Resolviendo lado derecho (2)

$$-\int_E N^T \nabla k \nabla N T \, dE$$

Los operadores nabla están en términos "x, y, z, t", al igual que el diferencial "E" (dx, dy, dz, dt); sin embargo, las matrices N y N^T están en términos de "$\epsilon, \eta, \phi, \theta$". Para uniformizar las operaciones, debemos hacer las correspondientes transformaciones; abordaremos posteriormente esta problemática.

$$-\int_E N^T \nabla k \nabla N T \, dE = -\int_E N^T \nabla k \nabla N \, dE \cdot T$$

Por ahora, ignoraremos "T". Se nos presenta una integral por partes:

$$-\int_E N^T \nabla k \nabla N \, dE \rightarrow \int_v U dv = [UV]|_v - \int_v dU V$$

Definimos entonces:

$$U := N^T \qquad dV := \nabla(k \nabla N)$$
$$dU := \nabla N^T \qquad V := k \nabla N$$

Por lo que: $-\int_E N^T \nabla (k \nabla N) dE = -\left([N^T k \nabla N]|_E - \int_E \nabla N^T k \nabla N \, dE\right)$

$$= -[N^T k \nabla N]|_E + \int_E \nabla N^T k \nabla N \, dE$$

Ahora, enfoquémonos en resolver la integral:

$$\int_E \nabla N^T k \nabla N \, dE$$

Como dijimos previamente, N y N^T no están en términos de x, y, z, t, por lo que, al aplicar nabla (que sí lo están), se nos haría todo 0.
Aplicamos transformaciones:

Sabiendo que
$$\nabla N = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi-\theta & \epsilon & \eta & \phi & \theta \end{bmatrix}$$

Podemos obtener un nabla en términos $\epsilon, \eta, \phi, \theta$:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial\epsilon \\ \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\phi \\ \partial/\partial\theta \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial\epsilon \\ \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\phi \\ \partial/\partial\theta \end{bmatrix}$$

$$\nabla N = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial\epsilon(1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) & \partial/\partial\epsilon(\epsilon) & \partial/\partial\epsilon(\eta) & \partial/\partial\epsilon(\phi) & \partial/\partial\epsilon(\theta) \\ \partial/\partial\eta(1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) & \partial/\partial\eta(\epsilon) & \partial/\partial\eta(\eta) & \partial/\partial\eta(\phi) & \partial/\partial\eta(\theta) \\ \partial/\partial\phi(1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) & \partial/\partial\phi(\epsilon) & \partial/\partial\phi(\eta) & \partial/\partial\phi(\phi) & \partial/\partial\phi(\theta) \\ \partial/\partial\theta(1-\epsilon-\eta-\phi-\theta) & \partial/\partial\theta(\theta) & \partial/\partial\theta(\eta) & \partial/\partial\theta(\phi) & \partial/\partial\theta(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\nabla N = J^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} := J^{-1}B$$

Por definición matricial:

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|}Adj(J) = \frac{1}{|J|}A$$

Por lo que: $\nabla N = \frac{1}{|J|}AB$

De igual forma: $\nabla N^T = \left(\frac{1}{|J|}AB\right)^T = \frac{1}{|J|}B^TA^T$

Entonces:

$$\int_E \nabla N^T k \nabla N \, dE = \int_E \frac{1}{|J|}B^TA^T k \frac{1}{|J|}AB \, dE$$

$$= \frac{k}{|J|^2}B^TA^TAB\int_E dE = \frac{kE}{|J|^2}B^TA^TAB$$

Finalmente, el lado 2 queda:

$$\left(-[N^T k \nabla N]|_E + \frac{kE}{|J|^2}B^TA^TAB\right)T$$

Scribe

Que distribuyendo términos:

$$-[N^T k \nabla N T]|_E + \left(\frac{k E}{|J|^2} B^T A^T A B \right) T$$