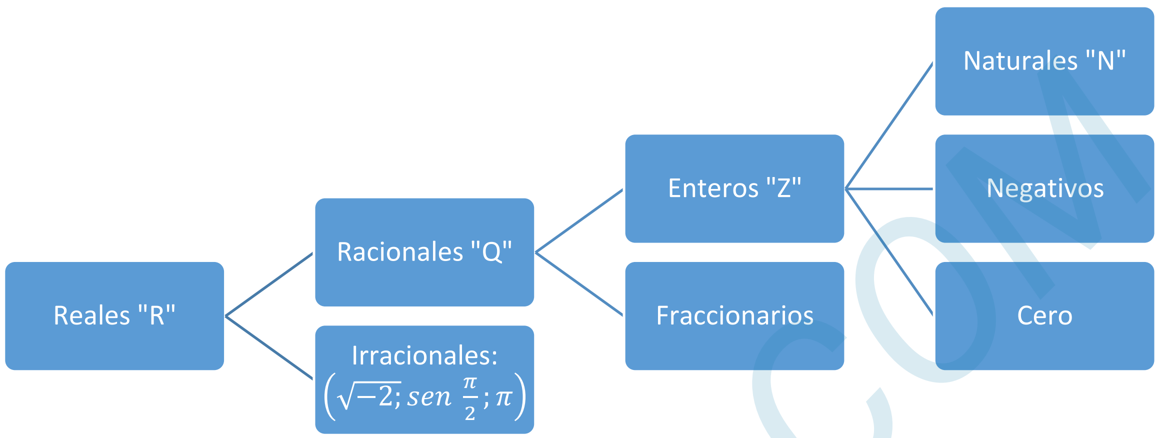


R>Q>Z>N

El conjunto de los números reales se representa en una recta llamada recta real o espacio unidimensional; la geometría define una correspondencia entre puntos de una recta y números reales, es decir, a cada número real le corresponde un punto y a cada punto un único número real (correspondencia biunívoca).

El conjunto de los números reales es un conjunto infinito.

-∞ y +∞ son símbolos.

Cualquier número real por mayor que este sea no puede ser mayor que +∞; y por menor que este sea no puede ser menor que -∞.

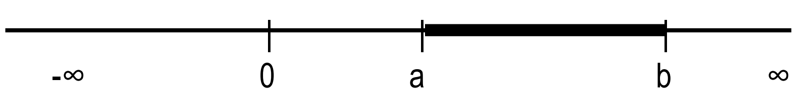
CONJUNTO DE PUNTOS

INTERVALOS Y ENTORNOS

INTERVALO

Conjunto de puntos o números reales a<b

Dados dos números reales a y b. Se llama intervalo de a hasta b al conjunto de los números reales comprendidos entre ambos.

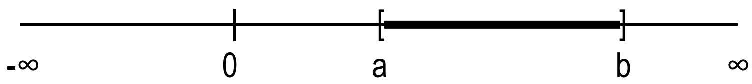


a= extremo inferior   b= extremo superior

(b-a)= amplitud del intervalo
Se debe distinguir entre los intervalos que incluyen los extremos de los que los excluyen.

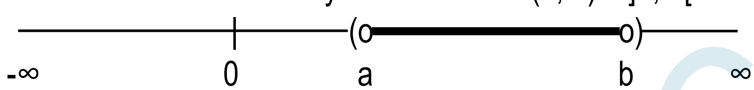
Intervalos finitos

1) Intervalo cerrado: incluyen los puntos [a; b]



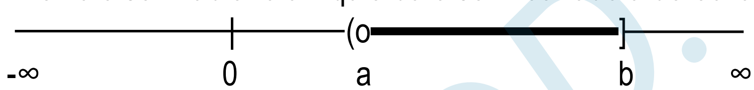
$[a; b] = \{x/x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$

2) Intervalo abierto: no incluye los extremos (a; b) o]a; b[



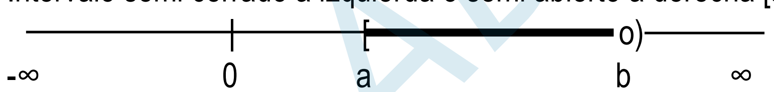
$(a; b) = \{x/x \in R \wedge a < x < b\}$

3) Intervalo semi abierto a izquierda o semi cerrado a derecha (a; b]



$(a; b] = \{x/x \in R \wedge a < x \leq b\}$

4) Intervalo semi cerrado a izquierda o semi abierto a derecha [a; b)



$[a; b) = \{x/x \in R \wedge a \leq x < b\}$

Intervalos infinitos

a) $[a; \infty) = \{x/x \in R \wedge x \geq a\}$

b) $(a; \infty) = \{x/x \in R \wedge x > a\}$

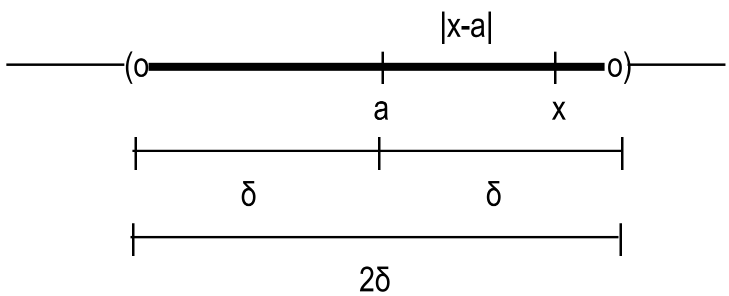
c) $(-\infty;a] = \{x/x \in R \wedge x \leq a\}$

d) $(-\infty; a) = \{x/x \in R \wedge x < a\}$

e) $(-\infty; \infty) = \{x/x \in R\} = R$

<u>ENTORNOS</u>

<u>ENTORNO DE UN PUNTO</u>
Es todo intervalo abierto que contiene ese punto.
Sea “a” un punto de la recta real y δ un número positivo, el entorno con centro en a y radio δ es el intervalo abierto (a-δ; a+δ) que se expresa $E_{(a)}$ o $E_{(a;\, \delta)}$



Amplitud del entorno = $a + \delta - (a-\delta) = a + \delta - a + \delta = 2\delta$

$E_{(a;\,\delta)} = \{x/x \in R \wedge a - \delta < x < a + \delta\}$

$E_{(a;\,\delta)} = \{x/x \in R \wedge |x - a| < \delta\}$

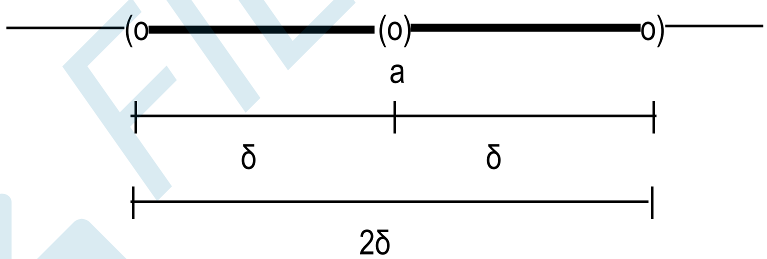
Se llama semi entorno a la izquierda de a al intervalo (a-δ; a), el semi entorno a la derecha es el intervalo (a; a+δ)

<u>ENTORNO REDUCIDO</u>

No incluye el punto a y se expresa $E'_{(a;\,\delta)}$ o $E'_{(a)}$

$E'_{(a;\,\delta)} = \{x/x \in R \wedge x \neq a \rightarrow a - \delta < x < a + \delta\}$

$E'_{(a;\,\delta)} = \{x/x \in R \wedge 0 < |x - a| < \delta\}$



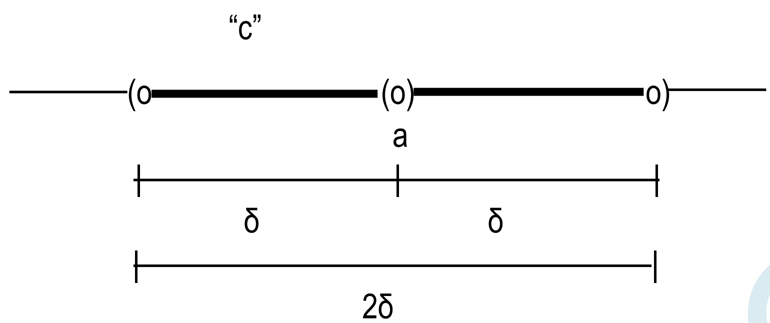
$0 < |x - a|$ es debido a que $x \neq a$

<u>PUNTO DE ACUMULACIÓN</u>

Sea “c” un conjunto de número reales y “a” un número real que puede o no pertenecer al conjunto “c”.

El punto “a” es un punto de acumulación del conjunto “c”, si y solo si, por definición:

TODO ENTORNO REDUCIDO DE “a” CONTIENE POR LO MENOS UN PUNTO DEL CONJUNTO “c”



Para entender mejor, recordemos la llave de los números reales; vimos que hay continuidad.

- Ejemplo 1: c=[-2;2]
  Todos los puntos de este conjunto (intervalo cerrado) son puntos de acumulación del mismo y todos ellos pertenecen al mismo.
- Ejemplo 2: c=(4;7]
  Todos los puntos de este conjunto (intervalo semi abierto) son puntos de acumulación del mismo; inclusive 4 que no pertenece al conjunto.

PUNTO AISLADO

Sea "c" un conjunto de números reales y "a" un número real que pertenece al conjunto "c".

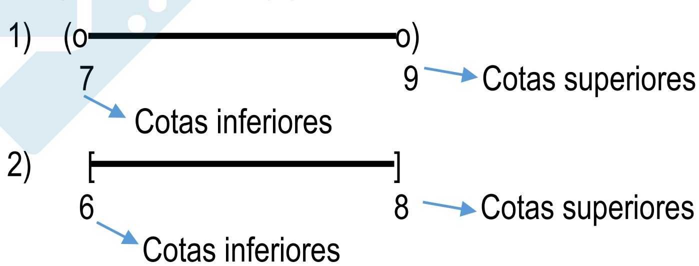
El punto "a" es un punto aislado del conjunto "c" si y solo si, por definición: Existe algún entorno reducido de "a" que no tiene ningún punto de "c".

["a" es un punto aislado si pertenece a "c" y no es punto de acumulación]

Ejemplo: el conjunto de los números naturales.

CONJUNTOS ACOTADOS

COTAS Y EXTREMOS



Todos los números mayores que los del conjunto o el mayor del conjunto son cotas superiores (ejemplo (1) →9 y ejemplo (2) →8) y tienen infinitas cotas superiores que son los números reales que siguen luego de 9 y de 8, es decir todo lo que sigue a la derecha.

Todos los números menores que los del conjunto o el menor del conjunto son cotas inferiores (ejemplo (1) →7 y ejemplo (2) →6) y tienen infinitas cotas inferiores que son los números reales que siguen luego de 7 y de 6 en forma decreciente, es decir todo lo que sigue a la izquierda.

La menor de las cotas superiores se denomina extremo superior o supremo (ejemplo 9 y 8)

La mayor de las cotas inferiores se denomina extremo inferior o ínfimo (ejemplo 6 y 7)

Si el extremo superior o supremo pertenece al conjunto es el máximo absoluto del mismo (ejemplo 8)

Si no pertenece al conjunto es el límite superior (ejemplo 9)

Porque no se puede decir 8,9; 8,999; etcétera. En matemáticas hay que ser precisos.

Si el extremo inferior pertenece al conjunto es el mínimo absoluto de dicho conjunto (ejemplo 6)

Si no pertenece al conjunto es el límite inferior (ejemplo 7)

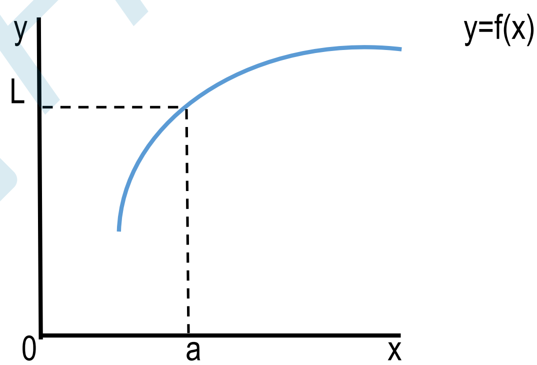
Un conjunto "c" de números reales; está acotado, cuando tiene cotas superior e inferior y ambas cotas finitas (ejemplo c= [2;∞))→NO es acotado, pues tiene una sola cota.

FORMAS INDETERMINADAS

Carecen de sentido matemático, son siete: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty - \infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞

LIMITES

Límite de Funciones

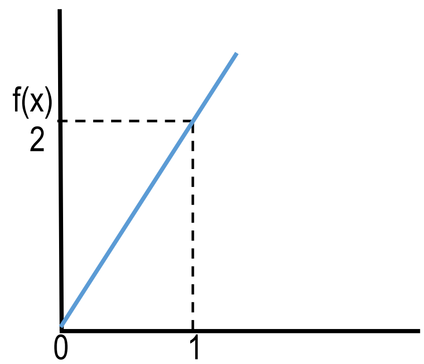


CONCEPTO: Sea la función y=f(x), y "a" un valor de la variable "x", la f(x) tiende o converge a "L" cuando la variable "x" se acerca indefinidamente a un valor "a" sin considerar el valor x=a (es el fundamento del concepto de límite).

Entonces "L" es el límite de la función f(x) si y solo si |f(x)-L| el valor absoluto de la diferencia de la función menos su límite, puede hacerse tan pequeño como se quiera sin alcanzar el valor x=a y que tampoco f(x) alcance el valor "L"

Limite finito

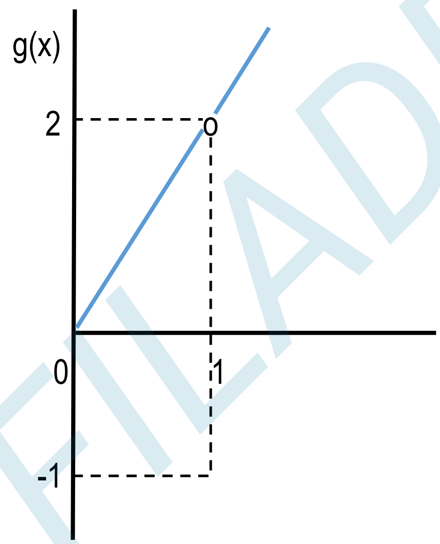
El punto "a" puede pertenecer al dominio de la función o no (EXISTENCIA)



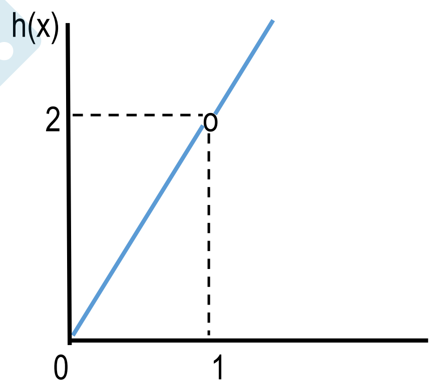
f: R ⟶ R / f(x) = 2x

f(1)=2

Existe



g: R ⟶ R / g(x) = $\begin{cases} 2x; \text{ si } x \neq 1 \\ -1; \text{ si } x = 1 \end{cases}$



h: R ⟶ {1} ⟶ R / h(x) = $\frac{2x(x-1)}{(x-1)}$

h(1) = NO EXISTE

Volvamos estas funciones en elementos del dominio próximos a 1.

f (0,999) = g (0,999) = h (0,999) = 1,998

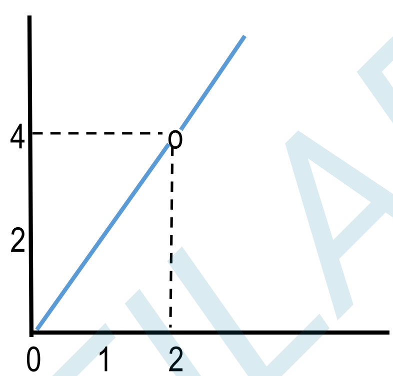
f (1,001) = g (1,001) = h (1,001) = 2,002

Tomamos valores próximos a 1, entonces f, g, h toman valores próximos a 2.

Destacamos que no interesa qué pasa con los valores de las funciones cuando toman el valor exacto 1, es decir f (1) = 2; g (1) = -1; h (1) = no existe. La función puede existir en el punto; arriba o abajo o no existir.

Si no que el límite de las funciones para "x → 1" es 2, "x" que tiende a 1 es 2, eso va a ser el límite.

(El límite nos permite determinar el valor de la función como si esta fuera continua en lugar de discontinua). Por ejemplo:



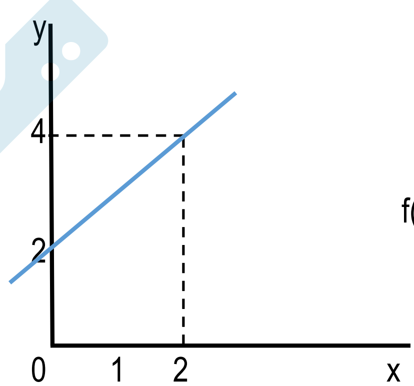
g(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

"NO EXISTE"

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=4$$

Las dos funciones son iguales ∀ x ≠ 2 (para todo x distinto de 2)



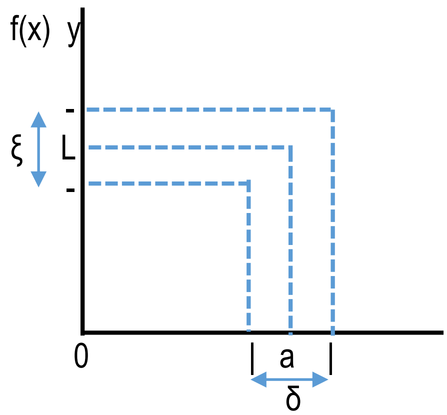
f(x) = x+2

La función es discontinua para x = 2; tomamos otra función igual a la primera aplicamos límite y determinamos el valor = 4. Es el límite no la existencia (límite o verdadero valor)

Definición de límite

Sea la f(x); “a” un punto de acumulación del dominio de la función y “L” que pertenece a los reales (L є R)

La función tiende a “L” cuando x tiende a “a” (x⟶a)



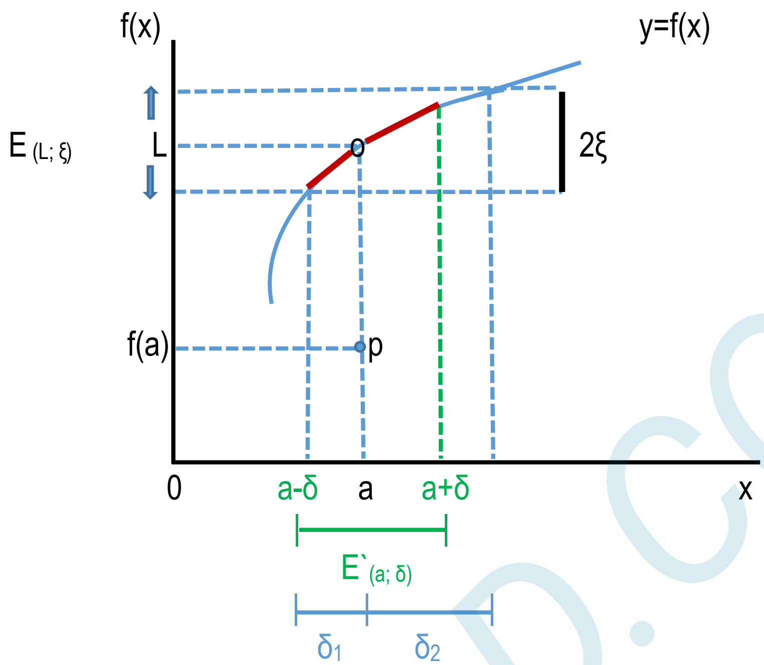
$$\lim_{a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \xi > 0, \exists \delta > 0/\forall x : x \epsilon Df \Lambda 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \xi$$

Interpretación Gráfica de la Definición de Límite

Dada una franja horizontal de ancho 2ξ, definida en el entorno con centro en L y radio ξ ($E_{(L;\,\xi)}$) por angosta que fuera, es posible encontrar una franja vertical definida por un entorno reducido con centro en “a” y radio “δ” tal que: todo trazo del gráfico de función contenida en la franja vertical, debe estar íntegramente contenida en la franja horizontal, excepto el punto p=(a; f(a)). De acuerdo a la definición de límite, este punto “p” puede no existir y si existiera, puede quedar o no dentro de la franja horizontal.

Se observa en el gráfico que una vez fijado el ξ>0, un δ válido para definir el ancho de la franja vertical es el δ=min {δ_1; δ_2} y que todo número positivo, menor que este δ mínimo es también válido.

Además cualquiera de los δ válidos para el ξ fijado son válidos también para todo número real mayor que ξ, aunque nada se puede afirmar respecto de su validez para números reales menores que ξ.



Limites laterales

Sea y=f(x), y "a" un punto de acumulación del dominio de la función, como "a" es un número real o punto de una recta o punto del eje de abscisas, la variable "x" puede acercarse o tender al punto "a", tanto por la izquierda como por la derecha.

Limite lateral izquierdo (Li)

$$\exists \lim_{x \to a^-} f(x) = L_i \leftrightarrow \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 / \forall x : x \epsilon Df \; \Lambda \; a - \delta < x < a \to |f(x) - L_i| < \xi$$

x$\to a^-$ indica que x se aproxima al punto "a" por valores menores que "a" en el semi entorno (a-δ; a)

Limite lateral izquierdo (Li)

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = L_d \leftrightarrow \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 / \forall x : x \epsilon Df \; \Lambda \; a < x < a + \delta \to |f(x) - L_d| < \xi$$

x$\to a^+$ indica que x se aproxima al punto "a" por valores mayores que "a" en el semi entorno (a; a+δ)

Habiendo definido los límites laterales L_i y L_d.

Para que el límite de una función y=f(x) exista, es necesario que existan los límites laterales a la izquierda y a la derecha y que ambos sean iguales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

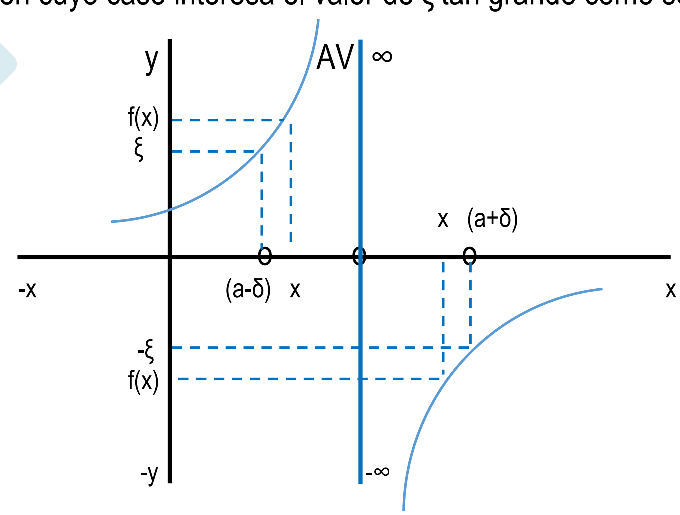
Algebra de límites

1) El límite de una función constante y = c, es la misma constante.
$$\lim_{x\to a} c = c$$
2) El límite de una suma de funciones, es igual a la suma de sus límites.
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)+h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} h(x)$$
3) El límite de un producto de funciones, es igual al producto de sus límites.
$$\lim_{x\to a}[f(x).\,g(x).\,h(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x).\lim_{x\to a} h(x)$$
4) El límite de un cociente de funciones, es igual al cociente de sus límites siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$
5) El límite del logaritmo de una función, es igual al logaritmo del límite de dicha función.
$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$
6) El límite de una potencia, es igual a la potencia de su límite.
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad ; \quad n \in R$$
Si la base y el exponente son funciones, tendremos:
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$
$$\lim_{x\to a} H^{g(x)} = H^{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad ; \qquad H \in R$$

Extensión del concepto de límite

Límite Infinito

Cuando una función tiene límite infinito para la variable que tiende a un punto de acumulación “a”; en cuyo caso interesa el valor de ξ tan grande como se quiera.

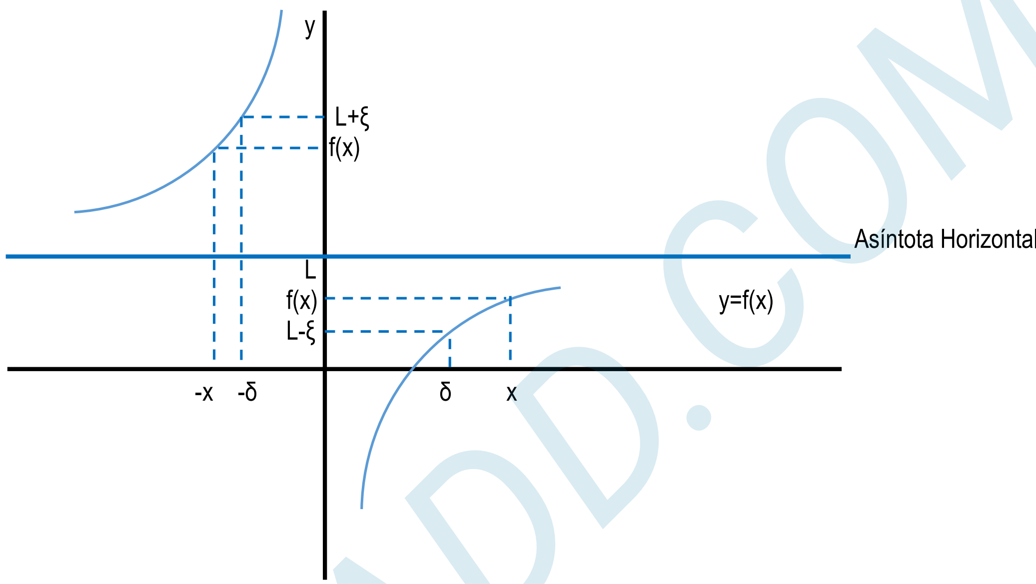


$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \leftrightarrow \forall\xi > 0 \exists\delta > 0 / \forall x: x\epsilon Df \Lambda 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > \xi$$

Veremos ahora una generalización del concepto de límite, expresado en los siguientes dos casos:

1) Límite finito para (x⟶±∞)
2) Limite infinito para (x⟶±∞)

1) <u>LÍMITE FINITO</u>, en un conjunto no acotado, para (x⟶±∞)



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \leftrightarrow \forall\xi > 0\ \exists\delta > 0\ /\forall x: x\epsilon Df \Lambda |x| > \delta \rightarrow |f(x) - L| < \xi$$

Por ejemplo: $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$ para x⟶∞

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x-2} = \frac{3.\infty+4}{\infty-2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Notamos que cuando la variable x tiende a mas, menos infinito la curva de la función tiende a una recta llamada asíntota horizontal, de ecuación y=L

De acuerdo al gráfico se tiene

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ∴ $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = "L"}$

Por ejemplo

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2} \quad ; \quad para\ x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x-2} = \frac{3\infty+4}{\infty-2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(3+\frac{4}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}=\frac{3+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

Observamos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{x-2}=3\ ;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x-2}=3$$

2) LÍMITE INFINITO, para x que tiende a más, menos infinito, es un conjunto no acotado.

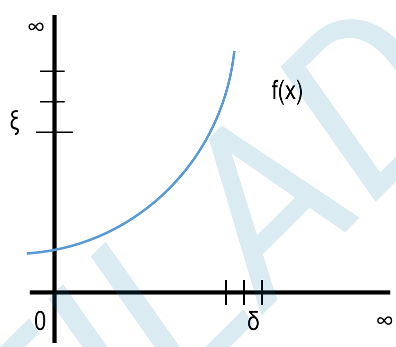
a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \leftrightarrow \forall\xi>0\exists\delta>0/\ \forall x:(x\epsilon Df\Lambda x>\delta\to f(x)>\xi)$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \leftrightarrow \forall\xi>0\exists\delta>0/\ \forall x:(x\epsilon Df\Lambda x>\delta\to f(x)<-\xi)$

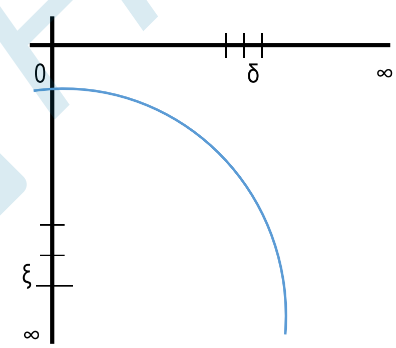
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \leftrightarrow \forall\xi>0\exists\delta>0/\ \forall x:(x\epsilon Df\Lambda x>-\delta\to f(x)>\xi)$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \leftrightarrow \forall\xi>0\exists\delta>0/\ \forall x:(x\epsilon Df\Lambda x>-\delta\to f(x)<-\xi)$

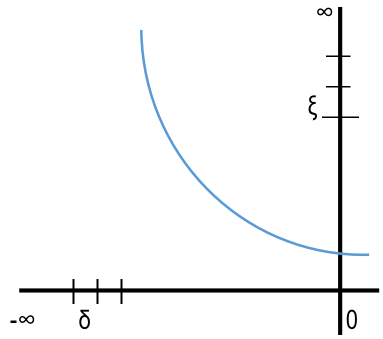
a)



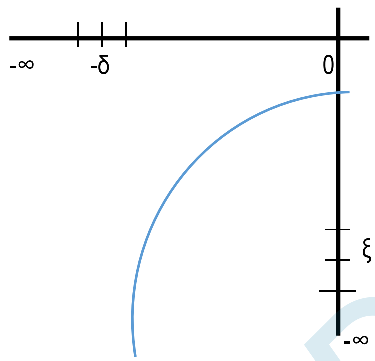
b)



c)

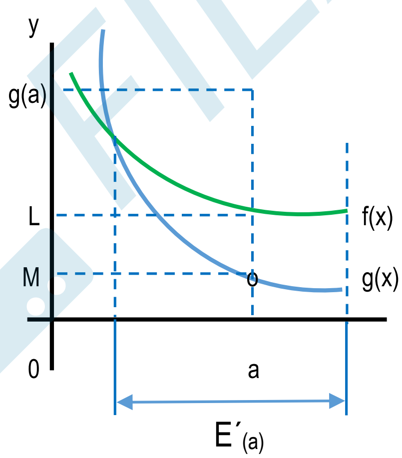


d) --



1) Teorema de las desigualdades

Sean las funciones f(x) y g(x) definidas en un mismo conjunto y "a" un punto de acumulación del mismo conjunto



$$\lim_{x \to a} f(x) = L \wedge \lim_{x \to a} g(x) = M$$

Observando L>M $\longrightarrow \exists$ $E'_{(a)}$ / se verifica que f(x) > g(x) $\forall$ x ϵ $E'_{(a)}$

2) <u>Teorema recíproco parcial del teorema anterior (enunciado)</u>

Sean las funciones f(x) y g(x) definidas en un mismo conjunto y "a" un punto de acumulación del mismo conjunto.

Si ∃ $E'_{(a)}$ / se verifica que f(x) > g(x) ∀ x ϵ $E'_{(a)} \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$

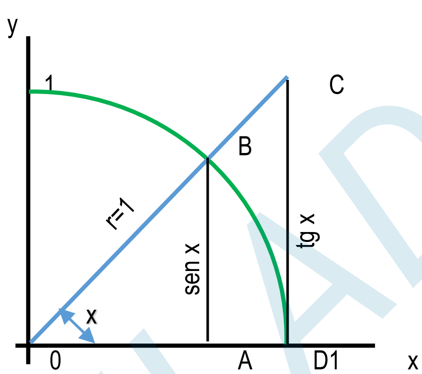
Este teorema muestra que las desigualdades no cambian de sentido al pasar a límite pero no debe excluirse la posibilidad de la igualdad de los límites.

Límites Notables

Son aquellos que se resuelven en forma particular

I. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$: Consideramos una circunferencia de radio unitario.

Todo arco menor (π/2) es mayor que su seno y menor que su tangente.
Entonces



Invirtiendo la desigualdad,

Se tiene sen x < x < tg x

Por lo tanto cambia el sentido de las desigualdades.

$$\frac{1}{sen\,x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg\,x}$$

Multiplicando por sen x, resulta:

$$\frac{sen\,x}{sen\,x} > \frac{sen\,x}{x} > \frac{\cancel{sen\,x}}{\frac{\cancel{sen\,x}}{\cos x}}$$

$$1 > \frac{sen\,x}{x} > \cos x$$

Tomamos límite para x que tiende a cero y aplicamos el <u>teorema recíproco</u>

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} \geq \lim_{x\to 0}\cos x$$
$$\lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \Lambda \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

Nos queda $1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} \geq 1$

Finalmente $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1$

II. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{\cos x}.\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.\frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x} = 1}$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,3x}{2x} = \frac{3}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\,3x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,3x}{3x}\right).\left(\frac{3}{2}\right) = 1.\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

III. NÚMERO “e”

$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x = 1^\infty$ Este límite indeterminado tiene como verdadero valor o límite, el número irracional 2,718281 que se denomina número “e”. Entonces

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x = e}$$

Otra forma : $t = \frac{1}{x}$; cuando x⟶∞, t⟶0, $x = \frac{1}{t}$ nos queda

$$\boxed{\lim_{t\to 0}[1+t]^{\frac{1}{t}} = e}$$

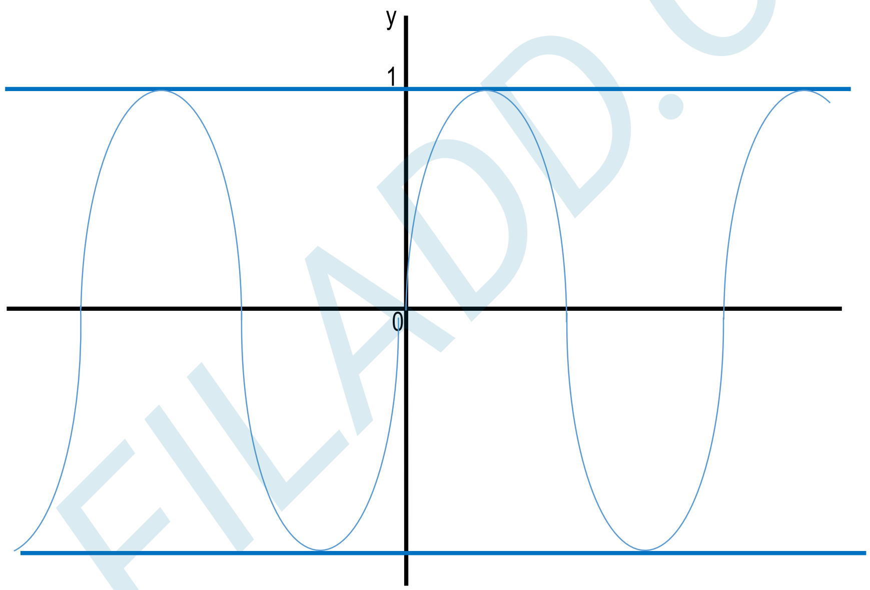
Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

$\lim_{x\to a} f(x) =$ No existe el límite

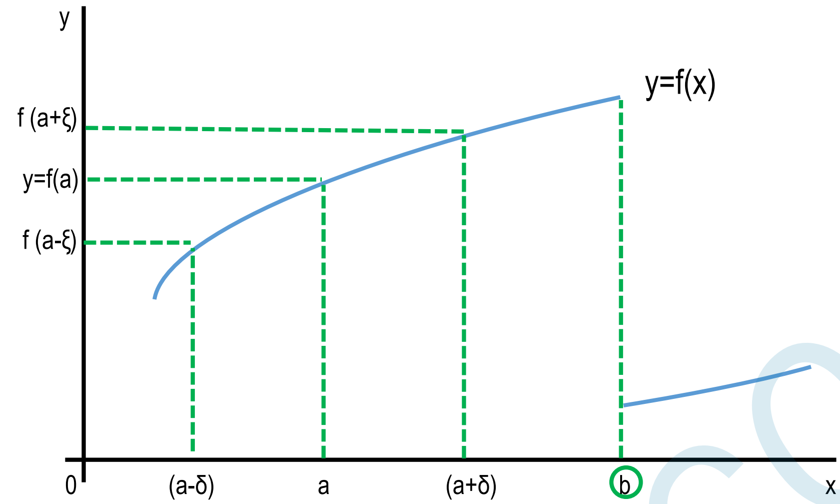
Por ejemplo: $\lim_{x\to 0} sen\,\frac{1}{x} =$ No existe el límite



Cuando x tiende a 0 por izquierda o derecha del punto, el cociente $\frac{1}{x} \to \infty$; pero la función $sen\,\frac{1}{x}$ oscila entre 1 y -1.

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD

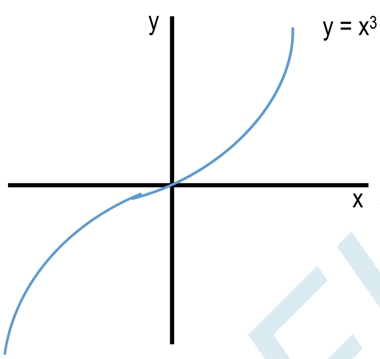
Una función y=f(x) es continua en un punto "a", cuando para un número positivo ξ por pequeño que sea, es posible encontrar otro número positivo δ tal que para cualquier valor de la variable comprendida en el intervalo (a-δ; a+δ), se verifica que el valor absoluto de la diferencia entre el valor correspondiente de la función y el de f(a) sea menor que ξ

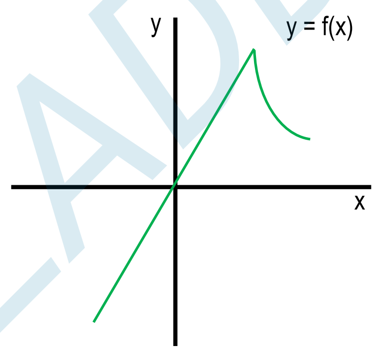


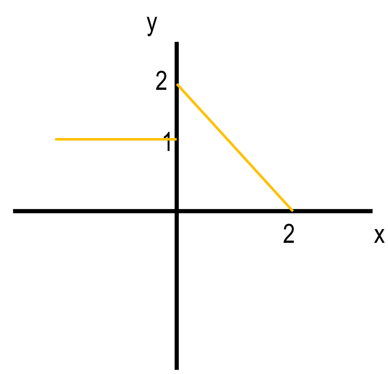
$E_{(a;\,\delta)}$

$|f(x)-f(a)| < \xi \;\; \forall \;\; (a-\delta) < x < (a+\delta)$ ó $|x-a| < \delta$

f(a) es continua en “a” $\wedge$ discontinua en “b”







La noción de continuidad de una función implica que pequeños cambios en x originan pequeños cambios en “y”, y no saltos bruscos. Es decir que la gráfica de la función no se interrumpe y la podemos trazar sin levantar el lápiz del papel.

Definición

Diremos que f(x) es una función continua en <u>x = a</u>, si se cumplen las siguientes condiciones:

I. Si existe la función en el punto (a); f(a)
II. Si existe el límite de la función; $\lim_{x \to a} f(x)$
III. Si el límite $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, se dice que la función es discontinua.

Al definir límite de f(x) se exige “a” punto de acumulación del dominio de la función y no se exige que “a” pertenezca al dominio de la función.

“a” PUNTO DE ACUMULACIÓN DEL dom (f)

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

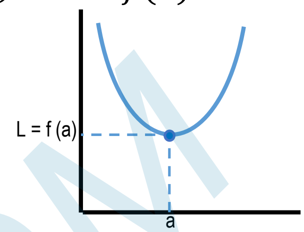
Existe

$f(a)$ *existe*

$a \in Dom(f)$

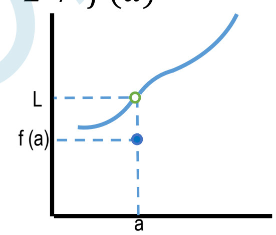
$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$

f continua en “a”



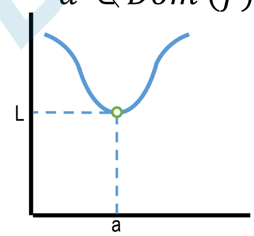
$\lim_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$

Discontinuidad evitable en “a”



$f(a)$ *no existe* $\quad a \notin Dom(f)$

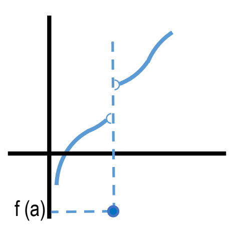
Discontinuidad evitable en “a”

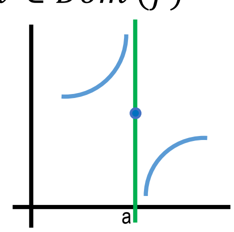


$\lim_{x \to a} f(x) = L$

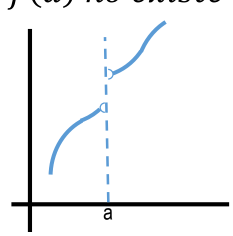
NO Existe

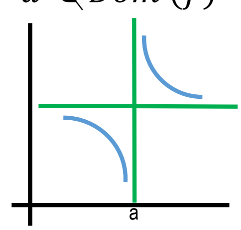
$f(a)$ *existe* $\quad a \in Dom(f)$





$f(a)$ *no existe* $\quad a \notin Dom(f)$





Discontinuidad no evitable o esencial en “a”

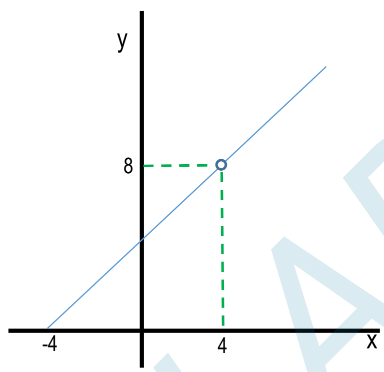
Tipos de Discontinuidades

Se clasifican en:

A) **Evitables**: la función en el punto, no coincide con el límite de la función en dicho punto.
La función discontinua pasa a ser continua al asignar el verdadero valor o límite.
Por ejemplo:

$f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$; $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{16-16}{4-4} = \frac{0}{0}$ La función no está definida para x = 4

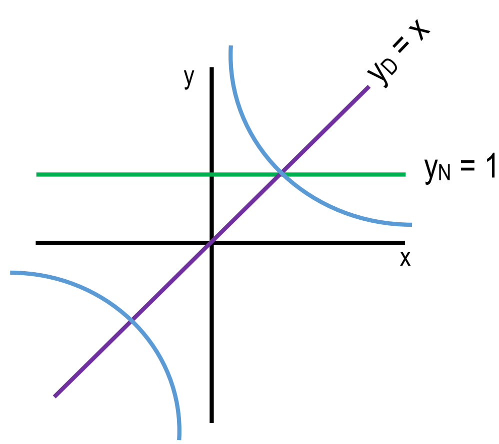
$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$ Salvo esta indeterminación por el verdadero valor que es 8. Límite.



Existe el límite por izquierda y por derecha.

B) **No Evitables**: Ejemplo: $y = \frac{1}{x}$ (función recíproca)

C) Cuando la función es discontinua en el punto y no existe el límite finito.
Ceros: no posee polos: $x_p=0$ ∴ $y_p = \frac{1}{0} = \infty$
Vamos a analizar el numerador y el denominador por separado
$y_N = 1$
$y_D = x$



$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Es una función discontinua de primera especie, por existir los dos límites

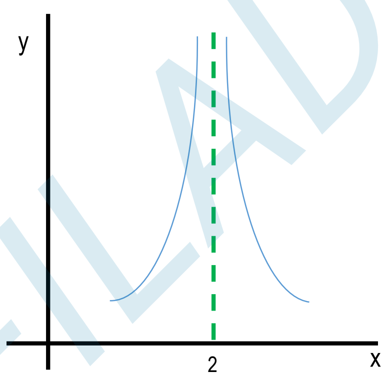
Presenta un salto doble infinito.

Clasificación de las Discontinuidades

Se clasifican en finitas e infinitas según que los límites de la función sean finitos o exista por lo menos uno infinito.

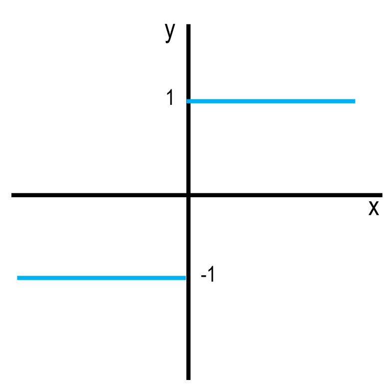
Dentro de esta clasificación, se dividen en:

1) Primera especie, cuando existen ambos límites derecho e izquierdo.
2) Discontinuidad de segunda especie, cuando no existe uno de los límites laterales o ambos.
   Presenta un salto de primera especie.
   Un salto infinito simple (ambos límites son positivos)



$$y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

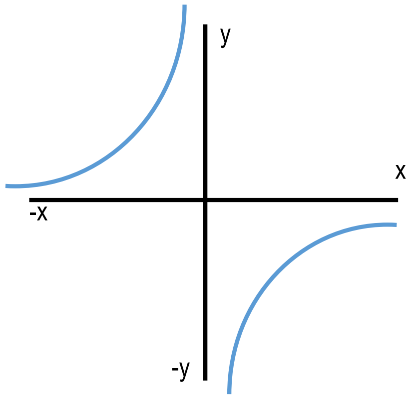
Discontinuidad finita, de primera especie



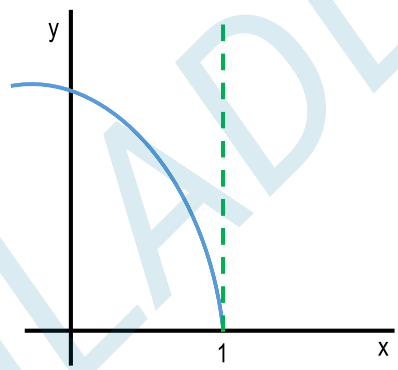
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Ejemplo: $y = \frac{|x|}{x}$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$; $f(0) = \frac{0}{0}$

Discontinuidad de primera especie, con un salto doble infinito.

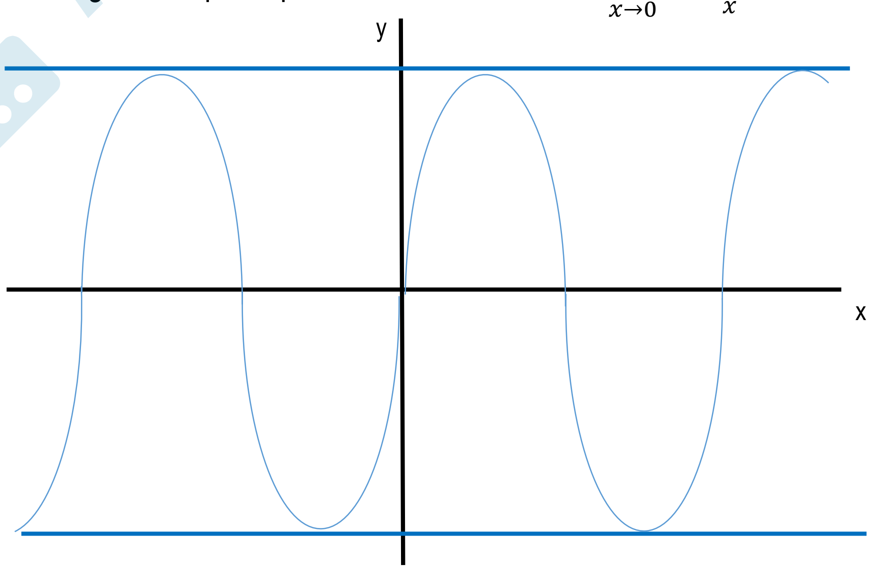


Discontinuidad finita, de segunda especie, para valores de x mayores que 1 el radicando tiene valores negativos y la función valores imaginarios.



$y = -\sqrt{-x+1}$

Discontinuidad de segunda especie por faltar ambos límites $\lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}$



Algebra de las Funciones Continuas

Si y= f(x) e y= g(x) son continuas en el punto x= x_0, también lo son:

1) $f(x) + g(x)$
2) $f(x) - g(x)$
3) $f(x).g(x)$
4) $\frac{f(x)}{g(x)}$; $si\ g(x) \neq 0$

INFINITESIMOS

Infinitésimo es una cantidad variable, cuyo límite es cero, o sea que cuando la variable tiene por límite cero se llama un infinitésimo.

a) El carácter de variable es esencial. "NO" puede ser una constante por pequeña que sea dado que las constantes no pueden tender a ningún límite.
b) Pueden tender a cero, por valores mayores o menores o simultáneamente oscilando.
c) Pueden ser variables independientes o funciones, en las cuales se debe indicar para que valor de la variable independiente esas funciones son infinitésimos.

Los infinitésimos se representan por letras griegas: α, β, δ, η, θ, φ, λ, etc.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad f(x) - L = \varphi(x)$$

Llamaremos infinitésimo, para $x \to a$ a toda función $\varphi(x)$ que tiende a cero cuando $x \to a$

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Funciones Infinitésimas

1) $y = sen\ x$; $\lim_{x \to o} y = \lim_{x \to 0} sen\ x = 0$; $sen\ 0º = 0$

2) $y = \cos x$; $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$; $\cos 90º = 0$

3) $y = x^2 - 16$; $\lim_{x \to 4} y = \lim_{x \to 4} (x^2 - 16) = 0$

Propiedades de los Infinitésimos (Teoremas)

a) La suma de un número finito de infinitésimos es otro infinitésimo

$$\lim \varphi = 0 \ ; \ \lim \beta = 0 \ ; \ \lim \alpha = 0$$

$$\lim[\varphi + \beta + \alpha] = 0$$

b) El producto de un infinitésimo por una constante o variable finita, es un infinitésimo.

$$\alpha = \beta . x \begin{Bmatrix} \lim x = N \neq \infty \\ \lim \beta = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lim \alpha = \lim \beta \, . \lim x = 0 . N = 0$$

c) El cociente de un infinitésimo y una constante o variable no nula es un infinitésimo.

$$\alpha = \frac{\beta}{x} \begin{Bmatrix} \lim \beta = 0 \\ \lim x = N \neq 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lim \alpha = \lim \frac{\beta}{x} = \frac{\lim \beta}{\lim x} = \frac{0}{N} = 0$$

Clasificación de los Infinitésimos

Si α es un infinitésimo que toma sucesivamente los valores $\lim \alpha = 0$

Sea $\alpha = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \ldots; \frac{1}{10^n} = 0$

$\alpha^2 = 0{,}01; 0{,}0001; 0{,}000001; \ldots; \frac{1}{10^{2n}} = 0$

Los valores de α^2 son constantemente menores que los valores de α. Por lo que α^2 es de orden superior a α.

Por lo tanto α^2 tiende más rápidamente a "cero" que α.

Lo mismo sucede con α^3 con respecto a α^2. Generalizando α^n es de orden superior a α^{n-1}.

Es decir al ser el infinitésimo de orden superior tiende más rápidamente a "cero".

Se forma una escala: $\alpha;\ \alpha^2;\ \alpha^3;\ \alpha^4;\ \alpha^5; \ldots; \alpha^{n-1}; \alpha^n$

Se lee infinitésimo de segundo orden con respecto a α.

De tercer orden con respecto a α. Y así sucesivamente.

DERIVADA

Introducción

Sea la función f(x) continua.

Haciendo variar x en forma ininterrumpida, "y" puede crecer con "x" o decrecer.

En la gráfica observamos que:

1) Para un valor x_0 de "x" que origina el punto A de la curva, la función es máxima a la izquierda de A la función es creciente, y a la derecha es decreciente.

2) Otro valor x_1 de "x" nos da el punto B, a la izquierda de B la función es decreciente y a la derecha es creciente, siendo $x_1 > x_0$

Es interesante conocer el crecimiento de "y", es decir con qué rapidez o con que velocidad aumenta "y" con respecto de "x".

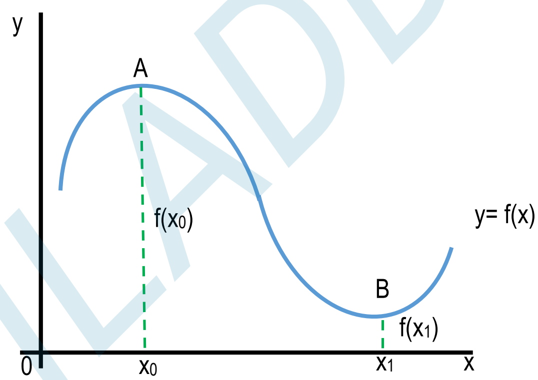
Concepto de Derivada

La derivada de una función es la rapidez o velocidad de crecimiento de dicha función, con respecto a la variación de la variable independiente.

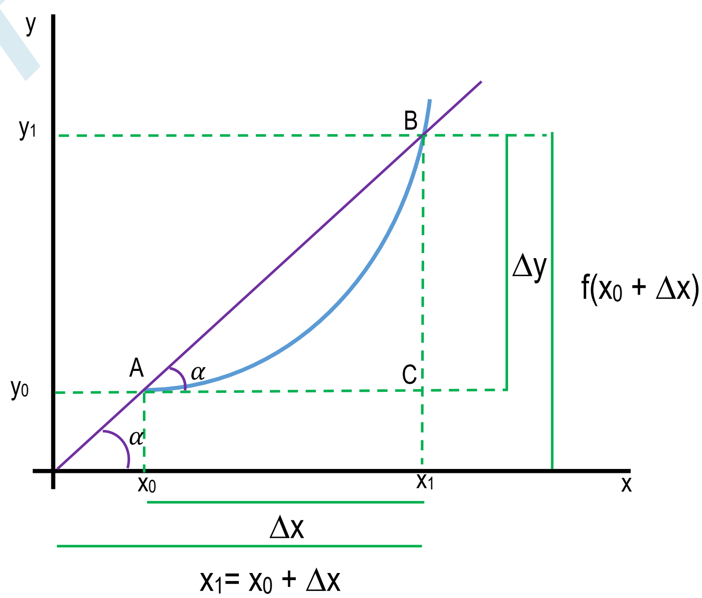
La derivada es la variación instantánea en un punto determinado de la función.

La derivada de una función es el valor de la pendiente a la curva en un punto determinado.

Como la derivada de la función se toma en un punto, veremos previamente la variación o crecimiento en un intervalo que es la "variación media" (Vm).



Variación media (Vm)



$$\overline{AC} = \Delta x$$

$$\overline{BC} = \Delta y$$

Dada la función continua f(x) en el intervalo abierto "H" en los que $(x_0; x_1) \in$ "H" que da origen a los puntos A y B. Vemos que al pasar del valor x_0 al valor x_1 la variable experimenta una variación Δx que llamamos "incremento de la variable independiente"

Como "y" depende de "x" la función también se incrementa en Δy. Por lo tanto resulta:

$$\Delta x = x_1 - x_0 \quad ; \quad \Delta y = y_1 - y_0 \qquad (1)$$

$$\therefore$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$$

$$\text{De (1) } \Delta y = y_1 - y_0$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Dividiendo ambos miembros por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Cociente incremental de la función y=f(x)

Este cociente es función de "x" y Δx.

En los puntos A y B pasa una recta secante cuya pendiente determina el ángulo α con el eje de abscisas, ésta pendiente determina la velocidad media de crecimiento entre A y B de la curva y= f(x); entonces tenemos:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha = Vm}$$

Derivada de una Función

En la variación media se considera el crecimiento entre A y B de la función y= f(x). Ahora nos interesa la variación en el punto A únicamente de la curva.

Para ello calculamos el límite del cociente incremental para $x \to 0$, eso nos determina la derivada.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = f'(x)$$

"Llamaremos derivada de la función y= f(x) al límite finito hacia el cual tiende el cociente incremental cuando el incremento Δx de la variable independiente tiende a cero"

La derivada de una función y= f(x) se representa por los siguientes símbolos:

$$y' = f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = tg\ \beta = Vi$$

Variación instantánea

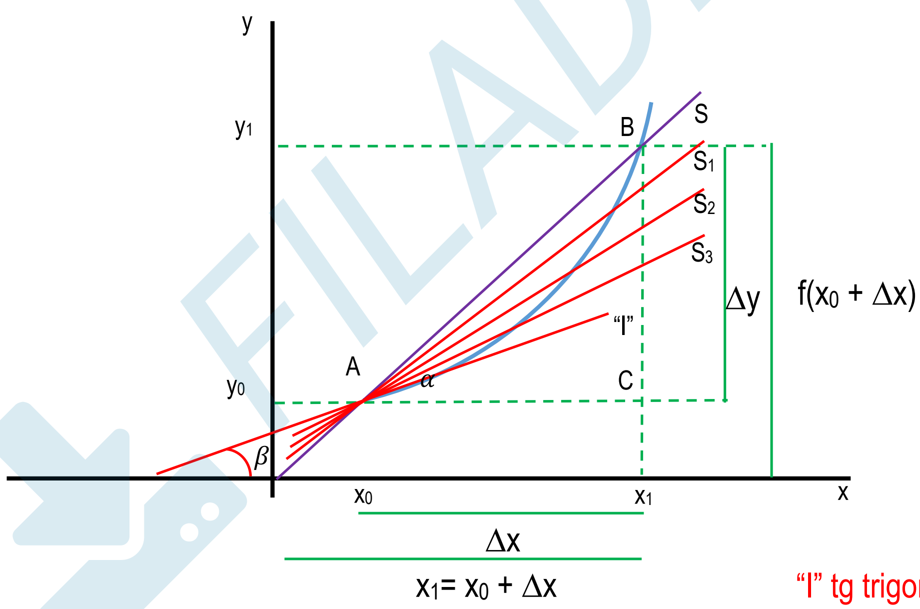
Estas últimas no deben interpretarse como cocientes, sino como símbolos para representar la derivada.

Conclusiones:

1) La derivada de una función de x es por lo general otra función de x.
2) La derivada admite un único valor y este deberá ser finito.
3) Como la derivada se toma en un punto, para que sea derivable, se exige que en dicho punto la función sea continua.

En realidad existen funciones continuas que no tienen derivadas, las cuales las trataremos más adelante.

Interpretación Geométrica del Cociente Incremental y de la Derivada



"I" tg trigonométrica

$$\overline{AC} = \Delta x$$

$$\overline{BC} = \Delta y$$

$$tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Dada la función continua f(x) en el intervalo abierto "H" en los que $(x_0; x_1) \in$ "H" que da origen a los puntos A y B. Vemos que al pasar del valor x_0 al valor x_1 la variable experimenta una variación Δx que llamamos "incremento de la variable independiente"

Como "y" depende de "x" la función también se incrementa en Δy. Por lo tanto resulta:

$\Delta x = x_1 - x_0 \quad ; \quad \Delta y = y_1 - y_0 \quad (1)$

$\therefore$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_0 = f(x_0)$

$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$

De (1) $\Delta y = y_1 - y_0$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Dividiendo ambos miembros por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\ \alpha$$

Es la variación media dada por el cociente incremental.

Tomando límite de cociente incremental para $\Delta x \to 0$; obtenemos la derivada:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = f'(x) = tg\ \beta}$$

La Derivada es un límite

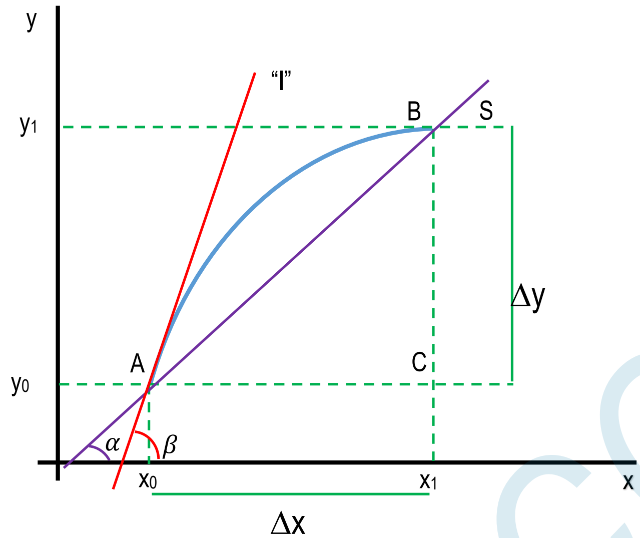
Habiendo pasado del punto A (x_0; y_0) al punto B (x_1; y_1), se define por estos puntos la recta secante "S"

Cuando $\Delta x \to 0$ el punto "B" tiende al punto "A" (B⟶A) y la $tg\ \alpha$ tiende a la $tg\ \beta$ ($tg\ \alpha \to tg\ \beta$). Se forman ∞ rectas secantes, va a llegar un momento en que la recta secante se confunde con la recta "l" que es la tangente geométrica.

Por ello expresamos el siguiente concepto: La derivada de una función en un punto A es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente trigonométrica a la curva en ese punto con el eje x.

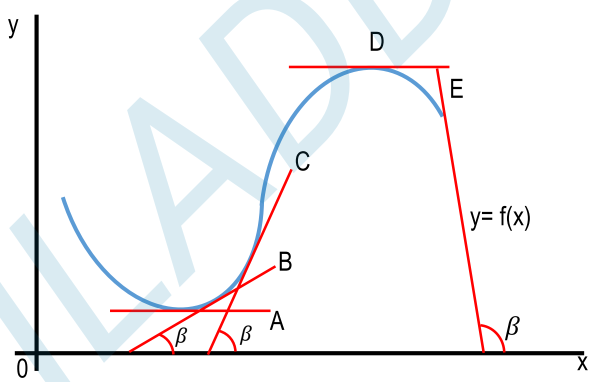
Del gráfico deducimos que cuando $\Delta x \to 0$ y como "y" es "f(x)", Δy también tiende a cero, entonces el límite del cociente incremental tiende a la forma $\frac{0}{0}$; pero este límite es perfectamente determinado; dando como resultado la derivada en el punto A cuya abscisa es x_0.

Por lo tanto Δx y Δy son infinitésimos.



Derivabilidad

Se dice que una función es derivable en un punto, cuando admite en él una derivada única y finita.



Observamos el siguiente estudio de una función y= f(x), considerando f´(x) en los puntos A, B, C, D, E.

Cuanto más grande es f´(x)= tg β, tanto más grande es el ángulo β y en consecuencia tanto más rápidamente crece "y".

En cambio, cuando más pequeña es f´(x)= tg β, tanto más pequeña es β en este caso menos rápidamente crece la función.

En B y C, el ángulo β pertenece al primer cuadrante, es menor que 90º, la función en esos puntos es <u>creciente</u>, la derivada f´(x) es <u>positiva</u>, las pendientes también lo serán.

Si f´(x) es <u>negativa</u>, punto E, el ángulo β es obtuso y la función es <u>decreciente</u>.

Cuando f´(x) es igual a cero en los puntos A y D, el ángulo β es igual a cero, entonces la tangente es paralela al eje x. En consecuencia, cuando la derivada en un punto es positiva la función CRECE.

Si la derivada en ese punto es negativa, la función DECRECE.

Derivada a la Derecha y a la Izquierda

Como la derivada es un límite, se analizan las derivadas laterales

1) Derivada a la derecha: Se define la derivada a la derecha de f(x) en el punto x= x_0, de la forma:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si existe el límite.

2) Derivada a la izquierda: se define la derivada a la izquierda de f(x) en el punto x= x_0, de la forma:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si existe el límite.

Una función y= f(x) tiene derivada en el punto x= x_0 cuando son iguales las derivadas a la derecha y a la izquierda.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x)$$

3) Derivada infinita: se expresa que la derivada de la función y= f(x) en el punto x= x_0 es infinita cuando

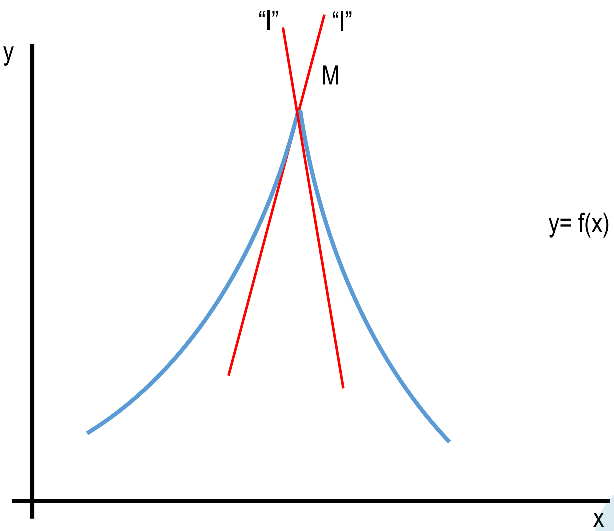
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$$

Geométricamente si la función tiene tangente vertical, o sea, paralela al eje de ordenadas (y), la derivada de la función es infinita, por lo tanto la función en el punto analizado es discontinua, presentando un incremento Δy muy grande y Δx pequeño.

Recordemos que al definir la derivada, esta tiene un solo valor y debe ser finito.

Para que esto se cumpla Δx y Δy deben ser pequeños; es decir la función es continua.

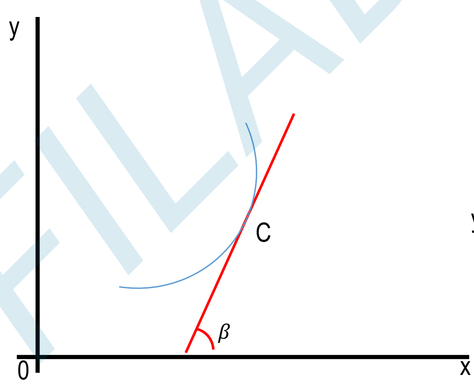
Entonces, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ∴ cuando Δx→0; el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$



En el punto M hay dos tangentes según el camino del límite, la función es continua pero no derivable.

Existe derivada en cualquier otro punto a excepción de M.

En el punto c la función es continua y derivable, pues a un pequeño incremento Δx corresponde un pequeño incremento Δy.



Regla General de la Derivación

También llamada método del cociente incremental.

Haremos el desarrollo por medio de un ejemplo.

Sea la función $y = x^2$

1) Se incrementa la variable independiente "x" en Δx y por lo tanto se incrementa la variable dependiente "y" en Δy.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

Luego, desarrollamos el binomio

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

2) A la función incrementada se le resta la función sin incrementar obteniéndose Δy (incremento de la función)

$$y + \Delta y - y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$
$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Δy es una función de dos variables x y Δx. Ello nos da la posibilidad de evaluar la relación del crecimiento para cada intervalo de la función.

3) Se realiza el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ obteniéndose el valor promedio del incremento Δy.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

4) Eliminamos los factores que hacen que el cociente tienda a tomar la forma $\frac{0}{0}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x\frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

5) Calculamos el límite del cociente incremental para Δx→0; y obtenemos el valor instantáneo del crecimiento de la función en el punto.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$
$$y' = 2x$$

Por ejemplo:

Para x= 0 ∴ y´(0)= 2 . 0= 0

Para x= 0,1 ∴ y´(0,1)= 2 . 0,1= 0,2

Para x= 2 ∴ y´(2)= 2 . 2= 4

Observamos que la rapidez de crecimiento es mayor cuanto mayor es x.

Reglas de Derivación

1) La derivada de una constante es nula

y=c

y + Δy= c

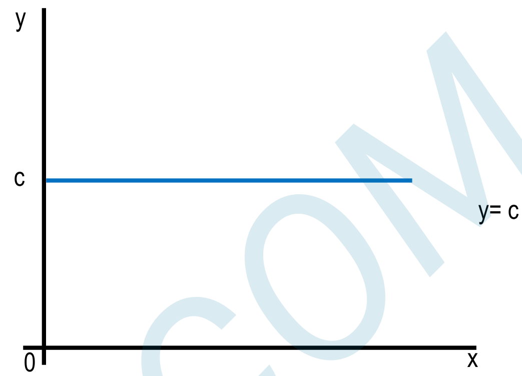
y +Δy – y= c – c

Δy= 0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$y' \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\boxed{y' = 0}$$



2) La derivada de la variable independiente es la unidad, también llamada derivada de la función identidad.

y= x

y + Δy= x + Δx

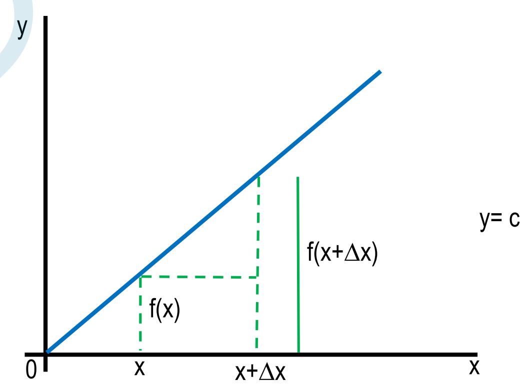
y + Δy – y = x + Δx – x

Δy= Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$\boxed{y' = 1}$$



Tenemos presente que Δy= Δx, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$
La tangente a la recta y= x es la misma bisectriz del primer y tercer cuadrante, que forma con el eje de las x un ángulo β= 45º, tg 45º= 1

3) La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

$$y = c.\ f(x)$$

$$y + \Delta y = c.\ f(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = c.\ f(x + \Delta x) - c.\ f(x)$$

$$\Delta y = c.\ [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c.[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c.\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\boxed{y' = c.f'(x)}$$

4) La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$y = u + v + \dots + w \qquad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \\ w = h(x) \end{cases}$$

Dando a x un incremento (x + Δx), como u, v, w son funciones de "x"; u se incrementa en (u + Δu), v en (v + Δv) y w en (w + Δw), por lo tanto "y" se incrementa (y + Δy)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + \dots + (w + \Delta w)$$

$$y + \Delta y - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + \dots + (w + \Delta w) - u - v - \dots - w$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \dots + \Delta w$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v + \cdots + \Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \cdots + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \cdots + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\boxed{y' = u' + v' + \cdots + w'}$$

5) La derivada de una función de función, es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones, tomadas en relación a la variable inmediata de la cual depende.

y= f(u) ; u= g(v) ; v= h(x)

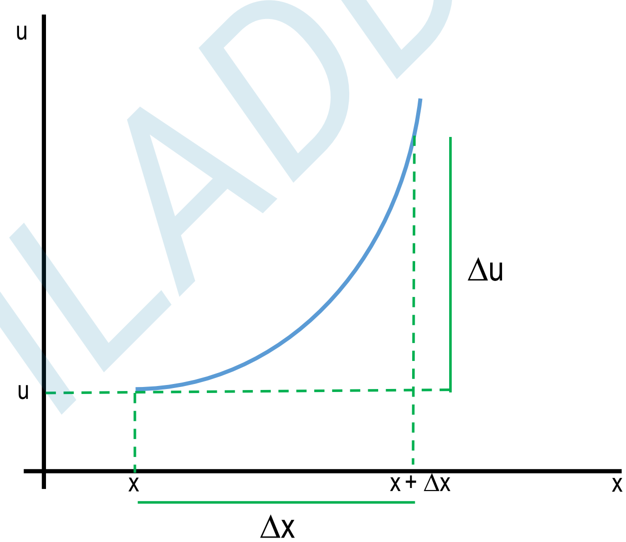
$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ; \; si\ se\ multiplica\ \frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta u.\Delta v}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{\Delta u}{\Delta v}.\frac{\Delta v}{\Delta u}\right] \quad ; \; si\ \Delta x \to 0, \Delta u \to 0, \Delta v \to 0$$

$$y' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = y' = \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \; también$$

$$\boxed{y' = f'(u).g'(v).h'(x)}$$

<u>NOTA:</u>



$\left.\begin{array}{l}\Delta y\\ \Delta u\\ \Delta v\end{array}\right\} \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} u = "u"$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

6) La derivada del producto de dos funciones de una misma variable es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar, más la derivada del segundo por el primero sin derivar.

y= u. v $\quad \begin{cases} u = f(x) \\ v = g(x) \end{cases}$

Dando a "x" un incremento Δx, "u" se incrementa (u + Δu) y "v" en (v + Δv), por lo tanto "y" se incrementa en (y + Δy)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u).(v + \Delta v)$$

$$y + \Delta y = u.v + u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v$$

$$y + \Delta y - y = u.v + u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v - u.v$$

$$\Delta y = u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + v.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\boxed{y' = u.v' + v.u'} \quad \text{o} \quad \boxed{y' = v.u' + u.v'}$$

$$y = u.v.w \ldots z$$

$$y' = u'.v.w \ldots z + u.v'.w \ldots z + u.v.w' \ldots z + u.v.w \ldots z'$$

<u>NOTA:</u> Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

$$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

- El logaritmo de una potencia es igual a la potencia por el logaritmo

$$\ln a^p = p.\ln a$$

7) Derivación logarítmica

$$y = f(x)$$

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}.y$$

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} . f(x)$$

$$\boxed{y' = f'(x)}$$

8) Derivada de una potencia

a) "n" pertenece a los naturales $n \in N$

$$y = x^2 = x.x \quad \therefore \quad y' = x.1 + 1.x = 2x$$

$$y = x^3 = x.x^2 \quad \therefore \quad y' = x.2x + 1.x^2 = 3x^2$$

$$y = x^4 = x.x^3 \quad \therefore \quad y' = x.3x^2 + 1.x^3 = 4x^3$$

$$y = x^n = x.x^{n-1} \quad \therefore$$

$$y' = x(n-1).x^{n-1-1} + 1.x^{n-1} = (n-1)x^{n-1} + x^{n-1}$$

$$y' = x^{n-1}[n - 1 + 1] = n.x^{n-1}$$

$$\boxed{y' = n.x^{n-1}}$$

b) "n" pertenece a los reales $n \in R$

$$y = x^n$$

$$\ln y = \ln x^n$$

$$\ln y = n.\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = n.\frac{1}{x}$$

$$y' = n.\frac{1}{x}.y$$

$$y' = n.\frac{1}{x}.x^n$$

$$\boxed{y' = n.x^{n-1}}$$

9) Derivada de funciones logarítmicas

a) $y = \ln x$

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$$

$$\Delta y = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Multiplicamos y dividimos por x para formar un límite notable

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\left(\frac{x}{x}\right).\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}.\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}.\lim_{\Delta x \to 0}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$y' = \frac{1}{x}.\ln e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

b) $y = \log_a x$

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x$$

$$\Delta y = \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log_a\left(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Multiplicamos y dividimos por x para formar un límite notable

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\left(\frac{x}{x}\right).\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}.\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{x}.\lim_{\Delta x \to 0}\left[\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}.\log_a e}$$

c) $y = \ln u \quad ; \quad u = f(x)$

$$y + \Delta y = \ln(u + \Delta u)$$

$$y + \Delta y - y = \ln(u + \Delta u) - \ln u$$

$$\Delta y = \ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right) = \ln\left(\frac{u}{u} + \frac{\Delta u}{u}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

Multiplico y divido por $u\Delta u$ para hacer luego un límite notable

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}.\left(\frac{u.\Delta u}{u.\Delta u}\right).\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}.\frac{1}{u}.\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}.\frac{1}{u}.\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{u}.\lim_{\Delta x\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\right]$$

$$y' = u'.\frac{1}{u}.\ln e = \frac{u'}{u}.1$$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u}}$$

10) Derivada de funciones exponenciales

a) $y = e^x$

$$\ln y = \ln e^x$$

$$\ln y = x.\ln e$$

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln e + x.0 = \ln e$$

$$y' = \ln e.y$$

$$y' = \ln e.e^x = 1.e^x$$

$$\boxed{y' = e^x}$$

b) $y = e^u \quad ; \quad u = f(x)$

$$\ln y = \ln e^u$$

$$\ln y = u.\ln e$$

$$\frac{y'}{y} = u'.\ln e + u.0$$

$$y' = u'.\ln e.y = u'.1.e^u$$

$$y' = u'e^u$$

$$\boxed{y' = e^u.u'}$$

11) Derivada de las funciones irracionales

a) $y = \sqrt{x}$

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$y + \Delta y - y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Se multiplica y divide el segundo miembro por el conjugado de $(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})$ que es $(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}).(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x.(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x.(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x.(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

b) $y = \sqrt{u}$; $u = f(x)$

$$y + \Delta y = \sqrt{u+\Delta u}$$

$$y + \Delta y - y = \sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u}}{\Delta x}$$

Se multiplica y divide el segundo miembro por el conjugado de $\left(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u}\right)$ que es $\left(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u}\right).\left(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}\right)}{\Delta x.\left(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta u}\right)^2 - \left(\sqrt{u}\right)^2}{\Delta x.\left(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u+\Delta u - u}{\Delta x.\left(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}.\frac{1}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}\right)$$

$$y' = \frac{1u'}{\sqrt{u}+\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

c) $y = \sqrt[n]{x}$

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

$$y' = \frac{1}{n} . x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$y' = \frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}$$

$$y' = \frac{1}{n . x^{\frac{1-n}{n}}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

12) Derivada de un cociente de dos funciones de una misma variable

a) $y = \frac{u}{v}$; $u = f(x)$; $v = g(x)$

Aplicando la regla general de la derivación dando a "x" un incremento $(x + \Delta x)$, por lo tanto "u" se incrementa en $(u + \Delta u)$, "v" se incrementa en $(v + \Delta v)$ e "y" se incrementa en $(y + \Delta y)$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$y + \Delta y - y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{v . (u + \Delta u) - u . (v + \Delta v)}{v . (v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v . u + v . \Delta u - u . v - u . \Delta v}{v^2 + \Delta v . v}$$

$$\Delta y = \frac{v . \Delta u - u . \Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v . \Delta u - u . \Delta v}{v^2 + v\Delta v} . \frac{1}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v.\frac{\Delta u}{\Delta x} - u.\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} \right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v}$$

$$\boxed{y' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}}$$

b) $y = \frac{c}{v}$; $c = constante$; $v = f(x)$

$$y' = \frac{v.0 - c.v'}{v^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{-c.v'}{v^2}}$$

c) $y = \frac{u}{c}$; $u = f(x)$; $c = constante$

$$y = \frac{1}{c}.u$$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{c}}$$

Derivada de las funciones trigonométricas

13) Derivada de la función seno

a) $y = \operatorname{sen} x$

$$y + \Delta y = sen\,(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = sen\,(x + \Delta x) - sen\,x$$

$$\Delta y = sen\,(x + \Delta x) - sen\,x$$

Por trigonometría la diferencia de dos senos es igual al doble producto del coseno de la semi suma por el seno de la semi diferencia de los ángulos dados.

$$sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Haciendo $\alpha = x + \Delta x \quad ; \quad \beta = x$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right).sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{2x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\frac{sen\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$y' = \cos x.1$$

$$\boxed{y' = \cos x}$$

b) $y = sen\, u \quad ; \quad u = f(x)$

$$y + \Delta y = sen\,(u + \Delta u)$$

$$y + \Delta y - y = sen\,(u + \Delta u) - sen\, u$$

$$\Delta y = sen\,(u + \Delta u) - sen\, u$$

Por trigonometría la diferencia de dos senos es igual al doble producto del coseno de la semi suma por el seno de la semi diferencia de los ángulos dados.

$$sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Haciendo $\alpha = u + \Delta u \quad ; \quad \beta = u$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{u + \Delta u + u}{2}\right).sen\left(\frac{u + \Delta u - u}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{2u+\Delta u}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{2u}{2}+\frac{\Delta u}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).\frac{sen\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$\boxed{y' = \cos u.u'}$$

14) Derivada de la función coseno

a) $y = \cos x$

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

Por trigonometría: “La diferencia de dos cosenos, es igual a menos doble producto del seno de la semi suma por el seno de la semi diferencia de los ángulos dados”

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,sen\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right].sen\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

Haciendo $\alpha = x + \Delta x$; $\beta = x$

$$\Delta y = -2\ sen\ \left[\frac{x + \Delta x + x}{2}\right].sen\ \left[\frac{x + \Delta x - x}{2}\right]$$

$$\Delta y = -2\ sen\ \left[\frac{2x + \Delta x}{2}\right].sen\ \left[\frac{\Delta x}{2}\right]$$

$$\Delta y = -2\ sen\ \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right].sen\ \left[\frac{\Delta x}{2}\right]$$

Formando el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\ sen\ \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right].sen\ \left[\frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} = \frac{-sen\ \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right].sen\ \left[\frac{\Delta x}{2}\right]}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Aplicando el límite para $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-sen\ \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\frac{sen\ \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$y' = -sen\ x.1$$

$$\boxed{y' = -sen\ x}$$

b) $y = \cos u\ \ ;\ \ siendo\ u = f(x)$

Dando a x un incremento Δx, como u es función de x, u se incrementa en u+Δu; por lo tanto “y” se incrementa en y+Δy; resultando:

$$y + \Delta y = \cos(u + \Delta u)$$

$$y + \Delta y - y = \cos(u + \Delta u) - \cos u$$

Por trigonometría:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\ sen\ \left[\frac{\alpha + \beta}{2}\right].sen\ \left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

Haciendo $\alpha = u + \Delta u\ \ ;\ \ \beta = u$

$$\Delta y = -2\ sen\ \left[\frac{u + \Delta u + u}{2}\right].sen\ \left[\frac{u + \Delta u - u}{2}\right]$$

$$\Delta y = -2\ sen\ \left[\frac{2u + \Delta u}{2}\right].sen\ \left[\frac{\Delta u}{2}\right]$$

$$\Delta y = -2\, sen\left[u + \frac{\Delta u}{2}\right].sen\left[\frac{\Delta u}{2}\right]$$

Formando el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\, sen\left[u + \frac{\Delta u}{2}\right].sen\left[\frac{\Delta u}{2}\right]}{\Delta x} = \frac{-sen\left[u + \frac{\Delta u}{2}\right].sen\left[\frac{\Delta u}{2}\right]}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por Δu, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-sen\left[u + \frac{\Delta u}{2}\right].sen\left[\frac{\Delta u}{2}\right]}{\frac{\Delta x}{2}}.\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-sen\left[u + \frac{\Delta u}{2}\right].sen\left[\frac{\Delta u}{2}\right]}{\frac{\Delta u}{2}}.\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Aplicando el límite para $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-sen\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right).\frac{sen\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta u}{2}}.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$y' = -sen\, u.1.u'$$

$$\boxed{y' = -sen\, u.u'}$$

15) Derivada de la función tangente

a) $y = \operatorname{tg} x = \frac{sen\, x}{\cos x}$ Se deriva como cociente.

$$y' = \frac{\cos x.\cos x - sen\, x\,(-sen\, x)}{cos^2\, x} = \frac{\cos^2 x + sen^2\, x}{\cos^2 x}$$

Por trigonometría, $\cos^2 x + sen^2\, x = 1$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x}}\ ;\ y' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{sen^2\, x}{\cos^2 x} = \boxed{y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

b) $y = \operatorname{tg} u\ ;\ siendo\ u = f(x)$

$$y = \operatorname{tg} u = \frac{sen\, u}{\cos u}$$

Se deriva como cociente

$$y' = \frac{\cos u . \cos u . u' - sen\, u\, (-sen\, u . u')}{cos^2\, u} = \frac{\cos^2 u\, . u' + sen^2\, u . u'}{\cos^2 u}$$

$$y' = \frac{(\cos^2 u + sen^2\, u). u'}{\cos^2 u}$$

Por trigonometría, $\cos^2 u + sen^2\, u = 1$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{\cos^2 u}} \quad ; \quad y' = \left(\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{sen^2\, u}{\cos^2 u}\right). u' = \boxed{y' = (1 + \operatorname{tg}^2 u). u'}$$

16) Derivada de la función cotangente

a) $y = cotg\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ Se deriva como cociente

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x . (-\operatorname{sen} x) - \cos x\, . \cos x}{sen^2\, x} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + cos^2\, x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Por trigonometría, $\cos^2 x + sen^2\, x = 1$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \quad ; \quad y' = -\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{cos^2\, x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \boxed{y' = -(1 + cotg^2\, x)}$$

b) $y = \operatorname{cotg} u \;\; ; \;\; siendo\; u = f(x)$

$$y = \operatorname{tg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

Se deriva como cociente

$$y' = \frac{sen\, u\, (-sen\, u . u') - \cos u . \cos u . u'}{sen^2\, u}$$

$$y' = \frac{-(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u). u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

Por trigonometría, $\cos^2 u + sen^2\, u = 1$

$$\boxed{y' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}} \quad ; \quad y' = -\left(\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} + \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}\right). u' = \boxed{y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 u). u'}$$

17) Derivada de la función secante

a) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; Se deriva como cociente

$y' = \frac{\cos x.0 - 1.(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$ $\boxed{y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}$

$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$ $\boxed{y' = \operatorname{tg} x . \sec x}$

b) $\sec u = \frac{1}{\cos u}$; Siendo $u = f(x)$; se deriva como cociente

$y' = \frac{\cos u.0 - 1.(-\operatorname{sen} u).u'}{\cos^2 u} =$ $\boxed{y' = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}.u'}$

$y' = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \cdot \frac{u'}{\cos u} =$ $\boxed{y' = (\operatorname{tg} u . \sec u).u'}$

18) Derivada de la función cosecante

a) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; Se deriva como cociente

$y' = \frac{\operatorname{sen} x.0 - 1.\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$ $\boxed{y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}$

$y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} =$ $\boxed{y' = -\operatorname{cotg} x . \operatorname{cosec} x}$

b) $\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$; Siendo $u = f(x)$; se deriva como cociente

$y' = \frac{\operatorname{sen} u.0 - 1.\cos u.u'}{\operatorname{sen}^2 u} =$ $\boxed{y' = \frac{-\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}.u'}$

$y' = \frac{-\cos u}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{u'}{\operatorname{sen} u} =$ $\boxed{y' = -(\operatorname{cotg} u . \operatorname{cosec} u).u'}$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

19) Derivada del arco seno

$y = arc\ sen\ x$; esta es función inversa de x= sen y (I)

Su derivada $x' = (sen\ y)'$

$1 = \cos y . y' \quad \rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$ (II)

Por trigonometría, $\cos^2 y + sen^2 y = 1 \;\therefore\; \cos y = \sqrt{1 - sen^2 y}$

Reemplazando en la expresión (II)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}}$$

De (I)

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

De allí deducimos: $y = arc\ sen\ u$; siendo $u = f(x)$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

20) Derivada del arco coseno

$y = arc \cos x$; esta es función inversa de x= cos y (I)

Su derivada $x' = (\cos y)'$

$1 = -\text{sen}\, y . y' \quad \rightarrow y' = \frac{-1}{\text{sen}\, y}$ (II)

Por trigonometría, $\cos^2 y + sen^2 y = 1 \;\therefore\; \text{sen}\, y = \sqrt{1 - cos^2 y}$

Reemplazando en la expresión (II)

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2 y}}$$

De (I)

$$\boxed{y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

De allí deducimos: $y = arc \cos u$; siendo $u = f(x)$

$$\boxed{y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

21) Derivada del arco tangente

$y = arc\ tg\ x$; esta es función inversa de $x = tg\ y$ (I)

$$x' = (tg\ y)' \rightarrow 1 = \frac{y'}{\cos^2 y} = (1 + tg^2 y). y'$$

$y' = \frac{1}{1+tg^2 y}$ (II)

De (I)

$$y' = \frac{1}{1+tg^2 y} \rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

De allí deducimos $y = arc\ tg\ u$; siendo $u = f(x)$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

22) Derivada del arco cotangente

$y = arc\ cotg\ x$; esta es función inversa de $x = cotg\ y$ (I)

$x' = (cotg\ y)' \rightarrow 1 = -(1+cotg^2 y).y'$

$y' = \frac{-1}{1+cotg^2 y}$ (II)

De (I)

$$y' = \frac{-1}{1+cotg^2 y} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-1}{1+x^2}}$$

De allí deducimos $y = arc\ cotg\ u$; siendo $u = f(x)$

$$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

23) Derivada del arco secante $y = arc \sec x$

$x = \sec y$ (I)

$x' = (\sec y)' \rightarrow 1 = (tg\ y.\sec y).y' \therefore y' = \frac{1}{tg\ y.\sec y}$ (II)

Se coloca la tangente en función de la secante. Por trigonometria $\cos^2 y + sen^2 y = 1$
Dividiendo por $\cos^2 y$

$$\frac{sen^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$tg^2 y + 1 = sec^2 y \therefore tg\ y = \sqrt{sec^2 y - 1}$$

De (II)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{sec^2 y - 1}.\sec y}$$

Por (I)

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}.\,x}}$$

Deducimos $y = arc\sec u$; $u = f(x)$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u.\sqrt{u^2 - 1}}}$$

24) Derivada del arco cosecante $y = arc\,\mathrm{cosec}\,x$

$x = \mathrm{cosec}\,y$ (I)

$$x' = (\mathrm{cosec}\,y)' \;\rightarrow\; 1 = -(cotg\,y.\mathrm{cosec}\,y).\,y' \;\;\therefore\;\; y' = \frac{-1}{cotg\,y.\mathrm{cosec}\,y} \qquad \text{(II)}$$

Se coloca la cotangente en función de la cosecante. Por trigonometria $\cos^2 y + sen^2\,y = 1$
Dividiendo por $\mathrm{sen}^2\,y$

$$\frac{sen^2 y}{\mathrm{sen}^2\,y} + \frac{\cos^2 y}{\mathrm{sen}^2\,y} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,y}$$

$$1 + cotg^2 y = cosec^2 y \;\;\therefore\;\; cotg\,y = \sqrt{cosec^2 y - 1}$$

De (II)

$$y' = \frac{-1}{\mathrm{cosec}\,y\sqrt{cosec^2 y - 1}}$$

Por (I)

$$\boxed{y' = \frac{-1}{x.\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Deducimos $y = arc\,\mathrm{cosec}\,u$; $u = f(x)$

$$\boxed{y' = \frac{-u'}{u.\sqrt{u^2 - 1}}}$$

Derivada de las Funciones Implicitas

Analíticamente $\boxed{\text{f(x, y)= 0}}$

Esta expresión indica que “y” es función implícita de “x”, además la función como la variable independiente están ubicadas en un solo miembro e igualadas a cero.

Ejemplos:

I) $x^4.y^3 + y^2.x + 3 = 0$

$$4x^3.y^3 + x^4.3y^2.y' + y^2.1 + 2y.y'.x + 0 = 0$$

$$y'(x^4.3y^2 + 2yx) = -4x^3.y^3 - y^2$$

$$y' = \frac{-4x^3.y^3 - y^2}{x^4.3y^2 + 2y.x}$$

II) $4x^3 + 3x^2y^2 + 5xy = 0$

$$12x^2 + 6x.y^2 + 3x^2.2y.y' + 5.1.y + 5.x.y' = 0$$

$$y'(3x^2.2y + 5x) = -(12x^2 + 6x.y^2 + 5y)$$

$$y' = \frac{-(12x^2 + 6x.y^2 + 5y)}{3x^2.2y + 5x}$$

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

El diferencial de una función $y = f(x)$ es la parte principal del infinitésimo compuesto incremento de la función.

Siendo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Entonces cuando $\Delta x \to 0$, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un número perfectamente determinado, que es $f'(x)$.

Luego, $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \xi$ (Épsilon) que es un infinitésimo (cantidad variable que tiende a cero), cuando Δx tiende a cero.

Luego, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \xi \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta y = f'(x)\Delta x + \xi\Delta x}$

Δy es un infinitésimo compuesto formado por la suma de dos infinitésimos de distinto orden.

En esta expresión, en el segundo miembro, el primer término es el producto de la derivada de la función por el incremento Δx.

Como $f'(x)$ es generalmente finita y distinta de cero el término $f'(x)\Delta x$ es un infinitésimo de igual orden que Δx.

Este término se denomina parte principal del infinitésimo compuesto Δy; y es el de menor orden.

El segundo término es el producto del infinitésimo Δx por el infinitésimo épsilon que tiende a cero junto con Δx. Este producto de infinitésimos es de orden superior a Δx. (Por lo tanto tiende a cero más rápidamente).

Por definición: el término $f'(x)\Delta x$ parte principal de Δy recibe el nombre de diferencial de la función y se indica dy.

$$\boxed{dy = f'(x).\Delta x} \qquad \text{(I)}$$

Vamos a calcular el diferencial de la variable independiente, para ello consideramos a la misma como una función.

$Si\ (1)\ y = x \ \rightarrow \ (2) f'(x) = y' = x' = 1 \ \therefore \ (3)\ dy = dx$

Observando, (4) de (I) $dy = f'(x)\Delta x = 1.\Delta x$

Vemos en (5) de (3) y (4), si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son: $dy = \Delta x$

Reemplazando en (I) nos queda $dy = f'(x).\Delta x = f'(x).dx$

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

Esto da lugar a una nueva expresión de la DERIVADA, como cociente de la diferencial de la función por la diferencial de la variable independiente $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

También $y' = \frac{dy}{dx}$ → Notación de Leibnitz

Debemos aclarar que conceptualmente es incorrecto pensar que $f'(x)$, es el cociente de dos números $\frac{dy}{dx}$, ya que este es un símbolo para representar la derivada, el cual ha de mirarse no como una fracción sino como un valor límite de una fracción.

Tenemos presente que $f'(x)$ es el límite de la función cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero; pero en la práctica da resultado tratarla como cociente.

Los incrementos Δy y Δx son siempre cantidades finitas y tienen valores definidos. La expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una verdadera fracción.

Se debe advertir especialmente que la diferencial (dy) y el incremento (Δy) no son en general, iguales.

Pero podemos considerar el incremento (Δy) aproximadamente igual al diferencial (dy), cuando el diferencial (dx) es pequeño.

Cuando se desea un valor aproximado del incremento de una función, es más fácil, la mayor parte de las veces, calcular el valor de la diferencial correspondiente y emplear este valor.

De la expresión: $dy = f'(x).dx$, se deduce el mecanismo para diferenciar funciones.

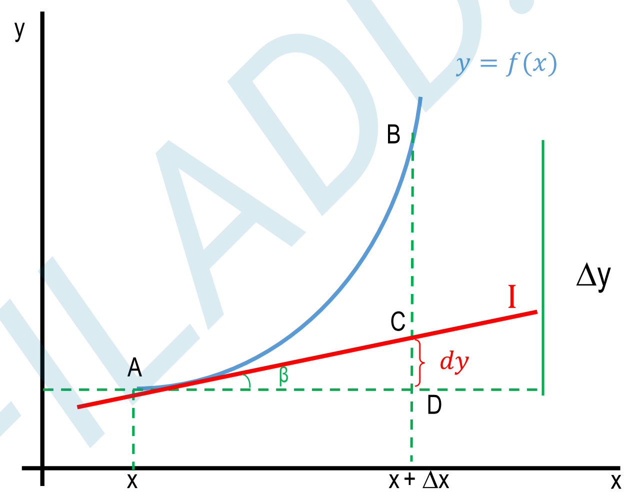
Por ejemplo: $y = sen\, x \;\rightarrow dy = \cos x . dx$

$$y = \ln x \;\; \rightarrow dy = \frac{1}{x}.dx = \frac{dx}{x}$$

Las reglas de derivación sirven para obtener las reglas para diferenciales.

Interpretación Geométrica de la Diferencial

Sea la función $y = f(x)$, considerando el punto "A" de abscisa x y el punto "B" de abscisa $x + \Delta x$, y el incremento Δy de la función es



1) $\Delta y = \overline{DC} + \overline{CB}$

$$tg\, \beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = f'(x)$$

$$\overline{AD} = \Delta x = dx$$

$$\overline{DC} = f'(x).dx = dy$$

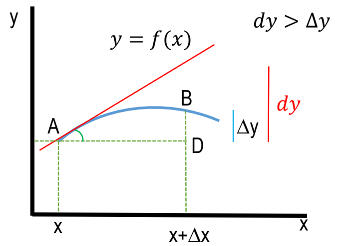
2) $\Delta y = f'(x).\Delta x + \xi.\Delta x$ o bien $\Delta y = dy + \xi.\Delta x$, pero $\Delta x = dx$

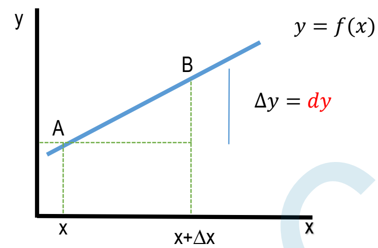
$$\Delta y = dy + \xi.dx$$

La diferencial dy en el punto A no es el incremento $\overline{DB}$ que adquiere la ordenada cuando se da a la abscisa un incremento dx, sino el incremento $\overline{DC}$ que adquiere la ordenada de la tangente a la curva en el mismo punto A.

Luego Δy y dy son infinitésimos del mismo orden y se diferencian en un infinitésimo de orden superior.

La diferencial puede ser, según el gráfico de la función, mayor, menor o igual a Δy.





Teorema de Rolle

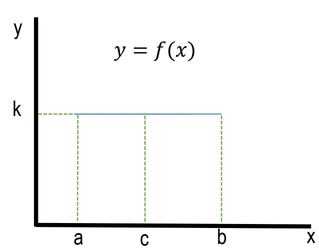
Sea una función $y = f(x)$, continua en un intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$, además $f(a) = f(b)$ extremos iguales; entonces existe un punto $x = c$ que pertenece al intervalo abierto $(a; b)$, tal que $a < c < b$ (c está comprendido entre a y b); donde $f'(c) = 0$

Demostración

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$; presenta un máximo y un mínimo absoluto.

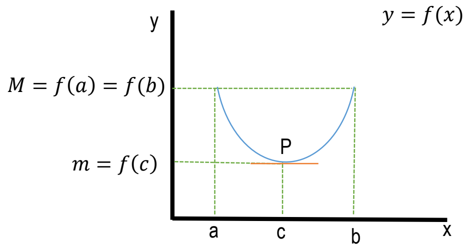
Podemos tener tres casos:

1) Si el mínimo absoluto es igual al máximo absoluto, m=M, la función es constante en todo el intervalo y por lo tanto, la derivada de una constante es igual a cero; se cumple la hipótesis y además para todo x que pertenece al intervalo abierto $(a; b)[\forall x \in (a; b); f'(x) = 0]$. El gráfico del intervalo de la función, es un segmento de recta paralela al eje x.

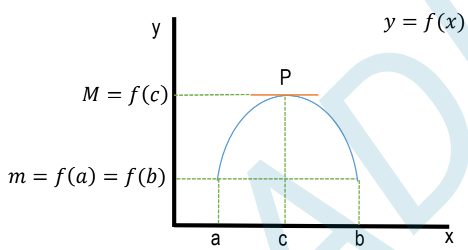


$$f(x) = k \;\; ; \;\; f(a) = f(b) = m = M$$

2) La $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en un punto c que pertenece al intervalo cerrado $[a; b]$, entonces $f(c)$ es un mínimo absoluto y también relativo de $f(x)$ y como $f(x)$ es derivable en c; entonces $f'(c) = 0$

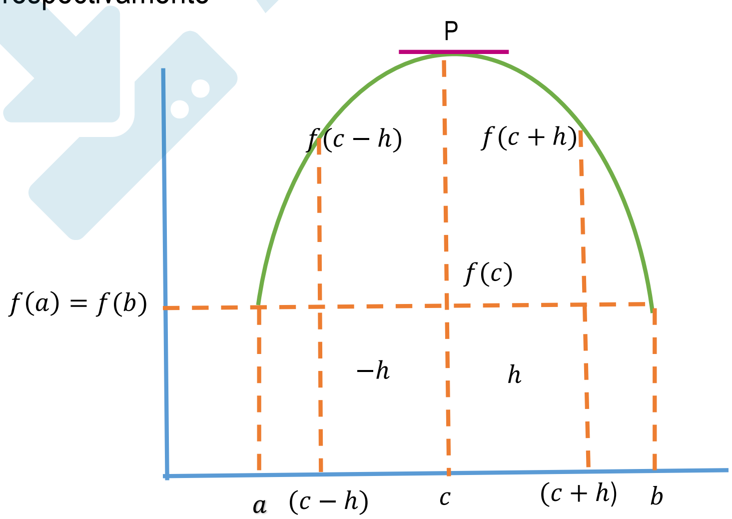


3) La $f(x)$ admite un máximo absoluto en un punto c que pertenece al intervalo cerrado $[a; b]$; entonces $f(c)$ es un máximo absoluto y relativo. $f(x)$ es derivable en c; entonces $f'(c) = 0$
Siendo la recta en el punto P paralela al eje de abscisa.



La circunstancia de que $f'(c) = 0$ podemos justificarla de la siguiente manera. Sea $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$. Geométricamente se observa que para que la función vuelva a anularse es necesario que en algún punto deje de crecer para comenzar a decrecer y denominaremos a ese punto x=c.

Si tomamos un incremento h a izquierda y a derecha del punto c, obtendremos respectivamente



$f(c) > f(c-h)\ \Lambda\ \ f(c) > f(c+h)$, a estas desigualdades las podemos escribir del siguiente modo:

$$f(c-h) - f(c) < 0\ \ \Lambda\ \ \ f(c+h) - f(c) < 0$$

Dividiendo al primero por (-h) y la segunda por (h), y formamos el cociente incremental

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{-h} > 0\ \ \Lambda\ \ \ \ \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

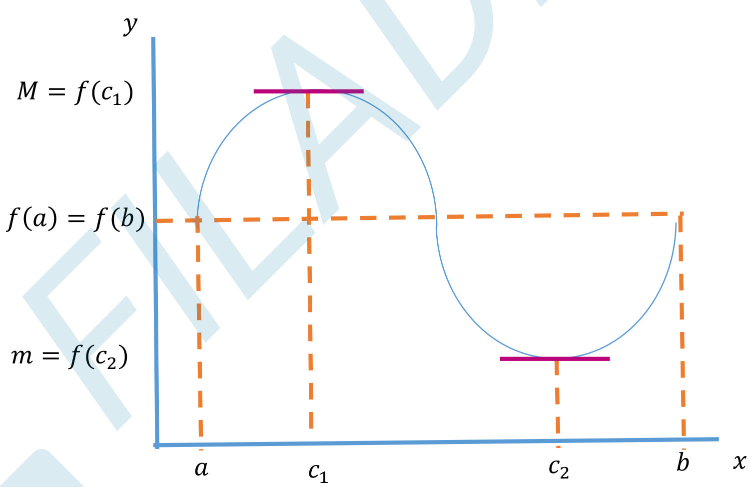
Pasando al límite para $h \to 0$

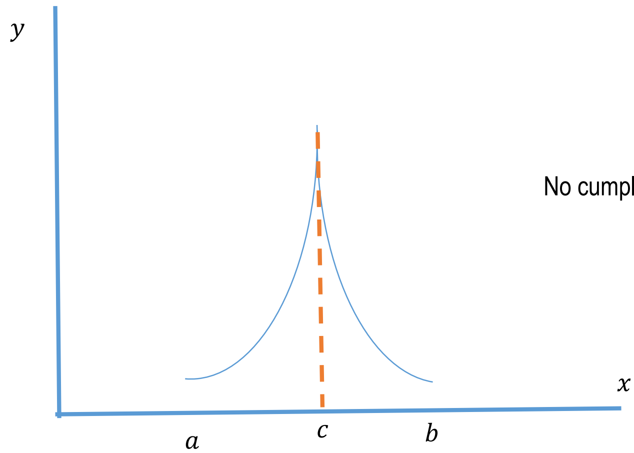
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} = f'(c) \geq 0\ ;\ \ \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \leq 0$$

Expresión que es la derivada de la función en el punto c.

Ahora bien, no pudiendo ser a la vez mayor y menor que cero $0 \leq f'(x) \leq 0$ solo es compatible si $f'(c) = 0$

El teorema de Rolle se puede extender en el caso de una función donde existe más de un punto donde la derivada es nula.





No cumple el teorema, porque no es derivable

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

Teorema de Lagrange

Este teorema llamado también de los incrementos finitos expresa que si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$, la razón de las diferencias extremas de la función y la amplitud del intervalo, es igual a la derivada de la función en un punto $x = c$ interior en el intervalo abierto $(a; b)$ siendo c comprendido entre a y b; $a < c < b$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ ; \ \ a < c < b \ \Lambda \ c \in (a; b)$$

Tanto el numerador como el denominador son valores numéricos, y al cociente lo vamos a representar por un número H.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\ \beta = H$$

Se define la ecuación de la recta $r(x)$, cuerda (si los une) o recta secante (si lo corta), de coordenadas

$$r(x) \begin{Bmatrix} [a; f(a)] \\ [b; f(b)] \end{Bmatrix}$$

También $tg\ \beta = \frac{r(x)-f(a)}{x-a} \therefore despejando\ r(x) = tg\ \beta(x - a) + f(a)$

Entonces $r(x) = H(x - a) + f(a)$

Formando una función auxiliar $Q(x) = f(x) - r(x)$

Reemplazando $Q(x) = f(x) - [H(x - a) + f(a)]$

$Q(x)$ es una función continua por ser continua $f(x)$

$Q(x)$ representa la diferencia entre las ordenadas de la curva $y = f(x)$ y la recta $r(x)$, para una misma abscisa x.

Luego $Q(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x - a) + f(a)\right]$

Entonces $p/x = a; Q(a) = f(a) - [H(a - a) + f(a)] = 0 \therefore Q(a) = 0$

$\Lambda\ p/x = b; Q(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) + f(a)\right] = 0 \therefore Q(b) = 0$

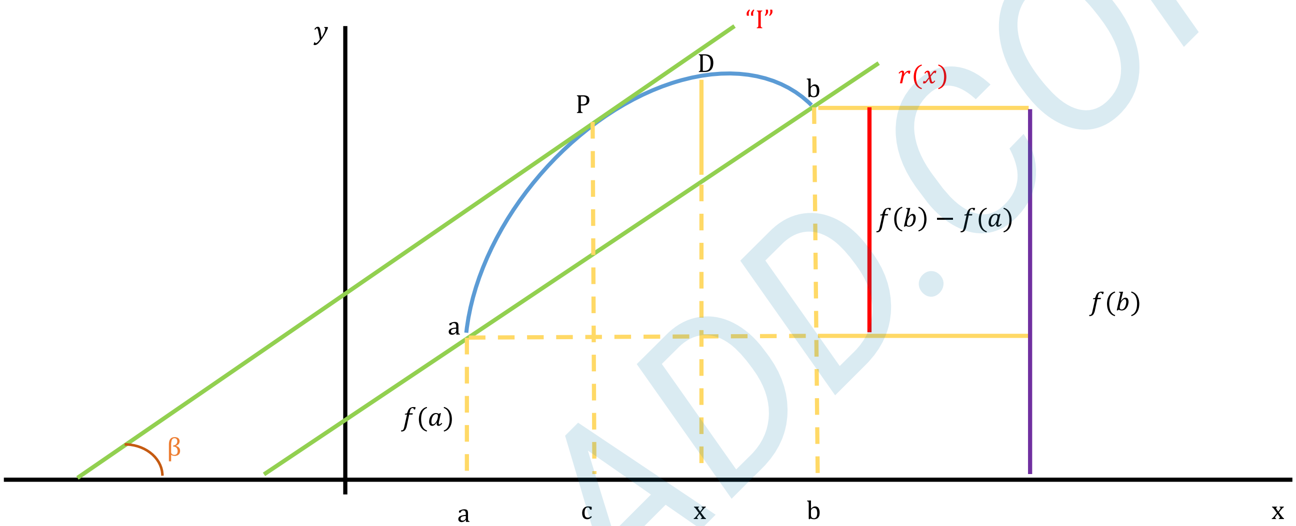
Si $Q(a) = Q(b) = 0$ extremos iguales y $Q(x)$ es continua, cumple el teorema de Rolle, donde para $x = c; Q'(x) = 0$

Derivando $Q(x)$ nos queda: $Q(x)$ nos queda: $Q'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$;

Para x=c; $Q'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]; si\ Q'(c) = 0$

$Q'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = 0$ finalmente

$$\boxed{f'(c) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = H}$$



Existe al menos algún punto "c" en el intervalo abierto $(a; b)$ tal que la tangente a la curva en "c" es paralela a la recta secante que une los puntos $[a; f(a)]$ y $[b; f(b)]$

TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS. GENERALIZADOS

Teorema de Cauchy

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$; la razón de las diferencias extremas de las funciones es igual al cociente de las derivadas en un punto $x = c$; que pertenece al intervalo abierto $(a; b)$; siendo $a < c < b$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad ; \quad a < c < b$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = "H"$$

Despejando

$$f(b) - f(a) = H(g(b) - g(a))$$

Formando una ecuación

$$f(b) - f(a) - \left[H\big(g(b) - g(a)\big)\right] = 0$$

Haciendo $b = x$ y realizando una función $Q(x)$

$$Q(x) = f(x) - f(a) - \left[H\big(g(x) - g(a)\big)\right]$$

$$Q(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . (g(x) - g(a))\right]$$

$Q(x)$ es continua, por ser continuas $f(x)$ y $g(x)$

Si para $x = a$

$$Q(a) = f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . \big(g(a) - g(a)\big)\right] = 0 \therefore Q(a) = 0$$

Si para $x = b$

$$Q(b) = f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(b) - g(a)\big)\right] = 0 \quad \therefore Q(b) = 0$$

Si $Q(a) = Q(b) = 0$, cumple el teorema de Rolle, luego para $x = c$, entonces $Q'(c) = 0$

Derivando la función $Q(x)$

$$Q'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) . g'(x)$$

Si para $x = c$

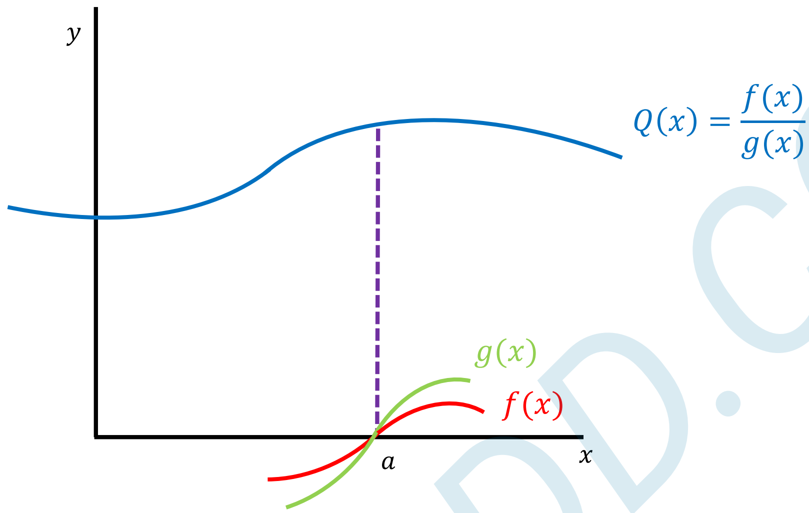
$$Q'(c) = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) . g'(c) = 0 \therefore \boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)}$$

Formas o Límites Indeterminados

Carecen de sentido matemático, y son 7: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty};\ \infty - \infty; 0.\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$

REGLA DE L'HOPITAL

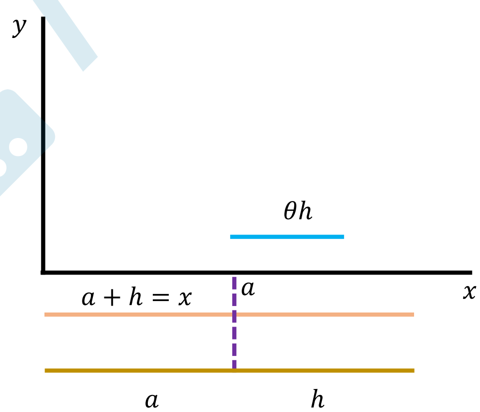
La forma principal: $\frac{0}{0}$



$$\lim_{x\to a} Q(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Cuando $x \to a$; $f(a)$ y $g(a) = 0$ } Hipótesis

Dos funciones continuas y derivables que se anulan en $x = a$. Se hace un cambio de variable $x = a + h$; cuando $x \to a; h \to 0$



A la expresión se le resta $f(a) = g(a) = 0$ } Hipótesis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = "A"$$

Aplicando el teorema de Cauchy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \;\; ; \;\; a < c < b$$

Para nuestra demostración

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \;\; ; \;\; a < (a+\theta h) < a+h$$

De "A"

$$\lim_{\substack{x \to a \\ h \to 0}} \frac{f(a+\theta h)}{g(a+\theta h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$ "Que es la tesis"

Observando que

$$\lim_{x \to a} Q(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

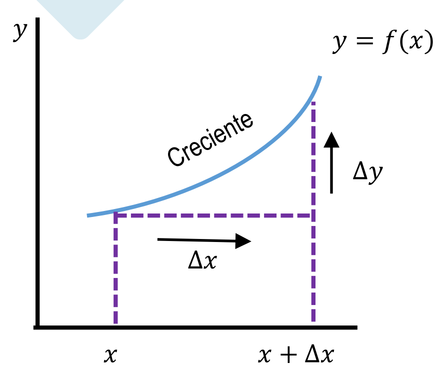
Si $f'(a) = g'(a) = 0$; se forma límite del cociente $\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

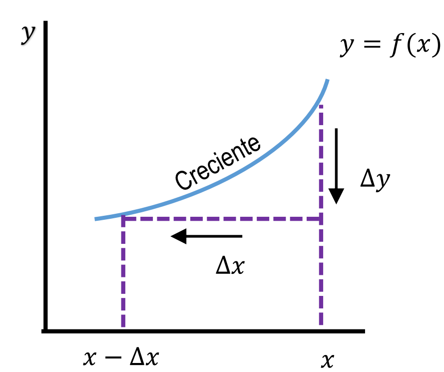
Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

La regla de L'Hopital se aplica a la forma $\frac{0}{0}$ y es extensible a la forma $\frac{\infty}{\infty}$; las restantes formas indeterminadas deben ser llevadas por medios algebraicos a las formas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y aplicar L'Hopital; hasta encontrar el verdadero valor que puede ser 0; una constante o ∞.

FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

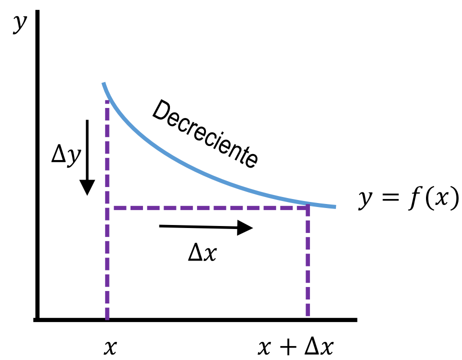




$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \ ; \ y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

Una función es creciente, cuando un incremento de la variable "x" corresponde un incremento de la función del mismo signo.

$$\Delta y . \Delta x > 0$$



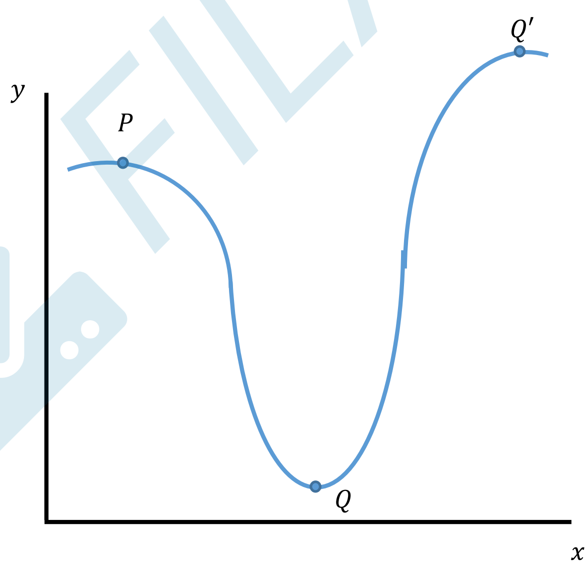
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

Una función es decreciente cuando los incrementos son de distintos signos

$$\Delta y . \Delta x < 0$$

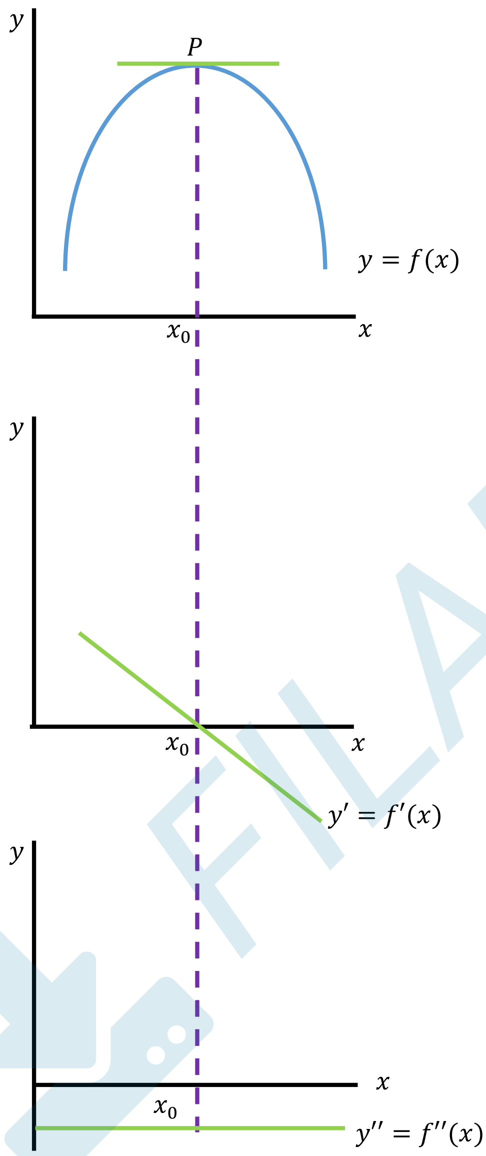
MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS



El punto P donde la función deja de crecer y empieza a decrecer lo llamaremos punto máximo relativo.

A puntos del tipo de Q, donde la función termina de decrecer y luego crece nuevamente; se le llama punto mínimo relativo.

Se les denomina relativos porque si observamos la figura tenemos un cierto punto “P” que es un máximo, cuya ordenada no es mayor que la ordenada de la función en el punto máximo; son relativos dentro de un cierto intervalo.



Cuando la función pasa por un máximo, a la izquierda la función es creciente, entonces la derivada de esta función es positiva.

Como la derivada de una función, es continua, para pasar de un valor positivo a uno negativo, forzosamente tiene que pasar por un valor nulo, es decir, cero.

A la derecha del máximo la función es decreciente, luego su derivada es negativa y decreciente.

Se observa que la tangente a la curva en el punto P es horizontal esto nos indica que la derivada primera es nula, condición necesaria pero no suficiente; porque puede ser un punto donde la tangente sea horizontal pero que no haya máximo ni mínimo relativo sino un punto de inflexión a tangente horizontal.

Derivamos nuevamente obteniendo la derivada segunda la cual es negativa por ser la derivada primera decreciente.

Si la derivada segunda es positiva hay un mínimo relativo.

Si la derivada segunda es negativa hay un máximo relativo.

Si la derivada segunda es nula (es decir igual a cero) se sigue derivando hasta obtener una derivada que no se anule y si está es de orden par y negativa tenemos un máximo relativo.

Si es de orden par y positivo tenemos un mínimo relativo.

Si es de orden impar tenemos un punto de inflexión a tangente horizontal.

Procedimiento para realizar el práctico

1) Se realiza la derivada primera de la función.
2) Igualamos a cero la derivada primera, obteniendo una ecuación. Resolvemos la ecuación, es decir obtenemos las raíces de la misma. Estas raíces son valores de x que son puntos donde puede haber máximos o mínimos (o punto de inflexión a tangente horizontal)
3) Se calcula la derivada segunda de la función.
4) Se reemplaza en la función derivada segunda los valores de las raíces: si da positivo (+) tenemos un mínimo.
   Si da negativo (-) tenemos un máximo.
5) Para determinar las ordenadas correspondientes; reemplazamos en la función dada las raíces.

Criterios para Determinar Extremos Locales, Máximos y Mínimos Relativos

CRITERIO 1: Estudio de los valores de la función.

Si c es punto interior a su dominio, derivable y $f'(c) = 0$; o no derivable, para saber si $f(c)$ es máximo relativo puede considerarse los valores de la función en un entorno de (c) y ver si satisface la definición.

$f(c)$ es máximo relativo de $f(x) \leftrightarrow \exists\, E_c \subseteq Df / \forall x \in E_c \rightarrow f(x) \leq f(c)$

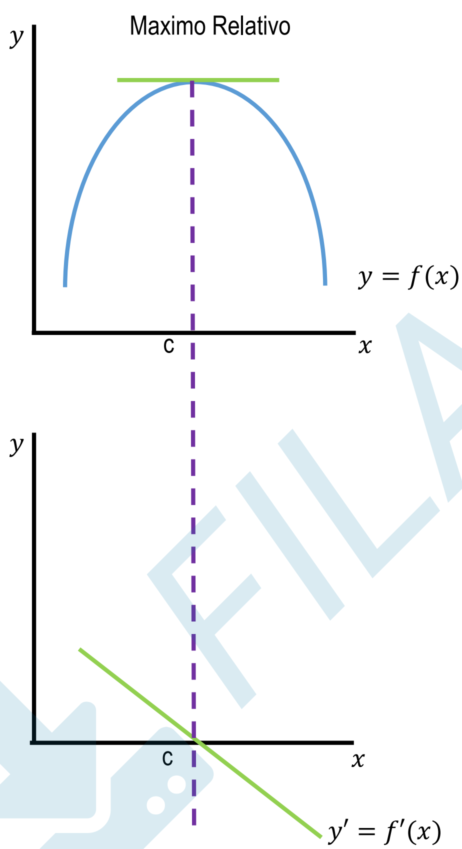
Lo mismo se puede hacer para verificar la existencia de un mínimo relativo.

$f(c)$ es mínimo relativo de $f(x) \leftrightarrow \exists\, E_c \subseteq Df / \forall x \in E_c \rightarrow f(x) \geq f(c)$

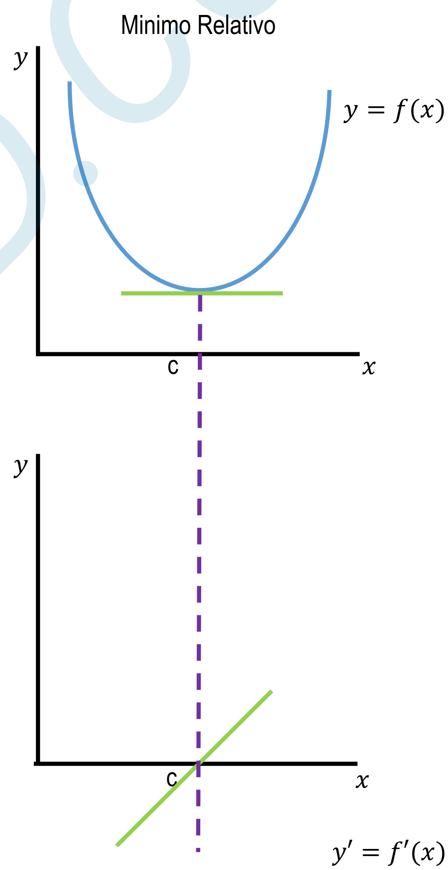
En general este criterio presenta dificultades de cálculo, pues habría que considerar los valores de la función en los infinitos puntos del entorno y puede llevar a conclusiones falsas si se consideran valores de la función en puntos aislados del entorno.

<u>CRITERIO 2:</u> Variación de la derivada primera. Se presentan dos casos:

- Teorema 1: Si una función es derivable en algún entorno de c, siendo c un punto interior a su dominio donde $f'(c) = 0$
  Si $f'(x)$ cambia de signo al pasar x del semi entorno de la izquierda al de la derecha; entonces $f(c)$ es un valor extremo real.



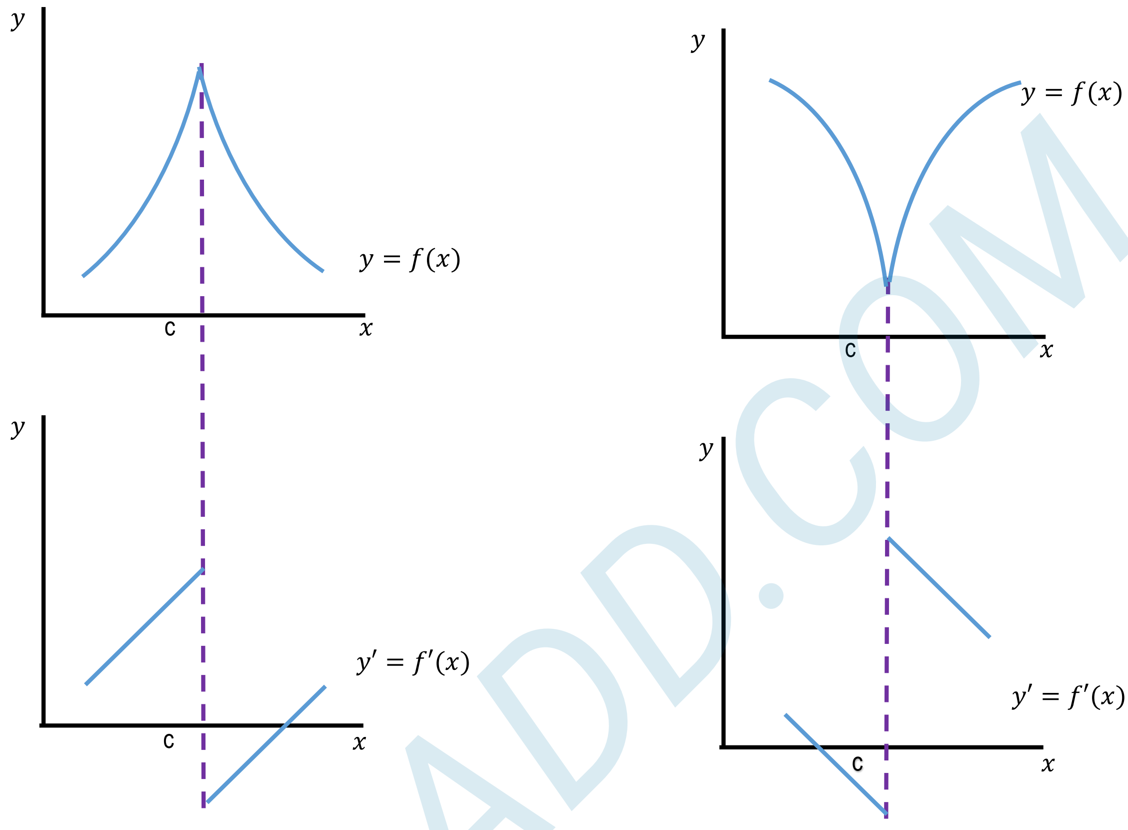
Si la $f'(x)$ pasa de + a – en el punto c tenemos un máximo relativo.



Si la $f'(x)$ pasa de – a + en el punto c tenemos un mínimo relativo.

- Teorema 2: Si una función es continua en c y derivable en el entorno reducido E'_c $[\nexists\, f'(c)]$

- Si $f'(x)$ cambia de signo al pasar x del semi entorno izquierdo al derecho, entonces $f(c)$ es un valor extremo relativo.

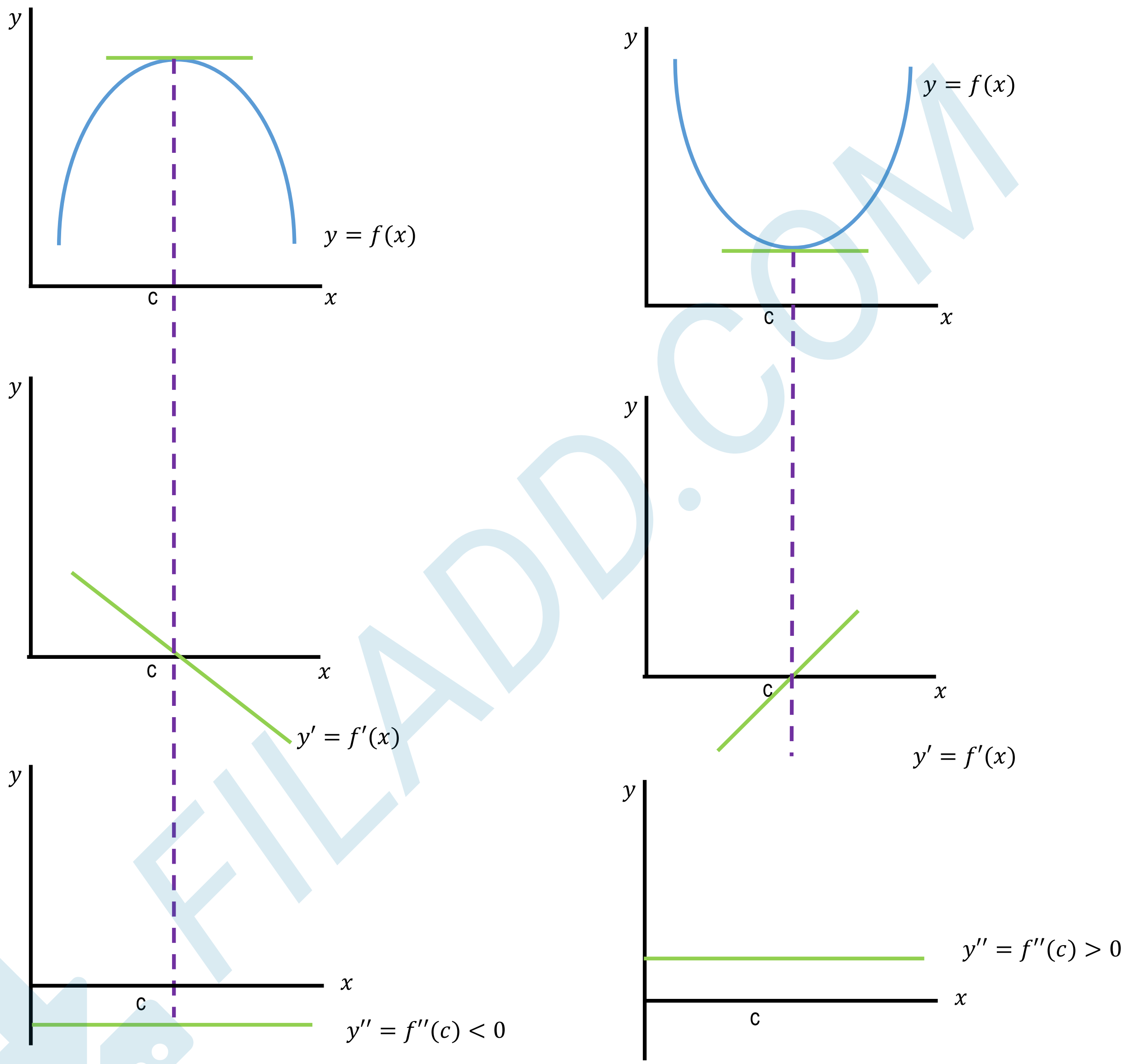


<u>CRITERIO 3:</u> Signo de la derivada segunda.

Si una función es derivable en c, interior a su dominio, en la cual se anula la derivada primera.

Si existe la derivada segunda $f''(c)$ y es menor que cero; entonces la función $f(c)$ es un máximo relativo.

En cambio, si existe la derivada segunda en c $[\exists f''(c)]$ y es mayor, entonces la $f(c)$ es un mínimo relativo.



PUNTO DE INFLEXIÓN

El punto donde el gráfico de una función continua cambia el sentido de su concavidad se llama punto de inflexión.

Para la existencia de un punto “c” de inflexión es necesario que:

- La función sea continua en el entorno de c E_c
- La función sea dos veces derivable en E'_c

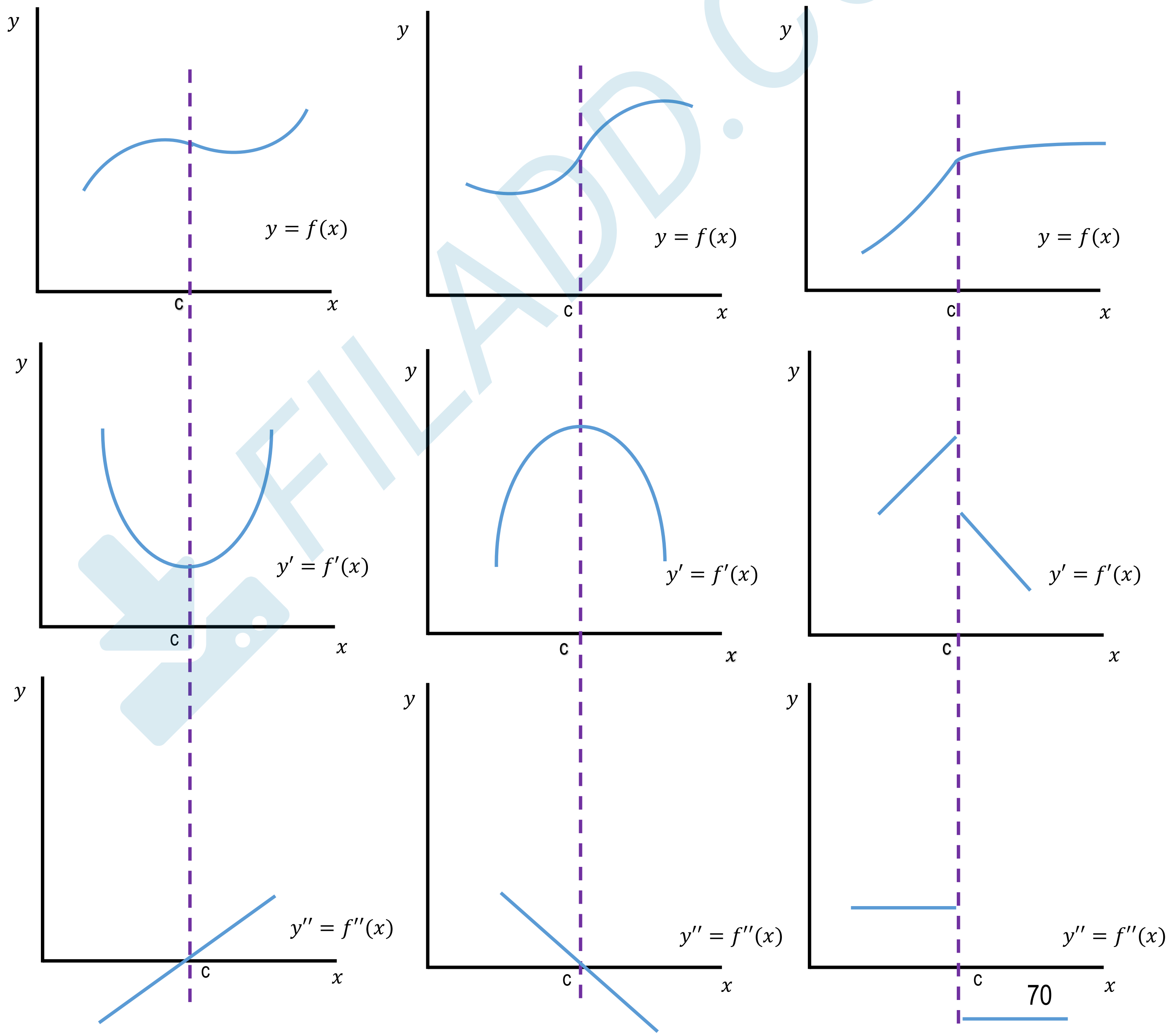
TEOREMA 1: Si una función es dos veces derivable en "c", punto interior del dominio de la función y la coordenada $[c; f(c)]$ es un punto de inflexión del gráfico de la función, entonces se verifica $f''(c) = 0$

TEOREMA 2: Si una función es dos veces derivable en algún entorno de c, $f''(c) = 0$ y si la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar del semi entorno izquierdo al derecho entonces se verifica que la coordenada $[c; f(c)]$es un punto de inflexión.

TEOREMA 3: Si una función es continua en c y dos veces derivable en el entorno reducido de c, es decir $\exists f''(c)$

Y si $f''(x)$ cambia de signo al pasar x del semi entorno izquierdo al derecho, entonces la coordenada $[c; f(c)]$es un punto de inflexión.

Teorema 1 y 2 Teorema 3



INTEGRACIÓN

Es la operación inversa a la derivación y a la diferenciación.

La integral puede ser:

1) Integral indefinida
2) Integral definida

Integral Indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

El símbolo de integración ($\int$) es como s alargada que indica una suma, pero no una sumatoria de finitos términos, sino una sumatoria de infinitos términos.

$f(x)$ es el integrando.

$f(x)dx$ es el elemento de integración.

La expresión que está dentro del símbolo de integración es el diferencial que pretendemos integrar.

Y la función $F(x)$ se denomina función primitiva, anti derivada o integral indefinida de $f(x)$; y existen infinitas primitivas de la $f(x)$ y su diferencia es una constante.

c pertenece a los reales (c, constante de integración)

Por ejemplo:

$f(x) = x^2$ tiene primitiva

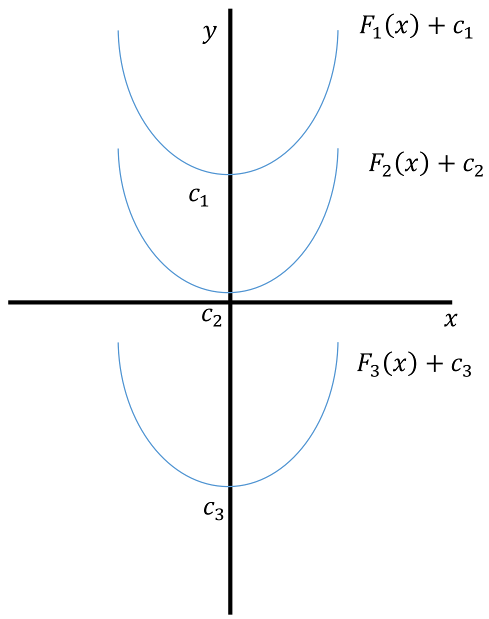
$$F(x) = \frac{x^3}{3} \therefore F'(x) = Dx\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)(Integrando)$$

También son primitivas de $f(x) = x^2$ las siguientes funciones:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1;\ F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5;\ F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt[3]{8}; etcétera$$

La derivada de cualquiera de las primitivas dadas nos da $f(x) = x^2$ (integrando), teniendo en cuenta que dos o más funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada.

Si $f(x)$ (integrando), tiene infinitas primitivas cuya diferencia es una constante arbitraria, estas funciones generan una familia de funciones desplazadas sobre el eje de las ordenadas según el valor de las constantes.



$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$f(x) = F'(x)$$

Propiedades de la Integran Indefinida

1) La integral de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de sus integrales.
$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c$$
2) La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.
$$\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx = k[F(x) + c]$$
3) La derivada de una integral indefinida es igual al integrando
$$Dx\left(\int f(x)dx\right) = Dx[F(x) + c] = f(x)$$

   Por ejemplo:
$$Dx\left(\int \cos x\ dx\right) = Dx(sen\ x + c) = \cos x$$
4) La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración.
$$dx\left(\int f(x)\ dx\right) = dx[F(x) + c] = f(x)\ dx$$
   Por ejemplo:
$$dx\left[\int \cos x\ dx\right] = dx[sen\ x + c] = \cos x\ dx$$
5) La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la suma de esta función más c

$$\int dG(x) = \int G'(x).dx = G(x) + c$$

Por ejemplo:

$$\int dx^3 = \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

Métodos de Integración

A) Inmediatas
B) Por sustitución o cambio de variable
C) Por partes
D) Por descomposición

A) **Integral Inmediata:** se resuelven en forma directa mediante una fórmula para lo cual es necesario conocer la tabla de las integrales inmediatas.
Por ejemplo:

$$\int \cos x\, dx = sen\, x + c$$

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

B) **Por Sustitución o Cambio de Variable**
Sea la integral $\int f(x)dx$ que no tiene primitiva inmediata, para resolverla aplicamos este método. Haciendo $x = \varphi(t)$ debe ser continua y admitir inversa.
Luego, el diferencial es igual a la derivada por diferencial de t

$$dx = \varphi'(t).dt$$

Resulta

$$\int f(x).dx = \int \underbrace{f[\varphi(t)].\varphi(t)}_{h(t)}.dt$$

$$h(t) = f[\varphi(t)].\varphi(t)$$

$$\int h(t).dt = H(t) + c$$

Es una integral inmediata pero en función de t.
Después de la integración se sustituye t en función de x. Luego,

$$\boxed{H(t) + c = F(x) + c}$$

Por ejemplo:

$$\int e^{sen\, x}.\cos x.dx = \left\{ \begin{array}{c} t = sen\, x \\ dt = \cos x.dx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array} \right\}$$

$$\int e^t.\cos x.\frac{dt}{\cos x} = \int e^t.dt = e^t + c = e^{sen\,x} + c$$

C) **Integración por Partes**

Este método de integración nos permite calcular la integral del producto de dos funciones de una misma variable.

Sea $y = u.v$

La diferencial de

$$d(u.v) = u.dv + v.du$$

Integrando nos queda

$$\int d(u.v) = \int u.dv + \int v.du$$

$$(u.v) = \int u.dv + \int v.du$$

$$\boxed{\int \underset{1}{u.dv} = u.v - \int \underset{2}{v.du}}$$ Fórmula de la integración por partes

La integral de (1) primer miembro es la integral a resolver que no es inmediata.
El segundo miembro es el resultado del ejercicio, en esta existe el integral (2) que debe ser llevada a inmediata

$$\int x.e^x.dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x.dx \\ v = \int dv = \int e^x.dx = e^x \end{array} \right\}$$

$$= x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

D) **Método de integración por descomposición**

Este método también puede definirse como propiedad, dice que la integral indefinida de la suma algebraica de dos o más funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones dadas.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + c$$

Ejemplo:

$$\int (4x^3 + 8x^2 + 3x + 4)dx = 4\int x^3dx + 8\int x^2dx + 3\int x\,dx + 4\int dx$$

$$= \frac{4x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$$

Integración de las Funciones Algebraicas Racionales Fraccionarias

Una función es racional cuando la variable no está afectada de radicación ni exponente fraccionario.

Consideramos un cociente de polinomios

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \; ; P(x) es\ de\ grado\ m$$
$$Q(x) es\ de\ grado\ n$$

Pueden suceder tres casos:

1) $n > m$
2) $m > n$
3) $m = n$

Si el grado del polinomio numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador se debe realizar la división previamente

D= dividendo; d= divisor; R= resto; c= cociente

D | d $\therefore D = c.d + R$

R c

$$\frac{D}{d} = \frac{c.d}{d} + \left[\frac{R}{d}\right] \rightarrow \frac{D}{d} = c + \left[\frac{R}{d}\right]$$

1)

$$n > m: \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \; ; P(x) es\ de\ grado\ m$$
$$Q(x) es\ de\ grado\ n$$

Fracción propia

$$\int \left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right]dx$$

Se observa que $P(x) = mx + n$; este numerador es la ecuación de una recta y el denominador es una ecuación de segundo grado $Q(x) = ax^2 + bx + c$
m, n, a, b, c son constantes.
Si el denominador es una ecuación de segundo grado admite una solución

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Tendremos en cuenta el discriminante o cantidad sub radical de la solución $(b^2 - 4ac)$, entonces

a) $(b^2 - 4ac) > 0 \rightarrow 2\, raíces\ reales\ distintas$
b) $(b^2 - 4ac) = 0 \rightarrow 2\, raíces\ reales\ iguales$
c) $(b^2 - 4ac) < 0 \rightarrow 2\, raíces\ complejas\ conjugadas$

Para cada caso de discriminante habrá una solución de la integral.

Veremos ahora como la integral de una función racional fraccionaria que no es inmediata se transforma en inmediata, mediante un procedimiento algebraico.

1) $n > m$

a)

$$\int \left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right] dx\,;\, dos\ raíces\ reales\ distintas$$

El integrando es una función propia; para resolverla usamos el MÉTODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c};\ ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \begin{matrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{matrix}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right]$$

$$mx+n = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right].\,a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\boxed{mx+n = A(x-x_2) + B(x-x_1)}$$

Expresión que nos permite calcular A y B definiendo las fracciones simples.

$$P/x = x_1 \therefore mx_1+n = A(x_1-x_2) + B(x_1-x_1)$$

$$A = \frac{mx_1+n}{(x_1-x_2)}$$

$$P/x = x_2 \therefore\ mx_2 + n = A(x_2 - x_2) + B(x_2 - x_1)$$

$$B = \frac{mx_2 + n}{(x_2 - x_1)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right] dx = \frac{1}{a}\int \left[\frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \left[\frac{A}{(x-x_1)}\right] dx + \frac{1}{a}\int \left[\frac{B}{(x-x_2)}\right] dx = \frac{A}{a}\int \frac{dx}{(x-x_1)} + \frac{B}{a}\int \frac{dx}{(x-x_2)} =$$

$$= \frac{A}{a}\ln(x-x_1) + \frac{B}{a}\ln(x-x_2) + c$$

Por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)} = \begin{Bmatrix} u = x - x_1 \\ du = dx \end{Bmatrix}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(x-x_1) + c$$

Si el polinomio denominador es de grado superior a dos, la cantidad de fracciones simples, es igual a la cantidad de raíces.

1) $n > m$

b)

$$\int \left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right] dx\,;\, si\ (b^2-4ac) = 0;\ dos\ raíces\ reales\ iguales$$

$$ax^2+bx+c = 0;\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-x_1)^2$$

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+n}{a(x-x_1)^2}$$

$$\frac{mx+n}{a(x-x_1)^2} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)^2} + \frac{B}{(x-x_1)}\right]$$

Por ejemplo

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3+6}{4} \to \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} = \frac{3+6}{2^2}$$

$$mx+n=\frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)^2}+\frac{B}{(x-x_1)}\right]a(x-x_1)^2$$

$$\boxed{mx+n=A+B(x-x_1)}$$

Expresión que nos permite calcular las constantes de integración definiendo las fracciones simples.

$$p/_x=x_1;\quad mx_1+n=A+B(x_1-x_1)\therefore A=mx_1+n$$

$$p/_x=0;\ \ m.0+n=A+B(0-x_1)$$

$$n=\ mx_1+n+B(0-x_1)\therefore n-n-mx_1=-Bx_1\rightarrow B=m$$

$$\int\left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right]dx=\frac{1}{a}\int\left[\frac{mx+n}{a(x-x_1)^2}\right]dx=\frac{1}{a}\int\frac{A}{(x-x_1)^2}dx+\int\frac{B}{(x-x_1)}dx=$$

$$\underbrace{\frac{A}{a}\int\frac{dx}{(x-x_1)^2}}_{D}+\underbrace{\frac{B}{a}\int\frac{dx}{(x-x_1)}}_{E}$$

D se resuelve por sustitución
E es inmediata

$$\int\frac{dx}{(x-x_1)^2}\begin{Bmatrix}u=x-x_1\\du=dx\end{Bmatrix}\rightarrow\int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}.du=\frac{u^{-1}}{(-1)}+c=-(x-x_1)^{-1}+c$$

$$\boxed{F(x)=\frac{-(mx_1+n)}{a(x-x_1)}+\frac{m}{a}\ln(x-x_1)+c}$$

1) $n>m$

c)

$$\int\left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right]dx\,;si\ (b^2-4ac)<0;\ dos\ raíces\ complejas\ conjugadas$$

$$ax^2+bx+c=0;\ \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\begin{cases}x_1=\alpha+i\beta\\x_2=\alpha-i\beta\end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=\ a(x-x_1)(x-x_2)=a[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]=$$

$$a[x-\alpha-i\beta][x-\alpha+i\beta]=a[(x-\alpha)-i\beta][(x-\alpha)+i\beta]=$$

$$a[(x-\alpha)^2 - i^2\beta^2] = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$$

$$\int \left[\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\right] dx = \frac{1}{a}\int \left[\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right] dx = \frac{1}{a\beta^2}\int \left[\frac{mx+n}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\right] dx$$

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta};\ x-\alpha = \beta t; x = \beta t + \alpha; dx = \beta dt$$

$$\frac{1}{a\beta^2}\int \left[\frac{m(\beta t+\alpha)+n}{t^2+1}\right]\beta dt = \frac{1}{a\beta}\int \left[\frac{m\beta t + m\alpha + n}{t^2+1}\right] dt =$$

$$\frac{1}{a}\int \left[\frac{mt}{t^2+1}\right] dt + \frac{1}{a\beta}\int \left[\frac{m\alpha+n}{t^2+1}\right] dt = \underbrace{\frac{m}{a}\int \frac{t}{t^2+1} dt}_{F} + \underbrace{\frac{(m\alpha+n)}{a\beta}\int \frac{dt}{t^2+1}}_{G} =$$

F $$\int \frac{t}{t^2+1} dt; \begin{Bmatrix} u = t^2+1 \\ du = 2t.dt \rightarrow dt = \dfrac{du}{2t} \end{Bmatrix}$$

$$\int \frac{t}{u}.\frac{du}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c$$

G $$\int \frac{dt}{t^2+1} = arc\ tg\ t + c$$

$$F(t) = \frac{m}{2a}\ln(t^2+1) + \frac{(m\alpha+n)}{a\beta} arc\ tg\ t + c$$

Sustituyendo t en la función

$$F(x) = \left(\frac{m}{2a}\right)\ln\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1\right] + \left(\frac{(m\alpha+n)}{a\beta}\right) arc\ tg\ \left[\frac{x-\alpha}{\beta}\right] + c$$

2) $m > n$; se aplica la división de polinomios

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx\ ;\ P(x) es\ de\ grado\ m$$
$$Q(x) es\ de\ grado\ n$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \underbrace{\int H(x)dx}_{1} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx}_{2}$$

$H(x)$ Polinomio simple o monomio
$R(x)$ Polinomio de grado menor que $Q(x)$

1) Se integra por descomposición
2) Se integra por descomposición en fracciones simples y si fuesen raíces imaginarias, se aplica el método correspondiente.

Por ejemplo:

$$\int \left[\frac{x^3 + 3x^2 - 10x + 16}{x^2 - 2x - 15}\right] dx =$$

Se realiza la división previamente de polinomios

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 - 10x + 16 & x^2 - 2x - 15 \\ \cline{2-2}
x^3 + 2x^2 + 15x & \quad x - 1 \\ \cline{1-1}
0 - x^2 + 5x + 16 & \\
+x^2 - 2x - 15 & \\ \cline{1-1}
0 + 3x + 1 &
\end{array}$$

$$\underbrace{\int (x-1)dx}_{1} + \underbrace{\int \left(\frac{3x+1}{x^2 - 2x - 15}\right) dx}_{2} =$$

1) Se integra por descomposición
2) Se integra por descomposición en fracciones simples; en este caso $(b^2 - 4ac)$ mayor que cero= dos raíces reales distintas.

<u>Resolvemos (2)</u>

$$x^2 - 2x - 15 = 0\ ;\ \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$\frac{3x+1}{x^2 - 2x - 15} = \frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}$$

$$\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)} = \left[\frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x+3)}\right]$$

$$3x+1 = \left[\frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x+3)}\right](x-5)(x+3)$$

$$\boxed{3x+1 = A(x+3) + B(x-5)}$$

$$^{p}/_{x} = 5 \rightarrow 3.5 + 1 = A(5+3) + B(5-5) \therefore 16 = A8 \rightarrow A = 2$$

$$^{p}/_{x} = -3 \rightarrow 3.(-3) + 1 = A(-3+3) + B(-3-5) \therefore -8 = B(-8) \rightarrow B = 1$$

$$\int \left[\frac{x^3+3x^2-10x+16}{x^2-2x-15}\right] dx = \int (x-1)dx + \int \left(\frac{3x+1}{x^2-2x-15}\right) dx =$$

$$\int x.dx - \int dx + \int \frac{A}{(x-5)}dx + \int \frac{B}{(x+3)}dx =$$

$$\int x.dx - \int dx + 2\int \frac{dx}{(x-5)} + \int \frac{dx}{(x+3)} =$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x-5) + \ln(x+3) + c$$

Integración de las Funciones Irracionales

Una función es irracional cuando la variable independiente (x) está afectada de signo radical o exponente fraccionario.

Existe una gran variedad de casos de los cuales veremos dos:

1) Las monómicas
2) Las binómicas

1) <u>Monómicas:</u>

$$\int R\left(x; x^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{p}{q}}; x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

Donde R es una función irracional donde los valores m, n, p, q, r, s de los exponentes son enteros.
Se realiza la sustitución

$$x = t^{n,q\dots s}$$

$$dx = n, q \dots s\; t^{(n,q\dots s)^{-1}} dt$$

Donde $n, q \dots s$ son los denominadores de los exponentes fraccionarios

$$\int R\left(x; x^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{p}{q}}; x^{\frac{r}{s}}\right) dx =$$

$$\boxed{n,q\ldots s\int R(t^{nqs};\ t^{mqs};\ t^{nps};\ t^{nqr})\,t^{(n,q\ldots s)^{-1}}dt}$$

Es ahora una “Función Algebraica Racional”

2) **Binómicas:**

$$\int R\left((ax+b);(ax+b)^{\frac{m}{n}};(ax+b)^{\frac{p}{q}};(ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

Sustituyendo:

$$(ax+b)=t^{n,q\ldots s}$$

$$a.dx=n,q\ldots s\ t^{(n,q\ldots s)^{-1}}dt\rightarrow dx=\frac{n,q\ldots s}{a}t^{(n,q\ldots s)^{-1}}dt$$

$$\int R\left((ax+b);(ax+b)^{\frac{m}{n}};(ax+b)^{\frac{p}{q}};(ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

Sustituyendo

$$\frac{n,q\ldots s}{a}\int R(t^{nqs};\ t^{mqs};\ t^{nps};\ t^{nqr})t^{(n,q\ldots s)^{-1}}dt$$

Por Ejemplo:

$$\int\frac{2x+\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int\left[\frac{2+x^{\frac{1}{2}}}{x.x^{\frac{1}{3}}}\right]x=\int\left[\frac{2+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right]dx$$

Se hace:

$$x=t^{2.3}=t^6$$
$$dx=6t^5dt$$

Se realiza la sustitución:

$$\int\left[\frac{2+t^3}{t^8}\right].6.t^5dt=\int\left(\frac{12t^5}{t^8}\right)dt+\int\left(\frac{6t}{t^8}\right)dt=12\int t^{-3}dt+6\int dt=$$

$$=\frac{12t^{-2}}{-2}+6t+c=-\frac{6}{t^2}+6t+c$$

Poniendo t en función de $x\rightarrow\left\{t=x^{\frac{1}{6}}\right\}$

$$F(x)=-\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}+6x^{\frac{1}{6}}+c\rightarrow\boxed{F(x)=\frac{-6}{\sqrt[3]{x}}+6\sqrt[6]{x}+c}$$

Integración de las Funciones Trigonométricas Directas (Circulares Directas), Expresadas como Funciones Racionales

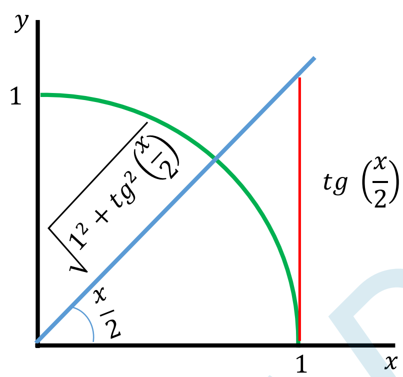
$$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x,tg\ x).dx$$

"R": "Racional de", designo una función algebraica. Se resuelve por sustitución que la transformará en algebraica racional, mediante transformaciones de carácter general. Se basa en que las funciones trigonométricas de un arco pueden siempre expresarse en función racional de la tangente del ángulo medio, la cual tomaremos como nueva variable.

Por trigonometría:

$$\text{A} \qquad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) . \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{B} \qquad \cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$



$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \quad ; \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

De (A)

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} . \frac{1}{\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2} = \boxed{\frac{2\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \qquad (1)$$

Función racional del seno de x expresado en función de la tangente de su ángulo mitad.

De (B)

$$\cos x = \frac{1^2}{\left(\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2} - \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right]^2 = \boxed{\frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \qquad (2)$$

Función racional del coseno de x expresado en función de la tangente de su ángulo mitad.

Tomando como variable a

$$t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg} t \quad ; \quad x=2\operatorname{arc\,tg} t$$

$$dx=2\,.\frac{1}{1+t^2}\,.dt$$

De (1)

$$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

De (2)

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{2t}{1-t^2}$$

Finalmente;

$$\int R(\operatorname{sen} x\,,\cos x, tg\ x).\,dx$$

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right).\frac{2}{1+t^2}\,.dt$$

Por ejemplo:

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=2\int\frac{1+t^2}{2t(1+t^2)}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c=\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c$$

INTEGRALES DEFINIDAS

Sumas Inferior y Superior

El análisis matemático nos proporciona un importante medio de investigación que es la INTEGRAL DEFINIDA, de aplicación en la Física, Mecánica, Electrónica y otras ramas de la ciencia.

Por medio de la integral definida se realiza el cálculo de las áreas limitadas por las curvas, longitudes de arcos, volúmenes, velocidad, etcétera.

Primeramente vamos a analizar un procedimiento aproximado.

Consideremos un área limitada por una curva, dos rectas paralelas cualesquiera y una perpendicular a ellas, es decir el arco $\overline{AB}$ y el eje de abscisas en el intervalo cerrado $[a,b]$.

Se divide al intervalo cerrado $[a, b]$ en n franjas iguales o desiguales mediante los puntos $a = x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; \dots; x_{n-1}; x_n$

Siendo $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < \cdots < x_{n-1} < x_n$

La partición del intervalo cerrado $[a, b]$, en n franjas originan sub intervalos que son $[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; [x_2; x_3]; \dots; [x_{n-1}; x_n]$

Luego se forman los incrementos
$x_1 - x_0 = \Delta x_1;\ x_2 - x_1 = \Delta x_2; x_3 - x_2 = \Delta x_3; \dots; x_\mathrm{n} - x_{\mathrm{n}-1} = \Delta x_\mathrm{n}$

Los valores mínimos dados por las ordenadas (m) y máximos por las ordenadas (M) de la función $f(x)$ son:

En el intervalo $[x_0; x_1]$ por m_1 y M_1

En el intervalo $[x_1; x_2]$ por m_2 y M_2

En el intervalo $[x_2; x_3]$ por m_3 y M_3

En el intervalo $[x_{n-1}; x_n]$ por m_n y M_n

Formando la suma inferior

$$\underline{S} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Siendo $i = 1; 2; 3; \dots; n$

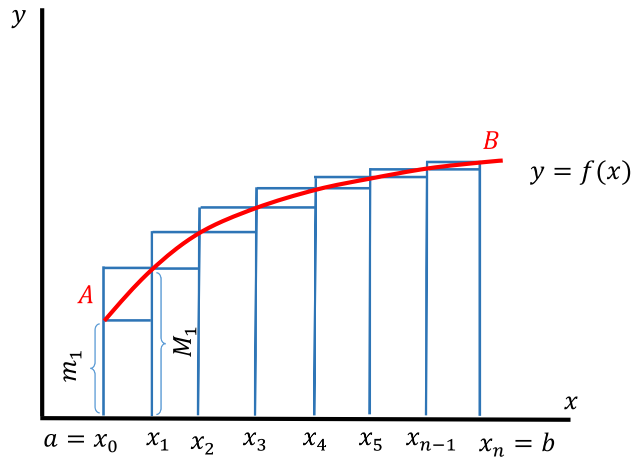
Es la suma de las superficies de los rectángulos que están por debajo de la curva, nos da el área aproximada por defecto.

Realizando la suma superior

$$\overline{S} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Es la suma de la superficie de los rectángulos que están por encima de la curva, nos da el área aproximada por exceso.

La aproximación será mayor mientras más divisiones tenga el intervalo cerrado $[a, b]$; siendo $\rightarrow \underline{S} \leq \overline{S}$



Integral Definida

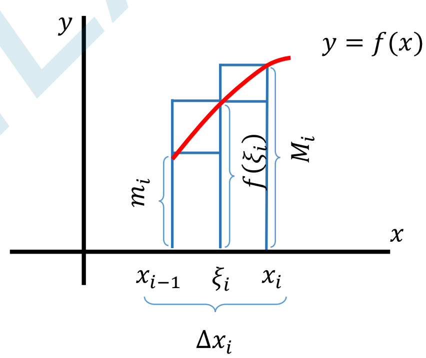
Refiriendo a la gráfica anterior; en cada uno de los intervalos parciales,
$[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; [x_2; x_3]; \ldots; [x_{n-1}; x_n]$, se eligen sendos puntos "ξ" cualquiera

$$x_0 < \xi_1 < x_1$$

$$x_1 < \xi_2 < x_2$$

$$x_2 < \xi_3 < x_3$$

$$x_{n-1} < \xi_n < x_n$$



Para cada uno de estos puntos el valor de la función $f(x)$
será $\xi_1\ f(\xi_1);\ \xi_2\ f(\xi_2);\ \xi_3\ f(\xi_3);\ \xi_n\ f(\xi_n)$

Formando la suma de las áreas de los rectángulos análogos se tendrá un valor aproximado del área total buscada

$$S = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Suma integral de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a;b]\forall\Delta x_i > 0$

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

$$m_i \leq \xi_i \leq M_i$$

$$m_i\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i$$

$$\underline{S} \leq S \leq \overline{S}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x).dx$$

$$A = \int_a^b f(x).dx$$

A es el área exacta del trapecio curvilíneo de la figura anterior.

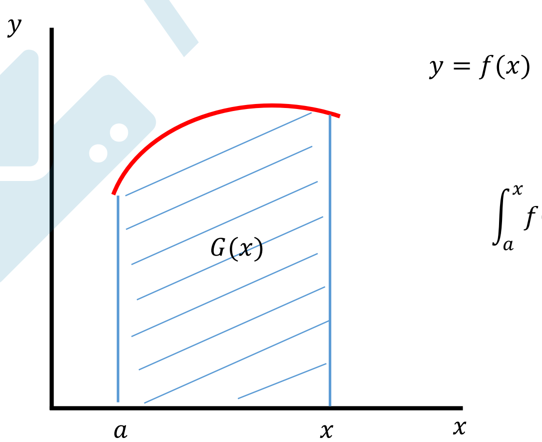
a y b son los límites inferior y superior de integración, siendo $a < b$.

La integral definida es un algoritmo matemático (ciencia de cálculo matemático o procedimiento de cálculo)

Cálculo de la Integral Definida o Función Integral

La $\int_a^b f(x).dx$ tiene distintos valores, según los valores de los extremos a, b

La variable de integración puede ser (x); (t) o cualquier variable



$$\int_a^x f(t).dt = G(x)$$

Si tomamos una integral definida con su límite superior variable y el inferior constante se obtiene

$G(x)$, se denomina función integral o función área que depende del límite superior de integración en el intervalo $[a; b]$ es decir θ depende de "x" (extremo variable), y es continua, por ser continua la función $f(x)$.

Conclusiones: Si la función $f(x)$ es "continua" en el intervalo $[a; b]$, es integrable en el mismo intervalo.

La integral definida depende solo de la forma de la función $f(x)$ y de los límites de integración, pero no de la variable de integración, pudiendo designarse por cualquier letra.

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt = \cdots = \int_a^b f(z).dz$$

Al dar el concepto de integral definida, $\int_a^b f(x).dx$, se ha considerado $a < b$, si se cambian entre sí los límites de integración se tiene

$$\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$$

Si $b = a$; para toda la función $f(x)$, se tiene:

$$\int_a^a f(x).dx = 0$$

Propiedades de la Integral Definida

1- Todo factor constante puede extraerse fuera del símbolo de integración definida:

$$\int_a^b k.f(x).dx = k\int_a^b f(x).dx$$

2- La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas de cada una de las funciones:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)].dx =$$

$$\int_a^b f_1(x).dx + \int_a^b f_2(x).dx + \int_a^b f_2(x).dx + \cdots + \int_a^b f_n(x).dx$$

3- Si $b = a$, para toda la función $f(x)$, se tiene

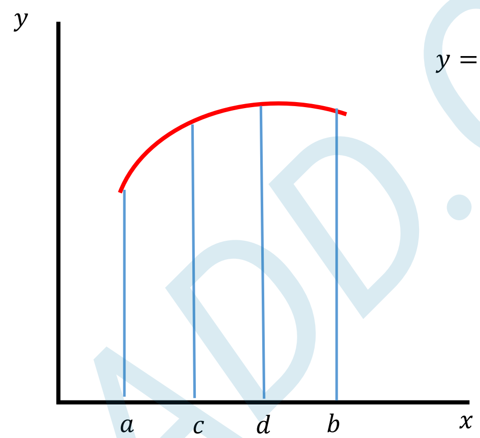
$$\int_a^a f(x).dx = 0$$

4- Si en una integral definida se intercambian entre si los límites de integración, la integral tiene el mismo valor absoluto, pero de distinto signo:

$$\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$$

5- Dado un intervalo de integración $[a;b]$, la integral definida de una función puede ser descompuesta en un número finito de integrales definidas, que se obtienen al subdividir dicho intervalo:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^d f(x).dx + \int_d^b f(x).dx$$



Siendo $a < c < d < b$

6- Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a;b]$ y $f(x) \leq g(x)$, resulta:

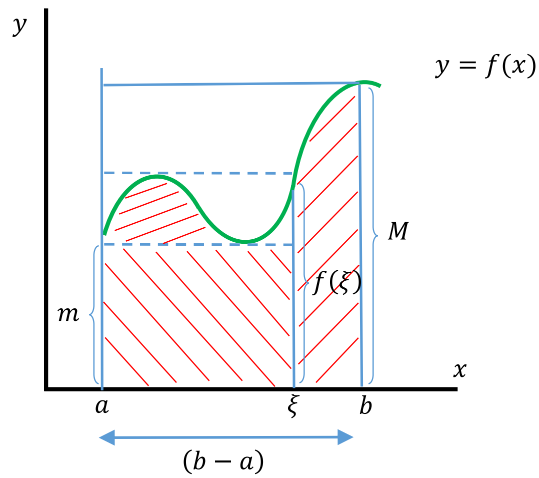
$$\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$$

7- La integral definida depende solo de la forma de la función $f(x)$ y de los límites de integración, pero no de la variable de integración, pudiendo designarse por cualquier letra:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt = \cdots = \int_a^b f(z).dz$$

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

Sea $y = f(x)$ una función continua y acotada en el intervalo $[a;b]$, su integral definida es igual a la amplitud del intervalo por el valor de la función en un punto intermedio.



m = mínimo absoluto

M = máximo absoluto

$(b-a)m$ = área del rectángulo menor

$(b-a)M$ = área del rectángulo mayor

Vemos que:

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x).dx \leq (b-a)M$$

La integral representa el área de la figura mixtilínea.

Dividiendo a la desigualdad anterior por $(b-a)$; se tiene lo siguiente:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x).dx \leq M$$

Por el teorema del valor intermedio de las funciones continuas en un intervalo cerrado hay un número comprendido entre el máximo y el mínimo.

Entonces en un punto ξ intermedio:

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x).dx = f(\xi)$$

Como la función $f(x)$ es continua, esta toma todos los valores intermedios entre m y M; $\therefore$
$m \leq f(\xi) \leq M\, ; {}^{p}/_{\xi} \rightarrow a < \xi < b$

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = (b-a).f(\xi)}$$

El valor de $f(\xi)$ se llama *"valor medio"* de $f(x)$ en el intervalo $[a;b]$ y representa la variación media de la integral definida por unidad de variación de la variable x en el intervalo $[a;b]$.

Existe un rectángulo medio cuya área es igual al área de la figura mixtilínea.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral y Cálculo de la Integral Definida

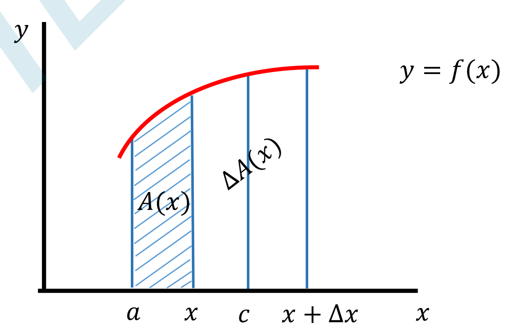
Regla de Barrow: si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a;b]$; la función integral es

$$A(x) = \int_a^x f(x).dx$$

Es derivable y su derivada en cualquier punto x del intervalo cerrado $[a;b]$ es $f(x)$ (integrando)

Es decir, para todo x que pertenece al intervalo cerrado $[a;b]$, $A'(x) = f(x)$

(a, b si consideramos derivadas laterales)



Demostración

Para probar que existe, aplicamos la definición de derivada.

El incremento es

$$A'(x) = f(x)$$

$$\Delta A(x) = A(x+\Delta x) - A(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x).\,dx - \int_a^x f(x).\,dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x).\,dx$$

Aplicando el teorema de valor medio de cálculo integral

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x).\,dx = f(c).\,\Delta x \quad ; \ {}^{p}/_{x} < c < x + \Delta x$$

Entonces el cociente incremental resulta:

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$$

Cuando Δx tiende a cero, c tiende a x y como la función es continua, por hipótesis

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

La derivada de una integral definida respecto de su límite superior es igual al integrando.

Esto implica que la función $A(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ (integrando), pudiendo decirse que toda función continua en un intervalo cerrado, admite una función primitiva en él.

REGLA DE BARROW

Dada una función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y una primitiva de ella es la función $F(x)$, y por el teorema enunciado, la función $A(x)$ es otra primitiva de la función $f(x)$, por lo tanto ambas primitivas difieren en una constante.

$$A(x) - F(x) = C \ \therefore A(x) = F(x) + C \ \rightarrow A(x) = \int_a^x f(x).\,dx = F(x) + C$$

Para determinar C, hacemos $x = a$

$$\int_a^a f(x).\,dx = F(a) + C = 0 \ \therefore C = -F(a)$$

O sea

$$\int_a^x f(x).\,dx = F(x) + C = F(x) - F(a)$$

Para $x = b$, resulta la regla de Barrow

$$\int_a^b f(x).\,dx = F(b) - F(a) = "Area"$$

Nos da el área comprendida entre la función $f(x); x = a; x = b$ y el eje x.

INTEGRALES IMPROPIAS O GENERALIZADAS

Al definir la Integral Definida se ha considerado que los extremos de integración "a";"b" son finitos, es decir el intervalo de integración es acotado, el integrando $f(x)$ también está acotado en el intervalo cerrado $[a; b]$.

Salvando estas dos restricciones es posible generalizar el concepto de integral definida a funciones acotadas definidas en intervalos infinitos, o bien a funciones no acotadas en intervalos no cerrados.

Se tienen así las <u>Integrales Impropias o Generalizadas</u>. Para lo cual se debe tomar límites según cada caso.

Se presentan los siguientes casos:

1) Intervalo de integración no acotado.
2) Integrando no acotado.
3) Intervalo de integración e integrando no acotado.

Si en alguno de los casos, el límite existe y es finito, decimos que la integral impropia es "convergente" o que la función es "integrable" sobre los intervalos considerados.

Si el límite es finito, La integral impropia es "divergente", y si no existe el límite ni finito, ni infinito, es "oscilante" y no tiene resultado.

1) Intervalo de Integración no Acotado:

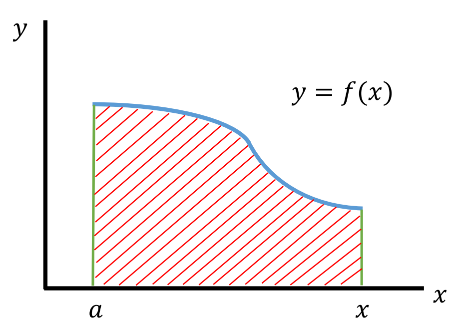
Tendremos los siguientes casos:

a) Límite superior no acotado
b) Límite inferior no acotado
c) Ambos límites acotados

a) Límite superior no acotado

Intervalo de integración $[a; x)$

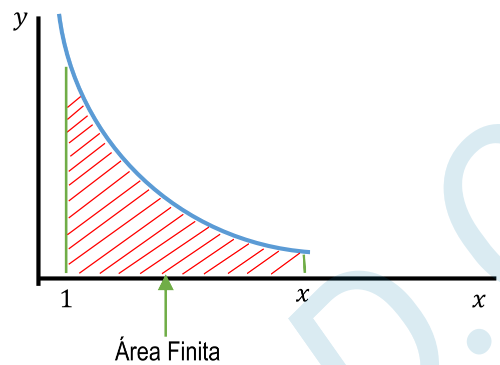
$x \to \infty$; "a" es finito.



$$\int_a^{\infty} f(x).dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^{x} f(x).dx = \lim_{x\to\infty}[F(x)]_a^x = \lim_{x\to\infty}[F(x)-F(a)] = A$$

Si la función es continua y positiva, el número real positivo $\int_a^{\infty} f(x).dx$ representa el área de la región indefinida a la derecha, y limitada por el eje x, por la recta de ecuación $x = a$ y por el gráfico de la función que se extiende indefinidamente a la derecha de la recta $x = a$.

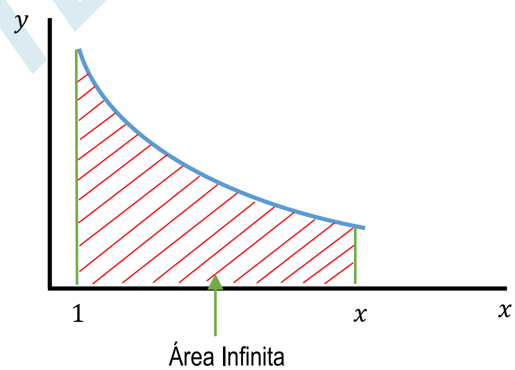
Ejemplo (I)



$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{x\to\infty}\int_1^{x} \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{x\to\infty}[-x^{-1}]_1^x = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}$$
$$= -\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$$

Convergente

(II)



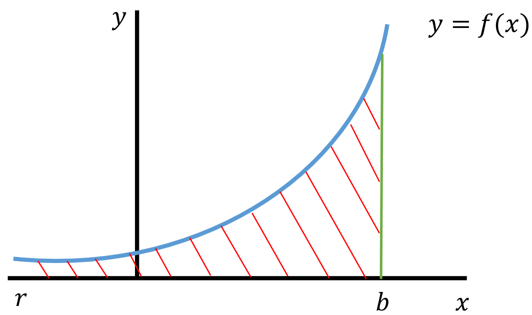
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}.dx = \lim_{x\to\infty}\int_1^{x} \frac{1}{x}.dx = \lim_{x\to\infty}[\ln x]_1^x = \lim_{x\to\infty}[\ln x - \ln 1] = \infty$$

Divergente

b) Límite inferior no acotado

Intervalo de integración $(r; b]; r \to -\infty; b$ es finito

$$\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{b} f(x).dx = \lim_{r\to-\infty} [F(x)]_r^b = \lim_{r\to-\infty} [F(b) - F(r)]$$



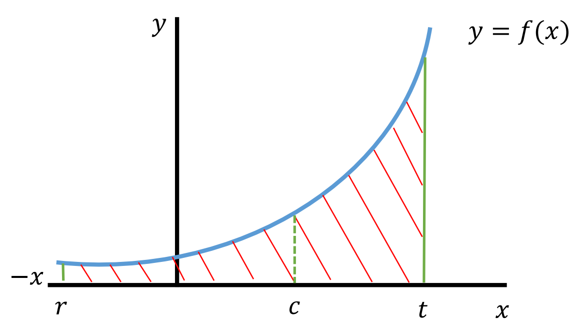
c) Ambos límites no acotados

Intervalo de integración $(r; t); r \to -\infty; t \to \infty$

Como se integra entre $-\infty$ y $+\infty$ se elige un valor c arbitrario y conocido; $c \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{c} f(x).dx + \lim_{t\to\infty} \int_{c}^{t} f(x).dx$$

$$\lim_{r\to-\infty} [F(x)]_r^c + \lim_{t\to\infty} [F(x)]_c^t = \lim_{r\to-\infty} [F(c) - F(r)] + \lim_{t\to\infty} [F(t) - F(c)]$$

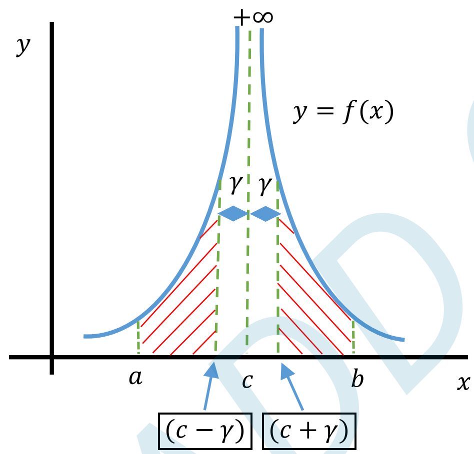


2) Integrando no acotado

Considerando $\int_a^b f(x).dx$; donde "a" y "b" son finitos, pero la función $f(x)$ presenta discontinuidad en $x = c$; $f(c) \to \infty$; $a < c < b$; siendo "c" un polo de la función $f(x)$

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\gamma\to 0}\int_a^{(c-\gamma)} f(x).dx + \lim_{\gamma\to 0}\int_{(c+\gamma)}^b f(x).dx =$$

$$\lim_{\gamma\to 0}[F(x)]_a^{(c-\gamma)} + \lim_{\gamma\to 0}[F(x)]_{(c+\gamma)}^b = \lim_{\gamma\to 0}[F(c-\gamma) - F(a)] + \lim_{\gamma\to 0}[F(b) - F(c+\gamma)]$$



Si la función es continua y positiva $[a; c-\gamma)$ y en $(c+\gamma; b]$ el número real positivo "A", representa el área de la región limitada por el eje x por las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$, y por los valores $(c-\gamma)$ y $(c+\gamma)$ próximos a las dos ramas del gráfico de la función que se extiende indefinidamente por arriba del eje x.

3) Intervalo de integración e integrando no acotados

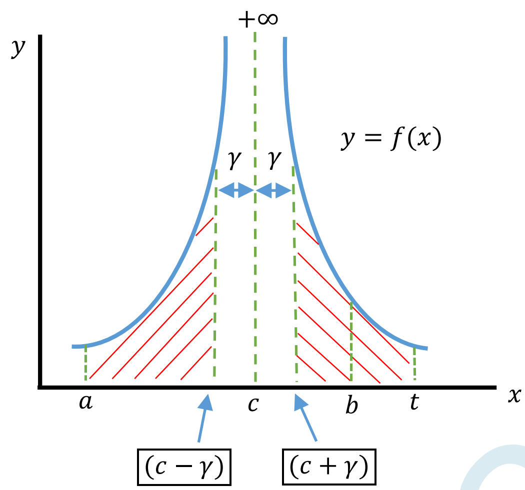
Intervalo de integración $[a; t)$; a es finito; $t \to \infty$

$f(x)$ es discontinua en $x = c / f(c) \to \infty \therefore a < c < b$ se elige punto $b \in R$; $c < b < +\infty$

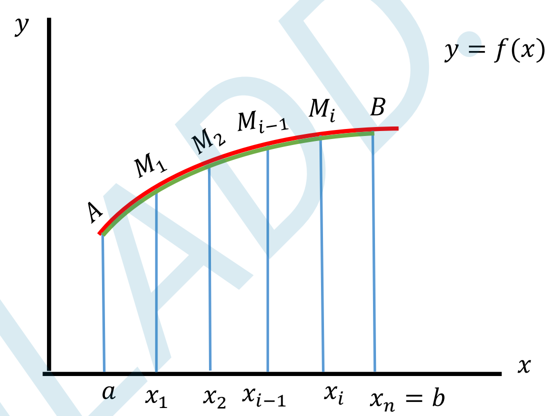
$$\int_a^\infty f(x).dx = \lim_{\gamma\to 0}\int_a^{(c-\gamma)} f(x).dx + \lim_{\gamma\to 0}\int_{(c+\gamma)}^b f(x).dx + \lim_{t\to\infty}\int_b^t f(x).dx$$

$$\lim_{\gamma\to 0}[F(x)]_a^{(c-\gamma)} + \lim_{\gamma\to 0}[F(x)]_{(c+\gamma)}^b + \lim_{t\to\infty}[F(x)]_b^t =$$

$$\lim_{\gamma\to 0}[F(c-\gamma) - F(a)] + \lim_{\gamma\to 0}[F(b) - F(c+\gamma)] + \lim_{t\to\infty}[F(t) - F(b)]$$



Longitud de un Arco de Curva



Dada la función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a; b]$, se busca calcular la longitud del arco $\overline{AB}$ comprendida entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Se toma sobre el arco $\overline{AB}$ los puntos $A, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots; B$ que tienen como abscisas $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ trazando cuerdas entre los puntos $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}B$. Las longitudes de estas cuerdas se las designa $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$. Tenemos una línea poligonal inscripta en el arco $\overline{AB}$

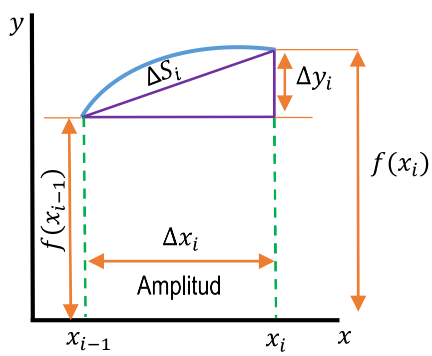
.La longitud de esta poligonal nos da la longitud aproximada

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

La longitud exacta del arco $\overline{AB}$

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

Analizando ahora ΔS_i



Se verifica que:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) \rightarrow \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]} \qquad (I)$$

$$\boxed{\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \, .\, \Delta x_i}$$

Por el teorema de Lagrange:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad ; \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Reemplazando esta última en la expresión (I). La misma nos queda

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} . \Delta x_i$$

Obtenida la expresión ΔS_i, la longitud de la poligonal inscripta es:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} . \Delta x_i$$

La longitud del arco $\overline{AB}$, será

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.\Delta x_i$$

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.dx}$$

Área de un Sólido en Revolución

Sea $y = f(x)$ continua en $[a; b]$ al girar la curva alrededor del eje (directriz) engendra un cuerpo en revolución, cuya área o superficie vamos a calcular.

Trazando una cuerda $AM_1;\ M_1M_2;\ M_2M_3;\ M_3M_{i-1};\ M_{i-1}M_i;\ M_iB$, las longitudes de las cuerdas son $\Delta S_1;\ \Delta S_2;$