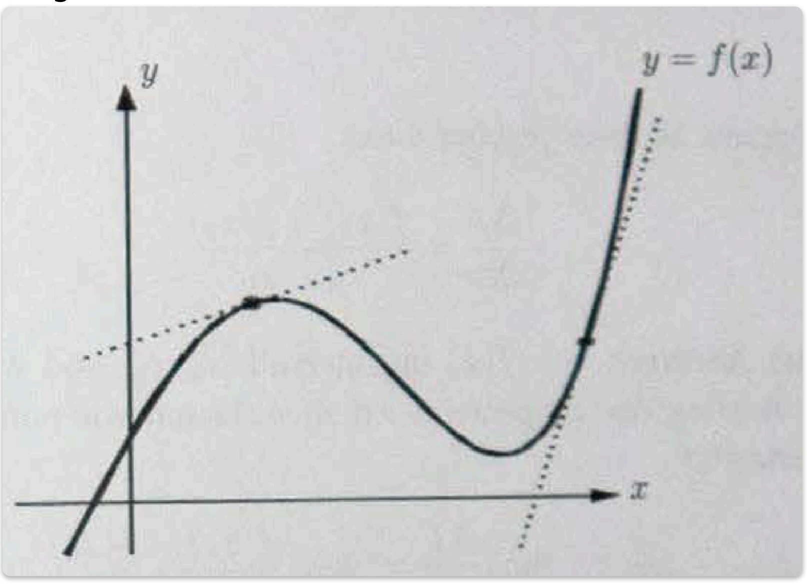
5.1 Ableitung

Einleitung

Bedeutung der Tangente

- Die Tangente beschreibt die lokale Änderung der Funktion an einem bestimmten Punkt
- Sie gibt an, wie schnell sich der Funktionswert bei einer Änderung des Arguments verändert



Anstieg der Tangente

- Der Anstieg der Tangente entspricht der Änderungsrate der Funktion an der betrachteten Stelle
- Steiler Funktionsgraph $\Rightarrow$ große Änderungsrate, d.h. eine kleine Änderung im Argument führt zu einer großen Änderung im Funktionswert
- Flacher Funktionsgraph $\Rightarrow$ kleine Änderungsrate, d.h. eine Änderung im Argument führt nur zu einer geringen Änderung des Funktionswertes

Physikalische Bedeutung

- Ist $f(t)$ der Ort eines Objekts zur Zeit t, so entspricht die Änderung von $f(t)$ der Geschwindigkeit
- Die Tangente an den Graphen von $f(t)$ gibt also die Geschwindigkeit des Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt an

Bedeutung für Approximationen

- Bei starker Vergrößerung („Hineinzoomen“) sieht der Funktionsgraph lokal wie eine Gerade aus
- Die Tangente dient als lineare Approximation der Funktion in der Umgebung eines Punktes
- Vorteil: Eine Gerade ist einfacher zu handhaben als komplexere Funktionen

Definitionen

Definition Sekante / Mittleränderung / Differentialquotient

Mathematik für Informatik, p.200

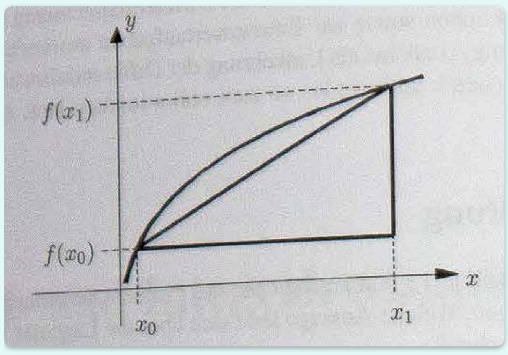
Der Anstieg der Sekante ist gegeben durch:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Das ist die mittlere Änderung von $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$ und wird Differenzenquotient genannt. Um den Anstieg der Tangente zu erhalten, lassen wir nun Δx gegen 0 gehen und berechnen den Grenzwert

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Diese Größe heißt, falls der Grenzwert existiert, Differentialquotient.



Definition 5.1

Tafelbild

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar im Punkt x_0**, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Dieser **Grenzwert wird dann die Ableitung von f an der Stelle x_0** genannt und mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Falls f für alle $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f.

Hier wird der Differenzenquotient mit dem Limes erweitert

Beispiel zu Ableitungen von einfachen Funktionen

Beispiel 5.2 (Ableitungen einfacher Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.201, Tafelbild

(a) Konstante Funktionen $f(x) = c$. Es gilt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$ für alle x_0. Daher folgt aus $f(x) = c$, dass $f'(x) = 0$.

(b) Lineare Funktionen $f(x) = ax + b$. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

Es gilt also $f'(x) = a$. Die Ableitung von linearen Funktionen ist konstant.

(c) Für $f(x) = 2x^2 + 1$ folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2(x + x_0) = 4x_0.$$

In vo haben wir die Ableitung von $f(x) = x^3$ berechnet:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

(d) Für Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann zeigen, dass die analoge Aussage auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt (siehe Übungsaufgaben)

(e) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ erfüllt

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Daher gilt zunächst

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 > 0 \\ -1 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$$

Interessant ist aber der Fall $x_0 = 0$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Da $\frac{|x|}{x}$ in jeder Umgebung um $x = 0$ sowohl die Werte -1 als auch 1 annimmt, kann der Grenzwert nicht existieren. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle $x = 0$ zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar.

Satz 5.3

Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.202

Eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist, ist dort auch stetig.

Beweis. Sei $f(x)$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{0} = 0.$$

Daher ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h., f ist stetig in x_0.

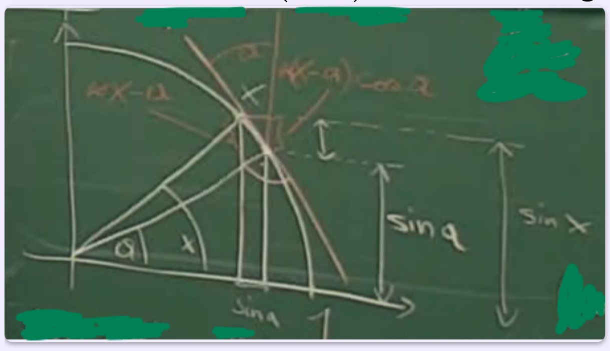
☰ Beispiel 5.4 (Ableitungen elementarer Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.202, Tafelbild

(a) $f(x) = \sin x$: Mit Hilfe des Additionstheorems (4.11) für die Sinusfunktion, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, bekommen wir

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x_0 \cos(x - x_0) + \sin(x - x_0)\cos x_0 - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \sin x_0 \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{0 \text{ wegen } (4.13)} + \cos x_0 \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{1 \text{ wegen } (4.12)} \\
&= \cos x_0 .
\end{aligned}
$$

Wir erhalten daher $(\sin x)' = \cos x$. Analog zeigt man $(\cos x)' = -\sin x$.



(b) Differenziert man die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, so erhält man

$$
f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0}
$$

Durch Einsetzen der Exponentialreihe kann man $\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$ weiter umformen zu

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} &= \frac{\left(1 + (x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots\right) - 1}{x - x_0} \\
&= \left(1 + \frac{(x - x_0)}{2!} + \frac{(x - x_0)^2}{3!} + \ldots\right).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erkennt man, dass für $x > x_0$ die Ungleichungen

$$
1 \leq \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \leq \left(1 + \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots\right) = e^{x - x_0}
$$

erfüllt sind. Aufgrund der Stetigkeit von e^x gilt $\lim_{x \to x_0} e^{x - x_0} = 1$, und daraus folgt $\lim_{x \to x_0+} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$. Analog zeigt man $\lim_{x \to x_0-} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$ und erhält infolge dessen $(e^x)' = e^x$.

Ableitungsregeln

Satz 5.5 (Ableitungsregeln)

Mathematik für Informatik, p.203, tafelbild, 400|Tafelbild

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(cf(x))' = cf'(x)$.

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$. Diese Regel gemeinsam mit (i) besagt, dass die Differentiation eine *lineare Abbildung* ist.

(iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Produktregel)

(iv) Falls $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \text{(Quotientenregel)}$$

(v) Sei $F(x) = f(g(x))$ eine zusammengesetzte Funktion. Dann gilt

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (\text{ Kettenregel })$$

Hier wird f als äußere Funktion, g als innere Funktion bezeichnet. Die Kettenregel besagt demnach: Äußere Funktion ableiten und mit der inneren Ableitung (genauer: der Ableitung der inneren Funktion) multiplizieren.

In der Leibniz'schen Schreibweise lässt sich diese Regel besonders kurz schreiben: Fasst man nämlich $g(x)$ als Argument von f auf, dann erhält man

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

(vi) Falls $f : D \rightarrow f(D)$ invertierbar ist und die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt, dann gilt für alle $y \in f(D)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

In der Leibniz'schen Schreibweise ist diese Regel besonders einprägsam: Gilt $f(x) = y$, so lässt sich $f'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$ schreiben. Für die Umkehrfunktion gilt aber $x = f^{-1}(y)$ und bei Differentiation nach y schreibt man dann $\frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Die obige Regel lautet nun

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beweis von Produktregel

Beweis Produktregel

Mathematik für Informatik, p.203

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind trivial, weshalb wir uns gleich der Produktregel zuwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'\left(x_0\right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f\left(x_0\right)g(x) + f\left(x_0\right)g(x) - f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f\left(x_0\right)\frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}}_{f'\left(x_0\right)} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}_{g\left(x_0\right)} + f\left(x_0\right) \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0}}_{g'\left(x_0\right)}.
\end{aligned}$$

Beweis von Kettenregel

Beweis Kettenregel

Mathematik für Informatik, p.204

Zum Beweis der Kettenregel betrachten wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x))-f\left(g\left(x_0\right)\right)}{x-x_0}=\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x))-f\left(g\left(x_0\right)\right)}{g(x)-g\left(x_0\right)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g\left(x_0\right)}{x-x_0}.$$

Der zweite Faktor ist definitionsgemäß $g'\left(x_0\right)$. Da g differenzierbar und folglich auch stetig ist, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)=g\left(x_0\right)$. Daher ist der erste Faktor gleich $f'\left(g\left(x_0\right)\right)$ wie behauptet. Zu beachten ist, dass diese Herleitung $g(x) \neq g\left(x_0\right)$ voraussetzt. Im Fall $g(x)=g\left(x_0\right)$ verschwindet aber der Differenzenquotient in (5.2), so dass diese Fälle bei der Grenzwertbildung in (5.2) keine Rolle spielen.

Die Quotientenregel beweist man durch Anwendung der Produktregel auf $f(x) \frac{1}{g(x)}$, wobei auf den zweiten Faktor die Kettenregel angewendet werden muss (mit $\frac{1}{g(x)}=h(g(x))$ und $h(x)=\frac{1}{x}$, siehe auch Beispiel 5.2d).

Um (vi) zu beweisen, setzen wir $f(x)=y$ und $f\left(x_0\right)=y_0$. Nun rufen wir uns in Erinnerung, dass f stetig ist (wegen Satz 5.3) und daher f^{-1} ebenso (wegen Satz 4.91). Somit gilt: Wenn y gegen y_0 konvergiert, dann auch $x \rightarrow x_0$. Das impliziert

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f\left(x_0\right)}=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y_0\right)\right)}$$

Eine Beweisführung mit Hilfe der Kettenregel (Differentiation beider Seiten der Gleichung $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ nach y) setzt die Differenzierbarkeit von f^{-1} voraus, die man dann gesondert beweisen müsste.

Beweis von Quotientenregel

Beweis der Quotientenregel

zz:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Herleitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Produktregel (PR):

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Kettenregel auf $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (g(x)^{-1})'$:

$$\begin{aligned} &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)\right) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\right) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Gleichnamig machen der Brüche:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Zusammenfassen:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Ableitung elementarer Funktionen

Beispiel 5.6 Ableitung elementarer Funktionen

Mathematik für Informatik, p.204, Tafelbild1, Tafelbild2

(a) Aus $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5$ folgt nach Anwendung der Ableitungsregel (ii) und Ableiten der Potenzfunktionen $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$

(b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^x$. Anwendung der Produktregel ergibt $f'(x) = 2xe^x + \left(1 + x^2\right)e^x = \left(1 + 2x + x^2\right)e^x = (1 + x)^2 e^x$

(c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

(d) Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Mit Ableitungsregel (vi) und $(e^x)' = e^x$ erhalten wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(e) Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Hier lässt sich die Funktion umschreiben zu $f(x) = e^{\alpha \ln x}$ und nun nach der Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Die bereits bekannte Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten ist also für alle Exponenten gültig.

(f) Die Funktion $f(x) = \sin\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$ ist mehrfach geschachtelt. Es gilt $f(x) = f_1\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right)$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ und $f_3(x) = 1 + x^2$. Folglich haben wir $f_1'(x) = \cos x$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f_3'(x) = 2x$. Die Ableitung von f ermittelt man nun mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = f_1'\left((f_2 \circ f_3)(x)\right) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = f_1'\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right) \cdot f_2'\left(f_3(x)\right) \cdot f_3'(x)$$

Das ergibt

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right).$$

(g) $f(x) = \arctan x$. Setzen wir $y = f(x)$, dann folgt $x = \tan y$. Weiters gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Kurzfassung der grundlegenden Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
ax^k	$(ak)x^{k-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$

Höhere Ableitungen

Mathematik für Informatik, p.205

Bis jetzt haben wir in diesem Abschnitt nur erste Ableitungen betrachtet. Falls jedoch die Ableitung einer Funktion wiederum differenzierbar ist, so lassen sich auch höhere Ableitungen bestimmen.

Definition 5.7 (n-te Ableitung)

Eine Funktion $f(x)$ heißt an einer Stelle $x_0 n$-mal differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert, die rekursiv durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(1)}(x) = f'(x)$$

definiert ist. Ist $f^{(n)}$ auch stetig in x_0, dann heißt $f(x) n$-mal stetig differenzierbar in x_0.

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable