4.5 Grenzwert und Stetigkeit

Hier wird der Grenzwertbegriff (Siehe 4.1 Folgen > 1. Definitionen und Grenzwert) für Folgen auf Funktionen übertragen.

- genaue Beschreibung vom lokalen Verhalten von Funktionen und dessen Graphen
- Funktionen in einem Linienzug zeichenbar --> stetig
- Diese anschauliche Definition in der Mathematik aber zu ungenau
- Link zur Formelsammlung: FS_4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

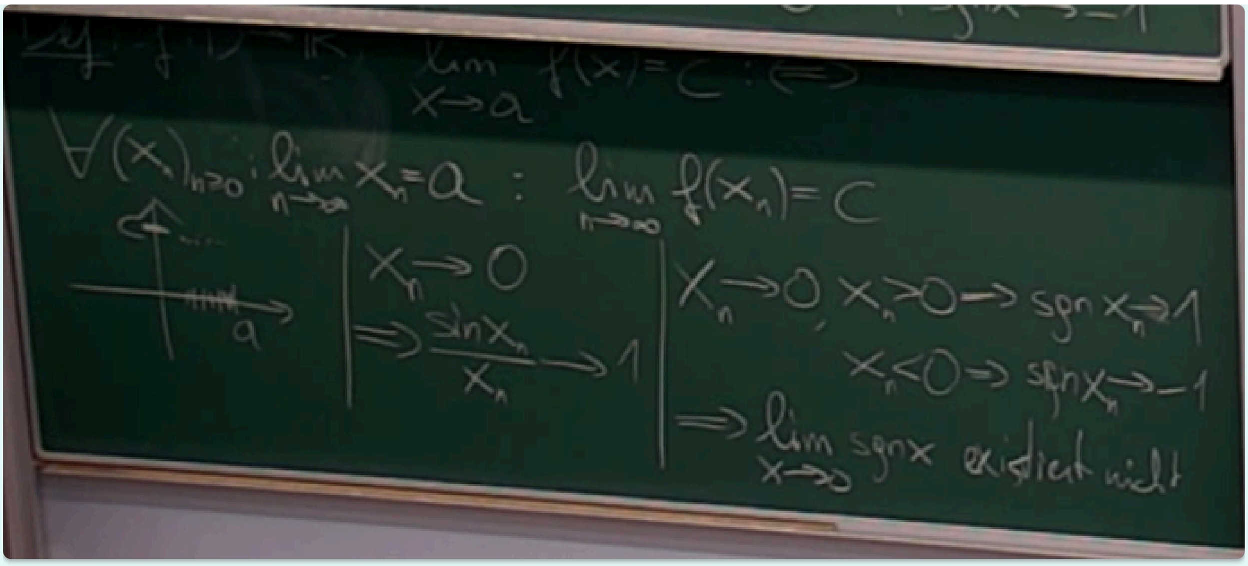
Definition für Grenzwert für Funktionen

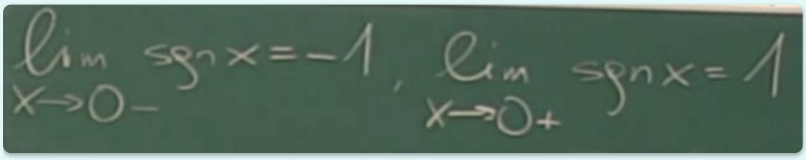
Definition 4.82

Mathematik für Informatik, p.187

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ **besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert $c(c \in \mathbb{R})$,** wenn für jede Folge $(x_n)_{n>1}$ $(x_n \in D)$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Falls aus $x_n \rightarrow \infty$ folgt, dass $f(x_n) \rightarrow c$, dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$. In Fällen $c = -\infty$ und $c = +\infty$ spricht man von einem *uneigentlichen Grenzwert* an der Stelle x_0.

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Man schreibt auch: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = c$.





Das sgn(x) ist in dem Fall ob es ein linksseitiger oder rechtsseitiger Grenzwert ist.

Beispiel für stetige Funktion:

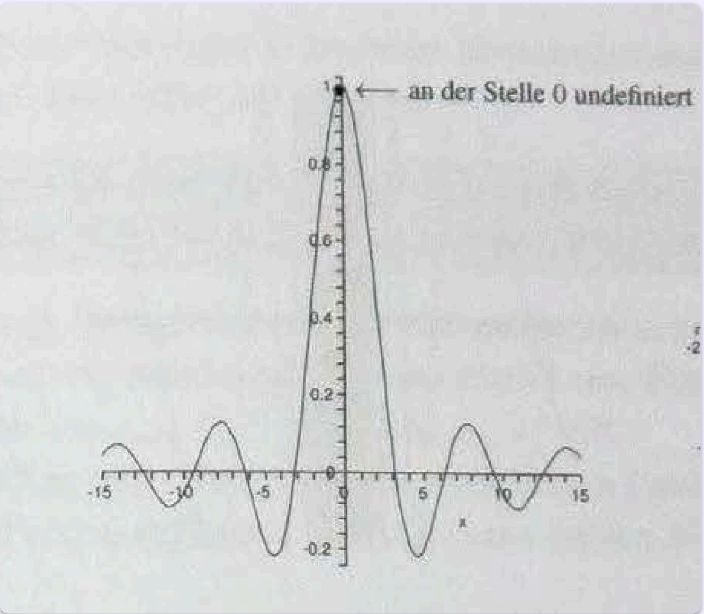
Beispiel 4.81.1

Mathematik für Informatik, p.186

(a) Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Den Graphen der Funktion zeigt Abb. 4.9. Offensichtlich ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da wir bei Einsetzen von 0 den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten. Es gibt aber offensichtlich einen Grenzwert: Wenn x sich 0 nähert, so strebt $\frac{\sin x}{x}$ gegen 1 . Auch Abb. 4.6 zeigt, dass für kleine Werte von x die Bogenlänge ungefähr so groß ist wie $\sin x$. Es scheint also natürlich, die Funktion $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ mittels der Definition $f(0) = 1$ fortzusetzen.



Beispiel für unstetige Funktion

Beispiel 4.81.2

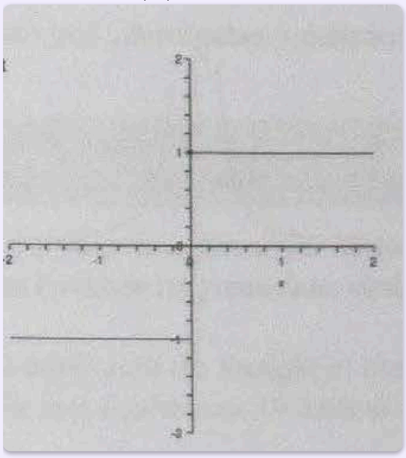
Mathematik für Informatik, p.186

(b) Anders geartet ist die Funktion (siehe Abb. 4.9, rechts)

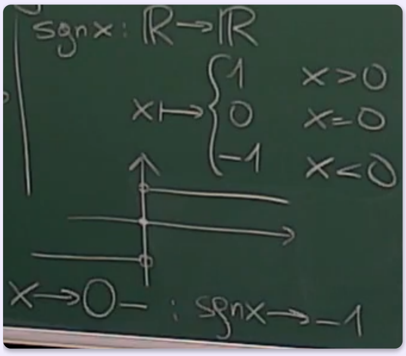
$$g : \mathbb{R} \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x > 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Hier ist eine stetige Fortsetzung der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ offenbar nicht möglich, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ davon abhängt, von welcher Seite wir uns der

Stelle x_0 nähern. Die einseitigen Grenzwerte sind $\lim_{x \to 0-} g(x) = -1$ und $\lim_{x \to 0+} g(x) = 1$.



Wenn die Funktion sich jetzt von links an 0 annähert kommt -1 raus und wenn sie sich von rechts annähert kommt 1 raus. in der vo hatten wir noch eine abgeänderte Version des Beispiels, mit einem Wert für 0:



Weiter Beispiele:

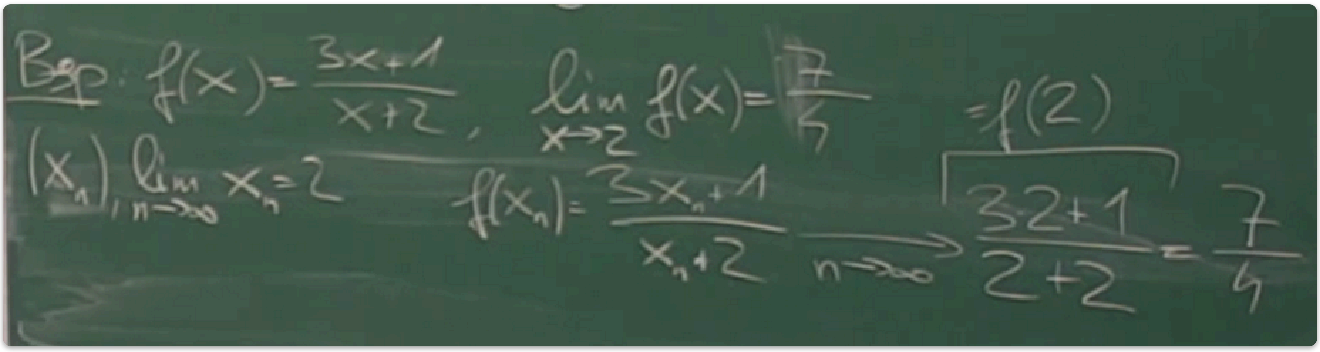
Beispiel 4.83

Mathematik für Informatik, p.188

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

Man beachte, dass wir hier nicht mehr mit Folgen argumentieren müssen, sondern direkt Grenzwerte von Funktionen bestimmen können. Da Grenzwerte von Funktionen über Grenzwerte von Folgen definiert werden, sind nämlich auch alle Rechenregeln für letztere (Satz 4.14 und 4.16) direkt übertragbar.

In vo haben wir bissi anderes Beispiel gemacht:



Definition für Stetigkeit

Hier haben wir einmal eine Definition für Stetigkeit die zeigt, dass Stetigkeit nichts anderes ist, als dass man Grenzwertbildung und Funktionsauswertung miteinander vertauschen kann.

Definition 4.84

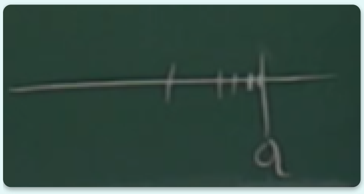
Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig an der Stelle** $x_0 \in D$, wenn $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Die Funktion f heißt stetig in D, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

In vo war Definition bissi anders formuliert:

$$\forall (x_n)_{n \geq 0} : \lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

Heißt: eine Funktion ist **folgestetig** sobald man vertauschen kann ob man den Limes von einem Punkt oder der kompletten Funktion nehmen kann.



Wir haben den Grenzwert von Funktionen und damit auch die Stetigkeit über den Grenzwert von Folgen definiert. Hier noch eine äquivalente Definition der Stetigkeit:

Definition 4.85

Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

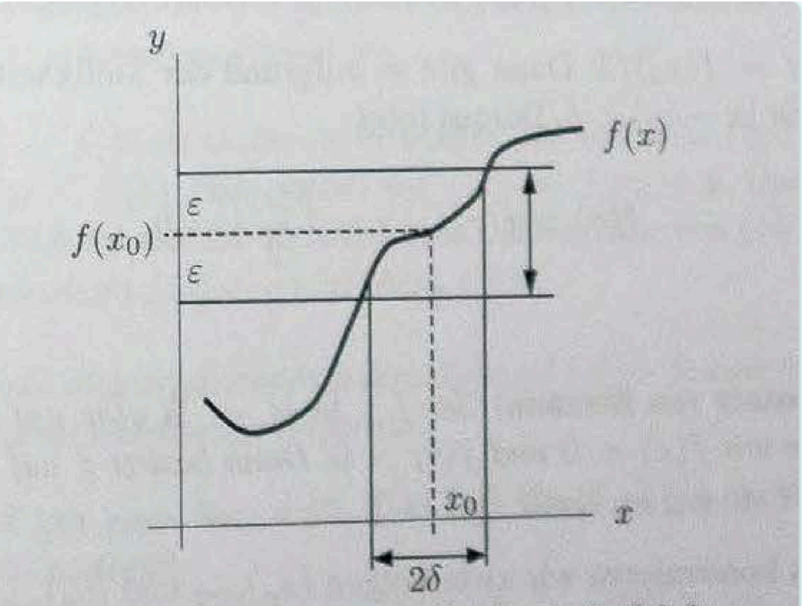


Abbildung 4.12 Zur ε-δ-Definition der Stetigkeit

Also man will ähnlich wie bei Folgen und Reihen schauen, ob bei kleinen Änderungen auf der x-Achse immernoch im Abstand ϵ sein.

- Anschauliche Bedeutung der Stetigkeitsdefinition:
  - Betrachtung der Funktion $f(x)$ lokal um x_0.
  - Vorgabe einer Toleranz $\varepsilon > 0$ für den Funktionswert: $f(x)$ bewegt sich in $I_1 = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.
  - Stetigkeit: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Intervall $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ um das Argument x_0, sodass $f(x)$ das Intervall I_1 nicht verlässt, solange $x \in I_0$ (siehe Abb. 4.12).
  - Intuition: Bei einer stetigen Funktion ändert sich der Funktionswert nur geringfügig, wenn sich das Argument nur geringfügig ändert.

Definition

f folgestetig an a <=> *f stetig* an a

Sätze und Beispiele zur Stetigkeit

Beispiel aus VO

Beispiel: Polynomstetigkeit

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p(x)$, wobei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom ist.

Behauptung: f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis:

Sei $(x_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$, d.h., $\lim_{k\to\infty} p(x_k) = p(a)$.

Da $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, gilt für jede Potenz $l \geq 0$:

$$\lim_{k\to\infty} x_k^l = a^l$$

Somit gilt auch für die Linearkombination der Potenzen (das Polynom):

$$\lim_{k\to\infty} p(x_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i \right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\lim_{k\to\infty} x_k^i \right) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = p(a)$$

Da dies für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ gilt, ist die Funktion $f(x) = p(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

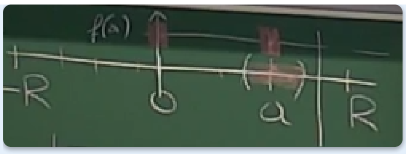
Satz 4.86

Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild, Tafelbild2
Sei $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ eine (reelle oder komplexe) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Der Konvergenzradius der Potenzreihe sei R. Dann ist f im Konvergenzkreis $|x| < R$ stetig.

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $x_0 = 0$. Sei $|x| < R$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x$. Ferner bezeichne r eine Konstante mit $|x| \leq r < R$. Für hinreichend große n gilt dann $|x_n| \leq r$. Unter diesen Bedingungen gilt nun

$$\left| f\left(x_n\right) - f(x) \right| = \left| \sum_{m\geq 0} a_m x_n^m - \sum_{m\geq 0} a_m x^m \right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N} |a_m| \left| x_n^m - x^m \right| + \sum_{m>N} \left(\left| a_m x_n^m \right| + \left| a_m x^m \right| \right).$$



Da $|x_n| \leq r < R$ und $|x| \leq r < R$ können wir nach Satz 4.60 den in (4.14) auftretenden Reihenrest durch eine geometrische Reihe abschätzen. Es gibt also $c > 0$ und $0 < q < 1$ mit

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \sum_{m=0}^{N} |a_m| \, |x_n^m - x^m| + c \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

Geben wir nun ein $\varepsilon > 0$ vor, dann gibt es ein N, so dass der zweite Summand kleiner $\varepsilon/2$ ist. Da wegen $x_n \to x$ auch $x_n^m \to x^m$ gilt, ist auch der erste Summand für hinreichend große n kleiner als $\varepsilon/2$, womit das $\varepsilon - \delta$-Kriterium für f (Definition 4.85) bewiesen ist.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.87

Mathematik für Informatik, p.190, Tafelbild
Eine direkte Konsequenz der Stetigkeit ist die Vorzeichenbeständigkeit.

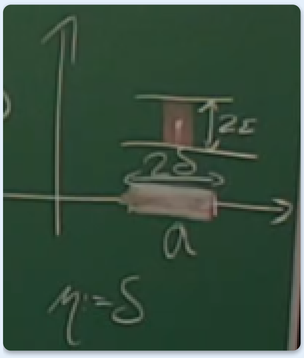
Für jede stetige Funktion *f mit $f(x_0) > 0$ gibt es eine δ-Umgebung* $U_\delta(x_0)$, so dass $f(x) > 0$, für alle $x \in U_\delta(x_0)$. *Für $f(x_0) < 0$ gilt eine analoge Aussage*.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = f(x_0)/2$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f ein δ, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. Daraus folgt

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

für $|x - x_0| < \delta$.

Intuitive Erklärung:
Wenn du an einem bestimmten Punkt (x_0) auf dieser Kurve bist und der Funktionswert dort ($f(x_0)$) positiv ist (also die Kurve oberhalb der x-Achse liegt), dann sagt der Satz, dass es in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes auch noch ein kleines Stück der Kurve geben muss, das ebenfalls oberhalb der x-Achse liegt.



Nullstellensatz (von Bolzano)

Satz 4.88 (Nullstellensatz von Bolzano)

Mathematik für Informatik, p.190, Tafelbild, Tafelbild2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f auf $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle, d.h., es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir zwei Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ nach folgendem Algorithmus: Sei $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Die Werte a_1 und b_1 werden in Abhängigkeit von $f_0 = f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ bestimmt:

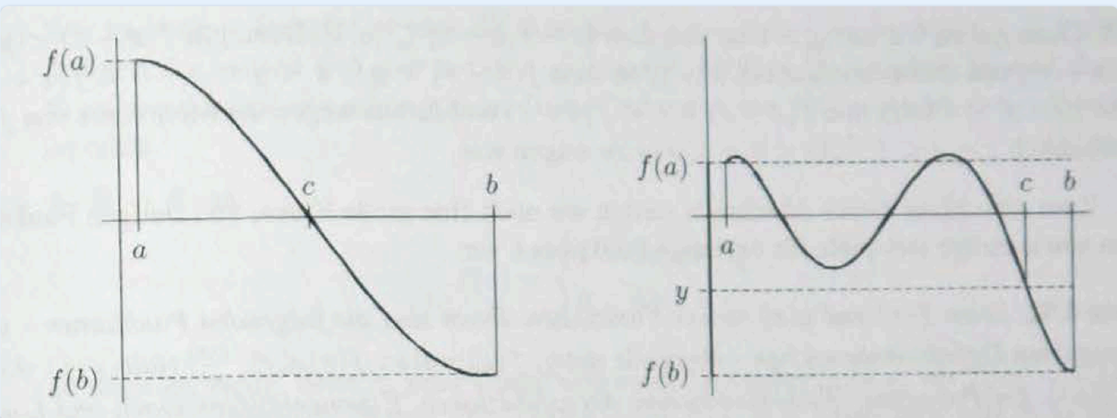
$f_0 < 0$: Dann setzen wir $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ und $b_1 = b_0$.

$f_0 > 0$: Dann setzen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

$f_0 = 0$: Dann haben wir die gewünschte Nullstelle und sind fertig.

Falls wir noch keine Nullstelle gefunden haben, wenden wir das obige Verfahren auf $[a_1, b_1]$ an, usw.

Auf diese Weise erhält man entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle oder zwei Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$. Aufgrund der Konstruktion ist offensichtlich, dass $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$. Darüber hinaus sind die Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ beschränkt, erstere ist monoton wachsend und letztere monoton fallend. Wegen $|a_n - b_n| = |a - b| \cdot 2^{-n}$ konvergieren sowohl $(a_n)_{n \geq 0}$ als auch $(b_n)_{n \geq 0}$ gegen denselben Grenzwert c. Aus $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = c$ folgt nun aufgrund der Stetigkeit von f, dass $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c)$. Wegen $f(a_n) < 0$ muss jedoch $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0$ gelten. Analog gilt $\lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0$ und folglich $f(c) = 0$.



Zwischenwertsatz

Satz 4.89 (Zwischenwertsatz)

Mathematik für Informatik, p.191, Tafel

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ jeden Wert z wischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Beweis. Im Fall $f(a) = f(b)$ ist nichts zu beweisen. Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Ferner sei c beliebig mit $f(a) < y < f(b)$. Nun setzen wir $g(x) = f(x) - y$. Dann gilt $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Aus Satz 4.88 folgt nun die Existenz einer Nullstelle c von $g(x)$. Dieses c leistet aber bereits das Gewünschte, denn $f(c) = y$ (vgl. Abb. 4.13).

Also alle Werte die zwischen den beiden Werten einer stetigen Funktion liegen, sind auch stetig.

Weitere Sätze

Satz 4.90

Mathematik für Informatik, p.191, Tafel

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. *Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall*.

Beweis. Für $x, y \in I$ gilt nach Satz 4.89, dass alle Werte zwischen $f(x)$ und $f(y)$ in $f(I)$ liegen. $f(I)$ ist also ein Intervall.

Sei $A = \sup f(I)$. Dann existiert eine Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $b_n \to A$. Wegen $b_n \in f(I)$ existieren a_n mit $f(a_n) = b_n$. $\mathrm{Da} (a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt ist, existiert nach Satz 4.27 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 0}$. Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von f, dass
$f(a) = A$. Analoge Argumente für inf $f(I)$ ergeben schließlich die Abgeschlossenheit von $f(I)$.

Der vorige Satz beinhaltet auch Folgendes: Eine auf einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion nimmt auf I ein Maximum und ein Minimum an.

Ausgehend vom vorigen Statz folgt der hier:

Satz 4.91

Mathematik für Informatik, p.191, Tafelbild 1, Tafelbild 2

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ und ist ebenfalls stetig.

Beweis. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend. Wegen des Zwischenwertsatzes (Satz 4.89) nimmt f auf I alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, also ist $f(I) = [f(a), f(b)]$. Aufgrund der strengen Monotonie lässt sich f umkehren, und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend. Sei $y \in f(I)$, wobei wir uns auf den Fall $y \neq f(a)$ und $y \neq f(b)$ beschränken. Dann gilt $x = f^{-1}(y) \in (a, b)$. Die anderen Fälle (y am Rand des Intervalls) lassen sich ähnlich behandeln.

Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig an der Stelle y ist, also dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\bar{y} - y| < \delta \Longrightarrow \left|f^{-1}(\bar{y}) - x\right| < \varepsilon$$

gilt. Dazu geben wir uns $\varepsilon > 0$ so vor, dass $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subseteq [a, b]$. Dann gilt $f(x - \varepsilon) < y < f(x + \varepsilon)$, und daher existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x - \varepsilon) < y - \delta < y < y + \delta < f(x + \varepsilon)$$

. Aus $|\bar{y} - y| < \delta$ folgt nun $f(x - \varepsilon) < \bar{y} < f(x + \varepsilon)$ und daraus wegen der Monotonie von f^{-1} schließlich $x - \varepsilon < f^{-1}(\bar{y}) < x + \varepsilon$, was zu zeigen war!

Satz 4.92

Mathematik für Informatik, p.192

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Funktionen - auf geeigneten Definitionsbereichen - ebenfalls stetig:

- $f(x) \pm g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- $\frac{f(x)}{g(x)}(falls g(x) \neq 0)$,
- $f(g(x))$.

Da Polynome, Winkelfunktionen, Arcusfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen stetig sind, folgt daraus, dass alle elementaren Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten selbstverständlich nur dann, wenn die betreffenden Funktionen einen geeigneten Definitionsbereich haben. So ist z.B. $f + g$

nur dort definiert, wo sowohl f als auch g definiert sind.

Unstetigkeiten

Beispiel 4.93 (Unstetigkeit)

Mathematik für Informatik, p.192

(a) Die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (siehe Abb. 4.14) ist *unstetig an allen Stellen $x \in \mathbb{Z}$* und überall sonst stetig. Sie ist also **stückweise Stetig**

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (vgl. Abb. 4.11) ist im **gesamten Definitionsbereich** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ **stetig** und im Punkt $x = 0$ **nicht definiert**. Setzen wir die Funktion auf $x = 0$ fort, z.B. mittels

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

so hat $g(x)$ eine **Unstetigkeitsstelle** bei $x = 0$.

(c) Wie im vorigen Beispiel ist auch die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ **an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.** Es handelt sich aber um eine so genannte hebbare Unstetigkeit, da man durch Erweitern des Definitionsbereichs um 0 und Definieren von $f(0) = 0$ eine stetige Funktion erhält.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig, denn in jeder Umgebung einer rationalen Zahl x, wo $f(x) = 1$ gilt, liegen auch irrationale Zahlen, also Zahlen y mit $f(y) = 0$. Umgekehrt gibt es in jeder Umgebung einer irrationalen Zahl auch rationale Zahlen.

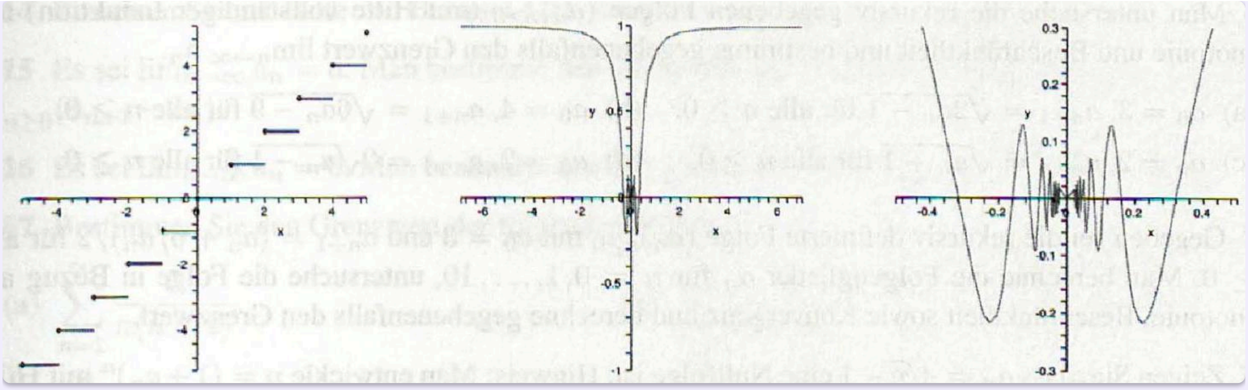


Abbildung 4.14 links: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, Mitte und rechts: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen