Analysis Formelsammlung

Vorwort

Diese Formelsammlung enthält den Stoff, der in der Analysis Vorlesung der TU Wien im Sommersemester 2025 vorgetragen wurde, der auch in "Mathematik für Informatik - Vierte erweiterte Auflage" zu finden ist. Die Struktur dieser Formelsammlung basiert demnach auch dem des Buchs.

> ⚠ **Hinweis**
>
> Derzeitig befindet sich in dieser Formelsammlung nur Stoff, der für den 2. Analysis Test relevant ist. Weitere Kapitel folgen demnächst! (Rechtschreib- und Satzzeichenfehler bzw. Inkonsistenzen in der Formatierung werden noch ausgebessert).
>
> Falls sich irgendwo Fehler befinden oder es Verbesserungsvorschläge gibt bitte an @aldinapoli auf Discord wenden.

Legende

> **Definitionen**

> **Sätze/Rechenregeln**

> **Verweis auf Definition von anderen Kapiteln und sonstige Hinweise**

> ⚠ **Hinweis auf Einschränkung von Sätzen und Definitionen**

> **Beispiele**

Inhaltsverzeichnis

5.2 Taylor'sche Formel und der Mittelwertsatz

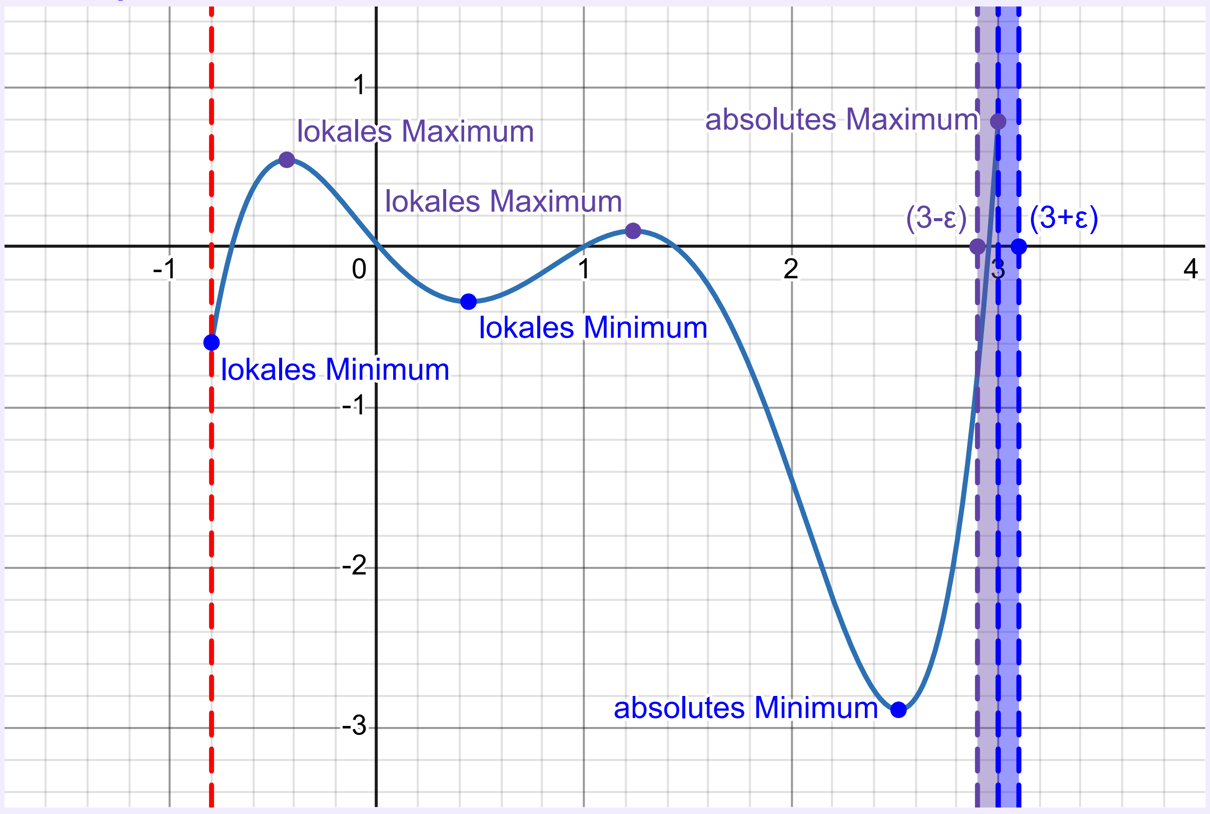
1. Der Mittelwertsatz

> **Extremstellen**
>
> Gegeben sei eine Funktion $f: D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
>
> > a $\in$ D heißt **relatives/lokales Maximum**, wenn gilt:
> >
> > > $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in U_\epsilon(a) \cap D : f(x) \leq f(a)$
> > > *Es existiert eine ϵ-Umgebung, in der a der größte Wert ist*
> >
> > a $\in$ D heißt **absolutes Maximum**, wenn gilt:
> >
> > > $\forall x \in D : f(x) \leq f(a)$
> > > *Hier ist die ϵ-Umgebung, der ganze Definitionsbereich*
>
> *analog gilt diese Definition auch für relative und absolute Minima*

> **Definitionsräume**
>
> Gegeben sei eine Funktion $f: D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
>
> > $\mathring{D}$ heißt **das innere von D**, für das gilt:
> >
> > > $\mathring{D} = \{x \in D | \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq D\}$
> > > *Für jeden **inneren Punkt** in $\mathring{D}$ gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der alle Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
> >
> > $\mathcal{D}D$ heißt **Rand von D**, für das gilt:
> >
> > > $\mathcal{D}D = \{x \in D | \forall \epsilon : U_\epsilon(x) \cup D = \varnothing \wedge U_\epsilon(x) \cup D \neq \varnothing\}$
> > > *Für jeden **Randpunkt** in $\mathcal{D}D$ gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der nur einige (aber nicht aller) Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
> >
> > $\overline{D}$ heißt **Abschluss von D**, für das gilt:
> >
> > > $\overline{D} = D \cup \mathcal{D}D = \mathring{D} \cup \mathcal{D}D$
> >
> > Des Weiteren gilt:
> >
> > > D heißt **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow D = \overline{D}$
> > > D heißt **offen** $:\Longleftrightarrow D = \mathring{D}$

> **Erinnerung:**
>
> Die [ϵ-Umgebung (4.1.1)] von a ist definiert als $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \, |x - a| < \epsilon\}$

Beispiel zu Extremstellen und Definitionsräumen



Betrachtet man den Randpunkt 3 $\in \mathcal{D}D$, sieht man, dass bei jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung der rechte Rand außerhalb des Definitionsraums ist, während die linke Hälfte innerhalb davon ist.

Satz 5.12

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ und eine Extremstelle $a \in \mathring{D}$, dann gilt:

> $f'(a) = 0$

Satz 5.13

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
f ist differenzierbar, wenn f auf folgende Weise linear approximierbar ist:

> $f(x) - f(a) = f'(x)(x - a) + R(x)$ wobei $R(x) = o(x - a)$

Hinweis

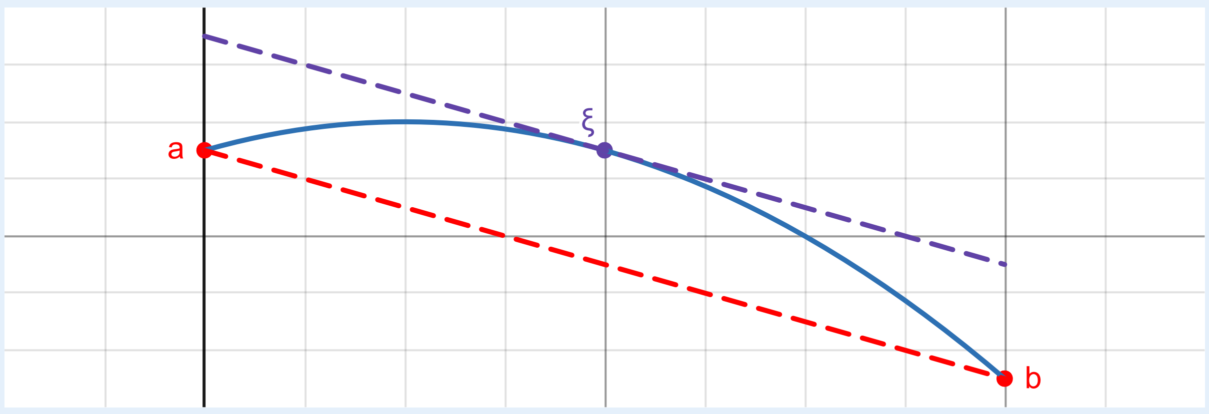
$R(x)$ ist durch die Landau Notation (4.3) auf die obere Schranke $\left|\frac{R(x)}{x - a}\right| = 0$ eingeschränkt.

Satz 5.14 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, für die folgendes gilt:

> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig und differenzierbar

Dann gilt:

> $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b - f(a))}{b - a}$
>
> 
>

Satz 5.15 (Satz von Rolle)

> Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, für die folgendes gilt:
> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig
> Es ist im Intervall (a, b) differenzierbar
> $f(a) = f(b)$

Dann gilt:

> $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Satz 5.16

> Gegeben seien die Funktionen f und g, für die gilt:
> f und g sind im Intervall D stetig
> f und g sind im Intervall $\mathring{D}$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x))$

Dann gilt:

> $f'(x) - g'(x)$ ist auf D konstant

---

2. Taylorreihen

Satz

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, dann lässt sich $f(x)$ wie folgt approximieren:

> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$

Dabei lässt sich a_k wie folgt bestimmen:

> $f(a) = a_0$
> $f'(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k k (x-a)^{k-1} = a_1 = 1! a_1$
> $f''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k-1)(x-a)^{k-2} = 2a_2 = 2! a_2$
> $f'''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k-1)(k-2)(x-a)^{k-3} = 6a_3 = 3! a_3$
> ...
> $\implies a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Satz 5.17

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n (x-a)^n$ und ein Konvergenzradius R, dann gilt:

> $\forall x : |x-a| < R : f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x-a)^{n-1}$

Erinnerung

Der Konvergenzradius (4.2.3) gibt an, für welches x eine gegebene Potenzreihe konvergiert.

Taylorreihe

Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ heißt Taylorreihe von f an der Anschlussstelle a

Taylorsche Formel der Ordnung n

Gegeben sei eine n-mal stetig differenzierbare und (n+1)-mal differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + R_n$

Satz von Taylor

Gegeben sei eine Funktion f, n-mal stetig differenzierbare f auf dem Intervall $[a, x]$ und (n+1)-mal differenzierbar auf (a, x) ist, dann gilt:

> $\exists \xi : a < \xi < x : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Die Taylorreihe stellt eine gegebene Funktion f genau dann dar, wenn gilt:

> f ist unendlich oft differenzierbar
> $lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \to 0$

Ergänzung

Das Restglied lässt sich unter anderem nach der Formel von Langrange wie folgt bestimmen:

> $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Erinnerung/Tip

Siehe Definition von Konvergenzradius
Der Satz von Taylor basiert auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (5.2.1)

Beispiele:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt:

> Die Taylorreihe der Funktion $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

---

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt für $-1 < x \leq 1$:

> Die Taylorreihe der Funktion $\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$
> Dabei lässt sich R_n wie folgt abschätzen: $|R_n| < |x|^{n+1} \frac{1}{n+1}$

---

c) Gegeben sei eine Potenz $(1+x)^\alpha$ wobei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann gilt für $|x| < 1$:

> $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^\alpha$
>
> wobei $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$

---

d) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0. \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

> Taylorreihe der Funktion: $\sum_{n\geq 0} 0 \frac{x^n}{n!} \neq f(x)$

Nicht jede Funktion lässt sich also durch die Taylorreihe darstellen

Tip

Für Funktionen wie $e^{-\frac{1}{x^2}}$, die sich in der Stelle 0 nicht mithilfe von Ableitungsregeln ableiten lassen, kann man diese mithilfe von Rückbesinnung auf die Definition der Ableitung (5.1 Definitionen) differenzieren.

---

3. Monotonie und die erste Ableitung

Satz 5.23

Gegeben sei eine auf dem Intervall I monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\iff \forall x \in I : f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$

Gegeben sei eine auf dem Intervall I streng monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\iff \forall x \in I : f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0)$

Satz 5.25

Gegeben sei eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dann gilt für ein beliebigen Punkt $a \in D$:

> $f'(a) = 0$
> $f''(a) > 0 \; (f''(a) < 0)$
> $\implies$ a ist ein relatives Minimum (Maximum)

4. Die zweite Ableitung

Konvex

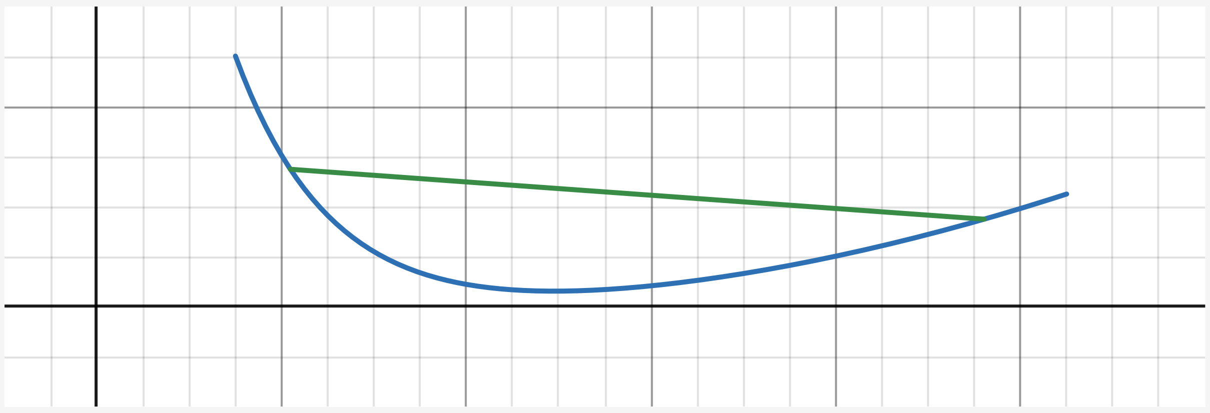
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konvex**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Veranschaulichung einer konvexen Funktion:



Konkav

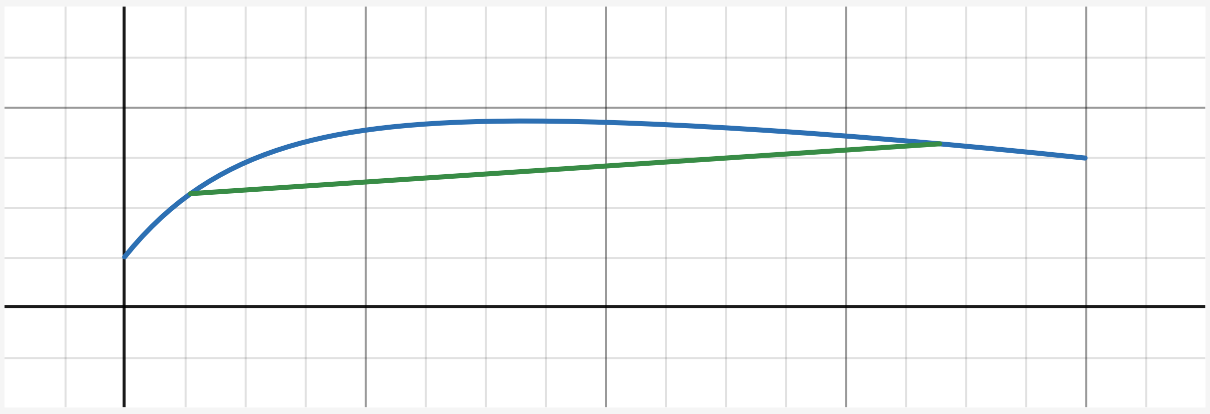
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konkav**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x + \lambda(y - x)) > f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

Veranschaulichung einer konkaven Funktion:



Satz 5.29 und 5.30

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\iff$ f' ist monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\iff \forall x \in I: f'' \geq 0$ $(f'' \leq 0)$

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I streng konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\iff$ f' ist auf I streng monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\iff \forall x \in I: f'' > 0$ $(f'' < 0)$

5. Regel von de l'Hospital

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Gegeben seien zwei an dem Punkt a differenzierbare Funktionen f, g, für die gilt:

> $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Dann lassen sich **(nur)** unbestimmte Formen der Grenzwerte wie folgt bestimmen:

> $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
>
> *Diese Regel lässt sich auch rekursiv anwenden, solange die Form des Grenzwerts weiterhin unbestimmt ist, siehe Beispiel b*

Erinnerung:

Einige Formen der Grenzwerte lassen sich nicht bestimmen, diese nennt man unbestimmte Formen und für diese muss man sich die Folgen selber betrachten.

Beispiel für eine unbestimmte Form: $\frac{0}{0}$
[Weitere unbestimmte Formen (4.1.3)]

Beispiele

a) Gegeben sei die Folge $\frac{\sin(x)}{x}$

> $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$

---

b) Gegeben sei die Folge $\frac{x^n}{e^x}$

> $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \frac{n!1}{e^x} = 0$

---

c) Gegeben sei die Folge $\frac{\log(x)}{x^\alpha}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$

> $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

---

d) Gegeben sei die Folge $x^\alpha \log(x)$

> $\lim_{x \to 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$

Tip

Für andere unbestimmte Formen wie zum Beispiel 0^0 lässt sich die Regel von de l'Hospital anwenden, in dem man die unbestimmte Form in einen Quotienten umformt, auf den man dann diese Regel anwenden kann.

5.3 Das unbestimmte Integral

1. Integration als Umkehrung der Differentiation

Definition vom Integral

Gegeben sei eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ für die gilt:

> $F(x)$ heißt **Integral** (oder auch **Stammfunktion**) von $f : \iff F'(x) = f(x)$
> Man notiert die Stammfunktion wie folgt: $F(x) + c = \int f(x)dx$, wobei man $c \in \mathbb{R}$ **Integrationskonstante** nennt

Satz 5.39

Gegeben seien die Funktion $f : R \mapsto \mathbb{R}$ mit der Stammfunktion $F(x)$ für die gilt:

> $\forall c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c \iff G'(x) = f(x)$

---

2. Technik des Integrierens

Satz 5.41 (Integrationsregeln)

- i) Aus der Linearität der Integralfunktion folgt:

> $$\int f((x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
> Für $K \in \mathbb{R} : \int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$

- ii) Partielle Integration

> $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

- iii) Substitutionsregel

> $$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$
>
> **Tip**
> Angemerkt sei das Leibniz Kalkül, was wie folgt geht:
> $$\int f(g(x))g'(x)dx$$
> Substitution: $g(x) = u \implies \frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx$
>
> Einsetzen der Substitution: $\int f(u)du = F(u)$
> Rücksubstitution: $F(u) = F(g(x))$

- iii) Partialbruchzerlegung

> Um das Integral einer rationalen Funktion zu bestimmen, kann man die Partialbruchzerlegung anwenden.
> $$\int \frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_i} \frac{A_{i,\mu}}{(x - \lambda_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{l_i} \frac{B_{j,v}x + C_{j,v}}{Q_j(x)^v}$$
>
> **Tip**
> Der Ansatz der Partialbruchzerlegung basiert auf die Überlegung, dass sich laut dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.12) jedes Polynom in $\mathbb{C}$ als Produkt von Linearfaktoren darstellen lassen kann.

Appendix

Grundintegralle

- Potenzen:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ wobei } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Dabei muss man x aber für entsprechende α einschränken:

> - Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$: $x \neq 0$
> - Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $x \nleq 0$

- Brüche:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + c & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

> **Generell schreibt man auch:**
>
> $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

- Exponenten:

$$\int e^x dx = d^x + c$$

- Winkelfunktionen

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

5.4 Das bestimmte Integral

1. Die Fläche einer Kurve

Definition

Für eine beschränkte Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ mit $I = [a, b]$ gilt:

> Die **Zerlegung** Z ist definiert als $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ für die gilt
>
> > $x_0 = a < x_2 < x_1 < x_n = b$
> > Die **Feinheit** $\mathfrak{F}(Z)$ von Z ist definiert als $\mathfrak{F}(Z) = \underbrace{\max}_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$
>
> Die **Zwischenstellen** $\underline{\xi}$ ist definiert als $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ für die gilt
>
> > $\forall i : x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$
>
> Die Fläche unter der Funktion lässt sich mit der **Riemann'sche Zwischensumme** S_n definieren $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

Veranschaulichung:

Eine Folge von Zerlegungen mit einer zugehörigen Menge an Zwischenstellen $(Z_n, \xi_n)_{n \geq_0}$ heißt **ausgezeichnete Zerlegungsfolge** (abgekürzt **aZf**) : $\iff$ $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{F}(Z) = 0$

Für eine beschränkte Folge $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> f ist Integrierbar : $\iff$ $\exists K \in \mathbb{R} : \forall (Z_n, \xi_n)_{n \geq 0} : \lim_{n \to \infty} S_n = K$
> K heißt **bestimmtes Integral** und ist definiert als $K = \int_a^b f(x)dx$
> Des Weiteren gilt für das unbestimmte Integral:
>
> > $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ falls $a > b$
> > $\int_a^a f(x)dx = 0$
> > a und b heißen **Integrationsgrenzen**
> > x heißt **Integriervariable**
>
> Des Weiteren wird die Menge $I([a, b])$ definiert als $I([a, b]) = \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}$

Für eine Zerlegung Z gilt:

> $O_z(f)$ heißt **Obersumme** und ist definiert als $O_z(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
> $U_z(f)$ heißt **Untersumme** und ist definiert als $U_z(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Veranschaulichung

Satz 5.47 (Riemann'sche Integrabilitätskriterium)

Für eine beschränke Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> f ist integrierbar : $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists Z : O_z(f) - U_z(f) < \varepsilon$

Stückweise Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig : $\iff$ ((f ist auf $[a, b]$ beschränkt) $\wedge$ (f ist auf fast allen Stellen stetig) $\wedge$ (an allen unstetigen Stellen existiert beide einseitige Grenzen))

Satz 5.48, 5.50, 5.51

Für eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> f ist monoton $: \iff$ f ist integrierbar
>
> ---
>
> f ist stückweise stetig $: \iff$ f ist integrierbar
>
> ---
>
> f ist integrierbar $: \iff$ $|f|$ ist integrierbar

Satz 5.52

Für die integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

- i) Die Funktion $F : I([a, b]) \mapsto \mathbb{R}, f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear
- ii) Für $a \leq b \leq c$ gilt:

  > $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- iii) $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- iv) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

---

2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 5.53 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Satz 5.55 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

> Jede beliebige Stammfunktion $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ erfüllt: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Satz 5.56 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

Für stetige Funktionen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \mapsto [a, b]$ gilt:

> $(g(c) = a \wedge g(c) = b \wedge g \text{ ist differenzierbar}) \implies \int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx$

5.5 Das uneigentliche Integral

Das uneigentliche Integral

Uneigentliche Integrale 1. und 2. Art

Sei f eine Funktion, die auf $[a, b)$ (oder $(a, b]$) definiert, dann gilt:

> Wenn f auf dem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b)$ integrierbar und $\lim_{x \to b-} = \pm\infty$ (oder $\lim_{x \to +a} f(x) = \pm\infty$) ist, dann heißt das Integral
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^b f(x)dx$$
>
> **uneigentliches Integral 1. Art**.

> Wenn f auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ (oder $(-\infty, b]$) integrierbar ist, wobei $a \in \mathbb{R}$ fest ist, nennt man das Integral
>
> $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$
>
> **uneigentliches Integral 2. Art**.

Satz 5.61

Gegen seien zwei auf $[0, \infty)$ stückweise stetige Funktionen f, g für die gilt:

> $\forall x \geq 0 : |f(x)| \leq |g(x)|$
> $\int_0^\infty g(x)dx$ ist konvergent

Dann gilt

> $\int_0^\infty f(x)dx$ ist konvergent

Satz 5.62 (Integralkriterium)

Gegeben sei eine nichtnegative, monoton fallende Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $$\int_1^\infty f(x)dx \text{ ist konvergent} \quad \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ ist konvergent}$$
>
> **Tip**
>
> Dieser Satz leitet sich aus der Abschätzung:
>
> $$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

6.1 Funktionen in mehreren Variablen

1. Beispiele und Darstellungen

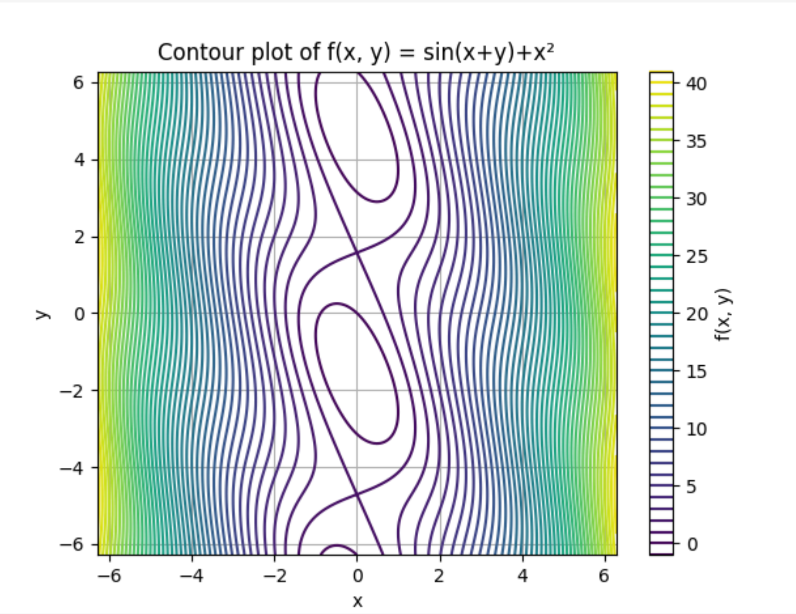
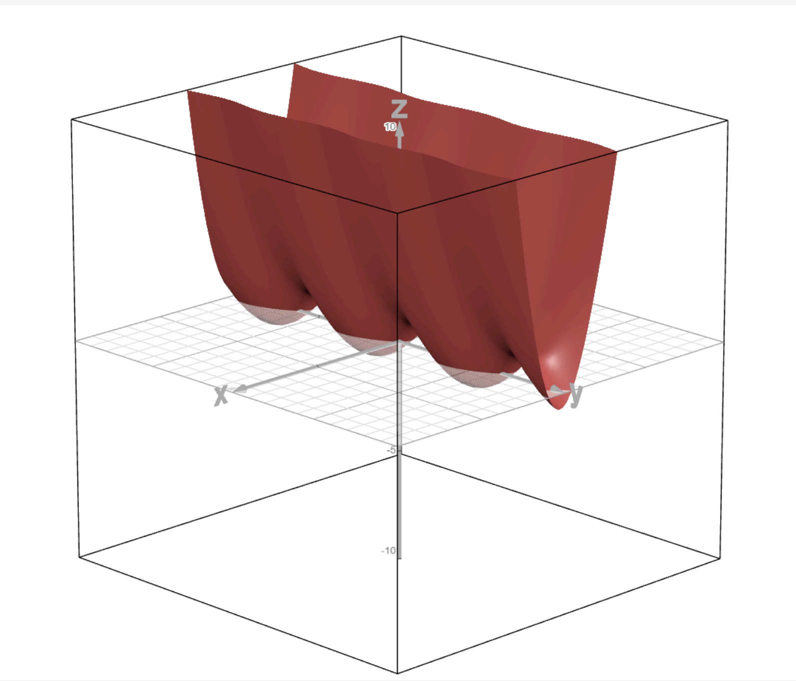
Definition

> Eine multivariable Funktion bildet von $\mathbb{R}^{\mathbb{m}\in\mathbb{N}>\mathbb{1}}$ auf $\mathbb{R}$ ab. Solche Funktionen bezeichnet man auch als **Vektorwertige Funktionen**
>
> *Zur besseren Veranschaulichung wird für den Rest Formelsammlung $n = 2$ vorausgesetzt.*

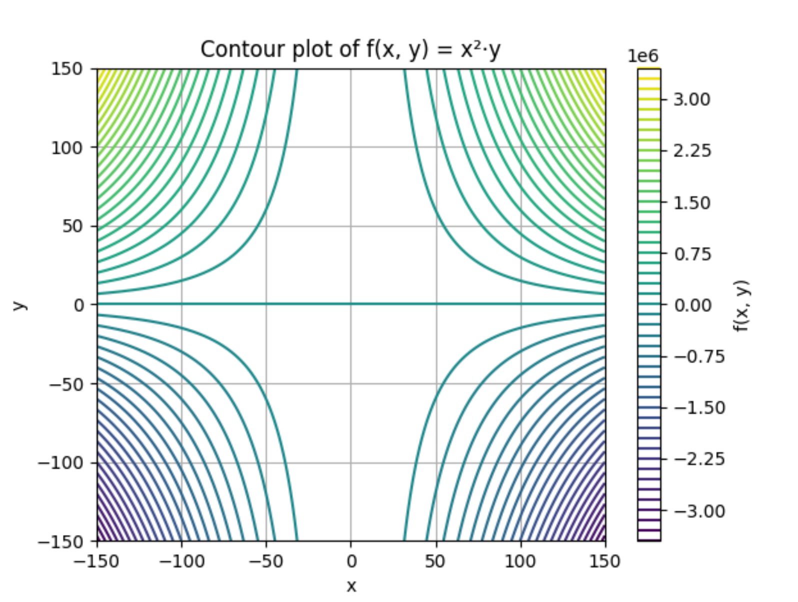
> Eine multivariable Funktion $f(\vec{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{m}>\mathbb{1}})$ heißt **quadratische Form**, wenn die Funktion in der Bauart $f(x) = \vec{x}^T A \vec{x}$ ist, wobei A eine symmetrische n mal n Matrix ist. Quadratische Funktionen, bei der für alle Eingabewerte $\vec{x} \neq 0$ $f(x) > 0$ (oder < 0) gilt heißen **positiv** (oder **negativ**) **definit**.

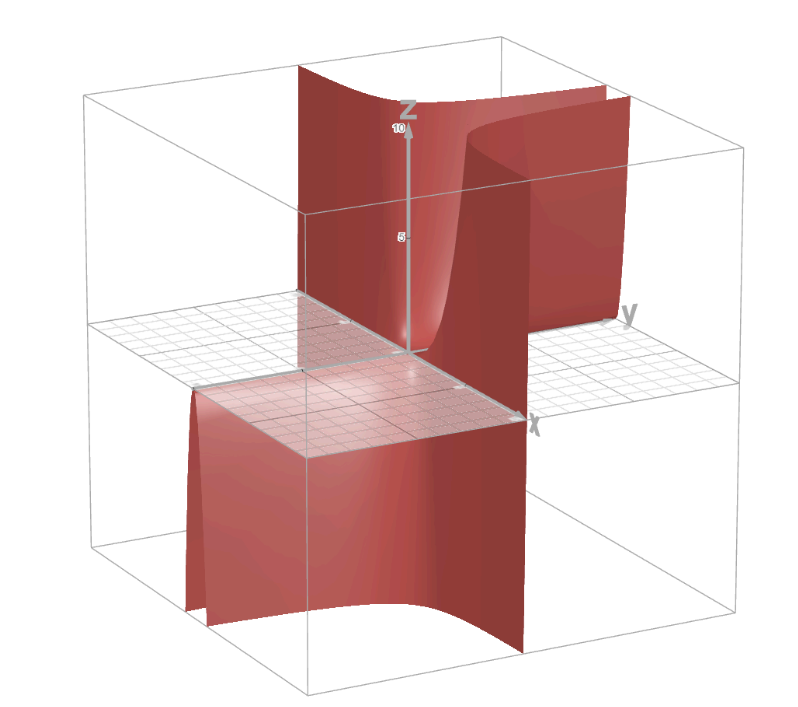
> Die **Höhenlinie** (oder auch **Niveaulinie**) eine multivariablen Funktion kann man sich für $n = 2$ wie das Aufeinanderstapeln der Funktion geschnitten an jeweiligen Höhen. Für feste Höhen z kann man sich diese Höhenlinie berechnen, in dem man die Gleichung $f(x, y) = z$ nach y umformt.

Beispiele zur Veranschaulichung:

> Für die Funktion $f(x, y) = \sin(x + y) + x^2$
>
> 
>
>
> 
>

Für die Funktion $f(x, y) = x^2 y$





2. Grenzwert und Stetigkeit

ε-Umgebung

Die ε-Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ entspricht folgender Menge:

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \varepsilon|\}$$

Grenzwert

Der Grenzwert $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$ einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D : 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta \implies |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$$

Stetigkeit

Eine Funktion $f(\vec{x})$ heißt am Punkt $\vec{x}_0$ stetig $:\iff \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$
Des Weiteren heißt die Funktion auf D stetig $:\iff \forall \vec{x} \in D : f(\vec{x})$ ist am Punkt $\vec{x}$ stetig

Satz 6.5

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle $\vec{x} \in D$ stetig :
$\iff \forall (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \implies \lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$

Mengeneigenschaften

Eine Menge $D \in \mathbb{R}^n$ heißt:

- **offen** : $\iff$

$$\vec{x} \in D \implies \exists U_{(\varepsilon)}(\vec{x}) \subseteq D$$

- **abgeschlossen** : $\iff$

$$\forall (\vec{x}_n \in D)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \to \infty} (\vec{x}_n) = c \neq \pm\infty \implies c \in D$$

- **kompakt** : $\iff$ D ist beschränkt und abgeschlossen

> **Erinnerung**
> Eine beschränkte (4.1.2) Menge ist durch ein Supremum nach oben und durch ein Infimum nach unten eingeschränkt.

---

3. Partielle Ableitung

Partielle Ableitung

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt:

- nach x differenzierbar : $\iff$

$$\exists f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, x_0)}{x - x_0}$$

- nach y differenzierbar : $\iff$

$$\exists f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

> **Tip**
>
> Bei der Ableitung nach einer jeweiligen Ableitung behandelt man die restlichen Variablen wie Konstante. Die Ableitung funktioniert demnach genau wie eine gewöhnliche Ableitung (5.1).

Wie oft nach Variablen abgeleitet wird bestimmt die **Ordnung der Ableitung**.

- Bei einer Ableitung 1. Ordnung wird einmal nach einer Variable abgeleitet.

- Bei einer Ableitung 2. Ordnung wird die Ableitung 1. Ordnung nach einer Variable abgeleitet, dabei kann man auch zweimal nach der gleichen Variable ableiten. Solche Ableitungen werden auch iterierende Ableitungen genannt. Beispiel:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_y(f_x(x_0, y_0))$$

Für dieses Beispiel wurde die Funktion zuerst nach x und dann nach y abgeleitet.

Satz von Schwarz

Gegeben sei eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann sind die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m von der Reihnfolge der Ableitungen nach den Variablen unabhängig.
So gilt bspw. für eine Funktion f, die 2-mal stetig differenzierbar ist, dass $f_{xy} = f_{yx}$ ist.

Appendix

Python Code zum Plotten der Höhenlinie:

```
'''
#for the code to work in obsidian with CodeEmitter Plugin
import micropip
await micropip.install('numpy')
await micropip.install('matplotlib')
'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#input range, may be adjusted to better plot the function
x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 300)
y = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 300)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

#function (e. g.: f(x,y)=sin(x+y)+x^2)
Z = np.sin(X + Y) + X ** 2

plt.contour(X, Y, Z, levels=50)
plt.title("Contour plot of f(x, y) = sin(x+y)+x²")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.colorbar(label="f(x, y)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Seite zum Visualisierung multivariabler Funktionen: https://www.desmos.com/3d

6.2 Differentialrechnung in mehreren Variablen

1. Die totale Ableitung

Totale Ableitung

Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt am Punkt $\vec{x}_0 \in D$ total differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung f' existiert, für die gilt:

$$f'(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x})$$

wobei für $R(\vec{x})$ gilt:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{||R(\vec{x})||}{||\vec{x} - \vec{x}_0||} = 0$$

f' wird auch als Ableitung von der Funktion f im Punkt $\vec{x}$ genannt. Oft wird die zur Ableitung dazugehörenden Matrix **Jacobi-Matrix** (oder auch **Funktionalmatrix**) bezeichnet.

Hinweis

Das Verhalten der iterierenden Ableitungen einer Funktion f kann im allgemeinen keine Aussage über das Verhalten der totalen Ableitung treffen!

Gradient

Für eine total differenzierbaren Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist, gilt:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \dots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

heißt **Gradient** von f.

Satz 6.15

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion und D eine offene Menge, dann gilt:

> Die Ableitungsmatrix von f = $\operatorname{grad} f$
> Es gilt also:
>
> $$f(\vec{x}) = f\vec{x}_0 + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x})$$

Satz 6.17

Eine total differenzierbare Funktion ist stetig.

2. Ableitungsregeln

Satz 6.19 (Produktregel (+ Summenregel))

Seien f, g zwei total differenzierbare Funktionen mit offener Definitionsmenge, dann gilt:

> $$\text{grad}h(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) \cdot \text{grad}g(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0) \cdot \text{grad}f(\vec{x}_0)$$
>
> ---
>
> $$(f+g)' = f' + g'$$

Satz 6.20 (Kettenregel)

Gegeben sei die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der offenen Menge D. Des Weiteren sei $g(\vec{x}) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)) \in D$ und $F(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$, dann gilt:

$$F'(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)) \cdot g_i'(x)$$

Satz 6.22 (Hauptsatz über implizite Funktionen)

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und D offen. Dabei soll für F gelten:

> - $\exists (x_0, y_0) \in D : F(x_0, y_0) = 0 \land F(x_0, y_0)' \neq 0$

Dann gilt:

$$\exists U(x_0, y_0) : F(x, y) = 0 \text{ hat eine eindeutig bestimme Lösung } f(y) \text{ in } U.$$

Des Weiteren gilt für $y(x)$:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

---

3. Die Richtungsableitung

Richtungsvektor

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und D offen. Des Weiteren sei $\vec{v}^1 = \frac{\vec{v}}{||v||}$. Dabei sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und heißt Richtungsvektor. Dann ist die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\vec{x} \in D$ nach $\vec{v}^1$ wie folgt definiert:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}^1)}{t}$$

Satz 6.25

Falls die wie oben beschrieben Funktion an der Stelle $\vec{x} \in D$ total differenzierbar ist, so gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}^1)}{t} = \text{grad}f(\vec{x}) \cdot \vec{v}^1$$

Satz 6.27

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle $\vec{x} \in D$ total differenzierbare Funktion, D offen, dann gilt:

> - Die Richtung von $\text{grad}f$ die Richtung des größten Anstiegs in f.
> - Die euklidische Länge von $\text{grad}f$ ist der größte Anstieg von f.
> - $\text{grad}f = 0 \implies \forall \vec{x} : \forall \vec{v}^1 : \text{grad}f(\vec{x}) \cdot \vec{v}^1 = 0$

4. Taylorentwicklung

> **Verallgemeinerte Taylorreihe**
>
> ⚠ **Wird noch hoffentlich die Tage ergänzt.**

Satz 6.29 (Satz von Taylor für reellwertige Funktionen in zwei Variablen)

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetige differenzierbare Funktion und D offen. Des Weiteren seien $(x_0, y_0), (x, y) = (x_0 + th, y_0 + tk) \in D$, für die gilt, dass alle Punkte zwischen ihnen ebenfalls in D sind. Dann gibt es ein $\xi \in (0, 1)$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{l=1}^{n} \frac{(hD_x + kD_y)^l f(x_0, y_0)}{l!} + \frac{(hD_x + kD_y)^{n+1} f(x_0 + \xi h, y_0 + \xi h)}{(n+1)!}$$

Ist f unendlich oft stetig differenzierbar, so ist die Taylorreihe von f wie folgt definiert:

$$f(x, y) = f(x_{0,0}) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (hD_x + kD_y)^l f(x_0, y_0)$$