CAPÍTULO

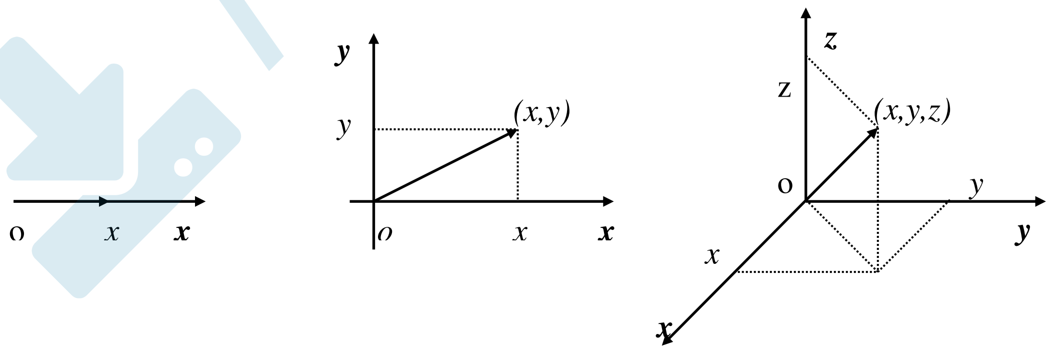
7 Vectores

INTRODUCCIÓN

En Matemática las cantidades correspondientes a ciertas magnitudes quedan determinadas por un número real (escalar) que es su medida con respecto a una determinada unidad.
Ejemplo: la longitud de una varilla, el volumen de un determinado recipiente, etc. Tales magnitudes se llaman **escalares.**
Existen otras cantidades que además de su medida requieren una **dirección** y un **sentido**, tales como las fuerzas, los desplazamientos, las velocidades, etc. Tales magnitudes se llaman vectoriales y sus cantidades se representan por flechas llamadas **vectores.**
En Matemática el estudio de los vectores tiene gran importancia por sus múltiples aplicaciones, en especial a la Física. Este concepto es lo que estudiaremos en el presente capítulo.

EXPRESION CANÓNICA DE UN VECTOR EN $\Re^2$ y $\Re^3$.

Sabemos que la posición de un punto cualquiera de la recta, del plano o del espacio queda determinada si se da un número real, un par de números reales o una terna de números reales, respectivamente llamadas coordenadas.
Pero también puede determinarse la posición de dicho punto dando un vector cuyo extremo sea el punto considerado.
A cada punto del espacio considerado le podemos asociar, entonces un vector con origen en O y extremo en el punto y, recíprocamente, a cada vector con origen en O podemos asociarle el punto de dicho espacio que corresponde a su extremo.



Queda establecida así una biyección entre los puntos del espacio considerado y los vectores con origen en O.

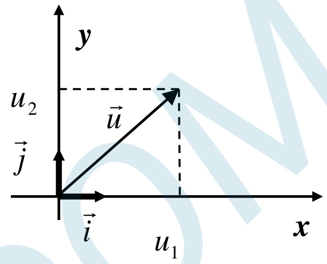
El vector que hacemos corresponder con un punto suele llamarse *vector asociado* al punto o *vector posición* del punto y es la representación geométrica del vector.

VECTORES EN EL PLANO

Definición. Un vector $\vec{u}$ en el plano "*xy*" es un par ordenado de números reales (u_1, u_2). Los números u_1 y u_2 se denomina componentes del vector.

Notación: $\vec{u} = (u_1, u_2)$ **Expresión analítica**

Existen dos vectores especiales en $\Re^2$ el (1,0) que denotamos con el símbolo $\vec{i}$ y el vector (0,1), que denotamos $\vec{j}$. Estos vectores se llaman **vectores canónicos o versores.**



Combinación Lineal

Dados n vectores de $\Re^2$: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ...\vec{v}_n$, y n escalares (números reales) α_1, α_2, α_3,……., α_n, llamaremos combinación lineal de los vectores dados al **vector** dado por:

$$\alpha_1.\vec{v}_1 + \alpha_2.\vec{v}_2 + \alpha_3.\vec{v}_3 + ... + \alpha_n \vec{v}_n$$

Si $\vec{w} = 3.\vec{u} + 5.\vec{v}$ se dice que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Propiedad

Los versores fundamentales gozan de la siguiente propiedad:
Todo vector de $\Re^2$ se escribe de manera única como combinación lineal de los versores fundamentales.
En efecto, sean los vectores:

$$u_1.\vec{i} = u_1.(1,0) = (u_1, 0)$$

$$u_2.\vec{j} = u_2.(0,1) = (0, u_2)$$

Sumando miembro a miembro:

$$u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j} = (u_1; u_2) = \vec{u} \ ,$$

O sea: $\vec{u} = u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j}$ $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{i}, \vec{j}$

A ésta última expresión se llama **expresión cartesiana o canónica** del vector $\vec{u}$.
Los versores fundamentales reciben el nombre de **base canónica de** $\Re^2$.

Módulo o Norma de un vector

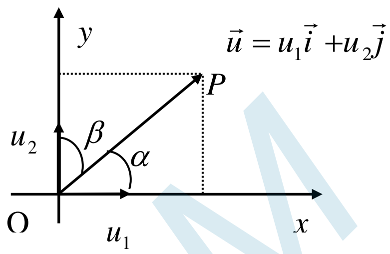
Definición: Es la longitud del segmento orientado que lo representa.

Considerando el vector $\vec{u}$ representado por el vector $\overrightarrow{OP}$ por el Teorema de Pitágoras podemos decir que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva no nula de la suma de los cuadrados de sus componentes.

$$|\vec{u}| = +\sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}} \text{ , es claro que } |\vec{u}| \geq 0 \text{ y si } |\vec{u}| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Vector nulo: es aquel representado por el par ordenado (0,0). Su módulo es cero y no tiene dirección.
Versor o **vector unitario:** es todo vector de módulo uno**.** En consecuencia todo versor define una dirección y un sentido.

Ángulos Directores



La dirección de un vector en $\Re^2$ también está determinada por los ángulos α y β que forma con los semiejes positivos *x* e *y* respectivamente.
La medida de cada uno de estos ángulos se encuentra entre 0 y π inclusive.

Cosenos Directores

Los cosenos directores de un vector son los de sus ángulos directores.
Los cosenos directores son: $\cos\alpha$ y $\cos\beta$, del gráfico como α+β= 90º entonces cos β = senα, por lo tanto:

$$\cos\alpha = \frac{u_1}{|\vec{u}|}, \cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|}$$

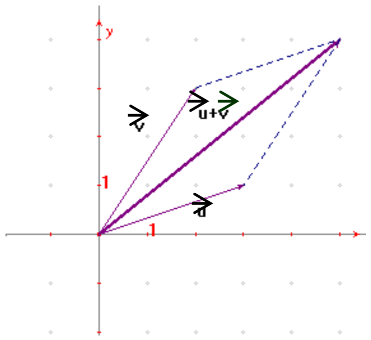
Propiedad: La suma de los cuadrados de los cosenos directores vale 1.

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \dfrac{u_1^{\,2}}{|\vec{u}|^2} \\ \cos^2\beta = \dfrac{u_2^{\,2}}{|\vec{u}|^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

Igualdad de vectores

Dos vectores dados en su expresión analítica
$\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son iguales si y solo si: $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$

Adición de vectores



Para sumar dos vectores en el plano se suman sus componentes correspondientes, obteniéndose como resultado un vector del plano.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Geométricamente, la suma de dos vectores en el plano es la diagonal del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Nota: Podemos considerar a la diferencia de vectores como un caso particular de la adición siendo $\vec{u}$ menos $\vec{v}$ igual a $\vec{u}$ más el opuesto de $\vec{v}$
Es decir: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Producto de un vector por un escalar

Se llama producto de un escalar α (Nº Real) por un vector $\vec{u}$, a otro vector que tiene:

- la misma dirección que el vector $\vec{u}$
- el mismo o distinto sentido que $\vec{u}$, según que α sea positivo o negativo;
- el módulo es igual al producto del valor absoluto de α por el módulo de $\vec{u}$. .

$$\forall \alpha \in \Re, \forall \vec{u} = (u_1, u_2) \in \Re^2 : \alpha.(u_1, u_2) = (\alpha.u_1, \alpha.u_2)$$

Cumple con las propiedades: asociativa mixta, distributiva respecto de la adición de escalares, distributiva respecto a la adición de vectores, elemento neutro.

Ejemplo:

Sea el vector $\vec{u} = (2,-3)$ calcular $\vec{v} = 2.\vec{u}$

Aplicando la definición de multiplicación de un vector por un escalar resulta: $\vec{v} = (4,-6)$

VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

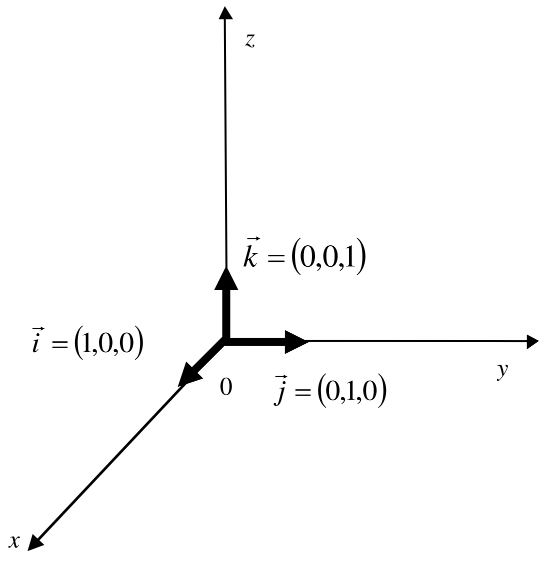
Hemos visto que cualquier punto del plano puede representarse como un par ordenado de números reales (u_1, u_2). De la misma manera, cualquier punto en el espacio $\Re^3$, se puede representar por una terna ordenada de números reales (u_1, u_2, u_3). Un vector en el espacio es una terna ordenada de números reales.

Notación: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ **Expresión analítica**

Consideremos ahora un sistema ortonormal de $\Re^3$ $\{0, x, y, z\}$ donde los ejes son perpendiculares dos a dos.

Llamaremos **versores fundamentales** a los vectores:

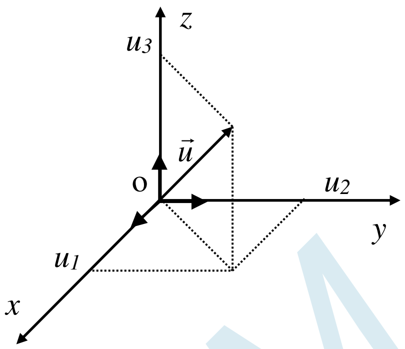
$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, tienen módulo uno y la dirección y el sentido corresponde a cada uno de los semiejes positivos.



Todo vector de $\Re^3$ se escribe de manera única como combinación lineal de los versores fundamentales.

En efecto, sean los vectores:

$$u_1.\vec{i} = u_1.(1,0,0) = (u_1,0,0)$$
$$u_2.\vec{j} = u_2.(0,1,0) = (0,u_2,0)$$
$$u_3.\vec{k} = u_3.(0,0,1) = (0,0,u_3)$$



Sumando miembro a miembro:

$$u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j} + u_3.\vec{k} = (u_1;u_2;u_3) = \vec{u}$$

O sea: $\vec{u} = u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j} + u_3.\vec{k}$ $\quad$ $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

A expresión se llama **expresión cartesiana o canónica** del vector $\vec{u}$.

Los versores fundamentales reciben el nombre de **base canónica de** $\Re^3$, más adelante veremos el concepto de base.

Modulo o Norma de un vector

Sea $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, se puede demostrar que: $|\vec{u}| = +\sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2}}$

Ángulos y Cosenos Directores

La dirección y el sentido de un vector de $\Re^3$ quedan determinados por los llamados **ángulos directores** y en modo especial por los **cosenos directores** que son los cosenos de dichos ángulos.
Los ángulos directores son aquellos ángulos que determinan los semiejes positivos de un sistema cartesiano con el vector posición. (Es aquel que se considera con origen en el origen de coordenadas).

$$\cos\alpha = \frac{u_1}{|\vec{u}|}; \qquad \cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{u_3}{|\vec{u}|} \qquad (1)$$

Los cosenos directores son proporcionales a las componentes del vector. Despejando $|\vec{u}|$ e igualando resulta:

$$\frac{u_1}{\cos\alpha} = \frac{u_2}{\cos\beta} = \frac{u_3}{\cos\gamma}$$

Los tres números que representan a los cosenos directores definen una dirección y un sentido, que deben cumplir con la siguiente **relación fundamental**:
Elevando al cuadrado las igualdades (1) y sumando miembro a miembro resulta:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{u_1^{\ 2}}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_2^{\ 2}}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_3^{\ 2}}{|\vec{u}|^2} = \frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \textit{Relación Fundamental}$$

Nota: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\vec{u}|^2$ pues la suma de los cuadrados de las aristas de un paralelepípedo rectángulo que concurren en un vértice, es igual al cuadrado de la diagonal.

Coeficientes Directores

Se llama así a todo terna de números reales que resulten proporcionales a los cosenos directores.
El par (u_1, u_2, u_3) es una terna de coeficientes directores si verifica:

$$u_1 = k\cos\alpha$$
$$u_2 = k\cos\beta \qquad \text{Despejando k e igualando resulta:}$$
$$u_3 = k\cos\gamma$$

$$\frac{u_1}{\cos\alpha} = \frac{u_2}{\cos\beta} = \frac{u_2}{\cos\gamma}$$

Las mismas componentes de un vector son un caso particular de coeficientes directores.
Si $|\vec{u}|$ =1, las componentes de $\vec{u}$ son los cosenos directores.

Calculo de las Componentes

Hemos dicho que los cosenos directores definen una dirección y un sentido, pero si se conoce también el módulo, se puede calcular las componentes del vector.
Ejemplo:

Sean: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\quad \cos\beta = \frac{1}{3}$; $\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{23}}{6}$ y $|\vec{u}| = 5$

Verificamos previamente que se cumple la relación fundamental de los cosenos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{23}{36} = \frac{9+4+23}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= |\vec{u}|\cos\alpha = 5.\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ u_2 &= |\vec{u}|\cos\beta = 5.\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ u_3 &= |\vec{u}|\cos\gamma = 5.\frac{\sqrt{23}}{6} = \frac{5\sqrt{23}}{6} \end{aligned}\right\} \vec{u} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5\sqrt{23}}{6}\right)$$

Igualdad de vectores

Dos vectores dados en su expresión analítica
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son iguales si y solo si: $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.

Adición de vectores

Para sumar dos vectores en $\Re^3$ se suman sus componentes correspondientes, obteniéndose como resultado otro vector de $\Re^3$

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}/\vec{w}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$
El conjunto de vectores de $\Re^3$ con la adición cumple las mismas propiedades que en $\Re^2$, o sea que se puede demostrar que ($\Re^3$, +) tiene estructura de grupo abeliano. El elemento neutro es el vector nulo $\vec{0}=(0,0,0)$ y el opuesto de un vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$es $-\vec{u}=(-u_1,-u_2,-u_3)$

Producto de un vector por un escalar

En forma análoga a lo definido en $\Re^2$ se define la multiplicación de un escalar por un vector en $\Re^3$

$$\forall\alpha\in\Re,\forall\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in\Re^3:\alpha.(u_1,u_2,u_3)=(\alpha.u_1,\alpha.u_2,\alpha.u_3)$$

Cumple con las propiedades: asociativa mixta, distributiva respecto de la adición de escalares, distributiva respecto a la adición de vectores, elemento neutro.

VECTORES EN EL ESPACIO n-DIMENSIONAL

Utilizando como modelo los vectores en $\Re^2$ y en $\Re^3$ extenderemos el análisis al espacio n-dimensional.
Llamamos vector n-dimensional a una n-upla de números reales $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,........u_n)$
Cuando "n" es mayor que tres, se pierde toda intuición geométrica y se efectúan los razonamientos únicamente en forma algebraica.
Base canónica: $\{e_1,e_2,e_3,....e_n\}$
Expresión canónica: $\vec{u}=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3+......u_ne_n$
Módulo o Norma: Sea $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,........u_n)$entonces $|\vec{u}|=+\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2+.........+{u_n}^2}$
El **vector nulo** queda definido por $\vec{0}=(0,0,0,.....,0)$ con sus n componentes iguales a cero.

Igualdad de vectores
Dados $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,.........u_n)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3,.........v_n)$ son iguales si y solo si:
$u_1=v_1$, $u_2=v_2$, $u_3=v_3$, ………., $u_n=v_n$
Adición de vectores

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,.........,u_n)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3,.........v_n)$.
Se define $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}/\vec{w}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...........,u_n+v_n)$
($\Re^n$, +) tiene estructura de grupo abeliano. El elemento neutro es el vector nulo $\vec{0}$ y el opuesto de un vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,.........u_n)$ es $-\vec{u}=(-u_1,-u_2,-u_3,.........,-u_n)$.

Producto de un vector por un escalar

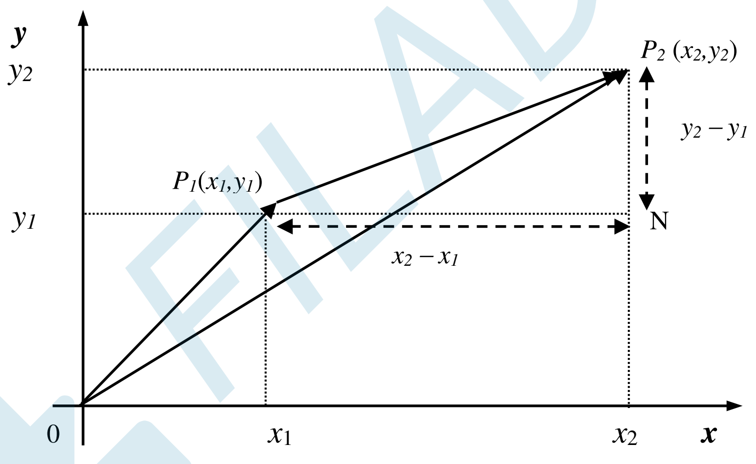
En forma análoga a lo definido en $\Re^2$ y $\Re^3$ se define la multiplicación de un escalar por un vector en $\Re^n$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) \in \Re^n : \alpha.(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) = (\alpha.u_1, \alpha.u_2, \alpha.u_3, \ldots \alpha.u_n)$$

Cumple con las propiedades: asociativa mixta, distributiva respecto de la adición de escalares, distributiva respecto a la adición de vectores, elemento neutro.

VECTOR DETERMINADO POR DOS PUNTOS CUALESQUIERA

El estudio de los vectores se puede hacer mediante la representación **geométrica** o bien mediante la representación **analítica,** que es lo que trataremos de determinar.
Para ello consideraremos un sistema de coordenadas rectangulares en el plano $\Re^2$.
El punto P_1 determina el $\vec{OP_1} = (x_1, y_1)$, el punto P_2 determina el $\vec{OP_2} = (x_2, y_2)$.
Como $\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2}$ resulta que $\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$
de donde resulta que: $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1)$



Siendo los números $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$ las **componentes** del vector cuando se conocen las coordenadas del origen y del extremo.

Distancia entre dos Puntos

En $\Re^2$, siendo $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ la distancia entre P_1 y P_2 es el módulo de $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En $\Re^3$ sea: $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ el módulo está dado por:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Esta última es la expresión analítica de la **distancia entre dos puntos** del espacio.

Ejemplo:

Dados los puntos P_1 (2, 1, 3), P_2 (2, 1, 0) y P_3 (0, 1, 3) determinar

a) el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2-2, 1-1, 0-3) \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,-3)$$

b) el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

PARALELISMO ENTRE VECTORES

Dos vectores son paralelos si sus componentes homólogas son proporcionales.
En símbolos si: $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \lambda.\vec{v}$
Considerando sus componentes:
En $\Re^2$ si $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$ es:
$(u_1; u_2) = (\lambda.v_1; \lambda.v_2)$ para que se verifique esta igualdad debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \lambda.v_1 \therefore \lambda = \dfrac{u_1}{v_1} \\ u_2 = \lambda.v_2 \therefore \lambda = \dfrac{u_2}{v_2} \end{array}\right\} \quad \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Luego: dos vectores son paralelos si y solo si sus **componentes homólogas son proporcionales.**

En $\Re^3$ se verifica: $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_3}{v_3}$

En $\Re^n$ se verifica: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = ... = \frac{u_n}{v_n}$

Ejercicio:

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, verificar si los vectores son paralelos siendo: $\vec{u} = (3;-1;2)$ $\quad \vec{v} = (-6;2;-4)$

PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO

El producto escalar o producto punto de dos vectores puede definirse para un par de vectores de $\Re$ o un par de vectores de $\Re^2$ de $\Re^3$ o $\Re^n$

Definición I: Se llama producto escalar o producto punto de dos vectores al número que se obtiene de sumar los productos de las componentes homólogas de los vectores dados.
Se indica: $\vec{u} \bullet \vec{v}$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Observar que el producto punto entre dos vectores da por resultado un **número.** (Esto es por lo que en ocasiones $u \bullet v$ se denomina producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

Ejemplo:
$\vec{u} = (-2;1;4)$ $\quad \vec{v} = (3;-1;-2)$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = (-2).3 + 1.(-1) + 4.(-2) = -6 - 1 - 4 = -15$

Daremos una segunda definición de producto escalar o producto punto y se puede demostrar que es equivalente a la primera.

Definición II: Se llama producto escalar o producto punto de dos vectores al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que ellos determinan.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\omega$$

Siendo ω el ángulo convexo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al considerarlos aplicados en un mismo punto.

Ejemplo: Hallar el producto punto de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ siendo $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 4; (\vec{u},\vec{v}) = 30º$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 5.4.\cos 30º = 20.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10.\sqrt{3}$

Nota: Como los módulos de los vectores son números positivos, el signo del producto punto depende del ángulo. Si es agudo es positivo, si es recto es nulo y si es obtuso es negativo.

Propiedades del producto punto

El producto punto cumple las siguientes propiedades fundamentales
P_1: $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ Conmutativa
P_2: $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ Distributiva con respecto a la suma de vectores.
P_3: $\alpha.(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (\alpha.\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\alpha.\vec{v})$ Asociativa combinada
P_4: $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$ Si $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{0}|$
Mediante la expresión analítica de un vector se pueden demostrar todas las propiedades anteriores.

ÁNGULOS ENTRE DOS VECTORES

La fórmula del producto punto en forma geométrica permite calcular el ángulo entre dos vectores si se conoce el producto escalar y los módulos.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\omega \therefore \cos\omega = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Yen función de sus componentes será:

$$\cos\omega = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Casos particulares

Si los vectores son paralelos el ángulo que forman es de 0º y como cos0º =1 resulta:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

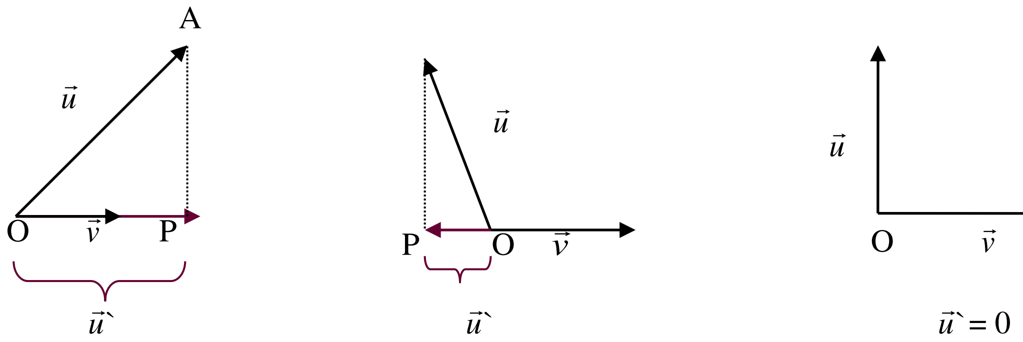
Si $\vec{u} = \vec{v}$ la igualdad anterior queda: $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2$
Se expresa: El producto punto de un vector por si mismo es igual al producto de sus módulos.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD

Si los vectores son perpendiculares el producto punto de acuerdo a la fórmula:
$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\omega$,es igual a cero, pues cos 90º = 0. Luego:
$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. En función de sus componentes se tiene:
$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE OTRO

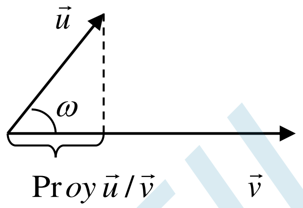
Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ y tomando con el mismo origen. Si por el extremo de $\vec{u}$ se traza una perpendicular a la recta sostén de $\vec{v}$, queda determinado un punto P. El origen O y P determinan un vector que se llama vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



Vector proyección $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \vec{u}`$
En el primer ejemplo $\vec{u}`$ y $\vec{v}$ tienen igual sentido.
En el segundo ejemplo $\vec{u}`$ y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos.
En el tercer caso $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen direcciones perpendiculares, en consecuencia $\vec{u}` = 0$.
Al número u´ se lo llama proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y se indica: $\mathrm{Pr}oy\,\vec{u}/\vec{v} = u´ \in \Re$.
Nota: Tener en cuenta que el **vector proyección** es un vector $\vec{u}`$ y la proyección es un número real u´.

Interpretación geométrica del producto punto

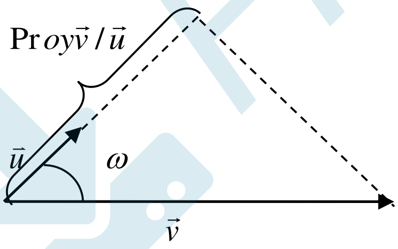
La **proyección** de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$ es igual al módulo del vector $\vec{u}$ por el coseno del ángulo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Teniendo en cuenta la figura resulta:



En el triángulo la hipotenusa es $|\vec{u}|$

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{Pr}oy\,\vec{u}/\vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\omega = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\frac{\mathrm{Pr}oy\,\vec{u}/\vec{v}}{|\vec{u}|} = |\vec{v}|.\mathrm{Pr}oy\,\vec{u}/\vec{v}$$



En el triángulo la hipotenusa es $|\vec{v}|$

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{Pr}oy\,\vec{v}/\vec{u}}{|\vec{v}|}$$

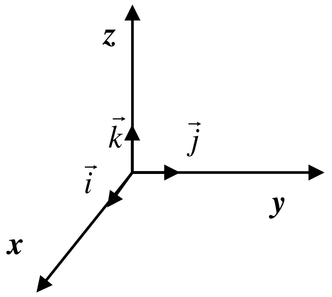
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\omega = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\frac{\mathrm{Pr}oy\,\vec{v}/\vec{u}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|.\mathrm{Pr}oy\vec{v}/\vec{u}$$

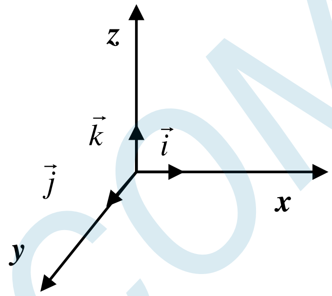
Se infiere: el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno cualquiera de ellos por la proyección del otro sobre la dirección del primero.

Observación: $\mathrm{Pr}oy\,\vec{u}/\vec{v}$: Proyección de $\vec{u}$ sobre la dirección de $\vec{v}$
$\mathrm{Pr}oy\,\vec{v}/\vec{u}$: Proyección de $\vec{v}$ sobre la dirección de $\vec{u}$

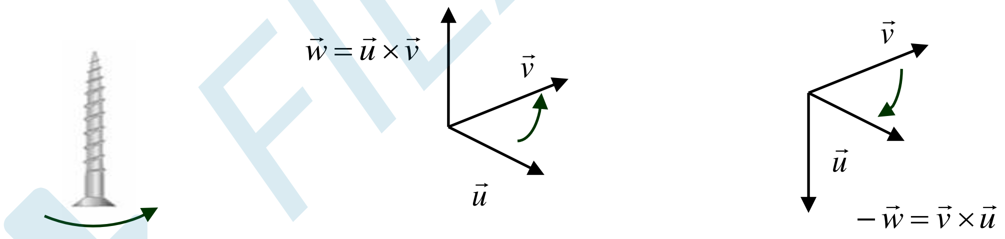
PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ

Antes de considerar esta nueva operación entre vectores de $\Re^3$ analizaremos las posibles orientaciones de un sistema de ejes en el espacio tridimensional. Es fácil ver en la figura que no puede llevarse uno de esos triedros sobre el otro de manera que coincidan el origen y los semiejes positivos del mismo nombre. Se dice que esos triedros tienen distinta orientación. En efecto: Si logramos hacer coincidir los semiejes positivos de las "***x***" y de las "***y***" ocurre que los sentidos de los semiejes de las "***z***" son opuestos.





Las operaciones suma de vectores y producto de un real por un vector, son operaciones definidas tanto en $\Re$ como en $\Re^2$ o $\Re^3$.
Definiremos ahora una nueva operación llamada **multiplicación vectorial,** que resulta **definida únicamente en $\Re^3$**
Esta operación hace corresponder a cada par ordenado de vectores $(\vec{u},\vec{v})$ un nuevo vector que se indica $\vec{u}\times\vec{v}$ y que se llama **producto vectorial** o **producto cruz** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (en este orden)
El vector $\vec{u}\times\vec{v}$ tiene un sentido que está dado por el sentido de avance de un tornillo que gira yendo de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.



Otra forma de recordar el sentido del producto vectorial o producto cruz es la regla de la mano derecha, el sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$ es el sentido en el que apunta el dedo pulgar cuando los dedos de la mano derecha están curvados de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.
Es decir, si se coloca la mano derecha extendida con el pulgar separado de los otros cuatro dedos unidos, haciendo coincidir el primer vector de la base, $\vec{i}$, en dirección y sentido, con los cuatro dedos unidos y de modo tal que la palma esté dirigida hacia el segundo vector de la base $\vec{j}$, pueden presentarse dos situaciones distintas:

i) que el dedo pulgar indique el sentido del tercer vector $\vec{k}$, como en le caso de la figura a), en este caso, se dice que se tienen una base, o una terna de vectores, o un triedro positivo, directo, derecho o dextroso.

ii) que el dedo pulgar señale el sentido opuesto al vector $\vec{k}$, como en la figura b), en este caso se llama izquierdo, negativo o inverso.

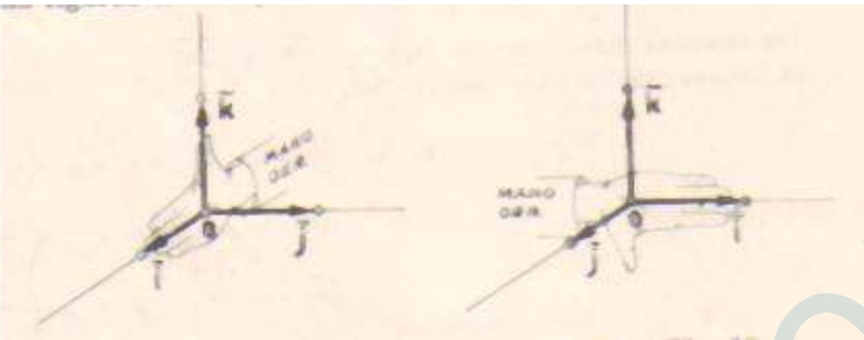


Fig a) Fig b)

Cuando se determina un sistema de ejes cartesianos, el cual se refiere a todo el espacio, se puede decir que se ha fijado una **orientación del espacio** y se habla de espacio derecho o de espacio izquierdo según sea la base del sistema de referencia.

Definición

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en ese orden, se llama producto vectorial o producto cruz de los mismos, a un nuevo vector que se indica $\vec{u}\times\vec{v}$ tal que:

- su **módulo** es igual al producto de los módulos de los vectores dados por el seno del ángulo que forman, s i $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$, entonces: $|\vec{w}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|sen(\vec{u},\vec{v})$.
- la **dirección** es perpendicular al plano determinado por las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- el **sentido** es tal que la terna $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ tengan la misma orientación del espacio.

Propiedades fundamentales

P_1: $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$ Es semiconmutativa.
P_2: Si λ es un escalar: $\lambda.(\vec{u}\times\vec{v})=(\lambda.\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\lambda.\vec{v})$
P_3: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ Distributiva con respecto a la suma de vectores.

Propiedad

Dos vectores no nulos son **colineales** (igual dirección) si y sólo si su producto vectorial es nulo.
En efecto si los vectores no son nulos sus módulos son distintos de cero, en consecuencia para que el producto vectorial tenga módulo cero deben ser cero el seno del ángulo que forman esos vectores. Para que el valor del seno sea cero el ángulo debe ser 0º o 180º. Es decir los vectores tienen que tener igual dirección (ser colineales).

Producto vectorial de los versores

Si multiplicamos vectorialmente los versores de la base canónica obtenemos:

$$\left|\vec{i}\times\vec{i}\right| = \left|\vec{i}\right|.\left|\vec{i}\right|.sen\,0^\circ = \vec{0} \Rightarrow \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$$

$$\left|\vec{i}\times\vec{j}\right| = \left|\vec{i}\right|.\left|\vec{j}\right|.sen\,90^\circ = 1 \Rightarrow \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Por propiedad anticonmutativa $\Rightarrow \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

En resumen:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} & \vec{i}\times\vec{i} = \vec{0} & \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} & \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0} & \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} & \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0} & \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$

Expresión analítica del producto vectorial o producto cruz

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por sus componentes (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) respectivamente, se puede demostrar en base a la expresión cartesiana de los vectores y aplicando las propiedades de producto vectorial dadas anteriormente que la expresión analítica del producto vectorial está dado por:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Una forma de recordar las componentes del vector producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es observar que corresponden al resultado de eliminar la primera, segunda y la tercera columna, respectivamente, de la matriz:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

teniendo siempre cuidado de que a la segunda componente es necesario cambiarle el signo

Otra forma de recordarlo, procedente de la física, es la siguiente:

Si multiplicamos vectorialmente $\vec{u} = u_1.\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ y $\vec{v} = v_1.\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{u}\times\vec{v} = {} & u_1.v_1\vec{i}\times\vec{i} + u_1.v_2\vec{i}\times\vec{j} + u_1.v_3\vec{i}\times\vec{k} + u_2v_1\vec{j}\times\vec{i} + u_2v_2\vec{j}\times\vec{j} + u_2v_3\vec{j}\times\vec{k} \\ & + u_3.v_1.\vec{k}\times\vec{i} + u_3.v_2.\vec{k}\times\vec{j} + u_3.v_3.\vec{k}\times\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = u_1.v_2\vec{i}\times\vec{j} + u_1.v_3\vec{i}\times\vec{k} + u_2v_1\vec{j}\times\vec{i} + u_2v_3\vec{j}\times\vec{k} + +u_3.v_1.\vec{k}\times\vec{i} + u_3.v_2.\vec{k}\times\vec{j}$$

asociando

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3.v_2)\vec{i} + (u_3.v_1.-u_1.v_3)\vec{j} + (u_1.v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} \;-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} \;+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$ Expresión canónica del producto vectorial

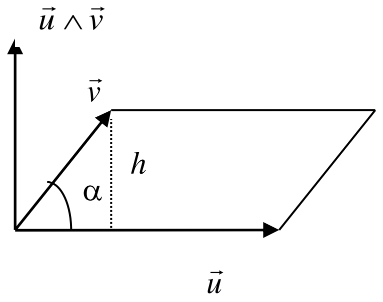
Es decir, el vector $\vec{u}\times\vec{v}$ se obtiene desarrollando "formalmente" el determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

por la primera fila.

Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados dichos vectores.



$$|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|sen\alpha$$

$$sen\alpha=\frac{h}{|\vec{v}|}\Rightarrow h=|\vec{v}|sen\alpha$$

donde h es la altura de paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, resulta $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|.h\Rightarrow$ Área del paralelogramo.

PRODUCTO MIXTO

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, en ese orden, se llama **producto mixto** de los mismos al número $(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}$ y se indica: $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}$$

Aplicando las definiciones de producto vectorial y de producto escalar resulta:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}.w_1 \;-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}.w_2 \;+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.w_3$$

Pero esto es el desarrollo de un determinante de tercer orden por los elementos de la tercera fila, o sea:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

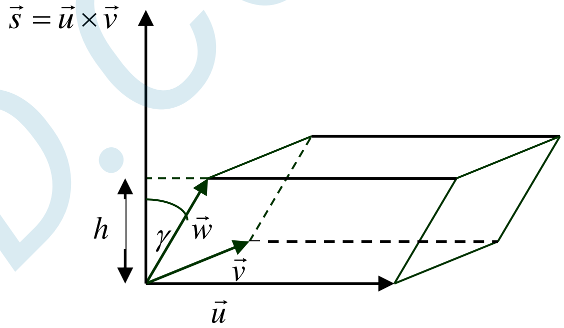
Observación:

En base al desarrollo anterior se prueba que: $(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$

Interpretación geométrica del producto mixto

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores: $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al volumen de un paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

$$V=|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$$



$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{s}$; $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{s}|$ Área del paralelogramo

$(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}=|\vec{s}.\vec{w}|=|\vec{s}|.|\vec{w}|.\cos\gamma=|\vec{s}|.h$

Volumen del paralelepípedo

Propiedad

La condición necesaria y suficiente para que el producto mixto sea 0, es que los tres vectores sean coplanares.

En efecto: Para que el **producto escalar** sea cero deben ser perpendiculares los vectores, o sea $\vec{u}\times\vec{v}$ debe ser perpendicular a $\vec{w}$, entonces $\vec{w}$ está en un plano perpendicular a $\vec{u}\times\vec{v}$, al que también contiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego los tres están incluidos en el mismo plano.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Hemos dicho que cada vector de $\Re^3$ es una combinación lineal única de los versores fundamentales. Esto nos permite escribir para el caso del vector nulo:

$\vec{0}=0.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}$ única forma de expresar el vector $\vec{0}$.

Existen otras ternas que tienen la particularidad de que todo vector de $\Re^3$ es combinación lineal única de ellos y en particular el vector nulo. Por ejemplo:

$\{\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\}$; $\{\vec{i},\vec{j},-\vec{k}\}$;

Pero existen otras ternas que no tienen la misma propiedad. Por ejemplo:

$\{\vec{i},\vec{j},\vec{i}+\vec{j}\}$; En efecto:

$\vec{0}=0.\vec{i}+0.\vec{j}+0.(\vec{i}+\vec{j})$ Pero también existen otras soluciones:

$\vec{0}=1.\vec{i}+1.\vec{j}+(-1).(\vec{i}+\vec{j})$

Es decir que hay ternas que hacen que la ecuación $\vec{0} = \alpha_1.\vec{i} + \alpha_2.\vec{j} + \alpha_3.\vec{k}$ tenga como **única** solución la **trivial** es decir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ y otras que no. De acuerdo a esto se dan las siguientes definiciones:

Definición

Dados tres vectores de $\Re^3$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se dicen que son **linealmente independientes**, si y sólo si la ecuación vectorial $\alpha_1.\vec{u} + \alpha_2.\vec{v} + \alpha_3.\vec{w} = \vec{0}$ admite como única solución la trivial, o sea: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

En el caso que admita otra solución, los vectores se dicen **linealmente dependientes.**

Ejemplo:

Determinar si las siguientes ternas de vectores son linealmente independientes.

$\vec{u}$ = (1,-1,2); $\vec{v}$ = (3,0,-1), $\vec{w}$ = (-2,-1,3)

Solución: Planteando la ecuación vectorial

$$\alpha_1.\vec{u} + \alpha_2.\vec{v} + \alpha_3.\vec{w} = \vec{0}$$

$$\alpha_1.(1,-1,2) + \alpha_2.(3,0,-1) + \alpha_3.(-2,-1,3) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1,-\alpha_1,2\alpha_1) + (3\alpha_2,0,-\alpha_2) + (-\alpha_3,-\alpha_3,3\alpha_3) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3;\ -\alpha_1 + 0 - \alpha_3;\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3) = (0,0,0)$$

Resolver esta ecuación es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & & -\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & -\alpha_2 & +3\alpha_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \\ & 3\alpha_2 & -3\alpha_3 & = & 0 \\ & -7\alpha_2 & +7\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \\ & 3\alpha_2 & -3\alpha_3 & = & 0 \\ & & 0\alpha_3 & = & 0 \end{cases} \text{ Sistema Compatible Indeterminado}$$

Admite infinitas soluciones, en consecuencia son linealmente dependientes.

Ejercicio:

Determinar si las siguientes ternas de vectores son linealmente independientes.

$\vec{u}$ = (1,3,-2); $\vec{v}$ = (-1,0,1), $\vec{w}$ = (2,1,0)

Propiedad

Si tres vectores de $\Re^3$ son linealmente independientes, todo otro vector de $\Re^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores dados.

Nota: Definiciones análogas valen para dos vectores de $\Re^2$.

DIMENSION Y BASE

Nos preguntamos si en $\Re^3$ podemos encontrar un conjunto de más de 3 vectores que sean linealmente independientes, la respuesta es negativa ya que se puede demostrar la siguiente **propiedad**:

"El mayor número de vectores L.I. de $\Re^3$ es tres". Este número se llama dimensión de $\Re^3$.

Toda terna de vectores de $\Re^3$ que sea linealmente independiente se llama **base**.

En forma análoga para $\Re^2$, la **dimensión** es 2 y todo par de vectores L.I. de $\Re^2$ es una **base.**

Las **bases fundamentales o canónicas** son las determinadas por los versores tanto de $\Re^3$ como de $\Re^2$, o sea: $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$; e $\{\vec{i},\vec{j}\}$;

En $\Re$ es decir en el espacio de **una dimensión** todo vector no nulo constituye **una base.**

Caracterización Geométrica de la Dependencia Lineal

Propiedad I:

Dos vectores no nulos son **linealmente dependientes**, si y sólo si son **paralelos**.

En efecto: Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes debe existir α_1 y α_2 uno de ellos al menos no nulo tal que:

$$\alpha_1.\vec{u}+\alpha_2.\vec{v}=\vec{0}\text{, si } \alpha_1 \neq 0 \text{ resulta } \alpha_1.\vec{u}=-\alpha_2.\vec{v} \text{ o sea: } \vec{u}=-\frac{\alpha_2.\vec{v}}{\alpha_1},$$

esto significa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos pues $\vec{u}$ se obtiene de multiplicar por un escalar.

Es fácil ver que la implicación recíproca también se verifica, es decir si son paralelos el vector nulo se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ distinta de la trivial.

Ejemplo:

Determinar si los siguientes vectores son linealmente dependientes.

$\vec{u}$ = (2,3) ; $\vec{v}$ = (-4,6)

Solución: Planteando la ecuación vectorial

$$\alpha_1.\vec{u}+\alpha_2.\vec{v}=\vec{0}$$

$$\alpha_1.(2;-3)+\alpha_2.(-4;6)=(0,0)$$

$$(2.\alpha_1;-3.\alpha_1)+(-4\alpha_2;6.\alpha_2)=(0,0)$$

$$(2.\alpha_1-4.\alpha_2;\ -3.\alpha_1+6.\alpha_2)=(0,0)$$

Resolver esta ecuación es equivalente a resolver el sistema:

$\begin{cases} 2\alpha_1 & -4\alpha_2 & = & 0 \\ -3\alpha_1 & +6\alpha_2 & = & 0 \end{cases}$ cuya solución es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, pero tienen otras soluciones: $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **linealmente dependientes** y son **paralelos.**

Propiedad II:
Tres vectores de $\Re^3$ no nulos son **linealmente dependientes** si y solo si son **coplanares.**

Las propiedades anteriores se pueden expresar mediante la implicación contrarrecíproca.

Propiedad I´:
Dos vectores no nulo son **L.I**. si y solo si **no son paralelos.**

Propiedad II´:
Tres vectores no nulos son **L.I**. si y solo si **no son coplanares.**

Ejercicio:

Dados los vectores $\vec{u}$ = (2,3,-1); $\vec{v}$ = (1,0,2), y $\vec{w}$ = (3,6,-4) determinar si son no coplanares , significa que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ deben ser L.I. es decir la única solución para $\alpha_1.\vec{u} + \alpha_2.\vec{v} + \alpha_3.\vec{w} = \vec{0}$ debe ser la trivial, es decir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.