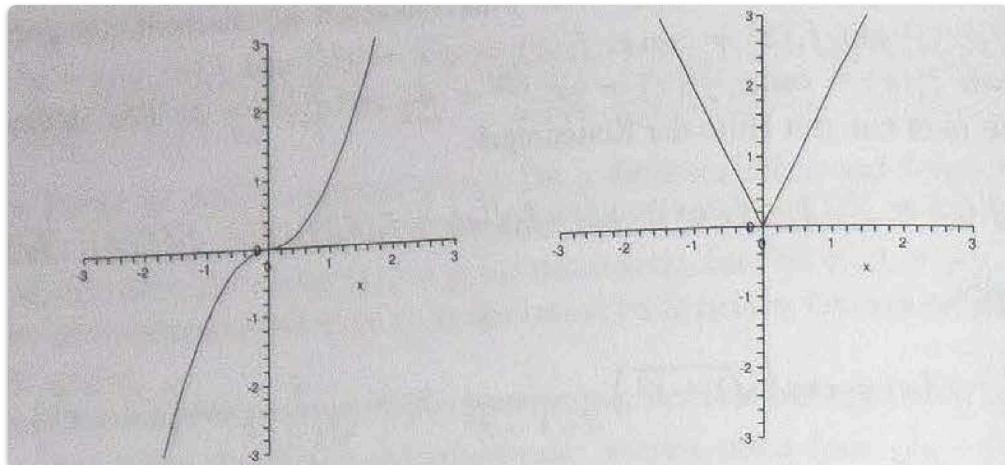


## 5.2 Satz von Taylor

### 1. Mittelwertsatz

Differentialrechnung wird auch verwendet um Aussagen über Gestalten von Graphen von Funktionen zu gewinnen. Beispielsweise kann man hier anhand der Ableitung die Steigung ablesen von der Stammfunktion.



# Maximum und Minimum

Mathematik für Informatik, p.206

## ⌚ Definition 5.10

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt an der Stelle  $x_0 \in D$  ein relatives Maximum (oder lokales Maximum), wenn es eine Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  gibt, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$  gilt. Die Stelle  $x_0$  heißt absolutes Maximum, wenn  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x$  in  $D$  gilt. Analog sind relative und absolute Minima definiert. Minima und Maxima nennt man auch Extrema oder Extremwerte von  $f$ .

Wenn eine differenzierbare Funktion ein lokales Extremum besitzt, welches innerhalb (und nicht am Rande) des Definitionsbereichs liegt, hat an der Stelle eine waagrechte Tangente.

## ⌚ Definition 5.11

Sei  $I = [a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall. Dann nennt man das offene Intervall  $(a, b)$  das Innere von  $I$ . Dieses wird mit  $I$  bezeichnet. Analog definiert man das Innere einer Menge, die Vereinigung von Intervallen ist. Die Elemente von  $I$  heißen innere Punkte.

vo

S2 Satz v. Taylor

Def:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  rel. Max.  $\Leftrightarrow$   $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in U_\varepsilon(a) \cap D: f(x) \leq f(a)$

$a$  abs. Max.  $\Leftrightarrow \forall x \in D: f(x) \leq f(a)$

Def:  $D \subseteq \mathbb{R}$ , das Innere v.  $D$ :  $\overset{\circ}{D} = \{x \in D \mid \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq D\}$

der Rand v.  $D$ ,  $\partial D = \{x \in D \mid \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset, U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset\}$

Abschluss v.  $D$ :  $\overline{D} = D \cup \partial D = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$

$D$  abgeschl.  $\Leftrightarrow \overline{D} = D$ , offen  $\Leftrightarrow D = \overset{\circ}{D}$



## Sätze

Mathematik für Informatik, p.206

### ⓘ Satz 5.12

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $x_0$  ein relatives Extremum im Inneren von  $D$ . Dann gilt  $f'(x_0) = 0$ .

Wichtige Bemerkung dafür:

- Nicht anwendbar am Rand von  $D$
- Extrema am Rand von  $D$  nicht definiert
- --> man muss den Rand gesondert untersuchen

Beweis. O.B.d.A. sei  $x_0$  ein lokales Minimum. Es gilt also  $f(x) - f(x_0) \geq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ . Aus der Differenzierbarkeit von  $f(x)$  folgt, dass die einseitigen Grenzwerte für  $x \rightarrow x_0+$  und  $x \rightarrow x_0-$  existieren und übereinstimmen. Daher haben wir einerseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und andererseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$  lok. Extremum,  $f$  diff. bei  $a$   
 $\Rightarrow f'(a) = 0$

Bew:  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  OBA: a Max

Bsp:  $f(x) = x^3$   
 $f(x) = 3x^2$   
 $f(0) = 0$

$f$  diff. bei  $a$   
 $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  Tangente  
 $f(x) \approx t(x)$   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + R(x)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$f'(a) \quad f'(a) \quad 0$$

$f$  diffbar  $\Rightarrow f(x) \approx t(x)$  lin. approx. bar

$f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + o(x-a)$  f.  $x \rightarrow a$

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow a} c \Rightarrow c = f'(a)$

$f$  diffbar  $\Leftrightarrow f$  lin. approx. bar

## Mittelwertsatz

Mathematik für Informatik, p.208

### ⓘ Satz 5.14 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei  $f$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt  $\xi \in [a, b]$ , so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Falls  $f$  eine lineare Funktion  $f(x) = cx + d$  ist (der Graph also eine Gerade ist), dann ist die Behauptung trivial. Andernfalls ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

nicht konstant, aber offensichtlich stetig in  $[a, b]$ . Daher besitzt sie nach Satz 4.90 ein Maximum und ein Minimum in  $[a, b]$ . Wegen  $F(a) = F(b) = f(a)$  muss eines dieser beiden Extrema im Inneren der Intervalls liegen. Wir nennen die entsprechende Stelle  $\xi$ . Aus Satz 5.12 folgt nun, dass  $F'(\xi) = 0$ . Anwendung der Differentiationsregeln (Satz 5.5) ergibt

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{lokale Änderung}$$

$I = [c, d]$   $\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$  mittlere Änderung

Satz (MWS):  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig, diff. auf  $(a, b)$

 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Bew.:  $f(x) = cx + d$  ✓

satz:  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$\Rightarrow \exists \max M \exists \min m$  in  $\overset{\circ}{I}$

$g(a) = g(b) = f(a) \Rightarrow M \in (a, b) \vee m \in (a, b)$

O.B.d.A:  $M \in (a, b) \Rightarrow g'(M) = 0, g'(M) = \frac{f(M) - f(a)}{M - a} = 0 \Rightarrow \xi = M$

### ① Satz 5.16

Mathematik für Informatik, p.208

Seien  $f$  und  $g$  zwei auf einem Intervall  $I$  stetige und in dessen Innerem  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbare Funktionen mit  $f'(x) = g'(x)$  für alle  $x \in I$ . Dann ist die Differenz  $f(x) - g(x)$  auf  $I$  konstant, d.h.,  $f$  und  $g$  unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.33

Beweis. Wir zeichnen einen Punkt  $x_0 \in I$  aus und setzen  $F(x) = f(x) - g(x)$ . Dann lässt sich wegen des Mittelwertsatzes für jedes  $x \in I$  ein  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  finden, so dass  $F(x) = F(x_0) + F'(\xi)(x - x_0)$ . Daher folgt aus  $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ , dass  $F(x) = F(x_0)$ , also  $F$  konstant ist.

vo: sem\_2/Analysis/vo\_md\_zsmf/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image  
20250414112951.png

---

## 2. Taylorreihen

### Lineare Approximation

- Gleichung (5.3): Tangente als **beste lineare Approximation** von  $f(x)$  nahe  $x_0$
- Lineare Approximation entspricht einem **Polynom 1. Ordnung**

### Motivation für bessere Approximationen

- Lineare Approximation genügt nicht immer für hohe Genauigkeit
- Bessere Approximationen können nicht linear sein, sollen aber möglichst **einfach** bleiben
- Naheliegende Wahl: **Polynome höherer Ordnung**

### Polynomdarstellung

- Gegeben:  $f(x)$  ist lokal durch ein Polynom  $p_n(x)$  vom Grad  $n$  annäherbar
  - Darstellung um  $x_0$ :
- $$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

### Bestimmung der Koeffizienten

#### ☰ Beispiel

Mathematik für Informatik, p.209

- Eine Möglichkeit: **Lösen eines linearen Gleichungssystems**
- Alternativ: **Differentialrechnung**
  - Durch wiederholtes Differenzieren können die Koeffizienten  $a_k$  berechnet werden

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots \\ f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

woraus nach Einsetzen von  $x = x_0$  und Umformen

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

folgt.

Bei Funktionen, die eine Darstellung als Potenzreihe besitzen, können wir in ähnlicher Weise vorgehen.

2) Taylorreihen.  $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = \sum_{k=1}^n a_k k (x-a)^{k-1} \Big|_{x=a} = a_1 = 1! \cdot a_1$$

$$f''(a) = \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) (x-a)^{k-2} \Big|_{x=a} = 2a_2 = 2! \cdot a_2$$

$$\Rightarrow a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$$

Satz:  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ ,  $KR = R$

$$\Rightarrow \forall x: |x-a| < R : f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x-a)^{n-1}$$

Bew.:  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \sum_{n=0}^N a_n \underbrace{\frac{y^n - x^n}{y-x}}_{\substack{\text{div} \\ \text{konv}}} + \underbrace{\frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n}{y-x}}_{\substack{\text{d. v.} \\ \text{d. v.}}} < \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n}{y-x}$

$$y \rightarrow x$$

$$\delta_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\sim \sum_{n=1}^N a_n n x^{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ falls } \exists$$

für mehr erklärung: [5. Differential und Integralrechnung eine Variable, p.6](#)

# Definition der Taylorreihe

## 5.20 Die Reihe

Mathematik für Informatik, p.211

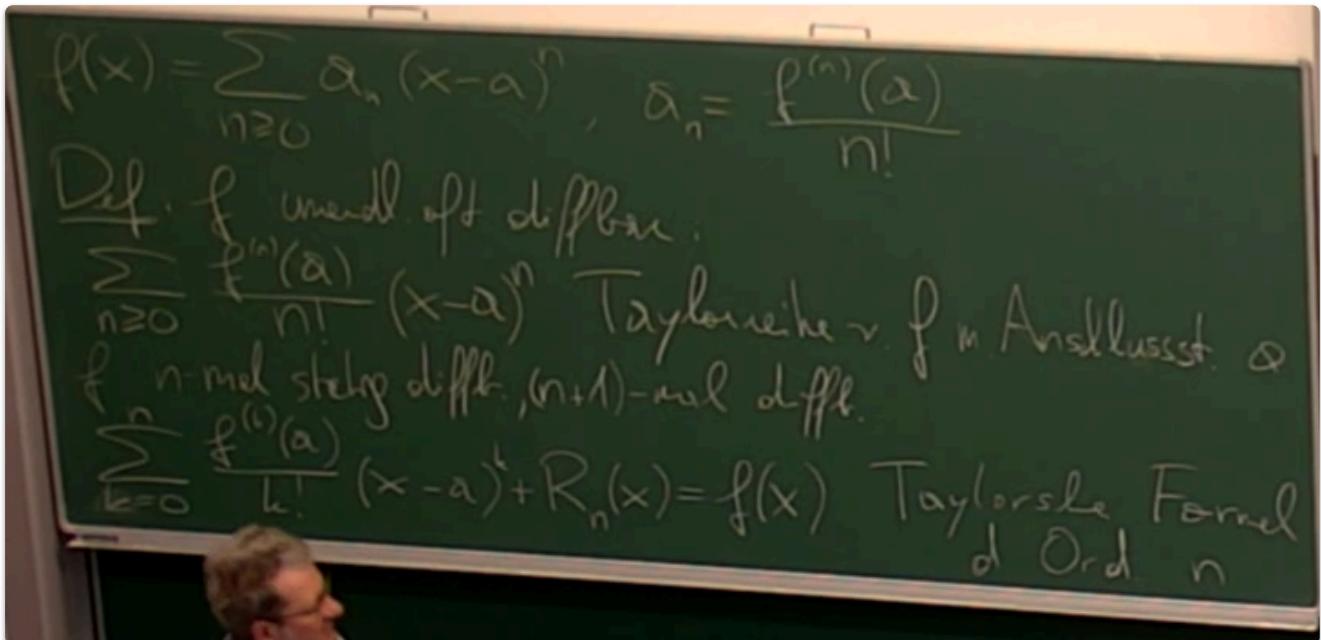
$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

heißt Taylorreihe von  $f(x)$  im Entwicklungspunkt (mit Anschlussstelle)  $x_0$ . Der Sonderfall  $x_0 = 0$  wird auch McLaurinreihe genannt.

Bricht man die Taylorreihe nach  $n$  Gliedern ab, so erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$$

Dies nennt man die Taylor'sche Formel mit Restglied  $R_n$ . Die Summe vor dem Restglied wird Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung genannt.  $R_n$  ist der Abbruchfehler und selbstverständlich von  $n, x$  und  $x_0$  abhängig.



# Satz von Taylor

## i Satz 5.21 (Satz von Taylor)

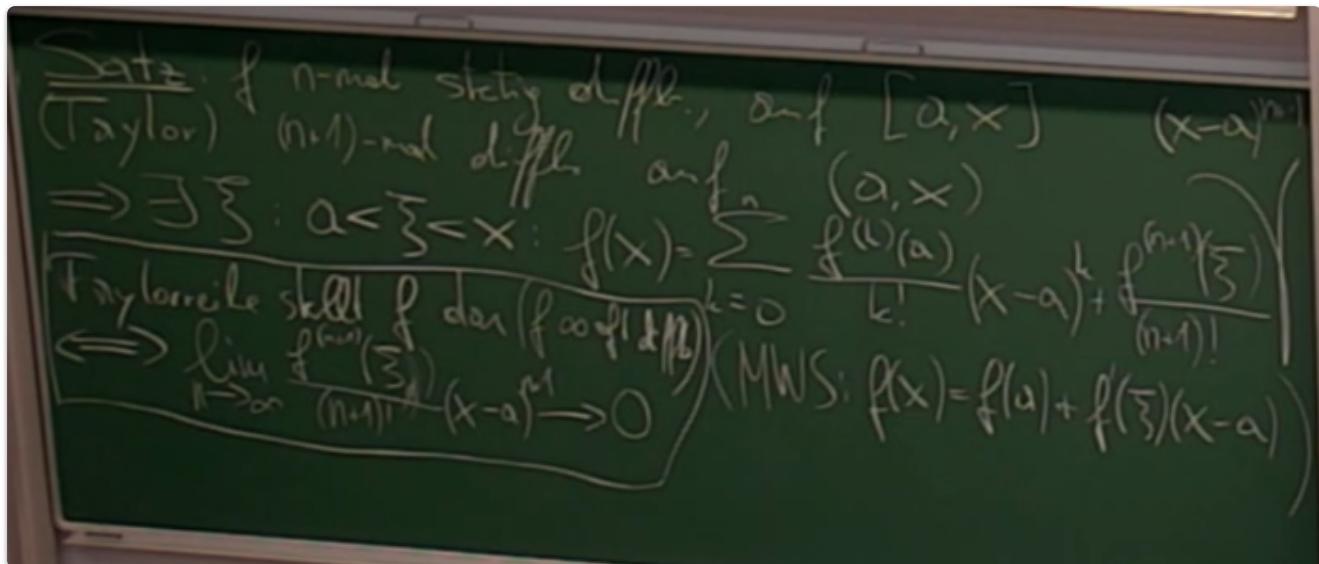
Mathematik für Informatik, p.211

Sei  $f$  auf dem Intervall  $I = [x_0, x]$  (bzw.  $[x, x_0]$ )  $n$ -mal stetig differenzierbar und im Inneren  $\overset{\circ}{I}$  von  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Dann existiert eine Zahl  $\xi \in \overset{\circ}{I}$ , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Der Term  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  heißt Restglied von Lagrange. Falls  $f$  unendlich oft stetig differenzierbar ist, so ist auch die Taylorreihe von  $f$  definiert. Die Taylorreihe stimmt genau dann mit der Funktion  $f(x)$  überein, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Funktionen, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und deren Ableitungen nicht zu schnell wachsen, beliebig genau durch Polynome approximieren.



## Beispiele für die Taylorentwicklungen

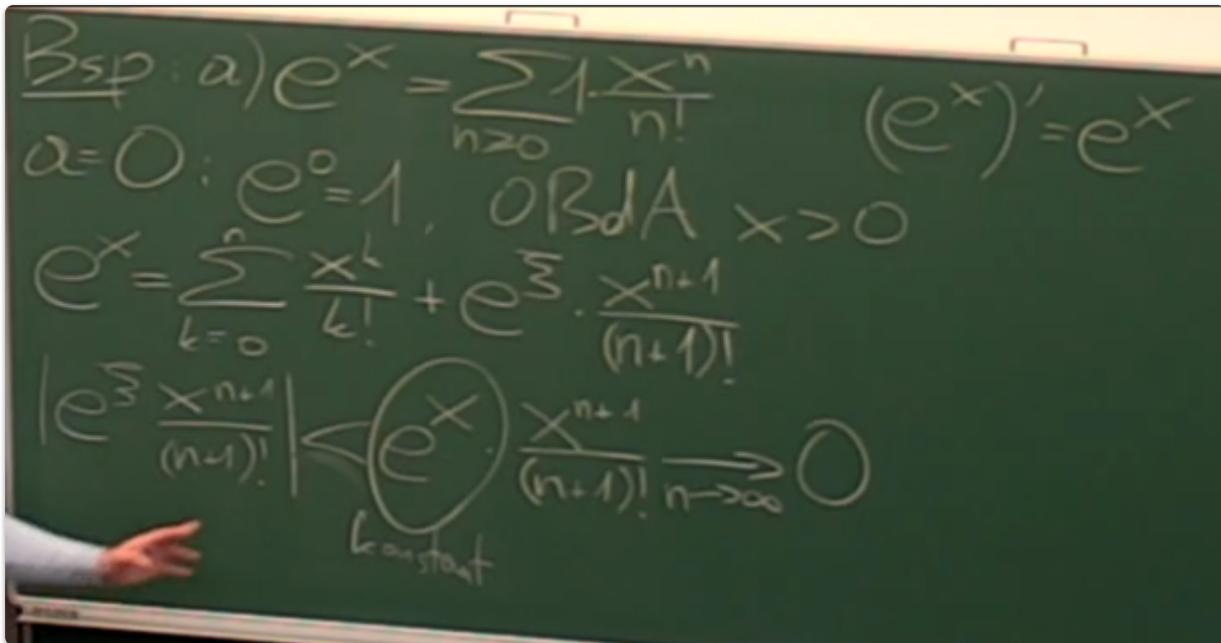
### ☰ Beispiel 5.22 Beispiele für Taylorentwicklungen.

Mathematik für Informatik, p.211

(a) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = e^x$  mit der Anschlussstelle  $x_0 = 0$ . Es gilt  $f^{(n)}(x) = e^x$  für alle  $n$ . Daher erhalten wir wegen  $e^0 = 1$  die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Analog lassen sich die Reihen für  $\sin x$  und  $\cos x$  bestimmen. Abbrechen der Exponentialreihe nach dem  $n$ -ten Glied führt auf das Restglied  $R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$  mit  $0 < \xi < x$ . Der Fehler ist also durch  $\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$  beschränkt. Für jedes feste  $x$  gilt somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  (vgl. Aufgabe 4.21), d.h., die Exponentialreihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .



### ☰ Fortsetzung von 5.22

Mathematik für Informatik, p.212

(b) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \ln(1+x)$  mit der Anschlussstelle  $x_0 = 0$ . Wir wissen bereits, dass  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ . Daraus folgt  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ , und Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

mit  $0 < \xi < x$ . Das Restglied lässt sich für  $0 \leq x \leq 1$  durch

$$\left| (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

abschätzen. Man kann zeigen, dass das Restglied sogar für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < 1$ , also im gesamten komplexen Konvergenzbereich der Reihe, gegen 0 konvergiert. Dazu sind aber andere Darstellungen des Restglieds (z.B. das so genannte Cauchy'sche Restglied) nötig, die wir in diesem Buch nicht behandeln. Die Konvergenz der Taylorreihe gegen  $f(x)$  lässt sich auch folgendermaßen zeigen: Sei  $g(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n / n$ . Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Potenzreihe für  $|x| < 1$ , und Anwendung von Satz 5.17 ergibt (unter Benützung der Formel für die Summe der geometrischen Reihe aus Beispiel 4.37)

$$g'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$

Aus Satz 5.16 folgt nun, dass  $f(x) - g(x) = c$ . Die Konstante  $c$  kann man ganz leicht berechnen: Da  $f(0) - g(0) = c$  gelten muss, folgt  $c = 0$ .

Zusammenfassend gilt also für  $|x| < 1$  und wegen des Abel'schen Grenzwertsatzes (Satz 5.19) auch für  $x = 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Für  $x = 1$  erhält man die bereits in Kapitel 4 (Beispiel 4.33) erwähnte Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

b)  $\log(1+x)$ ,  $\alpha = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^n \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$$

$$0 < x \leq 1.$$

$$\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} = \left( \underbrace{\frac{x}{1+\xi}}_{< 1} \right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim \sqrt[n]{|D_n|} = \lim \sqrt[n]{(k-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{k-1} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{k-1} \cdot \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$|R_n| < |x|^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad f. -1 < x \leq 1$$

### Fortsetzung 5.22

Mathematik für Informatik, p.212

(c) Allgemein stellt die binomische Reihe (siehe Beispiel 4.58) die Funktion

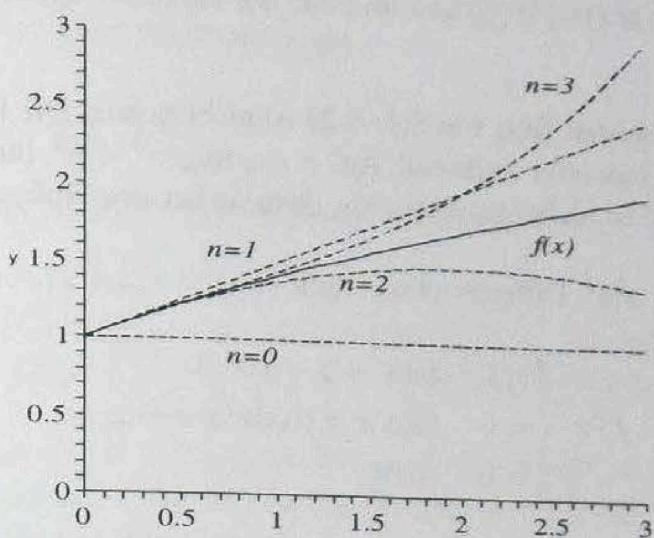
$f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dar. Differenzieren ergibt nämlich

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ . Auch hier lässt sich zeigen, dass das

Restglied  $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$  auf dem gesamten Konvergenzbereich der

binomischen Reihe gegen 0 konvergiert. Damit gilt für  $|x| < 1$  die Darstellung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$



$$\text{C) } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{f. } |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

### ☰ Fortsetzung 5.22

Mathematik für Informatik, p.213

(d) Nicht jede Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, besitzt eine Potenzreihendarstellung. Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen an der Stelle 0 verschwinden. Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 lautet daher  $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$  und stimmt offensichtlich nur im Punkt  $x = 0$  mit  $f(x)$  überein.

$$\begin{aligned}
 d) f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0 \\ \left| \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \right| < \frac{x^2}{|x|}, |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{array} \right. \\
 f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} \\ < 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^4}{x^4} = 12 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right. \\
 e^x &> x, e^{-x} < \frac{1}{x}, \text{ für } x > 0 \\
 e^x &> \frac{x^5}{6}, e^{-x} < \frac{6}{x^5} \text{ für } x > 0 \quad \Rightarrow f''(0) = 0
 \end{aligned}$$

## 3 Monotonie und die 1. Ableitung

Dank Mittelwertsatz und Taylor Satz lassen sich weitere Sätze über Gestalt des Graphens von einer Funktion herleiten:

### ⓘ Satz 5.23

[Mathematik für Informatik, p.213](#)

Für eine auf einem Intervall  $I$  differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $f(x)$  ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf  $I$ , wenn  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) für alle  $x \in I$ . Falls die Ableitung auf  $I$  die strikte Ungleichung erfüllt, so ist  $f(x)$  auf  $I$  streng monoton.

Beweis. Da beide Fälle analog zu beweisen sind, sei o.B.d.A.  $f(x)$  monoton wachsend. Dann gilt für  $x < y$  definitionsgemäß  $f(x) \leq f(y)$ . Sei nun  $x_0 \in I$ .

Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f$  genügt es, den rechtsseitigen Grenzwert  $x \rightarrow x_0+$  zu betrachten. Hier ist  $x > x_0$ . Daher gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

da sowohl Zähler als auch Nenner des Differenzenquotienten positiv sind.

Umkehrung: Gelte nun  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ . Wir wählen  $x, y \in I$  beliebig, so dass  $x < y$ . Dann folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Zahl  $\xi$  mit  $x < \xi < y$ , die

$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

erfüllt. Daraus folgt aber  $f(x) \leq f(y)$  und im Falle der strikten Ungleichung sogar  $f(x) < f(y)$ .

vo: [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414115759.png](#)

### ⓘ Satz 5.25

[Mathematik für Informatik, p.214](#)

Sei  $f$  zweimal stetig differenzierbar und  $f'(x_0) = 0$ . Dann gilt:  $f(x)$  besitzt an der Stelle  $x_0$  ein relatives Maximum, falls  $f''(x_0) < 0$ , und ein relatives Minimum, falls  $f''(x_0) > 0$ .

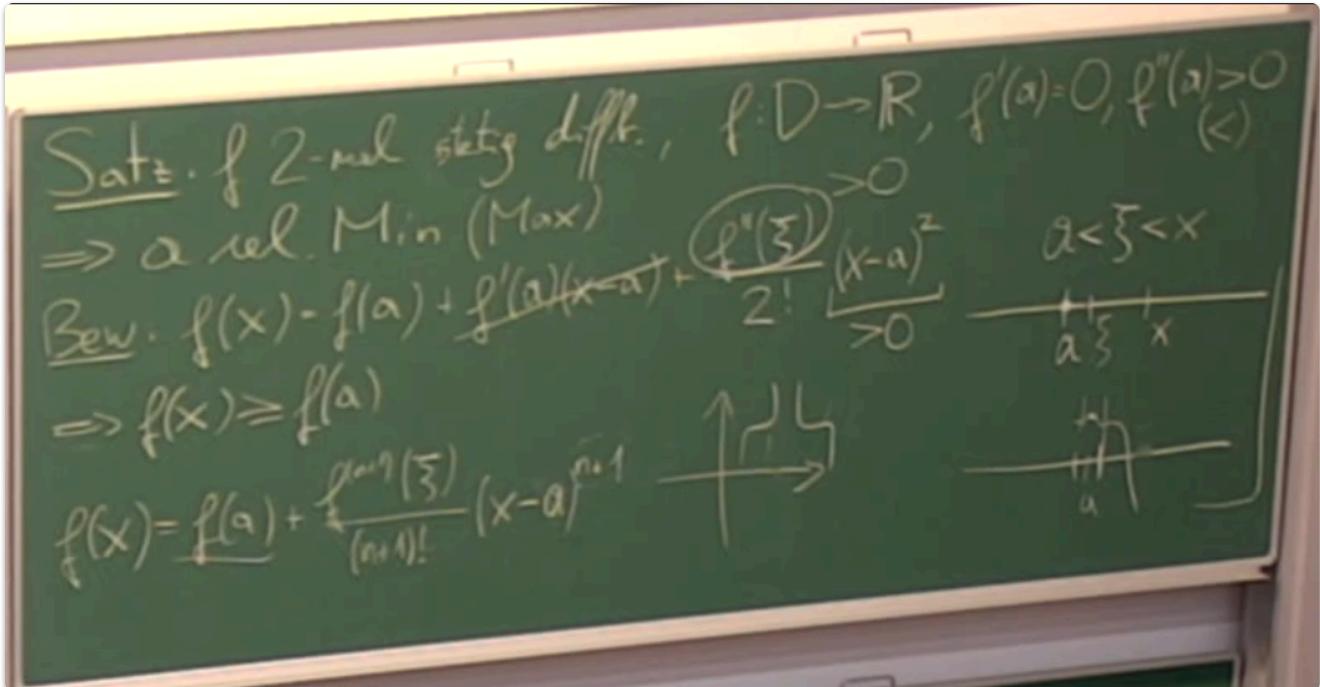
Beweis. Sei  $f''(x_0) < 0$ . Ein relatives Maximum liegt vor, wenn für  $x$  in einer hinreichend kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  von  $x_0$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$ . Wir approximieren  $f(x)$  in  $U_\varepsilon(x_0)$  mit Hilfe des Satzes von Taylor. Da  $f''(x_0) < 0$  und  $f''$  stetig ist, folgt aus Satz

4.87, dass  $\varepsilon$  so klein gewählt werden kann, dass  $f''(\xi) < 0$  für alle  $\xi \in U_\varepsilon(x_0)$  gültig ist.

Für  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  und  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  folgt daraus

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2}_{<0} \geq f(x_0)$$

wie behauptet.



## 4. Die zweite Ableitung

Wie die erste Ableitung hat auch die 2. Ableitung eine geometrische Interpretation. Sie ist das Maß für die Krümmung des Funktionsgraphen.

### ⌚ Definition 5.28 konvex/konkav

Mathematik für Informatik, p.216

Definition 5.28 Eine Funktion  $f$  heißt auf einem Intervall  $I$  **konvex**, wenn für alle  $x, y \in I$  und alle  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  gilt:  $f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ . Gilt sogar  $f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ , so heißt  $f$  strikt konvex. Falls  $f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$  (bzw. die strikte Ungleichung) für  $0 < \lambda < 1$  gilt, so nennt man  $f$  **konkav** (bzw. strikt konkav).

Eine Funktion ist konvex, wenn ihr Graph bei Betrachtung von unten konvex aussieht.

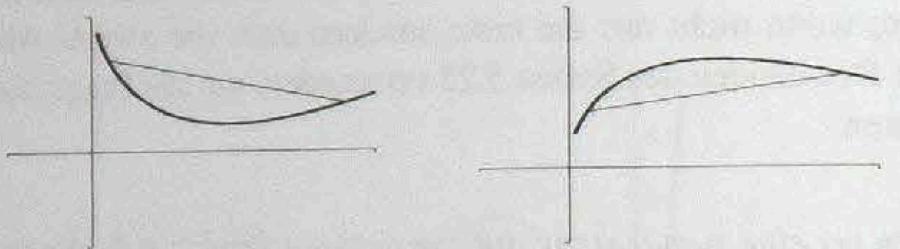


Abbildung 5.8 Konvexe (links) und konkave Funktion (rechts)

### ⓘ Satz 5.29

Mathematik für Informatik, p.216

Sei  $f$  auf dem Intervall  $I$  stetig und im Inneren  $\overset{\circ}{I}$  differenzierbar. Dann ist  $f$  genau dann konvex (bzw. konkav) auf  $I$ , wenn  $f'$  auf  $\overset{\circ}{I}$  monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Strikte Konvexität (bzw. Konkavität) gilt genau dann, wenn  $f'$  streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Beweis. Da  $f$  genau dann konkav ist, wenn  $-f$  konvex ist, genügt es, den Satz hinsichtlich der Konvexität von  $f$  zu zeigen. Nehmen wir zunächst an, dass  $f'$  monoton wachsend sei. Seien  $x, y \in I$  mit  $x < y, 0 < \lambda < 1$  und  $z = x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$ . Wir müssen zeigen, dass  $f(z) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ . Diese Ungleichung lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(z) \\ \iff (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) &\leq \lambda(f(y) - f(z)). \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren  $\xi$  und  $\eta$  mit  $f(z) - f(x) = (z - x)f'(\xi)$  und  $f(y) - f(z) = (y - z)f'(\eta)$ , wobei  $x < \xi < z < \eta < y$ . Damit ist (5.7) äquivalent zu

$(1 - \lambda)(z - x)f'(\xi) \leq \lambda(y - z)f'(\eta)$ . Es gilt nun

$$(1 - \lambda)(z - x) = (1 - \lambda)\lambda(y - x) = \lambda(y - z)$$

und überdies wegen  $\xi < \eta$  und der Monotonie von  $f'$  auch  $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ . Damit ist die Konvexität von  $f$  nachgewiesen. Im Fall  $f'(\xi) < f'(\eta)$  folgt unmittelbar die strikte Konvexität.

Sei umgekehrt  $f$  konvex und  $x, y, z, \lambda$  wie oben. Einerseits gilt

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)}$$

andererseits aufgrund der Konvexität von  $f$

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Dies impliziert  $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ . Indem man nun den Fall  $\lambda \rightarrow 1$  betrachtet, gewinnt man in analoger Weise die Abschätzung  $f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  und damit  $f'(x) \leq f'(y)$ . Dass strikte Konvexität die strenge Monotonie von  $f'$  zur Folge hat, ist nun offensichtlich.

vo:

- [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differentialrechnung/attachments/Pasted image 20250414120606.png](#)
- [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differentialrechnung/attachments/Pasted image 20250414120725.png](#)
- [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differentialrechnung/attachments/Pasted image 20250414120737.png](#)
- [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differentialrechnung/attachments/Pasted image 20250414120744.png](#)

# 5. Regel von de l' Hospital

## Regel von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital wird immer dann angewandt, wenn bei einer Grenzwertberechnung die unbestimmten Ausdrücke wie  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  auftreten. Wichtig dabei ist, dass  $f, g$  im Intervall  $(a, b)$  stetig differenzierbar sind und es gilt:  $x_0 \in [a, b]: f(x_0) = g(x_0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ bzw. } \infty$$

In diesem Fall können wir beide Funktionen einzeln ableiten und den Grenzwert mit der Ableitung berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Grund, wieso wir das dürfen, liegt im allgemeinen Mittelwertsatz.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mathematik für Informatik, p.219

## ⓘ Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Seien die Funktionen  $f$  und  $g$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar im Inneren  $(a, b)$ .

Weiters sei  $x_0 \in [a, b]$  und gelte  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Ferner sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert (bzw. der einseitige Grenzwert, falls  $x_0 = a$  oder  $x_0 = b$ ). Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis. Die Aussage folgt fast unmittelbar aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz. Es gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit  $x_0 < \xi < x$  (bzw.  $x < \xi < x_0$ ). Setzen wir  $\xi = \xi(x)$ , dann folgt aus  $x \rightarrow x_0$  auch  $\xi \rightarrow x_0$ . Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und das entspricht genau der Behauptung.

Bemerkung: Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Regel von de l'Hospital auch in noch allgemeineren Situationen gültig ist. Weiters gelten analoge Aussagen zu Satz 5.35 für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  und für  $x_0 = \pm\infty$ .

### ☰ Beispiel 5.36 (Anwendung der Regel von de l'Hospital)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  : Hier erhalten wir zunächst die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$ . Daher ist (5.8) anwendbar. Differentiation von Zähler und Nenner führt auf

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$  : Hier kann die Regel von de l'Hospital zweimal hintereinander angewendet werden. Wir erhalten  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$  : Hier erhalten wir die unbestimmte Form  $\frac{\infty}{\infty}$ . Eine hinreichend häufige Anwendung von (5.8) liefert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!x^0}{e^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion wächst also (für  $x \rightarrow \infty$ ) stärker als jede Potenz von  $x$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$  mit  $\alpha > 0$  : Anwendung von (5.8) ergibt

Beweis folgt aus [sem\\_2/Analysis/vo\\_md\\_zsmf/5. Differenzialrechnung/5.2 Satz von Taylor > Mittelwertsatz](#)

**VO:**

## 5) Regel v. de l'Hospital

Satz:  $f, g$  diff. bei  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$        $f'(\overline{x}) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$

Bsp: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$        $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 1}{e^x} = 0 \Rightarrow x^n = o(e^x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$        $\ln x = o(x^\alpha)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$        $f: x \rightarrow \infty$   
 $x^\alpha = o(\frac{1}{\ln x})$        $f: x \rightarrow 0$        $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{(x-1) \cdot \ln \ln x}$   
 $1^\infty, 0^\infty$        $f(x)g(x) = e^{\ln f(x) + \ln g(x)}$        $|a \cdot b = \frac{a}{b}|$

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable