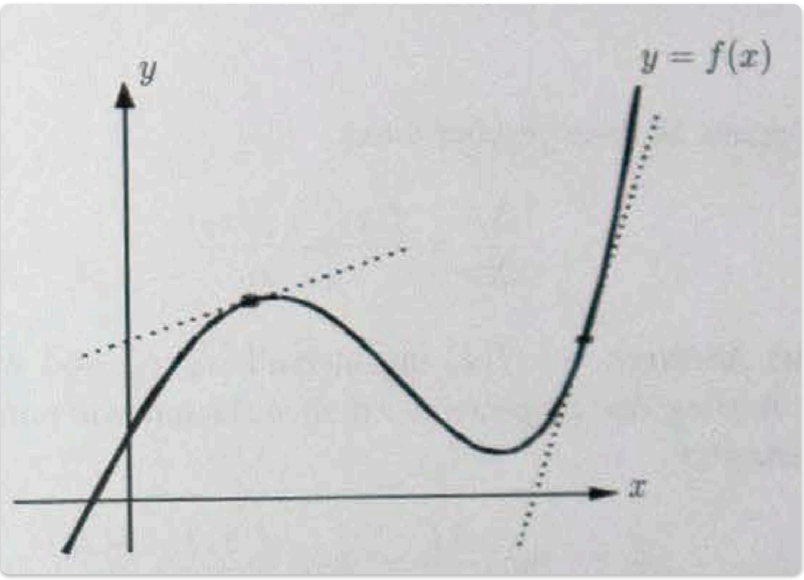
5.1 Ableitung

Einleitung

Bedeutung der Tangente

- Die Tangente beschreibt die lokale Änderung der Funktion an einem bestimmten Punkt
- Sie gibt an, wie schnell sich der Funktionswert bei einer Änderung des Arguments verändert



Anstieg der Tangente

- Der Anstieg der Tangente entspricht der Änderungsrate der Funktion an der betrachteten Stelle
- Steiler Funktionsgraph $\Rightarrow$ große Änderungsrate, d.h. eine kleine Änderung im Argument führt zu einer großen Änderung im Funktionswert
- Flacher Funktionsgraph $\Rightarrow$ kleine Änderungsrate, d.h. eine Änderung im Argument führt nur zu einer geringen Änderung des Funktionswertes

Physikalische Bedeutung

- Ist $f(t)$ der Ort eines Objekts zur Zeit t, so entspricht die Änderung von $f(t)$ der Geschwindigkeit
- Die Tangente an den Graphen von $f(t)$ gibt also die Geschwindigkeit des Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt an

Bedeutung für Approximationen

- Bei starker Vergrößerung („Hineinzoomen") sieht der Funktionsgraph lokal wie eine Gerade aus

- Die Tangente dient als lineare Approximation der Funktion in der Umgebung eines Punktes
- Vorteil: Eine Gerade ist einfacher zu handhaben als komplexere Funktionen

---

Definitionen

Definition Sekante / Mittlereänderung / Differentialquotient

Mathematik für Informatik, p.200

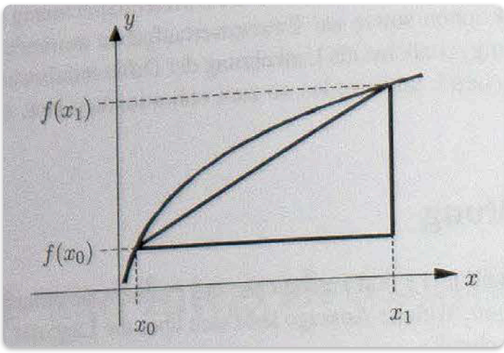
Der Anstieg der Sekante ist gegeben durch:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Das ist die mittlere Änderung von $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$ und wird Differenzenquotient genannt. Um den Anstieg der Tangente zu erhalten, lassen wir nun Δx gegen 0 gehen und berechnen den Grenzwert

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Diese Größe heißt, falls der Grenzwert existiert, Differentialquotient.



Definition 5.1

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt x_0, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert wird dann die Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt und mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Falls f für alle $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f.

in vo 1:1 gleich beschrieben: sem_2/Analysis/vo_md_zsmf/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414102511.png

Hier wird der Differenzenquotient mit dem sem_2/Analysis/vo/4. Folgen Reihen und Funktionen/4.1 Folgen > Limes / Grenzwert erweitert

Beispiel zu Ableitungen von einfachen Funktionen

Beispiel 5.2 (Ableitungen einfacher Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.201

(a) Konstante Funktionen $f(x) = c$. Es gilt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$ für alle x_0. Daher folgt aus $f(x) = c$, dass $f'(x) = 0$.

(b) Lineare Funktionen $f(x) = ax + b$. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

Es gilt also $f'(x) = a$. Die Ableitung von linearen Funktionen ist konstant.

(c) Für $f(x) = 2x^2 + 1$ folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2(x + x_0) = 4x_0.$$

(d) Für Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann zeigen, dass die analoge Aussage auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt (siehe Übungsaufgaben)

(e) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ erfüllt

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Daher gilt zunächst

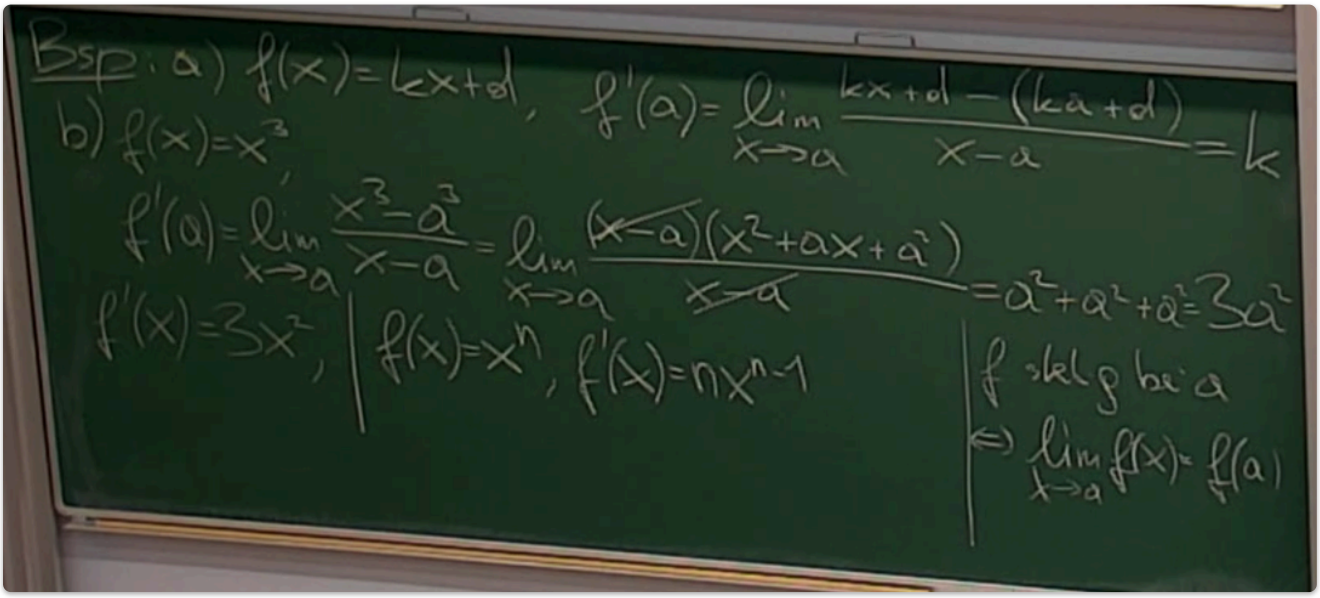
$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 > 0 \\ -1 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$$

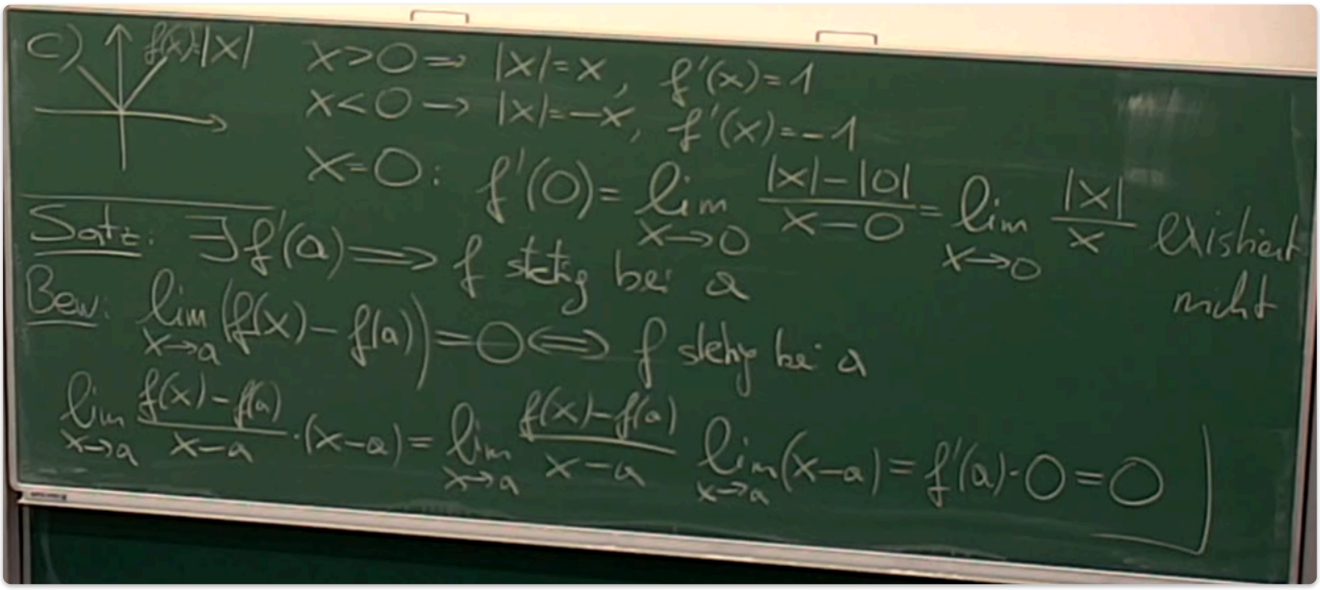
Interessant ist aber der Fall $x_0 = 0$. Es gilt

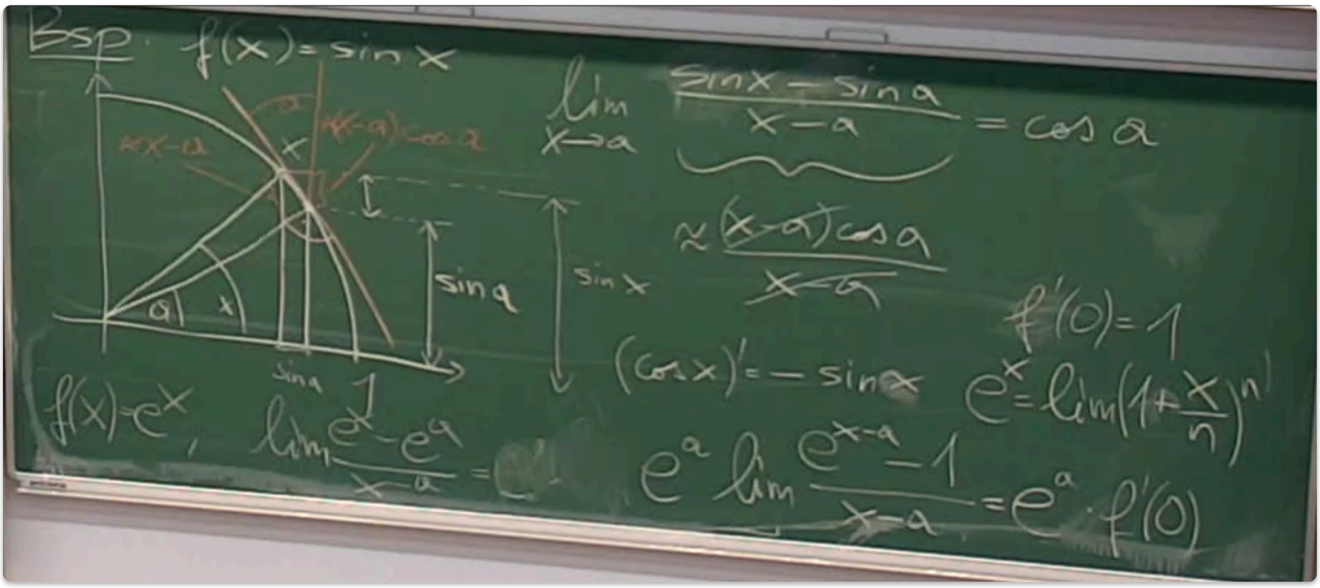
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Da $\frac{|x|}{x}$ in jeder Umgebung um $x = 0$ sowohl die Werte -1 als auch 1 annimmt, kann der Grenzwert nicht existieren. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle $x = 0$ zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar.

vo (ein paar BSPs sind anders)







Ableitungsregeln

Satz 5.5 (Ableitungsregeln)

Mathematik für Informatik, p.203

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(cf(x))' = cf'(x)$.

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$. Diese Regel gemeinsam mit (i) besagt, dass die Differentiation eine lineare Abbildung ist.

(iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Produktregel)

(iv) Falls $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(v) Sei $F(x) = f(g(x))$ eine zusammengesetzte Funktion. Dann gilt

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x). \qquad (\text{ Kettenregel })$$

Hier wird f als äßßere Funktion, g als innere Funktion bezeichnet. Die Kettenregel besagt demnach: Äußere Funktion ableiten und mit der inneren Ableitung (genauer: der Ableitung der inneren Funktion) multiplizieren.

In der Leibniz'schen Schreibweise lässt sich diese Regel besonders kurz schreiben: Fasst man nämlich $g(x)$ als Argument von f auf, dann erhält man

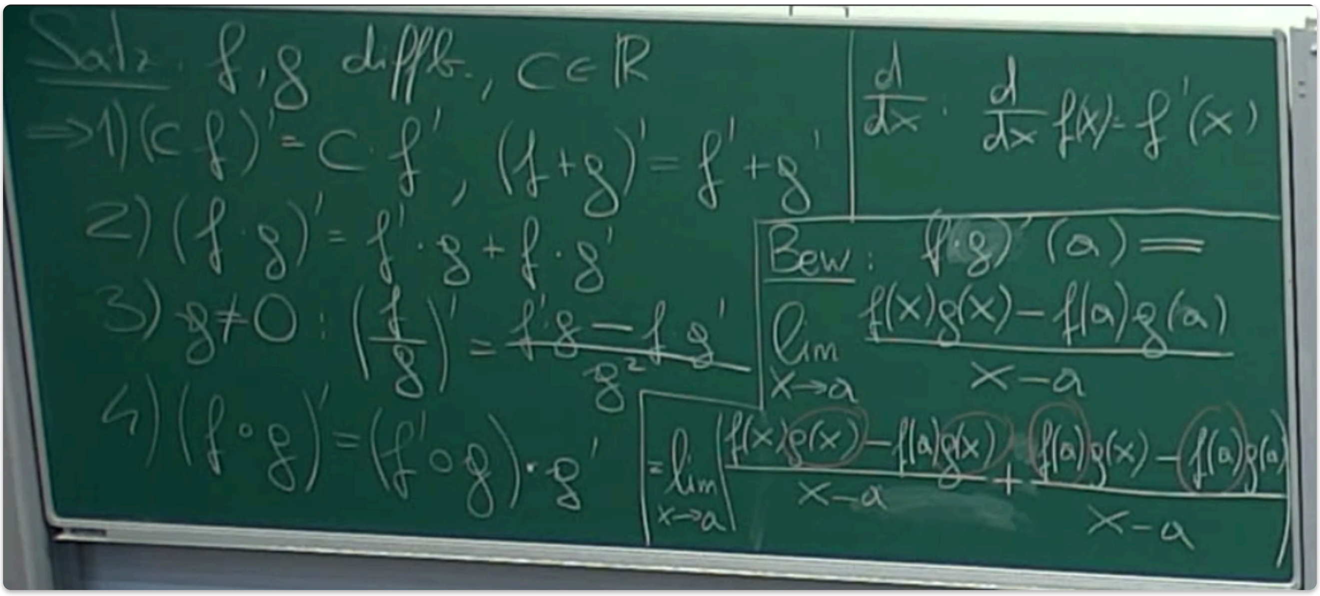
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

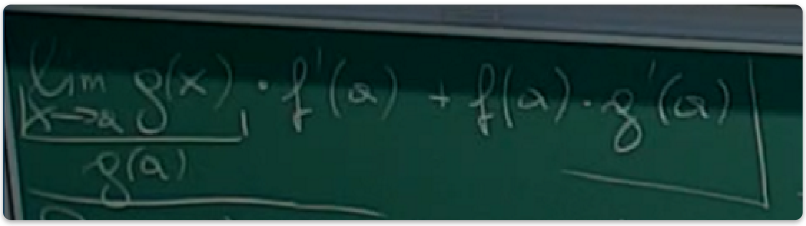
(vi) Falls $f : D \to f(D)$ invertierbar ist und die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt, dann gilt für alle $y \in f(D)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

In der Leibniz'schen Schreibweise ist diese Regel besonders einprägsam: Gilt $f(x) = y$, so lässt sich $f'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$ schreiben. Für die Umkehrfunktion gilt aber $x = f^{-1}(y)$ und bei Differentiation nach y schreibt man dann $\frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Die obige Regel lautet nun

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$





Beweis von Produktregel

Beweis Produktregel

Mathematik für Informatik, p.203

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind trivial, weshalb wir uns gleich der Produktregel zuwenden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{\prime}\left(x_0\right) & =\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) g(x)-f\left(x_0\right) g\left(x_0\right)}{x-x_0} \\
& =\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) g(x)-f\left(x_0\right) g(x)+f\left(x_0\right) g(x)-f\left(x_0\right) g\left(x_0\right)}{x-x_0} \\
& =\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} g(x)+\lim _{x \rightarrow x_0} f\left(x_0\right) \frac{g(x)-g\left(x_0\right)}{x-x_0} \\
& =\underbrace{\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}}_{f^{\prime}\left(x_0\right)} \underbrace{\lim _{x \rightarrow x_0} g(x)}_{g\left(x_0\right)}+f\left(x_0\right) \underbrace{\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g\left(x_0\right)}{x-x_0}}_{g^{\prime}\left(x_0\right)} .
\end{aligned}
$$

Beweis von Kettenregel

Beweis Kettenregel

Mathematik für Informatik, p.204

Zum Beweis der Kettenregel betrachten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Der zweite Faktor ist definitionsgemäß $g'(x_0)$. Da g differenzierbar und folglich auch stetig ist, folgt $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Daher ist der erste Faktor gleich $f'(g(x_0))$ wie behauptet. Zu beachten ist, dass diese Herleitung $g(x) \neq g(x_0)$ voraussetzt. Im Fall $g(x) = g(x_0)$ verschwindet aber der Differenzenquotient in (5.2), so dass diese Fälle bei der Grenzwertbildung in (5.2) keine Rolle spielen.

Die Quotientenregel beweist man durch Anwendung der Produktregel auf $f(x)\frac{1}{g(x)}$, wobei auf den zweiten Faktor die Kettenregel angewendet werden muss (mit $\frac{1}{g(x)} = h(g(x))$ und $h(x) = \frac{1}{x}$, siehe auch Beispiel 5.2d).

Um (vi) zu beweisen, setzen wir $f(x) = y$ und $f(x_0) = y_0$. Nun rufen wir uns in Erinnerung, dass f stetig ist (wegen Satz 5.3) und daher f^{-1} ebenso (wegen Satz 4.91). Somit gilt: Wenn y gegen y_0 konvergiert, dann auch $x \to x_0$. Das impliziert

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Eine Beweisführung mit Hilfe der Kettenregel (Differentiation beider Seiten der Gleichung $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ nach y) setzt die Differenzierbarkeit von f^{-1} voraus, die man dann gesondert beweisen müsste.

Beweis von Quotientenregel

siehe ue5_corr

Ableitung elementarer Funktionen

Beispiel 5.6 Ableitung elementarer Funktionen

Mathematik für Informatik, p.204

(a) Aus $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5$ folgt nach Anwendung der Ableitungsregel (ii) und Ableiten der Potenzfunktionen $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$

(b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^x$. Anwendung der Produktregel ergibt $f'(x) = 2xe^x + \left(1 + x^2\right)e^x = \left(1 + 2x + x^2\right)e^x = (1 + x)^2 e^x$

(c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

(d) Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Mit Ableitungsregel (vi) und $(e^x)' = e^x$ erhalten wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(e) Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Hier lässt sich die Funktion umschreiben zu $f(x) = e^{\alpha \ln x}$ und nun nach der Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Die bereits bekannte Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten ist also für alle Exponenten gültig.

(f) Die Funktion $f(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ ist mehrfach geschachtelt. Es gilt $f(x) = f_1\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right)$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ und $f_3(x) = 1 + x^2$. Folglich haben wir $f_1'(x) = \cos x$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f_3'(x) = 2x$. Die Ableitung von f ermittelt man nun mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = f_1'\left((f_2 \circ f_3)(x)\right) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = f_1'\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right) \cdot f_2'\left(f_3(x)\right) \cdot f_3'(x)$$

Das ergibt

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

(g) $f(x) = \arctan x$. Setzen wir $y = f(x)$, dann folgt $x = \tan y$. Weiters gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

in vo haben wir weniger davon beachtet, aber die die wir beachtet haben waren 1:1 gleich:

- sem_2/Analysis/vo_md_zsmf/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414105230.png
- sem_2/Analysis/vo_md_zsmf/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414105301.png

Kurzfassung der grundlegenden Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
ax^k	$(ak)x^{k-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Höhere Ableitungen

Mathematik für Informatik, p.205

Bis jetzt haben wir in diesem Abschnitt nur erste Ableitungen betrachtet. Falls jedoch die Ableitung einer Funktion wiederum differenzierbar ist, so lassen sich auch höhere Ableitungen bestimmen.

Definition 5.7 (n-te Ableitung)

Eine Funktion $f(x)$ heißt an einer Stelle $x_0 n$-mal differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert, die rekursiv durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(1)}(x) = f'(x)$$

definiert ist. Ist $f^{(n)}$ auch stetig in x_0, dann heißt $f(x) n$-mal stetig differenzierbar in x_0.

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable