

## 4.3 Asymptotischer Vergleich

Link zur Formelsammlung: [FS\\_4.3 Asymptotischer Vergleich](#)

### Landau-Symbole

$$a_n = O(b_n)$$

Bedeutet: „ $a_n$  ist ein groß O von  $b_n$ , falls es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so dass gilt:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = o(b_n)$$

Bedeutet: „ $a_n$  ist ein klein O von  $b_n$ , falls gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$a_n \sim b_n$$

Bedeutet: „ $a_n$  ist asymptotisch gleich  $b_n$ , falls gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

"Obere, untere Schranke und asymptotisch gleich"

[Mathematik für Informatik, p.173](#)

### Stichpunkte zur Performance-Analyse von Algorithmen

- **Folgen:** Anwendung in Performance-Analyse von Algorithmen (z.B. Laufzeit).
- **Algorithmen & Datenstrukturen:** Operieren auf Größe  $n$  (Beispiel: Sortieren von  $n$  Zahlen).
- $a_n$ : Bezeichnet benötigte Laufzeit.
- **Laufzeit in Sekunden:** Nicht zweckmäßig (abhängig von Hardware/Implementierung).
- **Sinnvolles Maß (Komplexität):** Anzahl benötigter Operationen (elementare Schritte).
- **Analyse-Unterscheidung:**
  - **Average-Case:**  $a_n$  = mittlere Anzahl Operationen für Datensatzgröße  $n$ .
  - **Worst-Case:**  $a_n$  = maximale Anzahl Operationen für Datensatzgröße  $n$ .

#### Definition 4.62 (Landau-Symbole)

[Mathematik für Informatik, p.174](#)

Seien  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $(b_n)_{n \geq 0}$  Folgen. Dann schreibt man

(i)  $a_n = O(b_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  (gesprochen: „ $a_n$  ist ein groß O von  $b_n$ “), falls es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so dass

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt,

(ii)  $a_n = o(b_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  (gesprochen: „ $a_n$  ist ein klein O von  $b_n^*$ “), falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

gilt.

(iii)  $a_n \sim b_n$  (gesprochen: „ $a_n$  ist asymptotisch gleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

gilt.

(iv)  $a_n = \Omega(b_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  (gesprochen: „ $a_n$  ist Omega von  $b_n$ “), falls es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so dass

$$\left| \frac{b_n}{a_n} \right| \leq C \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Weiter gilt:  $a_n = \Omega(b_n)$  genau dann, wenn  $b_n = O(a_n)$ .

(v)  $a_n = \Theta(b_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  (gesprochen: „ $a_n$  ist Theta von  $b_n$ “), falls es positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  gibt, so dass

$$C_1 |b_n| \leq |a_n| \leq C_2 |b_n| \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, d.h.  $a_n = \Theta(b_n)$  genau dann, wenn sowohl  $a_n = O(b_n)$  als auch  $a_n = \Omega(b_n)$  zutrifft.

[Tafelbild1](#)

[Tafelbild2](#)

Quellen:

- [Mathematik für Informatik](#);
- [4. Folgen Reihen und Funktionen](#)