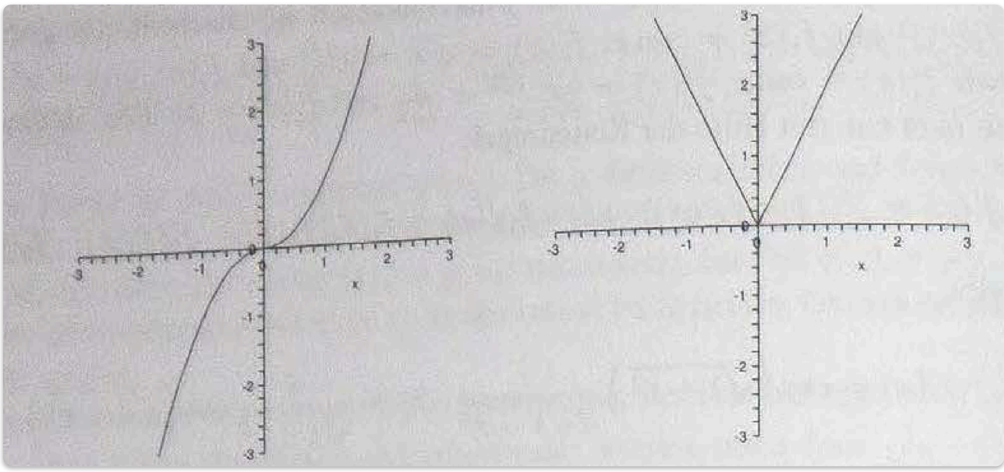
5.2 Satz von Taylor

1. Mittelwertsatzt

Differentialrechnung wird auch verwendet um Aussagen über Gestalten von Graphen von Funktionen zu gewinnen. Beispielsweise kann man hier anhand der Ableitung die Steigung ablesen von der Stammfunktion.



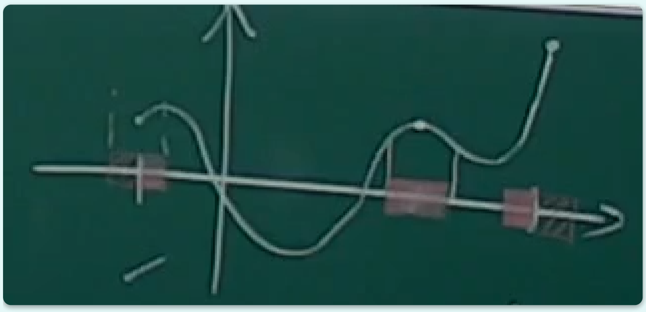
Maximum und Minimum

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild1, Tafelbild2

Definition 5.10

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein relatives Maximum (oder lokales Maximum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon\left(x_0\right)$ gibt, so dass $f(x) \leq f\left(x_0\right)$ für alle $x \in U_\varepsilon\left(x_0\right) \cap D$ gilt.
Also wenn ich im Definitionsbereich bin und ich in einem hinreichend kleinen Intervall x_0 das größte Element ist.

Die Stelle x_0 heißt absolutes Maximum, wenn $f(x) \leq f\left(x_0\right)$ für alle x in D gilt. Analog sind relative und absolute Minima definiert. Minima und Maxima nent man auch Extrema oder Extremwerte von f.



Wenn eine differenzierbare Funktion ein lokales Extremum besitzt, welches innerhalb (und nicht am Rande) des Definitionsbereichs liegt, hat an der Stelle eine waagrechte Tangente.

Definition 5.11 (Erweitert durch vo)

Definition 5.11 (Erweitert)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- Das Innere von D, bezeichnet als $\mathring{D}$, ist die Menge aller Punkte $x \in D$, für die es eine offene Umgebung $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ gibt, die vollständig in D enthalten ist:

  $$\mathring{D} = \{x \in D \mid \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq D\}$$

  Ist speziell $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so ist dessen Inneres $\mathring{I} = (a, b)$. Die Elemente von $\mathring{D}$ heißen innere Punkte.
- Der Rand von D, bezeichnet als ∂D, ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die jede offene Umgebung $U_\varepsilon(x)$ sowohl Punkte in D als auch Punkte außerhalb von D enthält:

  $$\partial D = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset\}$$

- Der **Abschluss von D**, bezeichnet als $\overline{D}$, ist die Vereinigung der Menge D mit ihrem Rand ∂D:

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

  Es gilt auch $\overline{D} = \mathring{D} \cup \partial D$.
- Eine Menge D heißt **abgeschlossen**, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt: $D = \overline{D}$.
- Eine Menge D heißt **offen**, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt: $D = \mathring{D}$.

Satz 5.12

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x_0 *ein lokales Extremum* im Inneren von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Wichtige Bemerkung dafür:

- Nicht anwendbar am Rand von D
- Extrema am Rand von D nicht definiert
- --> man muss den Rand gesondert untersuchen

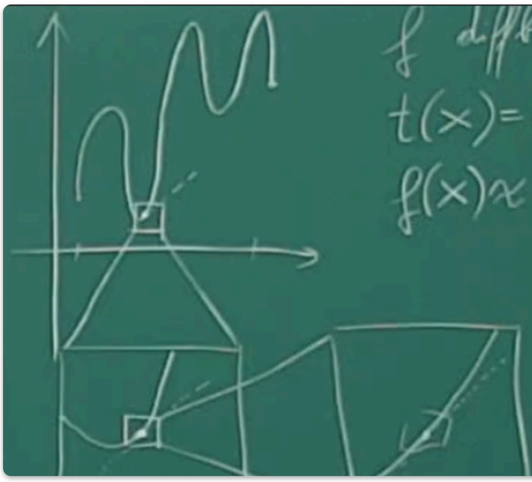
Beweis. O.B.d.A. sei x_0 ein lokales Minimum. Es gilt also $f(x) - f(x_0) \geq 0$ für alle x in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$. Aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ folgt, dass die einseitigen Grenzwerte für $x \rightarrow x_0+$ und $x \rightarrow x_0$ - existieren und übereinstimmen. Daher haben wir einerseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und andererseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.



f diffb. bei a

$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ Tangente

$f(x) \approx t(x)$

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + R(x)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f'(a) & f'(a) & 0 \end{array}$$

f diffbar $\Longrightarrow f(x) \approx t(x)$ lin. approx. bar

$f(x) = f(a) + c\cdot(x-a) + o(x-a)$ f. $x \to a$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + o(1) \xrightarrow[x\to a]{} c \Longrightarrow c = f'(a)$$

$$\boxed{f \text{ diffb.} \Longleftrightarrow f \text{ lin. approx.bar}}$$

Info

Tafelbild

Ableitung und mittlere Änderung

Lokale Änderung (Ableitung)

Die Ableitung von f an der Stelle a, $f'(a)$, ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dies beschreibt die lokale Änderungsrate der Funktion f am Punkt a.

Mittlere Änderung

Für ein Intervall $I = [c, d]$ ist die mittlere Änderungsrate der Funktion f gegeben durch:

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Dies entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(c, f(c))$ und $(d, f(d))$ auf dem Graphen von f.

Grafische Darstellung

- Die Ableitung $f'(a)$ entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.
- Die mittlere Änderung entspricht der Steigung der Sekante durch zwei Punkte auf dem Graphen.

Mittelwertsatz

Satz 5.14 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Falls f eine lineare Funktion $f(x) = cx + d$ ist (der Graph also eine Gerade ist), dann ist die Behauptung trivial. Andernfalls ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

nicht konstant, aber offensichtlich stetig in $[a, b]$. Daher besitzt sie nach Satz 4.90 ein Maximum und ein Minimum in $[a, b]$. Wegen $F(a) = F(b) = f(a)$ muss eines dieser beiden Extrema im Inneren der Intervalls liegen. Wir nennen die entsprechende Stelle ξ. Aus Satz 5.12 folgt nun, dass $F'(\xi) = 0$. Anwendung der Differentiationsregeln (Satz 5.5) ergibt

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.

Satz 5.16

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Seien f und g zwei auf einem Intervall I stetige und in dessen Innerem $\overset{\circ}{I}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in I$. Dann ist die Differenz $f(x) - g(x)$ auf I konstant, d.h., f und g unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

Beweis. Wir zeichnen einen Punkt $x_0 \in I$ aus und setzen $F(x) = f(x) - g(x)$. Dann lässt sich wegen des Mittelwertsatzes für jedes $x \in I$ ein $\xi \in \overset{\circ}{I}$ finden, so dass $F(x) = F(x_0) + F'(\xi)(x - x_0)$. Daher folgt aus $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, dass $F(x) = F(x_0)$, also F konstant ist.

Bis hierhin sollte der Stoff des 1. Übungstests gehen. Alles danach sollte für den 1. Test irrelevant sein, ist vollständigkeitshalber trotzdem noch in dem File.

2. Taylorreihen

Lineare Approximation

- Gleichung (5.3): Tangente als beste lineare Approximation von $f(x)$ nahe x_0
- Lineare Approximation entspricht einem Polynom 1. Ordnung

Motivation für bessere Approximationen

- Lineare Approximation genügt nicht immer für hohe Genauigkeit
- Bessere Approximationen können nicht linear sein, sollen aber möglichst einfach bleiben
- Naheliegende Wahl: Polynome höherer Ordnung

Polynomdarstellung

- Gegeben: $f(x)$ ist lokal durch ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad n annäherbar
- Darstellung um x_0:
  $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$

Bestimmung der Koeffizienten

Beispiel

Mathematik für Informatik, p.209

- Eine Möglichkeit: Lösen eines linearen Gleichungssystems
- Alternativ: Differentialrechnung
  - Durch wiederholtes Differenzieren können die Koeffizienten a_k berechnet werden

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \ldots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2\,(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3\,(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \ldots \\
f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4\,(x - x_0) + \ldots
\end{aligned}$$

woraus nach Einsetzen von $x = x_0$ und Umformen

$$a_0 = f\,(x_0), \quad a_1 = f'\,(x_0), \quad a_2 = \frac{f''\,(x_0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''\,(x_0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}\,(x_0)}{n!}$$

folgt.

Bei Funktionen, die eine Darstellung als Potenzreihe besitzen, können wir in ähnlicher Weise vorgehen.

2) Taylorreihen: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{?} (x-a)^k$

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k (x-a)^{k-1}\Big|_{x=a} = a_1 = 1! \cdot a_1$$

$$f''(a) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)(x-a)^{k-2}\Big|_{x=a} = 2a_2 = 2!\, a_2$$

$$\Longrightarrow a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$$

ⓘ Satz 5.17

Mathematik für Informatik, p.209, Tafelbild

Sei $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist $f(x)$ im Konvergenzbereich differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren, d.h., für alle x mit $|x - x_0| < R$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $x_0 = 0$ (andernfalls setzt man $\bar{x} = x - x_0$ und benützt die Kettenregel). Seien nun $|x|, |y| < R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= \sum_{n \geq 0} a_n \frac{y^n - x^n}{y - x} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2} x + \cdots + y x^{n-2} + x^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Da die Reihe auf der rechten Seite von (5.4) und die Reihe von $f(x)$ denselben Konvergenzradius haben, folgt aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium für Reihen und der Tatsache, dass Potenzreihen im Konvergenzbereich absolut konvergieren, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $\sum_{n > N} n \, |a_n| \cdot |x|^n < \varepsilon / 2$. Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $g(x) = \sum_{n \geq 0} n \, |a_n| \cdot |x|^n$ (siehe Satz 4.86) gilt auch $\sum_{n > N} n \, |a_n| \cdot |y|^n < \varepsilon$ für alle $y \in U_\delta(x)$ (mit δ hinreichend klein). Daher spalten wir die Summe (5.5) auf und bekommen (für $y \in U_\delta(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = &\sum_{n=0}^{N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2} x + \cdots + y x^{n-2} + x^{n-1} \right) \\ &+ \sum_{n > N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2} x + \cdots + y x^{n-2} + x^{n-1} \right) \end{aligned}$$

wobei

$$\left| \sum_{n > N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2} x + \cdots + y x^{n-2} + x^{n-1} \right) \right| \leq \sum_{n > N} n a_n \max \left(|x|^n, |y|^n \right) < \varepsilon$$

Daher liefert der Grenzübergang $y \to x$ schließlich

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N} n a_n x^{n-1} + R_N$$

mit $|R_N| \leq \varepsilon$.

Definition der Taylorreihe

5.20 Die Reihe

Mathematik für Informatik, p.211, Tafelbild

$$f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2}\left(x-x_0\right)^2+\frac{f'''\left(x_0\right)}{3!}\left(x-x_0\right)^3+\ldots$$
$$=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

heißt Taylorreihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt (mit Anschlussstelle) x_0. Der Sonderfall $x_0=0$ wird auch McLaurinreihe genannt.

Bricht man die Taylorreihe nach n Gliedern ab, so erhält man

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+R_n$$

Dies nent man die Taylor'sche Formel mit Restglied R_n. Die Summe vor dem Restglied wird Taylorpolynom n-ter Ordnung genannt. R_n ist der Abbruchfehler und selbstverständlich von n, x und x_0 abhängig.

Satz von Taylor

Satz 5.21 (**Satz von Taylor**)

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel

Sei f auf dem Intervall $I=[x_0,x]$ (bzw. $[x,x_0]$)n-mal stetig differenzierbar und im Inneren $\mathring{I}$ von $I(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert eine Zahl $\xi\in\mathring{I}$, so dass

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

Der Term $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ heißt Restglied von Lagrange. Falls f unendlich oft stetig differenzierbar ist, so ist auch die Taylorreihe von f definiert. Die Taylorreihe stimmt genau dann mit der Funktion $f(x)$ überein, wenn $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Funktionen, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und deren Ableitungen nicht zu schnell wachsen, beliebig genau durch Polynome approximieren.

Beispiele für die Taylorentwicklungen

Beispiel 5.22 Beispiele für Taylorentwicklungen.

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel1, tafel2, tafel3, tafel4, Tafel5

(a)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n. Daher erhalten wir wegen $e^0 = 1$ die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Analog lassen sich die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ bestimmen. Abbrechen der Exponentialreihe nach dem n-ten Glied führt auf das Restglied $R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ mit $0 < \xi < x$. Der Fehler ist also durch $\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ beschränkt. Für jedes feste x gilt somit $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ (vgl. Aufgabe 4.21), d.h., die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Wir wissen bereits, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Daraus folgt $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, und Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

mit $0 < \xi < x$. Das Restglied lässt sich für $0 \le x \le 1$ durch

$$\left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

abschätzen. Man kann zeigen, dass das Restglied sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$, also im gesamten komplexen Konvergenzbereich der Reihe, gegen 0 konvergiert. Dazu sind aber andere Darstellungen des Restglieds (z.B. das so genannte Cauchy'sche Restglied) nötig, die wir in diesem Buch nicht behandeln. Die Konvergenz der Taylorreihe gegen $f(x)$ lässt sich auch folgendermaßen zeigen: Sei $g(x) = \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}x^n/n$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Potenzreihe für $|x| < 1$, und Anwendung von Satz 5.17 ergibt (unter Benützung der Formel für die Summe der geometrischen Reihe aus Beispiel 4.37)

$$g'(x) = \sum_{n\ge0}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$

Aus Satz 5.16 folgt nun, dass $f(x) - g(x) = c$. Die Konstante c kann man ganz leicht berechnen: Da $f(0) - g(0) = c$ gelten muss, folgt $c = 0$.

Zusammenfassend gilt also für $|x| < 1$ und wegen des Abel'schen Grenzwertsatzes (Satz 5.19) auch für $x = 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Für $x = 1$ erhält man die bereits in Kapitel 4 (Beispiel 4.33) erwähnte Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

(c)

Allgemein stellt die binomische Reihe (siehe Beispiel 4.58) die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dar. Differenzieren ergibt nämlich $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Auch hier lässt sich zeigen, dass das Restglied $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ auf dem gesamten Konvergenzbereich der binomischen Reihe gegen 0 konvergiert. Damit gilt für $|x| < 1$ die Darstellung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$$

(d)

Nicht jede Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, besitzt eine Potenzreihendarstellung. Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen an der Stelle 0 verschwinden. Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 lautet daher $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$ und stimmt offensichtlich nur im Punkt $x = 0$ mit $f(x)$ überein.

3 Monotonie und die 1. Ableitung

Dank Mittelwertsatz und Taylor Satz lassen sich weitere Sätze über Gestalt des Graphens von einer Funktion herleiten:

ⓘ **Satz 5.23**

Mathematik für Informatik, p.213

Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt: $f(x)$ ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf I, wenn $f'(x) \geq 0\,(f'(x) \leq 0)$ für alle $x \in I$. Falls die Ableitung auf I die strikte Ungleichung erfült, so ist $f(x)$ auf I streng monoton.

Beweis. Da beide Fälle analog zu beweisen sind, sei o.B.d.A. $f(x)$ monoton wachsend. Dann gilt für $x < y$ definitionsgemäß $f(x) \leq f(y)$. Sei nun $x_0 \in I$.

Aufgrund der Differenzierbarkeit von f genügt es, den rechtsseitigen Grenzwert $x \to x_0+$ zu betrachten. Hier ist $x > x_0$. Daher gilt

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \geq 0$$

da sowohl Zähler als auch Nenner des Differenzenquotienten positiv sind.

Umkehrung: Gelte nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Wir wählen $x, y \in I$ beliebig, so dass $x < y$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Zahl ξ mit $x < \xi < y$, die

$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

erfüllt. Daraus folgt aber $f(x) \leq f(y)$ und im Falle der strikten Ungleichung sogar $f(x) < f(y)$.

vo: sem_2/Analysis/vo/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414115759.png

ⓘ **Satz 5.25**

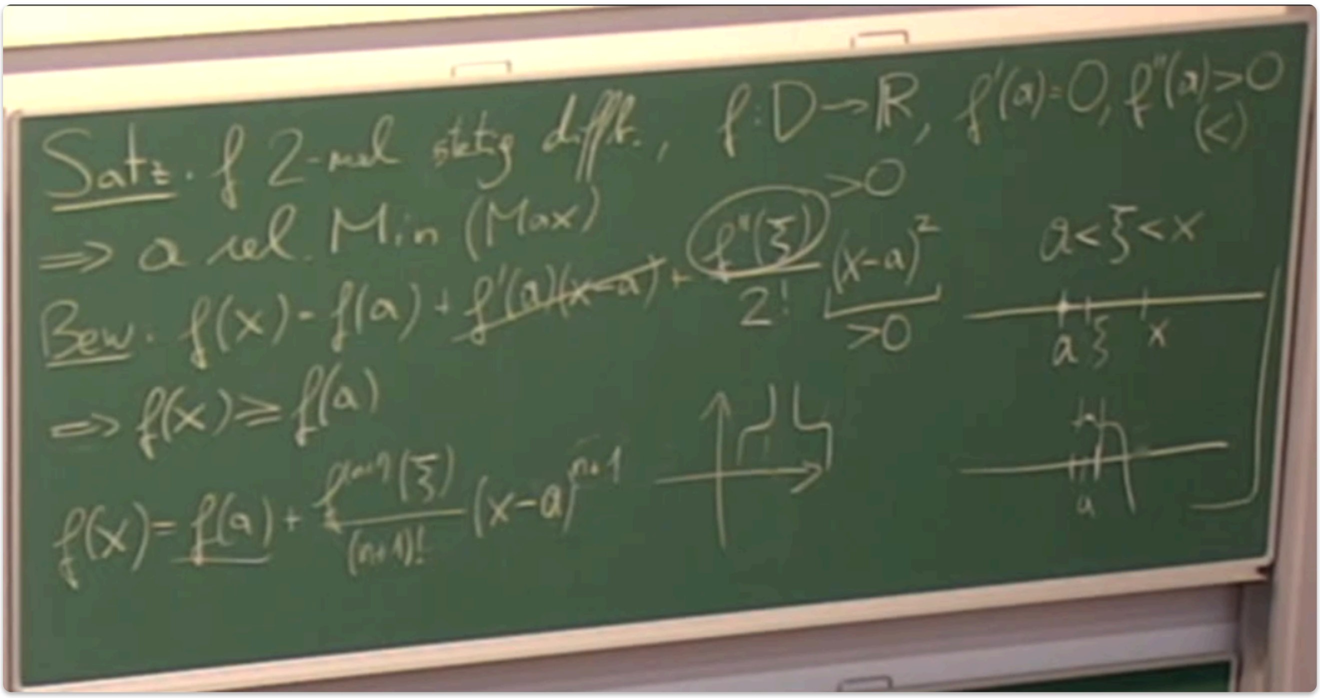
Mathematik für Informatik, p.214
Sei f zweimal stetig differenzierbar und $f'\left(x_0\right) = 0$. Dann gilt: $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, falls $f''\left(x_0\right) < 0$, und ein relatives Minimum, falls $f''\left(x_0\right) > 0$.

Beweis. Sei $f''\left(x_0\right) < 0$. Ein relatives Maximum liegt vor, wenn für x in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ von x_0 gilt: $f(x) \leq f\left(x_0\right)$. Wir approximieren $f(x)$ in $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor. Da $f''\left(x_0\right) < 0$ und f'' stetig ist, folgt aus Satz

4.87, dass ε so klein gewählt werden kann, dass $f''(\xi) < 0$ für alle $\xi \in U_\varepsilon(x_0)$ gültig ist. Für $x \in U_\varepsilon(x_0)$ und ξ zwischen x_0 und x folgt daraus

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{<0}\underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} \leq f(x_0)$$

wie behauptet.



4. Die zweite Ableitung

Wie die erste Ableitung hat auch die 2. Ableitung eine geometrische Interpretation. Sie ist das Maß für die Krümmung des Funktionsgraphen.

Definition 5.28 konvex/konkav

Mathematik für Informatik, p.216

Definition 5.28 Eine Funktion f heißt auf einem Intervall I konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt: $f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Gilt sogar $f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$, so heißt f strikt konvex. Falls $f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ (bzw. die strikte Ungleichung) für $0 < \lambda < 1$ gilt, so nennt man f konkav (bzw. strikt konkav).

Eine Funktion ist konvex, wenn ihr Graph bei Betrachtung von unten konvex aussieht.

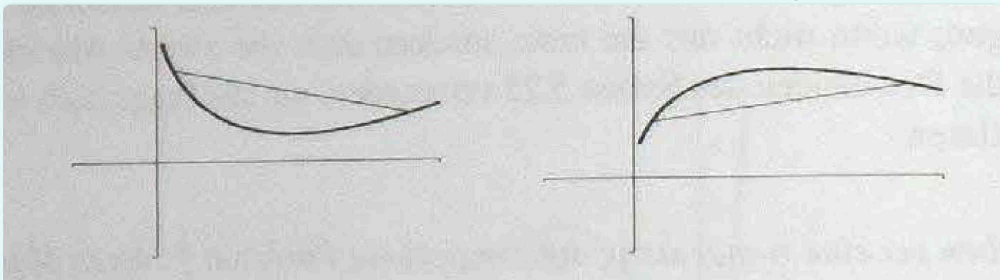


Abbildung 5.8 Konvexe (links) und konkave Funktion (rechts)

Satz 5.29

Mathematik für Informatik, p.216, Tafel1, Tafel2, Tafel3, Tafel4

Sei f auf dem Intervall I stetig und im Inneren $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (bzw. konkav) auf I, wenn f' auf $\mathring{I}$ monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Strikte Konvexität (bzw. Konkavität) gilt genau dann, wenn f' streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Beweis. Da f genau dann konkav ist, wenn $-f$ konvex ist, genügt es, den Satz hinsichtlich der Konvexität von f zu zeigen. Nehmen wir zunächst an, dass f' monoton wachsend sei. Seien $x, y \in I$ mit $x < y, 0 < \lambda < 1$ und $z = x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Wir müssen zeigen, dass $f(z) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Diese Ungleichung lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} f(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda f(z) &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \\ \iff (1-\lambda)(f(z) - f(x)) &\leq \lambda(f(y) - f(z)). \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren ξ und η mit $f(z) - f(x) = (z - x)f'(\xi)$ und $f(y) - f(z) = (y - z)f'(\eta)$, wobei $x < \xi < z < \eta < y$. Damit ist (5.7) äquivalent zu

$(1-\lambda)(z-x)f'(\xi) \le \lambda(y-z)f'(\eta)$. Es gilt nun

$$(1-\lambda)(z-x) = (1-\lambda)\lambda(y-x) = \lambda(y-z)$$

und überdies wegen $\xi < \eta$ und der Monotonie von f' auch $f'(\xi) \le f'(\eta)$. Damit ist die Konvexität von f nachgewiesen. Im Fall $f'(\xi) < f'(\eta)$ folgt unmittelbar die strikte Konvexität.

Sei umgekehrt f konvex und x, y, z, λ wie oben. Einerseits gilt

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)}$$

andererseits aufgrund der Konvexität von f

$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Dies impliziert $f'(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Indem man nun den Fall $\lambda \to 1$ betrachtet, gewinnt man in analoger Weise die Abschätzung $f'(y) \ge \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ und damit $f'(x) \le f'(y)$. Dass strikte Konvexität die strenge Monotonie von f' zur Folge hat, ist nun offensichtlich.

5. Regel von de l' Hospital

Regel von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital wird immer dann angewandt, wenn bei einer Grenzwertberechnung die unbestimmten Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten. Wichtig dabei ist, dass f, g im Intervall (a, b) stetig differenzierbar sind und es gilt: $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; mit \; \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \; bzw. \infty$$

In diesem Fall können wir beide Funktionen einzeln ableiten und den Grenzwert mit der Ableitung berechnen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Grund, wieso wir das dürfen, liegt im allgemeinen Mittelwertsatz.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mathematik für Informatik, p.219

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Seien die Funktionen f und g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Inneren (a, b). Weiters sei $x_0 \in [a, b]$ und gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ferner sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (bzw. der einseitige Grenzwert, falls $x_0 = a$ oder $x_0 = b$). Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis. Die Aussage folgt fast unmittelbar aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz. Es gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit $x_0 < \xi < x$ (bzw. $x < \xi < x_0$). Setzen wir $\xi = \xi(x)$, dann folgt aus $x \to x_0$ auch $\xi \to x_0$. Daher gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und das entspricht genau der Behauptung.

Bemerkung: Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Regel von de l'Hospital auch in noch allgemeineren Situationen gültig ist. Weiters gelten analoge Aussagen zu Satz 5.35 für $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ und für $x_0 = \pm\infty$.

Beispiel 5.36 (Anwendung der Regel von de l'Hospital)

Tafel1, Tafel2

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$: Hier erhalten wir zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Daher ist (5.8) anwendbar. Differentiation von Zähler und Nenner führt auf $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$: Hier kann die Regel von de l'Hospital zweimal hintereinander angewendet werden. Wir erhalten $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$: Hier erhalten wir die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Eine hinreichend häufige Anwendung von (5.8) liefert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!x^0}{e^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion wächst also (für $x \to \infty$) stärker als jede Potenz von x.

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 0$: Anwendung von (5.8) ergibt

Beweis folgt aus dem Mittelwertsatz

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable