2. Test Zusammenfassung

Vorwort

Diese Stoffsammlung/Zusammenfassung enthält den Stoff, der in der Analysis Vorlesung der TU Wien im Sommersemester 2025 vorgetragen wurde, der auch in "Mathematik für Informatik - Vierte erweiterte Auflage" zu finden ist. Die Struktur dieser Zusammenfassung basiert demnach auch der des Buchs.

Für einen schnellen Überblick über die Formeln, Sätze und Regeln, siehe: Formelsammlung von Markus

⚠ Hinweis

Derzeitig befindet sich in dieser Stoffsammlung nur Stoff, der für den 2. Analysis Test relevant ist.

Für den Stoff zum ersten Test siehe 1. Test -- Zusammenfassung

Weitere Kapitel folgen zeitnahe der Abschlussprüfung!
(Rechtschreib- und Satzzeichenfehler bzw. Inkonsistenzen in der Formatierung werden noch ausgebessert).

Falls sich irgendwo Fehler befinden oder es Verbesserungsvorschläge gibt, bitte an @xmozz auf Discord wenden.

Legende

Definitionen

Sätze/Rechenregeln

⚠ Hinweis auf Einschränkung von Sätzen und Definitionen

Beispiele

Inhalt

5.Differentialrechnung

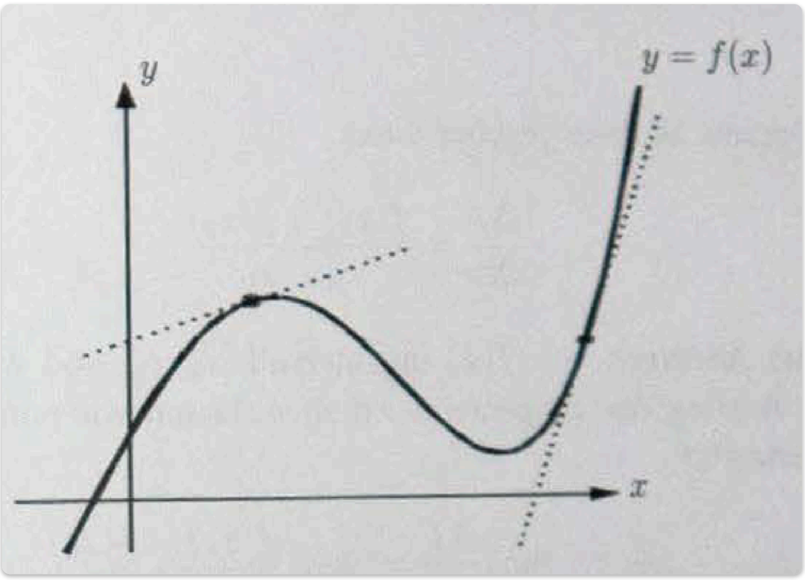
6. Differential und Integralrechnung in mehreren Variablen

5.1 Ableitung

Einleitung

Bedeutung der Tangente

- Die Tangente beschreibt die lokale Änderung der Funktion an einem bestimmten Punkt
- Sie gibt an, wie schnell sich der Funktionswert bei einer Änderung des Arguments verändert



Anstieg der Tangente

- Der Anstieg der Tangente entspricht der Änderungsrate der Funktion an der betrachteten Stelle
- Steiler Funktionsgraph $\Rightarrow$ große Änderungsrate, d.h. eine kleine Änderung im Argument führt zu einer großen Änderung im Funktionswert
- Flacher Funktionsgraph $\Rightarrow$ kleine Änderungsrate, d.h. eine Änderung im Argument führt nur zu einer geringen Änderung des Funktionswertes

Physikalische Bedeutung

- Ist $f(t)$ der Ort eines Objekts zur Zeit t, so entspricht die Änderung von $f(t)$ der Geschwindigkeit
- Die Tangente an den Graphen von $f(t)$ gibt also die Geschwindigkeit des Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt an

Bedeutung für Approximationen

- Bei starker Vergrößerung („Hineinzoomen“) sieht der Funktionsgraph lokal wie eine Gerade aus

- Die Tangente dient als lineare Approximation der Funktion in der Umgebung eines Punktes
- Vorteil: Eine Gerade ist einfacher zu handhaben als komplexere Funktionen

Definitionen

Definition Sekante / Mittleränderung / Differentialquotient

Mathematik für Informatik, p.200

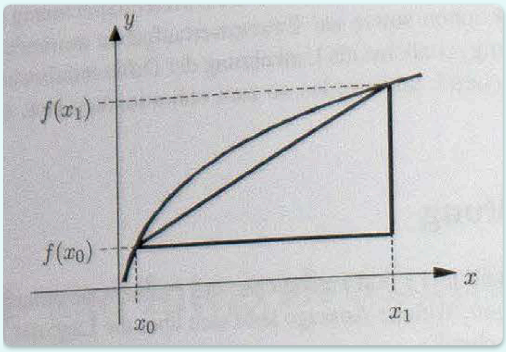
Der Anstieg der Sekante ist gegeben durch:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Das ist die mittlere Änderung von $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$ und wird Differenzenquotient genannt. Um den Anstieg der Tangente zu erhalten, lassen wir nun Δx gegen 0 gehen und berechnen den Grenzwert

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Diese Größe heißt, falls der Grenzwert existiert, Differentialquotient.



Definition 5.1

Tafelbild

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar im Punkt x_0**, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser **Grenzwert wird dann die Ableitung von f an der Stelle x_0** genannt und mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Falls f für alle $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f.

Hier wird der Differenzenquotient mit dem Limes erweitert

Beispiel zu Ableitungen von einfachen Funktionen

Beispiel 5.2 (Ableitungen einfacher Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.201, Tafelbild

(a) Konstante Funktionen $f(x) = c$. Es gilt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$ für alle x_0. Daher folgt aus $f(x) = c$, dass $f'(x) = 0$.

(b) Lineare Funktionen $f(x) = ax + b$. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

Es gilt also $f'(x) = a$. Die Ableitung von linearen Funktionen ist konstant.

(c) Für $f(x) = 2x^2 + 1$ folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2(x + x_0) = 4x_0.$$

In vo haben wir die Ableitung von $f(x) = x^3$ berechnet:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

(d) Für Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Also kurzgefasst: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
In ähnlicher Weise kann zeigen, dass die analoge Aussage auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt (siehe Übungsaufgaben)

(e) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ erfüllt

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Daher gilt zunächst

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 > 0 \\ -1 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$$

Interessant ist aber der Fall $x_0 = 0$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Da $\frac{|x|}{x}$ in jeder Umgebung um $x = 0$ sowohl die Werte -1 als auch 1 annimmt, kann der Grenzwert nicht existieren. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle $x = 0$ zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar.

Satz 5.3

Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.202

Eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist, ist dort auch stetig.

Beweis. Sei $f(x)$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{0} = 0$$

Daher ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h., f ist stetig in x_0.

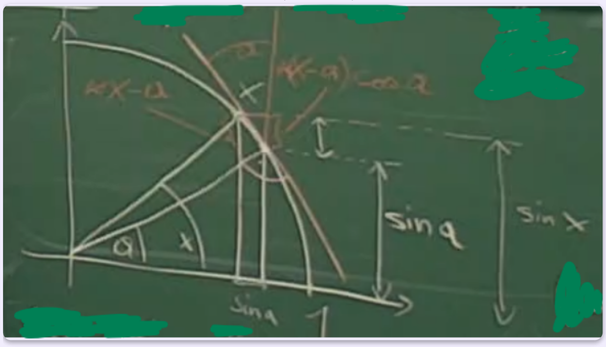
Beispiel 5.4 (Ableitungen elementarer Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.202, Tafelbild

(a) $f(x) = \sin x$: Mit Hilfe des Additionstheorems (4.11) für die Sinusfunktion, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, bekommen wir

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x_0 \cos(x - x_0) + \sin(x - x_0)\cos x_0 - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \sin x_0 \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{0 \text{ wegen } (4.13)} + \cos x_0 \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{1 \text{ wegen } (4.12)} \\
&= \cos x_0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher $(\sin x)' = \cos x$. Analog zeigt man $(\cos x)' = -\sin x$.



(b) Differenziert man die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, so erhält man

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

Durch Einsetzen der Exponentialreihe kann man $\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$ weiter umformen zu

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} &= \frac{\left(1 + (x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots\right) - 1}{x - x_0} \\
&= \left(1 + \frac{(x - x_0)}{2!} + \frac{(x - x_0)^2}{3!} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erkennt man, dass für $x > x_0$ die Ungleichungen

$$1 \le \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \le \left(1 + \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots\right) = e^{x-x_0}$$

erfüllt sind. Aufgrund der Stetigkeit von e^x gilt $\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = 1$, und daraus folgt $\lim_{x\to x_0+} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$. Analog zeigt man $\lim_{x\to x_0-} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$ und erhält infolge dessen $(e^x)' = e^x$.

Ableitungsregeln

Satz 5.5 (Ableitungsregeln)

Mathematik für Informatik, p.203, tafelbild, 400|Tafelbild

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(cf(x))' = cf'(x)$.

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$. Diese Regel gemeinsam mit (i) besagt, dass die Differentiation eine *lineare Abbildung* ist.

(iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Produktregel)

(iv) Falls $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(v) Sei $F(x) = f(g(x))$ eine zusammengesetzte Funktion. Dann gilt

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x). \qquad (\text{ Kettenregel })$$

Hier wird f als äußere Funktion, g als innere Funktion bezeichnet. Die Kettenregel besagt demnach: Äußere Funktion ableiten und mit der inneren Ableitung (genauer: der Ableitung der inneren Funktion) multiplizieren.

In der Leibniz'schen Schreibweise lässt sich diese Regel besonders kurz schreiben: Fasst man nämlich $g(x)$ als Argument von f auf, dann erhält man

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

(vi) Falls $f : D \to f(D)$ invertierbar ist und die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt, dann gilt für alle $y \in f(D)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

In der Leibniz'schen Schreibweise ist diese Regel besonders einprägsam: Gilt $f(x) = y$, so lässt sich $f'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$ schreiben. Für die Umkehrfunktion gilt aber $x = f^{-1}(y)$ und bei Differentiation nach y schreibt man dann $\frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Die obige Regel lautet nun

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beweis von Produktregel

Beweis Produktregel

Mathematik für Informatik, p.203

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind trivial, weshalb wir uns gleich der Produktregel zuwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'\left(x_0\right) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f\left(x_0\right)g(x) + f\left(x_0\right)g(x) - f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f\left(x_0\right) \frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x)}_{g(x_0)} + f\left(x_0\right) \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Beweis von Kettenregel

Beweis Kettenregel

Mathematik für Informatik, p.204

Zum Beweis der Kettenregel betrachten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{g(x) - g\left(x_0\right)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0}.$$

Der zweite Faktor ist definitionsgemäß $g'\left(x_0\right)$. Da g differenzierbar und folglich auch stetig ist, folgt $\lim_{x \to x_0} g(x) = g\left(x_0\right)$. Daher ist der erste Faktor gleich $f'\left(g\left(x_0\right)\right)$ wie behauptet. Zu beachten ist, dass diese Herleitung $g(x) \neq g\left(x_0\right)$ voraussetzt. Im Fall $g(x) = g\left(x_0\right)$ verschwindet aber der Differenzenquotient in (5.2), so dass diese Fälle bei der Grenzwertbildung in (5.2) keine Rolle spielen.

Die Quotientenregel beweist man durch Anwendung der Produktregel auf $f(x) \frac{1}{g(x)}$, wobei auf den zweiten Faktor die Kettenregel angewendet werden muss (mit $\frac{1}{g(x)} = h(g(x))$ und $h(x) = \frac{1}{x}$, siehe auch Beispiel 5.2d).

Um (vi) zu beweisen, setzen wir $f(x) = y$ und $f\left(x_0\right) = y_0$. Nun rufen wir uns in Erinnerung, dass f stetig ist (wegen Satz 5.3) und daher f^{-1} ebenso (wegen Satz 4.91). Somit gilt: Wenn y gegen y_0 konvergiert, dann auch $x \to x_0$. Das impliziert

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\left(y_0\right)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f\left(x_0\right)} = \frac{1}{f'\left(x_0\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y_0\right)\right)}$$

Eine Beweisführung mit Hilfe der Kettenregel (Differentiation beider Seiten der Gleichung $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ nach y) setzt die Differenzierbarkeit von f^{-1} voraus, die man dann gesondert beweisen müsste.

Beweis von Quotientenregel

Beweis der Quotientenregel

zz:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Herleitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Produktregel (PR):

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Kettenregel auf $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (g(x)^{-1})'$:

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)\right)$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\right)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Gleichnamig machen der Brüche:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Zusammenfassen:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Ableitung elementarer Funktionen

Beispiel 5.6 Ableitung elementarer Funktionen

Mathematik für Informatik, p.204, Tafelbild1, Tafelbild2

(a) Aus $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5$ folgt nach Anwendung der Ableitungsregel (ii) und Ableiten der Potenzfunktionen $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$

(b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^x$. Anwendung der Produktregel ergibt $f'(x) = 2xe^x + \left(1 + x^2\right)e^x = \left(1 + 2x + x^2\right)e^x = (1 + x)^2 e^x$

(c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

(d) Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Mit Ableitungsregel (vi) und $(e^x)' = e^x$ erhalten wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(e) Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Hier lässt sich die Funktion umschreiben zu $f(x) = e^{\alpha \ln x}$ und nun nach der Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Die bereits bekannte Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten ist also für alle Exponenten gültig.

(f) Die Funktion $f(x) = \sin\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$ ist mehrfach geschachtelt. Es gilt $f(x) = f_1\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right)$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ und $f_3(x) = 1 + x^2$. Folglich haben wir $f_1'(x) = \cos x$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f_3'(x) = 2x$. Die Ableitung von f ermittelt man nun mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = f_1'\left((f_2 \circ f_3)(x)\right) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = f_1'\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right) \cdot f_2'\left(f_3(x)\right) \cdot f_3'(x)$$

Das ergibt

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right).$$

(g) $f(x) = \arctan x$. Setzen wir $y = f(x)$, dann folgt $x = \tan y$. Weiters gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Kurzfassung der grundlegenden Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
ax^k	$(ak)x^{k-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Höhere Ableitungen

Mathematik für Informatik, p.205

Bis jetzt haben wir in diesem Abschnitt nur erste Ableitungen betrachtet. Falls jedoch die Ableitung einer Funktion wiederum differenzierbar ist, so lassen sich auch höhere Ableitungen bestimmen.

Definition 5.7 (n-te Ableitung)

Eine Funktion $f(x)$ heißt an einer Stelle $x_0 n$-mal differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert, die rekursiv durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(1)}(x) = f'(x)$$

definiert ist. Ist $f^{(n)}$ auch stetig in x_0, dann heißt $f(x) n$-mal stetig differenzierbar in x_0.

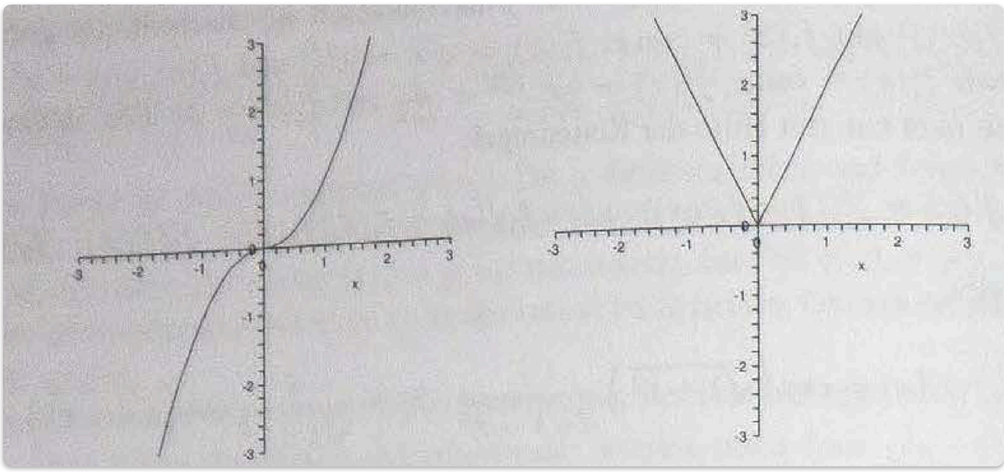
Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable

5.2 Satz von Taylor

1. Mittelwertsatzt

Differentialrechnung wird auch verwendet um Aussagen über Gestalten von Graphen von Funktionen zu gewinnen. Beispielsweise kann man hier anhand der Ableitung die Steigung ablesen von der Stammfunktion.



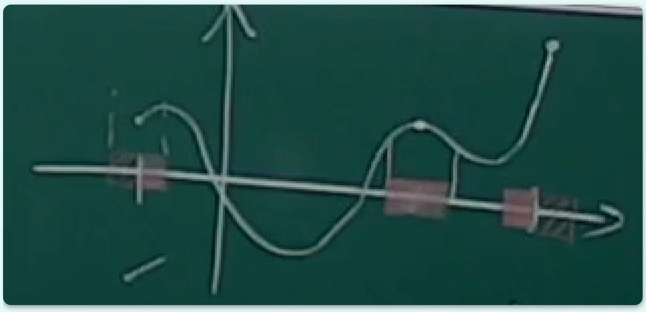
Maximum und Minimum

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild1, Tafelbild2

Definition 5.10

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein relatives Maximum (oder lokales Maximum), wenn es eine Umgebung $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ gibt, so dass $f(x) \leq f\left(x_0\right)$ für alle $x \in U_{\varepsilon}\left(x_0\right) \cap D$ gilt.
Also wenn ich im Definitionsbereich bin und ich in einem hinreichend kleinen Intervall x_0 das größte Element ist.

Die Stelle x_0 heißt absolutes Maximum, wenn $f(x) \leq f\left(x_0\right)$ für alle x in D gilt. Analog sind relative und absolute Minima definiert. Minima und Maxima nent man auch Extrema oder Extremwerte von f.



Wenn eine differenzierbare Funktion ein lokales Extremum besitzt, welches innerhalb (und nicht am Rande) des Definitionsbereichs liegt, hat an der Stelle eine waagrechte Tangente.

Definition 5.11 (Erweitert durch vo)

Definition 5.11 (Erweitert)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- Das Innere von D, bezeichnet als $\mathring{D}$, ist die Menge aller Punkte $x \in D$, für die es eine offene Umgebung $U_{\varepsilon}(x)=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ mit $\varepsilon>0$ gibt, die vollständig in D enthalten ist:

$$\mathring{D}=\left\{x \in D \mid \exists \varepsilon>0: U_{\varepsilon}(x) \subseteq D\right\}$$

  Ist speziell $I=[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so ist dessen Inneres $\mathring{I}=(a, b)$. Die Elemente von $\mathring{D}$ heißen innere Punkte.
- Der Rand von D, bezeichnet als ∂D, ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die jede offene Umgebung $U_{\varepsilon}(x)$ sowohl Punkte in D als auch Punkte außerhalb von D enthält:

$$\partial D=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon>0: U_{\varepsilon}(x) \cap D \neq \emptyset \wedge U_{\varepsilon}(x) \cap(\mathbb{R} \backslash D) \neq \emptyset\right\}$$

- Der **Abschluss von D**, bezeichnet als $\overline{D}$, ist die Vereinigung der Menge D mit ihrem Rand ∂D:

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

  Es gilt auch $\overline{D} = \mathring{D} \cup \partial D$.
- Eine Menge D heißt **abgeschlossen**, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt: $D = \overline{D}$.
- Eine Menge D heißt **offen**, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt: $D = \mathring{D}$.

Satz 5.12

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x_0 *ein lokales Extremum* im Inneren von D. Dann gilt $f'\left(x_0\right)=0$.

Wichtige Bemerkung dafür:

- Nicht anwendbar am Rand von D
- Extrema am Rand von D nicht definiert
- --> man muss den Rand gesondert untersuchen

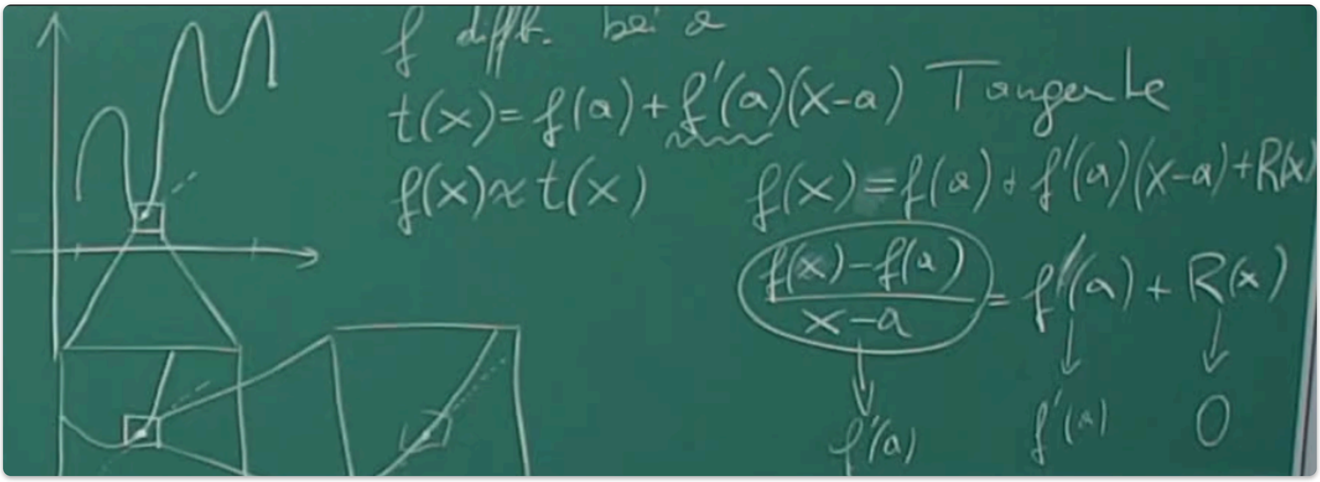
Beweis. O.B.d.A. sei x_0 ein lokales Minimum. Es gilt also $f(x)-f\left(x_0\right) \geq 0$ für alle x in einer Umgebung $U_{\varepsilon}\left(x_0\right) \subseteq D$. Aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ folgt, dass die einseitigen Grenzwerte für $x \rightarrow x_0+$ und $x \rightarrow x_0$ - existieren und übereinstimmen. Daher haben wir einerseits

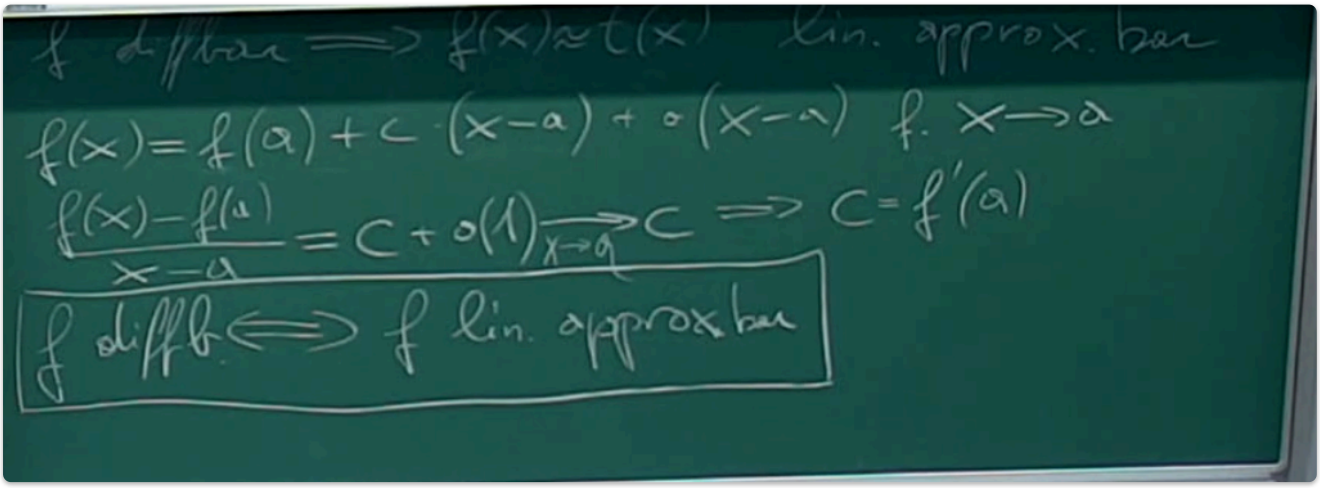
$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \geq 0$$

und andererseits

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \leq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.


f diffb. bei a
$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ Tangente
$f(x) \approx t(x)$
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + R(x)$
$f'(a)$ $f'(a)$ 0


f diffbar $\Longrightarrow f(x) \approx t(x)$ lin. approx. bar
$f(x) = f(a) + c\cdot(x-a) + o(x-a)$ f. $x \to a$
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + o(1) \xrightarrow[x\to a]{} c \Longrightarrow c = f'(a)$
$\boxed{f \text{ diffb.} \Longleftrightarrow f \text{ lin. approx.bar}}$

Info

Tafelbild

Ableitung und mittlere Änderung

Lokale Änderung (Ableitung)

Die Ableitung von f an der Stelle a, $f'(a)$, ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dies beschreibt die lokale Änderungsrate der Funktion f am Punkt a.

Mittlere Änderung

Für ein Intervall $I = [c, d]$ ist die mittlere Änderungsrate der Funktion f gegeben durch:

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Dies entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(c, f(c))$ und $(d, f(d))$ auf dem Graphen von f.

Grafische Darstellung

- Die Ableitung $f'(a)$ entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.
- Die mittlere Änderung entspricht der Steigung der Sekante durch zwei Punkte auf dem Graphen.

Mittelwertsatz

Satz 5.14 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

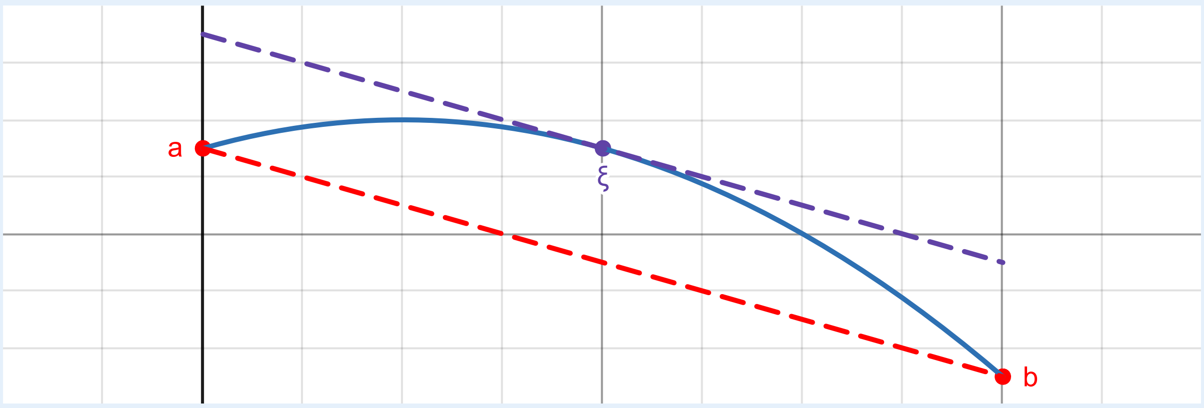
Beweis. Falls f eine lineare Funktion $f(x) = cx + d$ ist (der Graph also eine Gerade ist), dann ist die Behauptung trivial. Andernfalls ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

nicht konstant, aber offensichtlich stetig in $[a, b]$. Daher besitzt sie nach Satz 4.90 ein Maximum und ein Minimum in $[a, b]$. Wegen $F(a) = F(b) = f(a)$ muss eines dieser beiden Extrema im Inneren der Intervalls liegen. Wir nennen die entsprechende Stelle ξ. Aus Satz 5.12 folgt nun, dass $F'(\xi) = 0$. Anwendung der Differentiationsregeln (Satz 5.5) ergibt

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.



Satz 5.16

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Seien f und g zwei auf einem Intervall I stetige und in dessen Innerem $\mathring{I}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in I$. Dann ist die Differenz $f(x) - g(x)$ auf I konstant, d.h., f und g unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

Beweis. Wir zeichnen einen Punkt $x_0 \in I$ aus und setzen $F(x) = f(x) - g(x)$. Dann lässt sich wegen des Mittelwertsatzes für jedes $x \in I$ ein $\xi \in \overset{\circ}{I}$ finden, so dass $F(x) = F(x_0) + F'(\xi)(x - x_0)$. Daher folgt aus $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, dass $F(x) = F(x_0)$, also F konstant ist.

Bis hierhin sollte der Stoff des 1. Übungstests gehen. Alles danach sollte für den 1. Test irrelevant sein, ist vollständigkeitshalber trotzdem noch in dem File.

---

2. Taylorreihen

Lineare Approximation

- Gleichung (5.3): Tangente als beste lineare Approximation von $f(x)$ nahe x_0
- Lineare Approximation entspricht einem Polynom 1. Ordnung

Motivation für bessere Approximationen

- Lineare Approximation genügt nicht immer für hohe Genauigkeit
- Bessere Approximationen können nicht linear sein, sollen aber möglichst einfach bleiben
- Naheliegende Wahl: Polynome höherer Ordnung

Polynomdarstellung

- Gegeben: $f(x)$ ist lokal durch ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad n annäherbar
- Darstellung um x_0:
  $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$

Bestimmung der Koeffizienten

Beispiel

Mathematik für Informatik, p.209

- Eine Möglichkeit: Lösen eines linearen Gleichungssystems
- Alternativ: Differentialrechnung
  - Durch wiederholtes Differenzieren können die Koeffizienten a_k berechnet werden

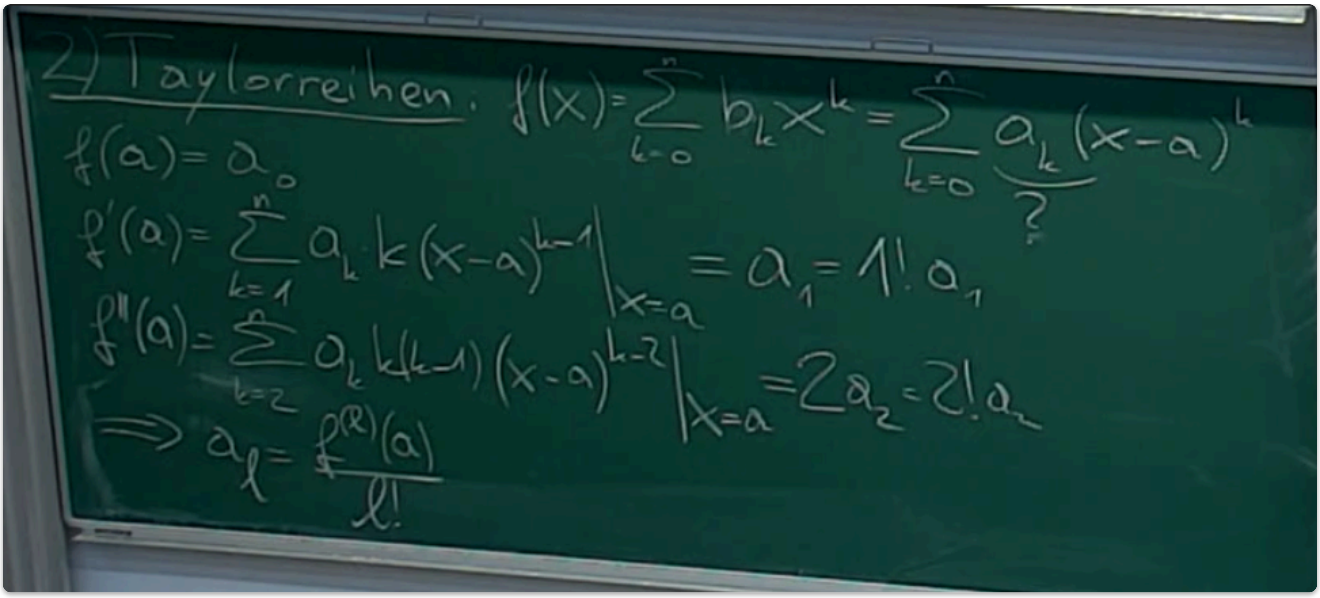
$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2\,(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3\,(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \ldots \\
f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4\,(x-x_0) + \ldots
\end{aligned}$$

woraus nach Einsetzen von $x = x_0$ und Umformen

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

folgt.

Bei Funktionen, die eine Darstellung als Potenzreihe besitzen, können wir in ähnlicher Weise vorgehen.


2) Taylorreihen: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{?} (x-a)^k$
$f(a)=a_0$
$f'(a)=\sum_{k=1}^{n} a_k\, k\,(x-a)^{k-1}\Big|_{x=a} = a_1 = 1!\,a_1$
$f''(a)=\sum_{k=2}^{n} a_k\, k(k-1)(x-a)^{k-2}\Big|_{x=a} = 2a_2 = 2!\,a_2$
$\Longrightarrow a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$

Satz 5.17

Mathematik für Informatik, p.209, Tafelbild

Sei $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist $f(x)$ im Konvergenzbereich differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren, d.h., für alle x mit $|x-x_0|<R$ gilt

$$f'(x)=\sum_{n\geq 1} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $x_0=0$ (andernfalls setzt man $\bar{x}=x-x_0$ und benützt die Kettenregel). Seien nun $|x|,|y|<R$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{y^n-x^n}{y-x} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Da die Reihe auf der rechten Seite von (5.4) und die Reihe von $f(x)$ denselben Konvergenzradius haben, folgt aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium für Reihen und der Tatsache, dass Potenzreihen im Konvergenzbereich absolut konvergieren, dass es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N>0$ gibt, so dass $\sum_{n>N} n\left|a_n\right|\cdot|x|^n<\varepsilon/2$. Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $g(x)=\sum_{n\geq 0} n\left|a_n\right|\cdot|x|^n$ (siehe Satz 4.86) gilt auch $\sum_{n>N} n\left|a_n\right|\cdot|y|^n<\varepsilon$ für alle $y\in U_\delta(x)$ (mit δ hinreichend klein). Daher spalten wir die Summe (5.5) auf und bekommen (für $y\in U_\delta(x)$)

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = &\sum_{n=0}^{N} a_n\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1}\right) \\ &+\sum_{n>N} a_n\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1}\right)\end{aligned}$$

wobei

$$\left|\sum_{n>N} a_n\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1}\right)\right| \leq \sum_{n>N} n a_n \max\left(|x|^n,|y|^n\right)<\varepsilon$$

Daher liefert der Grenzübergang $y\to x$ schließlich

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{N} n a_n x^{n-1}+R_N$$

mit $|R_N|\leq\varepsilon$.

Definition der Taylorreihe

5.20 Die Reihe

Mathematik für Informatik, p.211, Tafelbild

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$
$$= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt Taylorreihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt (mit Anschlussstelle) x_0. Der Sonderfall $x_0 = 0$ wird auch McLaurinreihe genannt.

Bricht man die Taylorreihe nach n Gliedern ab, so erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$$

Dies nent man die Taylor'sche Formel mit Restglied R_n. Die Summe vor dem Restglied wird Taylorpolynom n-ter Ordnung genannt. R_n ist der Abbruchfehler und selbstverständlich von n, x und x_0 abhängig.

Satz von Taylor

Satz 5.21 (**Satz von Taylor**)

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel

Sei f auf dem Intervall $I = [x_0, x]$ (bzw. $[x, x_0]$)n-mal stetig differenzierbar und im Inneren $\mathring{I}$ von $I(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert eine Zahl $\xi \in \mathring{I}$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Der Term $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ heißt Restglied von Lagrange. Falls f unendlich oft stetig differenzierbar ist, so ist auch die Taylorreihe von f definiert. Die Taylorreihe stimmt genau dann mit der Funktion $f(x)$ überein, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Funktionen, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und deren Ableitungen nicht zu schnell wachsen, beliebig genau durch Polynome approximieren.

Beispiele für die Taylorentwicklungen

Beispiel 5.22 Beispiele für Taylorentwicklungen.

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel1, tafel2, tafel3, tafel4, Tafel5

(a)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n. Daher erhalten wir wegen $e^0 = 1$ die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Analog lassen sich die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ bestimmen. Abbrechen der Exponentialreihe nach dem n-ten Glied führt auf das Restglied $R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ mit $0 < \xi < x$. Der Fehler ist also durch $\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ beschränkt. Für jedes feste x gilt somit $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ (vgl. Aufgabe 4.21), d.h., die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Wir wissen bereits, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Daraus folgt $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, und Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \xi)^{n+1}}$$

mit $0 < \xi < x$. Das Restglied lässt sich für $0 \le x \le 1$ durch

$$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \xi)^{n+1}} \le \frac{1}{n + 1}$$

abschätzen. Man kann zeigen, dass das Restglied sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$, also im gesamten komplexen Konvergenzbereich der Reihe, gegen 0 konvergiert. Dazu sind aber andere Darstellungen des Restglieds (z.B. das so genannte Cauchy'sche Restglied) nötig, die wir in diesem Buch nicht behandeln. Die Konvergenz der Taylorreihe gegen $f(x)$ lässt sich auch folgendermaßen zeigen: Sei $g(x) = \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}x^n/n$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Potenzreihe für $|x| < 1$, und Anwendung von Satz 5.17 ergibt (unter Benützung der Formel für die Summe der geometrischen Reihe aus Beispiel 4.37)

$$g'(x) = \sum_{n\ge0}(-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x} = f'(x)$$

Aus Satz 5.16 folgt nun, dass $f(x) - g(x) = c$. Die Konstante c kann man ganz leicht berechnen: Da $f(0) - g(0) = c$ gelten muss, folgt $c = 0$.

Zusammenfassend gilt also für $|x| < 1$ und wegen des Abel'schen Grenzwertsatzes (Satz 5.19) auch für $x = 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Für $x = 1$ erhält man die bereits in Kapitel 4 (Beispiel 4.33) erwähnte Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

(c)

Allgemein stellt die binomische Reihe (siehe Beispiel 4.58) die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dar. Differenzieren ergibt nämlich $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Auch hier lässt sich zeigen, dass das Restglied $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ auf dem gesamten Konvergenzbereich der binomischen Reihe gegen 0 konvergiert. Damit gilt für $|x| < 1$ die Darstellung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(d)

Nicht jede Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, besitzt eine Potenzreihendarstellung. Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen an der Stelle 0 verschwinden. Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 lautet daher $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ und stimmt offensichtlich nur im Punkt $x = 0$ mit $f(x)$ überein.

3 Monotonie und die 1. Ableitung

Dank Mittelwertsatz und Taylor Satz lassen sich weitere Sätze über Gestalt des Graphens von einer Funktion herleiten:

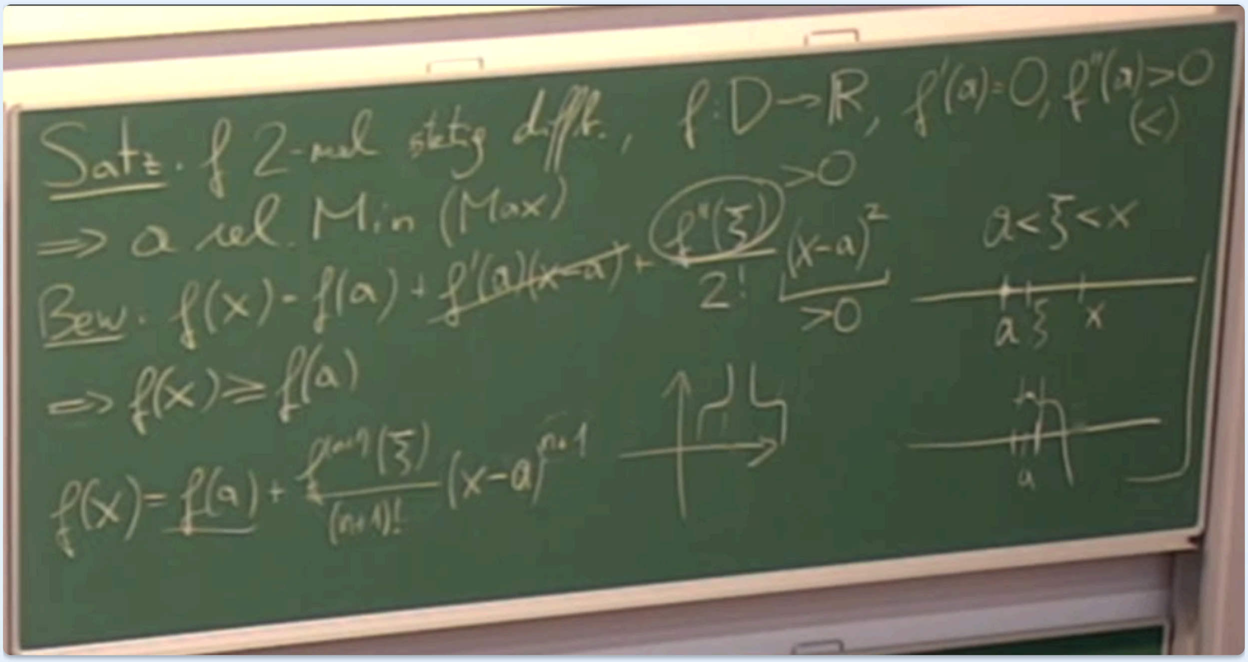
> ⓘ **Satz 5.23**
>
> Mathematik für Informatik, p.213
>
> Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $f(x)$ ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf I, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$. Falls die Ableitung auf I die strikte Ungleichung erfült, so ist $f(x)$ auf I streng monoton.
>
> Beweis. Da beide Fälle analog zu beweisen sind, sei o.B.d.A. $f(x)$ monoton wachsend. Dann gilt für $x < y$ definitionsgemäß $f(x) \leq f(y)$. Sei nun $x_0 \in I$.
>
> Aufgrund der Differenzierbarkeit von f genügt es, den rechtsseitigen Grenzwert $x \rightarrow x_0+$ zu betrachten. Hier ist $x > x_0$. Daher gilt
>
> $$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \geq 0$$
>
> da sowohl Zähler als auch Nenner des Differenzenquotienten positiv sind.
>
> Umkehrung: Gelte nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Wir wählen $x, y \in I$ beliebig, so dass $x < y$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Zahl ξ mit $x < \xi < y$, die
>
> $$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
>
> erfüllt. Daraus folgt aber $f(x) \leq f(y)$ und im Falle der strikten Ungleichung sogar $f(x) < f(y)$.

vo: sem_2/ANA/vo/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414115759.png

> ⓘ **Satz 5.25**
>
> Mathematik für Informatik, p.214
> Sei f zweimal stetig differenzierbar und $f'\left(x_0\right) = 0$. Dann gilt: $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, falls $f''\left(x_0\right) < 0$, und ein relatives Minimum, falls $f''\left(x_0\right) > 0$.
>
> Beweis. Sei $f''\left(x_0\right) < 0$. Ein relatives Maximum liegt vor, wenn für x in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ von x_0 gilt: $f(x) \leq f\left(x_0\right)$. Wir approximieren $f(x)$ in $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor. Da $f''\left(x_0\right) < 0$ und f'' stetig ist, folgt aus Satz 4.87, dass ε so klein gewählt werden kann, dass $f''(\xi) < 0$ für alle $\xi \in U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ gültig ist. Für $x \in U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ und ξ zwischen x_0 und x folgt daraus

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\underbrace{f'\left(x_0\right)}_{=0}\left(x-x_0\right)+\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{<0}\underbrace{\left(x-x_0\right)^2}_{\geq 0} \leq f\left(x_0\right)$$

wie behauptet.



4. Die zweite Ableitung

Wie die erste Ableitung hat auch die 2. Ableitung eine geometrische Interpretation. Sie ist das Maß für die Krümmung des Funktionsgraphen.

Definition 5.28 konvex/konkav

Mathematik für Informatik, p.216

Definition 5.28 Eine Funktion f heißt auf einem Intervall I konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt: $f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Gilt sogar $f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$, so heißt f strikt konvex. Falls $f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ (bzw. die strikte Ungleichung) für $0 < \lambda < 1$ gilt, so nennt man f konkav (bzw. strikt konkav).

Eine Funktion ist konvex, wenn ihr Graph bei Betrachtung von unten konvex aussieht.

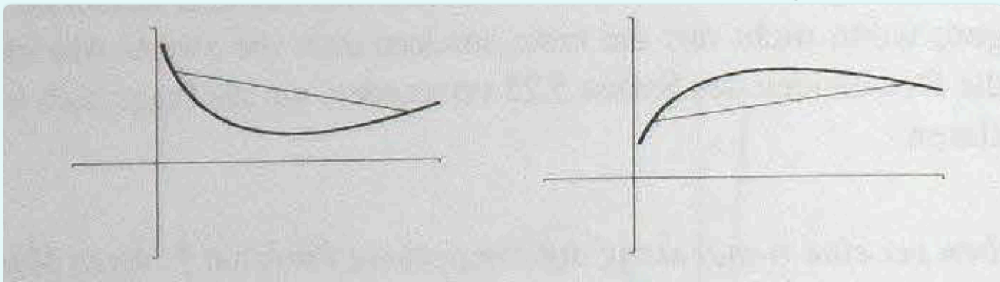


Abbildung 5.8 Konvexe (links) und konkave Funktion (rechts)

Satz 5.29

Mathematik für Informatik, p.216, Tafel1, Tafel2, Tafel3, Tafel4

Sei f auf dem Intervall I stetig und im Inneren $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (bzw. konkav) auf I, wenn f' auf $\mathring{I}$ monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Strikte Konvexität (bzw. Konkavität) gilt genau dann, wenn f' streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Beweis. Da f genau dann konkav ist, wenn $-f$ konvex ist, genügt es, den Satz hinsichtlich der Konvexität von f zu zeigen. Nehmen wir zunächst an, dass f' monoton wachsend sei. Seien $x, y \in I$ mit $x < y, 0 < \lambda < 1$ und $z = x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Wir müssen zeigen, dass $f(z) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Diese Ungleichung lässt sich umschreiben zu

$$
\begin{gathered}
f(z) = (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \\
\iff (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) \leq \lambda(f(y) - f(z)).
\end{gathered}
$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren ξ und η mit $f(z) - f(x) = (z - x)f'(\xi)$ und $f(y) - f(z) = (y - z)f'(\eta)$, wobei $x < \xi < z < \eta < y$. Damit ist (5.7) äquivalent zu

$(1-\lambda)(z-x)f'(\xi) \leq \lambda(y-z)f'(\eta)$. Es gilt nun

$$(1-\lambda)(z-x) = (1-\lambda)\lambda(y-x) = \lambda(y-z)$$

und überdies wegen $\xi < \eta$ und der Monotonie von f' auch $f'(\xi) \leq f'(\eta)$. Damit ist die Konvexität von f nachgewiesen. Im Fall $f'(\xi) < f'(\eta)$ folgt unmittelbar die strikte Konvexität.

Sei umgekehrt f konvex und x, y, z, λ wie oben. Einerseits gilt

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)}$$

andererseits aufgrund der Konvexität von f

$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Dies impliziert $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Indem man nun den Fall $\lambda \to 1$ betrachtet, gewinnt man in analoger Weise die Abschätzung $f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ und damit $f'(x) \leq f'(y)$. Dass strikte Konvexität die strenge Monotonie von f' zur Folge hat, ist nun offensichtlich.

5. Regel von de l' Hospital

Regel von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital wird immer dann angewandt, wenn bei einer Grenzwertberechnung die unbestimmten Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten. Wichtig dabei ist, dass f, g im Intervall (a, b) stetig differenzierbar sind und es gilt: $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; mit \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \; bzw. \infty$$

In diesem Fall können wir beide Funktionen einzeln ableiten und den Grenzwert mit der Ableitung berechnen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Grund, wieso wir das dürfen, liegt im allgemeinen Mittelwertsatz.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mathematik für Informatik, p.219

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Seien die Funktionen f und g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Inneren (a, b). Weiters sei $x_0 \in [a, b]$ und gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ferner sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (bzw. der einseitige Grenzwert, falls $x_0 = a$ oder $x_0 = b$). Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis. Die Aussage folgt fast unmittelbar aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz. Es gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit $x_0 < \xi < x$ (bzw. $x < \xi < x_0$). Setzen wir $\xi = \xi(x)$, dann folgt aus $x \to x_0$ auch $\xi \to x_0$. Daher gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und das entspricht genau der Behauptung.

Bemerkung: Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Regel von de l'Hospital auch in noch allgemeineren Situationen gültig ist. Weiters gelten analoge Aussagen zu Satz 5.35 für $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ und für $x_0 = \pm\infty$.

Beispiel 5.36 (Anwendung der Regel von de l'Hospital)

Tafel1, Tafel2

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$: Hier erhalten wir zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Daher ist (5.8) anwendbar. Differentiation von Zähler und Nenner führt auf $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$: Hier kann die Regel von de l'Hospital zweimal hintereinander angewendet werden. Wir erhalten $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$: Hier erhalten wir die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Eine hinreichend häufige Anwendung von (5.8) liefert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!x^0}{e^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion wächst also (für $x \to \infty$) stärker als jede Potenz von x.

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 0$: Anwendung von (5.8) ergibt

Beweis folgt aus dem Mittelwertsatz

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable

5.3 Das unbestimmte Integral

Einführendes Beispiel

Beispiel 5.37 (Gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

Mathematik für Informatik, p.220

Unter gleichmäßig beschleunigter Bewegung versteht man eine Bewegung mit konstanter, also zeitunabhängiger Beschleunigung, wie etwa den freien Fall im Vakuum. Sei a die Beschleunigung und $v = v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t, dann gilt $v(t) =$ at. Frage: Wie groß ist der zurückgelegte Weg $s = s(t)$ zum Zeitpunkt t. Die Momentangeschwindigkeit lässt sich bekanntlich durch Differentiation des Weges ermitteln: $v(t) = at = \frac{ds}{dt}$. Wir suchen also eine Funktion $s(t)$, deren Ableitung at ist, z.B. $s(t) = \frac{a}{2}t^2$. Aber auch die Funktion $\frac{a}{2}t^2 + 100$ hat die Ableitung at.

1. Integration als Umkehrung der Differentiation

- Integration ist Umkehrung der Differentiation
- Also aus abgeleiteter Funktion f' wieder f gewinnen
- Umkehrproblem bis auf additive Konstante C eindeutig lösbar

Definition 5.38

Mathematik für Informatik, p.221

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Jede Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f und wird mit dem Symbol

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet. Die Funktion f nent man in diesem Zusammenhang den Integrand und x die Integrationsvariable.

Wie man mit der nicht Eindeutigkeit umgeht

Satz 5.39

Mathematik für Informatik, p.221, Tafelbild

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, dann sind alle Stammfunktionen von f von der Gestalt $F(x)+c$ mit einer Konstanten c, d.h., es gilt

$$G(x)=F(x)+c \Longleftrightarrow G'(x)=f(x).$$

Man schreibt daher auch $\int f(x)dx=F(x)+c$. Da das unbestimmte Integral die Umkehrung der Differentiation ist, erhält man aus jeder Differentiationsregel sofort eine Integrationsregel. Insbesondere liefern die Ableitungen der elementaren Funktionen Beispiele für Grundintegrale.

Das heißt, dass jede Funktion vom Schema $F(x)+c$ mit $c\in\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Grundintegrale

In diesem Abschnitt definieren wir einige Grundintegrale, welche man auswendig können sollte...

Beispiel 5.40 (Grundintegrale)

Mathematik für Informatik, p.221, Mathematik für Informatik, p.222, Tafelbild

Sei im Folgenden $c\in\mathbb{R}$ beliebig.

(a) Potenzfunktionen:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad \text{für } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Hier muss der Definitionsbereich entsprechend eingeschränkt werden, falls $\alpha\notin\mathbb{N}$. Für negative ganze Zahlen α muss $x=0$ ausgschlossen werden, für nicht ganzzahlige α zusätzlich noch $x<0$.

(b) Die Funktion x^{-1} : Wir wissen, dass $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Der Logarithmus ist jedoch für $x\leq 0$ nicht definiert. Sei $x<0$. Dann gilt $\ln(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. Zusammenfassend ergibt sich demnach

$$\int\frac{dx}{x}=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_2 & \text{für } x<0\end{cases}$$

Man schreibt dafür meist (etwas unkorrekt)

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

(c) Die Exponentialfunktion: $\int e^x dx=e^x+c$.

(d) Winkel- und Arcusfunktionen:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \qquad \int \cos x dx = \sin x + c,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + c \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \text{ für } -1 < x < 1.$$

2. Integrationsregeln -Technik des Integrierens

Satz 5.41 (Integrationsregeln)

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.222

(i) Das Integral ist linear, d.h., es gilt $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ und $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$ für Konstanten K.

(ii) Partielle Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(iii) Substitutiosnregel: Bezeichne F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$$

Beweis

Beweis. (i) folgt direkt aus der Linearität der Differentiation.

Die Regel (ii) lässt sich mit Hilfe von (i) umschreiben in

$$f(x)g(x) = \int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung sieht man sofort die Äquivalenz zur Produktregel der Differentiation.

Die Substitutionsregel (5.9) erhält man unmittelbar aus der Kettenregel.

Ergänzung zur Substitutionsregel:

Mathematik für Informatik, p.222

Die Gleichung (5.9) ist die Basis für eine äußerst nützliche Integrationsmethode. Falls g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, dann kann man $g(x)$ in der rechten Seite von (5.9) durch $u = g(x)$ substituieren. Schreibt man weiters $F(u) = \int f(u)du$, dann lautet die Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Die Leibniz'sche Schreibweise ist bei dieser Form der Substitutionsregel besonders zweckmäßig. Es gilt

und daher

$$u = g(x) \Longrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Longrightarrow du = g'(x)dx$$

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)}\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du$$

Beispiele

Beispiel 5.42

Mathematik für Informatik, p.223, Mathematik für Informatik, p.224, Tafelbild 1, Tafelbild 2, Tafelbild 3

(a) $x \cos x$: Lösen mittels partieller Integration führt zum Ziel.

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'} dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

(b) $\ln x$: Auch hier lässt sich die Methode der partiellen Integration erfolgreich anwenden.

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_{f} dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

(c) $x^2 e^x$: Iterierte Anwendung der partiellen Integration führt zur Lösung:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx &= x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x}_{\bar{f}} \underbrace{e^x}_{\bar{g}'} dx \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + c. \end{aligned}$$

(d) Allgemeine Exponentialfunktionen der Form a^x : Die Substitution $u = x \ln a, du = \ln a dx$ leistet das Gewünschte, nämlich

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^u du = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(e) $\tan x$: Es gilt $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Wir substituieren $u = \cos x$ und daher $du = -\sin x dx$. Dies führt zu

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\ln |u| + c = -\ln |\cos x| + c$$

(f) $\frac{1}{x^2+4}$: Die Funktion erinnert an das Grundintegral $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$. Daher wird die Umformung

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}$$

nahe gelegt. Nun substituieren wir $y = \frac{x}{2}, dy = \frac{dx}{2}$, d.h. $dx = 2dy$. Dann bekommen wir

$$\frac{1}{4} \int \frac{2dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \arctan y + c = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c$$

(g) $\frac{1}{x^2+4x+10}$: Auch das Integral über diese Funktion lässt sich auf das Grundintegral $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$ zurückführen. Der Nenner kann in der Form $x^2+4x+10 = (x+2)^2+6$ geschrieben werden. Wir erhalten dann

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{6}+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$$

wobei der letzte Schritt analog zum vorigen Beispiel durchgeführt wurde (mit der Substitution $y = \frac{x+2}{\sqrt{6}}$).

(h) $\frac{1}{ax+b}$: Man substituiert $u = ax+b, dx = \frac{du}{a}$ und erhält

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \ln |u| + c = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c.$$

Weitere Beispiele

Beispiel 5.43

Mathematik für Informatik, p.224, Mathematik für Informatik, p.225, Tafelbild 1, Mathematik für Informatik, p.225,

(a) Gesucht ist $\int f(x)dx$ mit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Der Ansatz gemäß (5.10) lautet (mit vereinfachter Bezeichnung der Koeffizienten)

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Daraus folgt

$$x^2+1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2,$$
$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^0 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)x^0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen $A+C=1, B-2C=0$ und $-A+B+C=1$. Löst man dieses System, so ergibt sich $A=\frac{1}{2}, B=1$ und $C=\frac{1}{2}$, also

$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)}$$

und in weiterer Folge

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

(b) Wir wollen

$$f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x+2} = \frac{3x^2+2x}{(x^2+2x+2)(x+1)}$$

integrieren. Mit Hilfe des Ansatzes

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

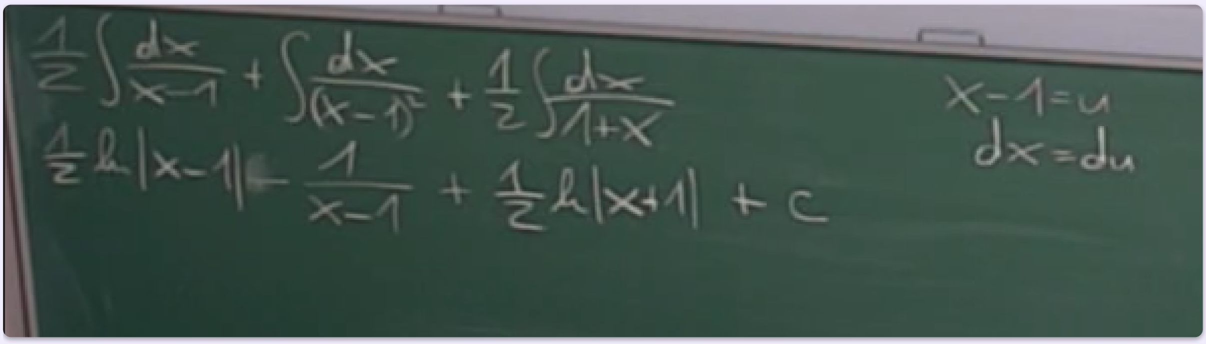
gemäß (5.10) und der Vorgangsweise analog zum vorigen Beispiel erhalten wir

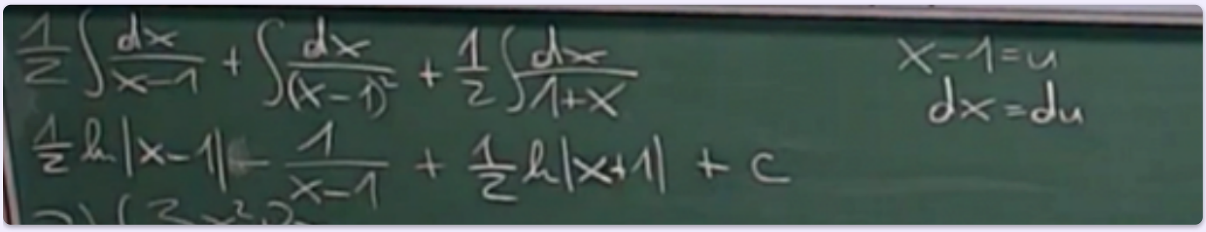
$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2+2x+2}$$

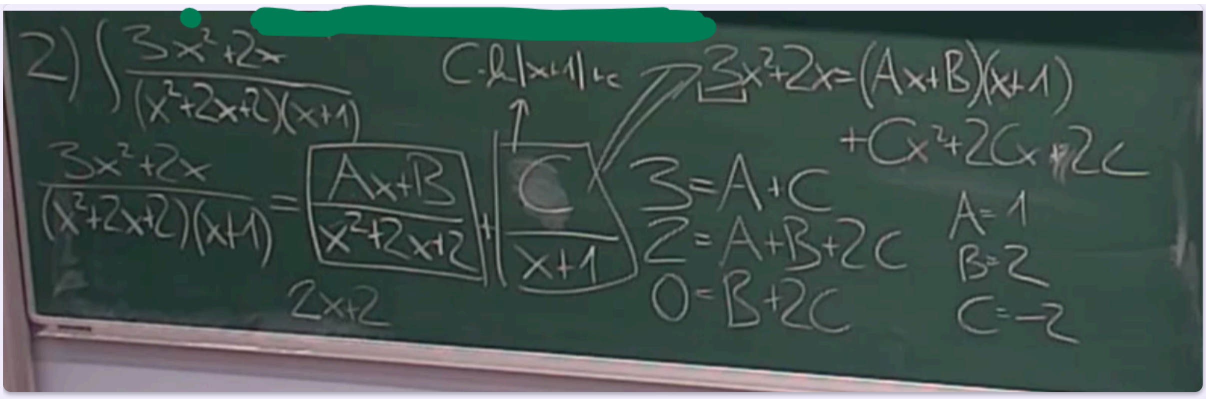
und

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \ln|x+1| + \int \frac{2x-2}{x^2+2x+2}dx \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}dx - 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ &= \ln|x+1| + \ln\left|x^2+2x+2\right| - 4\arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Substitutionen $u = (x+1)^2+1$ im ersten Summanden und $u = x+1$ im zweiten Summanden verwendet wurden.






2) $\int \frac{3x^2+2x}{(x^2+2x+2)(x+1)}$
$\frac{3x^2+2x}{(x^2+2x+2)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+1}$
2x+2
C·ln|x+1|+c
$3x^2+2x=(Ax+B)(x+1)$
$+Cx^2+2Cx+2C$
3 = A + C
2 = A + B + 2C
0 = B + 2C
A = 1
B = 2
C = −2

5.4 Das bestimmte Integral

1. Die Fläche unter einer Kurve

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.225

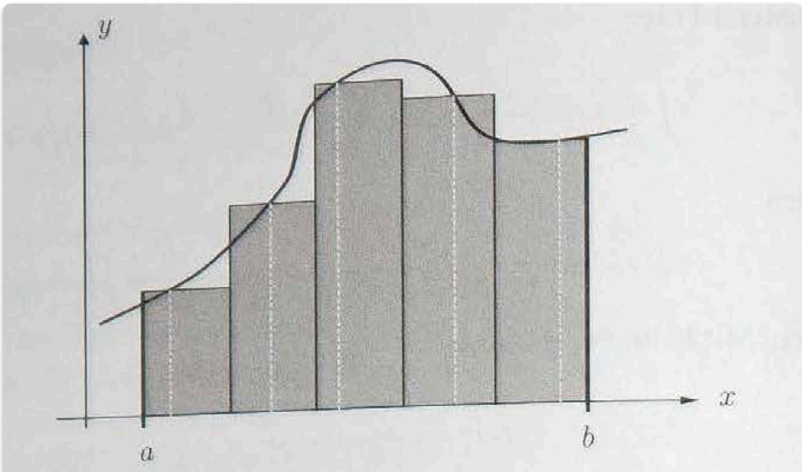
Gegeben sei eine beschränkte Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$. Unser Ziel ist es, die Fläche, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzt wird, zu bestimmen. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann werten wir die Funktion f in jedem Intervall an einer Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aus und bilden die Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Das ist die so genannte Riemann'sche Summe. Diese Summe sieht wenn man sie Abbilden würde so aus:



Definiert ist diese Summe so:

Definition 5.44

Mathematik für Informatik, p.226

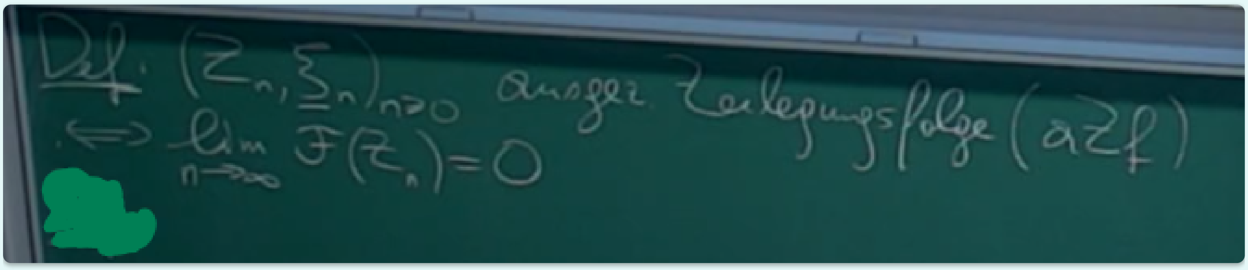
Sei $I = [a, b]$ ein Intervall. Jede Wahl von Unterteilungspunkten gemäß (5.11) definiert eine Zerlegung des Intervalls in die Teilintervalle $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Die Länge des längsten Teilintervalls einer Zerlegung Z heißt Feinheit $\mathcal{F}(Z)$ der Zerlegung Z.

Die einer Zerlegung und einer Auswahl von Zwischenstellen entsprechende Summe (5.12) heißt Riemann'sche Zwischensumme.

Definition bestimmtes Integral

Tafelbild

Definition Ausgezeichnete Zerlegungsfolge



Definition 5.45

Mathematik für Informatik, p.226, Tafelbild

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Falls jede Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zwischensummen, deren zugehörige Zerlegungsfolge $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(Z_n) = 0$ erfüllt, gegen denselben Grenzwert konvergiert, so nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt $\int_a^b f(x)dx$. Funktionen, die ein bestimmtes Integral besitzen, heißen integrierbar. Dabei heißen a und b Integrationsgrenzen und x Integrationsvariable. Falls die obere Integrationsgrenze nicht größer als die untere ist, so definiert man:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \text{ falls } a > b, \text{ und } \int_a^a f(x)dx = 0$$

Bemerkung: Das bestimmte Integral von f entspricht also genau der Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt, wobei Gebiete, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ gewichtet werden.

Obersumme und Untersumme

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.227

Wenn man bei der Riemannschen Zwischensumme die Zwischenstellen ξ_i so wählt, dass die Funktion f an diesen Stellen ihr Maximum bzw. Minimum im jeweiligen Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ annimmt, spricht man von:

- Obersumme: Hierbei gilt $f(\xi_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Obersumme ist also die Summe der Flächen von Rechtecken, deren Höhe jeweils das Maximum der Funktion im jeweiligen Teilintervall ist.
- Untersumme: Hierbei gilt $f(\xi_i) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Untersumme ist die Summe der Flächen von Rechtecken, deren Höhe jeweils das Minimum der Funktion im jeweiligen Teilintervall ist.

Die Integrierbarkeit einer Funktion f lässt sich auch mit Hilfe dieser Ober- und Untersummen charakterisieren. Das entsprechende Kriterium wird hier ohne Beweis angegeben.

Satz 5.47 (Riemann'sches Integrabilitätskriterium)

Mathematik für Informatik, p.227

Eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, so dass die zugehörige Obersumme $O_Z(f)$ und Untersumme $U_Z(f)$ die Ungleichung $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$ erfüllen.

Beispiele

Beispiel 5.46

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.226

Eine nicht integrierbare Funktion ist die so genannte Dirichlet'sche Sprungfunktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Da jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ einer Zerlegung von $[0, 1]$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält, lassen sich sämtliche Zwischenstellen ξ_i rational bzw. irrational wählen. Im ersteren Fall ergibt die Zwischensumme (5.12) den Wert $S_n = 1$, während im letzteren Fall $S_n = 0$ gilt. Somit ist f nicht integrierbar.

Sätze zur Integrierbarkeit

Satz 5.48

Mathematik für Informatik, p.227, Tafelbild

Jede auf $[a, b]$ definierte monotone Funktion ist integrierbar.

Beweis. Es genügt, den Fall einer monoton wachsenden Funktion $f$zu betrachten. Eine solche Funktion f ist durch $f(a)$ nach unten und durch $f(b)$ nach oben beschränkt. Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 5.47: Wir geben uns eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ vor. Dann gilt offensichtlich $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_{i-1})$ und $\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_i)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \mathcal{F}(Z) \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \mathcal{F}(Z)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

und dieser Wert kann beliebig klein gemacht werden, indem man eine Zerlegung mit hinreichend kleiner Feinheit wählt.

Jede monotone Funktion ist integrierbar

Definition 5.49

Mathematik für Informatik, p.228

Eine Funktion heißt stückweise stetig im Intervall $[a, b]$, wenn sie dort beschränkt sowie mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Stellen stetig ist und an jeder Unstetigkeitsstelle beide einseitigen Grenzwerte existieren.

Satz 5.50

Jede auf $[a, b]$ stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Ohne Beweis.

Satz 5.51

Für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch $|f|$ integrierbar.

Beweis. Wir betrachten ein Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ einer Zerlegung von $[a,b]$. Sei $m_k = \min_{x\in I_k} f(x)$ und $M_k = \max_{x\in I_k} f(x)$ sowie $\bar{m}_k = \min_{x\in I_k} |f(x)|$ und $\bar{M}_k = \max_{x\in I_k} |f(x)|$. Für alle $x, y \in I_k$ gilt dann

$$||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)| \le M_k - m_k$$

und daher insbesondere $\bar{M}_k - \bar{m}_k \le M_k - m_k$. Da f integrierbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$. So eine Zerlegung erfüllt aber auch

$$\begin{aligned} O_Z(|f|) - U_Z(|f|) &\le \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{M}_k - \bar{m}_k\right)(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_i - x_{i-1}) = O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \end{aligned}$$

und daher ist nach Satz 5.47 auch $|f|$ integrierbar.

Sätze zu Rechenregeln und co

Satz 5.52

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.228, Mathematik für Informatik, p.229

Satz 5.52 Seien f und g integrierbar auf $[a,b]$. Dann folgt:

(i) Die Funktion $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear, d.h., es gelten die beiden Identitäten

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$$

für alle Konstanten $K \in \mathbb{R}$, und

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Sei $a \le c \le b$, dann ist (siehe Abb. 5.11, links)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

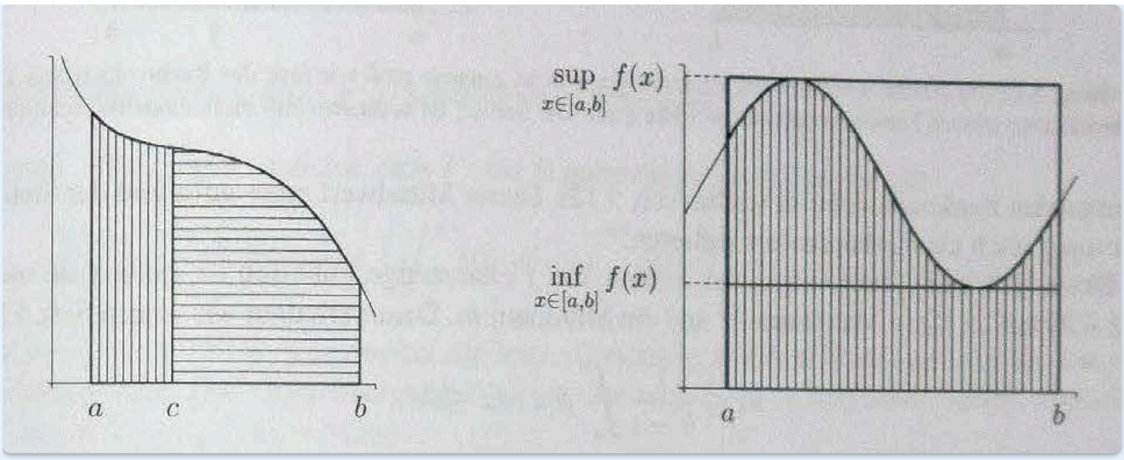
(iii) Aus $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(iv) Für $a < b$ gelten die Ungleichungen

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

und

$$(b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$



a
c
b
sup f(x)
x∈[a,b]
inf f(x)
x∈[a,b]
a
b

2. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

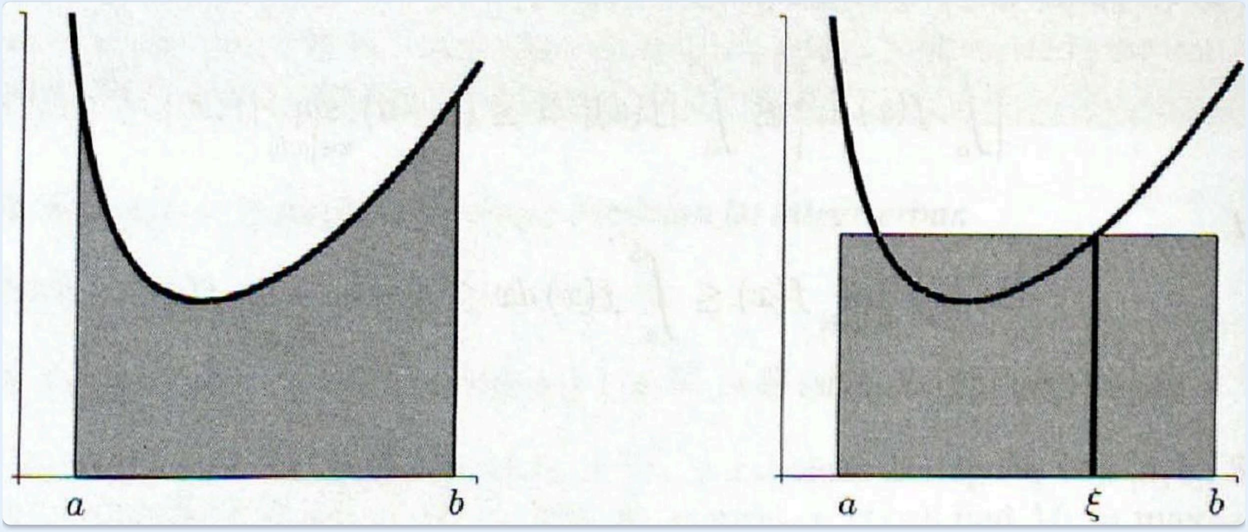
Mittelwertsatz der Integralreihe

ⓘ Satz 5.53 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.229, Mathematik für Informatik, p.230

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Beweis. Der Satz besagt, dass die Fläche unter dem Funktionsgraphen durch ein flächengleiches Rechteck dargestellt werden kann, dessen Höhe ein „Mittelwert" der im Intervall $[a, b]$



Hauptsatz der Differenetial und Integralrechnung

ⓘ Satz 5.55 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Mathematik für Informatik, p.231, Mathematik für Informatik, p.231, Tafelbild

Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f. Jede beliebige Stammfunktion F von f erfüllt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: Statt $F(b) - F(a)$ schreibt man kürzer auch $F(x)|_a^b$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass F eine Stammfunktion von f ist. Es gilt

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi),$$

für ein ξ mit $x_0 \leq \xi \leq x$, wobei die letzte Gleichung aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt. Der Grenzübergang $x \rightarrow x_0$, der auch $\xi \rightarrow x_0$ impliziert, liefert schließlich $F'\left(x_0\right) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f\left(x_0\right)$.

Sei nun F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt nach Satz $5.39 F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$. Daraus folgt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + c - \left(\int_a^a f(t) dt + c\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Substitution

Satz 5.56 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

Tafel, Mathematik für Informatik, p.231

Sei f stetig auf $[a, b]$ und ferner sei $g : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Dann gilt

$$\int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx$$

d.h., bei der Substitution in bestimmten Integralen müssen auch die Grenzen substituiert werden.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass für jede Stammfunktion F von f die Funktion $F(g(x))$ eine Stammfunktion des Integranden auf der rechten Seite von (5.15) ist. Einsetzen der Grenzen ergibt in beiden Fällen $F(b) - F(a)$ und daher (5.15).

Beispiele dazu

Beispiel 5.57 (c)

Tafel, Mathematik für Informatik, p.233

Wir berechnen die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius $r = 1$. Jeder Punkt (x, y) des Kreises erfüllt die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$. Im oberen Halbkreis haben wir daher $y = \sqrt{1 - x^2}$. Die Fläche des Halbkreises ist dann $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$. Dieses Integral lässt sich mit der Substitution $x = \sin t, dx = \cos t dt$ berechnen, wobei auch die Grenzen substituiert werden müssen. Für $x = \pm 1$ bekommen wir daher $t = \pm\frac{\pi}{2}$. Dies ergibt nun

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left(\frac{t + \sin t \cos t}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

wobei das letzte Integral mittels partieller Integration gelöst werden kann (siehe Übungsaufgaben).

Beispiel 5.57 (b)

Mathematik für Informatik, p.232

Mit Hilfe des vorigen Beispiels können wir nun die folgende Abschätzung machen (siehe auch Abb 5.13):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

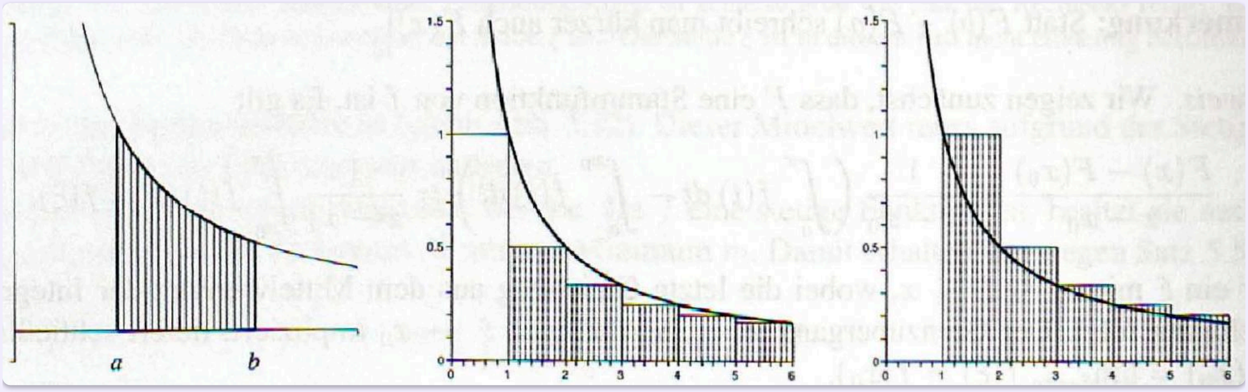


Abbildung 5.13 links: $\int_a^b \frac{dx}{x}$, Mitte und rechts: linke und rechte Seite von (5.16) für $n=6$

Daraus folgt $\ln n \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq 1+\ln n$, also

$$0 \leq a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \leq 1$$

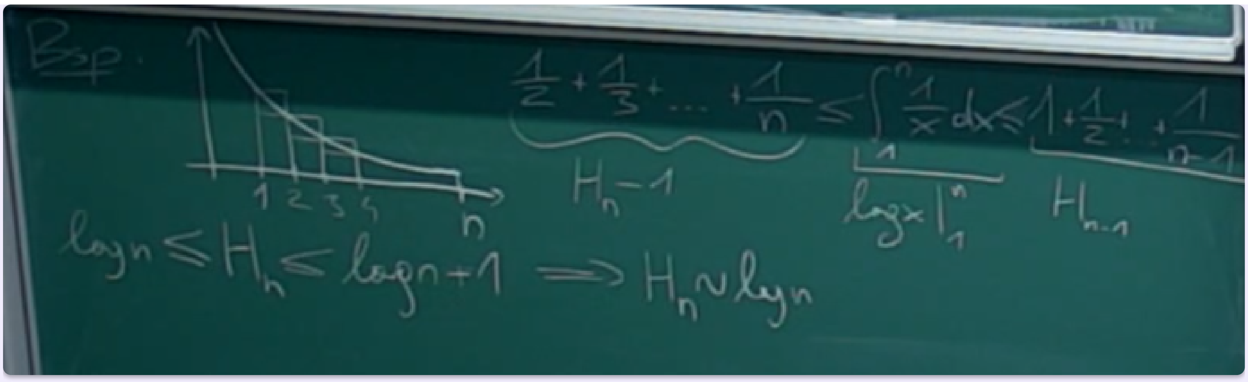
Weiters gilt wegen $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$ (vgl. Beispiel 5.22)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\geq -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n^2+n} - \frac{1}{2n^2} \\ &> 0 \text{ für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ ist daher (streng) monoton fallend, nach unten durch 0 beschränkt und somit konvergent. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma \approx 0.577216$ wird EulerMascheroni'sche Konstante genannt. Diese liefert eine asymptotische Formel für die Partialsummenfolge der harmonischen Reihe, die so genannten harmonischen Zahlen

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n + \gamma$$

die in der Analyse vieler Algorithmen (z.B. Quicksort, siehe Kapitel 7, vgl. auch [9] und [17]) auftreten.


Bsp.
1 2 3 4 n
$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}_{H_n-1} \leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}\,dx}_{\log x|_1^n} \leq \underbrace{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}}_{H_{n-1}}$
$\log n \leq H_n \leq \log n + 1 \implies H_n \sim \log n$

5.5 Uneigentliche Integrale

Definition 1. Art und 2. Art

Definition 5.58

Tafelbild1, Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.233

Sei f auf $[a, b)$ definiert und auf jedem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b)$ integrierbar. Weiters sei $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$). Dann nennt man das Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x) dx$$

uneigentliches Integral erster Art. Man spricht von Konvergenz bzw. Divergenz des Integrals je nachdem, ob dieser Grenzwert im eigentlichen Sinn existiert oder nicht. Eine analoge Definition gilt für Intervalle $(a, b]$ $\mathrm{mit}_{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für eine auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ integrierbare Funktion f nennt man das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) dx$$

uneigentliches Integral zweiter Art. Auch dieses Integral kann entweder konvergent oder divergent sein, wobei - ebenso wie zuvor - im Fall der Konvergenz der Grenzwert nicht uneigentlich sein darf. Eine analoge Definition gilt für Intervalle $(-\infty, b]$.

Beispiele

Beispiel 5.59 (Uneigentliche Integrale erster Art)

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.233, Mathematik für Informatik, p.234

(a) Das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (siehe Abb. 5.14, links) ist ein uneigentliches Integral erster Art, da für $x \to 0$ der Grenzwert des Integranden ∞ ist. Definitionsgemäß gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c \to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

(c) Ein Integral, das sich aus zwei uneigentlichen Integralen erster Art zusammensetzt, ist $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Hier ist der Integrand nicht am Rand des Integrationsbereichs unbeschränkt, sondern in dessen Innerem. Das Integral ist uneigentlich an der Stelle 0. Dass man dabei vorsichtig sein muss und nicht einfach die Stammfunktion an den Grenzen -1 und 1 (wo es ja keinerlei Probleme gibt) auswerten kann, zeigt die folgende nicht korrekte Rechnung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2$$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich falsch, da ein Blick auf Abb. 5.14 (rechts) sofort zeigt, dass das Integral nicht negativ sein kann.

Nun richtig gerechnet:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0+} \int_{-1}^{-c} \frac{dx}{x^2} + \lim_{c\to 0+} \int_{c}^{1} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{c\to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-c} + \lim_{c\to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{c}^{1} = \lim_{c\to 0+} \left(\frac{1}{c} - 1\right) + \lim_{c\to 0+} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ existiert daher nicht.

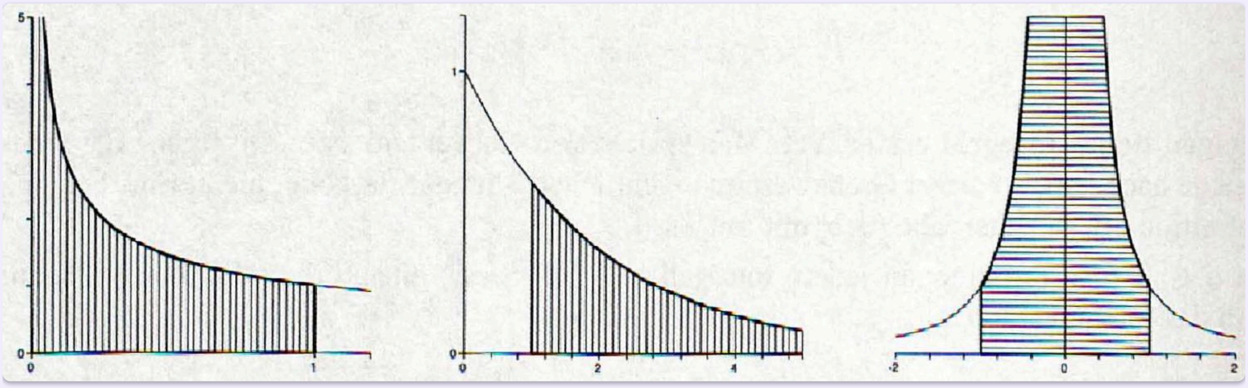


Abbildung 5.14 Uneigentliche Integrale erster und zweiter Art: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty e^{-x}dx$ und $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

Beispiel 5.60 (Uneigentliche Integrale 2. Art)

Mathematik für Informatik, p.234

(a) Radioaktive Zerfallsprozesse können mit der Exponentialfunktion $f(x) = e^{-x}$ beschrieben werden. Die Gesamtemission ist dann das Integral über den betrachteten Zeitraum. Dies führt auf $\int_1^\infty e^{-x}dx$, ein uneigentliches Integral zweiter Art. Einsetzen in die Definition ergibt

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty} \left(-e^{-c} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

Integralkriterium

Satz 5.62 (Integralkriterium)

Tafelbild zum Satz + Beispiel, Mathematik für Informatik, p.236

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative und monoton fallende Funktion. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.

Beweis. Analog zu Beispiel 5.57 b (siehe Abb. 5.13) erhält man die Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

und nach Grenzübergang für $n \to \infty$ die Behauptung.

Damit kann man jetzt das beweisen, was wir schon mal erwähnt haben:

Beispiel 5.63

Mathematik für Informatik, p.236

Die hyperharmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$. Für $\alpha \geq 2$ (bzw. $\alpha \leq 1$) haben wir die Konvergenz (bzw. Divergenz) bereits in Beispiel 4.49 gezeigt. Nach dem Integralkriterium konvergiert im Fall $\alpha > 0$ die Reihe genau dann, wenn das entsprechende Integral konvergiert. Für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \lim_{c\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^c = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = 1$ liegt die harmonische Reihe vor, deren Divergenz wir bereits im vorigen Kapitel nachgewiesen haben. Man kann aber auch in diesem Fall das Integralkriterium anwenden.

6.1 Funktionen in mehreren Variablen

Vorrausgesetzt wird hier meistens:

$$f : D \to R, D \subset R^n$$

mit meist $n = 2$

1. Einführende Beispiele

- Tafel1
- Tafel2
- Mathematik für Informatik, p.241
- Mathematik für Informatik, p.242
- Mathematik für Informatik, p.243

Beispiel 6.1

(a) Der Gesamtwiderstand R_{Ges} in einem Wechselstromkreis hängt vom Ohm'schen Widerstand R, dem kapazitiven Widerstand R_C und dem induktiven Widerstand R_L wie folgt ab :

$$R_{\text{Ges}} = \sqrt{R^2 + (R_C - R_L)^2}$$

(b) Lineare Funktionen in zwei Variablen sind gegeben durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ax + by$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sie beschreiben Ebenen durch den Ursprung [1] im $^{\mathbb{R}^3}$. Allgemein ist eine lineare Funktion über $\mathbb{R}^n$ von der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ und reellen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$. Geometrisch ist der Funktionsgraph eine so genannte Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$, die durch den Ursprung geht, also ein n-dimensionaler Unterraum.

(c) Polynomfunktionen in mehreren Variablen sind Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Bauart

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$. Der Grad einer Polynomfunktion ist definiert als Exponent der höchsten auftretenden Potenz, wobei die Exponenten der einzelnen Variablen addiert werden, also als $\max \{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \neq 0\}$.

(d) Elementare Funktionen in mehreren Variablen sind analog zu elementaren Funktionen in einer Variablen definiert. Funktionen in zwei Variablen mit einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ lassen sich auf verschiedene Arten veranschaulichen. Eine Möglichkeit ist die Darstellung als Fläche im dreidimensionalen Raum. Der Graph einer

Funktion $f(x, y)$ ist die Punktmenge $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ (siehe Abb. 6.1 für einige Beispiele von Graphen elementarer Funktionen in zwei Variablen).

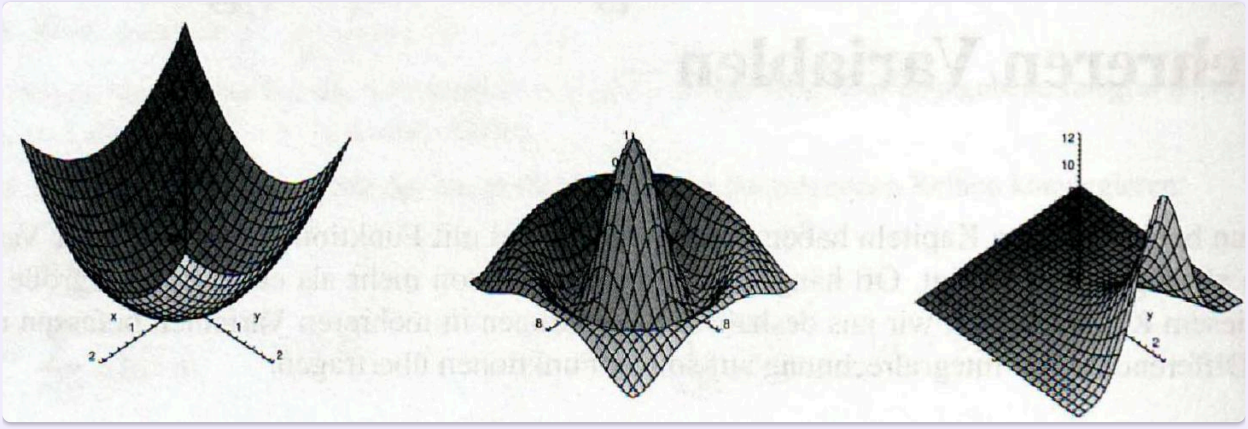


Abbildung 6.1 Funktionen $f(x, y) = 5x^2 + 7y^2 + 2, g(x, y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, h(x, y) = e^{-x^2+y}$

Eine andere Möglichkeit der Darstellung von Funktionen in zwei Variablen sind Niveaulinien (Isohypsen). Wie die Höhenschichtlinien in Landkarten beschreiben sie jeweils eine Punktmenge, auf der die Funktion einen vorgegebenen konstanten Wert hat. Die Niveaulinie zum Niveau c der Funktion $f(x, y)$ ist also die Menge $\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$ (siehe dazu Abb. 6.2).

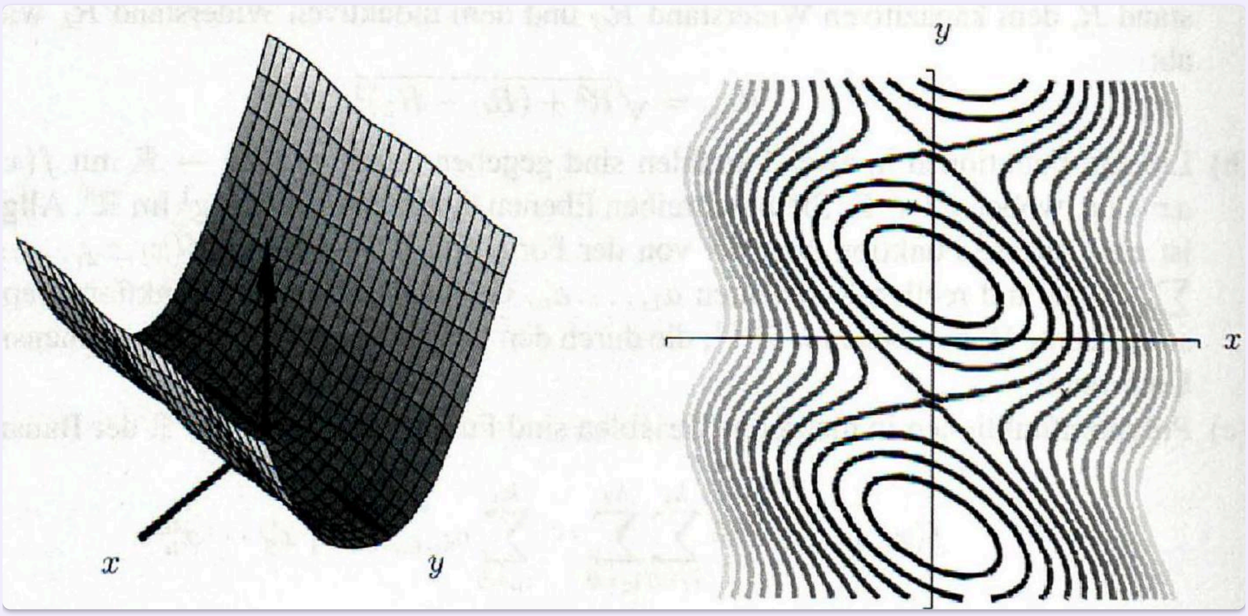


Abbildung 6.2 Graph und Niveaulinien der Funktion $f(x, y) = \sin(x + y) + x^2$

(e) Die Werte der Funktionen in den voran gegangenen Beispielen liegen alle in $\mathbb{R}$. Solche Funktionen nennt man auch skalarwertig oder Skalarfelder. Vektorwertige Funktionen sind hingegen Funktionen, deren Definitions- bzw. Bildbereich Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ bzw. von $\mathbb{R}^m$ ist. Vektorwertige Funktionen mit $n = m$ nennt man auch Vektorfelder. Ein Beispiel für eine vektorwertige Funktion (siehe Abb. 6.3) ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin(xy) + e^y \end{pmatrix}$$

Solche Funktionen treten zum Beispiel bei der Beschreibung von Strömungen auf (jedem Ort im $\mathbb{R}^3$ wird eine Geschwindigkeit zugeordnet, die selbst wieder als Vektor des $\mathbb{R}^3$ dargestellt ist), ebenso bei Magnet- oder Gravitationsfeldern, etc.

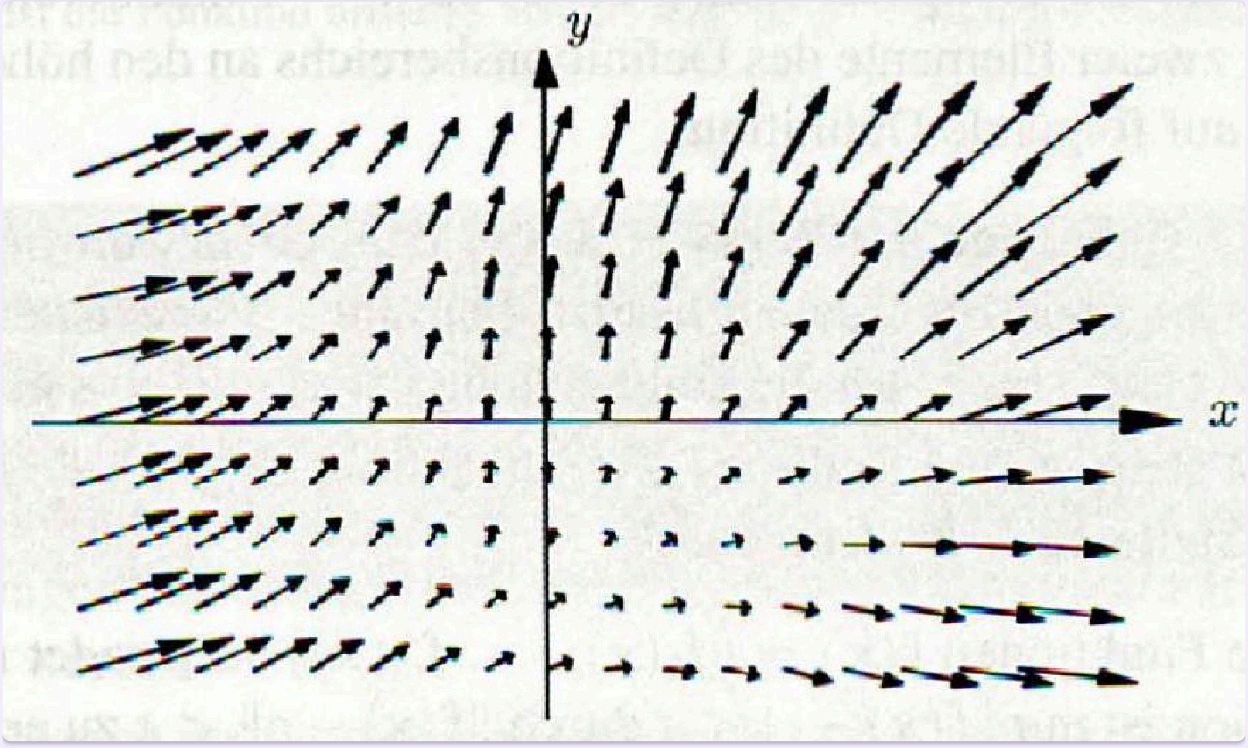


Abbildung 6.3 Das Vektorfeld aus Gleichung (6.1)

(f) Quadratische Formen sind Funktionen $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Bauart $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, wobei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix ist, d.h. $A^T = A$. Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ gilt $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Z.B. ist die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ bestimmte quadratische Form

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 - 10xy + 9y^2$$

Diese quadratische Form lässt sich auch als Summe zweier Quadrate, nämlich als $q(x, y) = \left(2x - \frac{5}{2}y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2$ schreiben und nimmt daher mit Ausnahme der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ nur positive Werte an. Quadratische Formen mit dieser Eigenschaft (und ebenso die entsprechenden Matrizen) heißen positiv definit (siehe Abschnitt 3.7). Analog heißt q negativ definit, falls $q(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Falls die Ungleichung nicht strikt gilt, also $q(x, y) \geq 0$ bzw. $q(x, y) \leq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so spricht man von positiv bzw. negativ semidefiniten quadratischen Formen. Formen, die nicht semidefinit (und daher auch nicht definit) sind, nennt man indefinit. Ein einfaches Kriterium zur Feststellung der Definitheit einer Matrix ist das in Abschnitt 3.7 genannte Hauptminorenkriterium.

2. Grenzwert und Stetigkeit

Grenzwert

Um Differential- und Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen zu entwickeln, müssen Konzepte der Funktionen in einer Variablen übertragen werden.

Stetigkeit und Grenzwerte in R^n

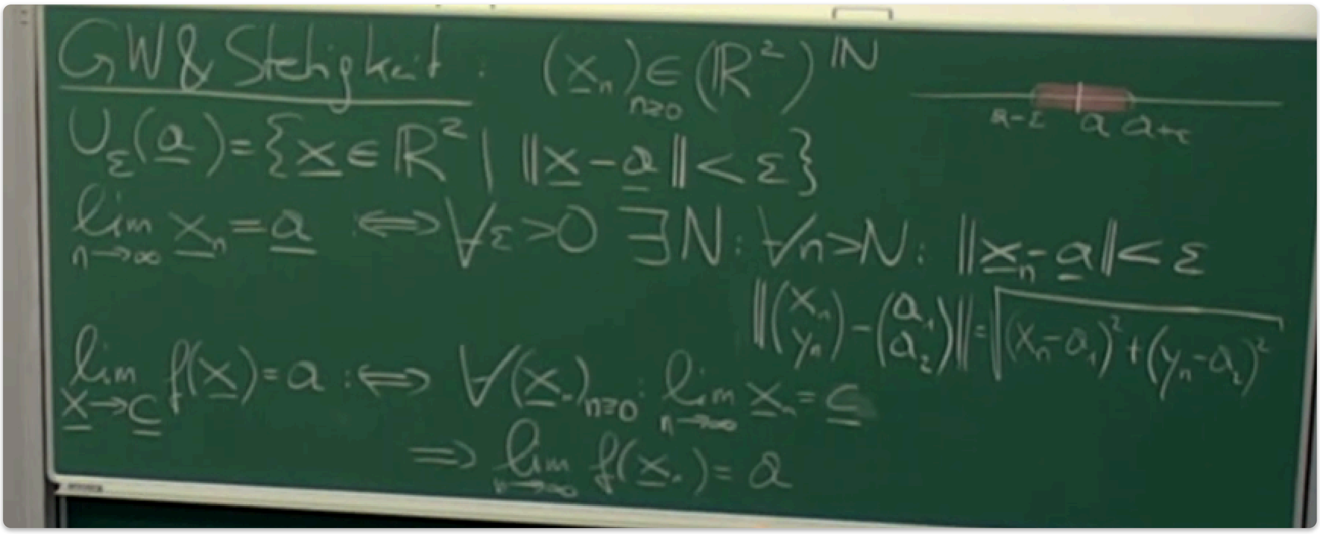
- Zentrale Bedeutung: Der Begriff der Stetigkeit, welcher auf dem Grenzwertbegriff basiert.
- Ersetzung von Intervallen: Anstatt von Intervallen in $\mathbb{R}$ werden n-dimensionale Kugeln in $\mathbb{R}^n$ verwendet.

> Definition 6.2
>
> Mathematik für Informatik, p.244
>
> Unter einer ε-Umgebung des Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ versteht man die Menge
>
> $$U_\varepsilon(\mathrm{x}_0) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| < \varepsilon\}$$
>
> also die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^n$, deren Abstand von $\mathbf{x}_0$ kleiner als ε ist. Diese Menge ist für $n = 1$ ein Intervall, für $n = 2$ eine Kreisscheibe und für $n = 3$ eine Kugel.
>
> 

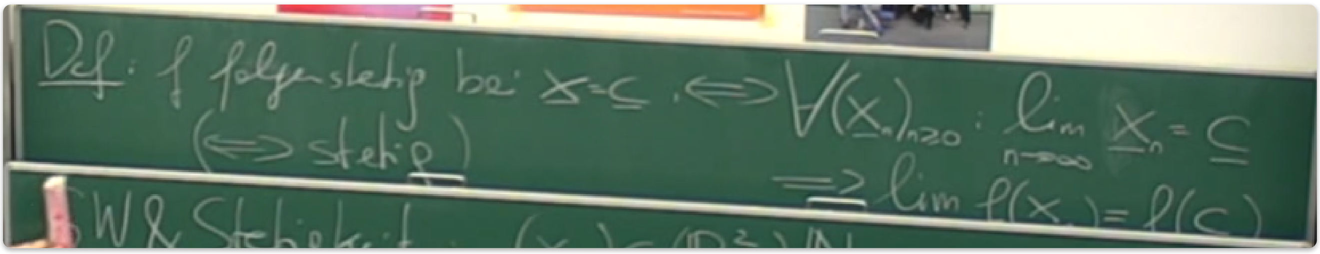
Damit lässt sich nun die Stetigkeit analog zum Fall $n = 1$ definieren. Man muss lediglich den Abstand $|x - x_0|$ zweier Elemente des Definitionsbereichs an den höher dimensionalen Fall anpassen. Dies führt auf folgende Definition.

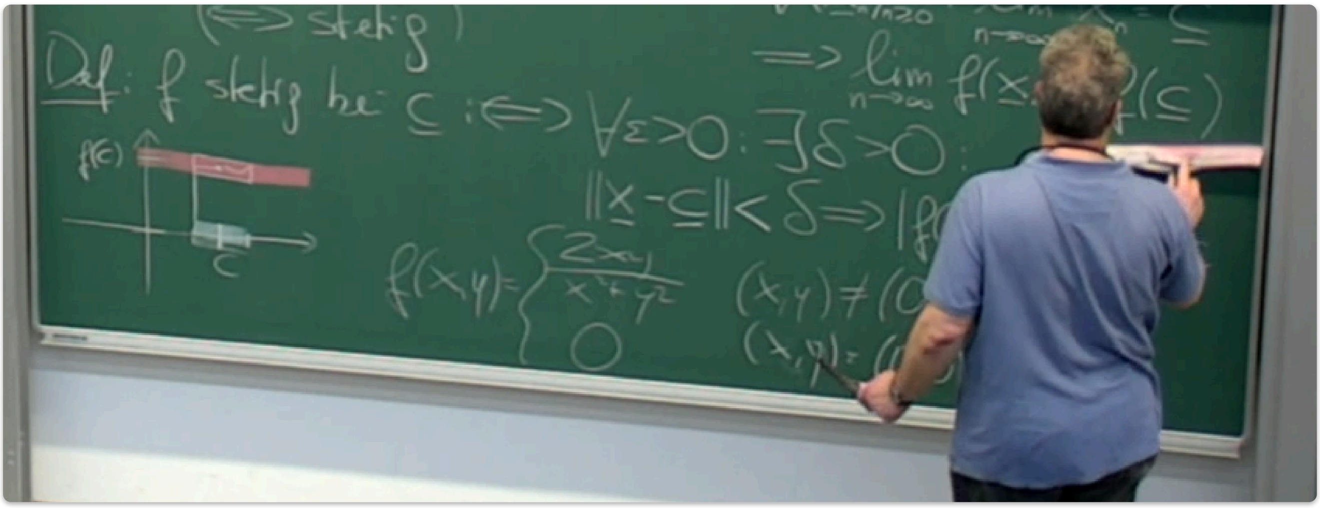
> Definition 6.3.1
>
> Mathematik für Informatik, p.244
>
> Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Unter dem Grenzwert $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ versteht man jene Zahl c, die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\mathbf{x} \in D$ mit $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ die Ungleichung $|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon$ gilt.

Hälfte schon im Buch und das unten ist was anderes was ich im buch nicht gefunden hab:



Stetig:





find ich nicht im Buch vielleicht ist damit das gemeint:

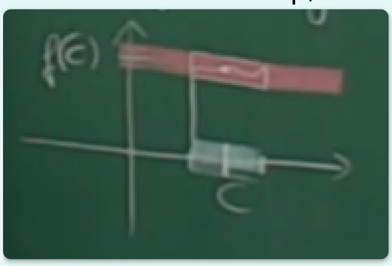
Definition 6.3.2

Mathematik für Informatik, p.244

Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in D$, falls $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, und stetig auf D, wenn f an jeder Stelle $\mathbf{x}_0 \in D$ stetig ist.

Für vektorwertige Funktionen $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ verwendet man die gleiche Idee. In der obigen Definition ist nur $|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon$ durch $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| < \varepsilon$ zu ersetzen. Die Stetigkeit von $\mathbf{f}$ ist übrigens gleichbedeutend damit, dass alle Koordinatenfunktionen $f_i(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, m$ stetig sind.

Hier ein kleiner Recap, so sah das bei $n = 1$ aus:



Statt dieser Geraden haben wir jetzt so eine Ebene

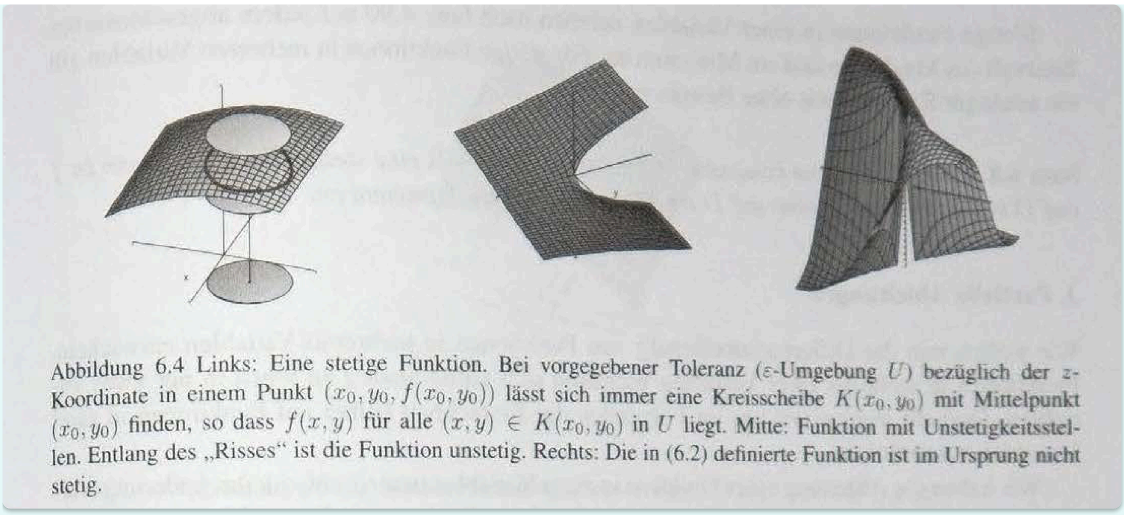
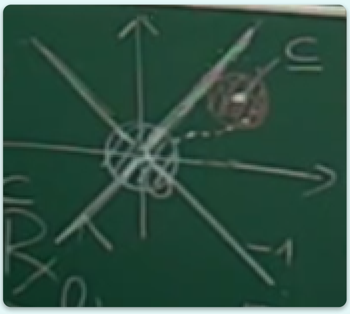


Abbildung 6.4 Links: Eine stetige Funktion. Bei vorgegebener Toleranz (ε-Umgebung U) bezüglich der z-Koordinate in einem Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ lässt sich immer eine Kreisscheibe $K(x_0, y_0)$ mit Mittelpunkt (x_0, y_0) finden, so dass $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in K(x_0, y_0)$ in U liegt. Mitte: Funktion mit Unstetigkeitsstellen. Entlang des „Risses" ist die Funktion unstetig. Rechts: Die in (6.2) definierte Funktion ist im Ursprung nicht stetig.

1. Bild zeigt einen typischen Funktionsverlauf für mehrere n und die zwei Kreise sind die Abgrenzungen der ϵ-Umgebung.
2. Bild zeigt eine unstetige Funktion
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

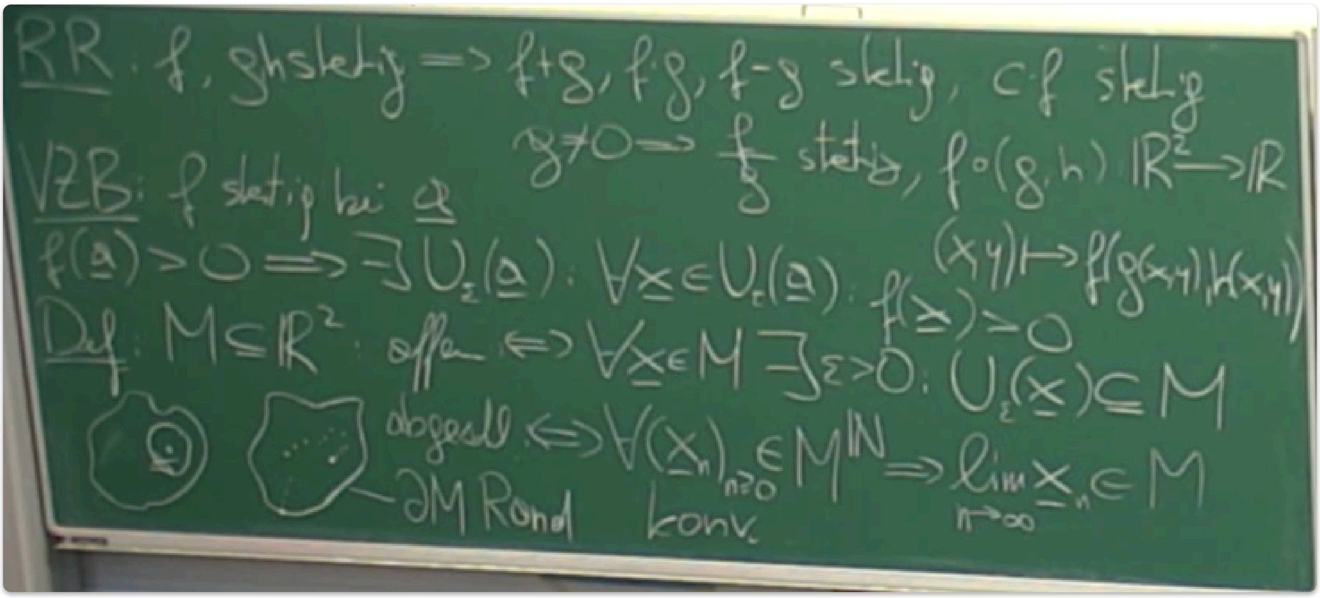


ⓘ Satz 6.5

Mathematik für Informatik, p.244

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig an der Stelle $\mathbf{x} \in D$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$ für jede Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbf{x}_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

Rechenregeln (analog wie bei $n = 1$)



Mathematik für Informatik, p.245

- **Satz von der Vorzeichenbeständigkeit** ist direkt auf Funktionen in mehreren Variablen übertragbar:
  - Stetige Funktionen ändern *lokal* ihr Vorzeichen nicht (außer in der Umgebung von Nullstellen).
  - Die Regeln aus *Satz 4.92* gelten sinngemäß auch für Funktionen in mehreren Variablen.
  - Das Analogon zur **Existenz von Maxima und Minima auf Intervallen** gilt ebenfalls.
- Für eine präzisere Formulierung benötigen wir einen weiteren Begriff:
  - Die folgende Definition stellt *Verallgemeinerungen von offenen und abgeschlossenen Intervallen* bereit, die später noch benötigt werden.

Definition 6.6

Mathematik für Informatik, p.245, Pasted image 20250513091246.png

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn aus $\mathbf{x} \in D$ folgt, dass es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$.

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Glieder in D liegen, selbst wieder in D liegt.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nennt man **kompakt**.

Beispiel 6.7

Mathematik für Informatik, p.245

(a) Offene Intervalle (a, b) sind nach obiger Definition offene Mengen in $\mathbb{R}$. Denn jeder Punkt $c \in (a, b)$ liegt in der Umgebung $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$, die selbst zur Gänze in (a, b) liegt. Analog sind Kreisscheiben ohne Rand offene Mengen im $\mathbb{R}^2$. Sie sind aber keine offenen Mengen $\mathrm{im}\, \mathbb{R}^3$, da die Umgebungen im $\mathbb{R}^3$ Kugeln sind und daher niemals Teilmengen von Kreisscheiben sein können. Ob eine Menge offen ist oder nicht, hängt also nicht von der Menge selbst ab, sondern von der Struktur der Umgebungen des Raumes. [2] In Vektorräumen wie $\mathbb{R}^n$ ist diese Struktur durch die Art der Abstandsmessung (also durch das Skalarprodukt, siehe Abschnitt 3.7) bestimmt.

(b) Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sowie Kreisscheiben oder Kugeln inklusive Rand sind jeweils abgeschlossene, ja sogar kompakte Mengen von $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Menge $\mathbb{R}$ ist eine sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von sich selbst.

- **Stetige Funktionen in einer Variablen** nehmen nach *Satz 4.90* auf jedem *abgeschlossenen Intervall* ein Maximum und ein Minimum an.
- Für **stetige Funktionen in mehreren Variablen** gilt ein *analoger Satz*. (Ohne Beweis)

Satz 6.8

Mathematik für Informatik, p.246

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf D beschränkt und nimmt auf D ein Maximum und ein Minimum an.

3. Partielle Ableitung

Wurde schonmal in EVC verwendet: 6. Kantenfilterung

Einleitung

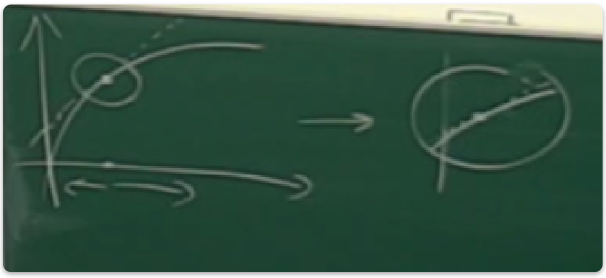
Mathematik für Informatik, p.246

Differentialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen

- Wir entwickeln die **Differentialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen**.
- Funktionen in mehr als zwei Variablen verhalten sich *analog* zu jenen in nur zwei Variablen.
- Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf **Funktionen in zwei Variablen**.

Ableitung in einer Variablen (Wiederholung)

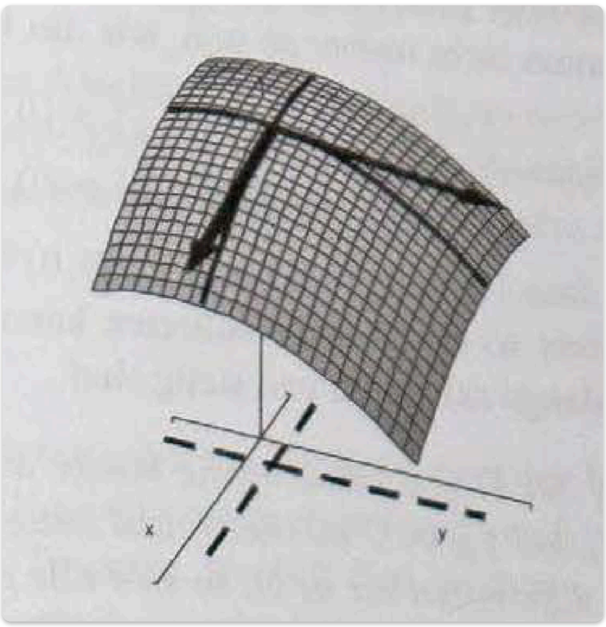
- Die Ableitung einer Funktion in einer Variablen wurde untersucht, um das *Änderungsverhalten* zu studieren.
- Der Anstieg des Funktionsgraphen in einem Punkt ist **gleichbedeutend mit dem Anstieg der Tangente**, die an Stellen, wo die Funktion differenzierbar ist, eindeutig bestimmt ist.



Steilheit von Funktionen in zwei Variablen

Mathematik für Informatik, p.246

- Funktionsgraphen für Funktionen in zwei Variablen bilden **Flächen im $\mathbb{R}^3$**.
- Ein Maß für das Änderungsverhalten der Funktion ist die **Steilheit dieser Fläche** in einem gegebenen Punkt.
- Der Anstieg am Punkt der Fläche ist **abhängig von der Richtung**, in der wir uns bewegen.
- Existiert an einem Punkt eine **eindeutig bestimmte Tangentialebene**, so bestimmt diese den Anstieg in jeder Richtung und somit das Änderungsverhalten der Funktion.
- Die Tangentialebene lässt sich bestimmen, indem man die **Anstiege in x- und in y-Richtung** bestimmt (siehe Abb. 6.5).
- Diese Anstiege sind die Ableitungen jener Funktionen in einer Variablen, die man erhält, wenn man eine Variable festhält:
  - Funktionen der Form $x \mapsto f(x, y)$ (für festes y)
  - Funktionen der Form $y \mapsto f(x, y)$ (für festes x)



Definition

Definition 6.9

Mathematik für Informatik, p.246

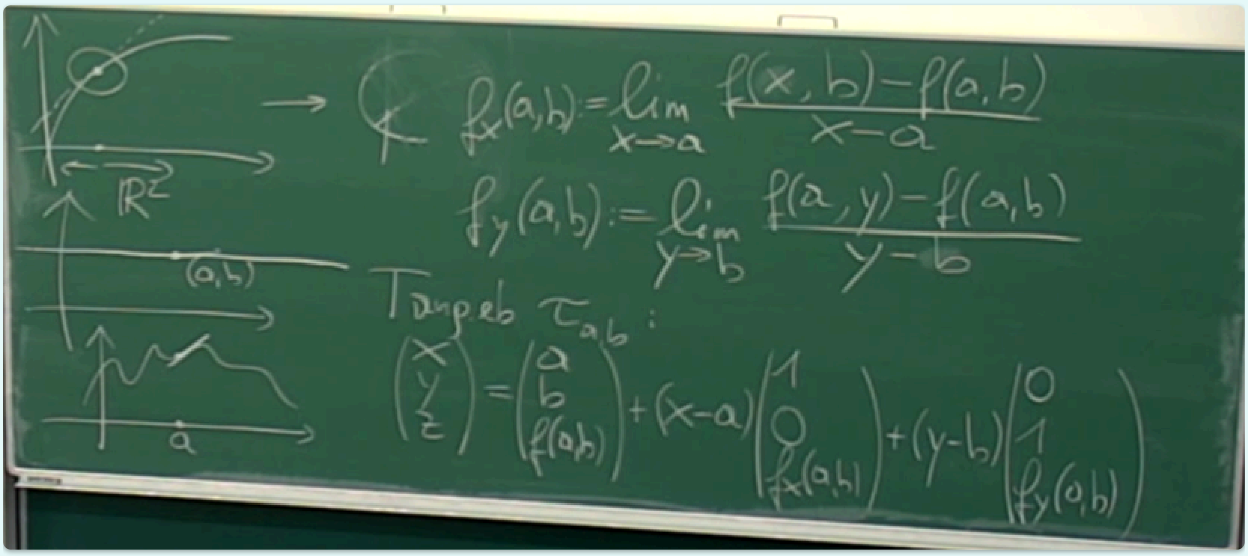
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^2$ und $(x_0, y_0) \in D$. Dann heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

existiert, und partiell nach y differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

existiert. Die beiden Grenzwerte $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ werden partielle Ableitungen von f nach x bzw. y genannt. Die Funktion f heißt partiell differenzierbar, wenn beide partiellen Ableitungen existieren, und stetig partiell differenzierbar, wenn beide partiellen Ableitungen überdies noch stetig sind.



Beispiel

Beispiel 6.10

Mathematik für Informatik, p.246, Mathematik für Informatik, p.247

Die Funktion $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - y^3 + \sin(x^2 + y) + 1$ ist in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2x\cos(x^2 + y)$ und $f_y(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + \cos(x^2 + y)$ sind ebenfalls partiell differenzierbar. Daher können wir auch partielle

Ableitungen höherer Ordnung bilden. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= f_{xx}(x,y) = 6x + 4y + 2\cos\left(x^2+y\right) - 4x^2 \sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= f_{xy}(x,y) = 4x - 2x\sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4x - 2x\sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= f_{yy}(x,y) = -6y - \sin\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Tangentialebene und ihre Existenz

Mathematik für Informatik, p.247

- Die **partiellen Ableitungen** legen die **Tangentialebene** $\tau(x_0, y_0)$ im Punkt (x_0, y_0) fest, *falls diese existiert*.
- **Parameterdarstellung der Tangentialebene:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

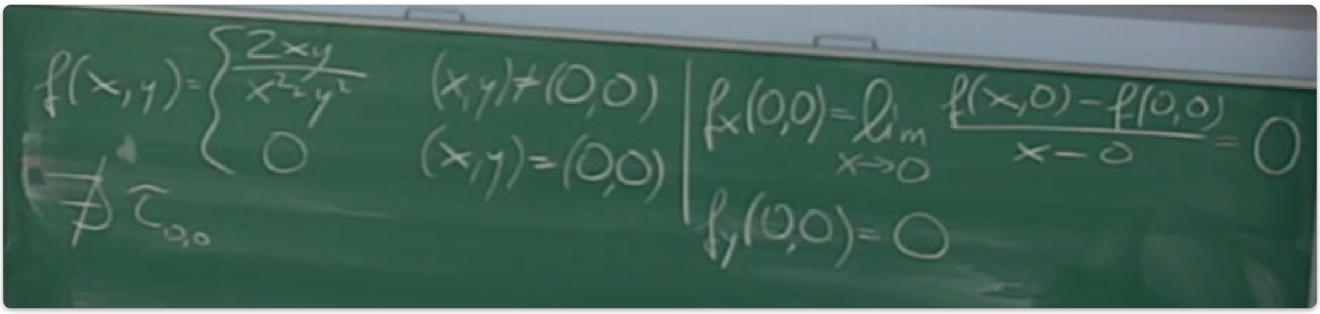
  (Hierbei ist $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ein Punkt auf der Ebene, und die Vektoren mit λ und μ sind Richtungsvektoren, die durch die partiellen Ableitungen bestimmt werden.)
- **Alternative Darstellung (Gleichung der Tangentialebene):**

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  (Diese Gleichung ist oft praktischer für Berechnungen.)
- **Wichtiger Hinweis:** Die Tangentialebene *muss nicht existieren*, selbst wenn die partiellen Ableitungen existieren.
  - **Beispiel:** Funktion aus (6.2) (siehe Abb. 6.4, rechtes Bild).
    - **--hier Abbildung 6.4, rechtes Bild einfügen--**
    - Für diese Funktion gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

      und analog $f_y(0,0) = 0$.
    - Trotz existierender partieller Ableitungen ist die Funktion bei $(0,0)$ **nicht einmal stetig**.
    - **Geometrische Bedeutung:** Die Tangenten in x- und y-Richtung existieren, aber die Tangentialebene existiert nicht. Die x- und y-Achse sind in diesem Fall die Nullstellenmenge der Funktion.



Satz von Schwarz

ⓘ Satz 6.11 (Satz von Schwarz)

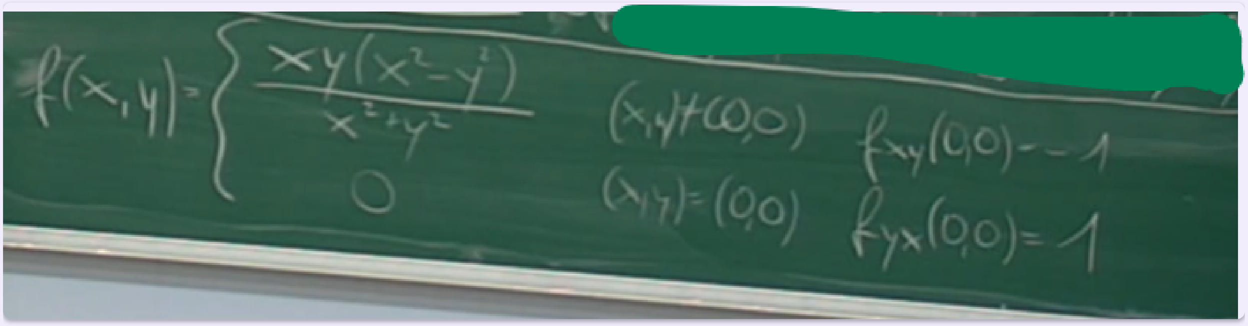
Pasted image 20250513093334.png, Mathematik für Informatik, p.248

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen f_{xy} und f_{yx} in D existieren und stetig sind. Dann gilt

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Ist f m-mal stetig partiell differenzierbar in D, so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beispiel für den Satz



6.2 Differentialrechnung in mehreren Variablen

Mathematik für Informatik, p.249

- Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion garantiert nicht einmal deren Stetigkeit
- deshalb ist es alleine kein brauchbares Werkzeug für Änderung von Funktionswert
- jetzt folgt wie man umfassende Ableitungen entwickelt.

1. Totale Ableitung

Mathematik für Informatik, p.249

Die Tangente ist eine lineare Approximation einer Funktion.
Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ verhält sich diese in der Nähe von x_0 ähnlich wie ihre Tangente:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Das "ungefähr" bedeutet, dass der Fehler $(f(x) - t(x))$ für $x \to x_0$ die Größenordnung $o(|x - x_0|)$ hat.

- $o(|x - x_0|)$ bedeutet, dass der Fehler schneller gegen Null geht als $|x - x_0|$. Das Verhältnis des Fehlers zu $|x - x_0|$ strebt also für $x \to x_0$ gegen Null.

Übertragung auf Funktionen mit mehreren Variablen

Diese Idee kann auf Funktionen mit mehreren Variablen übertragen werden:

- Funktionen in zwei Variablen ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$):
  - Verhalten sich lokal wie ihre Tangentialebenen.
  - Der Fehler ist hier ebenfalls verhältnismäßig klein.
  - Die lokale Änderung der Funktion ist eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
  - Diese lineare Abbildung lässt sich als Matrix darstellen.
- Allgemeiner Fall ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$):
  - Das Vorgehen lässt sich auf Funktionen anwenden, die von n Variablen abhängen und m Werte zurückgeben.

Definition

Definition 6.13

Mathematik für Informatik, p.249, Mathematik für Informatik, p.249

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ total differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $\mathbf{f}' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass

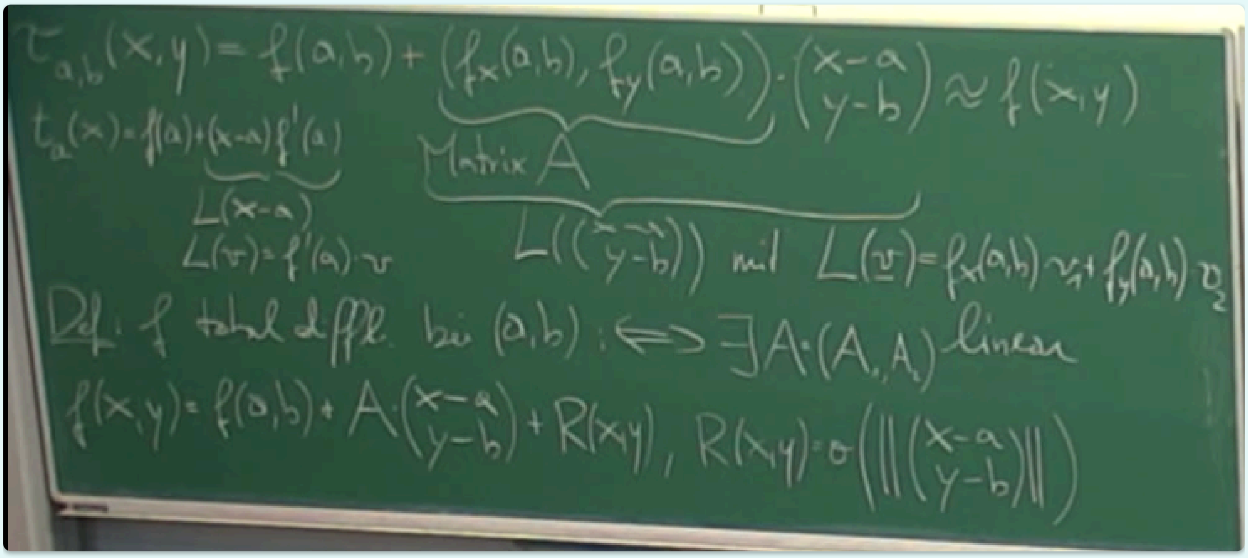
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x})$$

gilt und der Rest $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ die Bedingung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\mathbf{R}(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

erfüllt. Die lineare Abbildung f' heißt Ableitung von f im Punkt x_0, die dazu gehörige Matrix A heißt Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix. Setzen wir $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$, so können wir die obige Gleichung ausführlicher schreiben als

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \\ \vdots \\ f_m(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_m - x_{0,n} \end{pmatrix} + \mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$$



Bemerkung: Man beachte, dass die Bedingung (6.3) äquivalent zu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

ist, wobei der Grenzwert koordinatenweise zu verstehen ist. Wir werden im Folgenden sowohl von (6.3) als auch von (6.5) Gebrauch machen.

ⓘ Satz aus vo (nicht im Buch gefunden)

Pasted image 20250513094737.png

Sei f eine total differenzierbare Funktion in (a, b). Dann existieren die partiellen Ableitungen $f_x(a, b)$ und $f_y(a, b)$, und der Gradient von f in (a, b) ist gegeben durch:

$$\nabla f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$$

Eine andere Schreibweise für den Gradienten, oft als Vektor dargestellt, ist:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = \nabla f(a,b)$$

Beweis (Partielle Ableitung nach x):

Aus der Definition der partiellen Ableitung folgt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

Da f total differenzierbar in (a,b) ist, können wir die Zählerfunktion $f(x,b) - f(a,b)$ unter Verwendung des totalen Differentials ausdrücken. Die allgemeine Form des totalen Differentials für eine Funktion $f(x,y)$ ist:

$$f(x,y) - f(a,b) = A_x(x-a) + A_y(y-b) + R(x-a, y-b)$$

wobei $R(x-a, y-b)$ ein Restterm ist, für den gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x-a,y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Im speziellen Fall der partiellen Ableitung nach x, betrachten wir nur die Änderung von x, während $y = b$ konstant bleibt. Daher wird der Term $A_y(y-b)$ zu $A_y(b-b) = 0$. Der Restterm vereinfacht sich ebenfalls zu $R(x-a, 0)$, den wir mit $R(x,b)$ bezeichnen.

Ersetzen wir dies in den Ausdruck für die partielle Ableitung:

$$\lim_{x \to a} \frac{A_x(x-a) + A_y(b-b) + R(x,b)}{x-a}$$

Da $b - b = 0$:

$$= \lim_{x \to a} \frac{A_x(x-a) + R(x,b)}{x-a}$$

Wir können den Bruch aufteilen:

$$= \lim_{x \to a} \left(A_x + \frac{R(x,b)}{x-a} \right)$$

Wir wissen, dass für den Restterm $R(x,b)$ gilt, wenn $y = b$:

$$R(x,b) = o(||(x-a,0)||) = o(|x-a|)$$

Dies bedeutet, dass $\lim_{x\to a} \frac{R(x,b)}{|x-a|} = 0$.
Da der Nenner hier $x - a$ ist, gilt ebenso $\lim_{x\to a} \frac{R(x,b)}{x-a} = 0$.

Somit erhalten wir:

$$= A_x + 0$$

$$= A_x$$

Da die partielle Ableitung $f_x(a,b)$ per Definition dieser Grenzwert ist, folgt:

$$f_x(a,b) = A_x$$

Da A_x die Komponente der linearen Abbildung ist, die das totale Differential darstellt, und $f_x(a,b)$ die partielle Ableitung, bestätigt dies, dass $A_x = f_x(a,b)$. Ein analoger Beweis kann für $f_y(a,b)$ geführt werden.

ⓘ **Satz aus der vo (nicht so direkt im Buch gefunden, aber leicht andere Version)**

Pasted image 20250513095002.png, Mathematik für Informatik, p.249

Ist f total differenzierbar, so ist f stetig.

Beweis:
$f(x,y) \approx f(a,b) + A \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

2. Ableitungsregeln

(Vergleiche 5.1 Ableitung > Ableitungsregeln)

ⓘ **Summenregel**

Mathematik für Informatik, p.252, Tafelbild

Summenregel überträgt sich direkt auf den mehrdimensionalen Raum.

Es gilt so wie im eindimensionalen:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$$

Auch die Produktregel und die Kettenregel lassen sich übertragen.

ⓘ **Satz 6.19 (Produktregel)**

Mathematik für Informatik, p.252, Tafelbild

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Weiters seien f, g zwei total differenzierbare, skalarwertige Funktionen. Dann gilt für die Funktion $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ die Gleichung

$$\operatorname{grad} h\left(\mathbf{x}_0\right) = f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot \operatorname{grad} g\left(\mathbf{x}_0\right) + g\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot \operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right).$$

Beweis. Es gilt nach Satz 6.15

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x})-h\left(\mathbf{x}_0\right) = & f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})-f\left(\mathbf{x}_0\right) g\left(\mathbf{x}_0\right) \\ = & \left(f\left(\mathbf{x}_0\right)+\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+R_1(\mathbf{x})\right) \\ & \cdot\left(g\left(\mathbf{x}_0\right)+\operatorname{grad} g\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+R_2(\mathbf{x})\right)-f\left(\mathbf{x}_0\right) g\left(\mathbf{x}_0\right) \\ = & \left(f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot \operatorname{grad} g\left(\mathbf{x}_0\right)+g\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot \operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right)\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+R(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) = & R_1(\mathbf{x})\left(g\left(\mathbf{x}_0\right)+\operatorname{grad} g\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right)+R_2(\mathbf{x})\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)+\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right) \\ & +\left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right)\left(\operatorname{grad} g\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right)+R_1(\mathbf{x}) R_2(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} R_1(\mathbf{x}) /\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right\|=0$ und $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{x}_0} R_2(\mathbf{x}) /\left\|\mathrm{x}-\mathbf{x}_0\right\|=0$ ist leicht nachzurechnen, dass $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{x}_0} R(\mathrm{x}) /\left\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\right\|=0$. Daraus folgt die Behauptung.

ⓘ Satz 6.20 (Kettenregel)

Mathematik für Informatik, p.252, Tafelbild

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathrm{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{g}(x)=\left(g_1(x), \ldots, g_n(x)\right)$ und $\mathbf{g}(\mathbb{R}) \subseteq D$. Weiters sei $F(x)=f(\mathbf{g}(x))$. Dann gilt

$$F^{\prime}(x)=\sum_{i=1}^n f_{x_i}\left(g_1(x), \ldots, g_n(x)\right) g_i^{\prime}(x)$$

In Leibniz'scher Notation:

$$\frac{d F}{d x}=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{d g_i}{d x}$$

Die Zusammensetzung zweier vektorwertiger Funktionen $\mathrm{f}: R^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $\mathrm{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist durch $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})=\mathbf{f}\left(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\right)$ definiert, wobei $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\left(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\right)$. Für die entsprechenden Jacobi-Matrizen gilt

$$\frac{\partial(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}_0\right)=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}}\left(\mathbf{g}\left(\mathbf{x}_0\right)\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}_0\right)$$

Folgerung: Falls $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar und bijektiv ist, dann ist die JacobiMatrix der Umkehrfunktion gleich der Inversen der Jacobi-Matrix von f, also

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{-1}}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{y}_0\right)=\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}_0\right)\right)^{-1}$$

mit $\mathbf{y}_0=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right)$.

Beispiel zur Kettenregel

☰ Beispiel 6.21

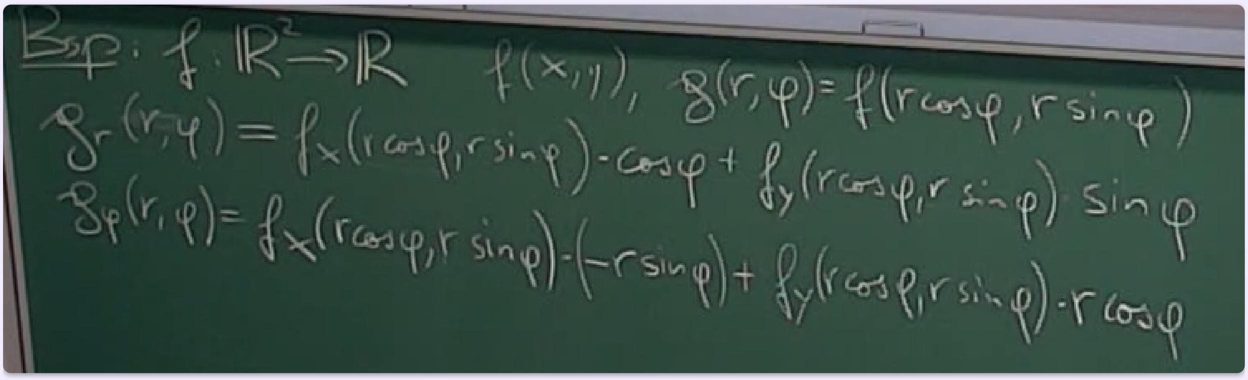
Mathematik für Informatik, p.253,

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wie lässt sich die Änderung der Funktion beschreiben, wenn wir nicht in kartesischen, sondern in Polarkoordinaten rechnen. Die Transformation auf Polarkoordinaten geschieht mittels der Substitution $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Aus der Funktion f entsteht dann die Funktion $F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Die partiellen Ableitungen von F ergeben sich nun aus der Kettenregel gemäß

$$\begin{aligned} F_r &= f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi \\ F_\varphi &= -f_x r \sin\varphi + f_y r \cos\varphi \end{aligned}$$

und nach Lösen dieses Gleichungssystems (in den Variablen f_x und f_y) folgt

$$\begin{aligned} f_x &= F_r \cos\varphi - \frac{1}{r} F_\varphi \sin\varphi, \\ f_y &= F_r \sin\varphi + \frac{1}{r} F_\varphi \cos\varphi. \end{aligned}$$



3. Richtungsableitung

Mathematik für Informatik, p.254

Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben den Anstieg der Funktion entlang der durch die Koordinatenachsen bestimmten Richtungen an. Sie sind also die Ableitungen von f in Richtung der Koordinatenachsen. Nun wollen wir entlang beliebiger Richtungen differenzieren.

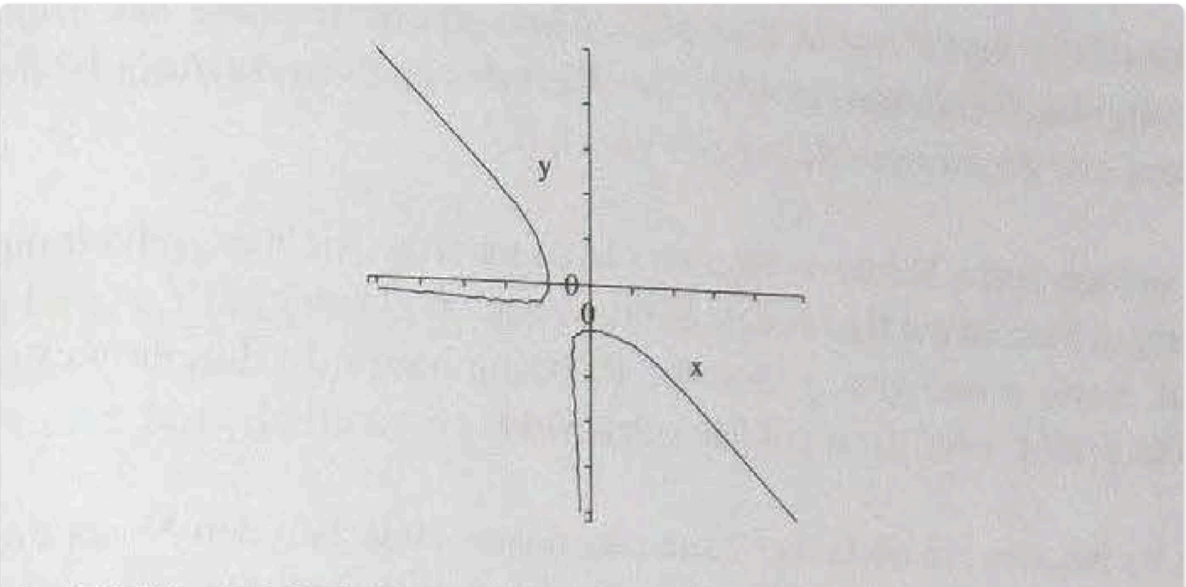


Abbildung 6.6 Die durch $e^{xy} + x + y = 0$ bestimmte ebene Kurve

Definition

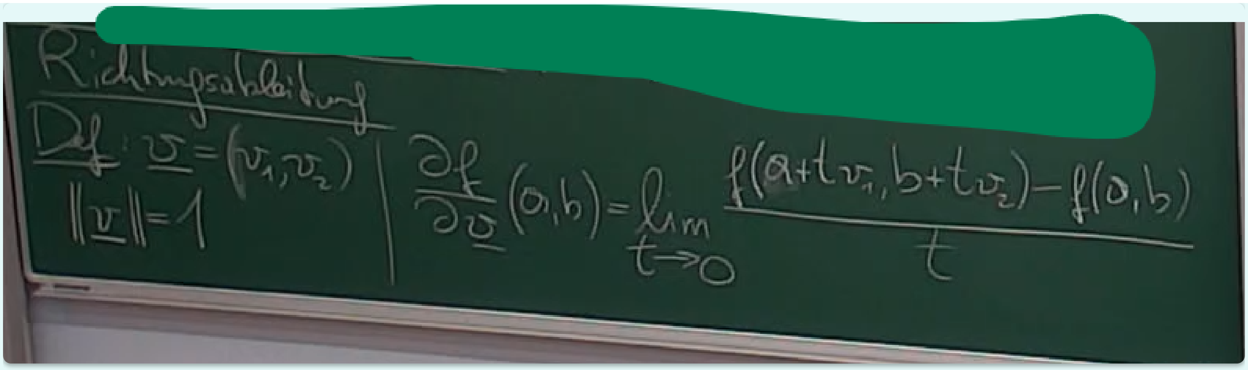
Definition 6.24

Mathematik für Informatik, p.255

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Vektor, d.h. $\|v\| = 1$. Unter der Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathrm{x} \in D$ nach v versteht man den Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

In der vo haben wir es leicht anders definiert, weil wir's für 2d Funktionen gemacht haben:



Satz 6.25

Mathematik für Informatik, p.255

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ total differenzierbare Funktion und $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger normierter Vektor: Dann existiert die Richtungsableitung nach v, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(\mathbf{x})v_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})v_n = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Beweis. Da f total differenzierbar ist, gilt

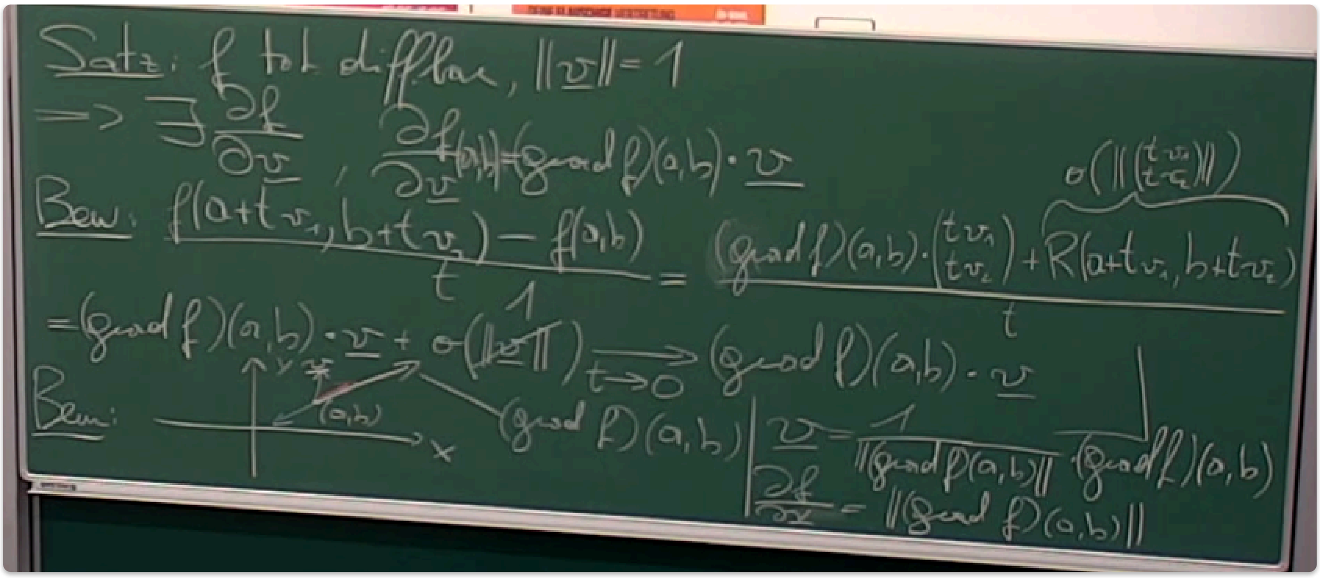
$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{f_{x_1}(\mathbf{x})tv_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})tv_n + R(\mathbf{x} + t\boldsymbol{v})}{t} \\ &= f_{x_1}(\mathbf{x})v_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})v_n + \frac{R(\mathbf{x} + t\boldsymbol{v})}{t} \end{aligned}$$

Aus $t = \|\mathbf{x} + t\boldsymbol{v} - \mathbf{x}\|$ und (6.3) folgt $\lim_{t \to 0} \frac{R(\mathbf{x}+t\boldsymbol{v})}{t} = 0$. Nach Grenzübergang für $t \to 0$ erhält man nun die Behauptung.

Mathematik für Informatik, p.255

- Frage: In welcher Richtung wächst bzw. fällt eine Funktion f am stärksten?
- Es reicht, sich auf einen der beiden Fälle (Wachsen oder Fallen) zu beschränken.
- Die Existenz der Richtungsableitung nach v impliziert, dass die Funktion $g(t) = f(x + tv)$ an der Stelle $t = 0$ differenzierbar und daher linear approximierbar ist.
- Wichtige Eigenschaft: Die Richtungsableitung ändert ihr Vorzeichen, wenn man v durch $-v$ ersetzt.
- Erkenntnis: Wenn f in Richtung v am stärksten ansteigt, dann ist die Richtung des stärksten Abstiegs genau $-v$.

Also Länge vom Gradienten sagt wie steil es ist und die Länge sagt wo es am steilsten ist.



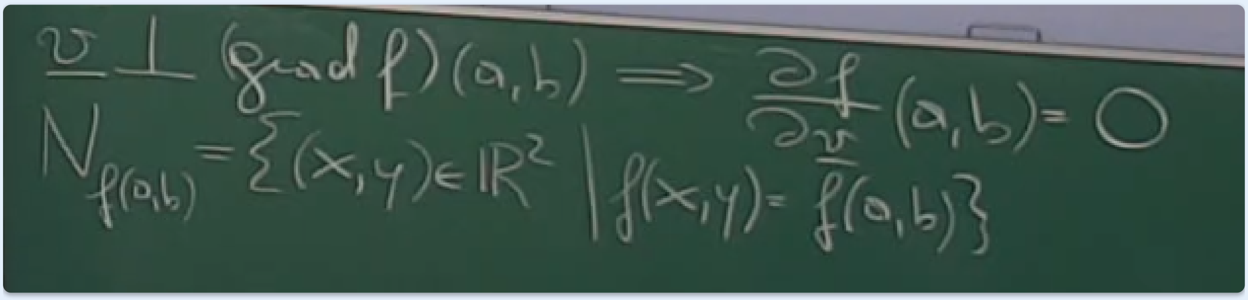
Satz 6.27

Mathematik für Informatik, p.256

Seien D, f und x wie in Satz 6.25. Dann ist die Richtung des größten Anstiegs genau die Richtung des Gradienten grad f. Der Wert des größten Anstiegs ist $\|\operatorname{grad} f\|$. Im Fall $\operatorname{grad} f = 0$ sind alle Richtungsableitungen gleich 0.

Beweis. Wir suchen jenen Vektor v, für den die zugehörige Richtungsableitung am größten ist. Nach dem vorigen Satz ist die Richtungsableitung nach v gleich $\operatorname{grad} f \cdot v$, und diese wird genau dann maximal, wenn v und $\operatorname{grad} f$ dieselbe Richtung haben. In diesem Fall gilt $\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v} = \|\operatorname{grad} f\|$. Falls $\operatorname{grad} f = 0$, dann gilt für jeden Vektor v natürlich $\operatorname{grad} f \cdot v = 0$.

Bemerkung: Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen den Niveaulinien einer Funktion f, also jenen Kurven, entlang derer der Funktionswert konstant ist, und dem Gradienten von f. Es gilt: Falls $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$, dann steht $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ normal auf die Niveaulinie, auf der $\mathbf{x}$ liegt.



Implizite Funktionen

Tafelbild

- Definition: Funktionen können implizit durch eine Gleichung der Form $F(x, y) = 0$ gegeben sein.
  - Beispiel: Der Einheitskreis wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ beschrieben.
- Problemstellung: Bei implizit gegebenen Funktionen ist die Lösbarkeit einer solchen Gleichung eine zentrale Frage.
- Ziel: Gesucht ist eine reellwertige Funktion $y(x)$ (d.h., y ist eine Funktion von x), sodass $F(x, y(x)) = 0$ gilt.
- Lösung: Diese Frage wird durch den folgenden Satz (Hauptsatz über implizite Funktionen) geklärt.

Satz 6.22 (Hauptsatz über implizite Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.253, Mathematik für Informatik, p.254, Tafelbild

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $F : D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiters sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von (x_0, y_0), so dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ in U eine eindeutig bestimmte stetige Lösung $y(x)$ hat. Die Funktion $y(x)$ ist darüber hinaus stetig differenzierbar und erfüllt

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Der Beweis dieses Satzes würde den Rahmen unseres Buches sprengen, aber die Gleichung für $y'(x)$ ist leicht zu zeigen. Man muss nur die definierende Gleichung nach der Kettenregel differenzieren. Aus $F(x, y(x)) = 0$ folgt

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

und damit

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Beispiel

Beispiel 6.23

Tafelbild, Ergänzung, Mathematik für Informatik, p.254

Die Lösung $y(x)$ der Gleichung $F(x, y) = e^{xy} + x + y = 0$ ist keine elementare Funktion. Die Lösungskurve ist in Abb. 6.6 dargestellt. Es gilt $F_x(x, y) = ye^{xy} + 1$ und

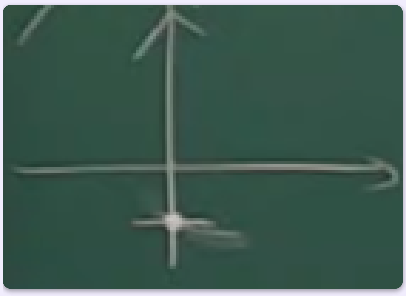
$F_y(x,y) = xe^{xy} + 1$. Obwohl die Lösungsfunktion nicht explizit durch einfache Funktionen ausgedrückt werden kann, ist es möglich, die Tangente an die Lösungsfunktion im Punkt (x_0, y_0) explizit anzugeben. Die Tangentengleichung ist nämlich durch $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ gegeben, wobei man aus dem Hauptsatz die Darstellung

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

konkret also

$$(ye^{xy} + 1)(x - x_0) + (xe^{xy} + 1)(y - y_0) = 0$$

erhält.



4. Taylorentwicklung

Mathematik für Informatik, p.256, p.257

- Einschränkung: Betrachtung des zweidimensionalen Falls.
- Gegeben: Offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.
- Jacobi-Matrix: Die Jacobi-Matrix von f an $(x_0, y_0) \in D$ ist die lineare Approximation von f.
  - Lokal wird f durch eine Ebene (Tangentialebene) angenähert.
- Verallgemeinerung der Taylorreihe:
  - Entwicklungspunkt: (x_0, y_0).
  - Weiterer Punkt: $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$.
  - Hilfsfunktion: $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ auf der Verbindungsstrecke von (x_0, y_0) nach (x, y).
  - Taylorreihe von $F(t)$ um $t_0 = 0$:

$$F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \frac{F'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

  - Satz von Taylor für $t = 1$:

$$f(x,y) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

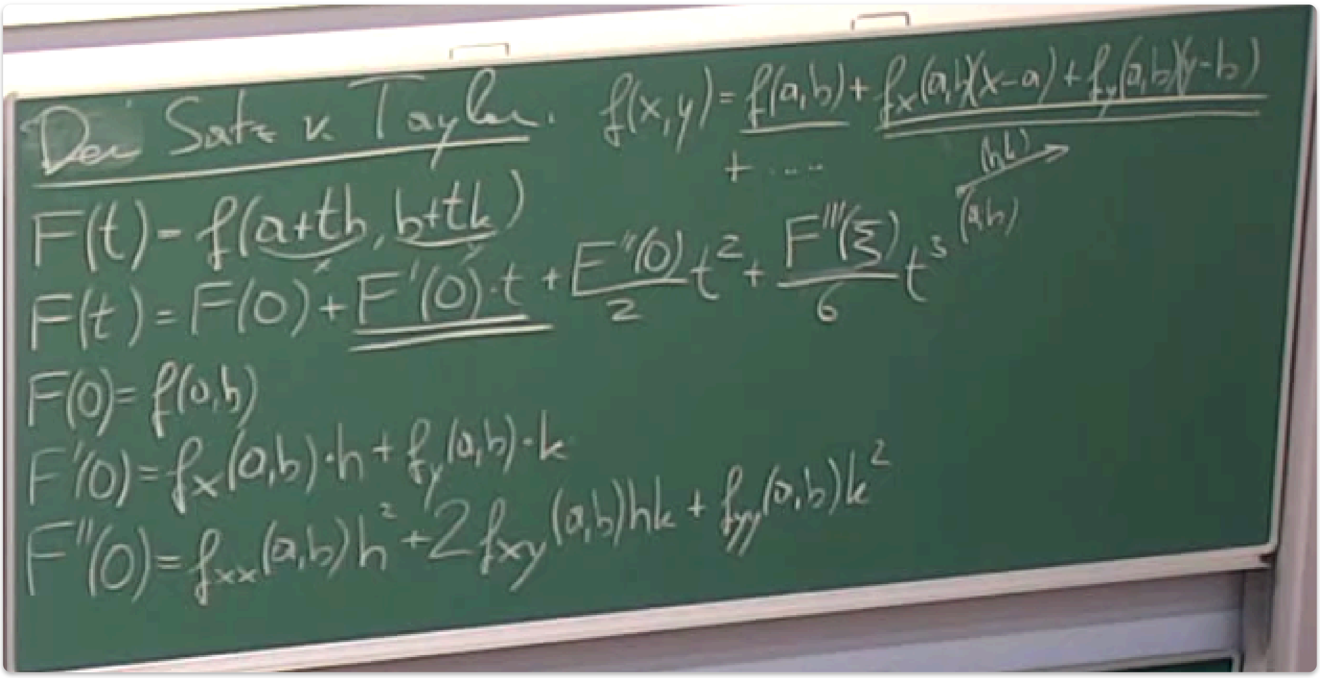
    mit $0 < \xi < 1$.

Ableitungen von $F(t)$ mit der Kettenregel

- Erste Ableitung $F'(0)$:
  - $$F'(0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$
  - Dies entspricht der ersten Näherung durch die Jacobi-Matrix.
- Zweite Ableitung $F''(0)$ (mit Satz von Schwarz):
  - $$\begin{aligned} F''(0) &= \left[\frac{d}{dt} f_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + \frac{d}{dt} f_y(x_0 + th, y_0 + tk)k\right]_{t=0} \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \end{aligned}$$
- Dritte Ableitung $F'''(0)$:
  - $$F'''(0) = f_{xxx}(x_0, y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)k^3$$

Differentialoperatoren

- **Definition:** Partielle Ableitungen nach x und y können als lineare Funktionen im Vektorraum der (unendlich oft) differenzierbaren Funktionen verstanden werden.
- **Bezeichnung:** $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ und $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.
- **Konventionen beim Rechnen mit Operatoren:**
  - Hintereinanderausführung von Operatoren wird als Produkt oder Potenz geschrieben (wenn derselbe Operator mehrfach angewendet wird).
  - Konstante Faktoren in Produkten sind als Vielfache des identischen Operators zu verstehen.
- **Darstellung der Ableitungen mit Differentialoperatoren:**
  - $F''(0) = h^2 D_x^2 f(x_0, y_0) + 2hk D_x D_y f(x_0, y_0) + k^2 D_y^2 f(x_0, y_0) = (hD_x + kD_y)^2 f(x_0, y_0)$
  - Analog: $F'''(0) = (hD_x + kD_y)^3 f(x_0, y_0)$.
- **Muster:** Das Muster dieser Ableitungen ist nun leicht erkennbar. Der Satz von Taylor kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.



Satz von Taylor für reellwertige Funktionen in 2 Variablen

--> Satz von Taylor

Hier genügt uns allerdings das hier, da wir nicht über Grad 2 hinausgehen werden:

> (Satz) 6.30 a)
>
> Mathematik für Informatik, p.258, Pasted image 20250520092608.png
>
> Falls man beispielsweise quadratische Approximationen einer Funktion sucht, so muss man die Ableitungen bis zur Ordnung zwei bestimmen, um das Taylorpolynom zweiter Ordnung festzulegen. Dieses besitzt auch die Darstellung
>
> $$f\left(x_0, y_0\right)+(h, k) \operatorname{grad} f\left(x_0, y_0\right)+\frac{1}{2!}(h, k)\begin{pmatrix} f_{xx}\left(x_0, y_0\right) & f_{xy}\left(x_0, y_0\right) \\ f_{yx}\left(x_0, y_0\right) & f_{yy}\left(x_0, y_0\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
>
> Die hier auftretende Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung heißt HesseMatrix. Allgemein gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen in n Variablen (mit den Abkürzungen $\mathbf{x}=\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ und $\mathbf{h}=\left(h_1, \ldots, h_n\right)$)
>
> $$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=f(\mathbf{x})+\mathbf{h} \operatorname{grad} f(\mathbf{x})+\frac{1}{2!} \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T+R(\mathbf{x})$$
>
> wobei H_f die durch
>
> $$H_f=\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}\left(x_1, \ldots, x_n\right) & \cdots & f_{x_1 x_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}\left(x_1, \ldots, x_n\right) & \cdots & f_{x_n x_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{pmatrix}$$
>
> definierte Hesse-Matrix von f und $R\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ das Restglied aus (6.9) bezeichnet.