Analysis Formelsammlung

Vorwort

Diese Formelsammlung enthält den Stoff, der in der Analysis Vorlesung der TU Wien im Sommersemester 2025 vorgetragen wurde, der auch in "Mathematik für Informatik - Vierte erweiterte Auflage" zu finden ist. Die Struktur dieser Formelsammlung basiert demnach auch dem des Buchs.

Hinweis

Diese Formelsammlung ist als Formelsammlung gedacht und erklärt den Stoff nur sehr flüchtig! Für eine ausführlichere Ausarbeitung des Stoffs bitte an andere Quelle wenden.

Derzeit fehlt noch das letzte Kapitel 9.1 Fehlerproblematik in der Computernumerik und wird demnächst (wahrscheinlich nach dem 24.6.) ergänzt.

Falls sich irgendwo Fehler befinden (sei es Inhaltliche oder Sprachliche) oder es Verbesserungsvorschläge gibt bitte an @aldinapoli auf Discord wenden.

Legende

Definitionen

Sätze/Rechenregeln

Verweis auf Definition von anderen Kapiteln und sonstige Hinweise

Hinweis auf Einschränkung von Sätzen und Definitionen

Beispiele

Inhaltsverzeichnis

4.1 Folgen

1. Definition und Grenzwert

Definition einer Folge

Gegeben sei eine Folge

> $(a_n)_{n \geq 0} = a_0, a_1, a_2, \ldots$
>
> Folgen lassen sich auch als Funktionen definieren:
> $a : N \to R$

Des Weiteren gilt für eine beliebige Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 0}$

> $a(n) = a_n$
> a_n heißt **Glied** der Folge
> n heißt **Index** des Glieds der Folge

ϵ-Umgebung

Eine ϵ-Umgebung von a ist als Intervall definiert, in der folgendes gilt:

> $U_\epsilon(a) = \{x \in R | \, |x - a| < \epsilon\}$

Grenzwert/Limes

Eine Folge besitzt einen Grenzwert a, wenn **fast alle** Folgenglieder innerhalb einer jeden noch so kleinen ϵ-Umgebung von a sind:

> $\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in N : \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$
> Der Grenzwert $a = \pm\infty$ heißt **uneigentlicher Grenzwert**

Des Weiteren gilt:

> Eine Folge mit einem Grenzwert a nennt man **konvergent**
> Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**
> Eine Folge mit einem uneigentlichen Grenzwert nennt man **uneigentlich konvergent** oder auch **divergent**

Häufungspunkt/Häufungswert

Eine Folge besitzt einen Häufungspunkt a, wenn **unendlich viele** Folgenglieder innerhalb einer jeden noch so kleinen ϵ-Umgebung von a sind:

Des Weiteren gilt:

> Der größte Häufungspunkt heißt **Limes superior** (geschrieben lim sup$_{n\to\infty}$)
> Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior** (geschrieben lim inf$_{n\to\infty}$)
> Der Häufungspunkt $a = \pm\infty$ heißt uneigentlicher Häufungspunkt

Tip

Fast alle heißt, dass etwas auf alle Elemente mit Ausnahmen von endlich vielen zutrifft.
(Ungefähre Notation: Für $(a_n)_{n \geq 0} : \exists k \in N : \forall n > k \in N :$ Elemente a_n erfüllen Eigenschaft {...})

Unendlich viele heißt, dass etwas auf unendlich viele Elemente mit Ausnahmen von unendlich vielen zutrifft.

2. Monotonie und Beschränktheit

> **Monotonie**
>
> Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:
>
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton steigend** $:\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **streng monoton steigend** $:\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **schließlich steigend** $:\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
> >
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton fallend** $:\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **streng monoton fallend** $:\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **schließlich fallend** $:\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
> >
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton steigend und fallend** $:\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1}$
> >
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **oszillierend** $:\Leftrightarrow \quad \nexists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : (a_n \geq a_{n+1}) \vee (a_n = a_{n+1}) \vee (a_n \leq a_{n+1})$

> **Beschränktheit**
>
> Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:
>
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow \quad \exists S : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$
> >
> > > S heißt **obere Schranke**
> > > die kleinste obere Schranke heißt **Supremum** $\sup(a_n)$, für das gilt:
> > >
> > > > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist nicht nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow \quad \sup(a_n) = \infty$
> > > > $\lim_{n\to\infty} \sup(a_n)$ ist der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$
> > > > Falls das Supremum in der Menge drinnen ist, nennt man es **Maximum** $\max M$
> >
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **nach unten beschränkt** $:\Leftrightarrow \quad \exists I : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq I$
> >
> > > I heißt **untere Schranke**
> > > die größte untere Schranke heißt **Infimum** $\inf(a_n)$, für das gilt:
> > >
> > > > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist nicht nach unten beschränkt $:\Leftrightarrow \quad \inf(a_n) = -\infty$
> > > > $\lim_{n\to\infty} \inf(a_n)$ ist der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$
> > > > Falls das Infimum in der Menge drinnen ist, nennt man es **Minimum** $\min M$
> >
> > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **beschränkt**, wenn die Folge nach unten und nach oben beschränkt ist

> **Satz 4.9**
>
> Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder reelle Folge besitzt ein Supremum (Infimum)

> **Satz 4.11**
>
> Jede konvergente Folge ist beschränkt

> **Satz 4.12 (Hauptsatz über monotone Folgen)**
>
> Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist

3. Rechnen mit Grenzwerten

Satz 4.14 (Rechnen mit Grenzwerten)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit ihren nicht uneigentlichen Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

> i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
>
> ---
>
> ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ Für $\lambda \in R$
>
> ---
>
> iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
>
> ---
>
> iv) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_n}{b_n}$ falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$
>
> ---
>
> v) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \infty$ falls $b = 0$ und $b_n \neq 0$

Satz 4.15 (Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit ihren Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in R$, dann gilt:

> i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } b \in R \text{ oder } b = \infty \\ -\infty & \end{cases}$
>
> ---
>
> ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } \lambda > 0 \in R \\ -\infty & \text{wenn } \lambda < 0 \in R \end{cases}$
>
> ---
>
> iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$ wenn $b > 0$
>
> ---
>
> iv) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \infty$ wenn $b \in R$

Euler'sche Zahl

Die Euler'sche Zahl ist wie folgt definiert:

> $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$

Unbestimmte Formen

Es lassen sich nicht immer die oben genannten Regeln für Rechenoperationen mit Grenzwerten anwenden. In dem Fall muss man entweder die [Regel von de l'Hospital (5.2.5)] anwenden oder den gegebenen Term umformen, so dass man die oben genannten Rechenregeln anweden kann. Ansonsten muss man sich für die Folgen individuell betrachten, wie sie verlaufen

Zu den unbestimmten Formen gehören folgende Ausdrücke:

> $\infty - \infty$
>
> ---
>
> $\frac{\infty}{\infty}$
>
> ---
>
> $\frac{0}{0}$
>
> ---
>
> 1^∞
>
> ---
>
> ∞^0
>
> ---
>
> 0^0

---

4. Konvergenzuntersuchung

Satz 4.22 (Sandwich-Theorem)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$, wobei die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = n$ gegeben sind, dann gilt:

> $\exists k : \forall n > k \in \mathrm{N} : b_n \leq a_n \leq c_n \iff \lim_{n\to\infty}(a_n) = c$
> *Wenn für fast alle $n \in \mathrm{N}$ gilt, dass $b_n \leq a_n \leq c_n$, dann folgt, dass der Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 0} = c$ ist*

Teilfolge

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:

> $(a_{n_m})_{m\in R} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ heißt Teilfolge
> wobei $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots \in \mathrm{N}$

Satz 4.26

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit einer Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in R}$, dann gilt:

> $(a_n)_{n\geq 0}$ hat den Häufungspunkt $a :\iff \lim_{n\to\infty}(a_{n_m}) = a$

Satz 4.27 (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ enthält einen Häufungspunkt

Cauchyfolge

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n, m > N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon$$

4.29 (Cauchykriterium für Folgen)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist

---

Appendix

Die arithmetische Folge

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0} = a_0 + dn$ mit $d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } d = 0 \\ \infty & \text{für } d > 0 \\ -\infty & \text{für } d < 0 \end{cases}$$

Die geometrische Folge

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0} = q^n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

Folge zur Definition von e

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 0} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = e \approx 2.71828$$

4.2 Unendliche Reihen

1. Der Begriff der unendlichen Reihe

Definition der unendlichen Reihe

Eine unendliche Reihe ist definiert als eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (manchmal auch ohne die obere Schranke geschrieben), wobei a_n **Reihenglieder** heißt und ein Folgenglied der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist.

Des Weiteren gilt:

> Die Folge $(s_n)_{n\geq 0} = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt **Partialsumme** der Reihe
> Der Grenzwert der Partialsumme ist der **Grenzwert** (oder auch **Summe** genannt) der Reihe

Satz 4.35

Falls eine gegebene Reihe $\sum_{n=0} a_n$ konvergiert, dann ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge

Beispiele zur Veranschaulichung

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$, für die gilt:

> Die Folgenglieder $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots\right)$ der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ sind die Reihenglieder der Reihe
>
> $(0.1, 0.11, 0.111, \dots)$ sind Partialsummen
>
> Der Grenzwert der Reihe ist $\frac{1}{9}$

2. Konvergenzkriterien

Satz 4.39 (Cauchykriterium für Reihen)

Für eine gegebene Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ gilt:

> Die Reihe ist konvergent :⟺ $\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall m \geq n > N(\epsilon) : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon$

Alternierende Reihe

Eine Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ heißt alternierend, wenn das Vorzeichen der Reihenglieder abwechselnd positiv und negativ ist.

Satz 4.41 (Konvergenzkriterium von Leibniz)

Für eine gegebene alternierende Reihe $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ gilt:
$(a_n)_{n \geq 0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge :⟺ Die Reihe konvergiert

Absolute Konvergenz

Für eine gegebene Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ gilt:

> $\sum_{\geq 0} a_n$ heißt absolut konvergent :⟺ $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ konvergiert
>
> Eine nicht absolut konvergente Reihe nennt man **bedingt konvergente** Reihe

Satz 4.4

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent

Satz 4.47 (Majorantenkriterium)

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n \geq 0} a_n$ und $\sum_{n \geq 0} b_n$, für die gilt:

> $\exists k \in N : \forall n > k \in N : |a_n| \leq b_n$
> $\sum_n b_n$ ist konvergent

Dann gilt:

> $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent
> $\sum_n b_n$ heißt **Majorante** von $\sum_n a_n$

Satz 4.48 (Minorantenkriterium)

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n \geq 0} a_n$ und $\sum_{n \geq 0} b_n$, für die gilt:

> $\exists k \in N : \forall n > k \in N : 0 \leq a_n \leq b_n$
> $\sum_n a_n$ ist divergent

Dann gilt:

> $\sum_n b_n$ ist divergent
> $\sum_n a_n$ heißt **Minorante** von $\sum_n b_n$

Satz 4.50 (Allgemeine Form des Wurzelkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt.
Falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists q < 1 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Longrightarrow$ Die Reihe ist absolut konvergent

Ansonsten falls für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung des Wurzelkriteriums

Für Reihen, für die gilt $(\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|}) = 1) \land (\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < 1)$ kann das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Satz 4.51 (Limesform des Wurzelkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
$\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) < 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist konvergent

$\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) > 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung der Limesform des Wurzelkriteriums

Für den Fall $\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) = 1$ oder wenn das allgemeine Wurzelkriterium nicht zutrifft, kann die Limesform des Wurzelkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen

Satz 4.52 (Allgemeine Form des Quotientenkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
Falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists 0 < q < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \Longrightarrow$ Die Reihe ist absolut konvergent

Ansonsten falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung des Quotientenkriteriums

Für Reihen, für die gilt $(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|) \land (\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1)$ kann das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Satz 4.53 (Limesform des Quotientenkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
$\lim_{n\to\infty} \sup\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist konvergent

$\lim_{n\to\infty} \inf\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1 \Longrightarrow$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung der Limesform des Quotientenkriteriums

> Für den Fall $(\lim_{n\to\infty} \inf\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \leq 1) \lor (\lim_{n\to\infty} \sup\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \geq 1)$ oder wenn die allgemeine Form Quotientenkriterium nicht zutrifft, kann die Limesform des Quotientenkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Erinnerung

Der $\lim_{n\to\infty} \sup$ einer Folge ist der größte Häufungspunkt der Reihe (4.1.1)

3. Das Cauchyprodukt und Potenzreihen

Cauchyprodukt

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$. Das Produkt beider Reihen heißt Cauchyprodukt und ist wie folgt definiert:

> $\sum_{n\geq 0}(a_n) \sum_{n\geq 0}(b_n) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n}(b_k a_{n-k}))$

Satz 4.56

Gegeben seien zwei konvergente Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$, für die gilt:

> Das Cauchyprodukt beider Reihen ist auch konvergent

Potenzreihe

Eine Reihe der Bauart $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ heißten Potenzreihen. Des Weiteren gilt:

> Die Faktoren a_n heißen **Koeffizienten** der Potenzreihe
> x_0 heißt **Entwicklungsstelle** oder auch **Anschlussstelle** der Potenzreihe

Satz 4.59 (Konvergenzradius)

Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$, dann gilt:

> $$\exists 0 \leq R \leq \infty : \forall x \in C : \begin{cases} |x - x_0| < R \implies \text{Die Potenzreihe kovergiert} \\ |x - x_0| > R \implies \text{Die Potenzreihe divergiert} \end{cases}$$

R heißt **Konvergenzradius**
Dabei lässt sich R wie folgt bestimmen:

> $$R = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty & \text{wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| & \text{wenn } \exists k \in N : \forall n > k \in N : a_n \neq 0 \\ \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{sonst mit Cauchyformel} \end{cases}$$

Hinweis:

Die Quotientenformel und die Cauchyformel ergeben das gleiche Ergebnis, jedoch hat die Quotientenformel einige Einschränkungen in der Anwendung während die Cauchyformel immer anwenderbar ist.

Appendix

Harmonische Reihe

Für die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ gilt:

> Die Reihe divergiert.
> Beweis:
>
> > $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \ldots$$
> >
> > $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{= \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{= \frac{1}{2}} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} = \infty$$

Geometrische Reihe

Für die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ gilt:

> $$\sum_{n\geq 0} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{wenn } |q| < 1 \\ \infty & \text{wenn } |q| \geq 1 \end{cases}$$
>
> Beweis:
>
> > Aus der Definition der Reihe folgt: Die Partialsummenfolge ist definiert als:
> >
> > $$\begin{aligned} & s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \mid - s_n q \\ \Leftrightarrow \quad & s_n - q s_n = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) \\ \Leftrightarrow \quad & (1-q) s_n = 1 - q^{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & s_n = \left| \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \right| \end{aligned}$$
> >
> > Da nach den bekannten Eigenschaften der [geometrischen Folge (4.1 Appendix)] bekannt ist, dass $\lim_{n\to\infty} (q^n) = 0$ ist, gilt:
> >
> > $$s_n = \left| \frac{1}{1-q} \right|$$
> >
> > Die oben genannten Summen der Reihen ergeben sich dann aus den Überlegungen bezüglich des Verhaltens der Partialsummenfolge anhand von q.

Teleskopsumme

Für die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ gilt:

> $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$
>
> Beweis:
>
> > Die Partialsumme der Reihe ist definiert als:
> >
> > $$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\underbrace{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{\underbrace{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}_{\frac{1}{6}}} + \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
> >
> > Aus der Definition des Grenzwerts der Reihe folgt $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

4.3 Asymptotischer Vergleich von Folgen

Landau-Symbole

Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:

i) $a = O(b_n)$ für $n \to \infty$

$:\Leftrightarrow \quad \exists C > 0 \in R : \exists k \in N : \forall n > k \in N : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \Leftrightarrow \quad a_n \leq b_n C$

Gesprochen: a_n *ist (in) groß O von* b_n

---

ii) $a = o(b_n)$ für $n \to \infty$

$:\Leftrightarrow \quad \exists k \in N : \forall n > k \in N : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$

Gesprochen: a_n *ist (in) klein o von* b_n

---

iii) $a_n \sim b_n$

$:\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right) = 1$

---

iv) $a_n = \Omega(b_n)$ für $n \to \infty$

$:\Leftrightarrow \quad \exists C > 0 \in R : \exists k \in N : \forall n > k \in N : \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leq C \Leftrightarrow \quad a_n C \leq b_n$

---

v) $a_n = \Theta(b_n)$ für $n \to \infty$

$:\Leftrightarrow \quad \exists C_1, C_2 > 0 \in R : \exists k \in N : \forall n > k \in N : |b_n| C_1 \leq |a_n| \leq |b_n| C_2$

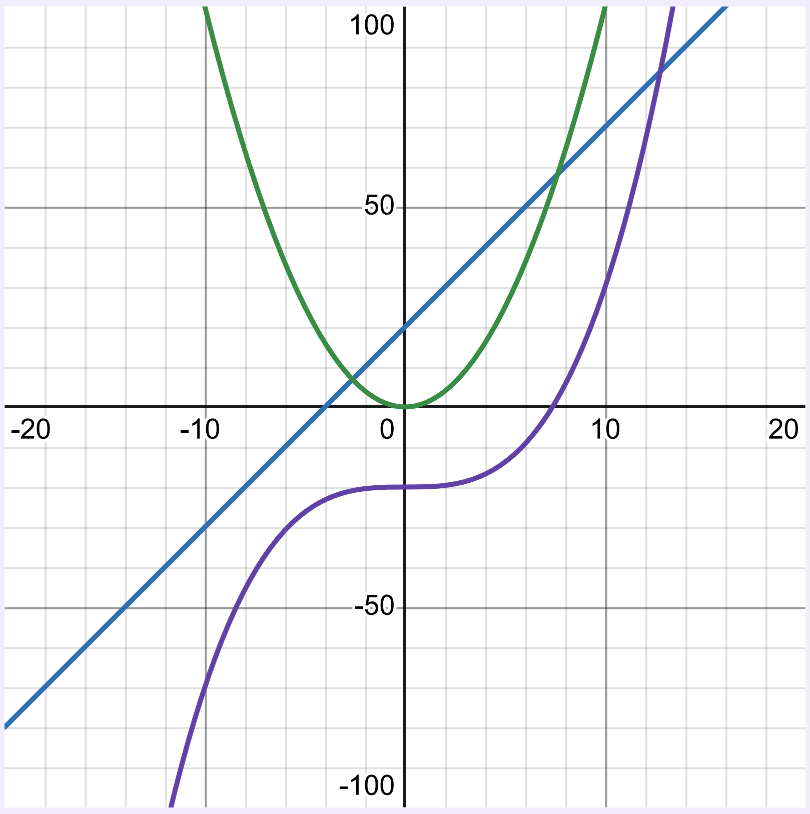
4.4 Elementare Funktionen

1. Beispiele und einfache Eigenschaften

Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion der Form

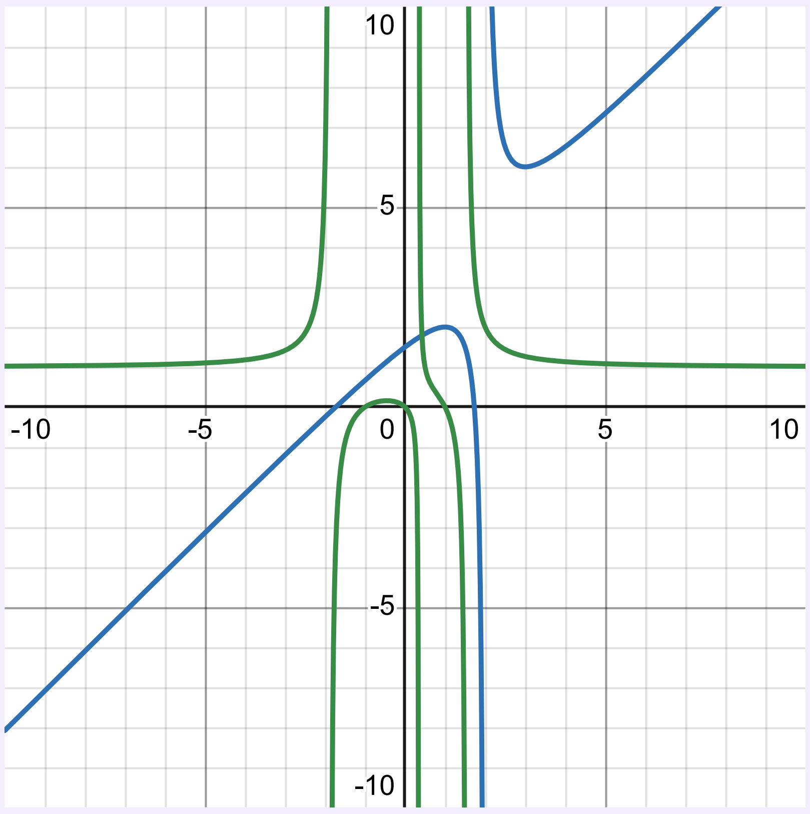
> $f : R \to R$
> $f : x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$
>
> wobei $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in R$



Rationale Funktion

Eine Rationale Funktion ist eine Funktion der Form

> $f : D \to R$
> $f : x \to \frac{p(x)}{g(x)}$
>
> wobei $p(x)$ und $g(x)$ Polynomfunktionen sind und $D = \{x \in R \mid q(x) \neq 0\}$



Satz 4.66

Für eine beliebige Funktion $f : I \to R$ gilt:

> f ist auf dem Intervall I streng monoton $:\Leftrightarrow$ f ist bijektiv $:\Leftrightarrow$ $\exists f^{-1} : f^{-1}$ ist streng monoton.

Hinweis:

Der Begriff der Monotonie (4.1.2) lässt sich für Funktionen genauso anwenden wie für Folgen.

---

2 Potenzen mit reellen Exponenten

Rechenregeln für Potenzen

Gegeben sei eine Potenzfunktion mit $f : x \to x^{\alpha}$, dann gilt:

> Für $\alpha \in N^{+} \implies x^{\alpha} = \underbrace{xx \dots x}_{\alpha\text{-mal}}$
>
> ---
>
> Für $\alpha \in Z \setminus N \implies x^{-|\alpha|} = \frac{1}{x^{\alpha}}$
>
> ---
>
> Für $(\alpha = \frac{n}{m}) \in Q^{+} \implies x^{\alpha} = \sqrt[m]{x^{n}}$
>
> ---
>
> Für $\alpha = 0 : x^{\alpha} = 1$

---

3. Exponentialfunktionen und Logarithmus

Exponentialfunktion

Die **natürliche Exponentialfunktion** ist definiert als die Funktion $f : x \to e^{x}$.

Die **allgemeine Exponentialfunktion** ist definiert als die Funktion $f : x \to a^{x}$ mit $a \in R$.

Erinnerung

e heißt euler'sche Zahl (4.1.4).

Satz 4.73

Die Exponentialfunktion bildet R auf R^{+} bijektiv ab.

Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist definiert als $f : x = \log(x)$ (manchmal auch $\ln(x)$ geschrieben)

4. Darstellungen der Exponentialfunktionen

Satz 4.74

Für die natürliche Exponentialfunktion $f : x \to e^x$ gelten folgende Eigenschaften:

i) $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

---

ii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

---

iii) $e^x e^y = e^{x+y}$

Hinweis:

Auch für die Logarithmusfunktion gilt:
$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

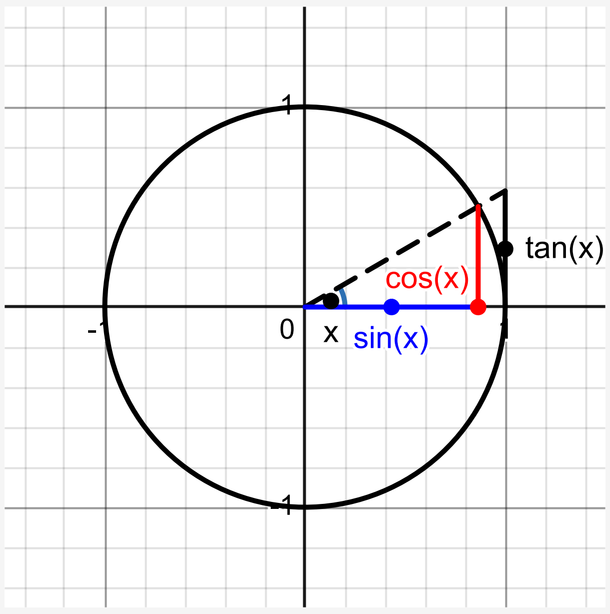
---

5. Winkelfunktionen

Winkelfunktionen

Die drei Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen sind wie folgt definiert:

$$\sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Hinweis:

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen nennt man Arcusfunktionen.

Elementare Funktionen

Funktionen, die nur aus rationalen Funktionen, Polynom-, Logarithmus-, Exponential-, Winkel- und Arcusfunktionen bestehen, heißen elementare Funktionen

Appendix

Tip

Ein offensichtlicher aber dennoch bemerkenswerter Zusammenhang zwischen Potenzfunktion und Exponentialfunktionen ist

> Seien $x, k \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, dann gilt: $x^k = e^{\ln(x^k)}$

4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1. Definition und Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

> f hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert $c \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \quad (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \land (x_n \neq x_0) \land (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> f hat an der Stelle x_0 einen **rechtsseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:
> $\Longleftrightarrow \quad (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \land (x_n > x_0) \land (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> f hat an der Stelle x_0 einen **linksseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:
> $\Longleftrightarrow \quad (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \land (x_n < x_0) \land (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> **Hinweis**
>
> Die bereits etablierte Terminologie rund rum Grenzwerte (4.1.1) trifft auch auf Grenzwerte von Funktionen zu.
> Ist eines der beiden einseitigen Grenzwert uneigentlich, spricht man von einer **uneigentlichen Grenzwerten**.

Stetigkeit

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

> f ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig $:\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x)$
> oder
> f ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig $:\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$
>
> f heißt stetig $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in D : f$ ist an der Stelle x ist stetig.

2. Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.88 (Nullstellensatz von Bolzano)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to R$ mit $I = [a, b]$, wobei $f(a) < 0$ und $f(b) \geq 0$ (oder $f(a) \leq 0$ und $f(b) > 0$), dann gilt:

> $\exists x \in I : f(x) = 0$

Satz 4.89 (Zwischenwertsatz)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to R$ mit $I = [a, b]$, dann gilt:

> $\forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Satz 4.90

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to R$ wobei $I \subseteq R$ ein abgeschlossenes Intervall, dann gilt:

> $f(I)$ ist auch ein abgeschlossenes Intervall.

Satz 4.91

Gegeben sei eine stetige streng monoton steigende Funktion $f : I \to R$, dann gilt:

> $\exists f^{-1} : f(I) \to I$, welches ebenfalls stetig ist.

Satz 4.92

Gegeben seien zwei Folgen $f : I_1 \to R$ und $f : I_2 \to R$, für die gilt:

> $f \pm g : I_1 \cap I_2 \to R$ ist stetig
>
> ---
>
> $f * g : I_1 \cap I_2 \to R$ ist stetig
>
> ---
>
> $\frac{f}{g} : (I_1 \cap I_2) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \to R$ ist stetig
>
> ---
>
> $fg : I_1 \cap I_2 \to R$ ist stetig

Hinweis:

Alle elementare Funktionen (4.4) sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

5.1 Die Ableitung

Definitionen

Definition der Ableitung

Gegeben sei eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

> $f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$
> *Eine Funktion heißt an der Stelle a differenzierbar, wenn dieser Grenzwert existiert.*
>
> Wenn f' an der Stelle a stetig ist, heißt die Funktion an der Stelle a **stetig differenzierbar**

Die Ableitung kann rekursiv angewandt werden, es gilt also:

> *Die n-te Ableitung* $f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \right)$
>
> Wenn $f^{(n)}$ an der Stelle a stetig ist, heißt die Funktion an der Stelle a **n-mal stetig differenzierbar**

Beispiele

Gegeben sei die Funktion $f(x) = |x|$, dann gilt:

> Für $a < 0 : f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{x - a}{x + a} \right) = 1$
> Für $a > 0 : f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{(-x) - (-a)}{x - a} \right) = -1$
> Für $a = 0 : f'(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{|x|}{x} \right) =$ *undefined*

*Die Funktion ist somit an der Stelle 0 nicht **differenzierbar***

Rechenregeln

Ableitungsrechenregel

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

i)
$(cf(x))' = cf'(x)$

---

ii)
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

---

iii) **Produktregel:**
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

---

iv) **Quotientenregel:** *Falls* $g(x) \neq 0$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

---

v) **Kettenregel:**
$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

---

vi) *Falls* f *invertierbar ist und* f' *keine Nullstellen besitzt:*
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f-1(x))}$$

Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Einige dieser Ableitungen ergeben sich durch die Ableitungsdefinition, andere in Kombination mit den Ableitungsrechenregeln.

5.2 Die Taylor'sche Formel und der Mittelwertsatz

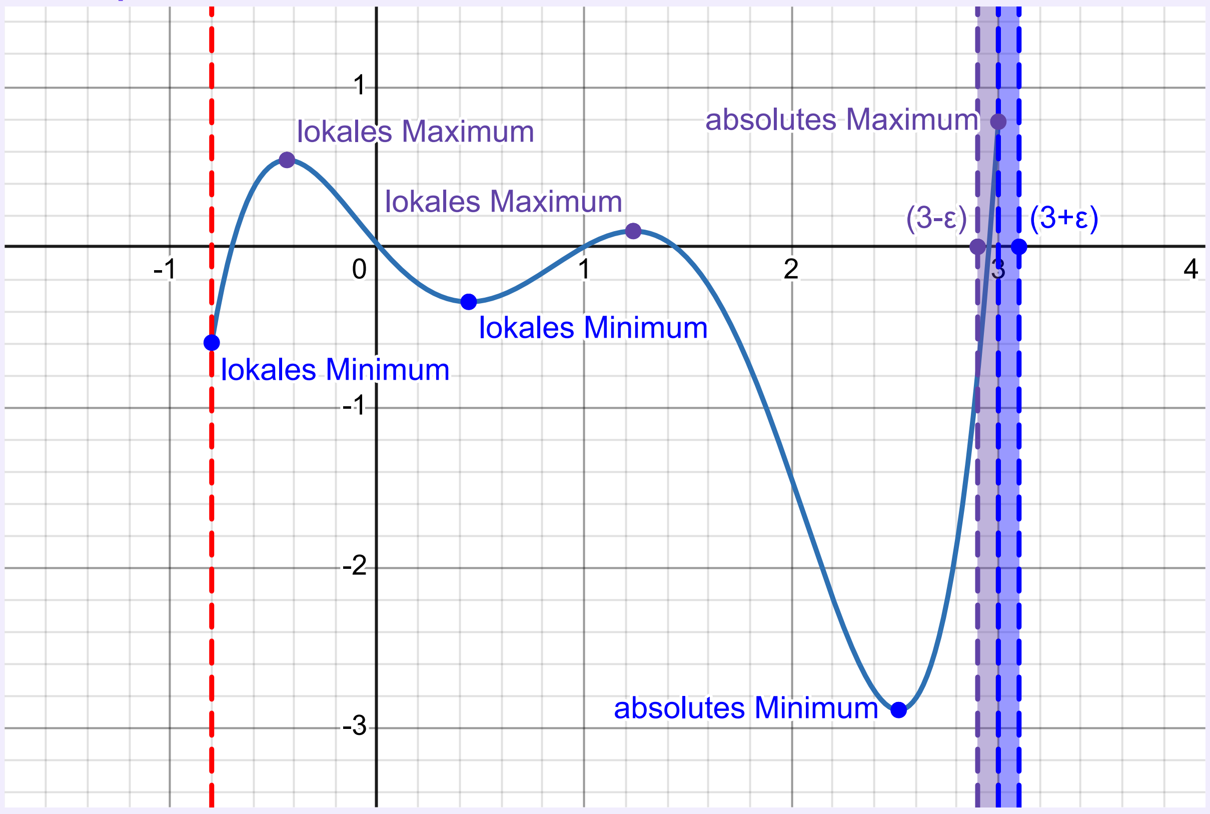
1. Der Mittelwertsatz

> **Extremstellen**
>
> Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
>
> > a ∈ D heißt **relatives/lokales Maximum**, wenn gilt:
> >
> > > $\exists\epsilon > 0 : \forall x \in U_\epsilon(a) \cap D : f(x) \leq f(a)$
> > > *Es existiert eine ϵ-Umgebung, in der a der größte Wert ist*
> >
> > a ∈ D heißt **absolutes Maximum**, wenn gilt:
> >
> > > $\forall x \in D : f(x) \leq f(a)$
> > > *Hier ist die ϵ-Umgebung, der ganze Definitionsbereich*
>
> *analog gilt diese Definition auch für relative und absolute Minima*

> **Definitionsräume**
>
> Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
>
> > $\mathring{D}$ heißt **das innere von D**, für das gilt:
> >
> > > $\mathring{D} = \{x \in D | \exists\epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq D\}$
> > > *Für jeden **inneren Punkt** in $\mathring{D}$ gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der alle Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
> >
> > DD heißt **Rand von D**, für das gilt:
> >
> > > $DD = \{x \in D | \forall\epsilon : U_\epsilon(x) \cup D = \emptyset \land U_\epsilon(x) \cup D \neq \emptyset\}$
> > > *Für jeden **Randpunkt** in DD gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der nur einige (aber nicht aller) Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
> >
> > $\overline{D}$ heißt **Abschluss von D**, für das gilt:
> >
> > > $\overline{D} = D \cup DD = \mathring{D} \cup DD$
> >
> > Des Weiteren gilt:
> >
> > > D heißt **abgeschlossen** :⟺ $D = \overline{D}$
> > > D heißt **offen** :⟺ $D = \mathring{D}$

> **Erinnerung:**
>
> Die [ϵ-Umgebung (4.1.1)] von a ist definiert als $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - a| < \epsilon\}$

Beispiel zu Extremstellen und Definitionsräumen



Betrachtet man den Randpunkt 3 $\in DD$, sieht man, dass bei jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung der rechte Rand außerhalb des Definitionsraums ist, während die linke Hälfte innerhalb davon ist.

Satz 5.12

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto R$ und eine Extremstelle $a \in \mathring{D}$, dann gilt:

> $f'(a) = 0$

Satz 5.13

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto R$, dann gilt:
f ist differenzierbar, wenn f auf folgende Weise linear approximierbar ist:

> $f(x) - f(a) = f'(x)(x - a) + R(x)$ wobei $R(x) = o(x - a)$

Hinweis

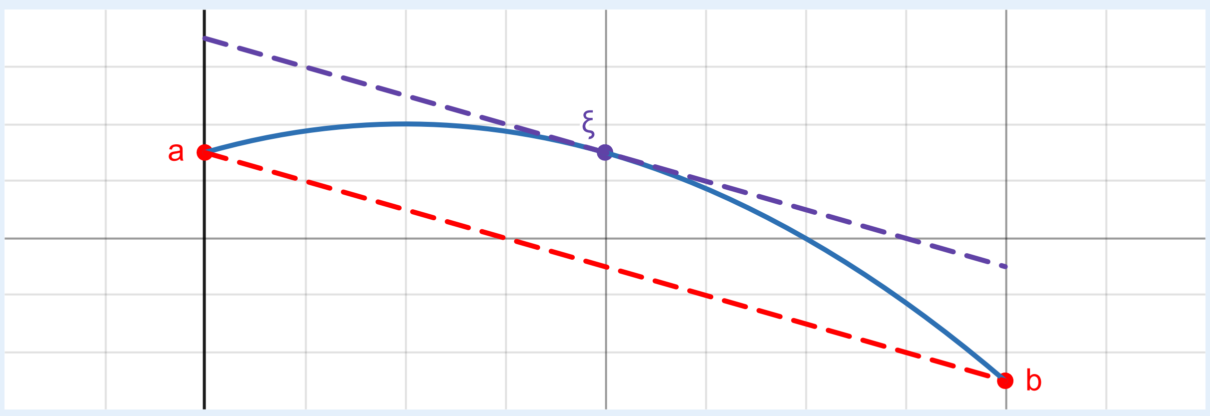
$R(x)$ ist durch die Landau Notation (4.3) auf die obere Schranke $\left|\frac{R(x)}{x - a}\right| = 0$ eingeschränkt.

Satz 5.14 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto R$, für die folgendes gilt:

> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig und differenzierbar

Dann gilt:

> $$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b - f(a))}{b - a}$$
>
> 
>

Satz 5.15 (Satz von Rolle)

> Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto R$, für die folgendes gilt:
> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig
> Es ist im Intervall (a, b) differenzierbar
> $f(a) = f(b)$

Dann gilt:

> $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Satz 5.16

> Gegeben seien die Funktionen f und g, für die gilt:
> f und g sind im Intervall D stetig
> f und g sind im Intervall $\mathring{D}$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x))$

Dann gilt:

> $f'(x) - g'(x)$ ist auf D konstant

---

2. Taylorreihen

Satz

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, dann lässt sich $f(x)$ wie folgt approximieren:

> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - a)^k$

Dabei lässt sich a_k wie folgt bestimmen:

> $f(a) = a_0$
> $f'(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k k(x - a)^{k-1} = a_1 = 1!a_1$
> $f''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(k - 1)(x - a)^{k-2} = 2a_2 = 2!a_2$
> $f'''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(k - 1)(k - 2)(x - a)^{k-3} = 6a_3 = 3!a_3$
> ...
> $\implies a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Satz 5.17

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n(x - a)^n$ und ein Konvergenzradius R, dann gilt:

> $\forall x : |x - a| < R : f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n(x - a)^{n-1}$

Erinnerung

Der Konvergenzradius (4.2.3) gibt an, für welches x eine gegebene Potenzreihe konvergiert.

Taylorreihe

Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ heißt Taylorreihe von f an der Anschlussstelle a

Taylorsche Formel der Ordnung n

Gegeben sei eine n-mal stetig differenzierbare und (n+1)-mal differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + R_n$$

Satz von Taylor

Gegeben sei eine Funktion f, n-mal stetig differenzierbare f auf dem Intervall $[a, x]$ und (n+1)-mal differenzierbar auf (a, x) ist, dann gilt:

> $$\exists \xi : a < \xi < x : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Die Taylorreihe stellt eine gegebene Funktion f genau dann dar, wenn gilt:

> f ist unendlich oft differenzierbar
> $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \to 0$

Ergänzung

Das Restglied lässt sich unter anderem nach der Formel von Langrange wie folgt bestimmen:

> $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Erinnerung/Tip

Siehe Definition von Konvergenzradius
Der Satz von Taylor basiert auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (5.2.1)

Beispiele:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt:

> Die Taylorreihe der Funktion $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

---

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt für $-1 < x \leq 1$:

> Die Taylorreihe der Funktion $\log(1 + x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}$
> Dabei lässt sich R_n wie folgt abschätzen: $|R_n| < |x|^{n+1}\frac{1}{n+1}$

---

c) Gegeben sei eine Potenz $(1 + x)^\alpha$ wobei $\alpha \in C$, dann gilt für $|x| < 1$:

> $(1 + x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^\alpha$
>
> wobei $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}$

---

d) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0. \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

> Taylorreihe der Funktion: $\sum_{n\geq 0} 0\frac{x^n}{n!} \neq f(x)$

Nicht jede Funktion lässt sich also durch die Taylorreihe darstellen

Tip

Für Funktionen wie $e^{-\frac{1}{x^2}}$, die sich in der Stelle 0 nicht mithilfe von Ableitungsregeln ableiten lassen, kann man diese mithilfe von Rückbesinnung auf die [Definition der Ableitung (5.1 Definitionen)](#) differenzieren.

---

3. Monotonie und die erste Ableitung

Satz 5.23

Gegeben sei eine auf dem Intervall I monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \to R$, dann gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$

Gegeben sei eine auf dem Intervall I streng monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \to R$, dann gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0)$

Satz 5.25

Gegeben sei eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : D \to R$, dann gilt für ein beliebigen Punkt $a \in D$:

> $f'(a) = 0$
> $f''(a) > 0 \; (f''(a) < 0)$
> $\Longrightarrow$ a ist ein relatives Minimum (Maximum)

4. Die zweite Ableitung

Konvex

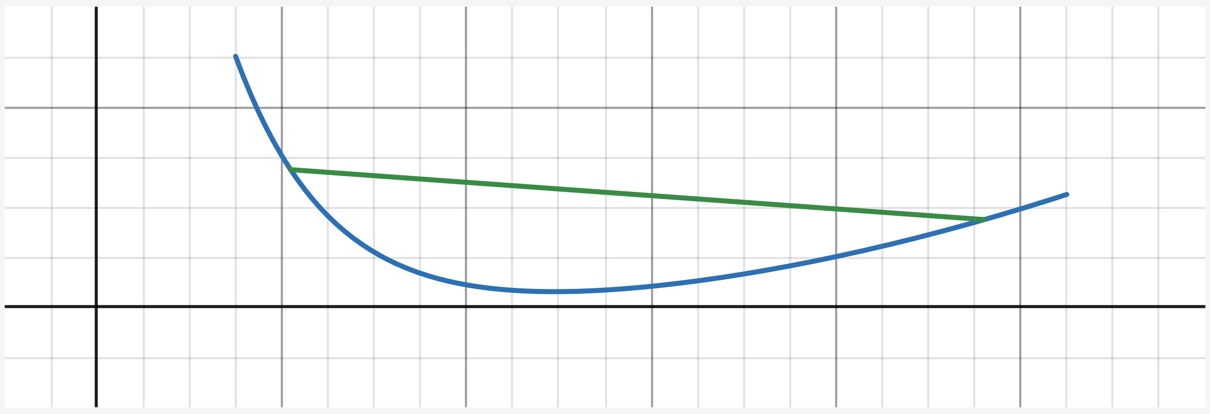
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konvex**, wenn gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Veranschaulichung einer konvexen Funktion:



Konkav

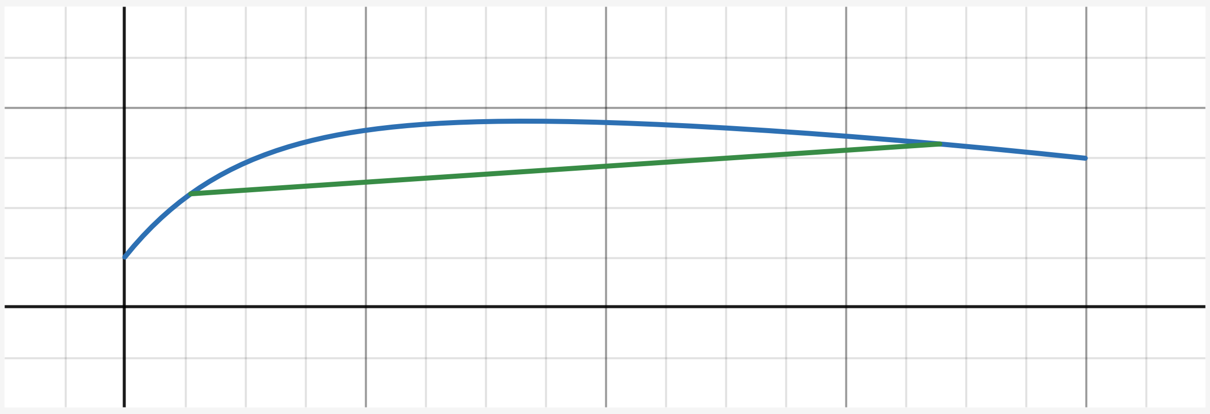
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konkav**, wenn gilt:

> $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) > f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Veranschaulichung einer konkaven Funktion:



Satz 5.29 und 5.30

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\Leftrightarrow$ f' ist monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I: f'' \geq 0 \; (f'' \leq 0)$

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I streng konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\Leftrightarrow$ f' ist auf I streng monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I: f'' > 0 \; (f'' < 0)$

5. Regel von de l'Hospital

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Gegeben seien zwei an dem Punkt a differenzierbare Funktionen f, g, für die gilt:

> $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \{ \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}$$

Dann lassen sich **(nur)** unbestimmte Formen der Grenzwerte wie folgt bestimmen:

> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> *Diese Regel lässt sich auch rekursiv anwenden, solange die Form des Grenzwerts weiterhin unbestimmt ist, siehe Beispiel b*

Erinnerung:

Einige Formen der Grenzwerte lassen sich nicht bestimmen, diese nennt man unbestimmte Formen und für diese muss man sich die Folgen selber betrachten.

Beispiel für eine unbestimmte Form: $\frac{0}{0}$
Weitere unbestimmte Formen (4.1.3)

Beispiele

a) Gegeben sei die Folge $\frac{\sin(x)}{x}$

> $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to a} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

---

b) Gegeben sei die Folge $\frac{x^n}{e^x}$

> $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \frac{n!1}{e^x} = 0$$

---

c) Gegeben sei die Folge $\frac{\log(x)}{x^\alpha}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$

> $$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

---

d) Gegeben sei die Folge $x^\alpha \log(x)$

> $$\lim_{x \to 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$$

Tip

Für andere unbestimmte Formen wie zum Beispiel 0^0 lässt sich die Regel von de l'Hospital anwenden, in dem man die unbestimmte Form in einen Quotienten umformt, auf den man dann diese Regel anwenden kann.

5.3 Das unbestimmte Integral

1. Integration als Umkehrung der Differentiation

Definition vom Integral

Gegeben sei eine Funktion $f : I \mapsto R$ für die gilt:

> $F(x)$ heißt **Integral** (oder auch **Stammfunktion**) von $f :\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$
> Man notiert die Stammfunktion wie folgt: $F(x) + c = \int f(x)dx$, wobei man $c \in R$ **Integrationskonstante** nennt

Satz 5.39

Gegeben seien die Funktion $f : R \mapsto R$ mit der Stammfunktion $F(x)$ für die gilt:

> $\forall c \in R : G(x) = F(x) + c \iff \quad G'(x) = f(x)$

---

2. Technik des Integrierens

Satz 5.41 (Integrationsregeln)

- i) Aus der Linearität der Integralfunktion folgt:

> $$\int f((x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
>
> Für $K \in R : \int K f(x)dx = K \int f(x)dx$

- ii) Partielle Integration

> $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

- iii) Substitutionsregel

> $$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$
>
> **Tip**
> Angemerkt sei das Leibniz Kalkül, was wie folgt geht:
>
> $$\int f(g(x))g'(x)dx$$
>
> Substitution: $g(x) = u \implies \dfrac{du}{dx} = g'(x) \iff \quad du = g'(x)dx$
>
> Einsetzen der Substitution: $\int f(u)du = F(u)$
> Rücksubstitution: $F(u) = F(g(x))$

- iii) Partialbruchzerlegung

> Um das Integral einer rationalen Funktion zu bestimmen, kann man die Partialbruchzerlegung anwenden.
>
> $$\int \frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_i} \frac{A_{i,\mu}}{(x-\lambda_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{l_i} \frac{B_{j,v}x + C_{j,v}}{Q_j(x)^v}$$
>
> **Tip**
> Der Ansatz der Partialbruchzerlegung basiert auf die Überlegung, dass sich laut dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.12) jedes Polynom in C als Produkt von Linearfaktoren darstellen lassen kann.

Appendix

Grundintegralle

- Potenzen:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c \text{ wobei } \alpha \in R \setminus \{-1\}$$

Dabei muss man x aber für entsprechende α einschränken:

> - Für $\alpha \in R \setminus N: x \neq 0$
> - Für $\alpha \in R \setminus Z: x \ntrianglelefteq 0$

- Brüche:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + c & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

> **Generell schreibt man auch:**
>
> $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

- Exponenten:

$$\int e^{x} dx = d^{x} + c$$

- Winkelfunktionen

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$$

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c$$

5.4 Das bestimmte Integral

1. Die Fläche einer Kurve

Definition

Für eine beschränkte Funktion $f : I \mapsto R$ mit $I = [a, b]$ gilt:

> Die **Zerlegung** Z ist definiert als $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ für die gilt
>
> > $x_0 = a < x_2 < x_1 < x_n = b$
> > Die **Feinheit** $F(Z)$ von Z ist definiert als $F(Z) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$
>
> Die **Zwischenstellen** $\underline{\xi}$ ist definiert als $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ für die gilt
>
> > $\forall i : x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$
>
> Die Fläche unter der Funktion lässt sich mit der **Riemann'sche Zwischensumme** S_n definieren $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

Veranschaulichung:

Eine Folge von Zerlegungen mit einer zugehörigen Menge an Zwischenstellen $(Z_n, \xi_n)_{n \geq 0}$ heißt **ausgezeichnete Zerlegungsfolge** (abgekürzt **aZf**) : $\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} F(Z) = 0$

Für eine beschränkte Folge $f : [a, b] \mapsto R$ gilt:

> f ist Integrierbar : $\Leftrightarrow \quad \exists K \in R : \forall (Z_n, \xi_n)_{n \geq 0} : \lim_{n \to \infty} S_n = K$
> K heißt **bestimmtes Integral** und ist definiert als $K = \int_a^b f(x)dx$
> Des Weiteren gilt für das unbestimmte Integral:
>
> > $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ falls $a > b$
> > $\int_a^a f(x)dx = 0$
> > a und b heißen **Integrationsgrenzen**
> > x heißt **Integriervariable**
>
> Des Weiteren wird die Menge $I([a, b])$ definiert als $I([a, b]) = \{f : [a, b] \mapsto R \mid f \text{ ist integrierbar}\}$

Für eine Zerlegung Z gilt:

> $O_z(f)$ heißt **Obersumme** und ist definiert als $O_z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
> $U_z(f)$ heißt **Untersumme** und ist definiert als $U_z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Veranschaulichung

Satz 5.47 (Riemann'sche Integrabilitätskriterium)

Für eine beschränke Funktion $f : [a, b] \mapsto R$ gilt:

> f ist integrierbar : $\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists Z : O_z(f) - U_z(f) < \varepsilon$

Stückweise Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto R$ heißt stückweise stetig : $\Leftrightarrow \quad ((f$ ist auf $[a, b]$ beschränkt$) \wedge (f$ ist auf fast allen Stellen stetig$) \wedge ($an allen unstetigen Stellen existiert beide einseitige Grenzen$))$

Satz 5.48, 5.50, 5.51

Für eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> f ist monoton $:\Longleftrightarrow$ f ist integrierbar
>
> ---
>
> f ist stückweise stetig $:\Longleftrightarrow$ f ist integrierbar
>
> ---
>
> f ist integrierbar $:\Longleftrightarrow$ $|f|$ ist integrierbar

Satz 5.52

Für die integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

- i) Die Funktion $F : I([a, b]) \mapsto \mathbb{R}, f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear
- ii) Für $a \leq b \leq c$ gilt:

> $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- iii) $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- iv) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a,b]}|f(x)|$

---

2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 5.53 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Satz 5.55 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> Jede beliebige Stammfunktion $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ erfüllt: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Satz 5.56 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

Für stetige Funktionen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \mapsto [a, b]$ gilt:

> $(g(c) = a \wedge g(c) = b \wedge g \text{ ist differenzierbar}) \implies \int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx$

5.5 Das uneigentliche Integral

Das uneigentliche Integral

Uneigentliche Integrale 1. und 2. Art

Sei f eine Funktion, die auf $[a, b)$ (oder $(a, b]$) definiert, dann gilt:

> Wenn f auf dem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b)$ integrierbar und $\lim_{x \to b-} = \pm\infty$ (oder $\lim_{x \to + a} f(x) = \pm\infty$) ist, dann heißt das Integral
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^b f(x)dx$$
>
> **uneigentliches Integral 1. Art**.

> Wenn f auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ (oder $(-\infty, b]$) integrierbar ist, wobei $a \in R$ fest ist, nennt man das Integral
>
> $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$
>
> **uneigentliches Integral 2. Art**.

Satz 5.61

Gegen seien zwei auf $[0, \infty)$ stückweise stetige Funktionen f, g für die gilt:

> $\forall x \geq 0 : |f(x)| \leq |g(x)|$
> $\int_0^\infty g(x)dx$ ist konvergent

Dann gilt

> $\int_0^\infty f(x)dx$ ist konvergent

Satz 5.62 (Integralkriterium)

Gegeben sei eine nichtnegative, monoton fallende Funktion $f : [0, \infty) \to R$, dann gilt:

> $$\int_1^\infty f(x)dx \text{ ist konvergent} \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ ist konvergent}$$
>
> **Tip**
>
> Dieser Satz leitet sich aus der Abschätzung:
>
> $$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

6.1 Funktionen in mehreren Variablen

1. Beispiele und Darstellungen

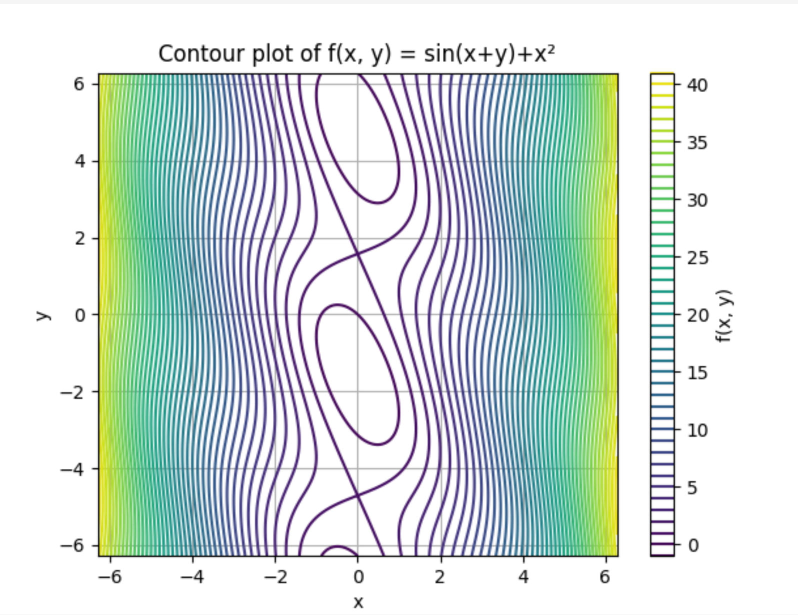
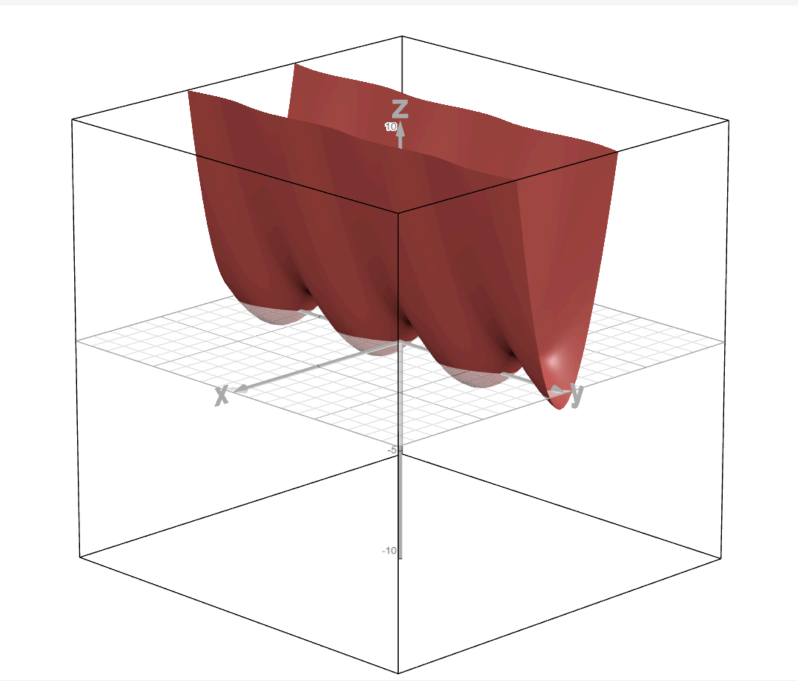
Definition

> Eine multivariable Funktion bildet von $\mathbb{R}^{m\in\mathbb{N}>1}$ auf $\mathbb{R}$ ab. Solche Funktionen bezeichnet man auch als **Vektorwertige Funktionen**
>
> *Zur besseren Veranschaulichung wird für den Rest Formelsammlung* $n = 2$ *vorausgesetzt.*

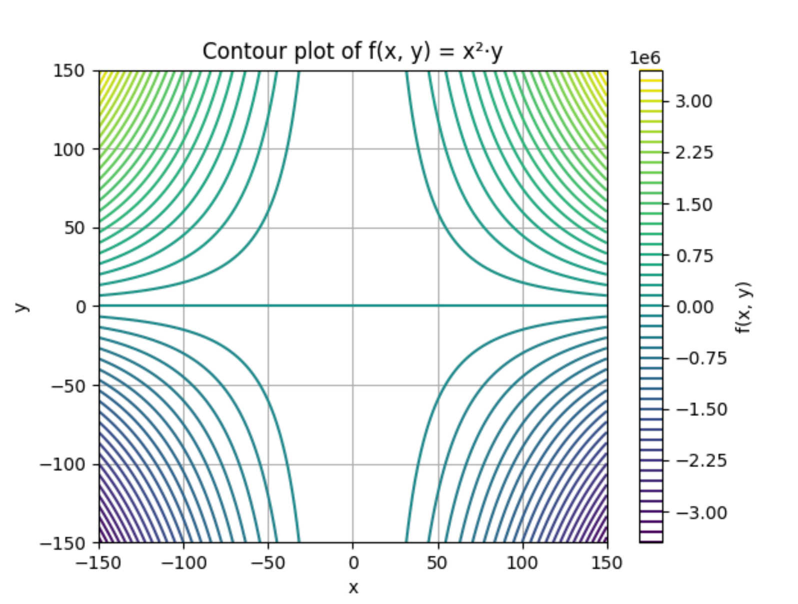
> Eine multivariable Funktion $f(\vec{x}\in\mathbb{R}^{m>1})$ heißt **quadratische Form**, wenn die Funktion in der Bauart $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ ist, wobei A eine symmetrische n mal n Matrix ist. Quadratische Funktionen, bei der für alle Eingabewerte $\vec{x}\neq 0$ $f(x) > 0$ (oder < 0) gilt heißen **positiv** (oder **negativ**) **definit**.

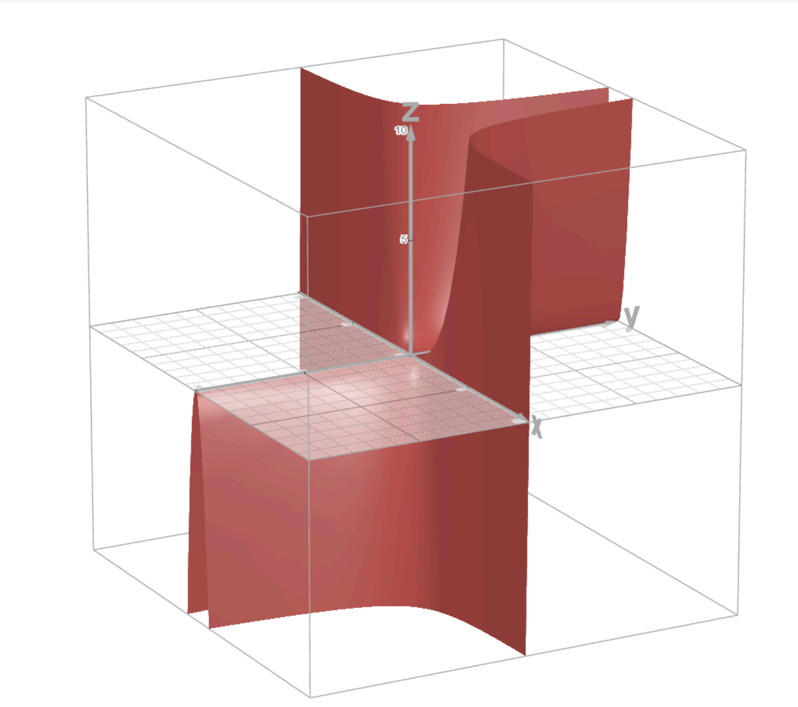
> Die **Höhenlinie** (oder auch **Niveaulinie**) eine multivariablen Funktion kann man sich für $n = 2$ wie das Aufeinanderstapeln der Funktion geschnitten an jeweiligen Höhen. Für feste Höhen z kann man sich diese Höhenlinie berechnen, in dem man die Gleichung $f(x, y) = z$ nach y umformt.

Beispiele zur Veranschaulichung:

> Für die Funktion $f(x, y) = \sin(x + y) + x^2$
>
> 
>
>
> 
>

Für die Funktion $f(x, y) = x^2 y$





---

2. Grenzwert und Stetigkeit

ε-Umgebung

Die ε-Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0 \in R^n$ entspricht folgender Menge:

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in R^n ||| \vec{x} - \vec{x}_0 || < \varepsilon |\}$$

Grenzwert

Der Grenzwert $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$ einer Funktion $f : D \subseteq R^n \to R$ ist wie folgt definiert:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D : 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta \implies |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$$

Stetigkeit

Eine Funktion $f(\vec{x})$ heißt am Punkt $\vec{x}_0$ stetig $:\Leftrightarrow \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$
Des Weiteren heißt die Funktion auf D stetig $:\Leftrightarrow \quad \forall \vec{x} \in D : f(\vec{x})$ ist am Punkt $\vec{x}$ stetig

Satz 6.5

Eine Funktion $f : D \subseteq R^n \to R$ ist genau dann an der Stelle $\vec{x} \in D$ stetig :
$\Leftrightarrow \quad \forall (\vec{x}_n)_{n \in N} : \lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{x} \implies \lim_{n \to \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$

Mengeneigenschaften

Eine Menge $D \in R^n$ heißt:

- **offen** : $\Leftrightarrow$

$$\vec{x} \in D \implies \exists U_{(\varepsilon)}(\vec{x}) \subseteq D$$

- **abgeschlossen** : $\Leftrightarrow$

$$\forall(\vec{x}_n \in D)_{n \in N} : \exists \lim_{n \to \infty}(\vec{x}_n) = c \neq \pm\infty \implies c \in D$$

- **kompakt** : $\Leftrightarrow$ D ist beschränkt und abgeschlossen

  Erinnerung
  Eine beschränkte (4.1.2) Menge ist durch ein Supremum nach oben und durch ein Infimum nach unten eingeschränkt.

---

3. Partielle Ableitung

Partielle Ableitung

Eine Funktion $f : D \subseteq R^2 \to R$ heißt:

- nach x differenzierbar : $\Leftrightarrow$

$$\exists f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, x_0)}{x - x_0}$$

- nach y differenzierbar : $\Leftrightarrow$

$$\exists f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Tip

Bei der Ableitung nach einer jeweiligen Ableitung behandelt man die restlichen Variablen wie Konstante. Die Ableitung funktioniert demnach genau wie eine gewöhnliche Ableitung (5.1).

Wie oft nach Variablen abgeleitet wird bestimmt die **Ordnung der Ableitung**.

- Bei einer Ableitung 1. Ordnung wird einmal nach einer Variable abgeleitet.

- Bei einer Ableitung 2. Ordnung wird die Ableitung 1. Ordnung nach einer Variable abgeleitet, dabei kann man auch zweimal nach der gleichen Variable ableiten. Solche Ableitungen werden auch iterierende Ableitungen genannt. Beispiel:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_y(f_x(x_0, y_0))$$

Für dieses Beispiel wurde die Funktion zuerst nach x und dann nach y abgeleitet.

ⓘ **Satz von Schwarz**

Gegeben sei eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \subseteq R^n \to R$, dann sind die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m von der Reihnfolge der Ableitungen nach den Variablen unabhängig.
So gilt bspw. für eine Funktion f, die 2-mal stetig differenzierbar ist, dass $f_{xy} = f_{yx}$ ist.

Appendix

Python Code zum Plotten der Höhenlinie:

```
'''
#for the code to work in obsidian with CodeEmitter Plugin
import micropip
await micropip.install('numpy')
await micropip.install('matplotlib')
'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#input range, may be adjusted to better plot the function
x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 300)
y = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 300)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

#function (e. g.: f(x,y)=sin(x+y)+x^2)
Z = np.sin(X + Y) + X ** 2

plt.contour(X, Y, Z, levels=50)
plt.title("Contour plot of f(x, y) = sin(x+y)+x²")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.colorbar(label="f(x, y)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Seite zum Visualisierung multivariabler Funktionen: https://www.desmos.com/3d

6.2 Differentialrechnung in mehreren Variablen

1. Die totale Ableitung

> **Totale Ableitung**
>
> Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt am Punkt $\vec{x_0} \in D$ total differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung f' existiert, für die gilt:
>
> $$f'(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x} - \vec{x_0}) + R(\vec{x})$$
>
> wobei für $R(\vec{x})$ gilt:
>
> $$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{||R(\vec{x})||}{||\vec{x} - \vec{x_0}||} = 0$$
>
> f' wird auch als Ableitung von der Funktion f im Punkt $\vec{x}$ genannt. Oft wird die zur Ableitung dazugehörenden Matrix **Jacobi-Matrix** (oder auch **Funktionalmatrix**) bezeichnet.
>
> > **Hinweis**
> >
> > Das Verhalten der iterierenden Ableitungen einer Funktion f kann im allgemeinen keine Aussage über das Verhalten der totalen Ableitung treffen!

> **Gradient**
>
> Für eine total differenzierbaren Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist, gilt:
>
> $$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \dots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$
>
> heißt **Gradient** von f.

> **Satz 6.15**
>
> Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion und D eine offene Menge, dann gilt:
>
> > Die Ableitungsmatrix von f = $\operatorname{grad} f$
> > Es gilt also:
> >
> > $$f(\vec{x}) = f\vec{x_0} + \operatorname{grad} f(\vec{x_0}) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0}) + R(\vec{x})$$

> **Satz 6.17**
>
> Eine total differenzierbare Funktion ist stetig.

2. Ableitungsregeln

Satz 6.19 (Produktregel (+ Summenregel))

Seien f, g zwei total differenzierbare Funktionen mit offener Definitionsmenge, dann gilt:

> $$\operatorname{grad} h(\vec{x_0}) = f(\vec{x_0}) \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x_0}) + g(\vec{x_0}) \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x_0})$$
>
> ---
>
> $$(f+g)' = f' + g'$$

Satz 6.20 (Kettenregel)

Gegeben sei die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der offenen Menge D. Des Weiteren sei $g(\vec{x}) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots, g_n(x_n)) \in D$ und $F(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$, dann gilt:

$$F'(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)) \cdot g_i'(x)$$

Satz 6.22 (Hauptsatz über implizite Funktionen)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und D offen. Dabei soll für F gelten:

> - $\exists (x_0, y_0) \in D : F(x_0, y_0) = 0 \land F(x_0, y_0)' \neq 0$

Dann gilt:

$$\exists U(x_0, y_0) : F(x, y) = 0 \text{ hat eine eindeutig bestimme Lösung } f(y) \text{ in } U.$$

Des Weiteren gilt für $y(x)$:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

---

3. Die Richtungsableitung

Richtungsvektor

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und D offen. Des Weiteren sei $\vec{v_1} = \frac{\vec{v}}{||v||}$. Dabei sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und heißt Richtungsvektor. Dann ist die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\vec{x} \in D$ nach $\vec{v_1}$ wie folgt definiert:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v_1})}{t}$$

Satz 6.25

Falls die wie oben beschrieben Funktion an der Stelle $\vec{x} \in D$ total differenzierbar ist, so gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v_1})}{t} = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v_1}$$

Satz 6.27

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle $\vec{x} \in D$ total differenzierbare Funktion, D offen, dann gilt:

> - Die Richtung von $\operatorname{grad} f$ die Richtung des größten Anstiegs in f.
> - Die euklidische Länge von $\operatorname{grad} f$ ist der größte Anstieg von f.
> - $\operatorname{grad} f = 0 \implies \forall \vec{x}, \forall \vec{v_1} : \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v_1} = 0$

4. Taylorentwicklung

> Verallgemeinerte Taylorreihe
>
> ⚠ **Wird noch hoffentlich die Tage ergänzt.**

Satz 6.29 (Satz von Taylor für reellwertige Funktionen in zwei Variablen)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetige differenzierbare Funktion und D offen. Des Weiteren seien $(x_0, y_0), (x, y) = (x_0 + th, y_0 + tk) \in D$, für die gilt, dass alle Punkte zwischen ihnen ebenfalls in D sind. Dann gibt es ein $\xi \in (0, 1)$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{l=1}^{n} \frac{(hD_x + kD_y)^l f(x_0, y_0)}{l!} + \frac{(hD_x + kD_y)^{n+1} f(x_0 + \xi h, y_0 + \xi h)}{(n+1)!}$$

Ist f unendlich oft stetig differenzierbar, so ist die Taylorreihe von f wie folgt definiert:

$$f(x, y) = f(x_{0,0}) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!}(hD_x + kD_y)^l f(x_0, y_0)$$

6.3 Bestimmung von Extrema

Lokale Extrema

Lokale Extrema

Ähnlich wie bei der damaligen Definition von Extremstellen, definiert man für eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Stelle $\vec{x_0} \in D$ als relatives Maximum (oder Minimum)

$$:\iff \quad \exists U_\epsilon(\vec{x_0}) : \forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{x_0}) \cap D : f(\vec{x_0}) \geq f(\vec{x}) \;\; (\text{oder } f(\vec{x_0}) \leq f(\vec{x}))$$

Satz 6.32

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit einer offenen Definitionsmenge und einem relativen Extremum $\vec{x}$, welches partiell differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0$$

Man nennt $\vec{x}$ auch **stationären Punkt**.

Trick zur Bestimmung der Art von Extremwerten

Für eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei $(x, y) \in D$ ein relatives Extremum. Des Weiteren sei eine symmetrische Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

gegeben, dann gilt:

> - $\det(H_f(x, y)) > 0 \wedge f_{xx}(x, y) > 0 \implies (x, y)$ ist ein lokales Minimum (wenn also H_f **positiv definit** ist).
> - $\det(H_f(x, y)) > 0 \wedge f_{xx}(x, y) < 0 \implies (x, y)$ ist ein lokales Maximum (wenn also H_f **negativ definit** ist).
> - $\det(H_f(x, y)) < 0 \implies (x, y)$ ist eine Sattelpunkt (wenn also H_f **indefinit** ist).

Wichtig!

Falls $\det(H_f(x, y)) \geq 0$, so heißt die Hessematrix **semidefinit** und die alleine sagt uns gar nichts bezüglich der Art der Extremstelle. Entwickelt man die Taylorreihe (6.2.4), so können potentiell die nächsten Terme der Reihe Aufschluss über diese Extremstelle bieten.

3.5.2 Metrische Räume

Metrische Räume

Metrik

Gegeben sei eine Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$. d heißt **Metrik**

$$
\begin{aligned}
:\Longleftrightarrow \quad & (1) : \forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \\
& (2) : d(x, y) = 0 \iff x = y \\
& (3) : \forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x) \\
& (4) : \forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)
\end{aligned}
$$

Des Weiteren nennt man (X, d) einen **metrischen Raum**.

Normierter Raum

Ein metrischer Raum $(X, ||\cdot||)$ heißt normierter Raum

$$
\begin{aligned}
:\Longleftrightarrow \quad & (1) : X \text{ ist ein Vektorraum über } \mathbb{R} \\
& (2) : ||\cdot|| : X \to \mathbb{R} \text{ ist eine Norm}
\end{aligned}
$$

Norm

Seien $(X, ||\cdot||)$ ein metrischer Raum, X ein Vektorraum, $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $||\cdot||$ heißt Norm

$$
\begin{aligned}
:\Longleftrightarrow \quad & (1) : ||x|| \geq 0 \\
& (2) : ||x|| = 0 \iff x = 0 \\
& (3) : ||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \\
& (4) : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||
\end{aligned}
$$

ϵ-Umgebung

In einem metrischen Raum (X, d) ist eine ϵ-Umgebung $K_d(x, \epsilon)$ von $x \in X$ definiert als

$$K_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

Grenzwert

Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) und eine Folge $(x_n)_{n \geq 0} \in X^{\mathbb{N}}$. Der Grenzwert dieser Folge wird definiert als

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x :\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N : x_n \in K_d(x, \epsilon)$$

Mengen

In einem metrischen Raum (X, d) heißt eine Menge A **offen**

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in A : \exists \epsilon > 0 : K_d(x, \epsilon) \subseteq A$$

In einem metrischen Raum (X, d) heißt eine Menge A **abgeschlossen**

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n \geq 0} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n \in A$$

Satz zur Abgeschlossenheit von Mengen

In einem metrischen Raum (X, d) gilt für eine Menge A:

$$A \text{ ist abgeschlossen} \iff X \setminus A \text{ ist offen}$$

Appendix

Beispiele von metrischen Räumen

- $(\mathbb{R}^n, d_\alpha)$:

$$d_\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Bemerkung

Für verschiedene α sind diese metrischen Räume wie folgt definiert:

- $\alpha = 1$ Summenmetrik
- $\alpha = 2$ Euklidische Metrik
- $\alpha = \infty$ Maximums-Metrik, welche dabei wie folgt definiert ist:

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

Hammingmetrik (auch Hammingdistanz genannt) (X^n, d_H):

$$d_H\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$$

7.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen k-ter Ordnung

Gegeben sei eine $k \geq 1$-mal differenzierbare Funktion $y(x)$ und die Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$$

Wichtig bei der Differentialgleichung ist, dass eine Ableitung der Funktion $y(x)$ vorkommt.

Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Für eine Differentialgleichung kann man eine Lösung bestimmen, wobei man zwischen folgenden Unterscheidet:

> - **Allgemeine Lösung**: Eine Lösungsmenge, welche wählbare Parameter $C_1, \ldots, C_k \in R$. Man bezeichnet diese Lösung auch als Schar von Lösungskurven.
>
> ---
>
> - **Partikuläre Lösung**: Eine Lösung, bei der den Parametern $C_1, \ldots, C_k \in R$ feste Werte zugeordnet werden anhand der vorgegebener Anfangsbedingungen. Diese Lösung entspricht dabei einer einzigen Lösungskurve.
>
> ---
>
> - **Singuläre Lösung**: Separate Lösungen, die nicht in der Schare der Lösungskurven vorkommt.

Des Weiteren unterscheidet man bei Differentialgleichungen 1-er Ordnung zwischen der impliziten $F(x, y, y') = 0$ und expliziten $y' = f(x, y)$ Lösung.

Die explizite Form gibt für jeden Punkt y' dabei einen Anstieg, das sogenannte **Linienelement**, wobei man die Menge aller Linienelemente als **Richtungsfeld** bezeichnet. Eine konstanten Anstieg bezeichnet man als **Isoklinen**.

Satz 7.3 (Allgemeiner Existenzsatz von Peano)

Gegeben sei eine Funktion $f : D \subseteq R^2 \to R$, wobei D offen und zusammenhängend und f stetig ist, dann gilt:

$$\forall (x_0, y_0) \in D : \text{ es existiert (mindestens) eine Lösung } y = y(x)$$

Satz 7.31 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf)

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to R$, dann gilt:

$$\exists L > 0 : \forall x, y_1, y_2 : x \in [a, b], y_i [c, d] : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$$\implies \forall (x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d] : \text{ es existiert eine eindeutige Lösung } y' = f(x, y)$$

7.7 Lineare Differentialgleichung 1-er Ordnung

Lineare Differentialgleichung 1-er Ordnung

Hinweis

In der VO wurden nur linearen Differentialgleichungen 1-er Ordnung behandelt, demnach kommt hier auch nichts von linearen Differentialgleichungen 2-er Ordnung vor.

Lineare Differentialgleichung 1-er Ordnung

Eine Differentialgleichung 1-er Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' + a(x) \cdot y = s(x)$$

wobei man $s(x)$ als Störfunktion bezeichnet. Des Weiteren gilt:

- Falls $s(x) = 0$, dann ist die Differentialgleichung **homogen**
- Falls $s(x) \neq 0$, dann ist die Gleichung **inhomogen**

Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung 1-er Ordnung

Die Lösungsmenge der Gleichung ist definiert als

$$L = \{y : R \to R | y'(x) + a(x)y(x) = s(x)\}$$

wobei man

$$L_0 = \{y : R \to R | y'(x) + a(x)y(x) = 0\}$$

als Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung bezeichnet.

Eine Lösung $y_p(x) \in L$ bezeichnet man als **partikuläre Lösung**.

Satz 7.32

Sei $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung, dann gilt

$$L = y_p(x) + L_0$$

Allgemeiner Lösungsansatz zum bestimmen von L

Sei eine Allgemeine Differentialgleichung $y'(x) + a(x)y(x) = s(x)$ gegeben. Um L zu bestimmen geht man wie folgt vor:

1. Bestimme L_0 (durch Trennung der Variablen und Integrieren der allgemeinen Form)

$$y'(x) \cdot g(y(x)) = h(x) \to G(y(x)) = H(x) + c$$

---

2. Bestimme eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ (durch Variation der Konstanten, in dem die gefundene Konstante C in L_0 als Funktion von x betrachtet wird und diese Lösung in die Gleichung eingesetzt wird)

---

3. Bestimme $L = y_p(x) + L$

Wenn eine Anfangsbedingung angegeben ist:
4) Bestimme $y \in L : y(x_0) = y_0$

Für eine ausführliche Ausarbeitung eines Beispiel siehe Appendix.

Appendix

Beispiele

Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{1}{x-1}y'(x) - y(x) = 1$$

Für die gilt $y(0) = 1$

---

1. Bestimme L_0:

$$\frac{1}{x-1} \cdot y'(x) - y(x) = 0 \mid \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) - (x-1) \cdot y(x) = 0 \mid \text{trennen der Variablen}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = (x-1) \mid \text{Integration der Form } y'(x) \cdot g(y(x)) = h(x), \text{ wobei } g(y(x)) = \frac{1}{y(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|y(x)|) = \frac{x^2}{2} - x + c \mid e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad |y(x)| = e^{\frac{x^2}{x} - x} \cdot e^c \mid \text{Da } e^{\frac{x^2}{x} - x} \geq 0 \text{ und } |y(x)| \geq 0, \text{ muss gelten } e^c > 0 \implies e^c = C > 0 \in R$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{\frac{x^2}{x} - x} \cdot C$$

---

2. Bestimme $y_p(x)$

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} \implies y_p(x)' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} \cdot (x-1)$$

$$\text{Einsetzen für } y'(x) - (x-1) \cdot y(x) = x - 1$$

$$\implies \underbrace{C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} \cdot (x-1)}_{y_p'(x)} - \underbrace{C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x}}_{y_p(x)} \cdot (x-1) = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x) = (x-1)e^{\frac{-x^2}{2} + x} = -\left(e^{\frac{-x^2}{2} + x}\right)' \implies C(x) = -e^{\frac{-x^2}{2} + x}$$

$$\implies y_p(x) = \underbrace{-e^{\frac{-x^2}{2} + x}}_{C(x)} \cdot e^{\frac{x^2}{2} + x}$$

$$\implies -1 \text{ ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung}$$

---

3. Bestimme L

$$L = y_p(x) + L_0 = -1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x}$$

---

4. Bestimme $y(x) \in L$ für die gilt: $y(0) = 1$

$$y(0) = -1 + C \cdot e^0 = -1 + C = 1 \implies C = 2$$

$$\implies y(x) = -1 + 2 \cdot e^{\frac{x^2}{x} - x}$$