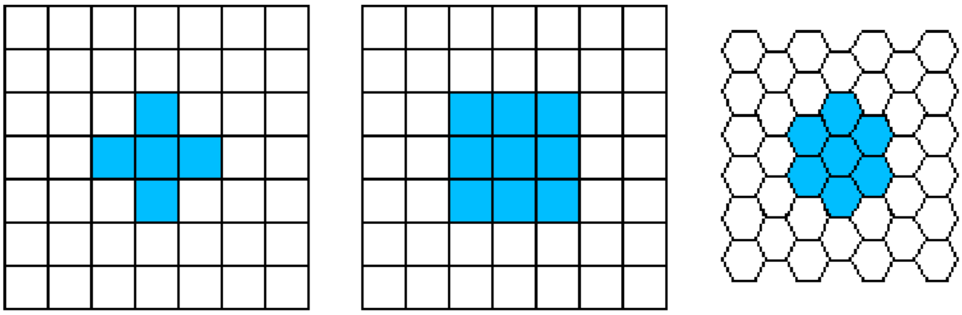
5. Lokale Operationen

Quellen:

- EVC_Skriptum_CV, p.24 bis EVC_Skriptum_CV, p.28

Nachbarschaften:



- Eine Nachbarschaft bezeichnet eine kleine, definierte Bildregion um ein Pixel, um Bildverarbeitungsoperationen durchzuführen.

Vierer-Nachbarschaft

- Jedes Pixel P hat **2 horizontale** und **2 vertikale** Nachbarn.
- Koordinaten des Pixels P: (u, v).
- Koordinaten der vier D-Nachbarn: $(u-1, v), (u+1, v), (u, v-1), (u, v+1)$
- Eine Vierer-Nachbarschaft besteht aus **5 Punkten** (Pixel P + 4 D-Nachbarn).

Achter-Nachbarschaft

- Neben den D-Nachbarn hat jedes Pixel P auch **4 diagonale Nachbarn**.
- Koordinaten der diagonalen Nachbarn: $(u-1, v-1), (u+1, v+1), (u-1, v+1), (u+1, v-1)$
- Eine Achter-Nachbarschaft besteht aus **9 Punkten** (Pixel P + 4 D-Nachbarn + 4 diagonale Nachbarn).

Abstand der Nachbarn

- Der Abstand der Nachbarn wird durch die **Metrik** festgelegt:
  - **Euklidische Metrik**: Abstand beträgt $\sqrt{2}$.
  - **Manhattan-Metrik**: Abstand beträgt 2.

Was sind lokale Operationen

Punktoperationen

- Der neue Wert eines Bildelements hängt ausschließlich vom ursprünglichen Bildwert an derselben Position ab.
- siehe 4. Punktoperationen

Lokale Operationen (Filter)

- **Ähnlichkeit zu Punktoperationen**: Auch hier besteht eine **1:1-Abbildung** der Bildkoordinaten, d. h., die Geometrie des Bildes bleibt unverändert.
- **Unterschied zu Punktoperationen**: Das Ergebnis wird nicht nur aus einem einzigen Ursprungspixel berechnet, sondern aus mehreren Pixeln des Originalbildes.
- Die Koordinaten der Quellpixel sind bezüglich der aktuellen Position (u, v) definiert und bilden eine zusammenhängende Region.

Filterregion

- Die **Größe der Filterregion** bestimmt, wie viele ursprüngliche Pixel zur Berechnung des neuen Pixelwerts beitragen und damit das **räumliche Ausmaß des Filters**.
- Eine gängige Filtergröße ist **3 × 3**, zentriert in der Achter-Nachbarschaft um die Koordinate (u, v).
- Die Form der Filterregion muss nicht quadratisch sein, sondern kann beliebige Formen annehmen.

Lineare Filter

- **Bezeichnung**: Lineare Filter verbinden die Pixelwerte innerhalb der Filterregion in **linearer Form**, d. h., durch eine gewichtete Summation.
- **Beispiel**: Die **lokale Mittelwertbildung** ist ein einfaches Beispiel, bei dem alle neun Pixel der 3 × 3 Filterregion mit der Gewichtung $1/9$ summiert werden.

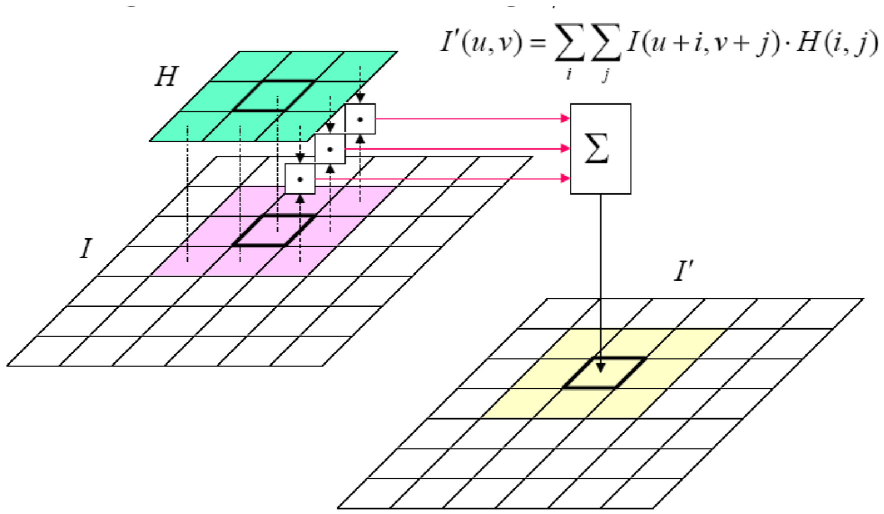


Abbildung 30: Berechnung einer Faltung (Convolution)

Filtermatrix

- **Definition**: Eine **Filtermatrix** oder **Filtermaske** $F(i,j)$ spezifiziert die Größe, Form und die zugehörigen **Gewichte** der Filterregion.
  - Die Größe der Matrix entspricht der Größe der Filterregion.
  - Jedes Element $F(i,j)$ der Matrix definiert das Gewicht des entsprechenden Pixels.
- **Einzigartigkeit**: Das Ergebnis eines linearen Filters ist eindeutig und vollständig durch die Koeffizienten in der Filtermatrix bestimmt.

Anwendung des Filters

- Die Anwendung eines linearen Filters auf ein Bild erfolgt durch folgende Schritte:
  1. **Positionierung der Filterfunktion** F: Die Filtermatrix F wird so über das Bild I positioniert, dass ihr Koordinatenursprung $F(0,0)$ auf das aktuelle Bildelement $I(u,v)$ fällt.
  2. **Multiplikation und Summation**: Alle Bildelemente in der Filterregion werden mit den jeweils darüber liegenden Filterkoeffizienten multipliziert und die Ergebnisse werden summiert.
  3. **Speichern des Ergebnisses**: Die resultierende Summe wird an der entsprechenden Position im Ergebnisbild $I'(u,v)$ gespeichert.

Berechnung für den 3 × 3 Filter

- Für einen 3 × 3 Filter des neuen Bildes $I'(u,v)$ wird der Wert für jedes Pixel wie folgt berechnet:
  - Die Schritte 1–3 werden an jeder Position (u,v) im Bild wiederholt, um das gefilterte Bild zu erhalten.

Tiefpassfilter

Unterscheidung zwischen Tiefpass- und Hochpassfiltern

- **Tiefpassfilter**:
  - Filtern **hohe Frequenzen** heraus und lassen **niedrige Frequenzen** passieren.
  - Eignen sich für **Rauschunterdrückung** bzw. als **Glättungsoperatoren**.
  - Bekannte Tiefpassfilter: **Mittelwertfilter** und **Gauß-Filter**.
- **Hochpassfilter**:
  - Filtern **tiefe Frequenzen** heraus und lassen **hohe Frequenzen** passieren.
  - Eignen sich z. B. für die **Kantendetektion**. (siehe 8. Bildmerkmale - Interest Points)

Mittelwertfilter (Box-Filter)

- **Filtermaske**: Besteht aus lauter gleichen Gewichten (1), einfachste Form aller Tiefpassfilter.
- **Nachteile**:
  - Scharf abfallende Ränder und unoptimales Frequenzverhalten.
  - Alle Bildelemente haben das gleiche Gewicht, wodurch das Zentrum nicht stärker gewichtet wird als die Ränder.

Gauß-Filter

- **Filtermaske**: Entspricht einer diskreten, zweidimensionalen **Gauß-Funktion**.
  - Beispiel für eine Filtermaske (für $\sigma = 0.5$):
    $$F_{Gauss} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
- **Eigenschaften**:
  - Das mittlere Bildelement erhält das **maximale Gewicht**.
  - Die Werte der übrigen Koeffizienten nehmen mit zunehmender Entfernung zur Mitte **kontinuierlich und gleichmäßig** ab (isotrop).
  - **Standardabweichung** σ bestimmt den „Radius“ der glockenförmigen Funktion und beeinflusst die Stärke der Glättung.

Filtermaske für einen 3 × 3 Gauß-Filter mit $\sigma = 0.5$

- Die resultierende Filtermaske lautet:
  $$F_{Gauss} = \begin{bmatrix} 0.011 & 0.084 & 0.011 \\ 0.084 & 0.619 & 0.084 \\ 0.011 & 0.084 & 0.011 \end{bmatrix}$$
- **Summe der Koeffizienten** muss 1 betragen, was durch Division aller Koeffizienten durch deren Summe erreicht wird.

Wichtige Hinweise

- **Größere Filtermasken** führen zu einer besseren **Approximation der Gauß-Funktion**, aber ändern nicht das **Glättungsverhalten**.
- Die **Stärke der Glättung** kann durch die **Standardabweichung** σ variiert werden.
- Ein **Mittelwertfilter** mit einer 3 × 3 Filtermaske führt zu einem **befriedigenden Ergebnis**, aber der **Gauß-Filter** wird im Allgemeinen bevorzugt.

Differenzfilter

Interpretation negativer Filterkoeffizienten

- Wenn **einzelne Filterkoeffizienten negativ** sind, kann die Filteroperation als **Differenz zweier gewichteter Summen** verstanden werden:
  $\text{Summe positiver Gewichtungen} - \text{Summe negativer Gewichtungen}$
- Innerhalb der Filterregion R werden:
  - Positive Koeffizienten → positiv gewichtete Pixel.
  - Negative Koeffizienten → negativ gewichtete Pixel.

Beispiel: Laplace-Filter

- Filtermatrix:
  $F_{Laplace} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Berechnet die **Differenz zwischen dem zentralen Pixel** (-4) und den **4 umliegenden Pixeln** (Vierer-Nachbarschaft).
- **Übrige 4 Pixel** (diagonale Nachbarn) haben Koeffizienten 0 → **werden nicht berücksichtigt**.

Wirkung der Differenzbildung

- **Gegenteil** zur Durchschnittsbildung:
  - Durchschnitt → **Glättung** von Intensitätsunterschieden.
  - Differenz → **Verstärkung** von Intensitätsunterschieden.
- **Anwendungen**:
  - **Kanten- und Konturverstärkung**
  - **Bildschärfung**
- → **Differenzfilter sind Hochpassfilter**.

Mathematische Grundlage

- Hochpassfilter basieren auf Ableitungen der Bildfunktion $g(x, y)$:
  - **Erste Ableitung → Gradientenfilter**
  - **Zweite Ableitung → Laplace-Filter**

Nachbearbeitung des Ergebnisbildes

- Ergebnis enthält oft **positive und negative Grauwerte**.
- Mögliche Nachbearbeitungen:
  - **Normierung** auf z. B. $[0, 255]$
  - **Betragsbildung**: $|g(x, y)|$

Anwendung in Software (z. B. Adobe Photoshop)

- Umsetzung durch sogenannte **„Custom Filter“**
- Filter mit:
  - **Ganzzahligen Koeffizienten**
  - **Skalierungsfaktor (Scale)**
  - **Offset-Wert**, um negative Ergebnisse in den **sichtbaren Intensitätsbereich** zu verschieben.

Bildrandproblem

- Beim Anwenden von Filtern kann es zu **Problemen an den Bildrändern** kommen.
- Ursache: Die **Filterregion überschreitet den Bildbereich**, es fehlen passende Pixelwerte → das Filterergebnis **kann nicht berechnet werden**.
- Es gibt keine mathematisch exakte Lösung für das Problem
- andere Probleme mit Bildrand siehe: 7. Clipping und Antialiasing

Methoden zum Umgang mit dem Randproblem

1. **Einsetzen eines konstanten Werts**
   - Beispiel: 0 (schwarz)
   - **Nachteil**: Verkleinert den sichtbaren Bildbereich.
   - **Nicht akzeptabel** in den meisten Anwendungen.
2. **Beibehalten der ursprünglichen (ungefilterten) Bildwerte**
   - Filter wird **nicht auf die Randpixel angewendet**.
   - **Nachteil**: Inkonsistente Bildverarbeitung; ebenfalls nicht ideal.
3. **Annahme künstlicher Pixelwerte außerhalb des Bildbereichs**:
   - (a) **Konstanter Wert** außerhalb des Bildes (z. B. schwarz oder grau)
     - Kann bei großen Filtern zu **starken Verfälschungen an den Rändern** führen.

- (b) **Fortsetzung der Randpixel**
  - Randwerte des Bildes werden **nach außen hin fortgeführt**.
  - **Geringe Verfälschung → bevorzugte Methode**
- (c) **Zyklische Wiederholung des Bildes**
  - Das Bild wird **horizontal und vertikal periodisch fortgesetzt**.

Formale Eigenschaften lineare Filter

Ursprung und Definition

- **Lineare Filter** basieren auf dem mathematischen Konzept der **linearen Faltung** (engl. *linear convolution*).
- Sie verknüpft zwei **Funktionen gleicher Dimensionalität**, kontinuierlich oder diskret.
- Für diskrete, 2D-Funktionen I (Bild) und F (Filtermatrix) ist die Faltung definiert als: $I' = I * F I'$
- Dabei gilt (mit Berücksichtigung der Koordinatenumkehr):

  $I'(u, v) = \sum_i \sum_j I(u - i, v - j) \cdot F(-i, -j)$
- Die ursprüngliche lineare Filterdefinition entspricht einer **linearen Korrelation**, da hier **keine Spiegelung** der Filtermatrix erfolgt.

Eigenschaften der linearen Faltung

1. **Kommutativität**:
   $I * F = F * I$
   → Reihenfolge von Bild und Filter spielt **keine Rolle**.
2. **Linearität**:
   - Skalierung eines Bildes:
     $(a \cdot I) * F = a \cdot (I * F)$
   - Addition zweier Bilder:
     $(I_1 + I_2) * F = (I_1 * F) + (I_2 * F)(I1 + I2) * F = (I1 * F) + (I2 * F)$
3. **Assoziativität**:
   $A * (B * C) = (A * B) * C$
   → Filter können **beliebig kombiniert** und **umgruppiert** werden.

Konsequenz: Separierbarkeit

- Ein Filterkern F kann als **Faltungsprodukt kleinerer Filterkerne** beschrieben werden: $F = F_1 * F_2 * \cdots * F_n$
- Besonders nützlich: Trennung in **zwei eindimensionale Filter**:

Beispiel:

- $F_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
- $F_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kombiniert:
$F_{xy} = F_x * F_y$

- Vorteil: **Reduktion der Rechenkomplexität**
  - Normal: $3 \times 5 = 15$ Operationen pro Pixel
  - Separiert: $5 + 3 = 8$ Operationen pro Pixel

Nicht lineare Filter

Nachteil linearer Filter

- Lineare Filter **glätten** nicht nur **Störungen**, sondern auch **gewollte Bildstrukturen** wie:
  - Punkte
  - Kanten
  - Linien
- → **Bildqualität leidet**: Strukturen werden verwischt.
- → Einschränkung ihrer Anwendung bei Struktur- oder Kantenerhaltung.

Rangordnungsfilter (engl. ***rank value filters***)

- **Nichtlineare Filteroperationen**
- Kombination von benachbarten Pixeln durch **Vergleichen und Selektieren**, statt **Gewichten und Addieren**.
- Funktionsweise:
  - Alle Grauwerte innerhalb der Filtermaske werden **sortiert** (aufsteigend).
  - Es wird **ein bestimmter Rang** aus dieser Liste ausgewählt.
  - Dieser Wert ersetzt das zentrale Pixel.

Typen von Rangordnungsfiltern

- **Medianfilter**:
  - Wählt den **mittleren Wert** (Median) der sortierten Grauwerte.
  - Besonders wirksam bei der **Entfernung von Ausreißern** (z. B. Salz-und-Pfeffer-Rauschen).
- **Minimumfilter**:

    - Wählt den **kleinsten** Grauwert in der Region.
- **Maximumfilter**:
    - Wählt den **größten** Grauwert in der Region.

Vorteile

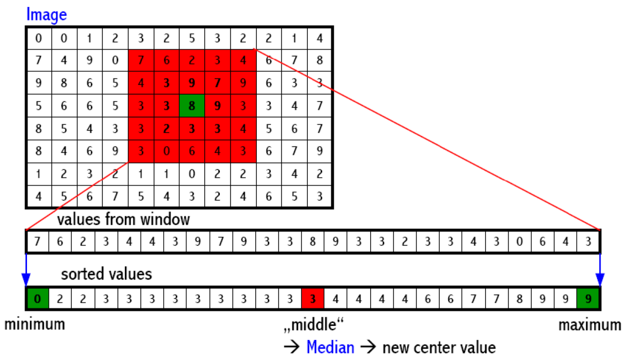
- Besser geeignet zur **Erhaltung von Kanten** und **feinen Strukturen**.
- Besonders effektiv bei **nicht-gausschem Rauschen**.

Definition dieser Filter:

$I(u,v) = \min\{I(u+i,v+j)$ für $(i,j) \in R\} = \min(R_{u,v})$ bzw. $I(u,v) = \max\{I(u+i,v+j)$ für $(i,j) \in R\} = \max(R_{u,v})$, wobei $R_{u,v}$ die Region der Bildwerte bezeichnet, die an der aktuellen Position (u,v) von der Filterregion überdeckt werden. Die Abbildung 31 zeigt die Anwendung von 3x3-Min- und -Max-Filtern auf ein Grauwertbild, das künstlich mit SSalt-and-PepperSStörungen versehen wurde (zufällig platzierte weiße und schwarze Punkte). Der

Abbildung 31: Min-/Max-Filter Anwendung

Min-Filter entfernt die weißen (Salt) Punkte, denn ein einzelnes, weißes Pixel wird innerhalb der 3x3-Filterregion R immer von kleineren Werten umgeben, von denen einer den Minimalwert liefert. Gleichzeitig werden durch das Min-Filter aber dunkle Strukturen räumlich erweitert. Der Max-Filter hat genau den gegenteiligen Effekt.



Grundproblem bei der Filterung

- **Kein Filter** kann *automatisch* unterscheiden zwischen:
    - **wichtigen Strukturen** (z. B. Kanten, Details)
    - **unerwünschten Störungen** (z. B. Rauschen)
- → **Perfekter Filter** existiert nicht.
- Jeder Filter trifft eine **"blinde Entscheidung"**, ob ein Pixel zur Struktur oder zur Störung gehört.

Medianfilter – ein sinnvoller Kompromiss

- Ziel: **Störungen entfernen**, aber **Strukturen besser erhalten** als bei linearen Filtern.
- **Definition**:
  Jedes Bildelement I(u, v) wird durch den **Median** der Pixelwerte innerhalb einer Filterregion R ersetzt: $I(u,v) = median(Ru,v)$
- Der **Median** aus einer sortierten Liste von $2K+1$ Pixelwerten p_i ist der mittlere Wert: $median(p0,\ldots,p2K) = pK$ (sofern $pi \leq pi+1$)

Beispielhafte Wirkung

- **Abbildung 32** (gedanklich):
  - **Linkes Bild**: Originalbild mit **Salt-and-Pepper-Rauschen**.
  - **Mittleres Bild**: Nach Anwendung eines **Mittelwertfilters** – Störungen teilweise noch sichtbar.
  - **Rechtes Bild**: Nach Anwendung eines **Medianfilters** – Störungen **besser entfernt**, Strukturen **erkennbar erhalten**.

Abbildung 32: Anwendung von Mittelwert- und Medianfilter

Vorteile des Medianfilters

- **Robust gegenüber Ausreißern**
  - Besonders effektiv bei impulsartigem Rauschen wie **Salt-and-Pepper-Noise**
- **Erhält Kanten besser** als der Mittelwertfilter
- **Nichtlinear**, daher nicht anfällig für lineare Glättungsverluste