Analysis Formelsammlung für den 1. Test

Vorwort

Diese Formelsammlung enthält den Stoff, der in der Analysis Vorlesung der TU Wien im Sommersemester 2025 vorgetragen wurde, der auch in "Mathematik für Informatik - Vierte erweiterte Auflage" zu finden ist. Die Struktur dieser Formelsammlung basiert demnach auch dem des Buchs.

Für eine ausführlichere Zusammenfassung, siehe: Zusammenfassung von Moritz

> **Hinweis**
>
> Derzeitig befindet sich in dieser Formelsammlung nur Stoff, der für den 1. Analysis Test relevant ist. Weitere Kapitel folgen demnächst! (Rechtschreib- und Satzzeichenfehler bzw. Inkonsistenzen in der Formatierung werden noch ausgebessert).
>
> Falls sich irgendwo Fehler befinden oder es Verbesserungsvorschläge gibt bitte an @aldinapoli auf Discord wenden.

Legende

> **Definitionen**

> **Sätze/Rechenregeln**

> **Verweis auf Definition von anderen Kapiteln und sonstige Hinweise**

> **Hinweis auf Einschränkung von Sätzen und Definitionen**

> **Beispiele**

Inhaltsverzeichnis

4.1 Folgen

1. Definition und Grenzwert

Definition einer Folge

Gegeben sei eine Folge

> $(a_n)_{n\geq 0} = a_0, a_1, a_2, ...$
>
> Folgen lassen sich auch als Funktionen definieren:
> $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Des Weiteren gilt für eine beliebige Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$

> $a(n) = a_n$
> a_n heißt **Glied** der Folge
> n heißt **Index** des Glieds der Folge

ϵ-Umgebung

Eine ϵ-Umgebung von a ist als Intervall definiert, in der folgendes gilt:

> $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \; |x - a| < \epsilon\}$

Grenzwert/Limes

Eine Folge besitzt einen Grenzwert a, wenn **fast alle** Folgenglieder innerhalb einer jeden noch so kleinen ϵ-Umgebung von a sind:

> $\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$
> Der Grenzwert $a = \pm\infty$ heißt **uneigentlicher Grenzwert**

Des Weiteren gilt:

> Eine Folge mit einem Grenzwert a nennt man **konvergent**
> Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**
> Eine Folge mit einem uneigentlichen Grenzwert nennt man **uneigentlich konvergent** oder auch **divergent**

Häufungspunkt/Häufungswert

Eine Folge besitzt einen Häufungspunkt a, wenn **unendlich viele** Folgenglieder innerhalb einer jeden noch so kleinen ϵ-Umgebung von a sind:

Des Weiteren gilt:

> Der größte Häufungspunkt heißt **Limes superior** (geschrieben lim sup$_{n\to\infty}$)
> Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior** (geschrieben lim inf$_{n\to\infty}$)
> Der Häufungspunkt $a = \pm\infty$ heißt uneigentlicher Häufungspunkt

Tip

Fast alle heißt, dass etwas auf alle Elemente mit Ausnahmen von endlich vielen zutrifft.
(Ungefähre Notation: Für $(a_n)_{n\geq 0} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N}$: Elemente a_n erfüllen Eigenschaft {...})

Unendlich viele heißt, dass etwas auf unendlich viele Elemente mit Ausnahmen von unendlich vielen zutrifft.

2. Monotonie und Beschränktheit

Monotonie

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:

> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton steigend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **streng monoton steigend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **schließlich steigend** $:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
>
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton fallend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **streng monoton fallend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **schließlich fallend** $:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
>
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **monoton steigend und fallend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1}$
>
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **oszillierend** $:\Longleftrightarrow \nexists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : (a_n \geq a_{n+1}) \vee (a_n = a_{n+1}) \vee (a_n \leq a_{n+1})$

Beschränktheit

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:

> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **nach oben beschränkt** $:\Longleftrightarrow \exists S : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$
>
> > S heißt **obere Schranke**
> > die größte obere Schranke heißt **Supremum** sup(a_n), für das gilt:
> >
> > > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist nicht nach oben beschränkt $:\Longleftrightarrow$ sup(a_n) $= \infty$
> > > $\lim_{n\to\infty}$sup(a_n) ist der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$
> > > Falls das Supremum in der Menge drinnen ist, nennt man es **Maximum** max M
>
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **nach unten beschränkt** $:\Longleftrightarrow \exists I : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq I$
>
> > I heißt **untere Schranke**
> > die kleinste obere Schranke heißt **Infimum** inf(a_n), für das gilt:
> >
> > > $(a_n)_{n\geq 0}$ ist nicht nach unten beschränkt $:\Longleftrightarrow$ inf(a_n) $= -\infty$
> > > $\lim_{n\to\infty}$inf(a_n) ist der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$
> > > Falls das Infimum in der Menge drinnen ist, nennt man es **Minimum** min M
>
> $(a_n)_{n\geq 0}$ ist **beschränkt**, wenn die Folge nach unten und nach oben beschränkt ist

Satz 4.9

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder reelle Folge besitzt ein Supremum (Infimum)

Satz 4.11

Jede konvergente Folge ist beschränkt

Satz 4.12 (Hauptsatz über monotone Folgen)

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist

3. Rechnen mit Grenzwerten

Satz 4.14 (Rechnen mit Grenzwerten)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit ihren nicht uneigentlichen Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

> i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
>
> ---
>
> ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ Für $\lambda \in \mathbb{R}$
>
> ---
>
> iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
>
> ---
>
> iv) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_n}{b_n}$ falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$
>
> ---
>
> v) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \infty$ falls $b = 0$ und $b_n \neq 0$

Satz 4.15 (Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit ihren Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

> i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } b \in \mathbb{R} \text{ oder } b = \infty \\ -\infty & \end{cases}$
>
> ---
>
> ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } \lambda > 0 \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{wenn } \lambda < 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$
>
> ---
>
> iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty \text{ wenn } b > 0$
>
> ---
>
> iv) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \infty \text{ wenn } b \in \mathbb{R}$

Euler'sche Zahl

Die Euler'sche Zahl ist wie folgt definiert:

> $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$

⚠ **Unbestimmte Formen**

Es lassen sich nicht immer die oben genannten Regeln für Rechenoperationen mit Grenzwerten anwenden. In dem Fall muss man entweder die [Regel von de l'Hospital (5.2.5)] anwenden oder den gegebenen Term umformen, so dass man die oben genannten Rechenregeln anweden kann. Ansonsten muss man sich für die Folgen individuell betrachten, wie sie verlaufen

Zu den unbestimmten Formen gehören folgende Ausdrücke:

> $\infty - \infty$
>
> ---
>
> $\frac{\infty}{\infty}$
>
> ---
>
> $\frac{0}{0}$
>
> ---
>
> 1^{∞}
>
> ---
>
> ∞^{0}
>
> ---
>
> 0^{0}

---

4. Konvergenzuntersuchung

ⓘ **Satz 4.22 (Sandwich-Theorem)**

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$, wobei die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = n$ gegeben sind, dann gilt:

> $\exists k : \forall n > k \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n \leq c_n \iff lim_{n\to\infty}(a_n) = c$
> *Wenn für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $b_n \leq a_n \leq c_n$, dann folgt, dass der Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 0} = c$ ist*

Teilfolge

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n_{\geq 0}}$, dann gilt:

> $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{R}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ heißt Teilfolge
> wobei $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$

ⓘ **Satz 4.26**

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n_{\geq 0}}$ mit einer Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{R}}$, dann gilt:

> $(a_n)_{n\geq 0}$ hat den Häufungspunkt $a :\iff \lim_{n\to\infty}(a_{n_m}) = a$

Satz 4.27 (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq_0}$ enthält einen Häufungspunkt

Cauchyfolge

Eine Folge $(a_n)_{n\geq_0}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:

> $\forall\epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n, m > N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon$

4.29 (Cauchykriterium für Folgen)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist

---

Appendix

Die arithmetische Folge

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0} = a_0 + dn$ mit $d \in \mathbb{R}$ gilt:

> $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } d = 0 \\ \infty & \text{für } d > 0 \\ -\infty & \text{für } d < 0 \end{cases}$

Die geometrische Folge

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0} = q^n$ gilt:

> $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$

Folge zur Definition von e

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 0} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ gilt:

> $\lim_{n\to\infty}(a_n) = e \approx 2.71828$

4.2 Unendliche Reihen

1. Der Begriff der unendlichen Reihe

Definition der unendlichen Reihe

Eine unendliche Reihe ist definiert als eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (manchmal auch ohne die obere Schranke geschrieben), wobei a_n **Reihenglieder** heißt und ein Folgenglied der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist.

Des Weiteren gilt:

> Die Folge $(s_n)_{n \geq 0} = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt **Partialsumme** der Reihe
> Der Grenzwert der Partialsumme ist der **Grenzwert** (oder auch **Summe** genannt) der Reihe

Satz 4.35

Falls eine gegebene Reihe $\sum_{n=0} a_n$ konvergiert, dann ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge

Beispiele zur Veranschaulichung

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n}$, für die gilt:

> Die Folgenglieder $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\right)$ der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ sind die Reihenglieder der Reihe
>
> $(0.1, 0.11, 0.111, \ldots)$ sind Partialsummen
>
> Der Grenzwert der Reihe ist $\frac{1}{9}$

2. Konvergenzkriterien

Satz 4.39 (Cauchykriterium für Reihen)

Für eine gegebene Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ gilt:

> Die Reihe ist konvergent $:\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall m \geq n > N(\epsilon) : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon$

Alternierende Reihe

Eine Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ heißt alternierend, wenn das Vorzeichen der Reihenglieder abwechselnd positiv und negativ ist.

Satz 4.41 (Konvergenzkriterium von Leibniz)

Für eine gegebene alternierende Reihe $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ gilt:
$(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge $:\Longleftrightarrow$ Die Reihe konvergiert

Absolute Konvergenz

Für eine gegebene Reihe $\sum_{\geq 0} a_n$ gilt:

> $\sum_{\geq 0} a_n$ heißt absolut konvergent $:\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n|$ konvergiert
>
> Eine nicht absolut konvergente Reihe nennt man **bedingt konvergente** Reihe

Satz 4.4

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent

Satz 4.47 (Majorantenkriterium)

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$, für die gilt:

> $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b_n$
> $\sum_n b_n$ ist konvergent

Dann gilt:

> $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent
> $\sum_n b_n$ heißt **Majorante** von $\sum_n a_n$

Satz 4.48 (Minorantenkriterium)

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$, für die gilt:

> $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$
> $\sum_n a_n$ ist divergent

Dann gilt:

> $\sum_n b_n$ ist divergent
> $\sum_n a_n$ heißt **Minorante** von $\sum_n b_n$

Satz 4.50 (Allgemeine Form des Wurzelkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt.
Falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists q < 1 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \implies$ Die Reihe ist absolut konvergent

Ansonsten falls für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung des Wurzelkriteriums

Für Reihen, für die gilt $(\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}) = 1) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < 1)$ kann das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Satz 4.51 (Limesform des Wurzelkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
$\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) < 1 \implies$ Die Reihe ist konvergent

$\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) > 1 \implies$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung der Limesform des Wurzelkriteriums

Für den Fall $\lim_{n\to\infty} \sup(\sqrt[n]{|a_n|}) = 1$ oder wenn das allgemeine Wurzelkriterium nicht zutrifft, kann die Limesform des Wurzelkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen

Satz 4.52 (Allgemeine Form des Quotientenkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
Falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists 0 < q < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \implies$ Die Reihe ist absolut konvergent

Ansonsten falls für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \implies$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung des Quotientenkriteriums

Für Reihen, für die gilt $(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1)$ kann das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Satz 4.53 (Limesform des Quotientenkriteriums)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$, für die gilt
$\lim_{n\to\infty} \sup\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1 \implies$ Die Reihe ist konvergent

$\lim_{n\to\infty} \inf\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1 \implies$ Die Reihe ist divergent

Einschränkung der Limesform des Quotientenkriteriums

> Für den Fall $(\lim_{n\to\infty} \inf\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \leq 1) \vee (\lim_{n\to\infty} \sup\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \geq 1)$ oder wenn die allgemeine Form Quotientenkriterium nicht zutrifft, kann die Limesform des Quotientenkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

Erinnerung

Der $\lim_{n\to\infty} \sup$ einer Folge ist der größte Häufungspunkt der Reihe (4.1.1)

3. Das Cauchyprodukt und Potenzreihen

Cauchyprodukt

Gegeben seien zwei Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$. Das Produkt beider Reihen heißt Cauchyprodukt und ist wie folgt definiert:

> $\sum_{n\geq 0}(a_n) \sum_{n\geq 0}(b_n) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n}(b_k a_{n-k}))$

Satz 4.56

Gegeben seien zwei konvergente Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$, für die gilt:

> Das Cauchyprodukt beider Reihen ist auch konvergent

Potenzreihe

Eine Reihe der Bauart $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ heißten Potenzreihen. Des Weiteren gilt:

> Die Faktoren a_n heißen **Koeffizienten** der Potenzreihe
> x_0 heißt **Entwicklungsstelle** oder auch **Anschlussstelle** der Potenzreihe

Satz 4.59 (Konvergenzradius)

Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, dann gilt:

$$\exists 0 \leq R \leq \infty : \forall x \in \mathbb{C} : \begin{cases} |x-x_0| < R \implies \text{Die Potenzreihe kovergiert} \\ |x-x_0| > R \implies \text{Die Potenzreihe divergiert} \end{cases}$$

R heißt **Konvergenzradius**
Dabei lässt sich R wie folgt bestimmen:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty & \text{wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| & \text{wenn } \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \\ \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{sonst mit Cauchyformel} \end{cases}$$

Hinweis:

Die Quotientenformel und die Cauchyformel ergeben das gleiche Ergebnis, jedoch hat die Quotientenformel einige Einschränkungen in der Anwendung während die Cauchyformel immer anwenderbar ist.

Appendix

Harmonische Reihe

Für die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ gilt:

> Die Reihe divergiert.
> Beweis:
>
> > $$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\dots$$
> >
> > $$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{2}}+\dots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\Longrightarrow\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}=\infty$$

Geometrische Reihe

Für die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0}q^n=1+q+q^2+q^3+\dots$ gilt:

> $$\sum_{n\geq 0}q^n=\begin{cases}\frac{1}{1-q} & \text{wenn } |q|<1\\ \infty & \text{wenn } |q|\geq 1\end{cases}$$
> Beweis:
>
> > Aus der Definition der Reihe folgt: Die Partialsummenfolge ist definiert als:
> > $$\begin{aligned}&s_n=1+q+q^2+q^3+\dots+q^n \mid -s_nq\\ \Longleftrightarrow\ &s_n-qs_n=(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n)-(q+q^1+q^2+q^3+\dots+q^{n+1})\\ \Longleftrightarrow\ &(1-q)s_n=1-q^{n+1}\\ \\ \Longleftrightarrow\ &s_n=\left|\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right|\end{aligned}$$
> >
> > Da nach den bekannten Eigenschaften der geometrischen Folge (4.1 Appendix) bekannt ist, dass $\lim_{n\to\infty}(q^n)=0$ ist, gilt:
> > $$s_n=\left|\frac{1}{1-q}\right|$$
> >
> > Die oben genannten Summen der Reihen ergeben sich dann aus den Überlegungen bezüglich des Verhaltens der Partialsummenfolge anhand von q.

Teleskopsumme

Für die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ gilt:

> $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}=1$$
> Beweis:
>
> > Die Partialsumme der Reihe ist definiert als:
> > $$\begin{aligned}s_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\underbrace{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{\underbrace{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}_{\frac{1}{6}}}+\dots\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$
> > Aus der Definition des Grenzwerts der Reihe folgt $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}(s_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

4.3 Asymptotischer Vergleich von Folgen

Landau-Symbole

Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$, dann gilt:

> i) $a = O(b_n)$ für $n \to \infty$
>
> > $:\Longleftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \Longleftrightarrow a_n \leq b_n C$
> > *Gesprochen: a_n ist (in) groß O von b_n*
>
> ---
>
> ii) $a = o(b_n)$ für $n \to \infty$
>
> > $:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$
> > *Gesprochen: a_n ist (in) klein o von b_n*
>
> ---
>
> iii) $a_n \sim b_n$
>
> > $:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right) = 1$
>
> ---
>
> iv) $a_n = \Omega(b_n)$ für $n \to \infty$
>
> > $:\Longleftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leq C \Longleftrightarrow a_n C \leq b_n$
>
> ---
>
> v) $a_n = \Theta(b_n)$ für $n \to \infty$
>
> > $:\Longleftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0 \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \in \mathbb{N} : |b_n| C_1 \leq |a_n| \leq |b_n| C_2$

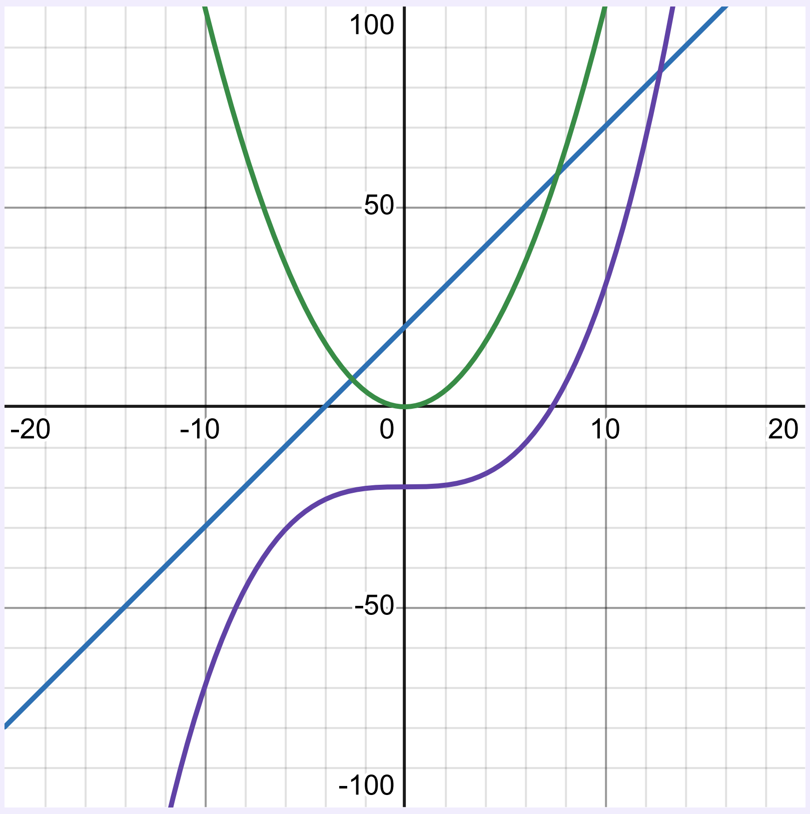
4.4 Elementare Funktionen

1. Beispiele und einfache Eigenschaften

Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion der Form

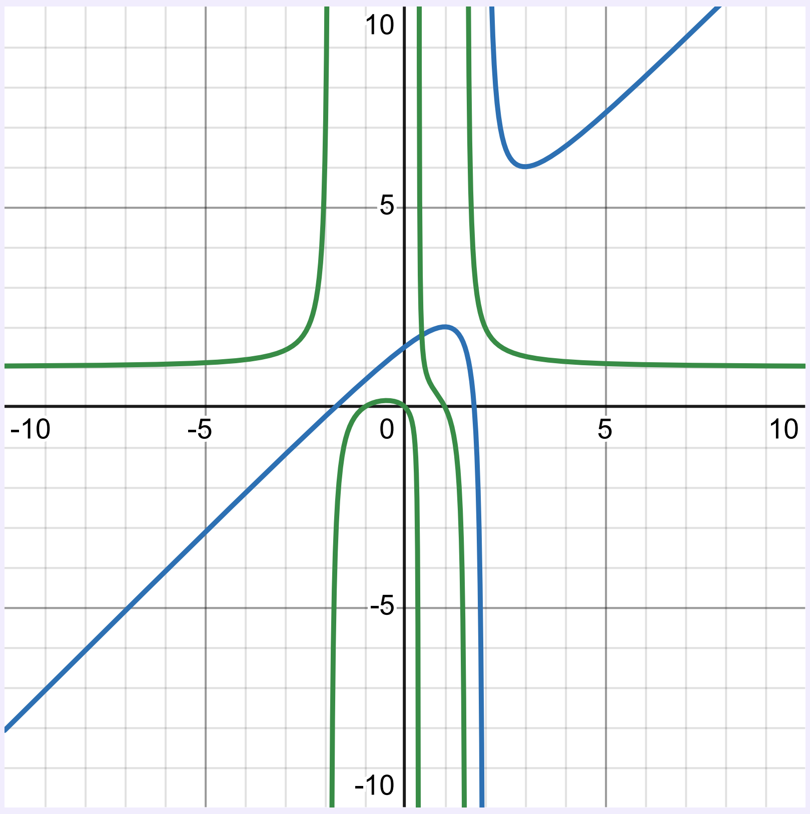
> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
> $f : x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$
>
> wobei $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$



Rationale Funktion

Eine Rationale Funktion ist eine Funktion der Form

> $f : D \to \mathbb{R}$
> $f : x \to \dfrac{p(x)}{g(x)}$
>
> wobei $p(x)$ und $g(x)$ Polynomfunktionen sind und $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$



Satz 4.66

Für eine beliebige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt:

> f ist auf dem Intervall I streng monoton $:\Longleftrightarrow$ f ist bijektiv $:\Longleftrightarrow \exists f^{-1} : f^{-1}$ ist streng monoton.

Hinweis:

Der Begriff der Monotonie (4.1.2) lässt sich für Funktionen genauso anwenden wie für Folgen.

---

2 Potenzen mit reellen Exponenten

Rechenregeln für Potenzen

Gegeben sei eine Potenzfunktion mit $f : x \to x^\alpha$, dann gilt:

> Für $\alpha \in \mathbb{N}^+ \implies x^\alpha = \underbrace{xx\ldots x}_{\alpha\text{-mal}}$
>
> ---
>
> Für $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \implies x^{-|\alpha|} = \frac{1}{x^\alpha}$
>
> ---
>
> Für $\left(\alpha = \frac{n}{m}\right) \in \mathbb{Q}^+ \implies x^\alpha = \sqrt[m]{x^n}$
>
> ---
>
> Für $\alpha = 0 : x^\alpha = 1$

---

3. Exponentialfunktionen und Logarithmus

Exponentialfunktion

Die **natürliche Exponentialfunktion** ist definiert als die Funktion $f : x \to e^x$.

Die **allgemeine Exponentialfunktion** ist definiert als die Funktion $f : x \to a^x$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Erinnerung

e heißt euler'sche Zahl (4.1.4).

Satz 4.73

Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ bijektiv ab.

Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist definiert als $f : x = \log(x)$ (manchmal auch $\ln(x)$ geschrieben)

4. Darstellungen der Exponentialfunktionen

Satz 4.74

Für die natürliche Exponentialfunktion $f : x \to e^x$ gelten folgende Eigenschaften:

> i) $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
>
> ---
>
> ii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$
>
> ---
>
> iii) $e^x e^y = e^{x+y}$
>
> **Hinweis:**
>
> Auch für die Logarithmusfunktion gilt:
> $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

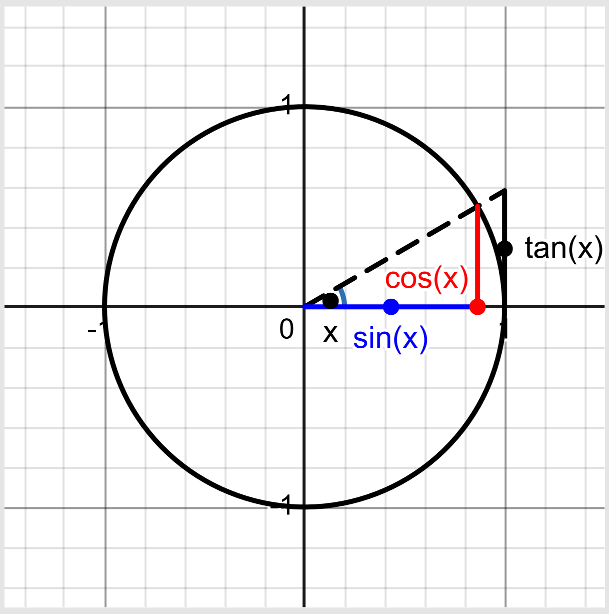
---

5. Winkelfunktionen

Winkelfunktionen

Die drei Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen sind wie folgt definiert:

> $\sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
> $\cos = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
> $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



Hinweis:

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen nennt man Arcusfunktionen.

Elementare Funktionen

Funktionen, die nur aus rationalen Funktionen, Polynom-, Logarithmus-, Exponential-, Winkel- und Arcusfunktionen bestehen, heißen elementare Funktionen

4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1. Definition und Beispiele

Grenzwert von Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

> f hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert $c \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \wedge (x_n \neq x_0) \wedge (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> f hat an der Stelle x_0 einen **rechtsseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:
> $\Longleftrightarrow (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \wedge (x_n > x_0) \wedge (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> f hat an der Stelle x_0 einen **linksseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:
> $\Longleftrightarrow (\forall (x_n)_{n\geq 1} : ((x_n \in D) \wedge (x_n < x_0) \wedge (\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0)) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) = c))$
>
> **Hinweis**
>
> Die bereits etablierte Terminologie rund rum Grenzwerte (4.1.1) trifft auch auf Grenzwerte von Funktionen zu.
> Ist eines der beiden einseitigen Grenzwert uneigentlich, spricht man von einer **uneigentlichen Grenzwerten**.

Stetigkeit

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

> f ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig $:\Longleftrightarrow f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x)$
> oder
> f ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig $:\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$
>
> f heißt stetig $:\Longleftrightarrow \forall x \in D$: f ist an der Stelle x ist stetig.

2. Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.88 (Nullstellensatz von Bolzano)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = [a, b]$, wobei $f(a) < 0$ und $f(b) \geq 0$ (oder $f(a) \leq 0$ und $f(b) > 0$), dann gilt:

> $\exists x \in I : f(x) = 0$

Satz 4.89 (Zwischenwertsatz)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = [a, b]$, dann gilt:

> $\forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Satz 4.90

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wobei $I \subseteq R$ ein abgeschlossenes Intervall, dann gilt:

> $f(I)$ ist auch ein abgeschlossenes Intervall.

Satz 4.91

Gegeben sei eine stetige streng monoton steigende Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\exists f^{-1} : f(I) \to I$, welches ebenfalls stetig ist.

Satz 4.92

Gegeben seien zwei Folgen $f : I_1 \to \mathbb{R}$ und $f : I_2 \to \mathbb{R}$, für die gilt:

> $f \pm g : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}$ ist stetig
>
> ---
>
> $f * g : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}$ ist stetig
>
> ---
>
> $\frac{f}{g} : (I_1 \cap I_2) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig
>
> ---
>
> $fg : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}$ ist stetig

Hinweis:

Alle elementare Funktionen (4.4) sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

5.1 Die Ableitung

Definitionen

Definition der Ableitung

Gegeben sei eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

> $f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$
> *Eine Funktion heißt an der Stelle a differenzierbar, wenn dieser Grenzwert existiert.*
>
> Wenn f' an der Stelle a stetig ist, heißt die Funktion an der Stelle a **stetig differenzierbar**

Die Ableitung kann rekursiv angewandt werden, es gilt also:

> *Die n-te Ableitung* $f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \right)$
>
> Wenn $f^{(n)}$ an der Stelle a stetig ist, heißt die Funktion an der Stelle a **n-mal stetig differenzierbar**

Beispiele

Gegeben sei die Funktion $f(x) = |x|$, dann gilt:

> Für $a < 0 : f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{x - a}{x + a} \right) = 1$
> Für $a > 0 : f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{(-x) - (-a)}{x - a} \right) = -1$
> Für $a = 0 : f'(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{|x|}{x} \right) =$ *undefined*

*Die Funktion ist somit an der Stelle 0 nicht **differenzierbar***

Rechenregeln

Ableitungsrechenregel

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen und c $\in \mathbb{R}$, dann gilt:

> i)
> $(cf(x))' = cf'(x)$
>
> ---
>
> ii)
> $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
>
> ---
>
> iii) **Produktregel:**
> $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
>
> ---
>
> iv) **Quotientenregel:** *Falls* $g(x) \neq 0$
> $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
>
> ---
>
> v) **Kettenregel:**
> $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$
>
> ---
>
> vi) *Falls* f *invertierbar ist und* f' *keine Nullstellen besitzt:*
> $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f{-}1(x))}$

Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Einige dieser Ableitungen ergeben sich durch die Ableitungsdefinition, andere in Kombination mit den Ableitungsrechenregeln.

5.2 Die Taylor'sche Formel und der Mittelwertsatz

1. Der Mittelwertsatz

Extremstellen

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

> a $\in$ D heißt **relatives/lokales Maximum**, wenn gilt:
>
> > $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in U_\epsilon(a) \cap D : f(x) \leq f(a)$
> > *Es existiert eine ϵ-Umgebung, in der a der größte Wert ist*
>
> a $\in$ D heißt **absolutes Maximum**, wenn gilt:
>
> > $\forall x \in D : f(x) \leq f(a)$
> > *Es existiert eine ϵ-Umgebung, in der a der größte Wert ist*

analog gilt diese Definition auch für relative und absolute Minima

Definitionsräume

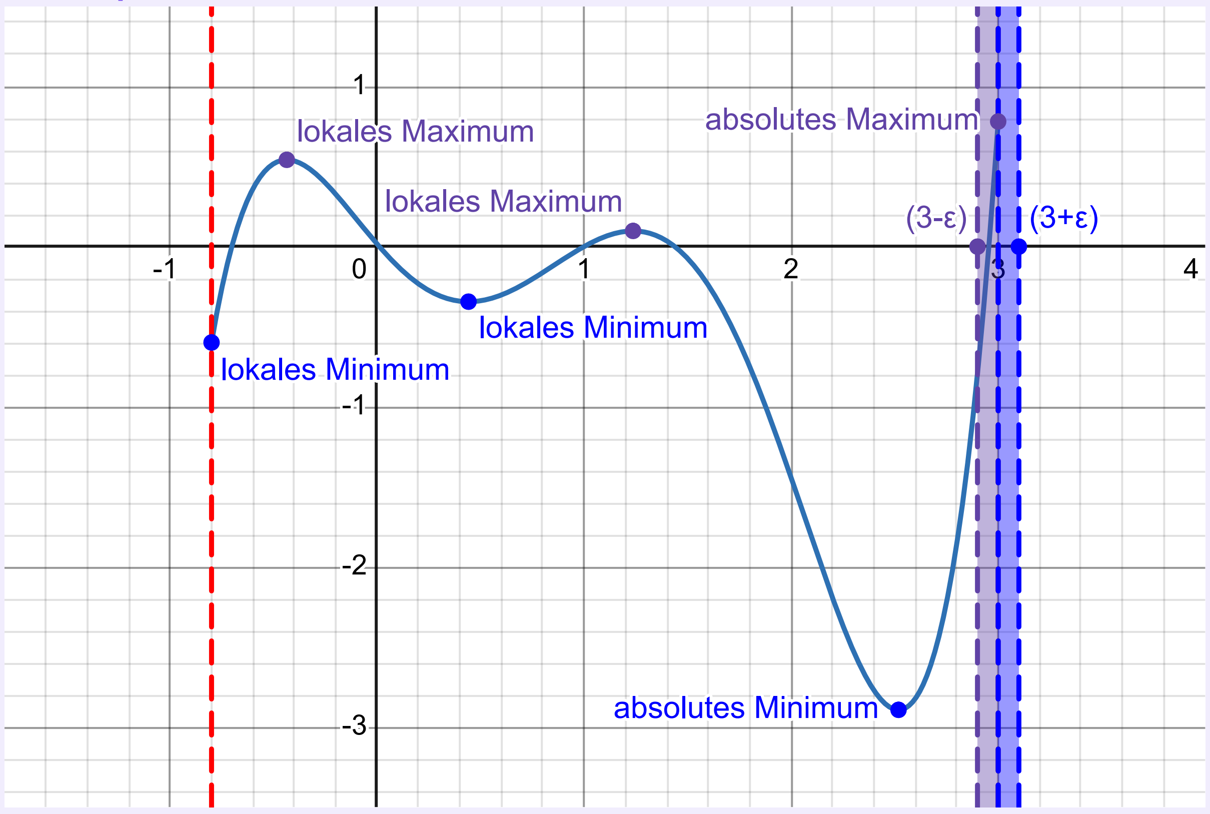
Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\mathring{D}$ heißt **das innere von D**, für das gilt:
>
> > $\mathring{D} = \{x \in D | \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq D\}$
> > *Für jeden **inneren Punkt** in $\mathring{D}$ gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der alle Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
>
> $\mathcal{D}D$ heißt **Rand von D**, für das gilt:
>
> > $\mathcal{D}D = \{x \in D | \forall \epsilon : U_\epsilon(x) \cup D = \varnothing \wedge U_\epsilon(x) \cup D \neq \varnothing\}$
> > *Für jeden **Randpunkt** in $\mathcal{D}D$ gilt, dass es eine ϵ-Umgebung, in der nur einige (aber nicht aller) Punkte innerhalb der ϵ-Umgebung in D drinnen sind*
>
> $\overline{D}$ heißt **Abschluss von D**, für das gilt:
>
> > $\overline{D} = D \cup \mathcal{D}D = \mathring{D} \cup \mathcal{D}D$
>
> Des Weiteren gilt:
>
> > D heißt **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow D = \overline{D}$
> > D heißt **offen** $:\Longleftrightarrow D = \mathring{D}$

Erinnerung:

Die [ϵ-Umgebung (4.1.1)] von a ist definiert als $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \; |x - a| < \epsilon\}$

Beispiel zu Extremstellen und Definitionsräumen



Betrachtet man den Randpunkt 3 $\in \mathcal{D}D$, sieht man, dass bei jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung der rechte Rand außerhalb des Definitionsraums ist, während die linke Hälfte innerhalb davon ist.

Satz 5.12

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ und eine Extremstelle $a \in \mathring{D}$, dann gilt:

> $f'(a) = 0$

Satz 5.13

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt:
f ist differenzierbar, wenn f auf folgende Weise linear approximierbar ist:

> $f(x) - f(a) = f'(x)(x - a) + R(x)$ wobei $R(x) = o(x - a)$

Hinweis

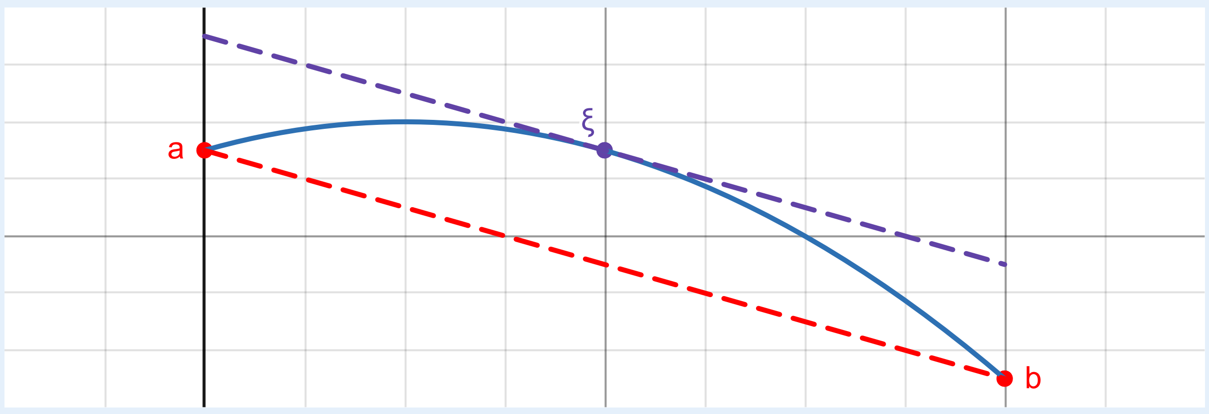
$R(x)$ ist durch die Landau Notation (4.3) auf die obere Schranke $\left|\frac{R(x)}{x-a}\right| = 0$ eingeschränkt.

Satz 5.14 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, für die folgendes gilt:

> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig und differenzierbar

Dann gilt:

> $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b - f(a))}{b - a}$
>
> 
>

Satz 5.15 (Satz von Rolle)

> Gegeben sei eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, für die folgendes gilt:
> Es ist im Intervall $[a, b]$ stetig
> Es ist im Intervall (a, b) differenzierbar
> $f(a) = f(b)$

Dann gilt:

> $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Satz 5.16

> Gegeben seien die Funktionen f und g, für die gilt:
> f und g sind im Intervall D stetig
> f und g sind im Intervall $\mathring{D}$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x))$

Dann gilt:

> $f'(x) - g'(x)$ ist auf D konstant

---

2. Taylorreihen

Satz

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, dann lässt sich $f(x)$ wie folgt approximieren:

> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k$

Dabei lässt sich a_k wie folgt bestimmen:

> $f(a) = a_0$
> $f'(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k k(x - a)^{k-1} = a_1 = 1!a_1$
> $f''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k - 1)(x - a)^{k-2} = 2a_2 = 2!a_2$
> $f'''(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k - 1)(k - 2)(x - a)^{k-3} = 6a_3 = 3!a_3$
> ...
> $\implies a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Satz 5.17

Gegeben sei ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n (x - a)^n$ und ein Konvergenzradius R, dann gilt:

> $\forall x : |x - a| < R : f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x - a)^{n-1}$

Erinnerung

Der [Konvergenzradius (4.2.3)](#) gibt an, für welches x eine gegebene Potenzreihe konvergiert.

Taylorreihe

Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ heißt Taylorreihe von f an der Anschlussstelle a

Taylorsche Formel der Ordnung n

Gegeben sei eine n-mal stetig differenzierbare und (n+1)-mal differenzierbare Funktion f, dann gilt:

> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + R_n$

Satz von Taylor

Gegeben sei eine Funktion f, n-mal stetig differenzierbare f auf dem Intervall $[a, x]$ und (n+1)-mal differenzierbar auf (a, x) ist, dann gilt:

> $\exists \xi : a < \xi < x : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Die Taylorreihe stellt eine gegebene Funktion f genau dann dar, wenn gilt:

> f ist unendlich oft differenzierbar
> $lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \to 0$

Ergänzung

Das Restglied lässt sich unter anderem nach der Formel von Langrange wie folgt bestimmen:

> $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Erinnerung/Tip

Siehe Definition von Konvergenzradius
Der Satz von Taylor basiert auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (5.2.1)

Beispiele:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt:

> Die Taylorreihe der Funktion $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

---

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ mit der Anschlussstelle 0. Dabei gilt für $-1 < x \leq 1$:

> Die Taylorreihe der Funktion $\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$
> Dabei lässt sich R_n wie folgt abschätzen: $|R_n| < |x|^{n+1} \frac{1}{n+1}$

---

c) Gegeben sei eine Potenz $(1+x)^\alpha$ wobei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann gilt für $|x| < 1$:

> $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^\alpha$
>
> wobei $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$

---

d) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0. \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

> Taylorreihe der Funktion: $\sum_{n\geq 0} 0 \frac{x^n}{n!} \neq f(x)$

Nicht jede Funktion lässt sich also durch die Taylorreihe darstellen

Tip

Für Funktionen wie $e^{-\frac{1}{x^2}}$, die sich in der Stelle 0 nicht mithilfe von Ableitungsregeln ableiten lassen, kann man diese mithilfe von Rückbesinnung auf die Definition der Ableitung (5.1 Definitionen) differenzieren.

---

3. Monotonie und die erste Ableitung

Satz 5.23

Gegeben sei eine auf dem Intervall I monoton steigende (fallende) Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\iff \forall x \in I: f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$

Gegeben sei eine auf dem Intervall I streng monoton steigende (fallende) Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, dann gilt:

> $\iff \forall x \in I: f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0)$

Satz 5.25

Gegeben sei eine 2-mal differenzierbare Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, dann gilt für ein beliebigen Punkt $a \in D$:

> $f'(a) = 0$
> $f''(a) > 0 \; (f''(a) > 0)$
> $\implies$ a ist ein relatives Minimum (Maximum)

4. Die zweite Ableitung

Konvex

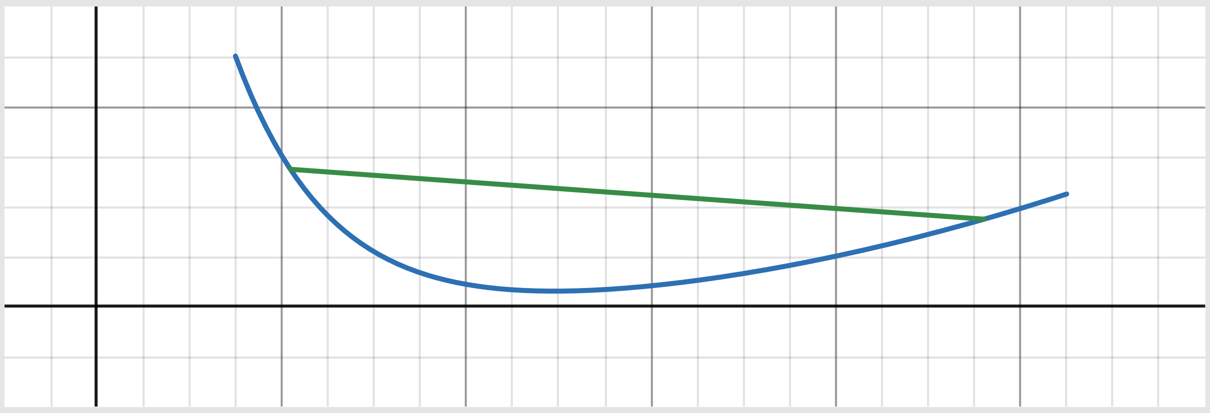
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konvex**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x+\lambda(y-x)) < f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$

Veranschaulichung einer konvexen Funktion:



Konkav

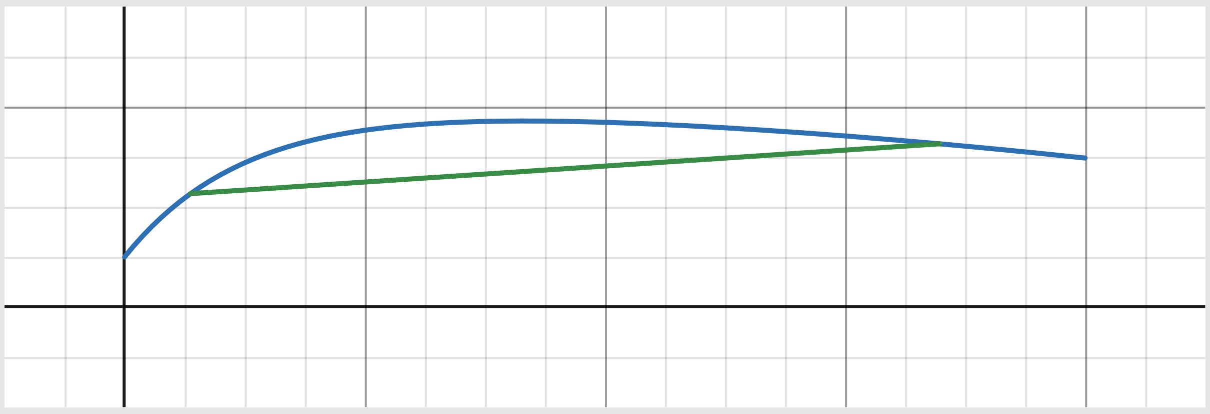
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **streng konkav**, wenn gilt:

> $\iff \forall \lambda \in (0,1): \forall x, y \in I: f(x+\lambda(y-x)) > f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$

Veranschaulichung einer konkaven Funktion:



Satz 5.29 und 5.30

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\iff$ f' ist monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\iff \forall x \in I: f'' \geq 0 \ (f'' \leq 0)$

Eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf I streng konvex (konkav), wenn gilt:

> (Wenn f mind. 1-mal differenzierbar ist) $\iff$ f' ist auf I streng monoton steigend (fallend)
> (Wenn f mind. 2-mal differenzierbar ist) $\iff \forall x \in I: f'' > 0 \ (f'' < 0)$

5. Regel von de l'Hospital

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Gegeben seien zwei an dem Punkt a differenzierbare Funktionen f, g, für die gilt:

> $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Dann lassen sich **(nur)** unbestimmte Formen der Grenzwerte wie folgt bestimmen:

> $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
>
> *Diese Regel lässt sich auch rekursiv anwenden, solange die Form des Grenzwerts weiterhin unbestimmt ist, siehe Beispiel b*

Erinnerung:

Einige Formen der Grenzwerte lassen sich nicht bestimmen, diese nennt man unbestimmte Formen und für diese muss man sich die Folgen selber betrachten.

Beispiel für eine unbestimmte Form: $\frac{0}{0}$
Weitere unbestimmte Formen (4.1.3)

Beispiele

a) Gegeben sei die Folge $\frac{\sin(x)}{x}$

> $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$

---

b) Gegeben sei die Folge $\frac{x^n}{e^x}$

> $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \frac{n!1}{e^x} = 0$

---

c) Gegeben sei die Folge $\frac{\log(x)}{x^\alpha}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$

> $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

---

d) Gegeben sei die Folge $x^\alpha \log(x)$

> $\lim_{x \to 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$

Tip

Für andere unbestimmte Formen wie zum Beispiel 0^0 lässt sich die Regel von de l'Hospital anwenden, in dem man die unbestimmte Form in einen Quotienten umformt, auf den man dann diese Regel anwenden kann.