; 0{,}95$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathbf{P(F) = 0{,}8820}}$$