6.3.5 Gruppen und Linearcodes

> *Das kommt im Buch im Kapitel 3.5 vor. Es wird hier als 6.3.5 betitelt, da wir es zeitlich genau hier gemacht haben*

Metrische Räume

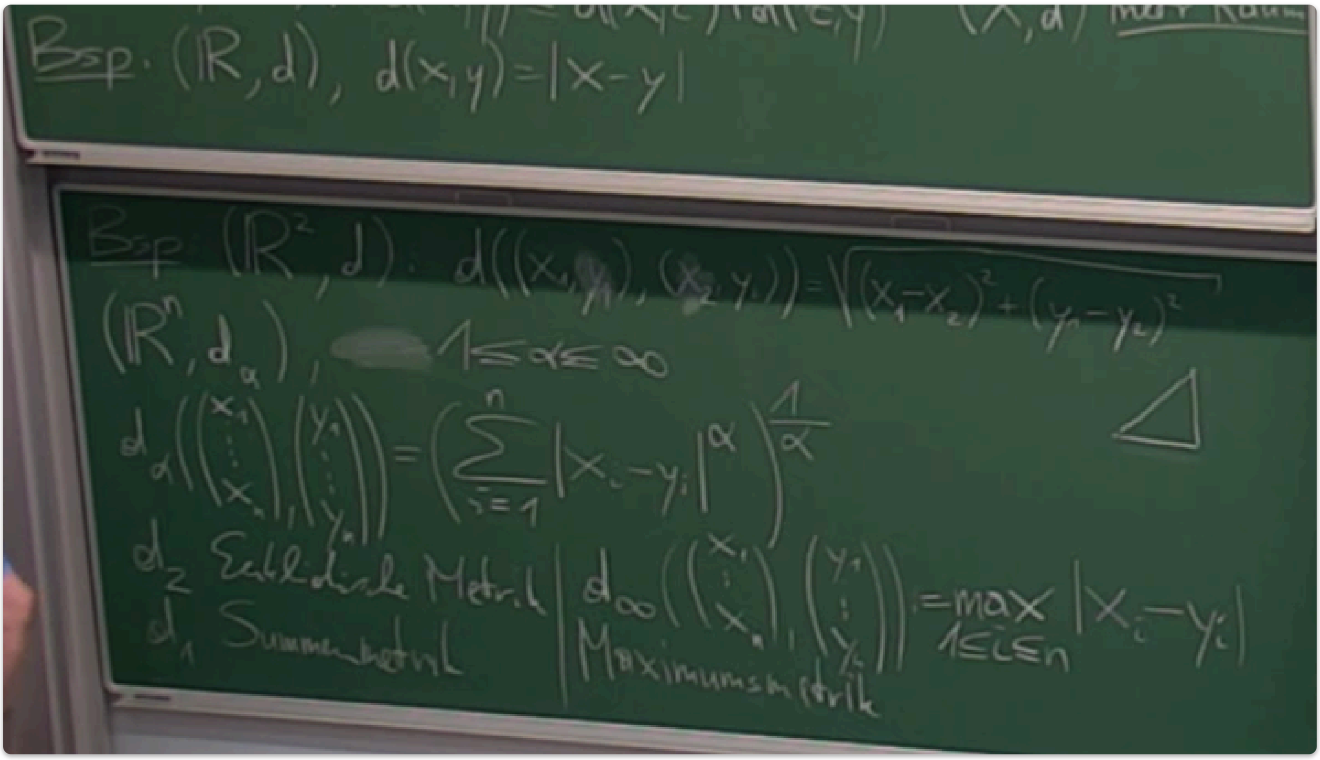
Definition 3.49

Mathematik für Informatik, p.134, Tafelbild

Sei A eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : A \times A \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:
(a) Für alle $x, y \in A$ gilt $d(x, y) \geq 0$. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $x = y$.
(b) Für alle $x, y \in A$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
(c) Es gilt die Dreiecksungleichung, d.h. für alle $x, y, z \in A$ gilt $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

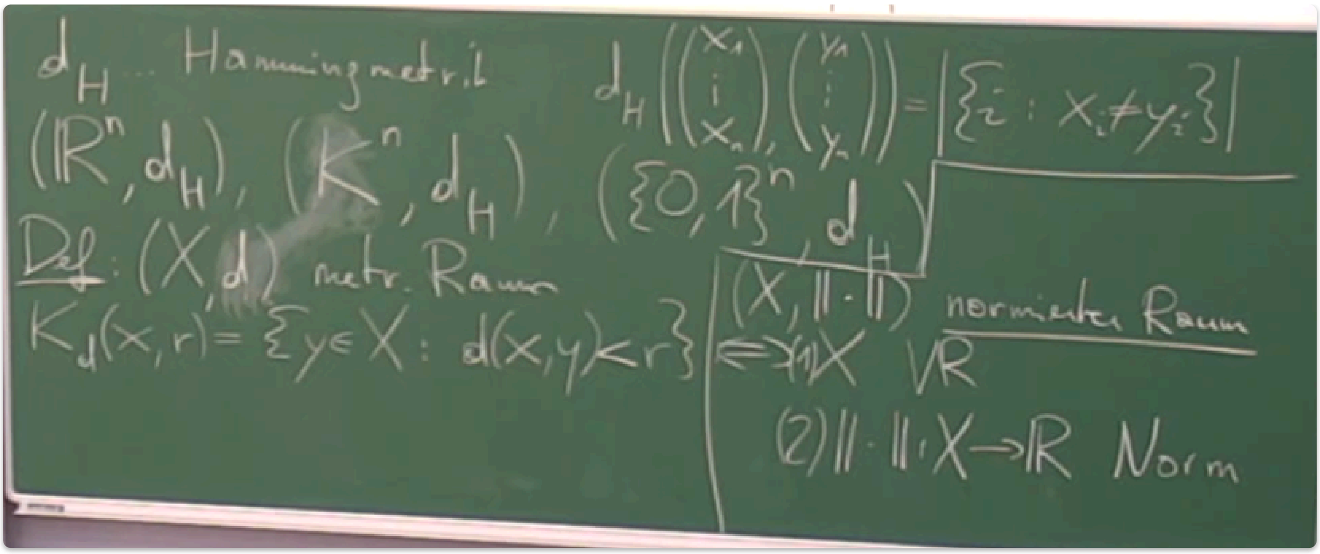
Eine Menge A mit einer Metrik d, also (A, d), heißt metrischer Raum.

Beispiele



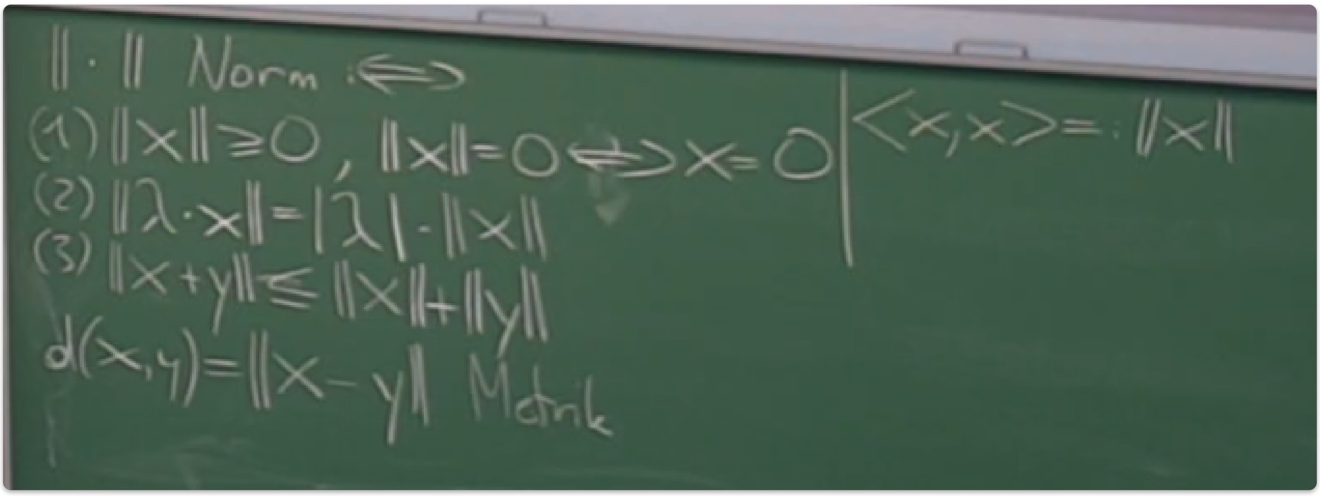
Normierter Raum

Mathematik für Informatik, p.134



Norm

Eine Norm hat folgende Regeln.



Daher wissen wir, dass sobald man ein Skalarprodukt hat, man eine Norm hat (da man Längen messen kann).

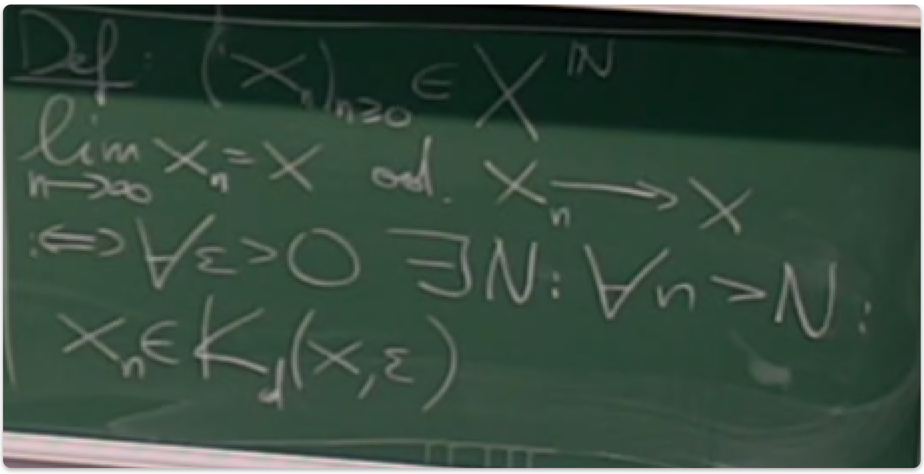
Und in jedem normierten Raum hat man eine Metrik

Verbindung mit Analysis

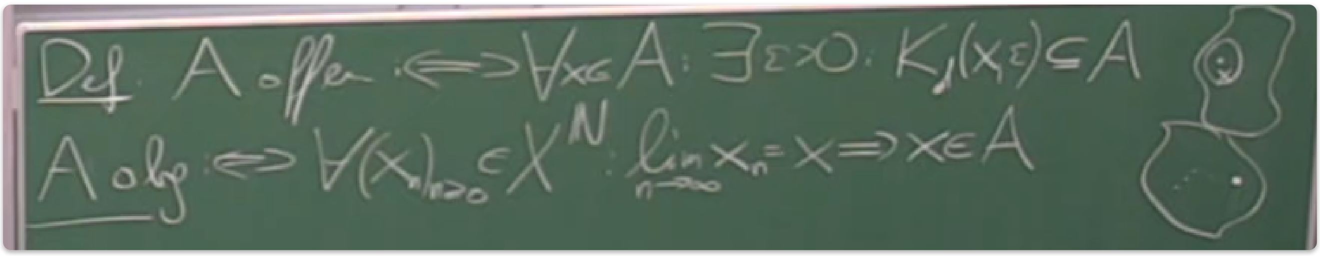
Wir können $K_d(x, \epsilon)$ als ε-Umgebung definieren.

Dann können wir wieder definieren:

Grenzwertdefinition

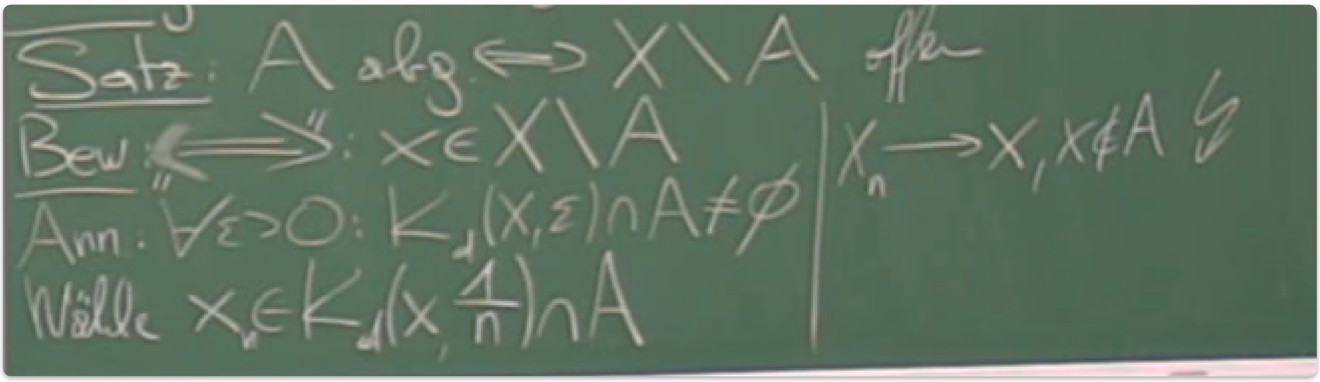


Offene und abgeschlossene Mengen

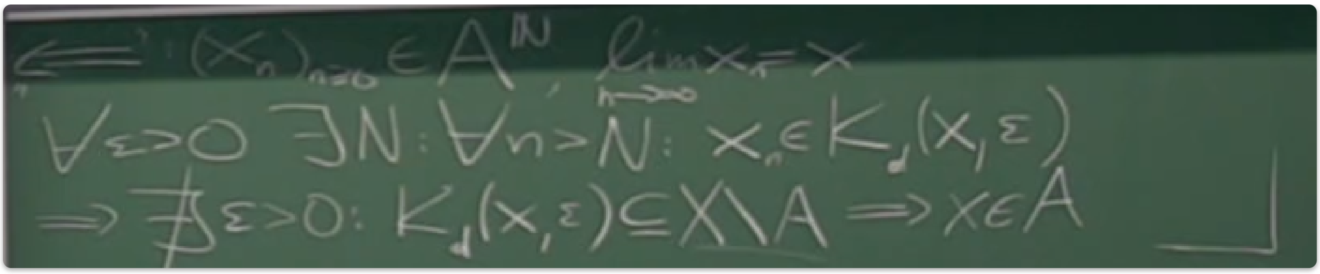


Satz

Man könnte jetzt noch alles definieren wie Stetigkeit auf Metriken etc. aber das würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, daher gibt es jetzt nur noch einen Satz:



Für den Beweis nehmen wir an, dass egal wie klein wir das ϵ wählen, wir werden immer Teile haben die außerhalb vom A liegen. Dann wählen wir ein Element aus der Menge. Diese Element hat die Eigenschaft, dass es gegen x konvergiert, da in jeder ϵ-Umgebung von x sich unendlich viele Folgenglieder davon befinden. Dann haben wir aber den Wiederspruch, dass es immer ein Element außerhalb gibt, egal wie groß ϵ-Umgebung ist.



Andere Richtung:

Da das der Grenzwert ist, wissen wir, dass $x_n \in K_d(x, \epsilon)$. Das heißt x muss aus A sein .