



## RESUMEN DE FÍSICA I

*Por Federico Cañete*

### Índice

(click para ir a la página)

- Mediciones Físicas.....	Pág. 3
- Óptica Geométrica .....	Pág. 4
❖ Premisas .....	Pág. 4
❖ Espejos .....	Pág. 5
❖ Lentes .....	Pág. 9
- Cinemática del punto .....	Pág. 12
❖ Movimiento rectilíneo .....	Pág. 12
❖ Tiro Oblicuo .....	Pág. 13
❖ Movimiento Circular .....	Pág. 13
- Dinámica del punto .....	Pág. 15
❖ Principios de la dinámica .....	Pág. 15
❖ Tipos de fuerza .....	Pág. 15
- Trabajo y Energía.....	Pág. 18
❖ Trabajo de las fuerzas .....	Pág. 18
❖ Teorema del Trabajo y la Energía.....	Pág. 19
- Potencia Mecánica .....	Pág. 20
- Cinemática y Dinámica de los sistemas de partículas.....	Pág. 20
❖ Centro de masa .....	Pág. 20
❖ Velocidad del centro de masa .....	Pág. 21
❖ Aceleración del centro de masa .....	Pág. 21
❖ Primera Ecuación Universal .....	Pág. 21
- Impulso y Cantidad de Movimiento.....	Pág. 21
❖ Principio de conservación de la cantidad de movimiento .....	Pág. 23

- Choques.....	Pág. 23
❖ Choque Elástico .....	Pág. 23
❖ Choque Inelástico.....	Pág. 24
❖ Choque Plástico.....	Pág. 25
- Momento de una fuerza .....	Pág. 26
- Momento Cinético .....	Pág. 27
❖ Segunda Ecuación Universal .....	Pág. 28
❖ Ley de Conservación del Momento Angular .....	Pág. 28
- Cuerpo Rígido .....	Pág. 28
❖ Tipos de movimientos .....	Pág. 28
❖ Cilindro que rueda sin resbalar .....	Pág. 29
❖ Momento de Inercia.....	Pág. 32
❖ Tabla de momentos de inercia baricéntricos.....	Pág. 33
❖ Relación momento de inercia y momento angular .....	Pág. 33
❖ Segunda Ecuación Universal aplicada al cuerpo rígido.....	Pág. 35
❖ Teorema de Steiner.....	Pág. 35
❖ Radio de giro .....	Pág. 35
❖ Trabajo y Potencia en las rotaciones .....	Pág. 36
❖ Energía Cinética del cuerpo rígido .....	Pág. 36
❖ Estática del cuerpo rígido.....	Pág. 37
❖ Analogías entre el movimiento lineal y el rotacional .....	Pág. 38
❖ Casos de ejercicios .....	Pág. 39
- Movimiento Oscilatorio Armónico.....	Pág. 45
❖ Ecuaciones horarias.....	Pág. 47
❖ Péndulo ideal y Péndulo Físico.....	Pág. 48
❖ Energía del M.O.A. ....	Pág. 49
- Zona de descanso.....	Pág. 50

## Mediciones Físicas

En el proceso de medición intervienen:

- El objeto a medir
- El aparato o instrumento de medición
- El elemento de comparación o unidad
- El observador
- El protocolo de medición

### Clasificación de las mediciones físicas

#### Medición Directa

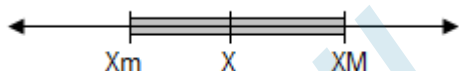
Interacción directa entre el objeto a medir y el instrumento de medición

#### Medición Indirecta

La medición surge de un cálculo matemático entre los valores obtenidos de otras magnitudes

### Indeterminación de una magnitud física

$$X_m < X < X_M$$



$X_m$ : Cota mínima

$X$ : Valor de la magnitud (desconocido)

$X_M$ : Cota Máxima

Intervalo de indeterminación: Intervalo donde se encuentra el verdadero valor de la magnitud medida.

**Valor representativo ( $X_0$ ):** Es el valor más probable de la cantidad medida y se lo toma como punto medio del intervalo de indeterminación

**Indeterminación absoluta o experimental ( $\Delta x$ ):** Es el semiancho del intervalo de indeterminación

Otra forma de expresar la medición:  $X = X_0 \pm \Delta x$

$\Delta x$  es el parámetro que expresa la **exactitud** de la medición, es decir la máxima diferencia absoluta entre el valor representativo y el verdadero valor de la medición. Sus unidades son las mismas que las usadas para  $X_0$ .

**Indeterminación relativa:** Es el parámetro que indica la **precisión** de un resultado, es decir la relación entre la indeterminación absoluta o experimental y la magnitud en sí.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{X_0}$$

Como  $\varepsilon$  no tiene unidades, permite comparar la precisión con la que se efectuaron distintas mediciones, incluso de distintas magnitudes.

## Óptica Geométrica

Premisas: Comportamiento del rayo

- 1) Propagación rectilínea de la luz
- 2) Independencia de los rayos luminosos
- 3) Ley de reflexión: Un rayo incidente sobre una superficie reflectante, será reflejado con un ángulo igual al ángulo de incidencia (respecto de la normal de la superficie)

$$\alpha = \beta$$

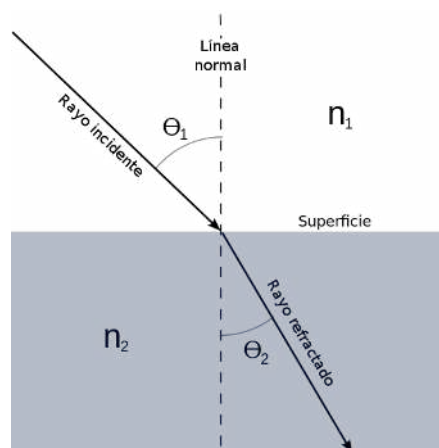


- 4) Ley de refracción: Si un rayo atraviesa la superficie de separación de dos medios transparentes cambia de dirección al propagarse en el nuevo medio.

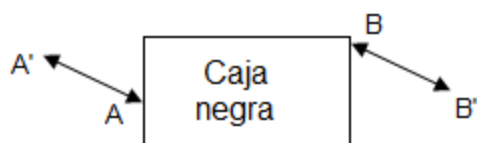
$$\frac{\text{Sen } \theta_1}{\text{Sen } \theta_2} = \text{Cte} = n_{1-2} \text{ (índice de refracción del segundo medio respecto del primero)}$$

↓

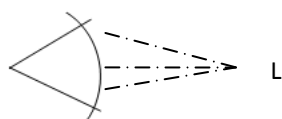
$$\text{Ley de Snell} \rightarrow \frac{\text{Sen } \theta_1}{\text{Sen } \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



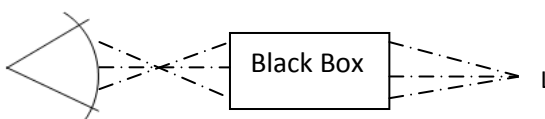
- ❖ Reversibilidad de los caminos ópticos



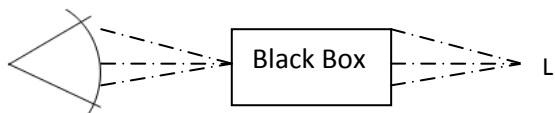
❖ Imágenes ópticas



Directa



Real (los rayos convergen en un punto)

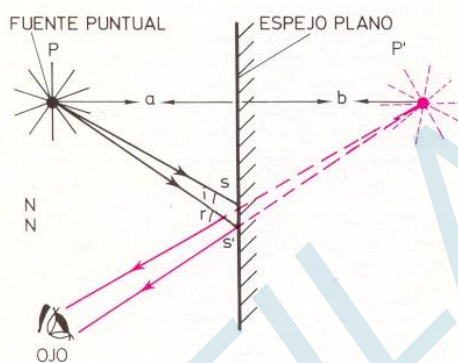


Virtual → Surge de la prolongación de los rayos

Espejos

- ✓ Toda superficie suficientemente pulida que refleja la luz

Espejo Plano



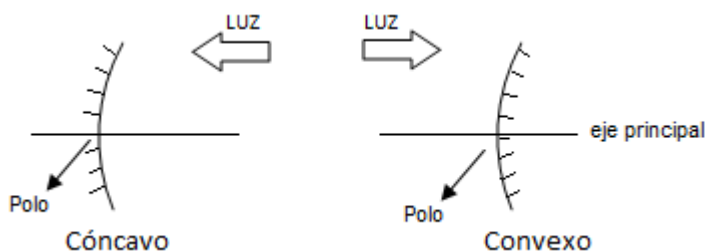
La imagen formada es **simétrica**, porque aparentemente está a la misma distancia del espejo; **virtual**, porque se ve como si estuviera dentro del espejo, no se puede formar sobre una pantalla pero puede ser vista cuando la enfocamos con los ojos; **del mismo tamaño** que el objeto y **derecha**, porque conserva la misma orientación que el objeto.

Espejos esféricos

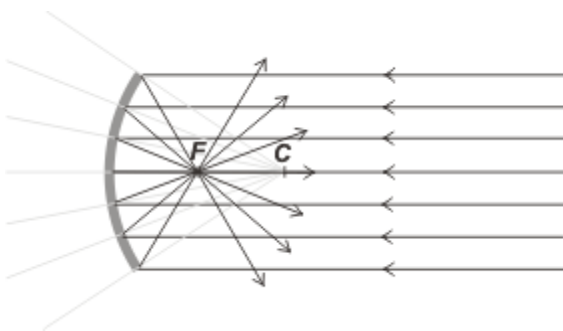
- ❖ **Casquete esférico:** Porción de esfera

❖ **Condiciones:**

- ✓ Las dimensiones del espejo deben ser despreciables comparadas con el radio de la esfera
- ✓ Para idealizarlo como no curvo, los rayos luminosos a estudiar deben incidir en ángulos pequeños respecto del eje del espejo (rayos centrales). *El seno y la tangente de un ángulo menor a  $10^\circ$ , medidos en radianes, tienden a coincidir.*



### Foco del espejo

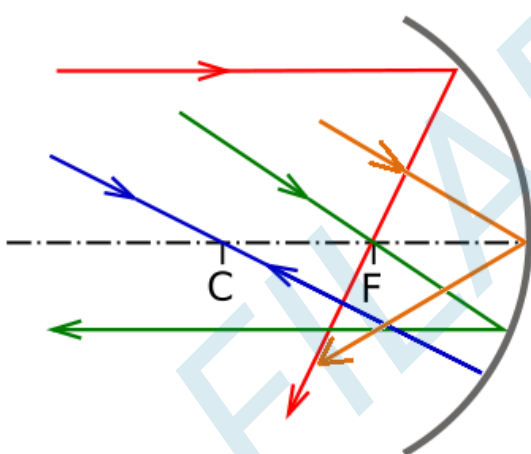


Los rayos paralelos al eje principal (provenientes de una fuente infinitamente lejana) convergen en un punto al reflejarse, el **Foco** principal. Está a la mitad de distancia entre el polo del espejo y el centro de curvatura. Si los rayos fueran paralelos entre sí pero no paralelos al eje, convergerían en focos secundarios, situados en la vertical que pasa por el foco principal.

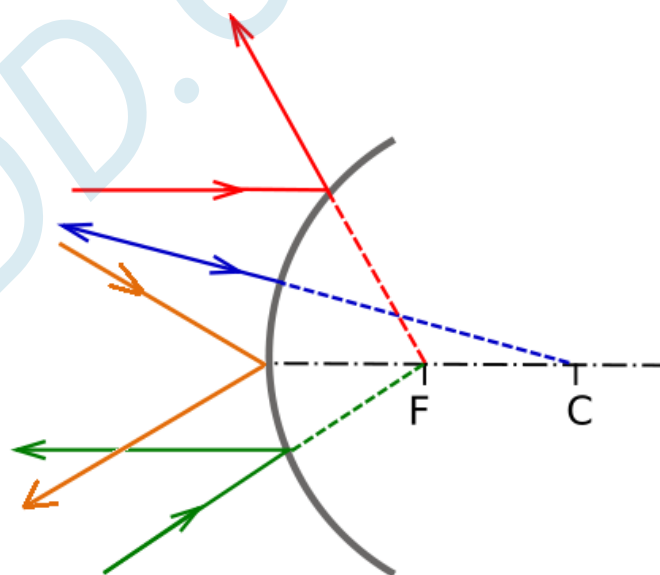
De lo anterior, se tiene que:  $f = R / 2$

Donde R es el radio de curvatura del espejo

### Rayos principales



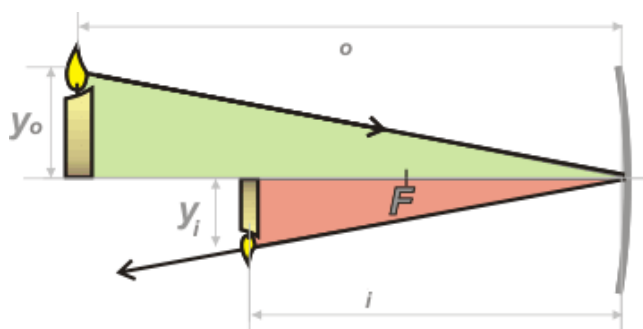
Espejo cóncavo



Espejo convexo

1. (rojo) Todo rayo que incide paralelo al eje principal se refleja pasando por el foco
2. (verde) Por reversibilidad de los caminos ópticos, todo rayo que pase por el foco se refleja paralelo al eje principal
3. (azul) Todo rayo que pase por el centro de curvatura se refleja sobre sí mismo
4. (naranja) Todo rayo incidente al polo se refleja formando el mismo ángulo que el incidente con el eje principal (Ley de Reflexión)

### Fórmula de Descartes para espejos



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

Siendo "o" la distancia entre el objeto y el espejo e "i" la distancia entre el espejo y la imagen formada

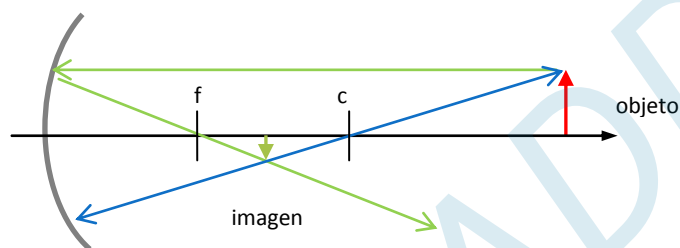
En un sistema de coordenadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}$$

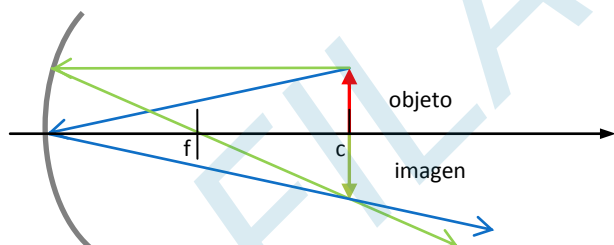
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-x'}{x}$$

### Formación de imágenes

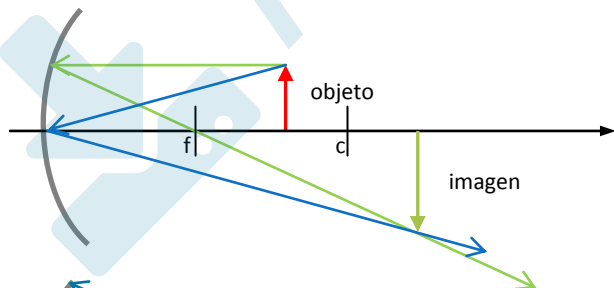
#### Espejos cóncavos



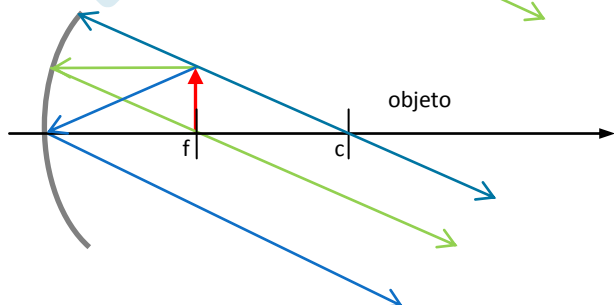
$X > c$  Real, invertida, menor



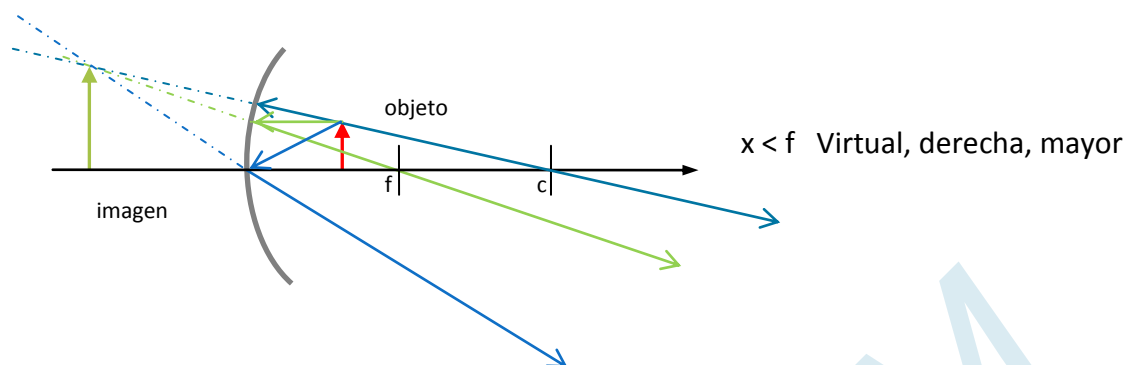
$X = c$  Real, invertida, igual



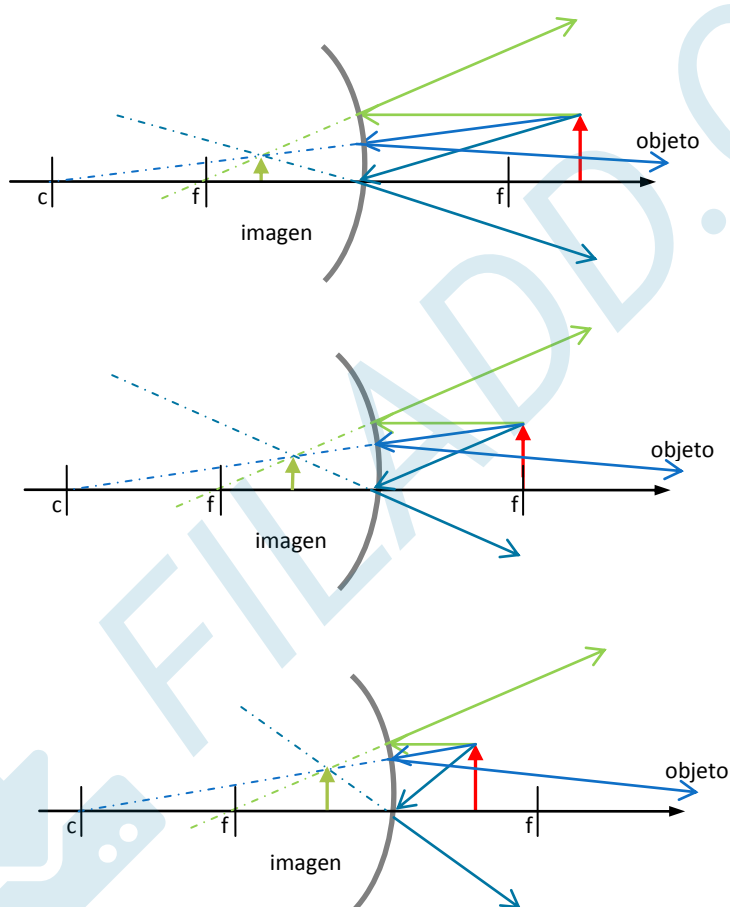
$f < X < c$  Real, invertida, mayor



$x = f$  No existe imagen



### Espejos convexos

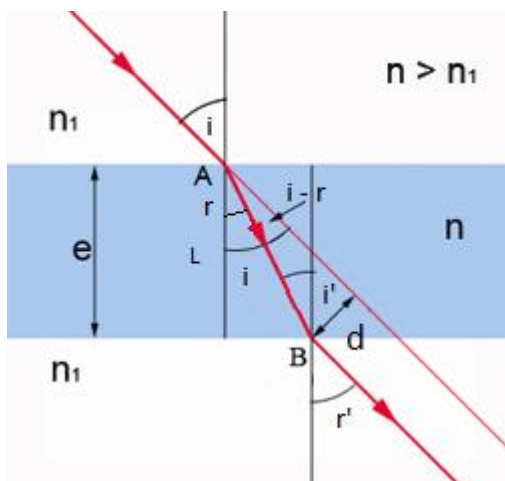


La imagen en espejos convexos siempre es virtual, menor, derecha y está entre el foco y el polo

Dioptra: Superficie que separa dos medios de distinto índice de refracción.



## Lámina de caras paralelas

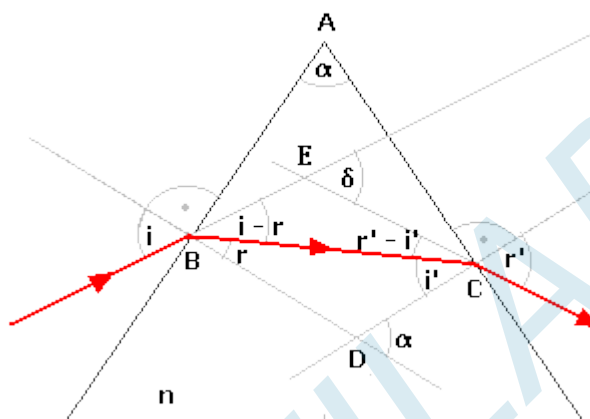


$$d = L \cdot \sin(i - r)$$

$$L = \frac{e}{\cos r}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n_1}$$

## Prisma



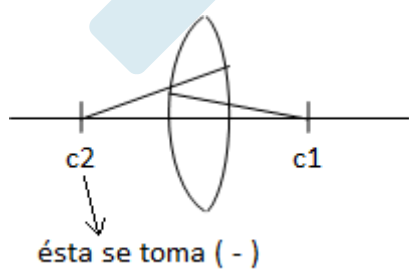
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{n_1}{n_2}$$

## Dioptra esférica

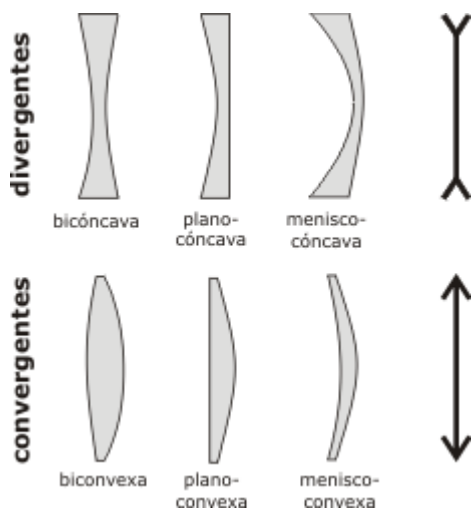
$$\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_2 - n_1}{c}$$

## Lentes delgadas



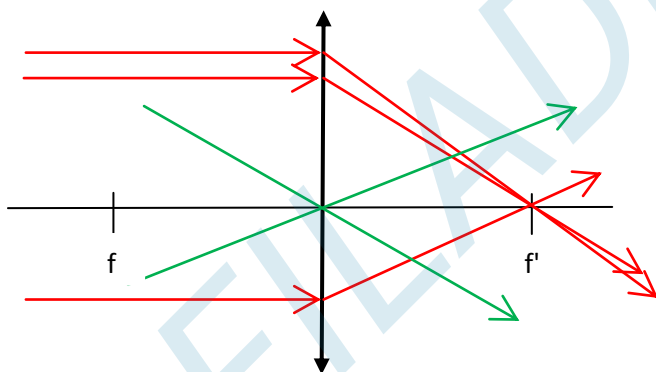
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)$$

## Tipos de lentes

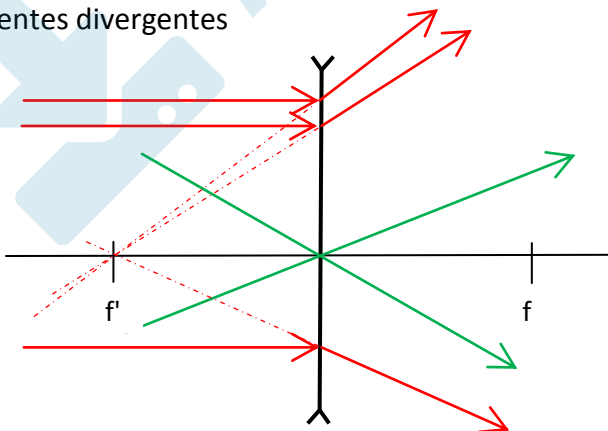


## Rayos principales

### Lentes convergentes



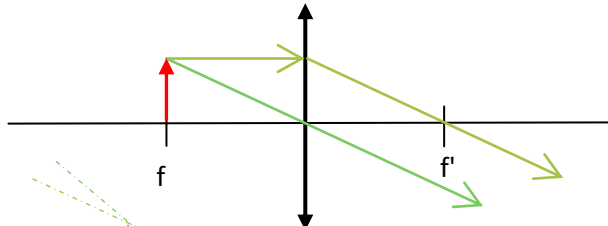
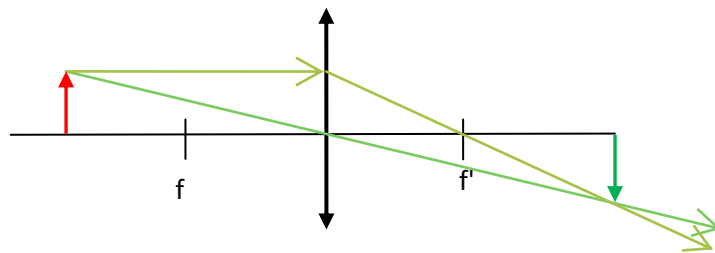
### Lentes divergentes



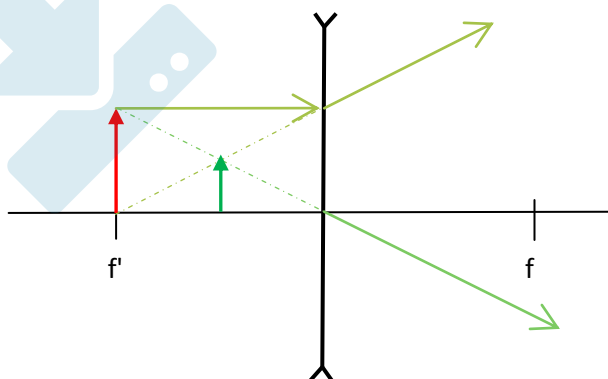
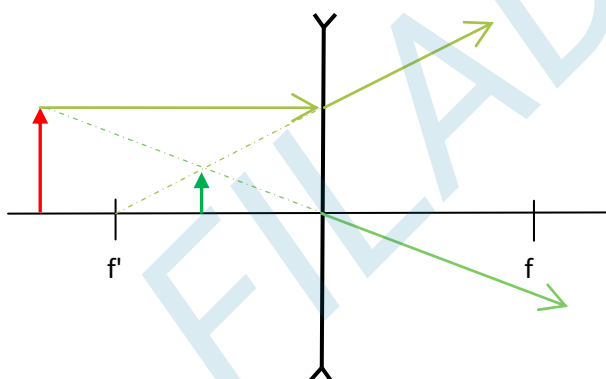
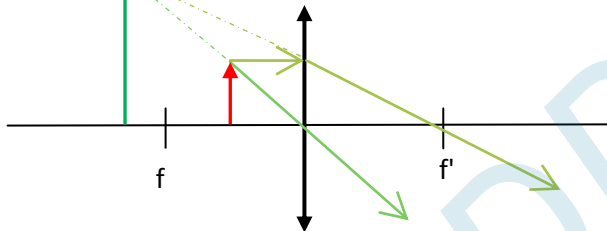
En las lentes divergentes  $f$  es **negativa**

$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'}$
$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$

Formación de imágenes



No existe imagen cuando  $X = f$



Potencia de una lente

$$P = \frac{1}{f} \text{ [dioptrías]}$$

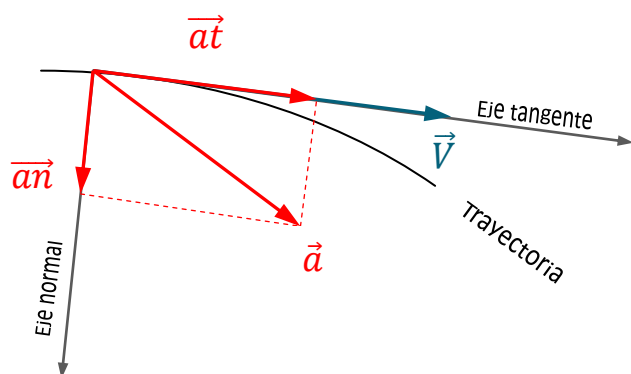
No se pueden obtener imágenes reales en una lente divergente

## Cinemática del punto

**Trayectoria:** Unión / sumatoria de todas las posiciones que tomó el móvil en cierto periodo de tiempo.

**Vector posición:**  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

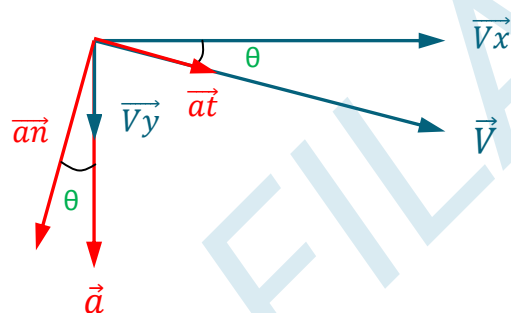
### Componentes intrínsecas de la aceleración



$$\vec{a} = \vec{a_t}\hat{\tau} + \vec{a_n}\hat{\eta}$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL      ACELERACIÓN NORMAL

En un sistema de referencia:



$$a_n = g \cdot \cos \theta$$

$$a_t = g \cdot \sin \theta$$

$$\tan \theta = V_y / V_x$$

## Movimiento Rectilíneo

### Ecuaciones horarias [MRUV]

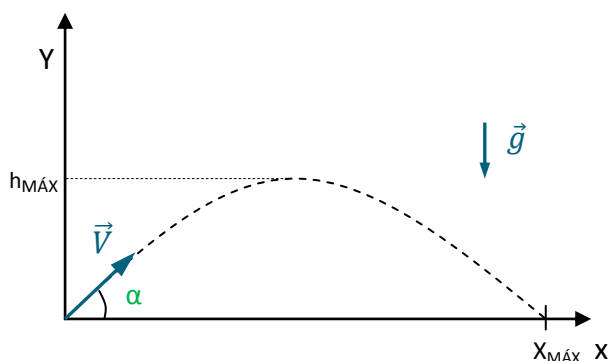
$$X(t) = X_0 + V_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

$$V(t) = V_0 + a \cdot \Delta t$$

Recordar:

$$V(t) = \frac{dx}{dt}; \quad a(t) = \frac{dV}{dt}$$

## Tiro Oblicuo



$$V_x(t) = V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha$$

$$V_y(t) = V_{0y} + g \cdot \Delta t$$

$$x(t) = X_0 + V_x \cdot \Delta t$$

$$y(t) = Y_0 + V_{0y} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \Delta t^2$$

### Fórmulas útiles

#### - Tiro vertical

Altura máxima:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Tiempo de vuelo:

$$t_{\text{vuelo}} = 2 \cdot \frac{v_0}{g}$$

#### - Tiro oblicuo

Altura máxima:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

Tiempo de vuelo:

$$t_{\text{vuelo}} = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

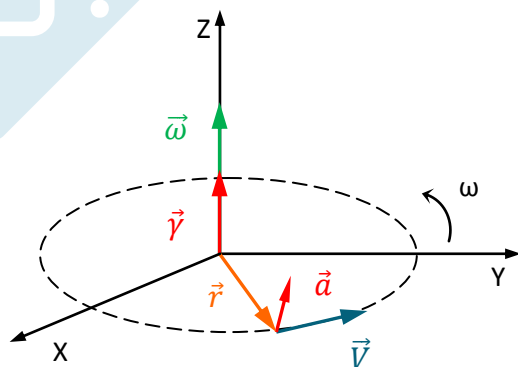
Alcance:

$$X_{\text{máx}} = 2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

## Movimiento circular

Siendo:

$\vec{\omega}$  la velocidad angular [rad/seg];  
 $\vec{\gamma}$  la aceleración angular [rad/seg<sup>2</sup>] y  
 $\vec{r}$  el vector posición (su norma es el radio de la circunferencia)

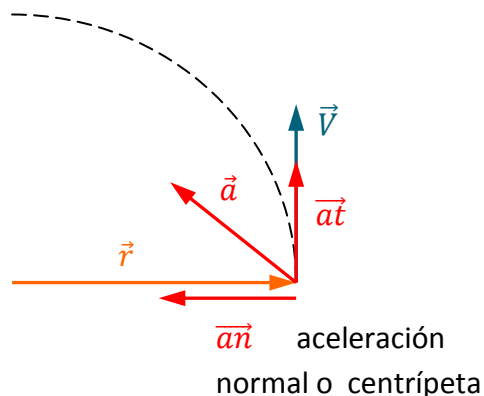


$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

↓  
at

↓  
an



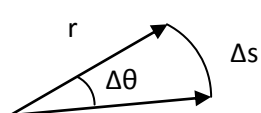
La aceleración tangencial es la que cambia el módulo del vector velocidad y la aceleración normal o centrípeta (que apunta al centro de la circunferencia) es la que hace cambiar el sentido de la velocidad, permitiendo que el móvil describa una trayectoria circular. Incluso si se trata de un MCU, por más que no haya aceleración tangencial, sí hay aceleración centrípeta.

$$|\vec{\omega}| = \frac{v}{r}$$

$$|\vec{a_n}| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

$$|\vec{a_t}| = \gamma \cdot r$$

Arco de circunferencia:



$$\Delta s = r \cdot \Delta \theta$$

Ecuaciones horarias [MCUV]

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \Delta t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma \cdot \Delta t$$

Periodo y frecuencia

**Frecuencia:** La frecuencia mide la cantidad de vueltas que se dan en un período de tiempo.

$$f = \frac{\text{cant. vueltas}}{\text{tiempo}}$$

**Periodo:** El período mide el tiempo que se tarda en dar una vuelta completa y se mide en segundos. Es la inversa de la frecuencia.

$$T = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

## Dinámica del punto

### Principios de la dinámica

- **1<sup>er</sup> Principio o Principio de Inercia (de Galileo)**

Todo cuerpo en reposo o en MRU no cambia su estado si sobre él no actúan fuerzas o su resultante es igual a cero.

- **2<sup>do</sup> Principio o Principio de masa (Newton)**

Si sobre un cuerpo puntual se aplica una fuerza, ésta le imprime una aceleración directamente proporcional al módulo de la fuerza, de igual dirección y sentido; y cuya magnitud depende de la **masa inercial** del cuerpo (capacidad de oponerse a cambiar el estado de movimiento rectilíneo).

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- **3<sup>er</sup> Principio o Principio de acción y reacción (Newton)**

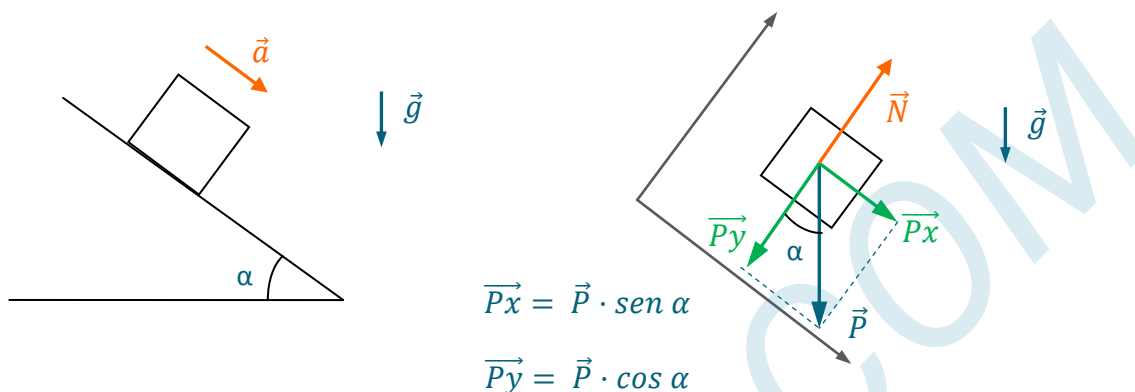
Si sobre un cuerpo puntual se ejerce una fuerza, ésta reacciona con una fuerza igual y contraria. Hay que destacar que, aunque los pares de acción y reacción tengan el mismo valor y sentidos contrarios, **no se anulan** entre sí, puesto que **actúan sobre cuerpos distintos**.

### Algunas definiciones

- ❖ **Sistema inercial**: Sistema de referencia en reposo o con MRU donde se cumplen las leyes de movimiento enunciadas por Newton. Un sistema de referencia no inercial es aquel que tiene aceleración.
- ❖ **Fuerza inercial**: Se llaman fuerzas de inercia (o fuerzas ficticias) a las fuerzas que explican la aceleración aparente de un cuerpo visto desde un sistema de referencia no inercial.

## Plano inclinado y descomposición de fuerzas

- ❖ Para facilitar la descomposición, conviene inclinar el sistema de referencia



## Tipos de fuerzas

### - Fuerza gravitatoria

Según la Ley de Gravitación Universal, los cuerpos, por el simple hecho de tener masa, experimentan una fuerza de atracción hacia otros cuerpos con masa, denominada fuerza gravitatoria o fuerza gravitacional. Su fórmula es la siguiente:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

Donde:

- $G$  es la constante de gravitación universal, y su valor aproximado es:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

- $m_1$  y  $m_2$  son las masas gravitatorias de los cuerpos, que se definen a partir de la capacidad de atracción con otros cuerpos. Cabe destacar que la masa inercial y la masa gravitatoria para un mismo cuerpo coinciden, en número y unidad (aunque no sean la misma cosa), según el Principio de Equivalencia en el modelo de la Mecánica Clásica.
- $d$  la distancia entre los centros de masa de los cuerpos.

### - Fuerza elástica

La fuerza elástica es la ejercida por objetos tales como resortes, que tienen una posición normal, fuera de la cual almacenan energía potencial y ejercen fuerzas. La fuerza elástica es la fuerza que ejerce un resorte que no ha superado su límite de elasticidad y sufre una fuerza que lo deforma temporalmente.

$$F_e = -K \cdot X$$



### - Fuerza de rozamiento

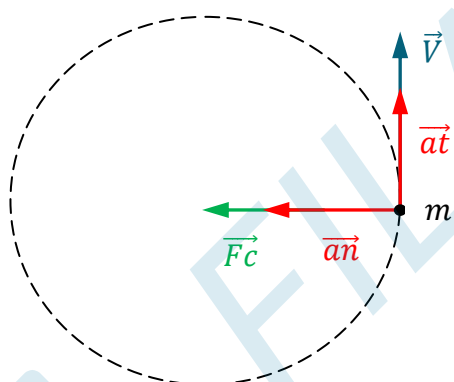
Es toda fuerza opuesta al movimiento, la cual se manifiesta en la superficie de contacto de dos cuerpos siempre que uno de ellos se mueva o tienda a moverse sobre otro. Cuando deja de haber movimiento, desaparece.

$$F_{roz} = \mu \cdot N$$

Pudiendo ser  $\mu$  el coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$  o dinámico  $\mu_d$  (el menor)

*Cuando el cuerpo está en reposo y una fuerza intenta ponerlo en movimiento, la fuerza de rozamiento estático aparece y toma el mismo valor de la fuerza aplicada, siempre y cuando éste sea menor que su valor máximo ( $\mu_e \cdot N$ ), de esta forma no hay movimiento hasta que la fuerza aplicada sea mayor. En ese momento, el rozamiento pasa a ser dinámico y el módulo ésta fuerza de rozamiento es menor que el estático, por lo que comienza a haber movimiento.*

### Fuerzas en el movimiento circular



La fuerza centrípeta es la fuerza dirigida hacia el centro de curvatura, que ejerce una aceleración (normal o centrípeta) en el cuerpo en movimiento (la masa) para que describa una trayectoria circular.

$$\overrightarrow{F_{cent}} = m \cdot \overrightarrow{a_c}$$

$$|\overrightarrow{F_{cent}}| = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

## Trabajo Mecánico

- ✓ Magnitud escalar
- ✓ Producto escalar de dos magnitudes vectoriales

$$dL = \vec{F}_{(r)} \cdot d\vec{r}$$

*Diferencial de trabajo L de la fuerza F es igual al producto escalar de la fuerza en cuestión por el diferencial desplazamiento*

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{r}$$

Si la fuerza es constante:

$$L = |\vec{F}| \cdot |\Delta x| \cdot \cos \alpha$$

### Trabajo de la fuerza peso

- ✓ Sólo depende del desplazamiento vertical:

$$L_p = -P \cdot \Delta h$$

$$L_p = -mg \cdot (h - h_0)$$

$$L_p = -mgh + mgh_0$$

Definiéndose la **energía potencial gravitatoria** como:

$$E_{pg} = m \cdot g \cdot h$$

Luego,

$$L_p = -\Delta E_{pg}$$

### Trabajo de la fuerza elástica

$$L_{Fe} = \frac{1}{2} K \cdot X_A^2 - \frac{1}{2} K \cdot X_B^2$$

Definiéndose la **energía potencial elástica** como:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot X^2$$

Entonces:

$$L_{Fe} = -\Delta E_{pe}$$

*Tip: Si una fuerza es perpendicular al desplazamiento de la misma, el trabajo resultante es **nulo** ( $\cos 90^\circ = 0$ ). Ejemplo: trabajo de la fuerza normal o de vínculo.*

### Fuerzas conservativas y no conservativas

Las fuerzas conservativas son aquellas en las que el trabajo a lo largo de un camino cerrado es nulo. El trabajo depende de los puntos inicial y final y no de la trayectoria. Son fuerzas conservativas la **fuerza peso** y la **fuerza elástica**.

Las fuerzas no conservativas son aquellas en las que el trabajo a lo largo de un camino cerrado es distinto de cero. Estas fuerzas realizan más trabajo cuando el camino es más largo, por lo tanto el trabajo depende de la trayectoria. La **fuerza de rozamiento** es un ejemplo de fuerza no conservativa

### Teorema del trabajo y la energía

Este teorema relaciona el trabajo de las fuerzas resultantes aplicadas a un punto material con la variación de energía del mismo.

Siendo la **energía cinética** de un punto material igual a:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

Según el teorema,

$$L_{res} = \Delta E_C$$

*El trabajo de la fuerza resultante es igual a la variación de energía cinética*

Además, la **energía mecánica** es:

$$E_M = E_C + E_{pe} + E_{pg}$$

También:

$$L_{res} = L_{FC} + L_{FNC}$$

*El trabajo de la fuerza resultante es la suma del trabajo de las fuerzas conservativas y el trabajo de las no conservativas*

De lo anterior se tiene que

$$L_{res} = \Delta E_C = L_{FC} + L_{FNC}$$

$$L_{res} = -\Delta E_P + L_{FNC}$$

$$L_{res} + \Delta E_P = L_{FNC}$$

$$\Delta E_C + \Delta E_P = L_{FNC}$$

$$L_{FNC} = \Delta E_M$$

*El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual  
a la variación de energía mecánica*

*Si sobre el sistema dado actúan sólo fuerzas conservativas → La energía mecánica se conserva*

## Potencia Mecánica

Por definición:

$$P = \frac{dL}{dt} \rightarrow P_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Si la fuerza es constante:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

## Cinemática y Dinámica de los sistemas de partículas

### Centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Con el eje X:

$$X_{CM} = \frac{m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + m_3 \cdot X_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

### Velocidad del centro de masa

$$\overrightarrow{V_{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{V_i}$$

### Aceleración del centro de masa

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{a_i}$$

Expandiendo esta última ecuación, se tiene que:

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{1}{M} \cdot (m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{a_3})$$

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = (m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{a_3})$$

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{F_{\text{exterior resultante}}} = M \cdot \overrightarrow{a_{CM}}$$

**PRIMERA ECUACIÓN UNIVERSAL**

Esta relación indica que el centro de masa de un sistema de puntos materiales se mueve como si todas las masas del sistema estuviesen concentradas en el centro de masa y como si todas las fuerzas exteriores estuviesen aplicadas en ese punto.

## Impulso y Cantidad de Movimiento

Si  $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$ , entonces  $\overrightarrow{F} = m \cdot \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$

Luego

$$\overrightarrow{F} \cdot dt = m \cdot d\overrightarrow{v}$$

Integrando:

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = m \int_{V_0}^V d\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = m \cdot (\vec{V} - \vec{V}_0)$$

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = m\vec{V} - m\vec{V}_0$$

Se define a la **cantidad de movimiento** lineal como

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

Luego

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = \Delta\vec{p}$$

Se denomina **impulso de una fuerza** a la expresión

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{(t)} dt = \vec{J}$$

Por lo tanto

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

*El impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento*

Si la fuerza es constante y resolviendo la integral:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$$

➤ Para un sistema de partículas:

$$\vec{p}_{sis} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i$$

Si

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i$$

Entonces

$$M \cdot \vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i = \vec{p}_{sis}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d(M \cdot \vec{V}_{CM})}{dt} &= \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} \\ M \cdot \vec{a}_{CM} &= \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} \\ \hline \vec{F}_{ext.res} &= \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} \end{aligned}$$

*En un sistema de partículas, la variación de la cantidad de movimiento respecto del tiempo (derivada) es igual a la fuerza exterior resultante*

Esto quiere decir que si en un sistema la fuerza exterior resultante es nula, o bien no hay fuerzas exteriores aplicadas, la cantidad de **movimiento lineal se conserva**, es decir, se mantiene constante (ya que derivada de una constante es cero).

$$\frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{sis} \text{ es constante} \Rightarrow \text{No hay fuerzas exteriores}$$

**PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL**

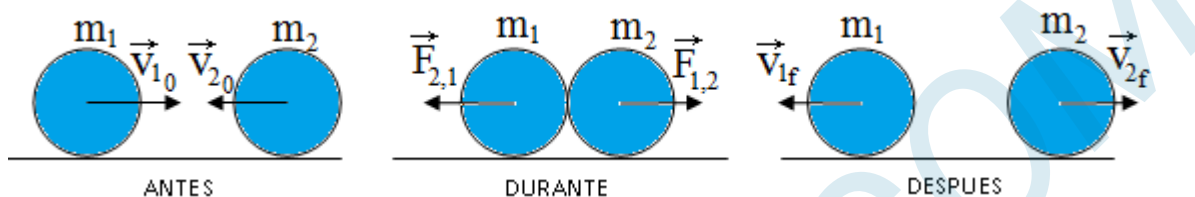
## Choques de partículas

- ✓ En todos los choques se conserva la cantidad de movimiento:  $\Delta \vec{p} = 0$  porque, tomando como un sistema a las partículas que colisionan, las fuerzas que se producen en la interacción entre ellas pueden considerarse interiores. Además, estas fuerzas son muy grandes comparadas con el resto de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos y duran un intervalo de tiempo muy pequeño. Por lo tanto, puede considerarse que el impulso que producen es despreciable durante el choque.

## Choque Elástico

En este tipo de choque, cada cuerpo “rebota” con el otro. La velocidad después del choque es diferente para cada cuerpo. Como no hay deformación, se conserva la energía cinética del sistema.

Ej: Dos bolas de pool



- ✓ Se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento

$$\Delta E_c = 0 ; \vec{p}_0 = \vec{p}_f$$

- ✓ El coeficiente de restitución es igual a 1:  $e = 1$  (Ver más abajo la definición)

Ecuaciones a plantear:

$$m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1' + m_2 \cdot \vec{V}_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \vec{V}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{V}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \vec{V}_2'^2$$

Ordenando y agrupando el sistema:

$$m_1 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_1') = m_2 \cdot (\vec{V}_2' - \vec{V}_2)$$

$$m_1 \cdot (\vec{V}_1^2 - \vec{V}_1'^2) = m_2 \cdot (\vec{V}_2'^2 - \vec{V}_2^2)$$

Operando:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_1' = \vec{V}_2' + \vec{V}_2$$

## Choque Inelástico

A diferencia del choque elástico, si bien los cuerpos “rebotan”, hay una pequeña deformación, por lo tanto no se conserva la energía cinética (parte se transforma en calor)

- ✓  $\vec{p}_0 = \vec{p}_f$





- ✓  $Ec_0 \neq Ec_f$
- ✓ El coeficiente de restitución está dado por la siguiente ecuación:

### Coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución es una medida del grado de conservación de la energía cinética. Relaciona las velocidades antes y después del choque y puede tomar valores entre el 0 y el 1.

$$e = - \frac{|\vec{V}_2' - \vec{V}_1'|}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}$$

### Choque Plástico

Después del choque, ambos cuerpos permanecen pegados, como un solo cuerpo. Por lo tanto comparten la velocidad final:

- ✓  $\vec{V}_1' = \vec{V}_2'$
- ✓  $\vec{p}_0 = \vec{p}_f$
- ✓  $e = 0$
- ✓  $Ec_0 \neq Ec_f$

Ecuación a plantear:

$$m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}_f$$

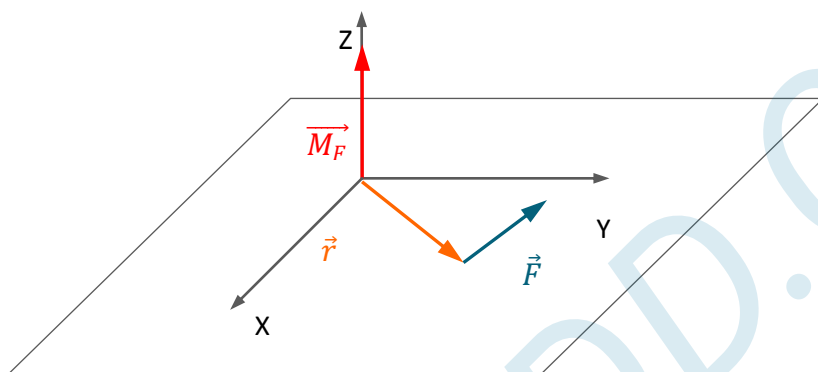
## Momento de una fuerza

Se denomina momento de una fuerza respecto de un punto al producto vectorial entre el vector posición  $\vec{r}$  de la fuerza por el vector fuerza  $\vec{F}$ .

Por tratarse de un producto vectorial, el resultado de esta operación es un vector perpendicular a ambos vectores y con el sentido dado por la **regla de la mano derecha**.

$$\vec{M}_F^o = \vec{r} \times \vec{F}$$

*El momento de la fuerza  $\vec{F}$  respecto de "o" es igual a  $\vec{r}$  vectorial  $\vec{F}$*

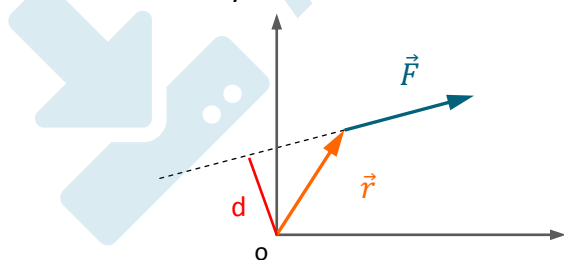


Para calcular su módulo, se usa la fórmula del producto vectorial:

$$|\vec{M}_F^o| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$$

Siendo  $\alpha$  el ángulo entre los vectores si los uniéramos por las bases

**TIP:** Cuando los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  no son perpendiculares, se puede calcular el módulo del momento de la fuerza multiplicando el módulo de la fuerza por la distancia perpendicular entre la recta de acción de la fuerza y el centro de momentos ("o").



$$M_F^o = F \cdot d$$

## Momento Cinético o Momento de la cantidad de movimiento

También llamado **momento angular** o **cantidad de movimiento angular**, se define como:

$$\begin{aligned}\vec{L}_o &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{L}_o &= \vec{r} \times m \cdot \vec{V} \quad (1)\end{aligned}$$

Para un movimiento circular

$$\begin{aligned}\vec{L}_o &= \vec{r} \times m \cdot \vec{V} \\ \vec{L}_o &= r \cdot m \cdot \omega \cdot r \vec{k} \\ \vec{L}_o &= m \cdot r^2 \cdot \omega \vec{k}\end{aligned}$$

Para un punto material

Si derivamos (1) con respecto al tiempo se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_F^o$$

Así como la derivada de la cantidad de movimiento respecto al tiempo es igual a la fuerza resultante aplicada, la derivada del **momento cinético es igual al momento de la fuerza aplicada**.

Para un sistema de puntos materiales

$$\vec{L}_{sis}^o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Que no es más que la sumatoria de los momentos cinéticos de cada partícula.

- Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{sis}^o}{dt} = \sum \vec{M}_{F_{ext}}^o - \vec{V}_o \times \vec{p}_{sis}$$

Ahora, si la velocidad del punto "o" es cero o bien se mueve con una velocidad paralela al del centro de masa, el segundo término se anula. Así se obtiene la segunda ecuación universal:

$$\frac{d\vec{L}_{sis}^o}{dt} = \sum \vec{M}_{F_{ext}}^o$$

#### SEGUNDA ECUACIÓN UNIVERSAL

*En un sistema de partículas, la variación del momento angular respecto del tiempo es igual al momento de la fuerza exterior resultante*

De la anterior expresión se deduce la **Ley de Conservación del Momento Angular**:

Si en un sistema de puntos materiales el momento de la fuerza exterior resultante es nulo, el **momento angular** o la **cantidad de movimiento angular se conserva**.

$$\frac{d\vec{L}_{sis}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{sis} \text{ se conserva} \Rightarrow \text{No hay momentos de fuerzas exteriores}$$

### Cuerpo Rígido

- ❖ **Condición de rigidez**: La distancia entre dos puntos cualesquiera del cuerpo no cambia cuando se le aplican fuerzas o momentos de fuerzas.

#### Tipos de movimientos

##### - Traslación Pura

- ✓ Todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad que el centro de masa

##### - Rotación Pura

- ✓ Los puntos describen circunferencias que tienen centro en el eje de rotación. Todos los puntos comparten la misma velocidad angular, pero difieren en su velocidad tangencial.

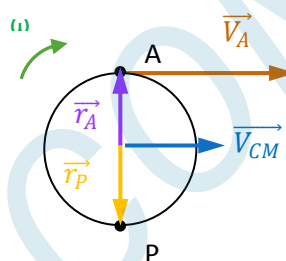
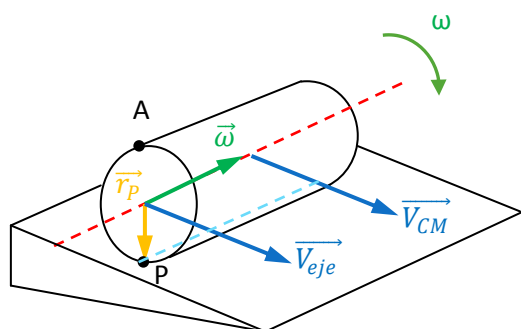
La velocidad de cualquier punto será:  $\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A-eje}$

- Rototraslación:

- ✓ Los puntos giran alrededor del eje de rotación y éste se traslada con una velocidad generalmente perpendicular al vector velocidad angular.

La velocidad de cualquier punto está dada por:  $\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A-eje} + \vec{V}_{eje}$

Ejemplo de movimiento por rodadura: Cilindro que rueda sin resbalar



Supongamos el que el cilindro de la figura rueda sin deslizar por el plano inclinado, gracias a la acción de una fuerza de rozamiento. La velocidad del eje de rotación es paralela al plano inclinado, y ya que éste eje atraviesa el centro de masa (eje baricéntrico), la velocidad de este último coincide con la velocidad del eje.

$$\vec{V}_{eje} = \vec{V}_{CM}$$

**Análisis como rototraslación**

En este movimiento los puntos que componen al cuerpo se mueven alrededor del eje de rotación (punteado rojo), y éste a su vez se traslada paralelo al plano. Por lo tanto, la velocidad del punto "A", por ejemplo, viene dada por:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{eje} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

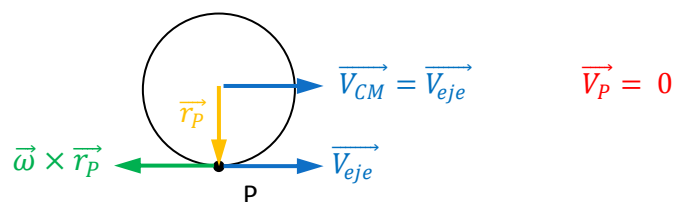
Entonces, lo mismo ocurre para el punto P:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{eje} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

Ahora bien, como el cilindro rueda *sin resbalar*, en el instante en el que el punto P está en contacto con el plano, **su velocidad es nula**. Lo mismo sucede con todos los puntos que están sobre la generatriz de contacto con el plano (punteado celeste), que actúa como **eje instantáneo de rotación** (ver más abajo la explicación). Entonces, si  $\vec{V}_P$  es igual a cero, resulta:

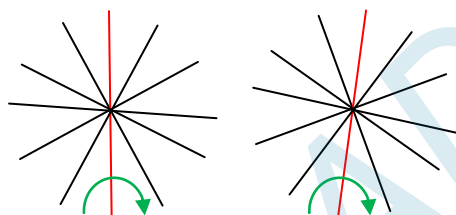
$$\vec{V}_P = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}_P = -\vec{V}_{eje}$$

Graficando los vectores de velocidad, se puede ver por qué la velocidad en P resulta cero:



### Análisis como rotación pura (rotación instantánea)

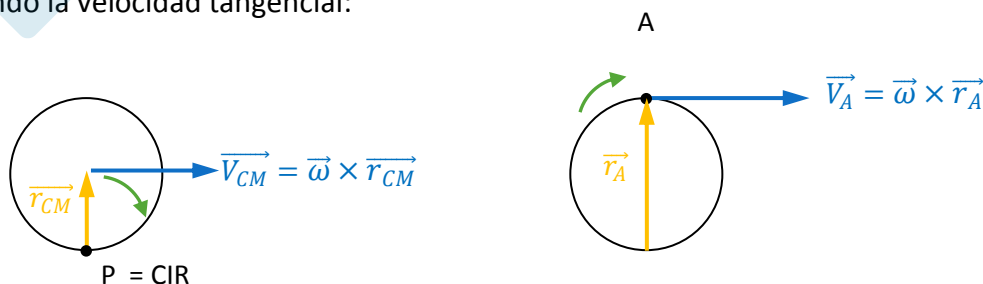
Ahora se analizará el cilindro como si estuviera rotando, sólo por un instante, alrededor del punto P. Para ver claramente esto, pensemos en los rayos de la rueda de una bicicleta. Cuando ésta gira, es como si los rayos estuvieran rotando alrededor del punto de contacto con el piso.



Volviendo al cilindro, cuando consideramos una rotación instantánea, lo hacemos respecto al **eje instantáneo de rotación**. Es decir, que consideramos que el cilindro entero rota (sólo por un instante) alrededor de su generatriz de contacto con el plano. Este eje tiene **velocidad nula**, hasta que el cilindro rueda y otra generatriz pasa a hacer de eje instantáneo de rotación.

Se habla de **centro instantáneo de rotación** (CIR) cuando se toma sólo un punto de ese eje.

Ahora bien, si queremos saber la velocidad del centro de masa (que es la velocidad del eje que pasa por el centro de masa), aplicamos las fórmulas del movimiento circular, como si estuviéramos calculando la velocidad tangencial:



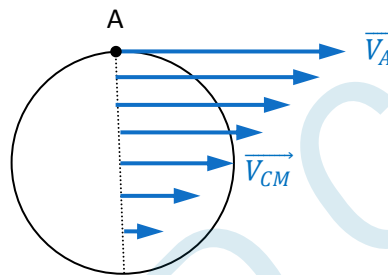
Entonces podemos usar esta fórmula:

$$V_{CM} = \omega \cdot r$$

Y en consecuencia

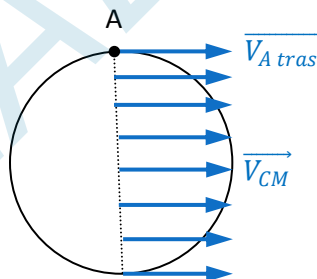
$$a_{CM} = \gamma \cdot r$$

Si representáramos las **velocidades de rototraslación** de distintos puntos, pertenecientes a ejes paralelos al eje instantáneo de rotación, obtendríamos lo siguiente:

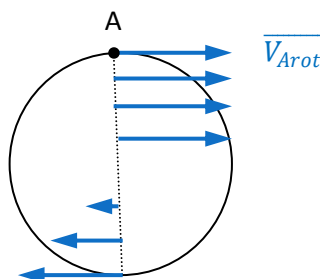


En este análisis se expone que la velocidad del CIR es nula y que la velocidad en el punto A es el doble que la del centro de masa ya que está al doble de distancia del CIR.

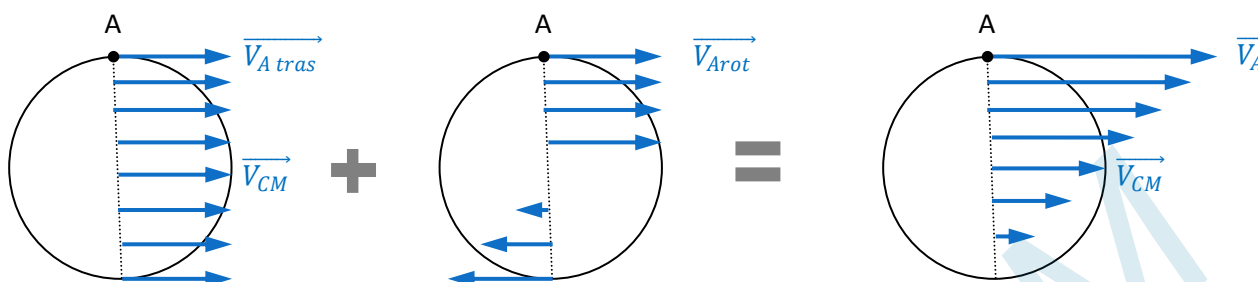
Si ahora para los mismos puntos representamos la **velocidad de traslación**



Y luego representamos las **velocidades de rotación** respecto del centro de masa



Entonces resulta evidente que las velocidades de la rototraslación son la superposición de las velocidades de traslación por un lado, y de rotación por el otro.



### Momento de Inercia respecto de un eje

El momento de inercia respecto de un eje de un cuerpo es la medida de la resistencia que opone el cuerpo a girar alrededor de ese eje. Es una magnitud escalar, que depende de la geometría del cuerpo y por definición se calcula como:

$$I_o = \int r^2 dm$$

*Momento de inercia respecto del eje que pasa por "o"*

Donde  $r$  es la distancia de cada punto del cuerpo (representado por la integral y la diferencial de masa  $dm$ ) al eje de rotación elegido.

Si se trata de un cuerpo rígido discreto, se puede calcular su momento de inercia con la siguiente expresión:


$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

Para el caso de una masa puntual, su momento de inercia está dado por:

$$I_o = m \cdot r^2$$



Tabla de momentos de inercia baricéntricos

Cuerpo	Momento de Inercia
 <b>Cilindro</b>	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
 <b>Anillo</b>	$m \cdot r^2$
 <b>Esfera maciza</b>	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$
 <b>Esfera hueca</b>	$\frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$
 <b>Varilla</b>	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

Momento de inercia y momento angular

Se puede relacionar el momento de inercia de un cuerpo con su momento angular, cuando se considera que éste se encuentra en movimiento circular.

Dado que el momento angular de una partícula en movimiento circular puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{L}_o = m \cdot r^2 \cdot \omega \vec{k}$$

O bien como:

$$\vec{L}_o = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

(Ya que el vector momento angular tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad angular)

Entonces, conociendo la definición del momento de inercia de una masa puntal, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\vec{L}_o = I_o \cdot \vec{\omega}$$

Esta expresión también puede aplicarse al cuerpo rígido, ya que se estaría calculando la sumatoria de los momentos angulares de cada partícula que lo compone, usando la velocidad angular (que es la misma para todas) y usando el momento de inercia del cuerpo respecto del eje seleccionado. Así se estaría calculando la sumatoria de los infinitos momentos de inercia de las partículas que lo componen.

**DETALLE IMPORTANTE:** Para que esa expresión sea cierta, el momento de inercia y el momento angular del cuerpo deben estar referenciados al mismo eje.

### OBSERVACIÓN

Para la expresión hallada, sigue vigente la Ley de Conservación del Momento Angular. Se cumple que, siempre que no haya momentos de fuerzas exteriores en el sistema de partículas (o el cuerpo rígido), el momento angular permanece constante. Esto quiere decir que, si por ejemplo, las posiciones de las partículas que componen al sistema varían (y por lo tanto variaría el momento de inercia del sistema), la velocidad angular del sistema *debe cambiar su valor* tal que el producto original ( $I_o \cdot \omega$ ) permanezca **constante**.

Por ejemplo, si el momento de inercia del sistema disminuye a la mitad, la velocidad angular deberá duplicarse para mantener constante al momento angular.

## Segunda Ecuación Universal aplicada al cuerpo rígido

Como se vio antes, la Segunda Ecuación Universal expresa lo siguiente:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_{Fext}^o$$

Y además, se llegó a esta igualdad:

$$\vec{L}_o = I_o \cdot \vec{\omega}$$

Entonces, si derivamos respecto del tiempo esta última expresión:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d(I_o \cdot \vec{\omega})}{dt} = I_o \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_o \cdot \vec{\gamma}$$

La podemos igualar a la Segunda Ecuación Universal:

---


$$\vec{M}_{Fext}^o = I_o \cdot \vec{\gamma}$$

**SEGUNDA ECUACIÓN UNIVERSAL APLICADA AL CUERPO RÍGIDO**

---

## Teorema de Steiner

También llamado *Teorema de los Ejes Paralelos*, permite calcular el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje arbitrario, siempre que se conozca el momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de masa y el eje elegido sea paralelo al eje baricéntrico.

$$I_o = I_G + m \cdot d^2$$

Siendo  $I_G$  el momento de inercia baricéntrico,  $m$  la masa del cuerpo y  $d$  la distancia entre los ejes.

## Radio de giro

El radio de giro se define como la distancia desde el eje de giro a un punto material donde estaría concentrada toda la masa del cuerpo, de modo que se puede calcular el momento de inercia del cuerpo respecto de ese eje como si fuera una partícula.

$$I_o = m \cdot \rho^2$$

Donde  $\rho$  (ro) es el radio de giro y  $m$  la masa total del cuerpo

## Trabajo y Potencia en las rotaciones

### Trabajo Mecánico

Así como el trabajo mecánico en las traslaciones se define como:

$$dL = \vec{F}_{(r)} \cdot d\vec{r} \rightarrow L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{r}$$

Para las rotaciones resulta:

$$dL = \vec{M}_F^o \cdot d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}_F^o \cdot d\theta$$

Y por lo tanto, su módulo puede calcularse como

$$L = |\vec{M}_F^o| \cdot \Delta\theta$$

### Potencia

Por definición:

$$P = \frac{dL}{dt} \rightarrow P_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Entonces

$$P_m = M_F^o \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow P_m = M_F^o \cdot \omega_m$$

$$P = M_F^o \cdot \frac{d\theta}{dt} \rightarrow P = M_F^o \cdot \omega$$

## Energía cinética del cuerpo rígido

### Energía cinética de rotación

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$$

### Energía cinética de rototraslación

$$Ec_{RT} = Ec_{Tras} + Ec_{Rot}$$

$$Ec_{RT} = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2$$

### Trabajo y energía

Para el movimiento rotacional, se cumple que

$$L_F = \Delta Ec_{Rot}$$

### Estática del Cuerpo Rígido

Condiciones para el equilibrio:

- ✓ La suma de las fuerzas exteriores resultantes debe ser nula
- ✓ La suma de los momentos de fuerzas exteriores debe ser nulo

Por lo tanto:

- ✓  $\overrightarrow{a_{CM}} = \mathbf{0}$
- ✓  $\overrightarrow{\gamma} = \mathbf{0}$

### Tipos de equilibrio

- ❖ Equilibrio Mecánico: La aceleración del centro de masa y la aceleración angular son nulas
- ❖ Equilibrio Estático: Las aceleraciones lineal y angular son nulas y además tanto la velocidad lineal como la angular son también nulas.

## Analogías

Se pueden establecer analogías entre el movimiento lineal y el movimiento rotacional

### Lineal

$$m$$

MASA INERCIAL: Resistencia al cambio estado de movimiento lineal

$$\vec{v}$$

VELOCIDAD LINEAL

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

$$\vec{F}_{Ext.} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

PRIMERA ECUACIÓN UNIVERSAL

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

$$L = |\vec{F}| \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$$

TRABAJO MECÁNICO

$$P = F \cdot v$$

POTENCIA MECÁNICA

$$Ec_T = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot v_{CM}^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN

### Rotacional

$$I_o$$

MOMENTO DE INERCIA: Resistencia al cambio de estado de movimiento rotacional

$$\vec{\omega}$$

VELOCIDAD ANGULAR

$$\vec{L}_o = I_o \cdot \vec{\omega}$$

MOMENTO ANGULAR

$$\vec{M}_{F_{ext}}^o = I_o \cdot \vec{\gamma}$$

SEGUNDA ECUACIÓN UNIVERSAL APLICADA AL CUERPO RÍGIDO

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_{F_{ext}}^o$$

VARIACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

$$L = |\vec{M}_F^o| \cdot \Delta \theta$$

TRABAJO MECÁNICO

$$P = M_F^o \cdot \omega$$

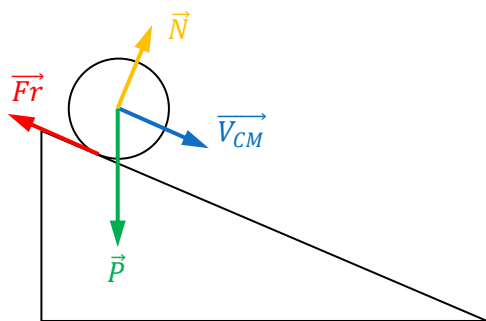
POTENCIA MECÁNICA

$$Ec_R = \frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

### Algunos casos de ejercicios

- Esfera o cilindro que rueda sin resbalar y desciende por un plano inclinado



Para hallar la velocidad del centro de masa al final del plano inclinado, se puede aplicar el **principio de conservación de la energía mecánica**. Si bien hay presente una fuerza de rozamiento (la que permite que el cuerpo ruede sin deslizar) esta **no realiza trabajo** porque no se desplaza.

$$L_{NC} = \Delta EM = 0$$

$$EM_i = EM_f$$

$$Epg_i = EC_{Tf} + EC_{Rf}$$

Ya que en la energía cinética de rotación interviene la velocidad angular, ésta se puede relacionar con la velocidad del centro de masa a partir de esta expresión:

$$V_{CM} = \omega \cdot r$$

Dado que el cuerpo rueda sin deslizar. Y relacionando así la energía cinética de rotación y la de traslación, se puede despejar la velocidad del centro de masa.

Ejemplo con esfera maciza:

$$I_G = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$$

$$Epg_i = EC_{Tf} + EC_{Rf}$$

$$m \cdot g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2$$

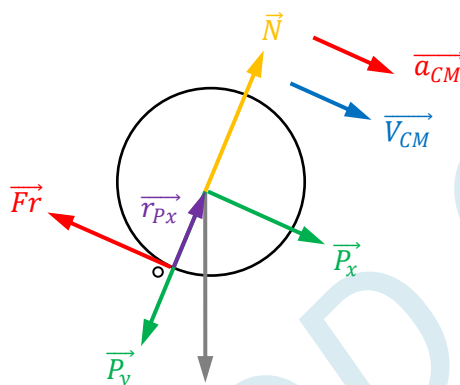
$$m \cdot g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \right) \cdot \left( \frac{V_{CM}}{r} \right)^2$$

$$g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{5} \cdot r^2 \cdot \frac{V_{CM}^2}{r^2}$$

$$g \cdot h_i = \frac{7}{10} \cdot V_{CM}^2$$

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h_i}$$

Para calcular el valor de la fuerza de rozamiento, primero conviene plantear los momentos en el CIR (ya que solo generaría momento la componente en X del peso) y despejando con la primera ecuación universal la aceleración del centro de masa, se despeja después la fuerza de rozamiento.



$$\Sigma \vec{M}_F = I_o \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{M}_{P_x} = \left( \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 \right) \frac{a_{CM}}{r} (-\check{k})$$

$$\vec{r}_{P_x} \times \vec{P}_x = - \left( \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \right) \frac{a_{CM}}{r} \check{k}$$

$$-r \cdot P_x \check{k} = - \left( \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \right) \frac{a_{CM}}{r} \check{k}$$

$$r \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \frac{a_{CM}}{r}$$

$$g \cdot \text{sen } \alpha = \frac{7}{5} \cdot a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}$$

$$-Fr + P_x = m \cdot a_{CM}$$

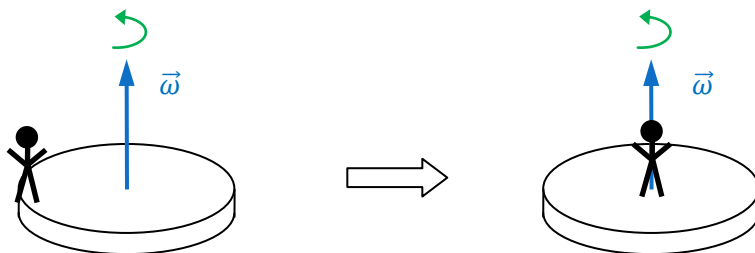
$$m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha - m \cdot a_{CM} = Fr$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha - m \cdot \left( \frac{5}{7} \cdot g \cdot \text{sen } \alpha \right) = Fr$$

$$Fr = \frac{2}{7} \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$



- Calesita: Nene que está en el borde y se mueve al centro



Para hallar la velocidad angular final del sistema, conviene aplicar el principio de **conservación del momento angular** (porque no hay momentos de fuerzas exteriores aplicados al sistema), de modo que el momento angular del sistema se mantenga constante, mientras que varíen su momento de inercia y su velocidad angular.

$$\Delta \vec{L}_{sis} = 0 \rightarrow \vec{L}_{sis_i} = \vec{L}_{sis_f} = \vec{L}_{sis}$$

$$\vec{L}_{sis_i} = I_{sis_i} \cdot \vec{\omega}_{sis_i}$$

$$\vec{L}_{sis_i} = (I_{nene_i} + I_{cal_i}) \cdot \vec{\omega}_{sis_i}$$

$$\vec{L}_{sis_f} = I_{sis_f} \cdot \vec{\omega}_{sis_f}$$

$$\vec{L}_{sis_i} = (I_{nene_f} + I_{cal_f}) \cdot \vec{\omega}_{sis_i}$$

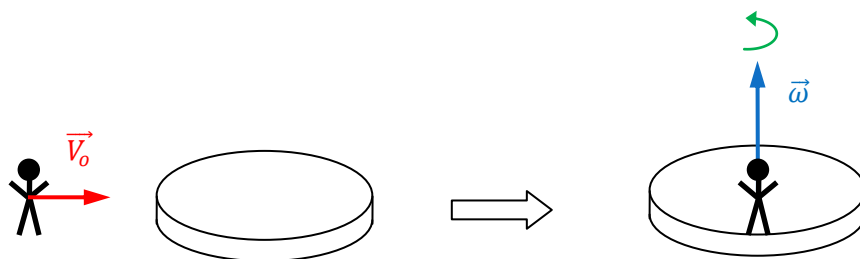
$$\frac{\vec{L}_{sis}}{I_{sis_f}} = \vec{\omega}_{sis_f}$$

El **trabajo** realizado por el nene resulta ser la variación de la energía cinética de rotación.

$$L_F = \Delta E_{c_{rot}}$$

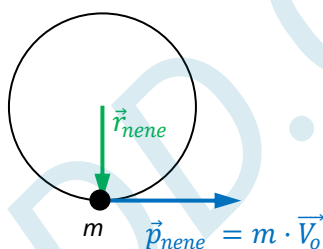
$$L_F = E_{c_{rot_f}} - E_{c_{rot_i}}$$

- Calesita: Nene que viene corriendo y hace girar a la calesita



Se quiere conocer la velocidad inicial del nene si el sistema gira a una determinada velocidad angular.

Se plantea el mismo principio que para el caso anterior, pero considerando que el nene, en el instante antes de subirse a la calesita, tiene un momento angular respecto al eje de rotación. Éste constituye todo el momento angular inicial del sistema (ya que la calesita no se mueve).



$$\Delta \vec{L}_{sis} = 0 \rightarrow \vec{L}_{sis_i} = \vec{L}_{sis_f} = \vec{L}_{sis}$$

$$\vec{L}_{sis_i} = \vec{r}_{nene} \times \vec{p}_{nene}$$

Igualándolo al momento angular final del sistema (calesita y nene rotando) se puede despejar la velocidad inicial.

$$\vec{L}_{sis_f} = \vec{L}_{nene_f} + \vec{L}_{cal_f}$$

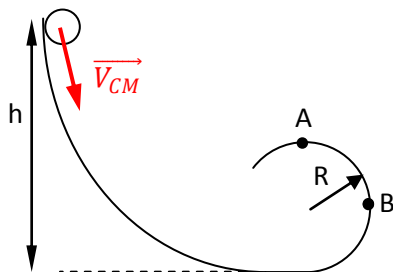
$$\vec{r}_{nene} \times \vec{p}_{nene} = I_{nene_f} \cdot \vec{\omega}_{sis_f} + I_{cal_f} \cdot \vec{\omega}_{sis_f}$$

$$\vec{r}_{nene} \times (m \cdot \vec{V}_o) = \vec{\omega}_{sis_f} \cdot (I_{nene_f} + I_{cal_f})$$

$$r \cdot m \cdot V_o \cdot \vec{k} = \omega_{sis_f} \cdot (I_{nene_f} + I_{cal_f}) \vec{k}$$

$$V_o = \frac{\omega_{sis_f} \cdot (I_{nene_f} + I_{cal_f})}{r \cdot m}$$

- Esfera que rueda sin resbalar y riel en forma de rizo



Se pide calcular desde qué altura mínima debe dejarse caer la esfera para que dé la vuelta completa al rizo y cuál es la fuerza que ejerce el riel en el punto "B".

Acá tampoco hace trabajo la fuerza de rozamiento que hace rodar al cuerpo sin deslizar (porque no se desplaza), por lo tanto la **energía se conserva**.

Ahora bien, para que el cuerpo dé la vuelta completa al rizo, necesita energía cinética (y potencial) en el punto "A". La mínima energía cinética para que suceda esto es la que se le proporciona al estar en movimiento circular. En este caso, la fuerza que actuaría como fuerza centrípeta sería su propio peso. Entonces, igualando el peso a la fórmula de fuerza centrípeta, se puede despejar la velocidad necesaria (en función del radio):

$$m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v_{CM}^2 = g \cdot R \quad (1)$$

Igualando la energía mecánica inicial (potencial) a la final (potencial y cinética) se puede despejar la altura:

$$L_{NC} = \Delta EM = 0 \rightarrow EM_i = EM_f$$

$$Epg_i = EC_T + EC_R + Epg_A$$

$$m \cdot g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \left( \frac{v_{CM}}{r} \right)^2 + m \cdot g \cdot h_A$$

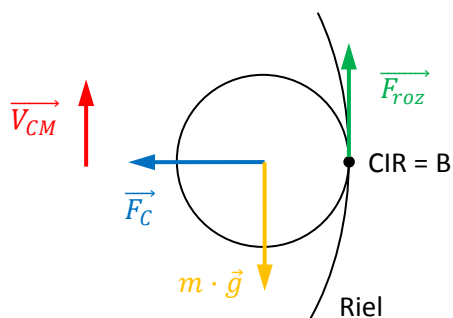
Siendo para este caso  $h_A = 2R$  y el momento de inercia dependiente del cuerpo. Reemplazando con (1) la única incógnita resulta  $h_i$

Por otro lado, la fuerza resultante que ejerce el riel en el punto "B", tiene una componente horizontal y otra vertical. La componente horizontal es la fuerza centrípeta que mantiene al cuerpo pegado al riel (en este caso no se puede igualar al peso porque la fuerza centrípeta en ese punto tiene dirección horizontal). Una vez despejada la altura inicial, se puede calcular la velocidad

del centro de masa del cuerpo en ese punto, usando el mismo método anterior (por energía) y de este modo obtener la fuerza centrípeta.

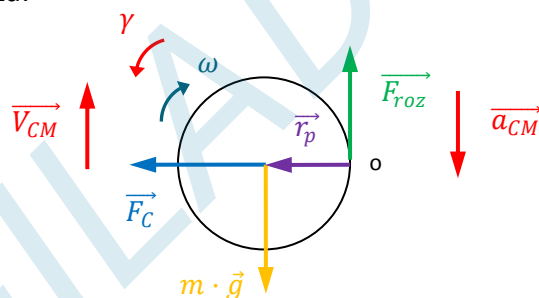
Para calcular la componente vertical, es necesario plantear momentos respecto del centro de masa, o bien respecto del CIR.

DCL:



Calculando momentos respecto del CIR, se despeja fácilmente el valor de la fuerza de rozamiento (con ayuda de la primera ecuación universal luego).

Ejemplo con esfera maciza:



$$\Sigma \vec{M}_F = I_o \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{M}_P = \left( \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 \right) \frac{a_{CM}}{r} (\vec{k})$$

$$r \cdot P \vec{k} = \left( \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \right) \frac{a_{CM}}{r} \vec{k}$$

$$r \cdot m \cdot g = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \frac{a_{CM}}{r}$$

$$g = \frac{7}{5} \cdot a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{5}{7} \cdot g$$

$$\Sigma \vec{F}_y = m \vec{a}$$

$$Fr - P = m \cdot a_{CM}$$

$$Fr - P = m \cdot a_{CM}$$

(en este sistema de referencia, la aceleración es negativa porque apunta para abajo)

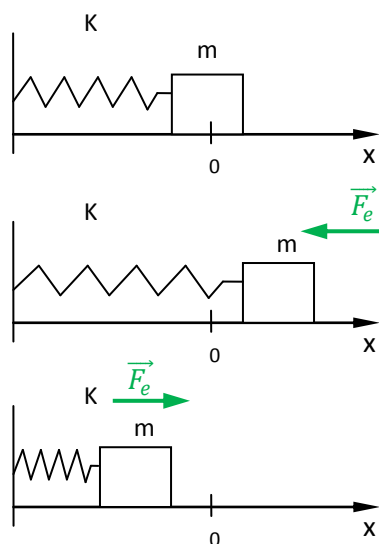
$$Fr = m \cdot -(a_{CM}) + P$$

$$Fr = m \cdot -\left(\frac{5}{7} \cdot g\right) + m \cdot g$$

$$Fr = \frac{2}{7} m \cdot g$$

## Movimiento Oscilatorio Armónico

### - Sistema masa-resorte



Cuando se aleja a la masa  $m$  de su posición de equilibrio (0), el resorte hará que ésta comience a acelerarse, por acción de la fuerza elástica. Cuando llegue a los extremos, es decir cuando su velocidad sea nula, comenzará a volver sobre su trayectoria, también por acción de la fuerza elástica. Así es como comienza a oscilar en forma periódica, porque tardará siempre el mismo tiempo en hacer un ciclo completo.

La ecuación que describe este movimiento se obtiene al igualar la ecuación de fuerza con la ecuación de la fuerza elástica:

$$F = F_e$$

$$m \cdot a = -K \cdot x$$

Recordar que, como la velocidad es la derivada de la posición en función del tiempo, la aceleración es la derivada de la velocidad. Esto quiere decir que la aceleración es la derivada segunda de la posición en función del tiempo. Reemplazando:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -K \cdot x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K \cdot x}{m}$$

Queda así una ecuación diferencial de segundo orden.

Una posible solución a esta ecuación es la función **coseno**.

La función adoptada para describir el M.O.A. simple es la siguiente:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Siendo

- X: Elongación
- A: Amplitud del movimiento → Máxima elongación
- $\omega$ : Pulsación
- $\omega t + \theta_0$ : Fase del movimiento
- $\theta_0$ : Fase inicial

Además:

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

También, como el **período del movimiento** se expresa como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Reemplazando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Y al ser la frecuencia es la inversa del período, se obtiene:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

## Ecuaciones del M.O.A.

Conociendo la función posición de la masa respecto del tiempo, es posible hallar su velocidad y su aceleración derivando.

$$x_{(t)} = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)$$

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = V_{(t)}$$

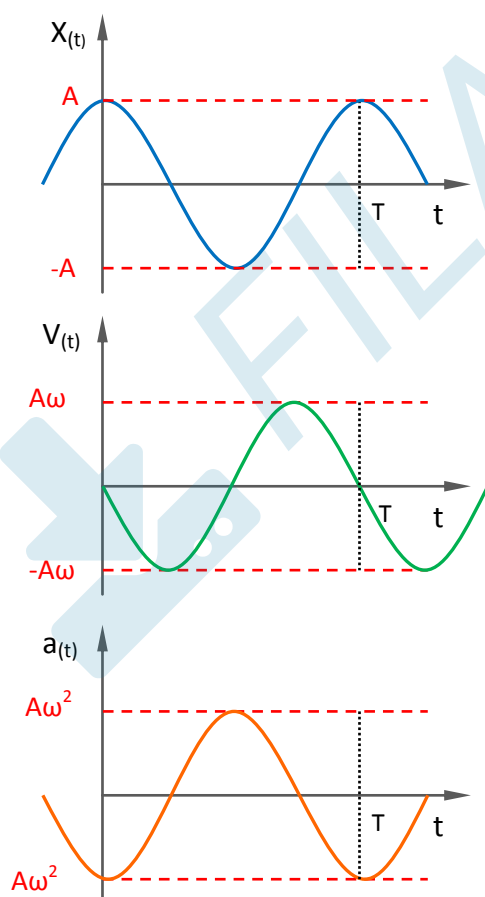
$$V_{(t)} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_0)$$

$$\frac{dv_{(t)}}{dt} = a_{(t)}$$

$$a_{(t)} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0)$$

$$a_{(t)} = -\omega^2 \cdot x_{(t)}$$

### ❖ Gráficos

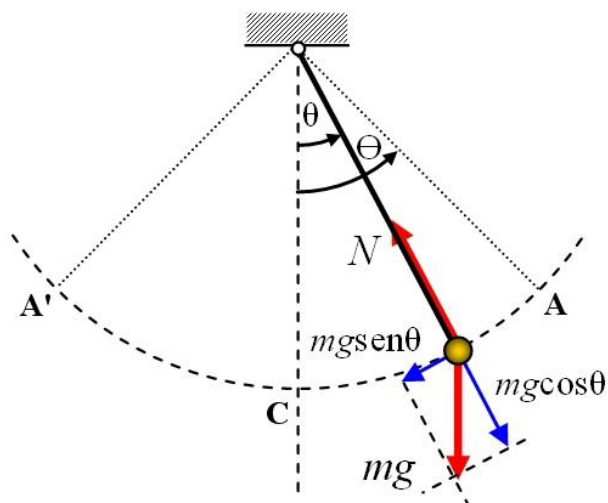


#### Máximos

- ✓ Elongación máxima:  $A$
- ✓ Velocidad máxima:  $A \cdot \omega$
- ✓ Aceleración máxima:  $A \cdot \omega^2$

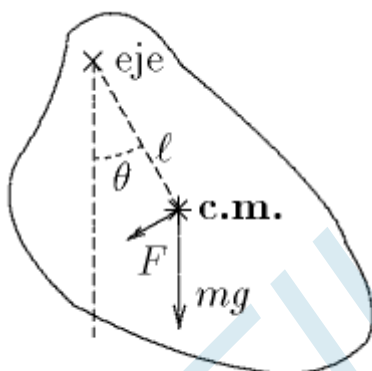
## Péndulo simple y Péndulo Físico

### Péndulo ideal



$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

### Péndulo Físico



$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_o}{m \cdot g \cdot d}}$$

- ✓ Para que las anteriores ecuaciones sean válidas, los ángulos de apartamiento de la vertical deben ser pequeños ( $<5^\circ$ ) de modo que se considera que el péndulo realiza trayectorias rectilíneas.



## Energía del M.O.A.

Como en el sistema masa-resorte no actúan fuerzas de rozamiento, la energía mecánica se conserva en todo momento. Durante el movimiento la energía puede transformarse de energía potencial elástica a energía cinética o viceversa, dependiendo de la elongación.

Entonces, se tiene que la energía total del sistema puede expresarse como:

$$EM = Ec + EPe$$

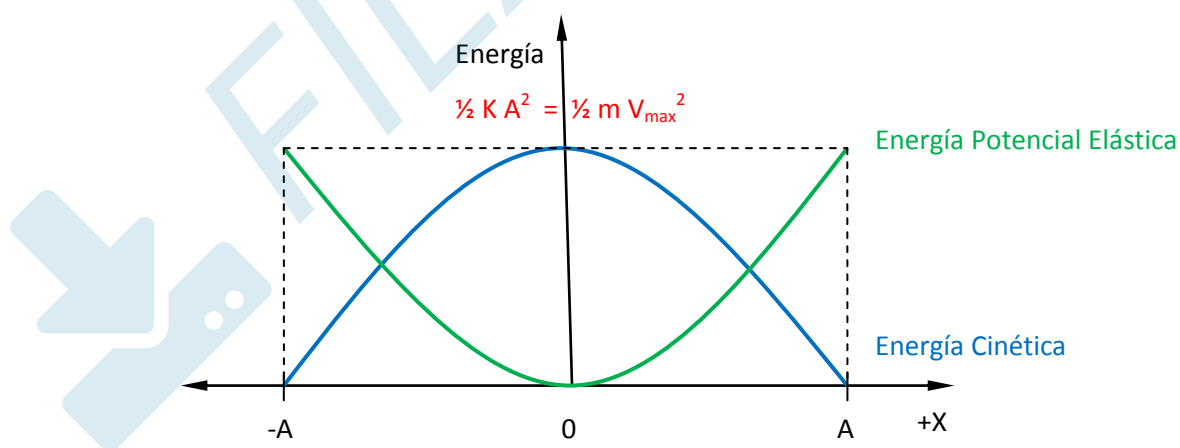
$$EM = \frac{1}{2}m \cdot V^2 + \frac{1}{2}K \cdot x^2$$

A su vez, puede pasar que toda la energía del sistema sea puramente elástica (cuando la velocidad de la masa es nula) o bien puramente cinética (cuando la masa pasa por el punto de equilibrio no hay fuerza elástica pero sí tiene velocidad). Entonces, la energía mecánica del sistema también puede expresarse como:

$$EM = Ec_{M\dot{A}X} = EPe_{M\dot{A}X}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot V^2 + \frac{1}{2}K \cdot x^2 = \frac{1}{2}m \cdot V_{M\dot{A}X}^2 = \frac{1}{2}K \cdot A^2$$

Graficando en función a la elongación, se puede ver la distribución de la energía en los distintos puntos de la trayectoria.

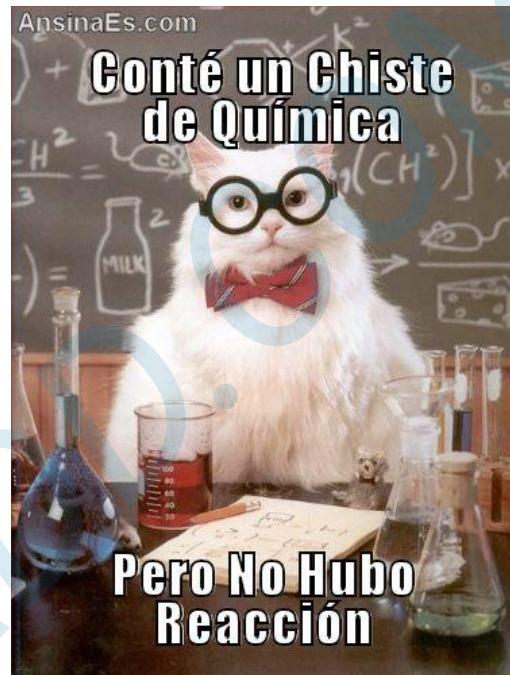
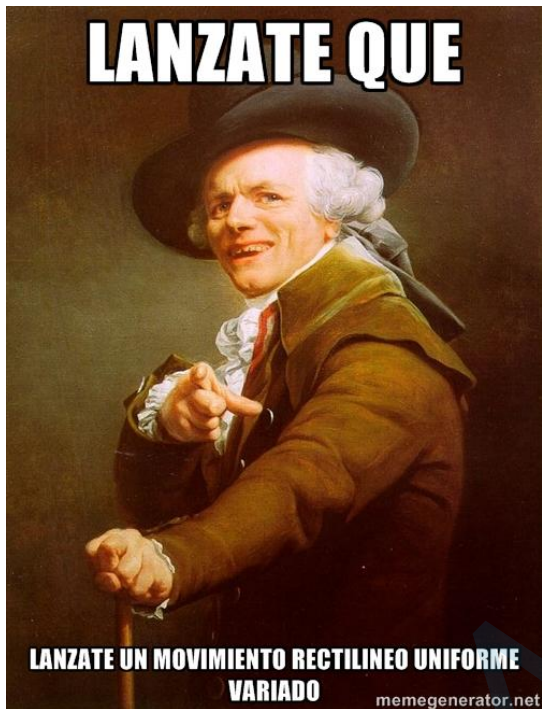


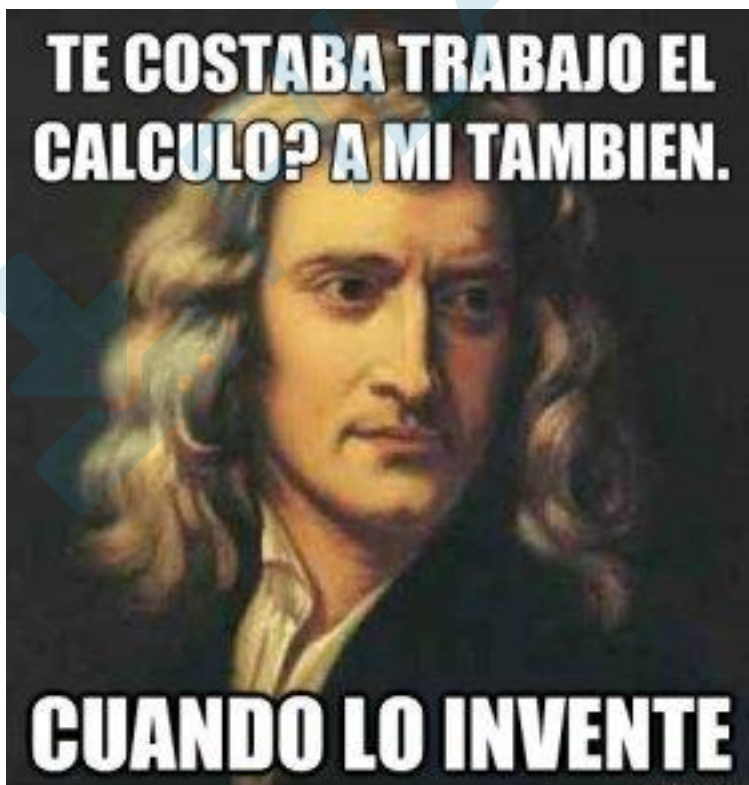
Fin de la teoría 😊

Febrero 2016

## Zona de descanso

Cuando estés harto de estudiar, pasate por acá









Para [www.UTNianos.com.ar](http://www.UTNianos.com.ar)

Fede