

# 7. Globale Operationen

Information:

- EVC\_Skriptum\_CV, p.35 bis EVC\_Skriptum\_CV, p.39
- 

## Bildtransformationen

### Punkt- und lokale Operationen

- **Bisherige Betrachtung:** Fokus auf **Punkt-** und **lokale Operationen**
  - Arbeitsweise: Entweder **einzelnes Pixel** oder **Pixelumgebung** wird bearbeitet
  - Siehe: 4. Punktoperationen, 5. Lokale Operationen

### Globale Operationen

- Nutzen das gesamte **Bild** als Ausgangsbasis
  - Bild wird aus dem **Bildraum** (Ortsraum) in einen anderen Raum (z. B. **Frequenzraum**) transformiert
  - **Vorteile** der Transformation:
    - Bessere Sichtbarkeit von bestimmten Bildmerkmalen
    - Bessere **Daten-Dekorrelation** und Anpassung an das menschliche visuelle System

### Bild-Frequenzraum-Transformationen

- **Ziel:** Darstellung von Bilddaten in einem anderen Raum (z. B. Frequenzraum) zur besseren Analyse
  - Häufig verwendete Transformationen:
    - **Fourier-Transformation**
    - **Cosinus-Transformation**
    - Weitere Transformationen: **Wavelet-, Laplace-Transformation**

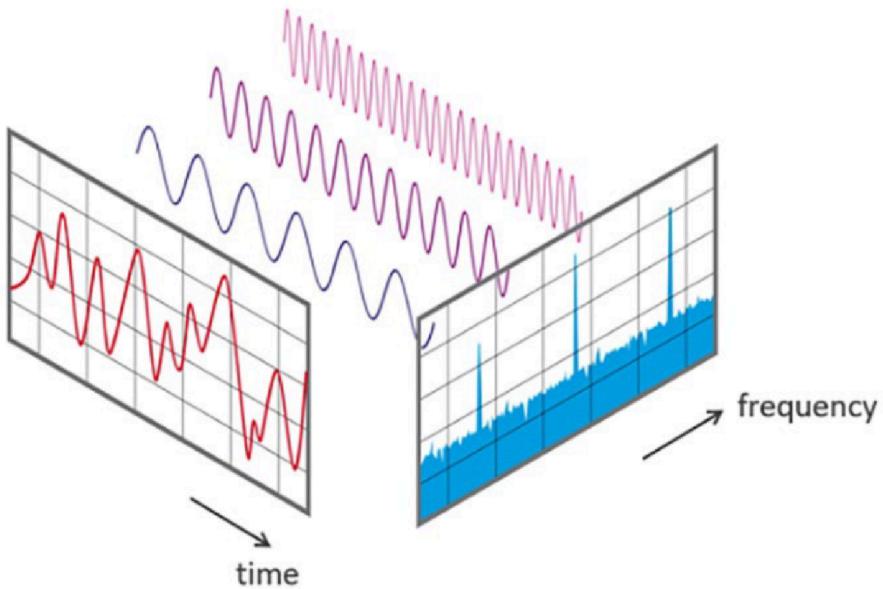
### Fourier- und Cosinustransformation

- **Transformationen im eindimensionalen, kontinuierlichen Bereich:**
  - Betrachtung einer Funktion  $y = f(x)$
  - Anwendung dieser Transformationen auf **zweidimensionale Bilder** (mit den Bildkoordinaten  $(x, y)$ )
  - Bei der **diskreten** Betrachtung:

- **Integrale** werden zu **Summen** (diskrete Werte)

Die Fourier- und Cosinus-Transformation sind die wichtigsten Methoden, um Bilddaten von ihrem Ortsraum in den Frequenzraum zu überführen, was viele Vorteile in der Analyse und Verarbeitung von Bildern bietet.

## Fouriertransformation



### Wichtige Info vorab!

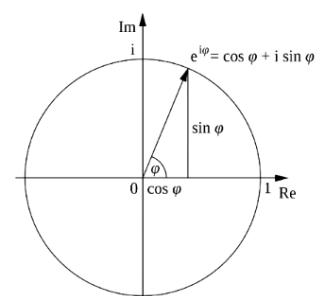
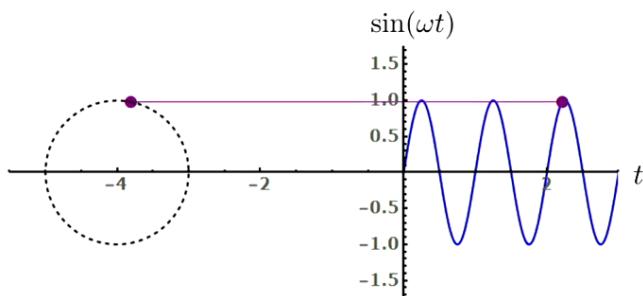
Diese Zusammenfassung bezieht sich hauptsächlich aufs [EVC\\_Skriptum\\_CV.pdf](#) und wird deshalb auch die im Skriptum verwendete Notation verwenden. In den Vorlesungsfolien wurde auf die Eulersche Identität zurückgegriffen um die  $\cos/\sin$  Ausdrücke abzukürzen. Falls beim Test die Notation aus den Slides verwendet wird hier das wichtigste zum herleiten:

**Before we start - some math: Euler's Identity**



Leonhard Euler  
1707 - 1783

$$r e^{i \omega t} = r(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$



## Frequenzbereich und harmonische Funktionen

- **Zerlegung von Bildsignalen:** Die Darstellung und Analyse von Bildern im Frequenzbereich basiert auf der Zerlegung von Bildsignalen in **harmonische Funktionen** (Sinus- und Kosinusfunktionen).

## Sinus- und Kosinusfunktionen

- **Mathematische Darstellung:**
  - Sinusfunktion:  $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$
  - Kosinusfunktion:  $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
- **Parameter:**
  - **A:** Amplitude (maximale Auslenkung)
  - **$\phi$ :** Phase (Verschiebung entlang der Zeitachse)

## Beziehung zwischen Frequenz und Kreisfrequenz

- **Kreisfrequenz ( $\omega$ )** und **Frequenz ( $f$ )** sind miteinander verknüpft:  

$$\omega = 2\pi f$$
  - $f$ : Frequenz in Zyklen pro Raum- oder Zeiteinheit, z. B. **1.000 Zyklen pro Sekunde** (Hertz)

## Entstehung des Frequenzkonzepts

- **Ursprung des Frequenzbegriffs:** Das Konzept der Frequenzen und der Zerlegung von Schwingungen in harmonische Funktionen entstand ursprünglich aus der **Akustik** (Schall, Töne und Musik), da das menschliche Ohr ähnlich arbeitet.
  - **Schall:** Befindet sich in der **Zeitdomäne**
  - **Töne:** Haben eine **Lautstärke** (Amplitude) und eine **Frequenz** (Schwingungen pro Sekunde)

## Fouriertransformation

- **Zentrale Aussage:**
  - Wellen, wie z.B. **Schallwellen**, **Wasserwellen** oder **elektromagnetische Wellen**, können mit beliebiger **Frequenz**, **Amplitude** und **Phasenlage** als **Summe von gewichteten Kosinus- und Sinusfunktionen** dargestellt werden.

## Kosinus- und Sinusfunktionen

- **Kosinusfunktion:**
  - $\cos(x)$  hat den Wert **1** am Ursprung ( $\cos(0) = 1$ )
  - Durchläuft von  $x = 0$  bis  $x = 2\pi$  eine volle Periode
- **Sinusfunktion:**
  - $\sin(x)$  hat den Wert **0** am Ursprung ( $\sin(0) = 0$ )

- Durchläuft ebenfalls von  $x = 0$  bis  $x = 2\pi$  eine volle Periode

## Frequenz und Perioden

- **Periodenzahl:**
  - Für  $\cos(x)$  innerhalb einer Strecke der Länge  $T = 2\pi$  ist die Anzahl der Perioden 1:  
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

## Verschiebung der Kosinusfunktion

- **Verschiebung:**
  - Wenn eine Kosinusfunktion entlang der x-Achse um eine Distanz  $\phi$  verschoben wird ( $\cos(x) \rightarrow \cos(x - \phi)$ ), ändert sich die **Phase** der Funktion.
  - $\phi$  bezeichnet den **Phasenwinkel** der resultierenden Funktion.
- **Sinus als verschobene Kosinusfunktion:**
  - Die **Sinusfunktion** ist eine **Kosinusfunktion**, die um  $\frac{\pi}{2}$  (ein Viertelperiode) nach rechts verschoben ist.

## Orthogonalität von Sinus- und Kosinusfunktionen

- **Orthogonalität:**
  - Kosinus- und Sinusfunktionen sind **orthogonal**, was bedeutet, dass sie in ihrer Form unabhängig voneinander sind.
  - Durch die Kombination von Kosinus- und Sinusfunktionen können neue sinusoidale Funktionen mit beliebiger **Frequenz**, **Amplitude** und **Phase** erzeugt werden.

## Addition von Kosinus- und Sinusfunktionen

- **Addition:**
  - Wenn eine Kosinus- und eine Sinusfunktion mit der gleichen Frequenz  $\omega$  und den Amplituden  $A$  bzw.  $B$  addiert werden, entsteht eine neue Sinusfunktion mit der gleichen Frequenz  $\omega$ .
  - **Resultierende Amplitude**  $C$  und **Phasenwinkel**  $\phi$  sind durch die Amplituden  $A$  und  $B$  bestimmt:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left( \frac{B}{A} \right)$$

## Erweiterung auf beliebige Funktionen

- **Jean Baptiste Joseph de Fourier** (1768–1830) zeigte, dass jede **periodische Funktion**  $g(x)$  mit einer Grundfrequenz  $\omega_0$  als **Summe von harmonischen Sinus- und**

Kosinusfunktionen dargestellt werden kann:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x)$$

- **Fourierkoeffizienten:**
  - $A_k, B_k$ : Bestimmen das Gewicht der jeweiligen Kosinus- und Sinusfunktionen.
  - Frequenzen der beteiligten Funktionen: Ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega_0$
  - **Fourieranalyse**: Berechnung der Fourierkoeffizienten aus der gegebenen Funktion  $g(x)$ .

## Fourierintegral – Nicht periodische Funktionen

- **Fourierintegral**: Erweiterung auf **nicht periodische Funktionen**, die ebenfalls als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können:

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_{\omega} \cos(\omega x) + B_{\omega} \sin(\omega x) d\omega$$

- **Koeffizienten**  $A_{\omega}$  und  $B_{\omega}$ :
  - Beschreiben die Amplitude der entsprechenden **Kosinus- bzw. Sinusfunktion** bei der Frequenz  $\omega$ .
  - Bestimmung der Koeffizienten:

$$A_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x) dx$$

$$B_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx$$

- **Spektrum der Funktion**:
  - $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  sind **kontinuierliche Funktionen**, die das **Spektrum** der Frequenzen im Signal repräsentieren.

## Fouriertransformation und Fourier-Spektrum

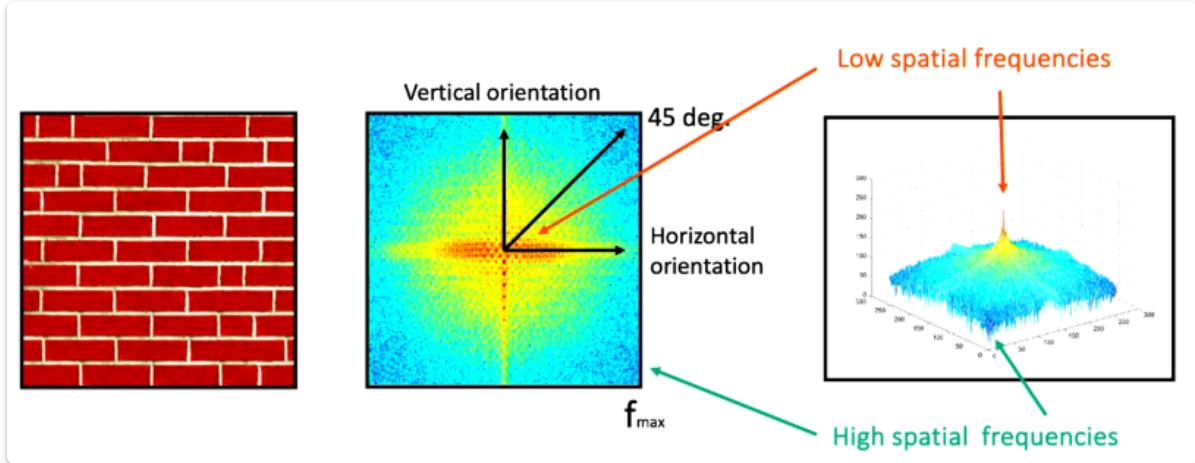
- **Fouriertransformation**:
  - Vereinfacht die Darstellung, indem die Ausgangsfunktion  $g(x)$  und das Spektrum als **komplexwertige Funktionen** betrachtet werden.
- **Fourierspektrum**  $G(\omega)$ :
  - Wird als **komplexe Funktion** dargestellt:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) g(x) dx$$

- **Inverse Fouriertransformation**:
  - Umkehrung der Fouriertransformation zur Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion  $g(x)$  aus ihrem Spektrum  $G(\omega)$ .

- **Dualität von Orts- und Frequenzraum:**

- Die Darstellung von Funktionen im Ortsraum und im Frequenzraum ist dual – sie beschreiben das gleiche Signal, jedoch auf unterschiedliche Weise.



Da das abstrakte Prinzip von Fouriertransformation Anfangs vielleicht bisschen unübersichtlich ist empfehle ich folgende Videos:

- [https://www.youtube.com/watch?v=7IIR\\_BRkfPI](https://www.youtube.com/watch?v=7IIR_BRkfPI) (Kleine Einführung)
- <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=477s> (Wurde auch in Vorlesung gezeigt)

## Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

### Notwendigkeit der DFT

- **Kontinuierliche Fouriertransformation (FT)** ist für die numerische Berechnung am Computer nicht geeignet, da Bilder immer diskrete Daten enthalten.
- Die **Diskrete Fourier-Transformation (DFT)** stellt sowohl das Signal als auch sein Spektrum als **endliche Vektoren** dar, die eine **diskrete, periodische Signal** repräsentieren.

### DFT: Vorwärtstransformation

Für ein diskretes Signal  $g(u)$  der Länge  $M$  (mit  $u = 0, \dots, M - 1$ ), wird das **Fourierspektrum**  $G(m)$  für  $m = 0, \dots, M - 1$  durch die **Vorwärtstransformation** berechnet:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) e^{-i \frac{2\pi m u}{M}}$$

### DFT: Inverse Transformation

Die **inverse DFT** zur Rekonstruktion des Signals  $g(u)$  aus dem Spektrum  $G(m)$ :

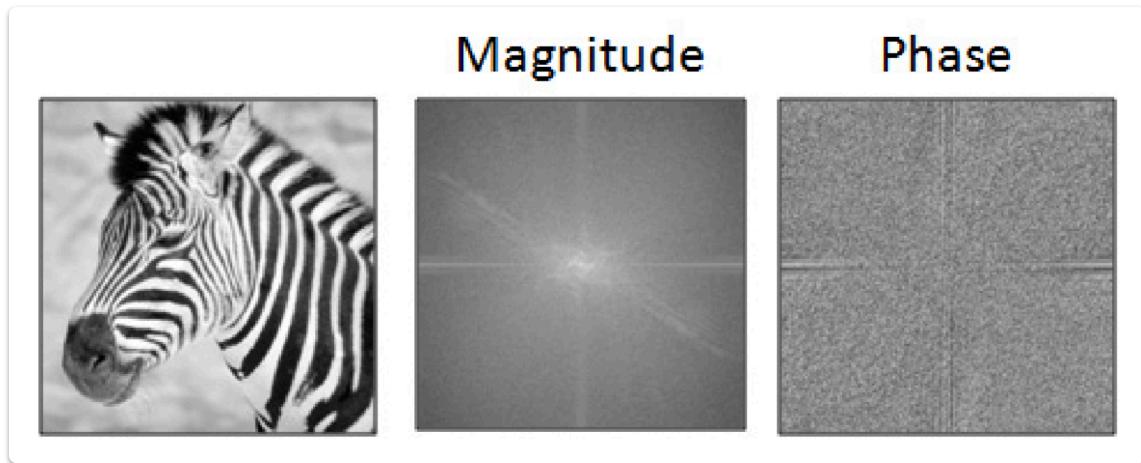
$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) e^{i \frac{2\pi mu}{M}}$$

- Beide Transformationen sind identisch: Vorwärts- und inverse DFT sind mathematisch symmetrisch.

## Eigenschaften des Fourierspektrums

- Sowohl das Signal  $g(u)$  als auch das Fourierspektrum  $G(m)$  sind komplexwertige Vektoren der Länge  $M$ .
- Betrag des Fourierspektrums (Magnitude):

$$\|G(m)\| = \sqrt{G_{\text{real}}^2(m) + G_{\text{imag}}^2(m)}$$



Wird als Leistungsspektrum (Powerspectrum) bezeichnet und beschreibt die Energie oder Leistung, die jede Frequenzkomponente zum Signal beiträgt.

- Leistungsspektrum:
  - Reellwertig und positiv.
  - Wird häufig zur grafischen Darstellung der Fouriertransformierten verwendet.
  - Phaseninformation geht verloren – das Signal kann daher nicht allein aus dem Leistungsspektrum rekonstruiert werden.
  - Unbeeinflusst von Verschiebungen des Signals: Ein zyklisch verschobenes Signal hat das gleiche Leistungsspektrum wie das ursprüngliche Signal.

## Fast Fourier Transform (FFT)

- Schnelle Berechnung der DFT mit der Fast Fourier Transform (FFT):
  - Reduzierte Zeitkomplexität von  $O(M^2)$  auf  $O(M \log_2 M)$ .
  - Wesentliche Zeitersparnis bei größeren Signallängen, z.B., bei  $M = 10^6$  wird die Berechnungszeit um den Faktor 10.000 reduziert.

## Convolution Theorem:

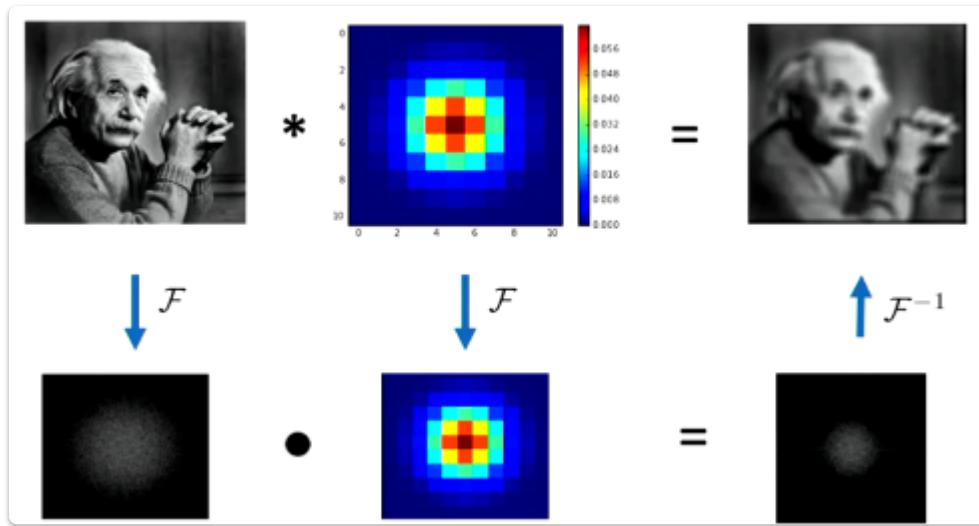
Das **Convolution Theorem** besagt, dass die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich gleich der Punktweise-Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich ist. (Mehr dazu siehe [7. Clipping und Antialiasing](#))

## Mathematisch:

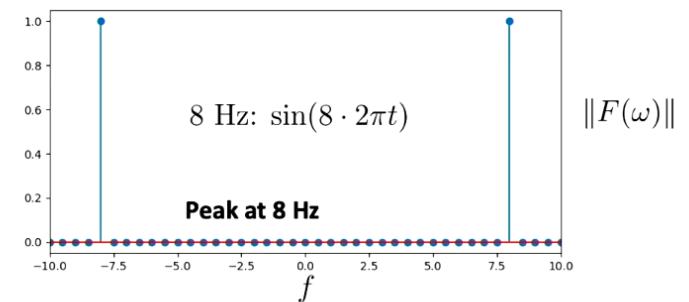
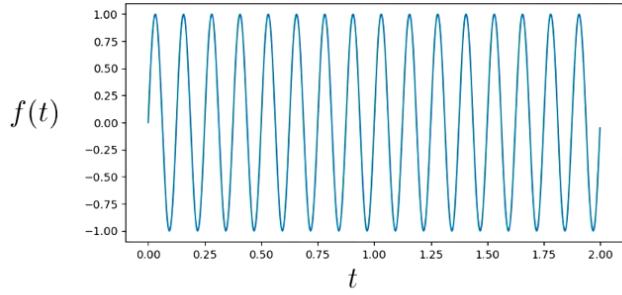
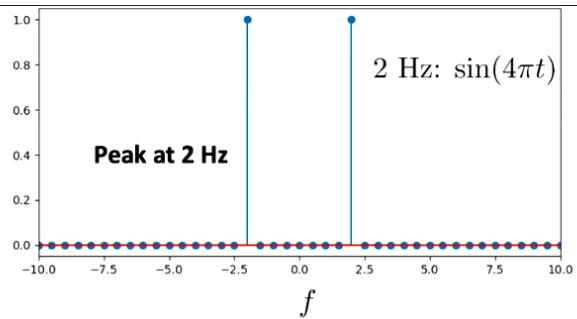
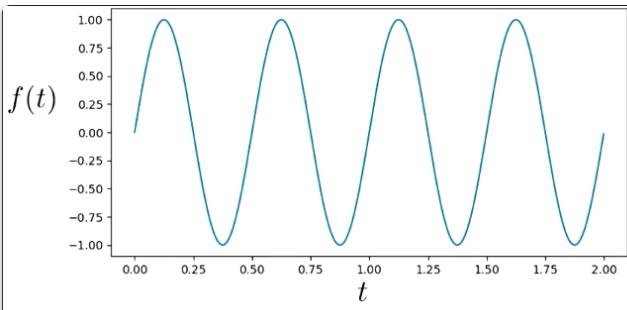
$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

## Das bedeutet:

- Im Zeitbereich: Faltung der Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ .
- Im Frequenzbereich: Punktweise Multiplikation der Fouriertransformierten  $F(\omega)$  und  $G(\omega)$



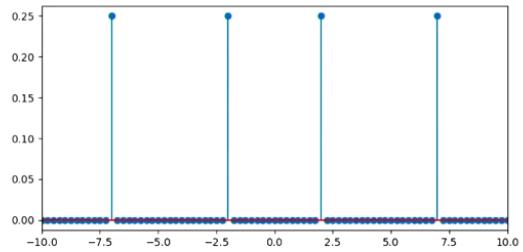
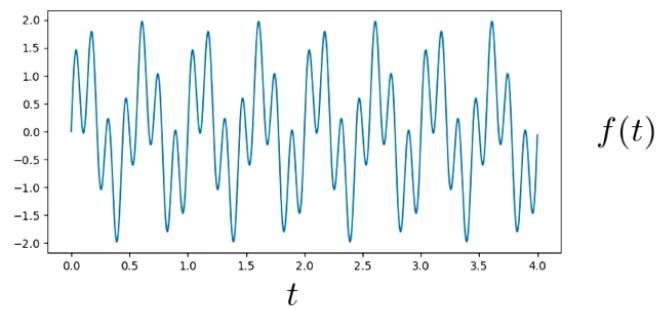
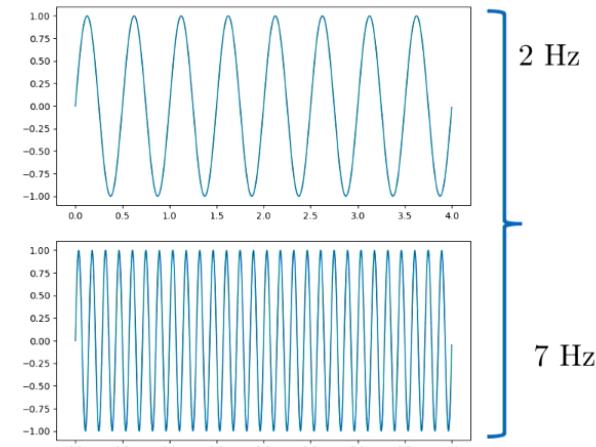
Hier noch einige Beispiele für Fourier Transformationen:



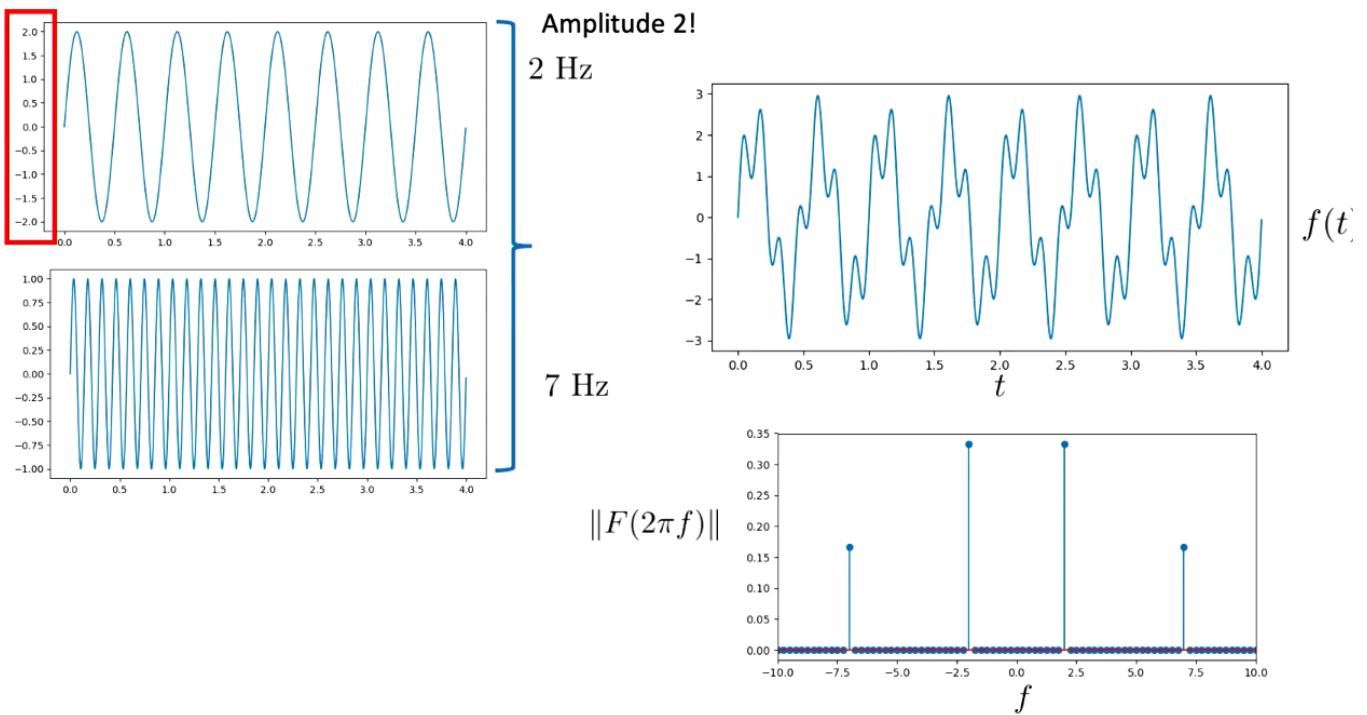
*Let's look at some fourier transformations*

21

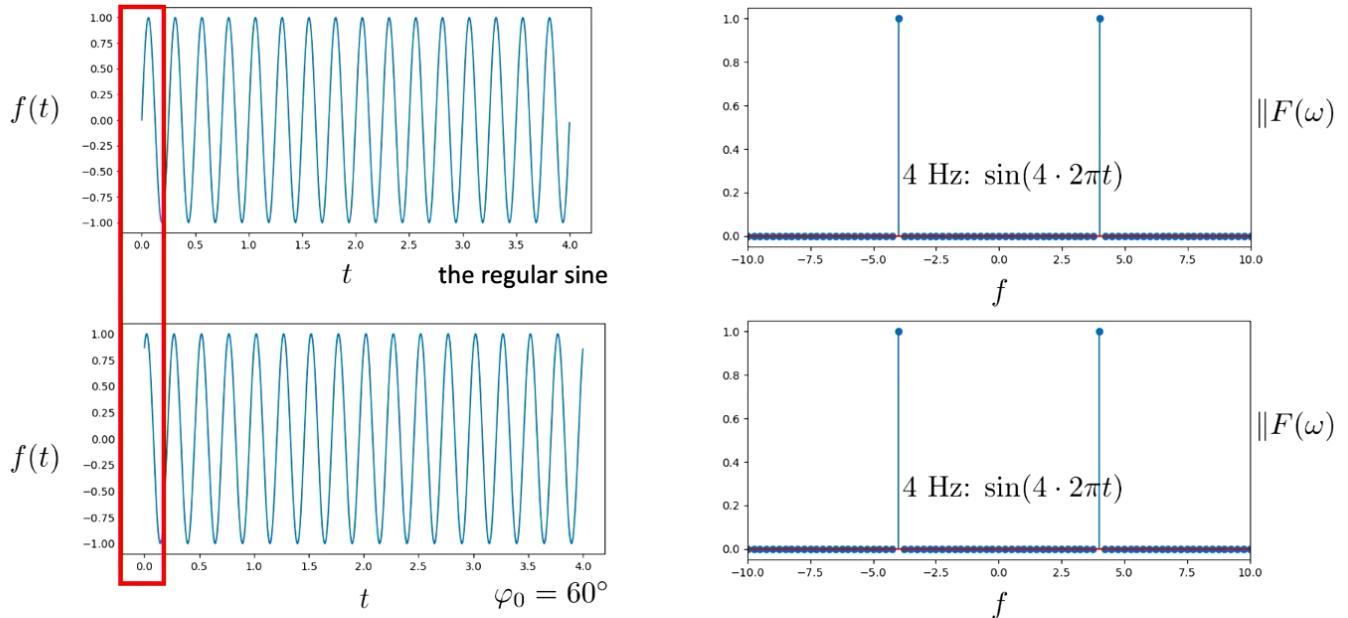
$$\omega = 2\pi f$$



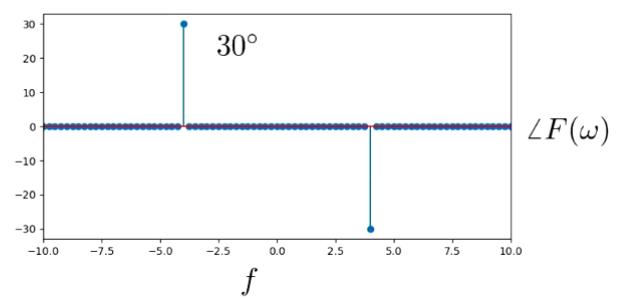
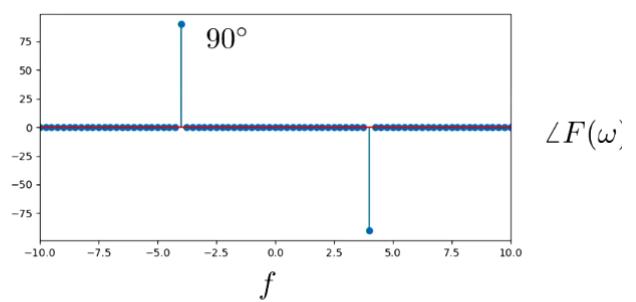
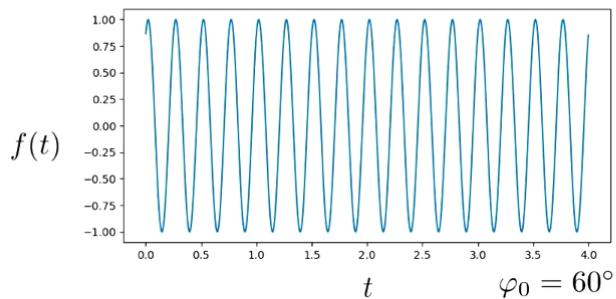
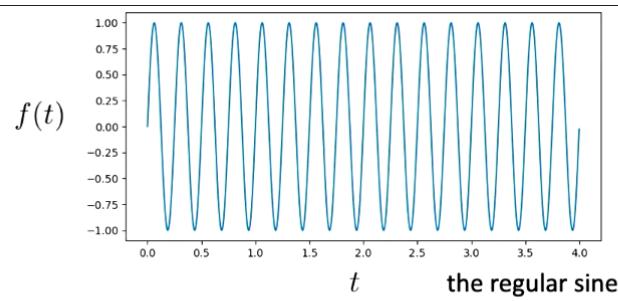
*What about a sum of sines?*



What about a sum of sines?



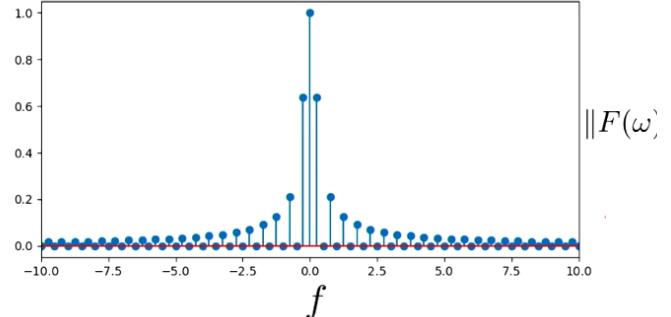
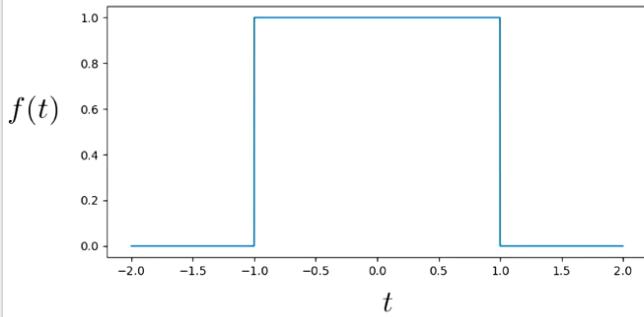
Let's look at a sine which starts at  $\varphi_0 = 60^\circ$



Let's look at a sine which starts at  $\varphi_0 = 60^\circ$

We can reconstruct offsets via the phase!

25



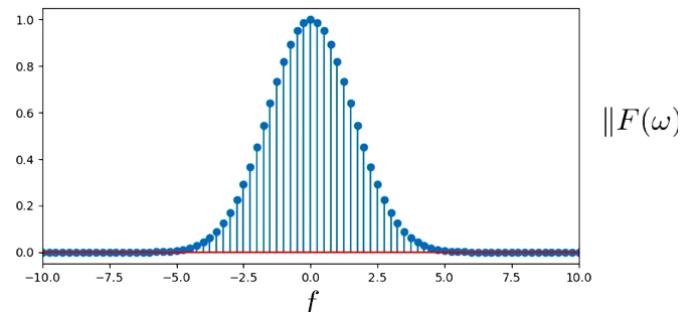
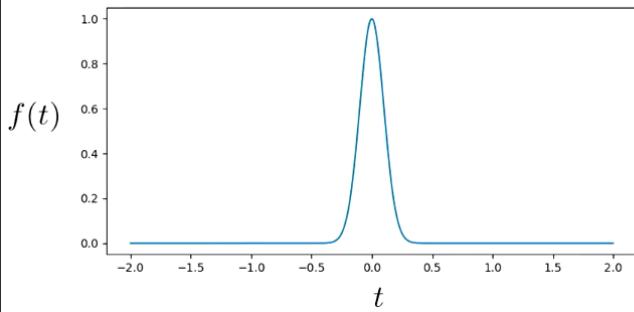
„bumping“ (harmonics) - approaches zero at  $\infty$

Sinc-function (Spaltfunktion):

$$\text{si}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Fourier Transformation of a Rectangle

## Gaussian with $\mu = 0, \sigma = 0.1$

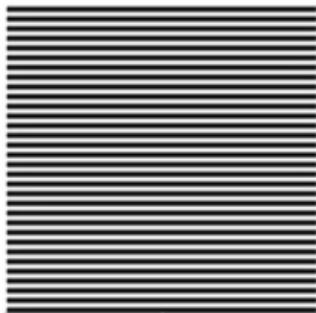


A Gaussian's spectrum is a Gaussian again! (but with  $\sigma$  rescaled)

## *Fourier Transformation of a Gaussian*

Jetzt hier 2D Beispiele:

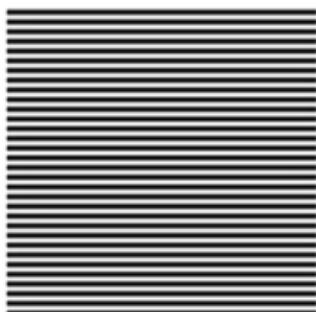
This image exclusively has **32 cycles in vertical direction**.



This image exclusively has **8 cycles in horizontal direction**.



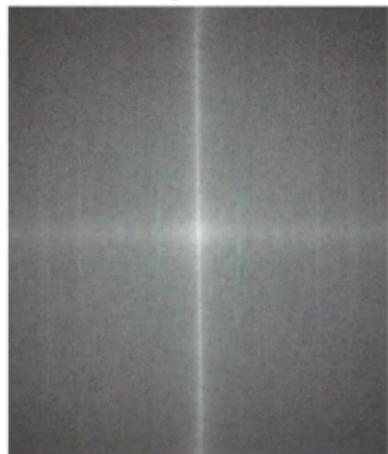
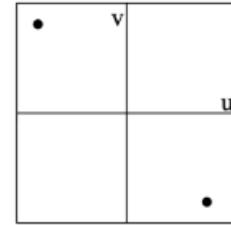
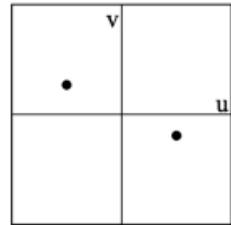
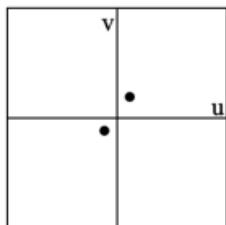
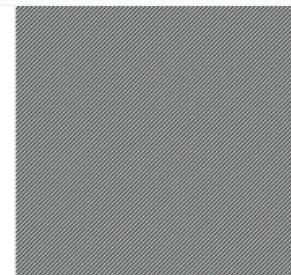
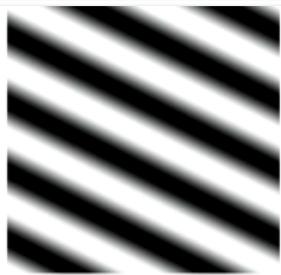
This image exclusively has **32 cycles in vertical direction**.



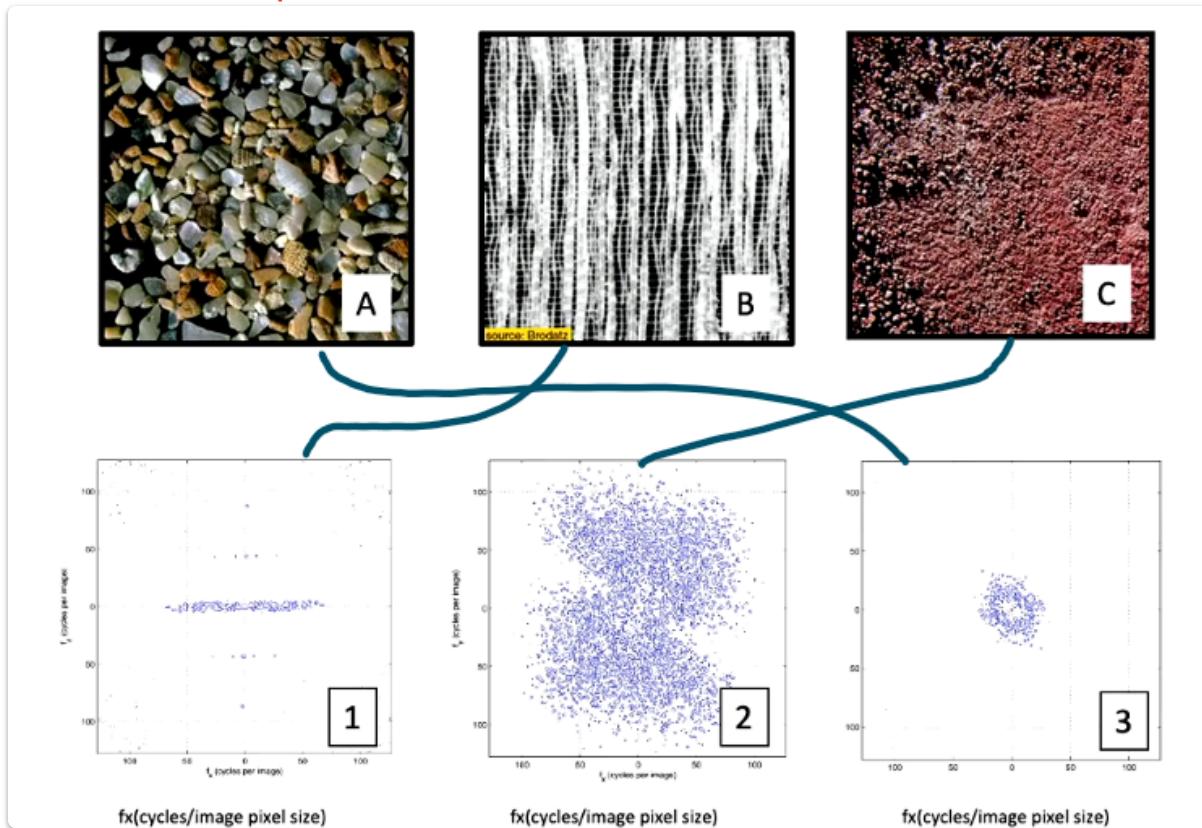
This image exclusively has **8 cycles in horizontal direction**.



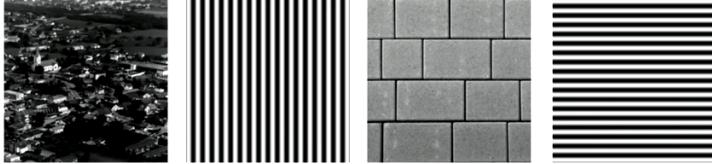
Jetzt hier Beispiel für ein weiteres Bild:

**Magnitude** $I$  $\|\mathcal{F}(I)\|$ **Phase** $\angle \mathcal{F}(I)$ 

Higher frequencies are further away from the origin.

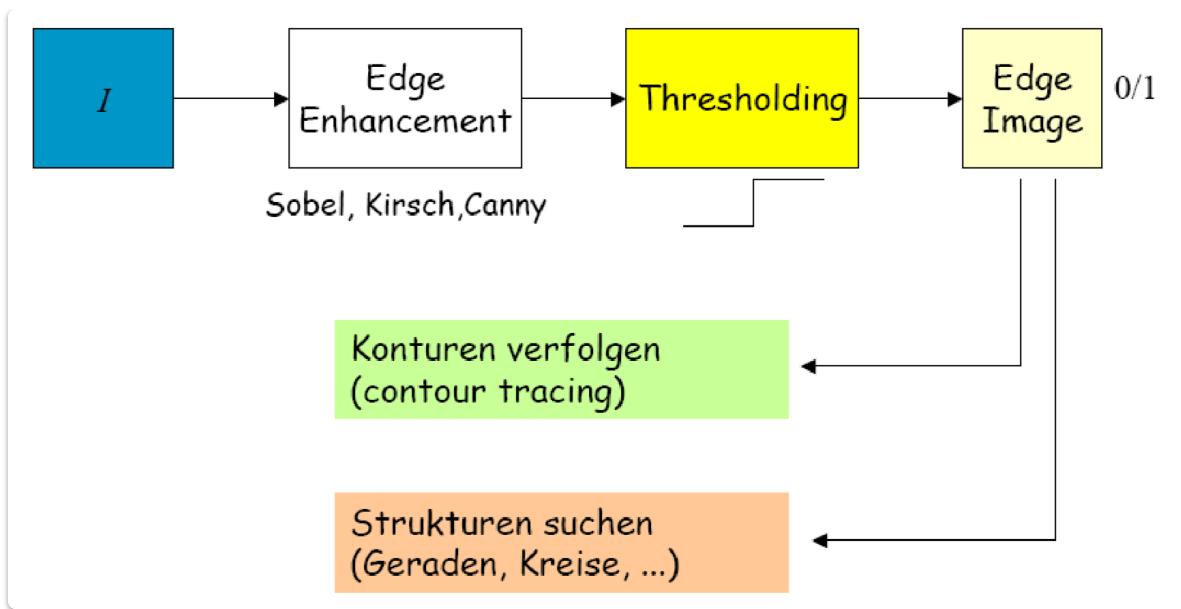
**Testähnliches Beispiel:****Beispiel Globale Operationen**

- Die Bilder A-D zeigen den logarithmierten Betrag des Fourier-Spektrums eines Bildes. Ordnen Sie die Eingabebilder  $I_1$  bis  $I_4$  dem richtigen Spektrum aus A bis D zu.



Richtige Antwort: BCAD

**Hough Transformation**



## Einführung in die Hough-Transformation

- **Ziel:** Analyse von Bildinhalten nach Kantendetektion, um größere Strukturen zu finden.
- **Problem der Kantendetektion:** Viele vermeintliche Kantenpunkte gehören in Wirklichkeit nicht zu echten Kanten und umgekehrt fehlen echte Kantenpunkte.
- **Lösungsansatz:** Kantenpunkte werden zu größeren Strukturen zusammengeführt (Konturen von Objekten), jedoch gibt es bei Unterbrechungen und Verzweigungen Schwierigkeiten.

## Prinzip der Hough-Transformation

- **Begriff:** Methode zur Erkennung von geometrischen Formen in Punktverteilungen (z.B. Geraden, Kreise, Ellipsen).
- **Besonderheit:** Eignet sich besonders für die Analyse von Bildern mit geometrischen Formen, die in menschlich geschaffenen Objekten häufig vorkommen.
- **Geradenerkennung in binären Kantenbildern:**
  - Eine Gerade in 2D lässt sich mit zwei Parametern beschreiben (z.B.  $y = kx + d$  mit Steigung  $k$  und Schnittpunkt  $d$ ).
  - Ziel: Finden der Geradenparameter  $k$  und  $d$ , auf denen viele Kantenpunkte liegen.
  - **Problem:** Alle möglichen Geraden zu berechnen, die durch einen Punkt laufen, wäre ineffizient.

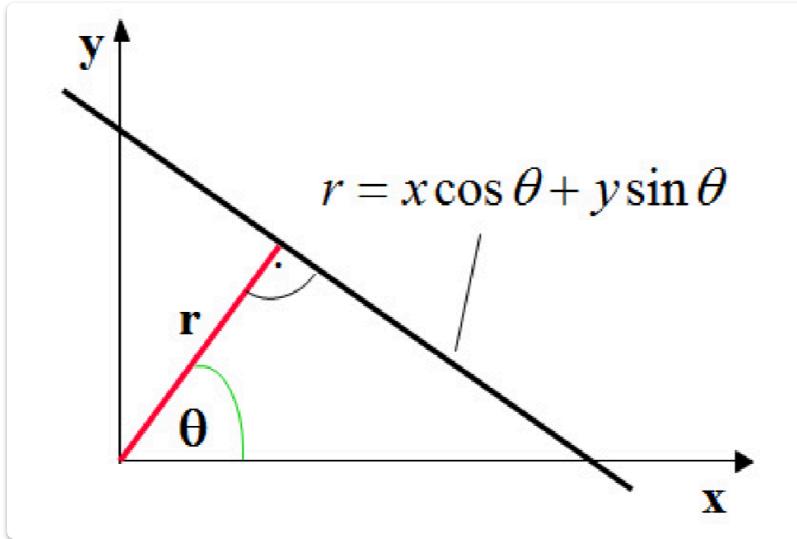
## Umgekehrter Ansatz der Hough-Transformation

- **Geradendarstellung:** Statt klassischer Form  $y = kx + d$  wird die Parameterform (Hessesche Normalform) verwendet:

$$r = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

- **Parameter:**
  - $r$ : Normalabstand der Geraden zum Ursprung.

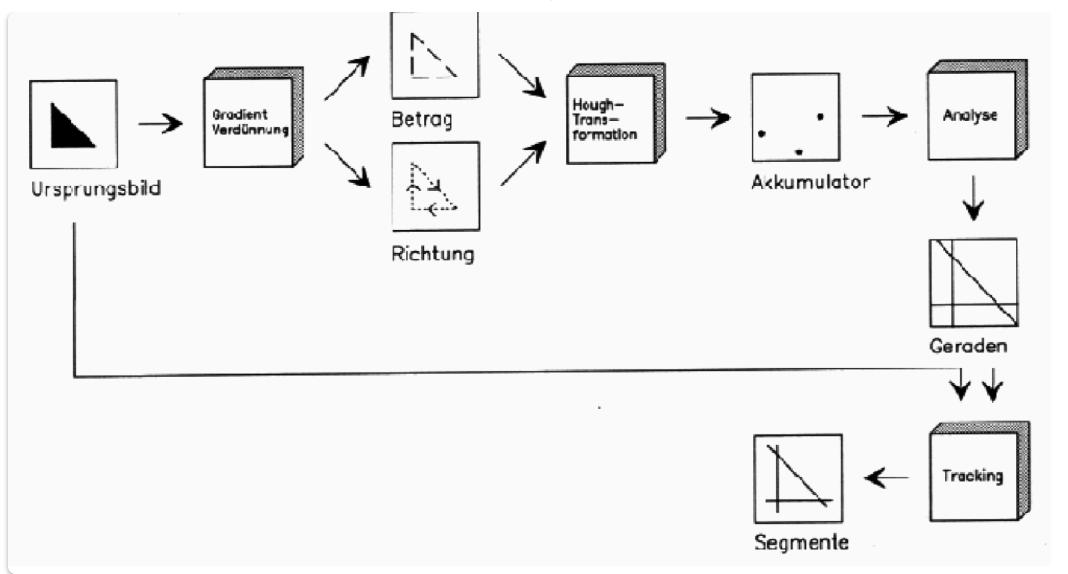
- $\theta$ : Winkel des Normalabstands zur x-Achse.



- **Erklärung:** Jede Gerade, die durch einen Punkt  $p = (x, y)$  läuft, erfüllt die Gleichung. Dadurch entstehen unendlich viele mögliche Geraden, die durch den Punkt verlaufen, mit variierenden Parametern  $r$  und  $\theta$ .
- **Hough-Raum:** Der Parameterraum  $(r, \theta)$  wird als Hough-Raum bezeichnet. Jeder Punkt im Hough-Raum entspricht einer Geraden im Bild.

## Vorgehensweise bei der Hough-Transformation

- **Kantenbild erstellen:** Aus dem Eingangsbild  $I(u, v)$  wird ein Kantenbild erzeugt, wobei der Betrag und die Richtung des Gradienten (z.B. durch Sobel-Filter) berechnet wird.
- **Akkumulator-Array:**
  - Ein zweidimensionaler Akkumulator (Array) wird erzeugt, um den  $(r, \theta)$ -Raum zu diskretisieren.
  - Für  $r$  und  $\theta$  werden festgelegte Schritte (z.B.  $r$  in Pixeln,  $\theta$  in  $1^\circ$  oder  $5^\circ$ ) verwendet.
- **Eintragen der Kantenpunkte:**
  - Jeder Kantenpunkt wird in den Hough-Raum überführt und im Akkumulator eingetragen. Die Zellen des Akkumulators werden entsprechend inkrementiert.
- **Schwellwertanalyse:**
  - Wenn der Wert einer Akkumulator-Zelle einen bestimmten Schwellwert überschreitet, repräsentiert diese Zelle eine mögliche Gerade im Bild.



## Nachbearbeitung der Ergebnisse

- **Tracking der Geraden:** Um die Anfangs- und Endpunkte der gefundenen Geraden zu ermitteln, wird ein Tracking-Verfahren angewendet.
  - Dazu wird das Originalbild entlang der gefundenen Geraden abgefahren, und es wird nach Stellen gesucht, an denen die Grauwertdifferenz den Schwellwert überschreitet.
  - An diesen Stellen befinden sich mit hoher Wahrscheinlichkeit Objektkonturen.

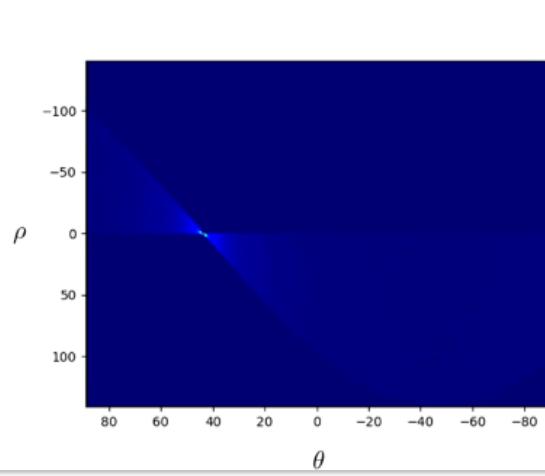
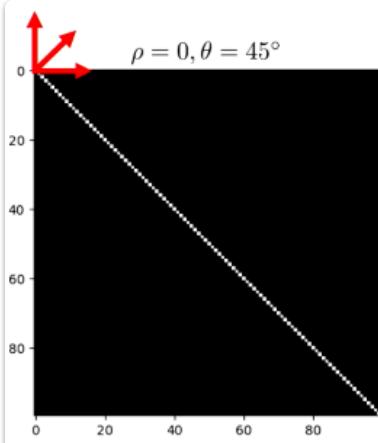
## Vorteile der Hough-Transformation

- **Berücksichtigung der Kantenrichtung:** Die Richtung der Kanten im Originalbild ist bereits bekannt, was die Effizienz steigert.
- **Verwendung von Gradienteninformationen:** Die Hough-Transformation nutzt den Betrag und die Richtung der Kantenpixel für eine genauere Analyse.

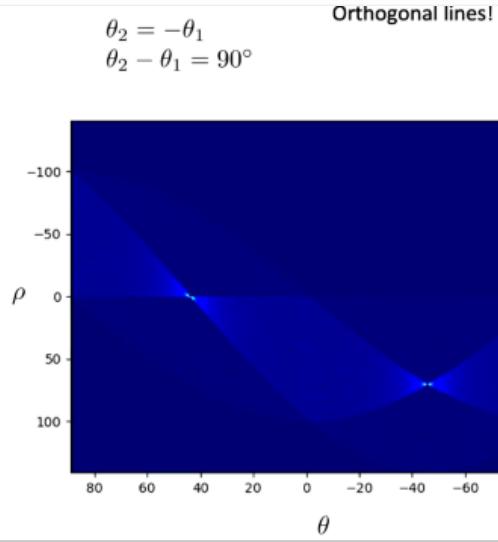
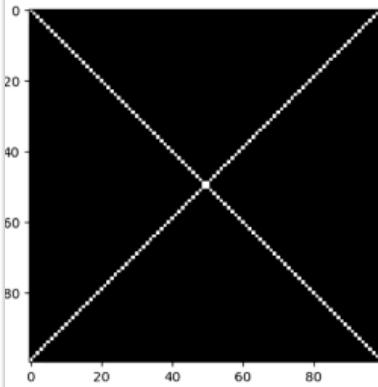
## Einschränkungen

- **Komplexität:** Wenn Filter höherer Ordnung verwendet werden, müssen alle möglichen Geraden durch jeden Kantenpunkt eingetragen werden, was zu einer sinusförmigen Linie im Akkumulator führt und die Berechnungen erheblich verlangsamen kann.

## Beispiele aus vo:

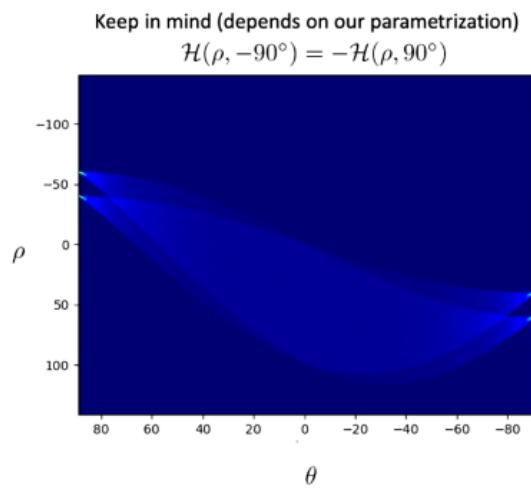
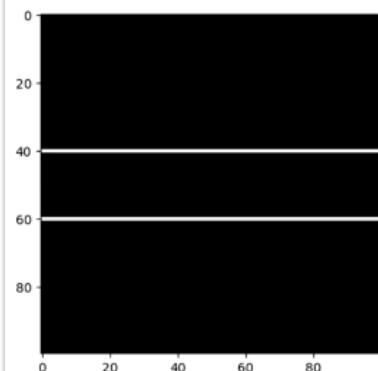


$$\rho_2 = \sqrt{(50^2 + 50^2)} \approx 70, \theta_2 = -45^\circ$$

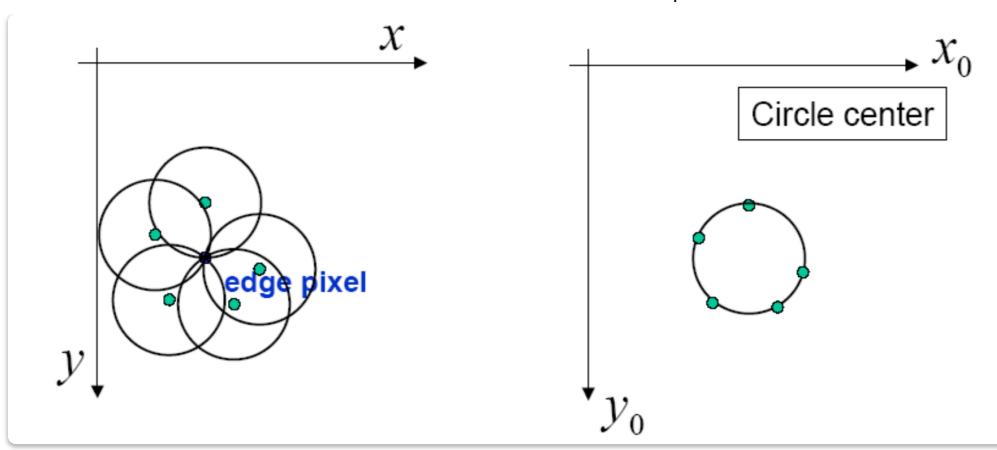


$$\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$$

$$\rho_1 = 40, \rho_2 = 60$$



## Weitere Hough Transformationen



## 1. Prinzip der Kreiserkennung

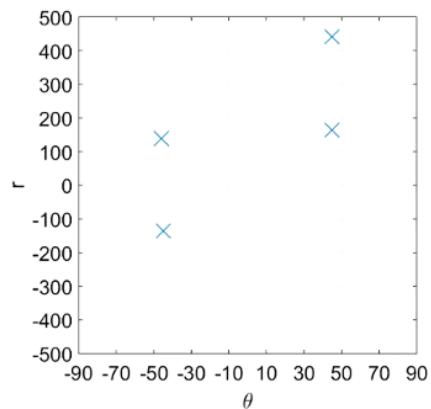
- **Ziel:** Erkennung von Kreisen im Bild.
- **Ähnlichkeit zur Geradenerkennung:**
  - Durch jeden Punkt im Originalbild wird ein Kreis mit einem festgelegten Radius gelegt.
  - Die Kreise im Hough-Transformationsraum schneiden sich in bestimmten Punkten, die Kandidaten für die Mittelpunkte der Kreise im Originalbild sind.
- **Bestimmung der Kreismittelpunkte:**
  - Die Punkte im Hough-Raum, an denen sich die meisten Kreise schneiden, entsprechen den Kreismittelpunkten.
  - Diese Punkte werden zurück in den Originalbereich transformiert, um die tatsächlichen Mittelpunkte der Kreise zu ermitteln.

## 2. Erweiterung auf Ellipsenerkennung

- **Ellipsenparameter:**
  - Eine Ellipse wird nicht nur durch den Mittelpunkt  $(x, y)$  beschrieben, sondern auch durch zwei Halbachsen  $a$  und  $b$ .
  - Dadurch ergibt sich ein 4-dimensionaler Hough-Raum, der berücksichtigt werden muss.
- **Hough-Raum:**
  - Für die Ellipsenerkennung müssen vier Dimensionen im Hough-Raum verwendet werden: die beiden Koordinaten des Mittelpunkts und die beiden Halbachsen.
  - Die Transformation ist komplexer als bei der Kreiserkennung, da sie mehr Parameter berücksichtigt.

**Testähnliches Beispiel Hough Transformationen:**

- Bei der Hough-Transformation zur Detektion von Linien werden diese in Hessescher Normalform repräsentiert:  $r = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ . Im unten stehenden Diagramm sind 4 detektierte Linien im Hough-Raum (Akkumulator-Array) mit einem "X" markiert. Welche der folgenden Aussagen sind hier wahr bzw. falsch?



- |  |  |  |
|--|--|--|
| Alle 4 Linien sind parallel zueinander   | <input type="checkbox"/> wahr            | <input checked="" type="checkbox"/> falsch |
| Mindestens eine Linie verläuft horizontal  | <input type="checkbox"/> wahr            | <input checked="" type="checkbox"/> falsch |
| Mindestens eine Linie verläuft vertikal  | <input type="checkbox"/> wahr            | <input checked="" type="checkbox"/> falsch |
| Die Start- und Endpunkte der Linien lassen sich aus dem Hough-Raum nicht bestimmen | <input checked="" type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch            |
| Linien werden durch lokale Maxima im Hough-Raum repräsentiert                      | <input checked="" type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch            |

