5.3 Das unbestimmte Integral

Einführendes Beispiel

Beispiel 5.37 (Gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

Mathematik für Informatik, p.220

Unter gleichmäßig beschleunigter Bewegung versteht man eine Bewegung mit konstanter, also zeitunabhängiger Beschleunigung, wie etwa den freien Fall im Vakuum. Sei a die Beschleunigung und $v = v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t, dann gilt $v(t) =$ at. Frage: Wie groß ist der zurückgelegte Weg $s = s(t)$ zum Zeitpunkt t. Die Momentangeschwindigkeit lässt sich bekanntlich durch Differentiation des Weges ermitteln: $v(t) = at = \frac{ds}{dt}$. Wir suchen also eine Funktion $s(t)$, deren Ableitung at ist, z.B. $s(t) = \frac{a}{2}t^2$. Aber auch die Funktion $\frac{a}{2}t^2 + 100$ hat die Ableitung at.

1. Integration als Umkehrung der Differentiation

- Integration ist Umkehrung der Differentiation
- Also aus abgeleiteter Funktion f' wieder f gewinnen
- Umkehrproblem bis auf additive Konstante C eindeutig lösbar

Definition 5.38

Mathematik für Informatik, p.221

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Jede Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f und wird mit dem Symbol

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet. Die Funktion f nent man in diesem Zusammenhang den Integrand und x die Integrationsvariable.

Wie man mit der nicht Eindeutigkeit umgeht

Satz 5.39

Mathematik für Informatik, p.221, Tafelbild

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, dann sind alle Stammfunktionen von f von der Gestalt $F(x)+c$ mit einer Konstanten c, d.h., es gilt

$$G(x)=F(x)+c \Longleftrightarrow G'(x)=f(x).$$

Man schreibt daher auch $\int f(x)dx=F(x)+c$. Da das unbestimmte Integral die Umkehrung der Differentiation ist, erhält man aus jeder Differentiationsregel sofort eine Integrationsregel. Insbesondere liefern die Ableitungen der elementaren Funktionen Beispiele für Grundintegrale.

Das heißt, dass jede Funktion vom Schema $F(x)+c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Grundintegrale

In diesem Abschnitt definieren wir einige Grundintegrale, welche man auswendig können sollte...

Beispiel 5.40 (Grundintegrale)

Mathematik für Informatik, p.221, Mathematik für Informatik, p.222, Tafelbild

Sei im Folgenden $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Potenzfunktionen:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

Hier muss der Definitionsbereich entsprechend eingeschränkt werden, falls $\alpha \notin \mathbb{N}$. Für negative ganze Zahlen α muss $x=0$ ausgschlossen werden, für nicht ganzzahlige α zusätzlich noch $x<0$.

(b) Die Funktion x^{-1} : Wir wissen, dass $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Der Logarithmus ist jedoch für $x \leq 0$ nicht definiert. Sei $x<0$. Dann gilt $\ln(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. Zusammenfassend ergibt sich demnach

$$\int \frac{dx}{x}=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_2 & \text{für } x<0\end{cases}$$

Man schreibt dafür meist (etwas unkorrekt)

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

(c) Die Exponentialfunktion: $\int e^x dx=e^x+c$.

(d) Winkel- und Arcusfunktionen:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \qquad \int \cos x dx = \sin x + c,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \text{ für } -1 < x < 1.$$

2. Integrationsregeln -Technik des Integrierens

Satz 5.41 (Integrationsregeln)

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.222

(i) Das Integral ist linear, d.h., es gilt $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ und $\int K f(x) dx = K \int f(x) dx$ für Konstanten K.

(ii) Partielle Integration:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

(iii) Substitutiosnregel: Bezeichne F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x))$$

Beweis

Beweis. (i) folgt direkt aus der Linearität der Differentiation.

Die Regel (ii) lässt sich mit Hilfe von (i) umschreiben in

$$f(x) g(x) = \int \big(f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\big) dx$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung sieht man sofort die Äquivalenz zur Produktregel der Differentiation.

Die Substitutionsregel (5.9) erhält man unmittelbar aus der Kettenregel.

Ergänzung zur Substitutionsregel:

Mathematik für Informatik, p.222

Die Gleichung (5.9) ist die Basis für eine äußerst nützliche Integrationsmethode. Falls g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, dann kann man $g(x)$ in der rechten Seite von (5.9) durch $u = g(x)$ substituieren. Schreibt man weiters $F(u) = \int f(u) du$, dann lautet die Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Die Leibniz'sche Schreibweise ist bei dieser Form der Substitutionsregel besonders zweckmäßig. Es gilt

und daher

$$u = g(x) \Longrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Longrightarrow du = g'(x)dx$$

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)}\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du$$

Beispiele

Beispiel 5.42

Mathematik für Informatik, p.223, Mathematik für Informatik, p.224, Tafelbild 1, Tafelbild 2, Tafelbild 3

(a) $x\cos x$: Lösen mittels partieller Integration führt zum Ziel.

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g'} dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(b) $\ln x$: Auch hier lässt sich die Methode der partiellen Integration erfolgreich anwenden.

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\ln x}_{f} dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c.$$

(c) x^2e^x : Iterierte Anwendung der partiellen Integration führt zur Lösung:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx &= x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{\bar{f}}\underbrace{e^x}_{\bar{g}'}dx \\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + c.\end{aligned}$$

(d) Allgemeine Exponentialfunktionen der Form a^x : Die Substitution $u = x\ln a, du = \ln a dx$ leistet das Gewünschte, nämlich

$$\int a^x dx = \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}\int e^u du = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(e) $\tan x$: Es gilt $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$. Wir substituieren $u = \cos x$ und daher $du = -\sin x dx$. Dies führt zu

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

(f) $\frac{1}{x^2+4}$: Die Funktion erinnert an das Grundintegral $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$. Daher wird die Umformung

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}$$

nahe gelegt. Nun substituieren wir $y = \frac{x}{2}, dy = \frac{dx}{2}$, d.h. $dx = 2dy$. Dann bekommen wir

$$\frac{1}{4} \int \frac{2dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \arctan y + c = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c$$

(g) $\frac{1}{x^2+4x+10}$: Auch das Integral über diese Funktion lässt sich auf das Grundintegral $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$ zurückführen. Der Nenner kann in der Form $x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 + 6$ geschrieben werden. Wir erhalten dann

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{6}+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$$

wobei der letzte Schritt analog zum vorigen Beispiel durchgeführt wurde (mit der Substitution $y = \frac{x+2}{\sqrt{6}}$).

(h) $\frac{1}{ax+b}$: Man substituiert $u = ax + b, dx = \frac{du}{a}$ und erhält

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \ln |u| + c = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c.$$

Weitere Beispiele

☰ Beispiel 5.43

Mathematik für Informatik, p.224, Mathematik für Informatik, p.225, Tafelbild 1, Mathematik für Informatik, p.225,

(a) Gesucht ist $\int f(x)dx$ mit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Der Ansatz gemäß (5.10) lautet (mit vereinfachter Bezeichnung der Koeffizienten)

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Daraus folgt

$$x^2 + 1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2,$$
$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^0 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)x^0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen $A + C = 1, B - 2C = 0$ und $-A + B + C = 1$. Löst man dieses System, so ergibt sich $A = \frac{1}{2}, B = 1$ und $C = \frac{1}{2}$, also

$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)}$$

und in weiterer Folge

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

(b) Wir wollen

$$f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x+2} = \frac{3x^2+2x}{(x^2+2x+2)(x+1)}$$

integrieren. Mit Hilfe des Ansatzes

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

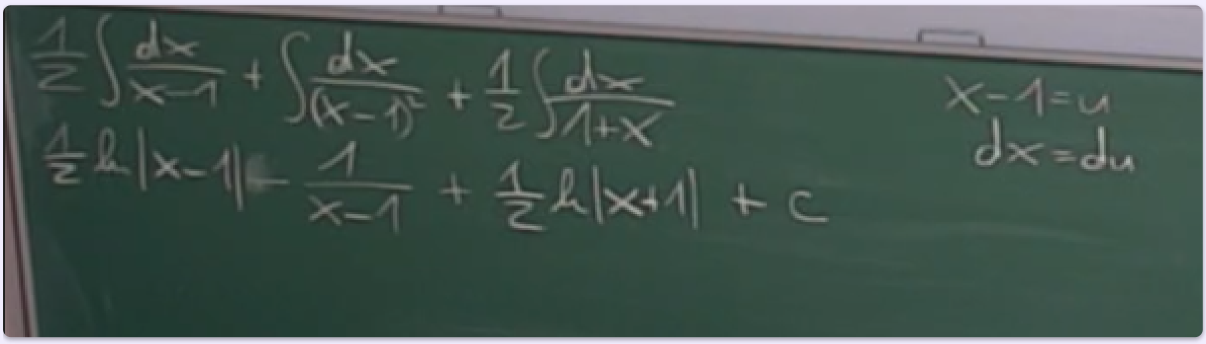
gemäß (5.10) und der Vorgangsweise analog zum vorigen Beispiel erhalten wir

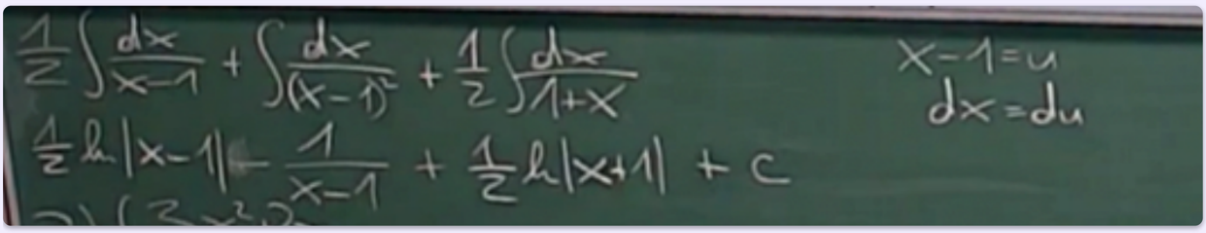
$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2+2x+2}$$

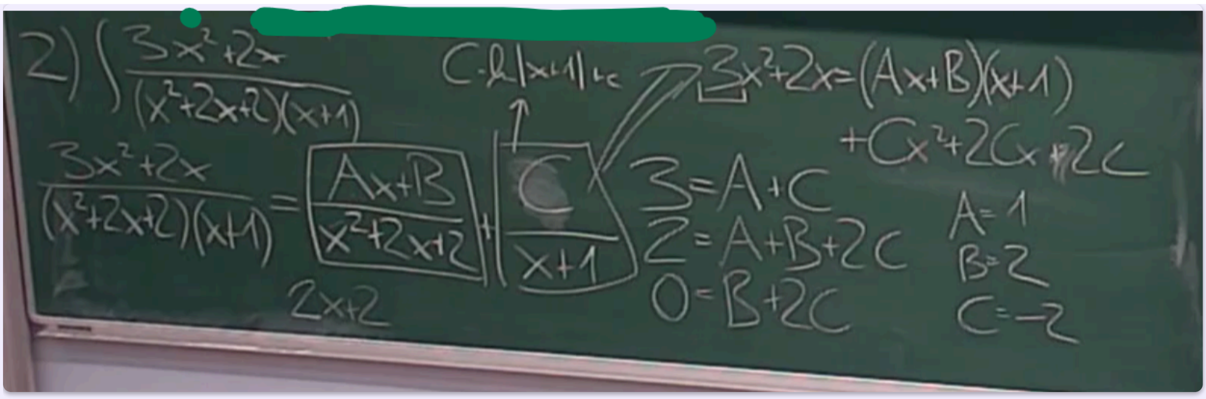
und

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \ln|x+1| + \int \frac{2x-2}{x^2+2x+2}dx \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}dx - 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ &= \ln|x+1| + \ln\left|x^2+2x+2\right| - 4\arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Substitutionen $u = (x+1)^2 + 1$ im ersten Summanden und $u = x+1$ im zweiten Summanden verwendet wurden.






2) ∫ 3x²+2x / (x²+2x+2)(x+1)
C·ln|x+1|+c
3x²+2x=(Ax+B)(x+1)
+Cx²+2Cx+2C
3x²+2x / (x²+2x+2)(x+1) = Ax+B / x²+2x+2 + C / x+1
3=A+C
2=A+B+2C
0=B+2C
A=1
B=2
C=-2
2x+2