7. Globale Operationen

Information:

- EVC_Skriptum_CV, p.35 bis EVC_Skriptum_CV, p.39

Bildtransformationen

Punkt- und lokale Operationen

- Bisherige Betrachtung: Fokus auf Punkt- und lokale Operationen
  - Arbeitsweise: Entweder einzelnes Pixel oder Pixelumgebung wird bearbeitet
  - Siehe: 4. Punktoperationen, 5. Lokale Operationen

Globale Operationen

- Nutzen das gesamte Bild als Ausgangsbasis
  - Bild wird aus dem Bildraum (Ortsraum) in einen anderen Raum (z. B. Frequenzraum) transformiert
  - Vorteile der Transformation:
    - Bessere Sichtbarkeit von bestimmten Bildmerkmalen
    - Bessere Daten-Dekorrelation und Anpassung an das menschliche visuelle System

Bild-Frequenzraum-Transformationen

- Ziel: Darstellung von Bilddaten in einem anderen Raum (z. B. Frequenzraum) zur besseren Analyse
  - Häufig verwendete Transformationen:
    - Fourier-Transformation
    - Cosinus-Transformation
    - Weitere Transformationen: Wavelet-, Laplace-Transformation

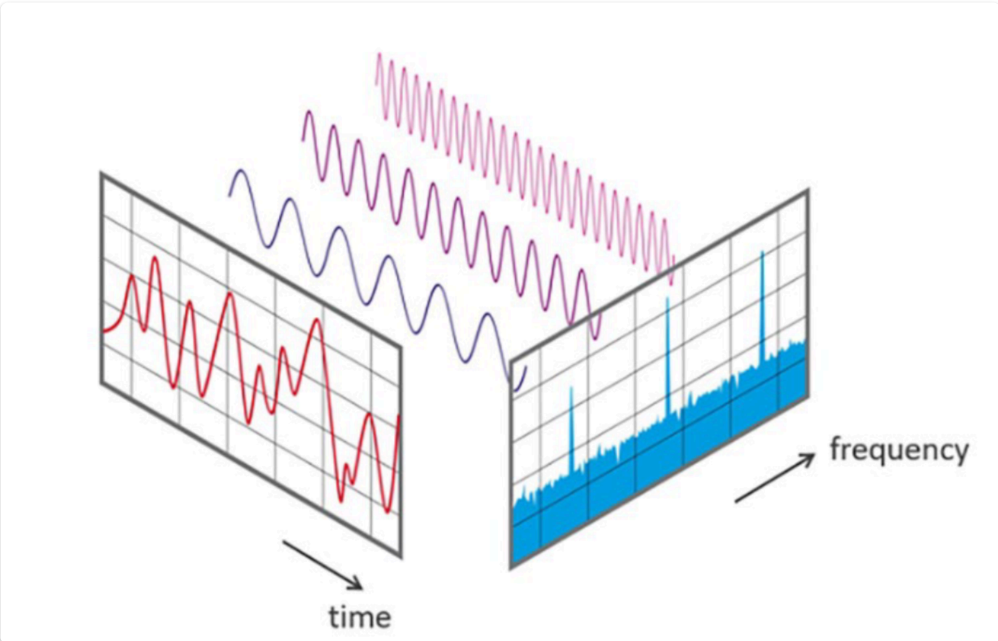
Fourier- und Cosinustransformation

- Transformationen im eindimensionalen, kontinuierlichen Bereich:
  - Betrachtung einer Funktion $y = f(x)$
  - Anwendung dieser Transformationen auf zweidimensionale Bilder (mit den Bildkoordinaten (x, y))
  - Bei der diskreten Betrachtung:

- Integrale werden zu Summen (diskrete Werte)

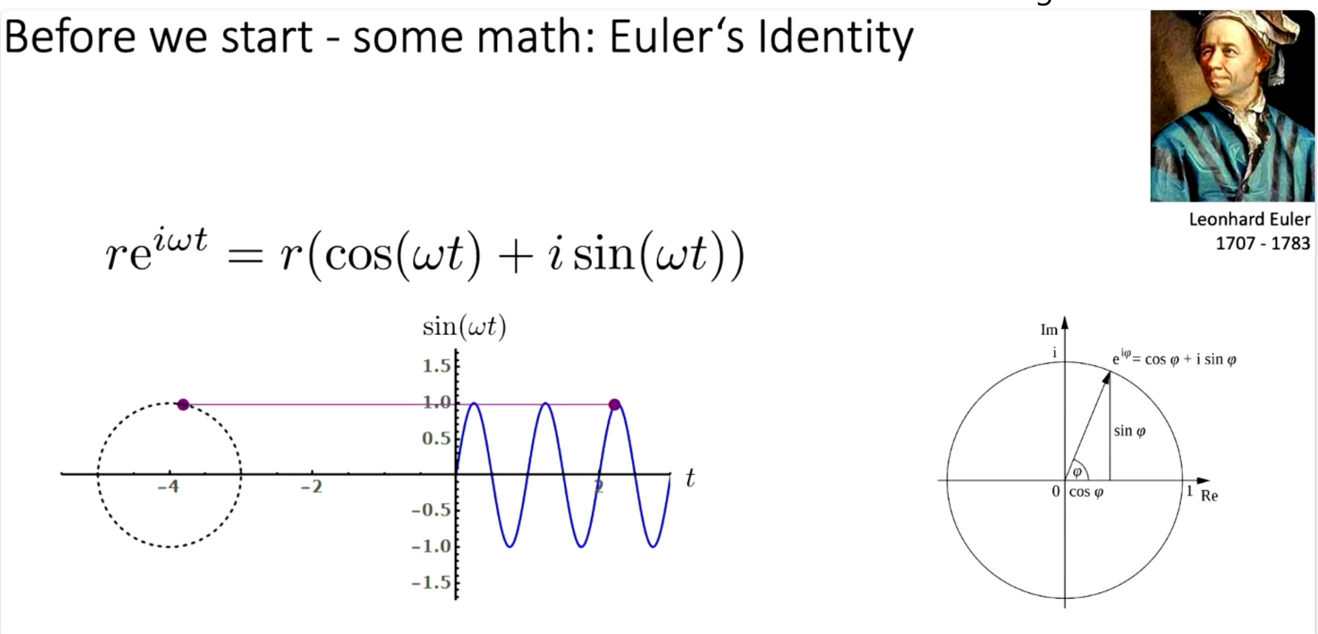
Die Fourier- und Cosinus-Transformation sind die wichtigsten Methoden, um Bilddaten von ihrem Ortsraum in den Frequenzraum zu überführen, was viele Vorteile in der Analyse und Verarbeitung von Bildern bietet.

Fouriertransformation



Wichtige Info vorab!

Diese Zusammenfassung bezieht sich hauptsächlich aufs EVC_Skriptum_CV.pdf und wird deshalb auch die im Skriptum verwendete Notation verwenden. In den Vorlesungsfolien wurde auf die Eulersche Identität zurückgegriffen um die cos/sin Ausdrücke abzukürzen. Falls beim Test die Notation aus den Slides verwendet wird hier das wichtigste zum herleiten:



Frequenzbereich und harmonische Funktionen

- Zerlegung von Bildsignalen: Die Darstellung und Analyse von Bildern im Frequenzbereich basiert auf der Zerlegung von Bildsignalen in harmonische Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktionen).

Sinus- und Kosinusfunktionen

- Mathematische Darstellung:
  - Sinusfunktion: $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
  - Kosinusfunktion: $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
  - Parameter:
    - A: Amplitude (maximale Auslenkung)
    - ϕ: Phase (Verschiebung entlang der Zeitachse)

Beziehung zwischen Frequenz und Kreisfrequenz

- Kreisfrequenz (ω) und Frequenz (f) sind miteinander verknüpft:
  $\omega = 2\pi f$
  - f: Frequenz in Zyklen pro Raum- oder Zeiteinheit, z. B. 1.000 Zyklen pro Sekunde (Hertz)

Entstehung des Frequenzkonzepts

- Ursprung des Frequenzbegriffs: Das Konzept der Frequenzen und der Zerlegung von Schwingungen in harmonische Funktionen entstand ursprünglich aus der Akustik (Schall, Töne und Musik), da das menschliche Ohr ähnlich arbeitet.
  - Schall: Befindet sich in der Zeitdomäne
  - Töne: Haben eine Lautstärke (Amplitude) und eine Frequenz (Schwingungen pro Sekunde)

Fouriertransformation

- Zentrale Aussage:
  - Wellen, wie z.B. Schallwellen, Wasserwellen oder elektromagnetische Wellen, können mit beliebiger Frequenz, Amplitude und Phasenlage als Summe von gewichteten Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden.

Kosinus- und Sinusfunktionen

- Kosinusfunktion:
  - $cos(x)$ hat den Wert 1 am Ursprung ($cos(0) = 1$)
  - Durchläuft von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode
- Sinusfunktion:
  - $sin(x)$ hat den Wert 0 am Ursprung ($sin(0) = 0$)

- Durchläuft ebenfalls von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode

Frequenz und Perioden

- Periodenanzahl:
  - Für $cos(x)$ innerhalb einer Strecke der Länge $T = 2\pi$ ist die Anzahl der Perioden 1: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

Verschiebung der Kosinusfunktion

- Verschiebung:
  - Wenn eine Kosinusfunktion entlang der x-Achse um eine Distanz ϕ verschoben wird ($cos(x) \to cos(x - \phi)$), ändert sich die Phase der Funktion.
  - ϕ bezeichnet den Phasenwinkel der resultierenden Funktion.
- Sinus als verschobene Kosinusfunktion:
  - Die Sinusfunktion ist eine Kosinusfunktion, die um $\frac{\pi}{2}$ (ein Viertelperiode) nach rechts verschoben ist.

Orthogonalität von Sinus- und Kosinusfunktionen

- Orthogonalität:
  - Kosinus- und Sinusfunktionen sind orthogonal, was bedeutet, dass sie in ihrer Form unabhängig voneinander sind.
  - Durch die Kombination von Kosinus- und Sinusfunktionen können neue sinusoidale Funktionen mit beliebiger Frequenz, Amplitude und Phase erzeugt werden.

Addition von Kosinus- und Sinusfunktionen

- Addition:
  - Wenn eine Kosinus- und eine Sinusfunktion mit der gleichen Frequenz ω und den Amplituden A bzw. B addiert werden, entsteht eine neue Sinusfunktion mit der gleichen Frequenz ω.
  - Resultierende Amplitude C und Phasenwinkel ϕ sind durch die Amplituden A und B bestimmt:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

Erweiterung auf beliebige Funktionen

- Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768–1830) zeigte, dass jede periodische Funktion $g(x)$ mit einer Grundfrequenz ω_0 als Summe von harmonischen Sinus- und

Kosinusfunktionen dargestellt werden kann:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x)$$

- Fourierkoeffizienten:
  - A_k, B_k: Bestimmen das Gewicht der jeweiligen Kosinus- und Sinusfunktionen.
  - Frequenzen der beteiligten Funktionen: Ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0 .
- Fourieranalyse: Berechnung der Fourierkoeffizienten aus der gegebenen Funktion $g(x)$.

Fourierintegral – Nicht periodische Funktionen

- Fourierintegral: Erweiterung auf nicht periodische Funktionen, die ebenfalls als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können:

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \sin(\omega x)\, d\omega$$

- Koeffizienten A_ω und B_ω:
  - Beschreiben die Amplitude der entsprechenden Kosinus- bzw. Sinusfunktion bei der Frequenz ω.
  - Bestimmung der Koeffizienten:

$$A_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x)$$

$$B_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x)$$

- Spektrum der Funktion:
  - $A(\omega)$ und $B(\omega)$ sind kontinuierliche Funktionen, die das Spektrum der Frequenzen im Signal repräsentieren.

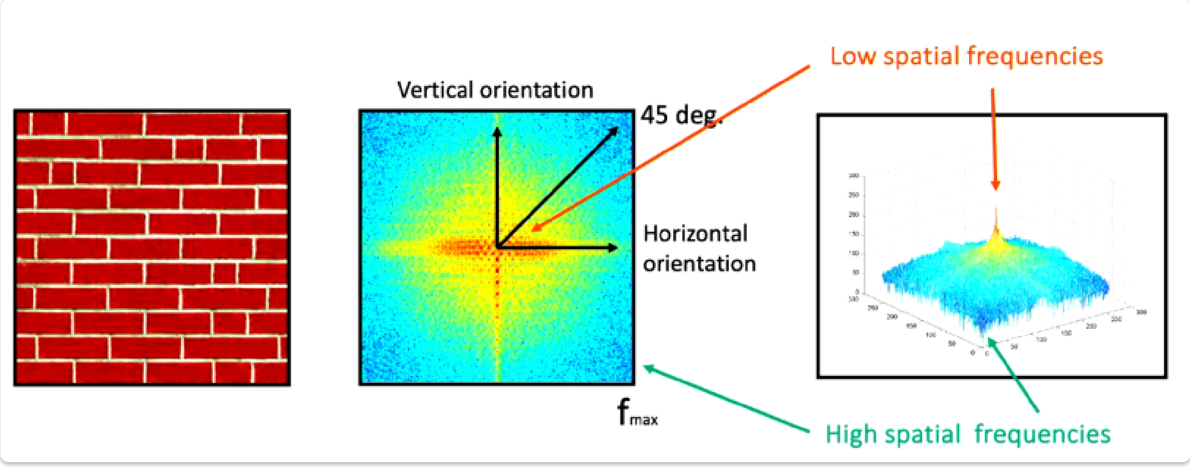
Fouriertransformation und Fourier-Spektrum

- Fouriertransformation:
  - Vereinfacht die Darstellung, indem die Ausgangsfunktion $g(x)$ und das Spektrum als komplexwertige Funktionen betrachtet werden.
- Fourierspektrum $G(\omega)$:
  - Wird als komplexe Funktion dargestellt:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) g(x)$$

- Inverse Fouriertransformation:
  - Umkehrung der Fouriertransformation zur Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion $g(x)$ aus ihrem Spektrum $G(\omega)$.

- Dualität von Orts- und Frequenzraum:
    - Die Darstellung von Funktionen im Ortsraum und im Frequenzraum ist dual – sie beschreiben das gleiche Signal, jedoch auf unterschiedliche Weise.



Da das abstrakte Prinzip von Fouriertransformation Anfangs vielleicht bisschen unübersichtlich ist empfehle ich folgende Videos:

- https://www.youtube.com/watch?v=7IIR_BRkfPI (Kleine Einführung)
- https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=477s (Wurde auch in Vorlesung gezeigt)

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Notwendigkeit der DFT

- Kontinuierliche Fouriertransformation (FT) ist für die numerische Berechnung am Computer nicht geeignet, da Bilder immer diskrete Daten enthalten.
- Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) stellt sowohl das Signal als auch sein Spektrum als endliche Vektoren dar, die eine diskrete, periodische Signal repräsentieren.

DFT: Vorwärtstransformation

Für ein diskretes Signal $g(u)$ der Länge M (mit $u = 0, \ldots, M-1$), wird das Fourierspektrum $G(m)$ für $m = 0, \ldots, M-1$ durch die Vorwärtstransformation berechnet:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) e^{-i\frac{2\pi mu}{M}}$$

DFT: Inverse Transformation

Die inverse DFT zur Rekonstruktion des Signals $g(u)$ aus dem Spektrum $G(m)$:

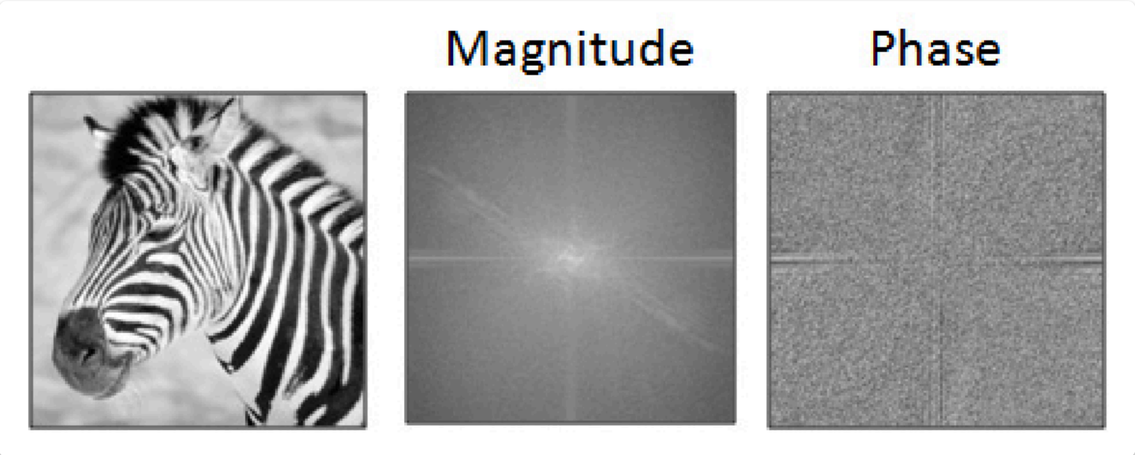
$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) e^{i\frac{2\pi mu}{M}}$$

- Beide Transformationen sind identisch: Vorwärts- und inverse DFT sind mathematisch symmetrisch.

Eigenschaften des Fourierspektrums

- Sowohl das Signal $g(u)$ als auch das Fourierspektrum $G(m)$ sind komplexwertige Vektoren der Länge M.
- Betrag des Fourierspektrums (Magnitude):

$$\|G(m)\| = \sqrt{G_{\text{real}}^2(m) + G_{\text{imag}}^2(m)}$$



Wird als Leistungsspektrum (Powerspectrum) bezeichnet und beschreibt die Energie oder Leistung, die jede Frequenzkomponente zum Signal beiträgt.

- Leistungsspektrum:
  - Reellwertig und positiv.
  - Wird häufig zur grafischen Darstellung der Fouriertransformierten verwendet.
  - Phaseninformation geht verloren – das Signal kann daher nicht allein aus dem Leistungsspektrum rekonstruiert werden.
  - Unbeeinflusst von Verschiebungen des Signals: Ein zyklisch verschobenes Signal hat das gleiche Leistungsspektrum wie das ursprüngliche Signal.

Fast Fourier Transform (FFT)

- Schnelle Berechnung der DFT mit der Fast Fourier Transform (FFT):
  - Reduzierte Zeitkomplexität von $O(M^2)$ auf $O(M \log_2 M)$.
  - Wesentliche Zeitersparnis bei größeren Signallängen, z.B., bei $M = 10^6$ wird die Berechnungszeit um den Faktor 10.000 reduziert.

Convolution Theorem:

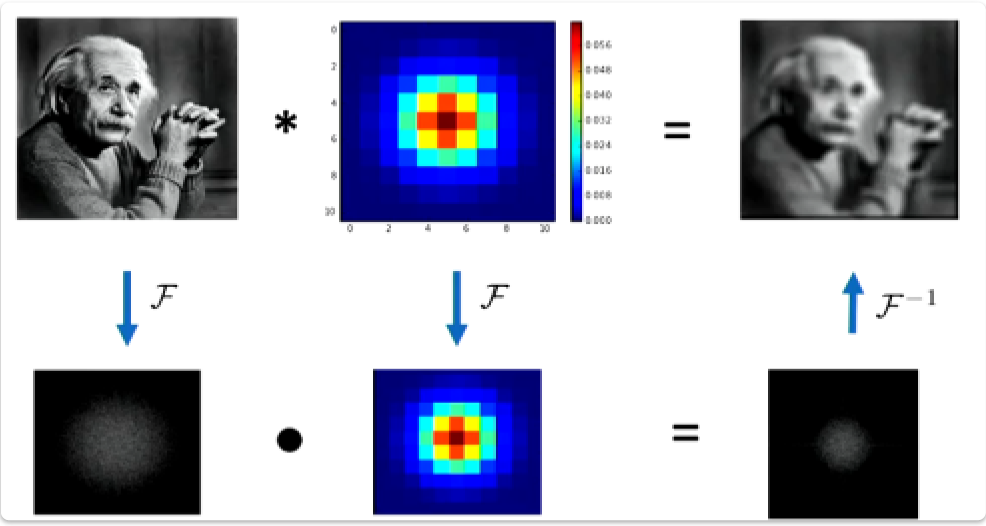
Das Convolution Theorem besagt, dass die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich gleich der Punktweise-Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich ist. (Mehr dazu siehe 7. Clipping und Antialiasing)

Mathematisch:

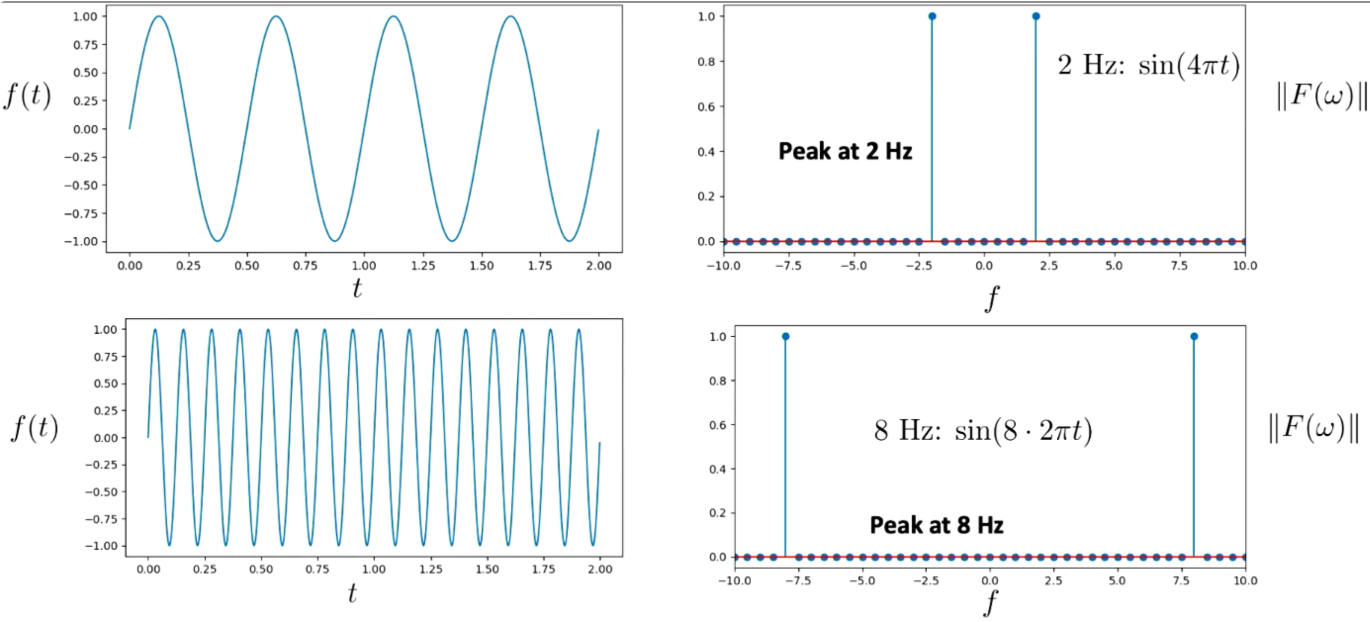
$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) F f * g$$

Das bedeutet:

- Im Zeitbereich: Faltung der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$.
- Im Frequenzbereich: Punktweise Multiplikation der Fouriertransformierten $F(\omega)$ und $G(\omega)$.



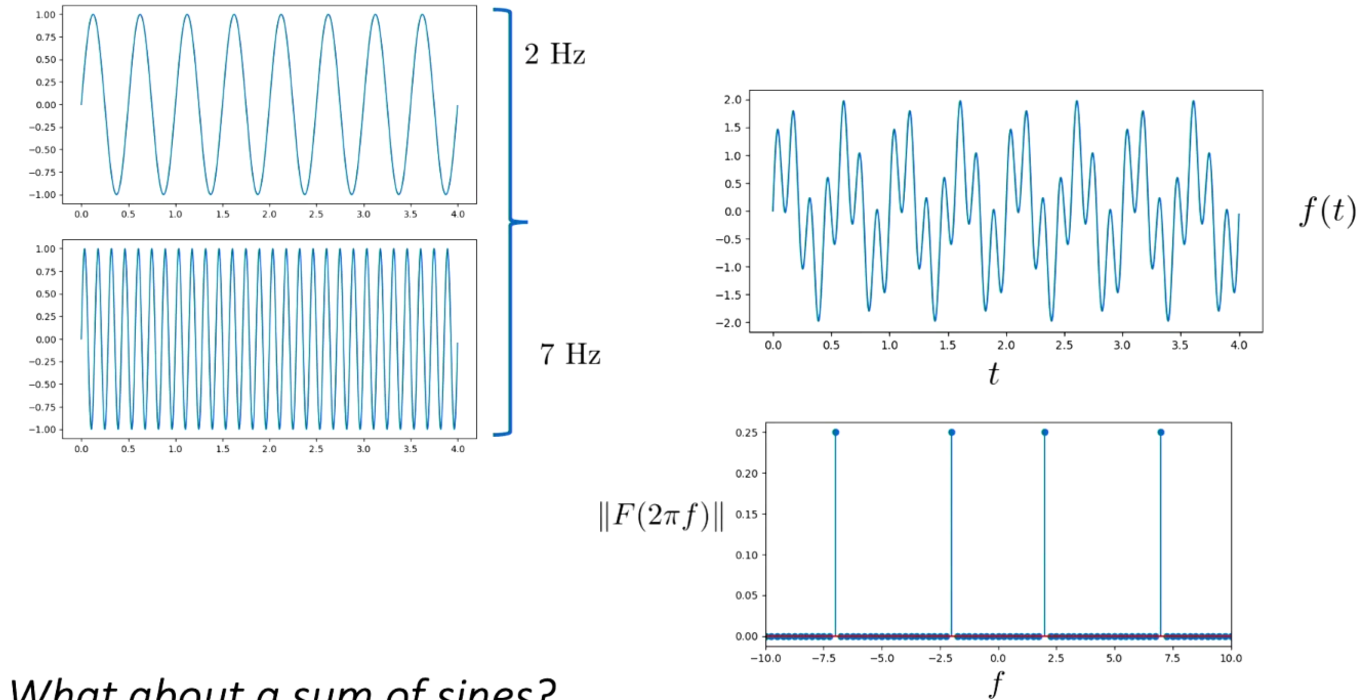
Hier noch einige Beispiele für Fourier Transformationen:



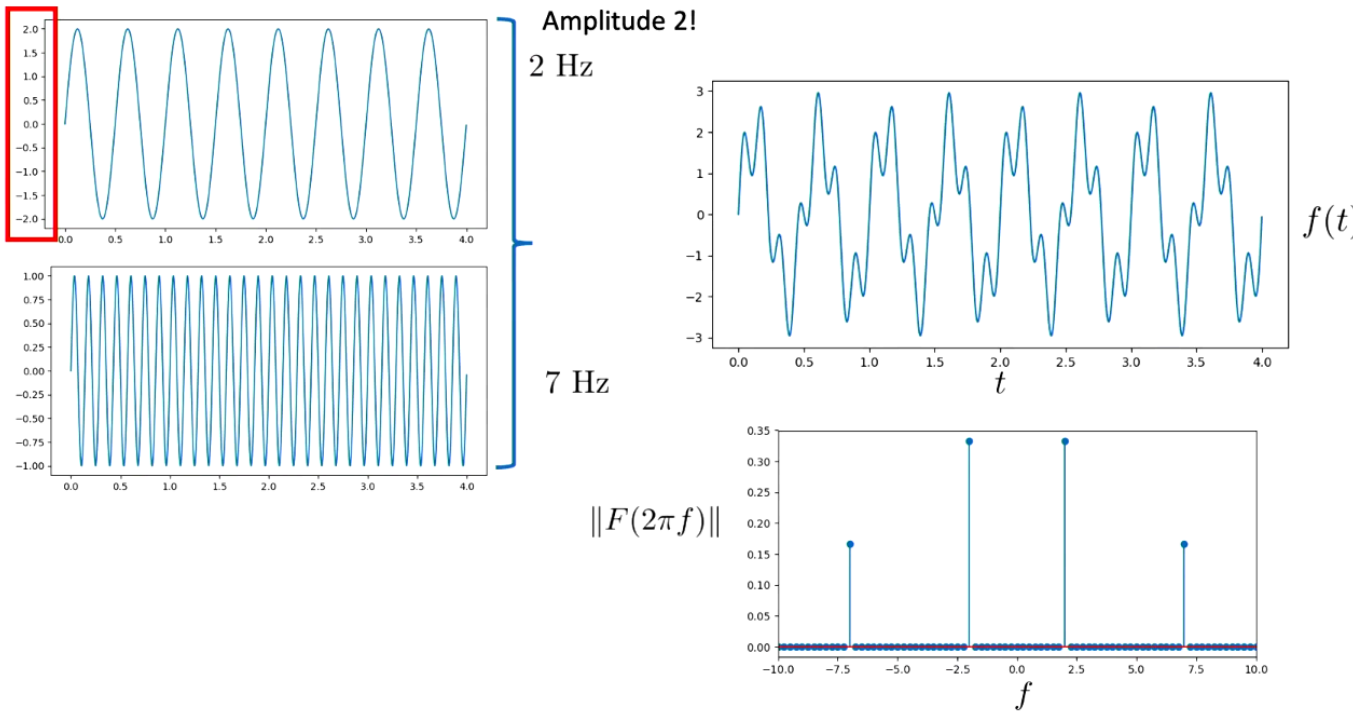
Let's look at some fourier transformations

$$\omega = 2\pi f$$

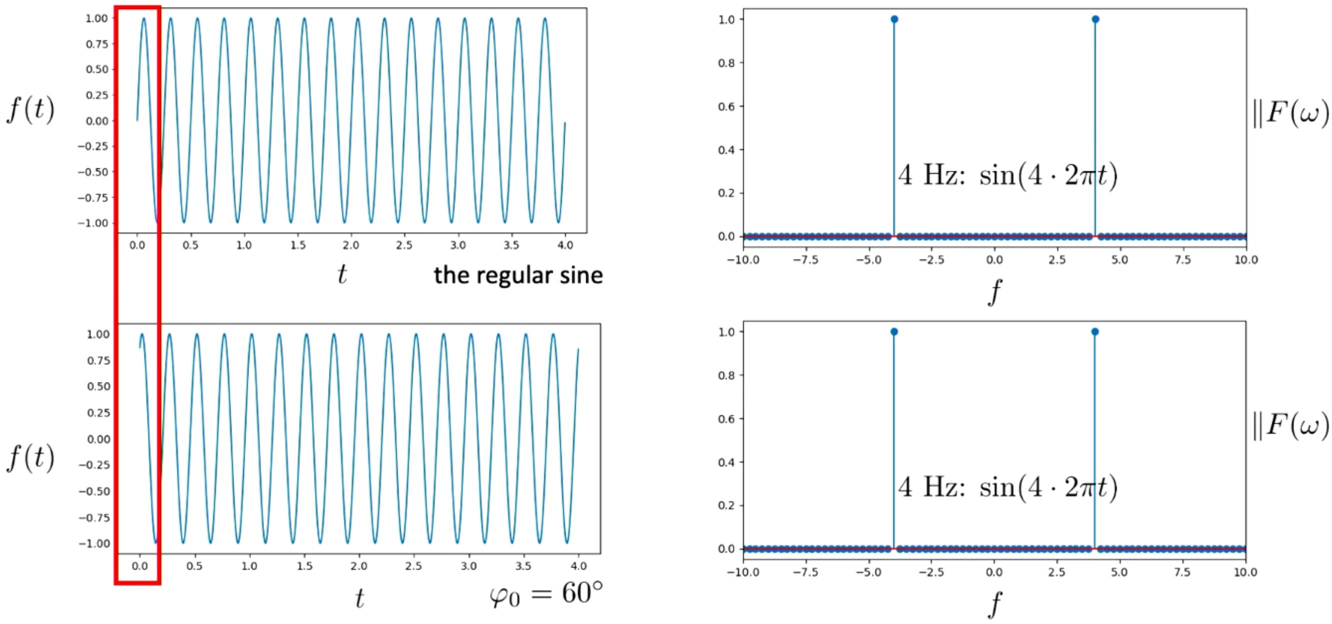
21



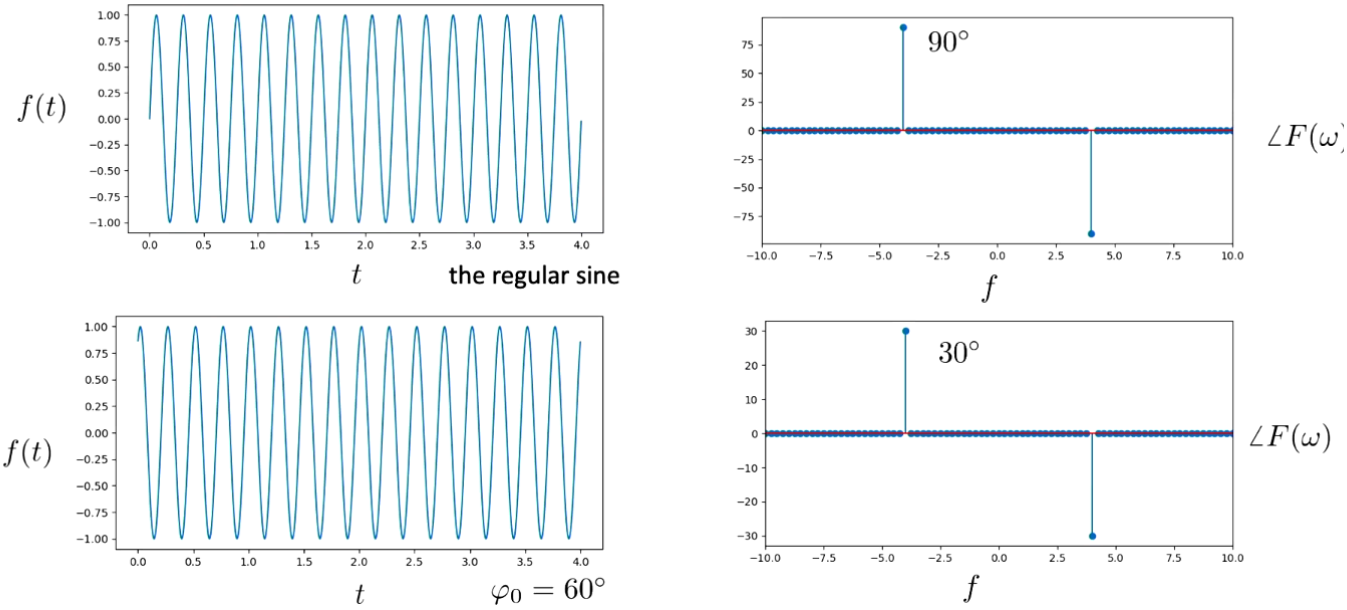
What about a sum of sines?



What about a sum of sines?



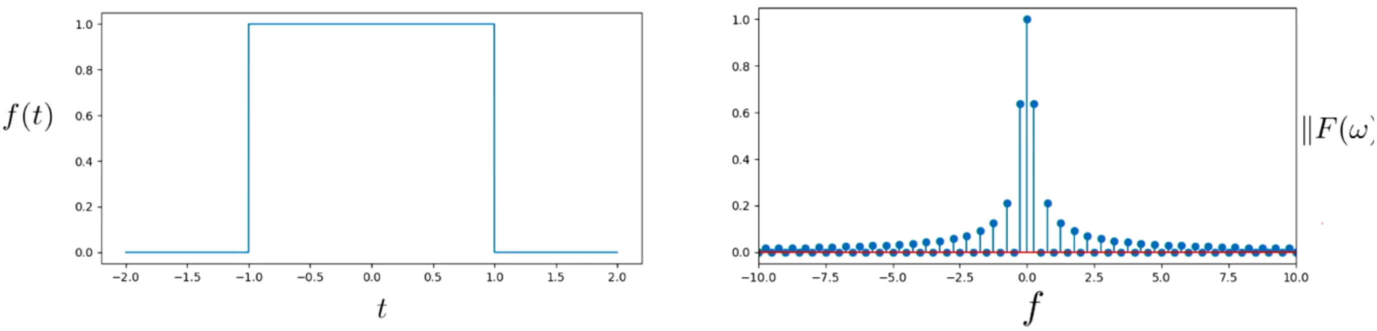
Let's look at a sine which starts at $\varphi_0 = 60°$



Let's look at a sine which starts at $\varphi_0 = 60°$

We can reconstruct offsets via the phase!

25

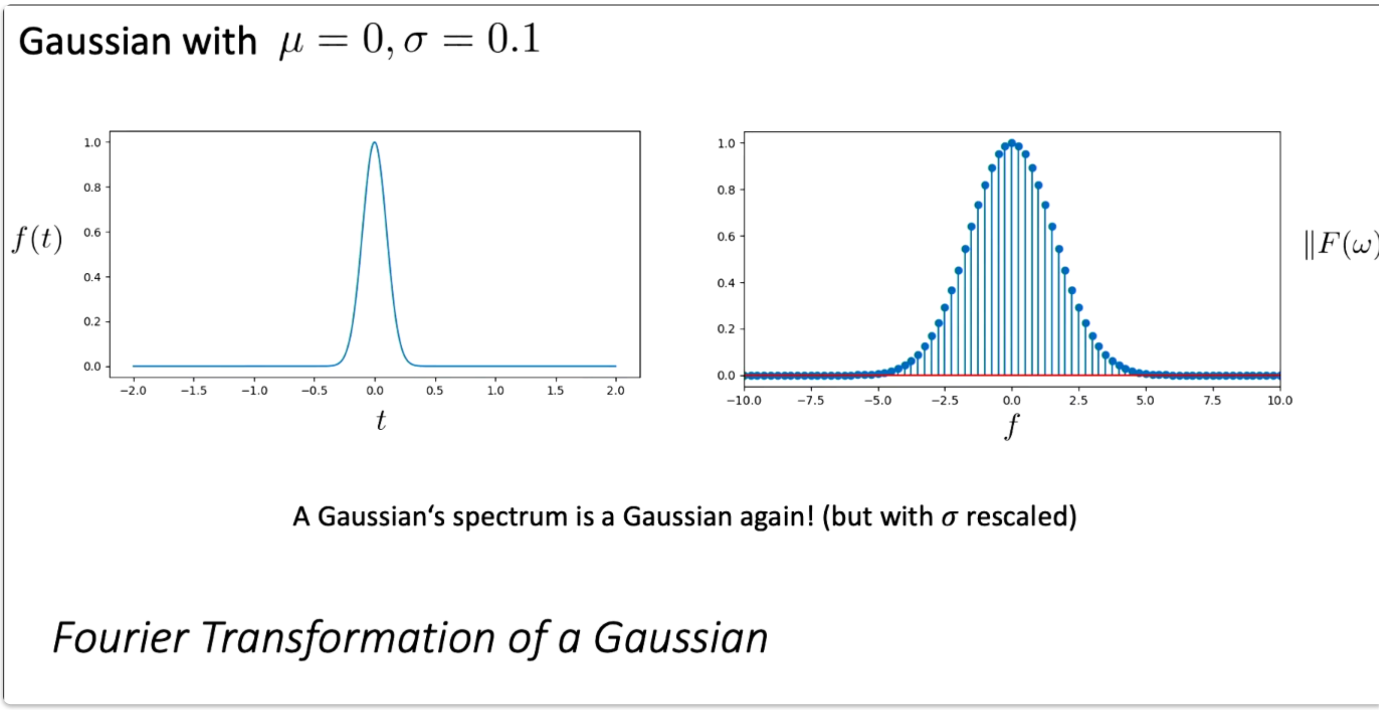


„bumping" (harmonics) - approaches zero at ∞

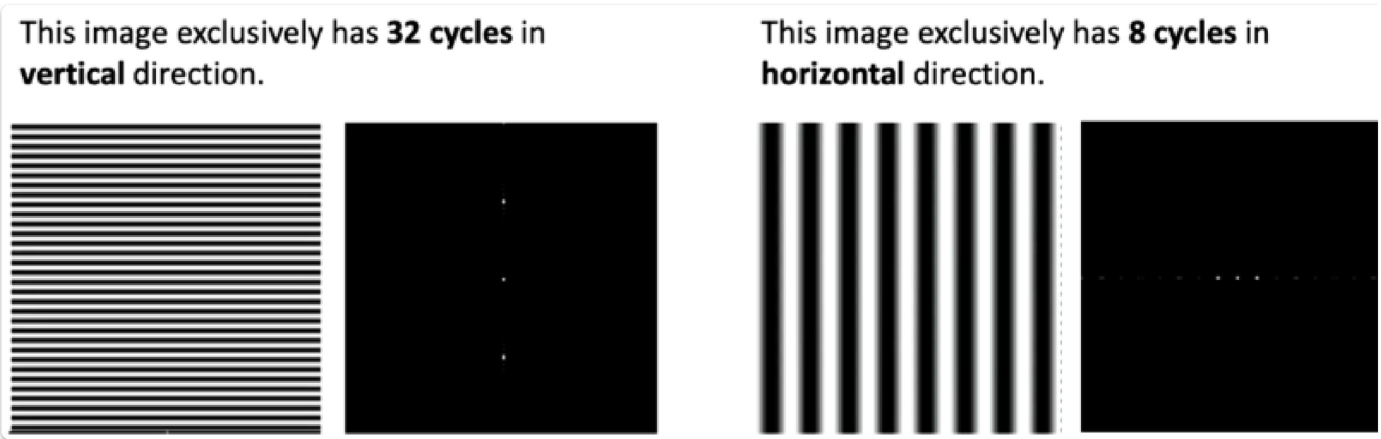
Sinc-function (Spaltfunktion):

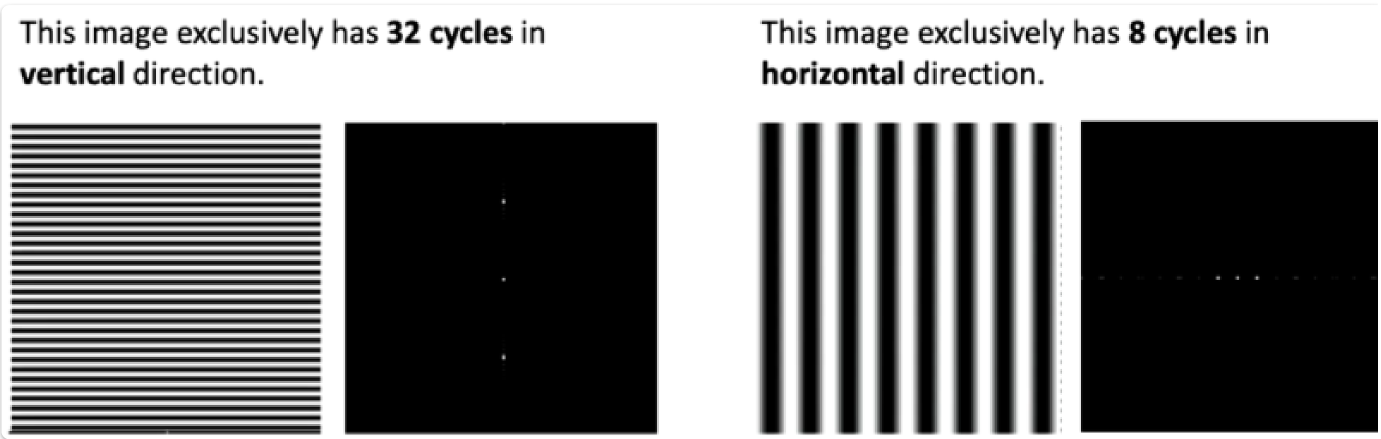
$$\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Fourier Transformation of a Rectangle

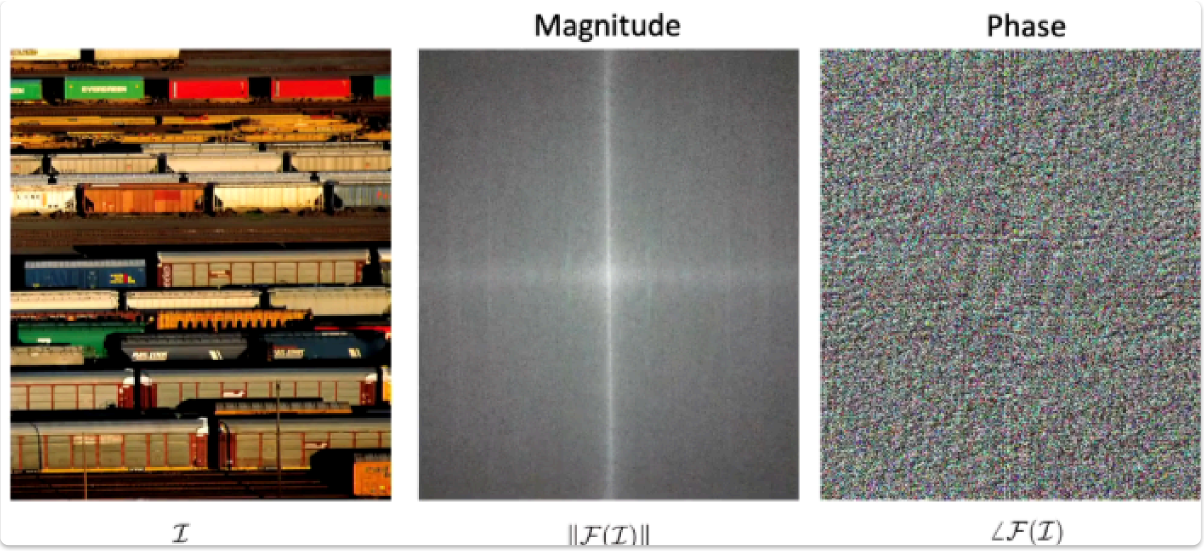


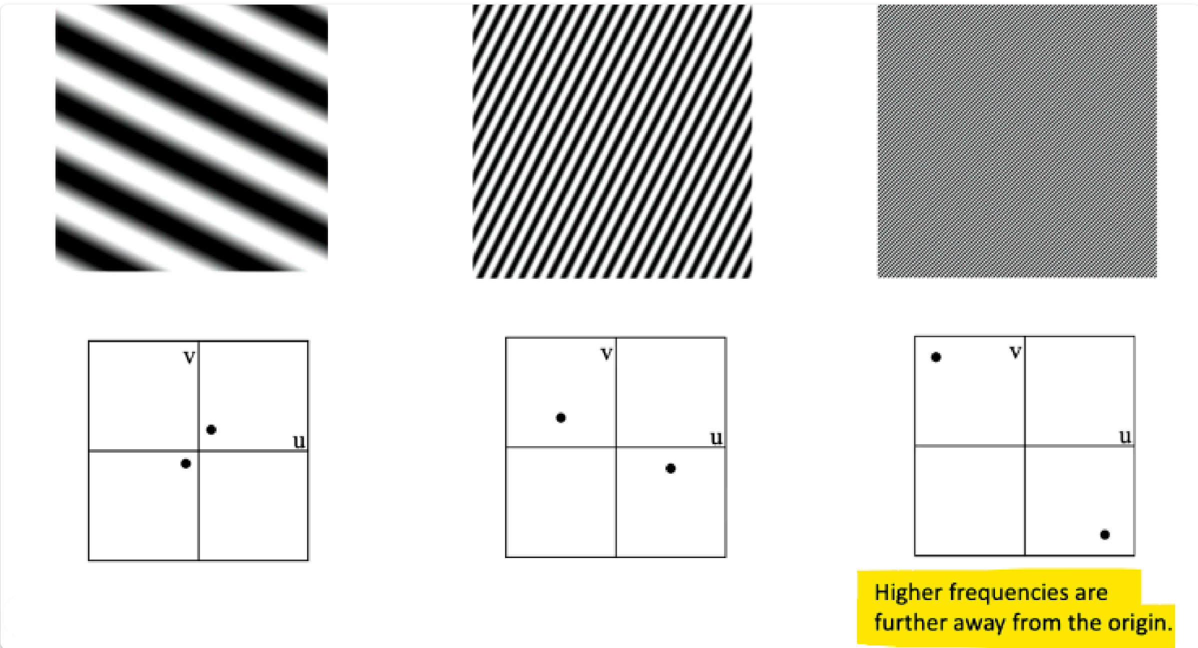
Jetzt hier 2D Beispiele:



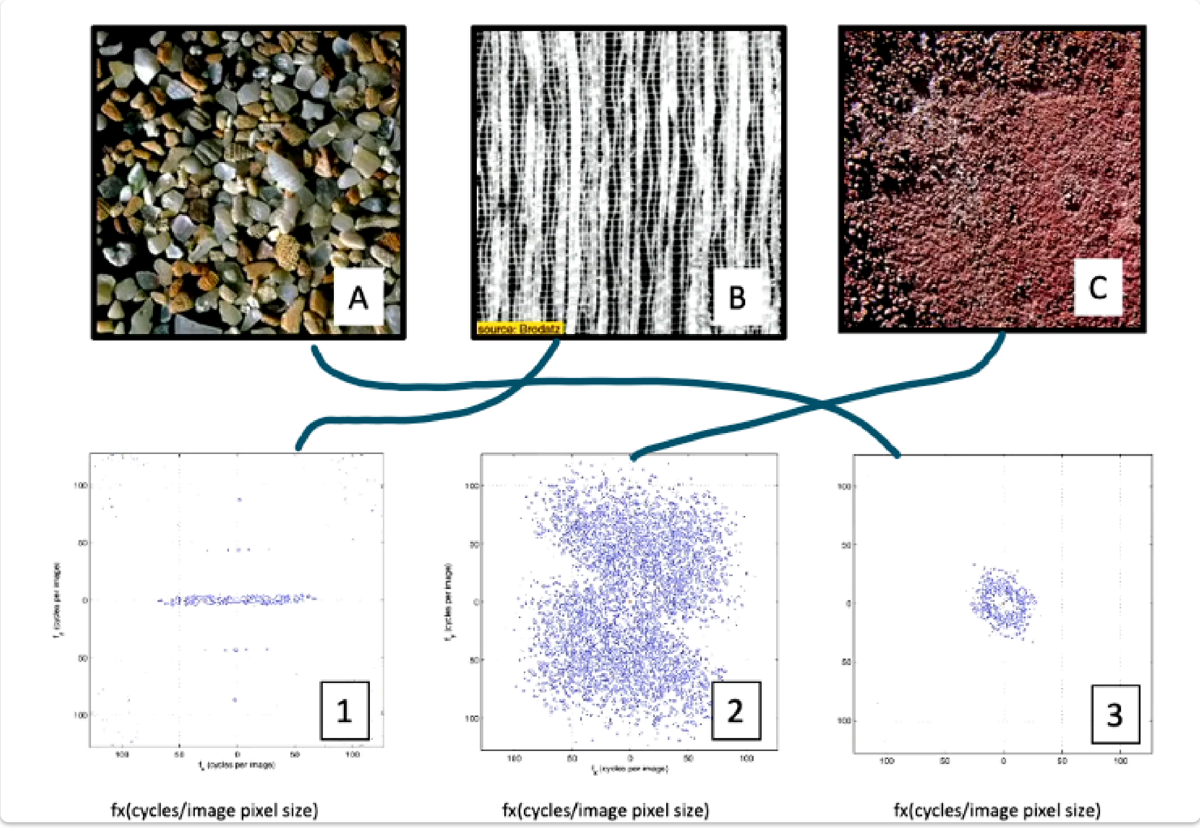


Jetzt hier Beispiel für ein weiteres Bild:


Magnitude
Phase
$\mathcal{I}$
$\|\mathcal{F}(\mathcal{I})\|$
$\angle\mathcal{F}(\mathcal{I})$

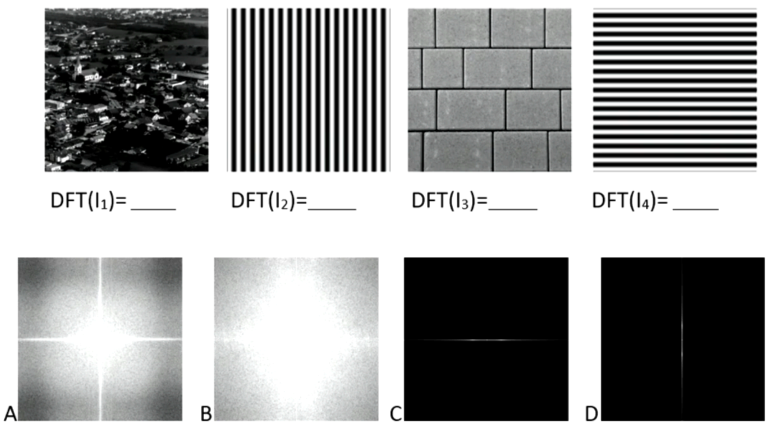

v
u
v
u
v
u
Higher frequencies are further away from the origin.

Testähnliches Beispiel:



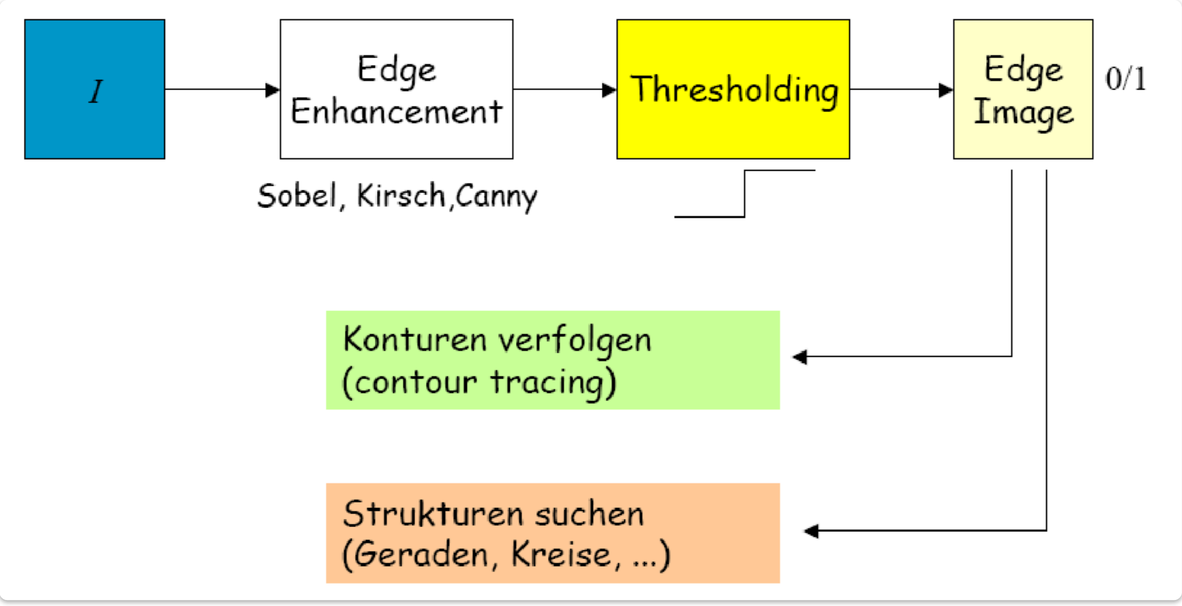
Beispiel Globale Operationen

- Die Bilder A-D zeigen den logarithmierten Betrag des Fourier-Spektrums eines Bildes. Ordnen Sie die Eingabebilder I_1 bis I_4 dem richtigen Spektrum aus A bis D zu.



Richtige Antwort: BCAD

Hough Transformation



Einführung in die Hough-Transformation

- Ziel: Analyse von Bildinhalten nach Kantendetektion, um größere Strukturen zu finden.
- Problem der Kantendetektion: Viele vermeintliche Kantenpunkte gehören in Wirklichkeit nicht zu echten Kanten und umgekehrt fehlen echte Kantenpunkte.
- Lösungsansatz: Kantenpunkte werden zu größeren Strukturen zusammengeführt (Konturen von Objekten), jedoch gibt es bei Unterbrechungen und Verzweigungen Schwierigkeiten.

Prinzip der Hough-Transformation

- Begriff: Methode zur Erkennung von geometrischen Formen in Punktverteilungen (z.B. Geraden, Kreise, Ellipsen).
- Besonderheit: Eignet sich besonders für die Analyse von Bildern mit geometrischen Formen, die in menschlich geschaffenen Objekten häufig vorkommen.
- Geradenerkennung in binären Kantenbildern:
  - Eine Gerade in 2D lässt sich mit zwei Parametern beschreiben (z.B. $y = kx + d$ mit Steigung k und Schnittpunkt d).
  - Ziel: Finden der Geradenparameter k und d, auf denen viele Kantenpunkte liegen.
  - Problem: Alle möglichen Geraden zu berechnen, die durch einen Punkt laufen, wäre ineffizient.

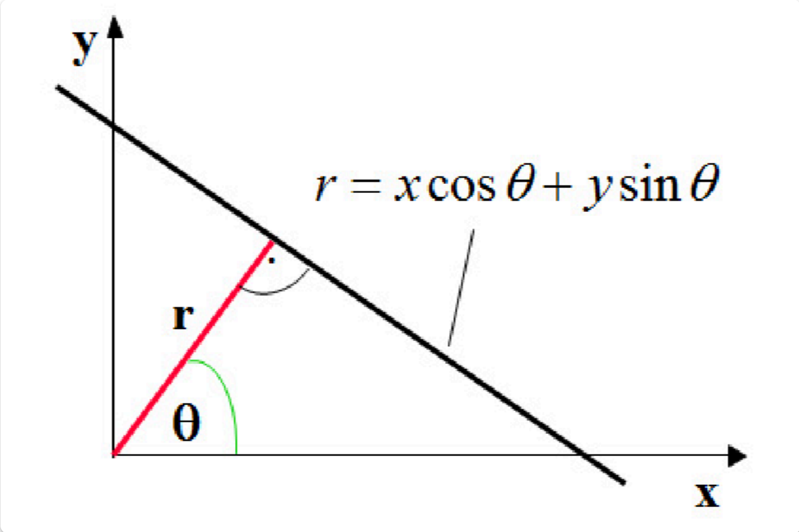
Umgekehrter Ansatz der Hough-Transformation

- Geradendarstellung: Statt klassischer Form $y = kx + d$ wird die Parameterform (Hessesche Normalform) verwendet:

$$r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$$

- Parameter:

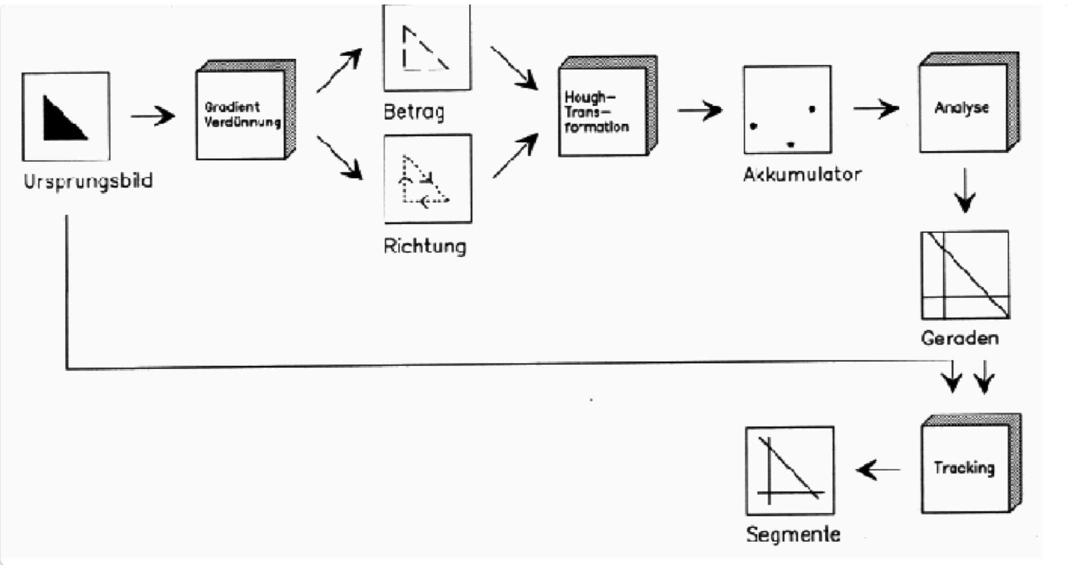
- r: Normalabstand der Geraden zum Ursprung.
- θ: Winkel des Normalabstands zur x-Achse.



- Erklärung: Jede Gerade, die durch einen Punkt $p = (x, y)$ läuft, erfüllt die Gleichung. Dadurch entstehen unendlich viele mögliche Geraden, die durch den Punkt verlaufen, mit variierenden Parametern r und θ.
- Hough-Raum: Der Parameterraum (r, θ) wird als Hough-Raum bezeichnet. Jeder Punkt im Hough-Raum entspricht einer Geraden im Bild.

Vorgehensweise bei der Hough-Transformation

- Kantenbild erstellen: Aus dem Eingangsbild $I(u, v)$ wird ein Kantenbild erzeugt, wobei der Betrag und die Richtung des Gradienten (z.B. durch Sobel-Filter) berechnet wird.
- Akkumulator-Array:
  - Ein zweidimensionaler Akkumulator (Array) wird erzeugt, um den (r, θ)-Raum zu diskretisieren.
  - Für r und θ werden festgelegte Schritte (z.B. r in Pixeln, θ in 1° oder 5°) verwendet.
- Eintragen der Kantenpunkte:
  - Jeder Kantenpunkt wird in den Hough-Raum überführt und im Akkumulator eingetragen. Die Zellen des Akkumulators werden entsprechend inkrementiert.
- Schwellwertanalyse:
  - Wenn der Wert einer Akkumulator-Zelle einen bestimmten Schwellwert überschreitet, repräsentiert diese Zelle eine mögliche Gerade im Bild.



Nachbearbeitung der Ergebnisse

- Tracking der Geraden: Um die Anfangs- und Endpunkte der gefundenen Geraden zu ermitteln, wird ein Tracking-Verfahren angewendet.
  - Dazu wird das Originalbild entlang der gefundenen Geraden abgefahren, und es wird nach Stellen gesucht, an denen die Grauwertdifferenz den Schwellwert überschreitet.
  - An diesen Stellen befinden sich mit hoher Wahrscheinlichkeit Objektkonturen.

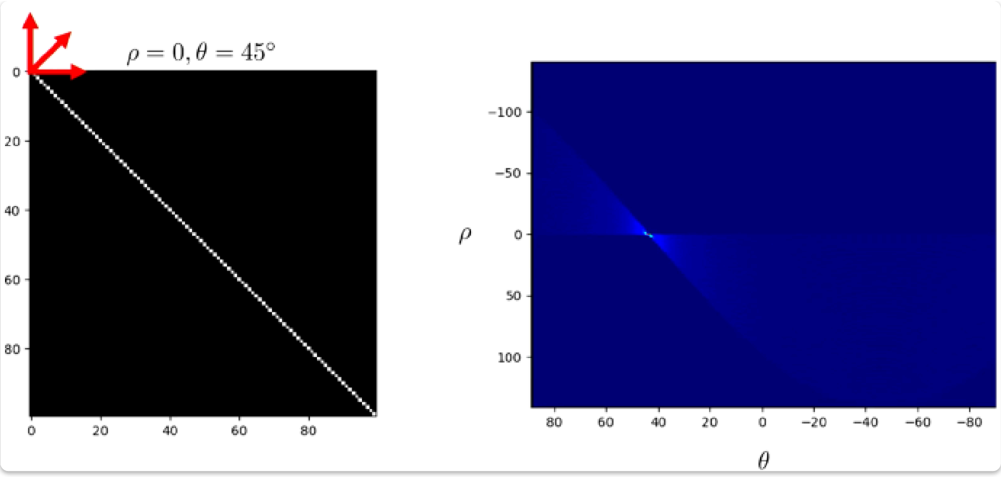
Vorteile der Hough-Transformation

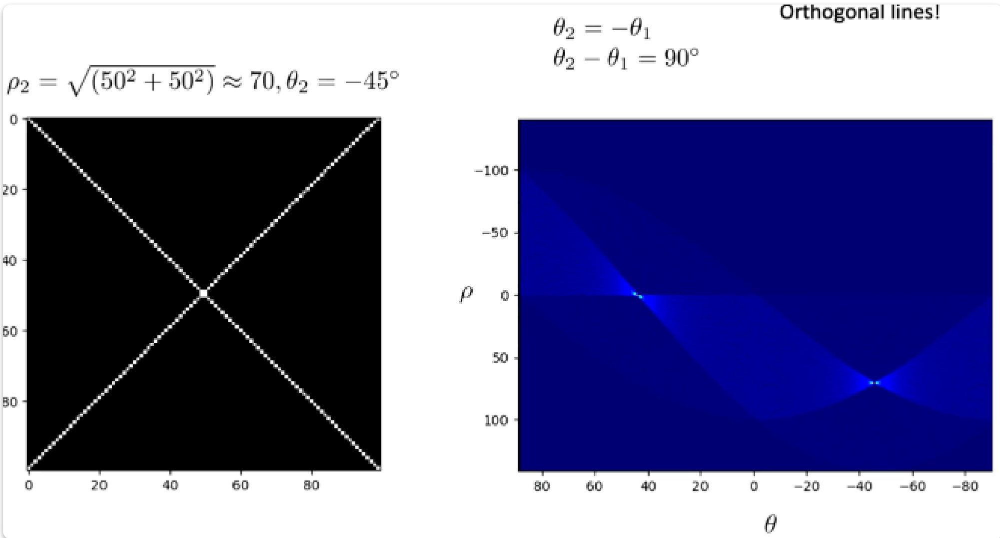
- Berücksichtigung der Kantenrichtung: Die Richtung der Kanten im Originalbild ist bereits bekannt, was die Effizienz steigert.
- Verwendung von Gradienteninformationen: Die Hough-Transformation nutzt den Betrag und die Richtung der Kantenpixel für eine genauere Analyse.

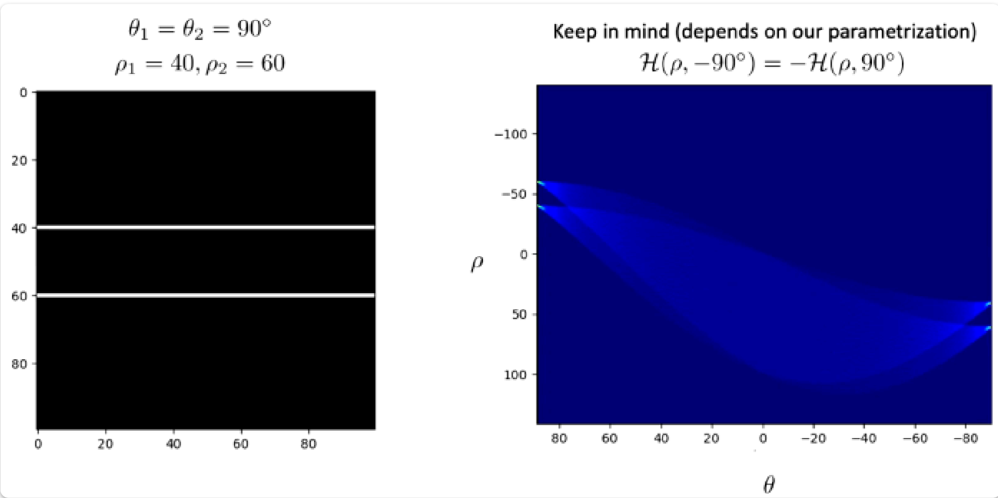
Einschränkungen

- Komplexität: Wenn Filter höherer Ordnung verwendet werden, müssen alle möglichen Geraden durch jeden Kantenpunkt eingetragen werden, was zu einer sinusförmigen Linie im Akkumulator führt und die Berechnungen erheblich verlangsamen kann.

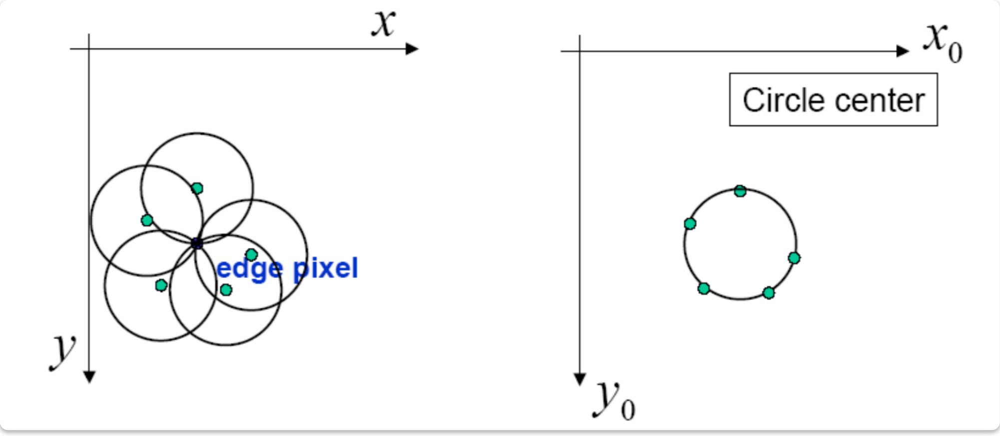
Beispiele aus vo:







Weitere Hough Transformationen



1. Prinzip der Kreiserkennung

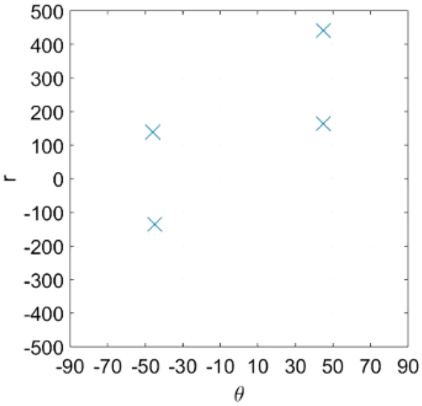
- Ziel: Erkennung von Kreisen im Bild.
- Ähnlichkeit zur Geradenerkennung:
  - Durch jeden Punkt im Originalbild wird ein Kreis mit einem festgelegten Radius gelegt.
  - Die Kreise im Hough-Transformationsraum schneiden sich in bestimmten Punkten, die Kandidaten für die Mittelpunkte der Kreise im Originalbild sind.
- Bestimmung der Kreismittelpunkte:
  - Die Punkte im Hough-Raum, an denen sich die meisten Kreise schneiden, entsprechen den Kreismittelpunkten.
  - Diese Punkte werden zurück in den Originalbereich transformiert, um die tatsächlichen Mittelpunkte der Kreise zu ermitteln.

2. Erweiterung auf Ellipsenerkennung

- Ellipsenparameter:
  - Eine Ellipse wird nicht nur durch den Mittelpunkt (x, y) beschrieben, sondern auch durch zwei Halbachsen a und b.
  - Dadurch ergibt sich ein 4-dimensionaler Hough-Raum, der berücksichtigt werden muss.
- Hough-Raum:
  - Für die Ellipsenerkennung müssen vier Dimensionen im Hough-Raum verwendet werden: die beiden Koordinaten des Mittelpunkts und die beiden Halbachsen.
  - Die Transformation ist komplexer als bei der Kreiserkennung, da sie mehr Parameter berücksichtigt.

Testähnliches Beispiel Hough Transformationen:

- Bei der Hough-Transformation zur Detektion von Linien werden diese in Hessescher Normalform repräsentiert: $r = x\cos(\theta)+y\sin(\theta)$. Im unten stehenden Diagramm sind 4 detektierte Linien im Hough-Raum (Akkumulator-Array) mit einem "X" markiert. Welche der folgenden Aussagen sind hier wahr bzw. falsch?



Alle 4 Linien sind parallel zueinander	☐ wahr	☒ falsch
Mindestens eine Linie verläuft horizontal	☐ wahr	☒ falsch
Mindestens eine Linie verläuft vertikal	☐ wahr	☒ falsch
Die Start- und Endpunkte der Linien lassen sich aus dem Hough-Raum nicht bestimmen	☒ wahr	☐ falsch
Linien werden durch lokale Maxima im Hough-Raum repräsentiert	☒ wahr	☐ falsch