Circuito RLC

1. Dos mallas

Dos variables dependientes: corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

1 inductor y 1 capacitor, sistema de segundo orden.

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{?s^2+?s+?}{as^2+bs+c}$$

Ecuaciones principales

$$V_e(t) = R i_1(t) + L\frac{d[i_1(t)-i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t)-i_2(t)]$$

$$L\frac{d[i_1(t)-i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t)-i_2(t)] = R i_2(t) + R i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

$$V_s(t) = R i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

Transformada de Laplace

$$V_e(s) = R I_1(s) + Ls[I_1(s)-I_2(s)] + R[I_1(s)-I_2(s)]$$

$$Ls[I_1(s)-I_2(s)] + R[I_1(s)-I_2(s)] = 2R I_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$V_s(s) = R I_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

Procedimiento algebraico

Se realiza la suma algebraica en el voltaje de salida:

$$V_s(s) = \frac{CRs+1}{Cs} I_2(s)$$

Se despeja $I_1(s)$ y se agrupa $I_2(s)$ en la ecuación de la segunda malla:

$$LsI_1(s) - LsI_2(s) + RI_1(s) - RI_2(s) = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$LsI_1(s) + RI_1(s) = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs} + LsI_2(s) + RI_2(s)$$

$$(Ls+R)I_1(s) = \left(3R + \frac{1}{Cs} + Ls\right)I_2(s)$$

$$(Ls+R)I_1(s) = \left(\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs}\right)I_2(s)$$

$$I_1(s) = \frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} I_2(s)$$

Se sustituye $I_1(s)$ en la ecuación de la primera malla:

$$V_e(s) = R I_1(s) + Ls I_1(s) - Ls I_2(s) + R I_1(s) - R I_2(s)$$

$$V_e(s) = (R+Ls+R) I_1(s) - (Ls+R) I_2(s)$$

$$V_e(s) = (R+Ls+R)\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} I_2(s) - (Ls+R) I_2(s)$$

$$V_e(s) = \left[(R+Ls+R)\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} - (Ls+R)\right] I_2(s)$$

$$V_e(s) = \left[\frac{(2R+Ls)(CLs^2+3CRs+1) - Cs(Ls+R)(Ls+R)}{Cs(Ls+R)}\right] I_2(s)$$

$$(2R+Ls)(CLs^2+3CRs+1) = 2CLRs^2+6CR^2s+2R+CL^2s^3+3CLRs^2+Ls = \cancel{CL^2s^3}+5CLRs^2+6CR^2s+Ls+2R$$

$$Cs(Ls+R)(Ls+R) = \cancel{CL^2s^3}+2CLRs^2+CR^2s$$

$$V_e(s) = \frac{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}{Cs(Ls+R)} I_2(s)$$

Función de transferencia

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{CRs+1}{Cs} I_2(s)}{\frac{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}{Cs(Ls+R)} I_2(s)} = \frac{(CRs+1)(Ls+R)}{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{CLRs^2+(CR^2+L)s+R}{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}$$

Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

Nota: Cuando se realiza el análisis por mallas, se deben respetar las variables dependientes, es decir, las corrientes, recordando que, solamente se pueden despejar de términos donde no se estén derivando o integrando, además, se sugiere que el voltaje de entrada sea un término positivo:

Se despeja $i_1(t)$ de la ecuación de la primera malla:

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R i_2(t) \right] \frac{1}{2R}$$

por lo tanto, se despeja $i_2(t)$ de la ecuación de la segunda malla:

$$i_2(t) = \left[L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R i_1(t) - \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt \right] \frac{1}{3R}$$

Con la siguiente expresión como salida:

$$V_s(t) = R i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

Error en estado estacionario

El error en estado estacionario, se cálcula mediante el siguiente límite:

$$e(s) = \lim_{s \to 0} s\,V_e(s)\left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)}\right] = \lim_{s \to 0} s\,\frac{1}{s}\left[\frac{CLRs^2 + (CR^2 + L)s + R}{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R}\right] = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Nota: En este cálculo se debe considerar la entrada como el escalón unitario, es decir:

$V_e(t) = 1$ por lo tanto, $V_e(s) = \frac{1}{s}$

Analisis de estabilidad

Para determinar la estabilidad de un sistema en lazo abierto, se calculan los polos de la función de transferencia, es decir,

$$3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow a = 3CLR,\ b = 5CR^2 + L,\ C = 2R$$

$$\lambda_1 = -11363636.3542$$

$$\lambda_2 = -0.0567$$

Por lo tanto, el sistema es estable dado que ambas raices son negativas reales, entonces, el sistema presentara una respuesta sobreamortiguada a un escalón unitario de entrada.