

7. FS - Globale Operationen

Kosinus- und Sinusfunktionen

- **Kosinusfunktion:**
 - $\cos(x)$ hat den Wert **1** am Ursprung ($\cos(0) = 1$)
 - Durchläuft von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode
- **Sinusfunktion:**
 - $\sin(x)$ hat den Wert **0** am Ursprung ($\sin(0) = 0$)
 - Durchläuft ebenfalls von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode

7. Globale Operationen > Kosinus- und Sinusfunktionen

Frequenz und Periode

Für $\cos(x)$ innerhalb einer Strecke der Länge $T = 2\pi$ ist die Anzahl der Perioden **1**: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

7. Globale Operationen > Frequenz und Perioden

Addition von Cos/Sin Funktionen

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right)$$

Erweiterung auf beliebige Funktionen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x)$$

- **Fourierkoeffizienten:**
 - A_k, B_k : Bestimmen das Gewicht der jeweiligen Kosinus- und Sinusfunktionen.
 - Frequenzen der beteiligten Funktionen: Ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0 .
- **Fourieranalyse:** Berechnung der Fourierkoeffizienten aus der gegebenen Funktion $g(x)$.

7. Globale Operationen > Addition von Kosinus- und Sinusfunktionen

Fourierintegral

- **Fourierintegral**: Erweiterung auf **nicht periodische Funktionen**, die ebenfalls als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können:

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_{\omega} \cos(\omega x) + B_{\omega} \sin(\omega x) d\omega$$

- **Koeffizienten** A_{ω} und B_{ω} :
 - Beschreiben die Amplitude der entsprechenden **Kosinus- bzw. Sinusfunktion** bei der Frequenz ω .
 - Bestimmung der Koeffizienten:

$$A_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x) dx$$

$$B_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx$$

- **Spektrum der Funktion**:
 - $A(\omega)$ und $B(\omega)$ sind **kontinuierliche Funktionen**, die das **Spektrum** der Frequenzen im Signal repräsentieren.

Fouriertransformation und Fourier-Spektrum

- **Fouriertransformation**:
 - Vereinfacht die Darstellung, indem die Ausgangsfunktion $g(x)$ und das Spektrum als **komplexwertige Funktionen** betrachtet werden.
- **Fourierspektrum** $G(\omega)$:
 - Wird als **komplexe Funktion** dargestellt:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) g(x) dx$$

7. Globale Operationen > Fourierintegral – Nicht periodische Funktionen

Diskrete Fourier-Transformationen

DFT: Vorwärtstransformation

Für ein diskretes Signal $g(u)$ der Länge M (mit $u = 0, \dots, M-1$), wird das **Fourierspektrum** $G(m)$ für $m = 0, \dots, M-1$ durch die **Vorwärtstransformation** berechnet:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) e^{-i \frac{2\pi m u}{M}}$$

DFT: Inverse Transformation

Die **inverse DFT** zur Rekonstruktion des Signals $g(u)$ aus dem Spektrum $G(m)$:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) e^{i \frac{2\pi m u}{M}}$$

- **Beide Transformationen sind identisch:** Vorwärts- und inverse DFT sind mathematisch symmetrisch.

Eigenschaften des Fourierspektrums

- Sowohl das **Signal $g(u)$** als auch das **Fourierspektrum $G(m)$** sind **komplexwertige Vektoren** der Länge M .
- **Betrag des Fourierspektrums (Magnitude):**

$$\|G(m)\| = \sqrt{G_{\text{real}}^2(m) + G_{\text{imag}}^2(m)}$$

7. Globale Operationen > Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Convolution Theorem

Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich gleich der Punktweise-Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich.

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

7. Globale Operationen > Convolution Theorem

Hough Transformation

Andere Darstellung von Linien

Statt **5. FS - Rasterisierung > Linien** Darstellung wird hier die Hessesche Normalform verwendet:

$$r = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

- **Parameter:**
 - r : Normalabstand der Geraden zum Ursprung.
 - θ : Winkel des Normalabstands zur x-Achse.

