6.3 Bestimmung von Extrema

1. Lokale Extrema

Definition 6.31

Mathematik für Informatik, p.259, Tafel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle $\mathrm{x}_0 \in D$ ein relatives (oder lokales) Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap D$ gilt: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (bzw. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$).

Eine Stelle x_0 heißt absolutes (oder globales) Maximum (bzw. Minimum) von f, falls diese Ungleichung für alle $\mathrm{x} \in D$ gilt.

Satz 6.32

Mathematik für Informatik, p.259

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f habe in x ein relatives Extremum und sei darüber hinaus in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar. Dann verschwinden in $\mathbf{x}$ alle partiellen Ableitungen, d.h. $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Beweis.
Ein relatives Extremum $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von f ist auch relatives Extremum der Funktionen $g_k(x) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Daher ist $g_k'(x_k) = 0$. Andererseits ist aber $g_k'(x_k) = f_{x_k}(\mathbf{x})$, also ist $f_{x_k}(\mathbf{x}) = 0$ für alle k.

Ergänzung:
Für total differenzierbare Funktionen ist die Aussage des Satzes auch anschaulich einleuchtend. Denn ein relatives Maximum ist ja nichts anderes als ein „Gipfel" des Funktionsgraphen. Deshalb ist die Tangentialebene dort waagrecht. Somit sind die Anstiege in alle Richtungen, die ja durch die Richtungsableitungen beschrieben werden, gleich 0 . Die Bedingung grad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist nur notwendig, aber nicht hinreichend, wie das folgendeBeispiel zeigt. Punkte mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ heißen stationäre Punkte.

Beispiel 6.33

Mathematik für Informatik, p.260

(a) Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. Für ein relatives Extremum müssen die Gleichungen $f_x(x, y) = 2x = 0$ und $f_y(x, y) = 2y = 0$ gelten. Aus diesen beiden

Gleichungen folgt $x = y = 0$. Im Ursprung $(0, 0)$ befindet sich auch das relative Minimum dieser Funktion (siehe Abb. 6.8, linkes Bild).

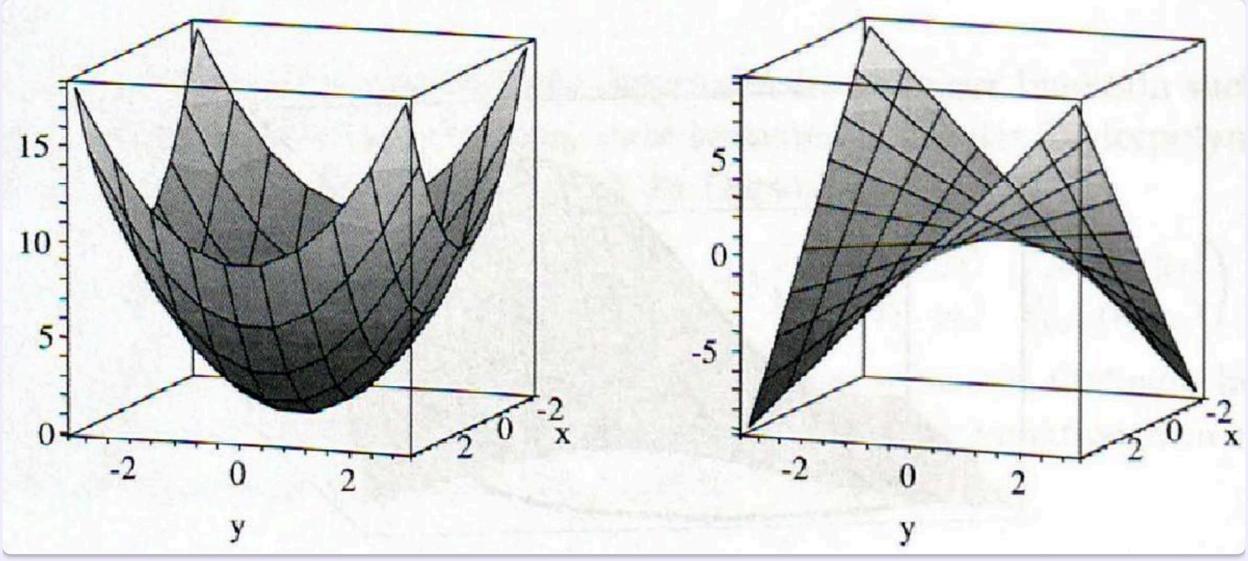
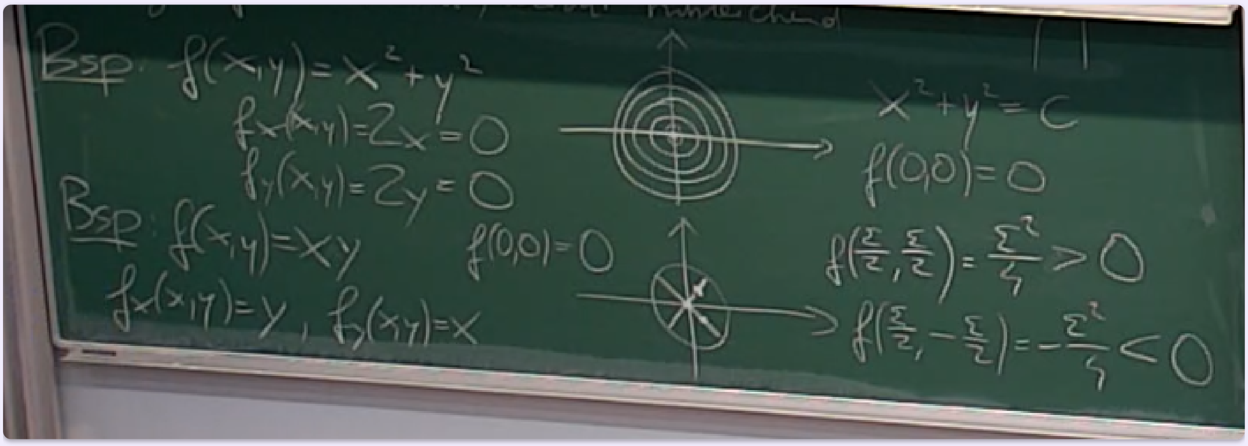


Abbildung 6.8 Links: $(0, 0)$ ist relatives Minimum von $f(x, y) = x^2 + y^2$. Rechts: Der Sattelpunkt $(0, 0)$ von $f(x, y) = xy$

(b) Nun betrachten wir die Funktion $f(x, y) = xy$. Wegen $f_x(x, y) = y$ und $f_y(x, y) = x$ ist die einzige Stelle, die als relatives Extremum in Frage kommt, der Ursprung (0,0). Es liegen aber in jeder ε-Umgebung sowohl Punkte mit $f(x, y) > 0$ als auch Punkte mit $f(x, y) < 0$. Denn $U_\varepsilon(0, 0)$ ist der Kreis mit Radius ε und Mittelpunkt $(0, 0)$. Darin liegen die Punkte $(\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ mit $f(\varepsilon/2, \varepsilon/2) = \varepsilon^2/4 > 0$ und $(\varepsilon/2, -\varepsilon/2)$ mit $f(\varepsilon/2, -\varepsilon/2) = -\varepsilon^2/4 < 0$. Die Bedingung $f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0$ ist daher nur notwendig, aber nicht hinreichend für ein relatives Extremum.



Hinreichende Bedingung für relative Extrema

Mathematik für Informatik, p.260

- Problemstellung: Wie kann man feststellen, ob eine Stelle x mit $\text{grad } f(x) = 0$ (also einem kritischen Punkt) ein relatives Extremum ist und welche Art von Extremum vorliegt?
- Aus der Darstellung (6.10 (Satz von Taylor)) und der Bedingung $\text{grad } f(x) = 0$ folgt:

$$f(x+h) = f(x) + h \text{ grad } f(x) + \frac{1}{2!} h H_f(x) h^T + O(||h||^3)$$

  Da $\text{grad } f(x) = 0$ ist, vereinfacht sich dies zu:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2!} h H_f(x) h^T + O(||h||^3) \quad (6.11)$$

  - Hierbei ist $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle x.
- Analyse des Fehlerterms: Für betragsmäßig hinreichend kleine h ist der Fehlerterm $O(||h||^3)$ (Terme höherer Ordnung, die schneller gegen null gehen als $||h||^3$) vernachlässigbar gegenüber dem Term $\frac{1}{2!} h H_f(x) h^T$.
- Schlussfolgerung: Es genügt, das lokale Verhalten des Terms $h H_f(x) h^T$ zu kennen, um die Art des Extremums zu bestimmen.
  - Dieser Term, auch quadratische Form genannt, ist entscheidend für die Charakterisierung von Extrema.
- Bedingung für ein relatives Minimum:
  - Wenn $h H_f(x) h^T > 0$ für hinreichend kleine h (d.h., für $0 < ||h|| < \epsilon$, wobei ϵ klein genug ist), dann folgt daraus $f(x+h) > f(x)$ für $0 < ||h|| < \epsilon$.
  - Ergebnis: In diesem Fall liegt ein relatives Minimum vor.
- Der Term $h H_f(x) h^T$ als quadratische Form:
  - Der Term $h H_f(x) h^T$ ist eine quadratische Form.
  - Aufgrund des Satzes von Schwarz ist die Hesse-Matrix $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix.
  - Die Bedingung $h H_f(x) h^T > 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die Hesse-Matrix $H_f(x)$ positiv definit ist.
- Bedingung für ein relatives Maximum:
  - In analoger Weise folgt aus der negativen Definitheit von $H_f(x)$ das Vorliegen eines lokalen Maximums.
- Zusammenfassung: Diese Überlegungen führen zum folgenden Satz (der die genauen Kriterien für Extrema basierend auf der Hesse-Matrix formuliert).

> ⓘ Satz 6.34
>
> Mathematik für Informatik, p.261, Pasted image 20250520095129.png

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Weiters sei $\mathbf{x}_0 \in D$ ein Punkt mit grad $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Bezeichne $H(\mathbf{x})$ die Hesse-Matrix von f in $\mathbf{x}$.

Falls $H(\mathbf{x}_0)$ negativ definit ist, so liegt bei $\mathbf{x}_0$ ein relatives Maximum vor.

Im positiv definiten Fall liegt ein relatives Minimum vor.

Ist $H(\mathbf{x}_0)$ indefinit, so ist an der Stelle $\mathbf{x}_0$ kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt von f.