4.4 Elementare Funktionen

Link zur Formelsammlung: FS_4.4 Elementare Funktionen

Einfache Eigenschaften

Streng monoton fallend bzw. steigend

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to D$ ist streng monoton fallend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Umgekehrt heißt die Funktion streng monoton steigend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Eine Funktion kann auch nur auf einem Intervall $I \subseteq D$ streng monoton steigend bzw. fallend definiert werden.

Bijektivität und Umkehrfunktion

Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so folgt auch automatisch die Bijektivität und es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt die gleichen Eigenschaften bezüglich der Monotonie.

Potenzen mit reellen Exponenten

Bei Potenzen x^α mit reellen Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ kann α als Grenzwert einer Folge a_n angeschrieben werden.

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Somit übertragen sich alle Rechenregeln auch auf das Rechnen mit reellen Exponenten.

Polynomfunktionen

Beispiel 4.64

Mathematik für Informatik, p.175, Tafelbil

(a) Polynomfunktionen sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, d.h., die Abbildungsvorschrift ist ein Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten. Die Graphen einiger Beispiele finden sich in Abb. 4.2.

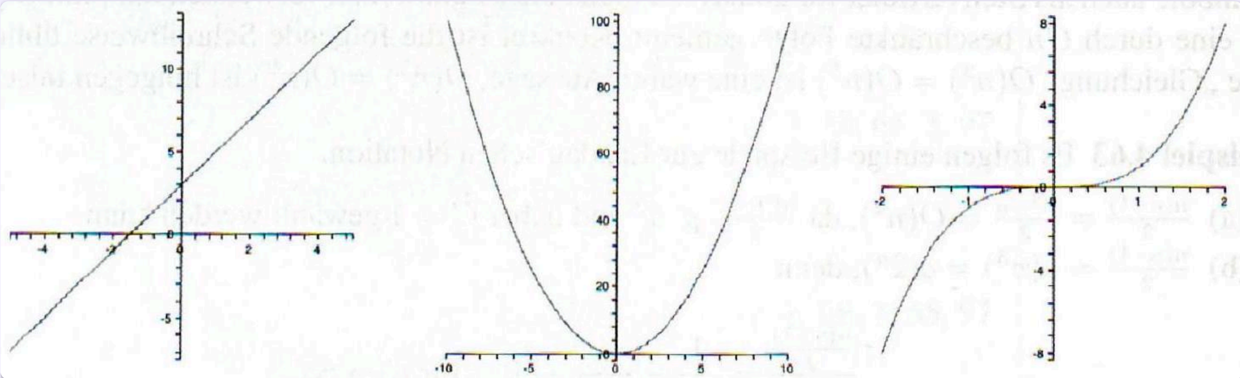


Abbildung 4.2 Polynomfunktionen: links: $f(x) = 2x + 3$, Mitte: $f(x) = x^2$, rechts: $f(x) = x^3$

(b) Rationale Funktionen sind Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen sind und $D = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$. Zum Beispiel ist $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ (siehe Abb. 4.3, links) eine rationale Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$.

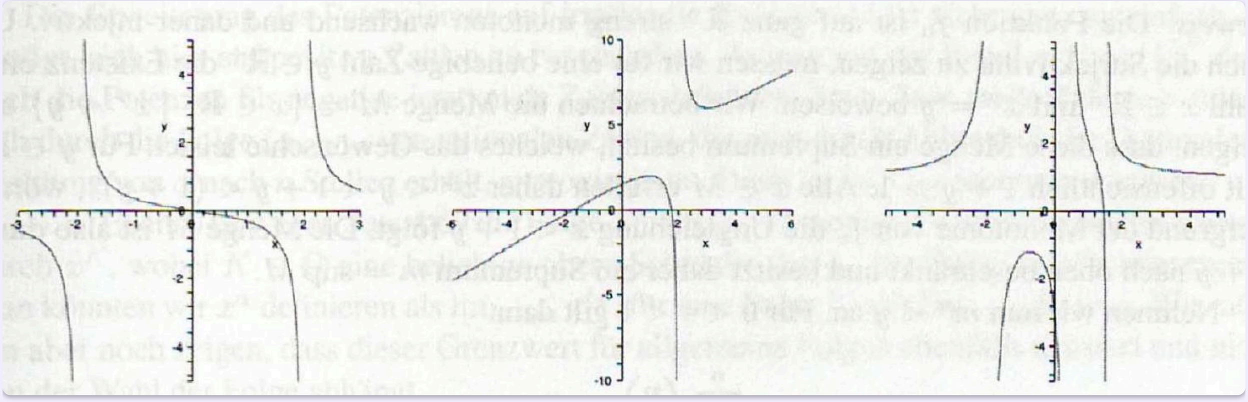


Abbildung 4.3 Rationale Funktionen: links: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, Mitte: $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^2-4}$, rechts: $f(x) = \frac{x^3-3}{x^3-3x+1}$

Monotonie und Sätze dazu

Definition 4.65

Mathematik für Informatik, p.176

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset D$ ein Intervall. Dann heißt f auf I streng monoton wachsend, falls für $x, y \in I$ mit $x < y$ immer $f(x) < f(y)$ erfüllt ist. Analog heißt f auf I streng monoton fallend, falls aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) > f(y)$ folgt.

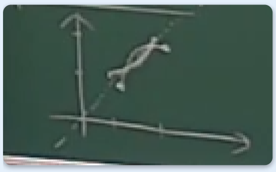
Bemerkung: Man beachte, dass aus der Bedingung $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ auch die Umkehrung folgt, d.h., für streng monoton wachsende Funktionen sind die Aussagen $x < y$ und $f(x) < f(y)$ äquivalent. Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Satz 4.66

Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f : I \to f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher umkehren. Die Umkehrung ist im gleichen Sinne monoton wie f selbst.

Beweis. O.B.d.A. sei f auf I streng monoton wachsend. Weiters sei $x \neq y$, es gelte etwa $x < y$. Dann ist $f(x) < f(y)$, insbesondere sind also die Bilder von x und y unter f verschieden, und f ist daher injektiv. Da die Zielmenge $f(I)$ ist, ist f trivialerweise surjektiv und somit bijektiv.

Zum Beweis der zweiten Aussage müssen wir zeigen, dass $x < y \Longrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. Setzen wir $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, dann gilt $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Da f monoton wächst, folgt $u < v$, was zu zeigen war.

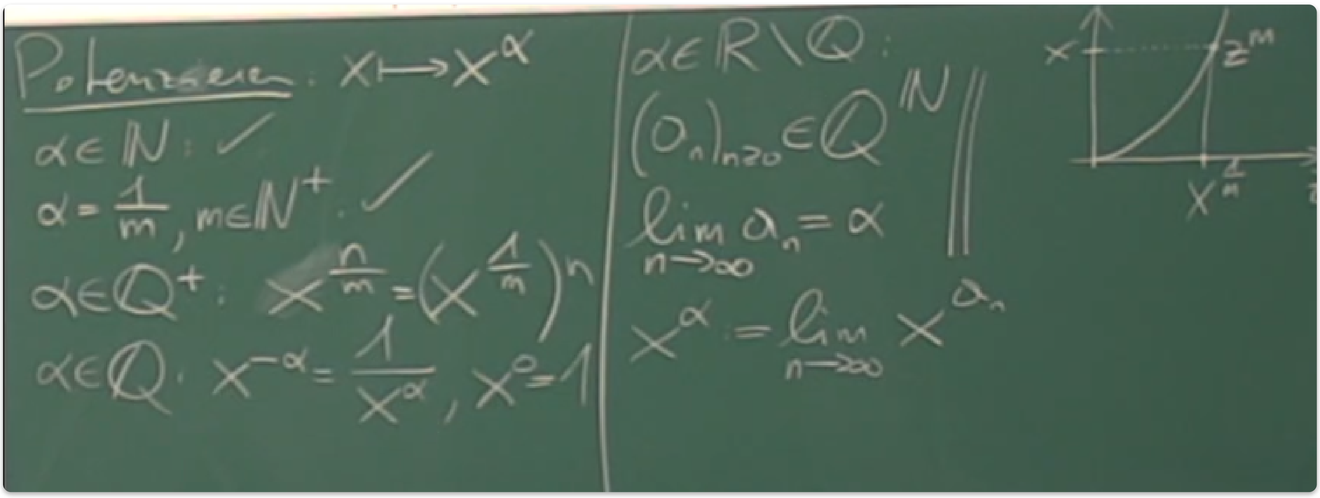


Mehr siehe: Monotonie, Tafelbild

Potenzen mit reellen Exponenten

Mathematik für Informatik, p.177

Das Potenzieren mit natürlichem Exponenten, also die Berechnung von x^n mit $n \in \mathbb{N}$, ist elementar über die Multiplikation erklärt. Diese Definition ist aber nicht mehr anwendbar, wenn n keine natürliche Zahl ist. In diesem Abschnitt werden wir uns überlegen, wie man das Potenzieren auf nicht natürliche Exponenten verallgemeinern kann.



Exponentialfunktion und Logarithmus

Definition 4.72

Mathematik für Informatik, p.179

Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch $\exp(x) = e^x$, wobei e die Euler'sche Zahl 2.71828 ... aus Beispiel 4.21 ist. Die allgemeine Exponentialfunktion lautet $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

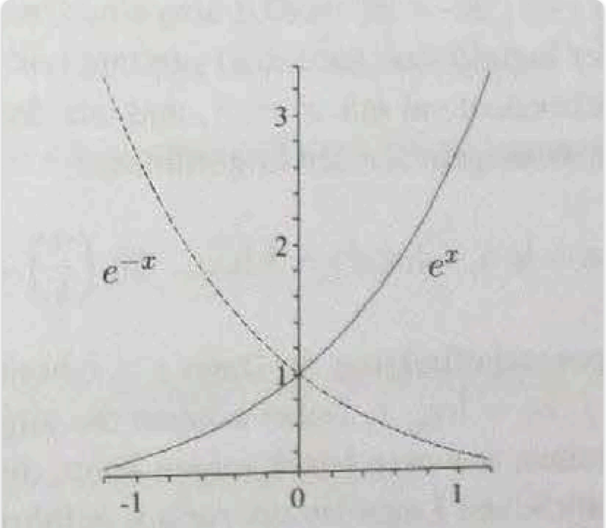


Abbildung 4.4 Die Graphen von e^x und e^{-x}

Satz 4.73

Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$bijektiv ab.

Bemerkung: In Abschnitt 4.5 werden wir den Begriff der Stetigkeit vorstellen. Die Exponentialfunktion ist eine stetige Funktion (Satz 4.78). Daher folgt der obige Satz auch unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz (Satz 4.89).

Beweis. Aus Satz 4.69 (der nach den obigen Überlegungen auch für irrationale Exponenten gilt) folgt, dass die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und infolge dessen eine injektive Funktion ist.

Zum Beweis der Surjektivität betrachtet man die Folgen $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Erstere ist eine Nullfolge, letztere konvergiert uneigentlich gegen ∞. Aufgrund dessen gibt es zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ein $n \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y \leq e^n$. Wir setzen $a_0 = -n$ und $b_0 = n$. Halbieren des Intervalls $[a_0, b_0]$ liefert den Punkt $c = (a_0 + b_0)/2$. Falls c die Ungleichung $e^c < y$ erfüllt, dann setzen wir $a_1 = c$ und $b_1 = b_0$, andernfalls $a_1 = a_0$ und $b_1 = c$. Es gilt dann $e^{a_1} < y \leq e^{b_1}$. Das Intervall $[a_1, b_1]$ wird wieder halbiert, und in analoger Weise definieren wir a_2 und b_2. So entstehen eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ (vgl. Intervallschachtelungen aus Abschnitt 1.1). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$. Daher sind diese beiden Folgen konvergent. Die Differenz $b_n - a_n$ ist die Länge des n-ten Intervalls. Deshalb bilden die Differenzen eine Nullfolge. Es folgt somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$, also $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^\alpha$. Wegen $e^{a_n} < y \leq e^{b_n}$ gilt $e^\alpha = y$, womit die Surjektivität der Exponentialfunktion gezeigt ist.

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$besitzt also eine Umkehrfunktion. Diese wird natürlicher Logarithmus (oder logarithmus naturalis) genannt und mit dem Symbol *ln* bezeichnet. Damit ist $y = \ln x$ gleichbedeutend mit $x = e^y$, und aus den Rechenregeln für Potenzen folgen unmittelbar einige Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(a^b\right) = b \ln a, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Auch die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ besitzt eine Umkehrfunktion, den Logarithmus zur Basis a, $f(x) = \log_a x$. Dabei können die allgemeine Exponentialfunktion und der allgemeine Logarithmus, wie man leicht zeigen kann, direkt auf die natürliche Exponentialfunktion bzw. den natürlichen Logarithmus zurück geführt werden. Es gilt $a^x = e^{x \ln a}$ gilt $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- **Zusammengesetzte Exponentialfunktion:** Entsteht durch die Verkettung der Exponentialfunktion mit g(x)=−x2/2.
- **Wichtigkeit:** Spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.
- **Bekannte Bezeichnung:** Wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet (siehe Abbildung 4.5).

Tafelbild1
Tafelbild2

Darstellung der Exponentialfunktion

Satz 4.74

Mathematik für Informatik, p.181

Die natürliche Exponentialfunktion e^x besitzt die folgenden Eigenschaften.

(i) Darstellung als Grenzwert einer Folge:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

(ii) Darstellung durch eine Potenzreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

(iii) Funktionalgleichung:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Bemerkung: Für $x = 1$ ergibt sich dann insbesondere

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Die Funktionalgleichung (4.9) folgt direkt aus der Definition als Potenz der Euler'schen Zahl e. Um die anderen Eigenschaften zu zeigen, wollen wir zunächst die Funktion $E(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Existenz dieses Grenzwerts: Aufgabe 4.14) und ihren Zusammenhang zur Exponentialfunktion studieren. Wir wissen ja bereits aus Beispiel 4.21, dass $E(1) = e$.29

Winkelfunktion und Arcusfunktionen

Mathematik für Informatik, p.183, Tafelbild

- Definition von Sinus (sin) und Cosinus (cos):
  - $\sin(x)$: y-Koordinate eines Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - $\cos(x)$: x-Koordinate desselben Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - Bogenlänge vom Bezugspunkt zum Punkt X beträgt x (vgl. Kapitel 1, Abb. 4.6).
  - Werden auch Winkelfunktionen genannt (enge Verbindung zum Winkel).
- Periodische Fortsetzung für $x \notin [0, 2\pi)$:
  - $\sin(x)$ und $\cos(x)$ werden durch periodische Fortsetzung definiert.
  - Gleichungen für die periodische Fortsetzung (werden im Folgenden erwartet).

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

- Wichtig:
  - $\frac{\sin(x)}{(x)} \approx 1$
  - $\cos(x) \approx 1$
  - $\frac{\tan(x)}{x} \approx 1$
  - $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

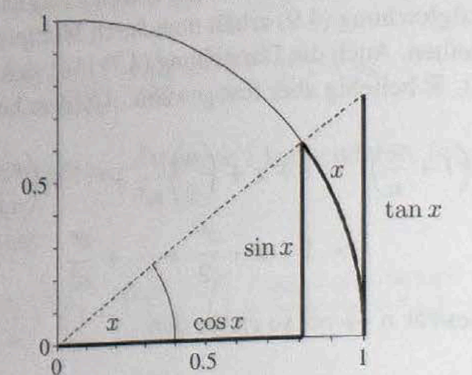
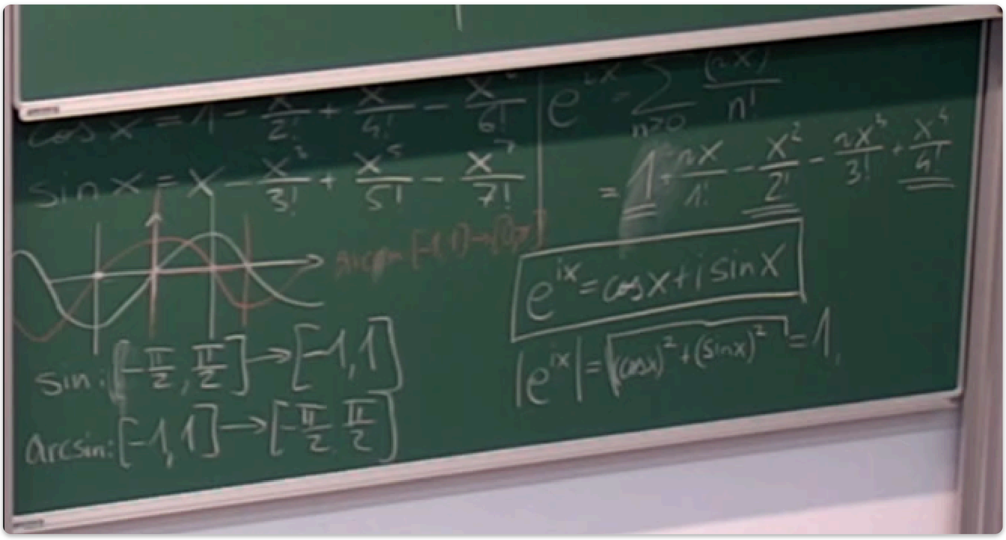


Abbildung 4.6 Definition der trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$. Der Winkel x (im Bogenmaß) ist identisch mit der Bogenlänge x.



Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen