4.5 Grenzwert und Stetigkeit

Hier wird der Grenzwertbegriff (Siehe sem_2/Analysis/vo_md_zsmf/4. Folgen Reihen und Funktionen/4.1 Folgen > 1. Definitionen und Grenzwert) für Folgen auf Funktionen übertragen.

- genaue Beschreibung vom lokalen Verhalten von Funktionen und dessen Graphen
- Funktionen in einem Linienzug zeichenbar --> stetig
- Diese anschauliche Definition in der Mathematik aber zu ungenau
- Link zur Formelsammlung: FS_4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

---

Definition und Beispiele für Grenzwert

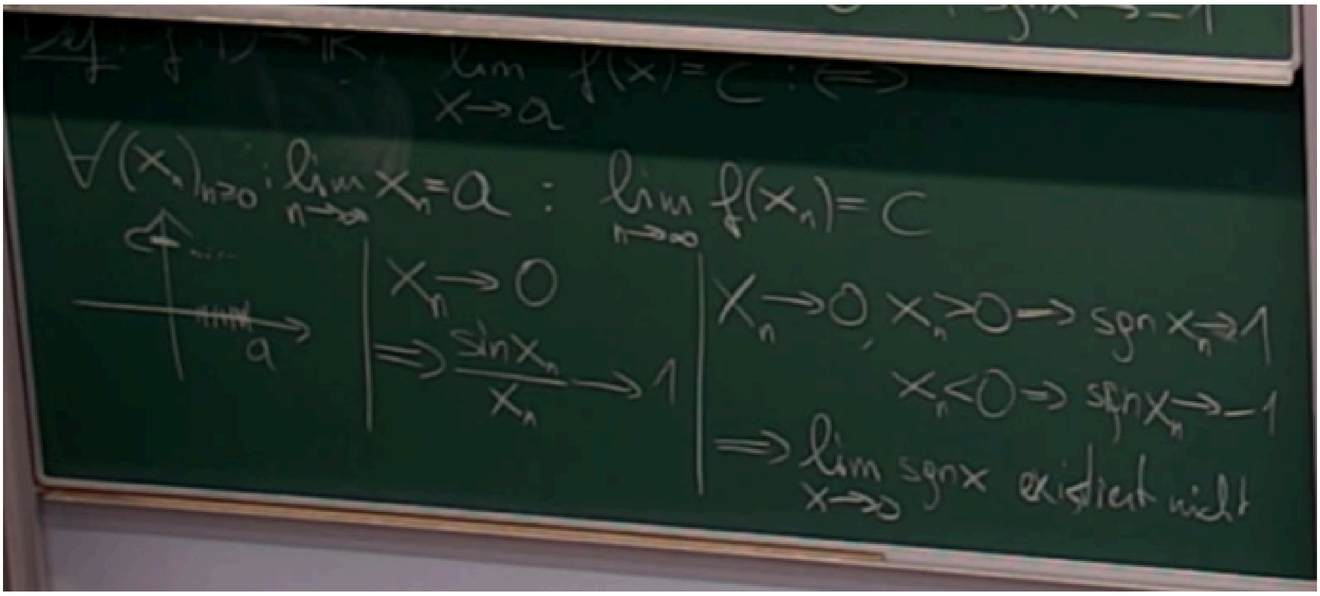
Definition für Grenzwert für Funktionen

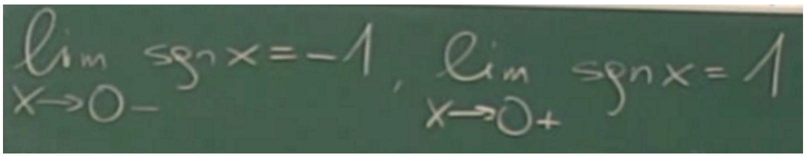
Definition 4.82

Mathematik für Informatik, p.187

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert $c(c \in \mathbb{R})$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n>1}$ $(x_n \in D)$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Falls aus $x_n \rightarrow \infty$ folgt, dass $f(x_n) \rightarrow c$, dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$. In Fällen $c = -\infty$ und $c = +\infty$ spricht man von einem uneigentlichen Grenzwert an der Stelle x_0.

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Man schreibt auch: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = c$.





Das sgn(x) ist in dem Fall ob es ein linksseitiger oder rechtsseitiger Grenzwert ist.

Beispiel für stetige Funktion:

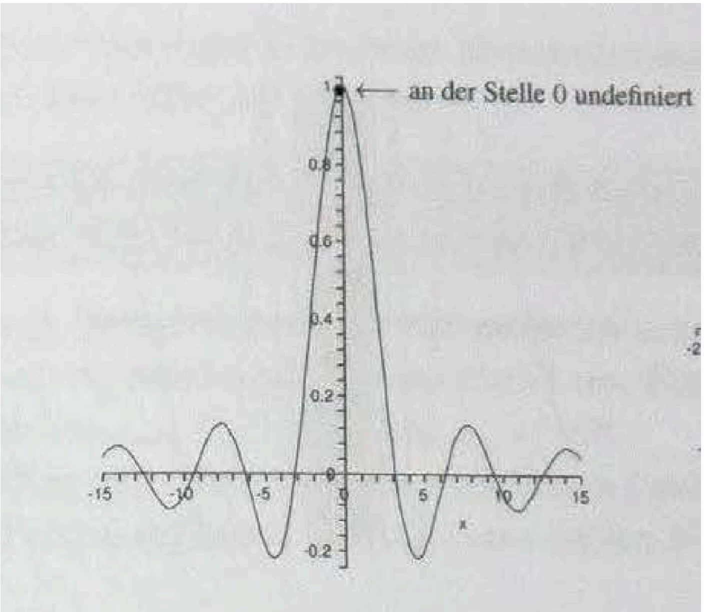
Beispiel 4.81.1

Mathematik für Informatik, p.186

(a) Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Den Graphen der Funktion zeigt Abb. 4.9. Offensichtlich ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da wir bei Einsetzen von 0 den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten. Es gibt aber offensichtlich einen Grenzwert: Wenn x sich 0 nähert, so strebt $\frac{\sin x}{x}$ gegen 1 . Auch Abb. 4.6 zeigt, dass für kleine Werte von x die Bogenlänge ungefähr so groß ist wie $\sin x$. Es scheint also natürlich, die Funktion $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ mittels der Definition $f(0) = 1$ fortzusetzen.



Beispiel für unstetige Funktion

Beispiel 4.81.2

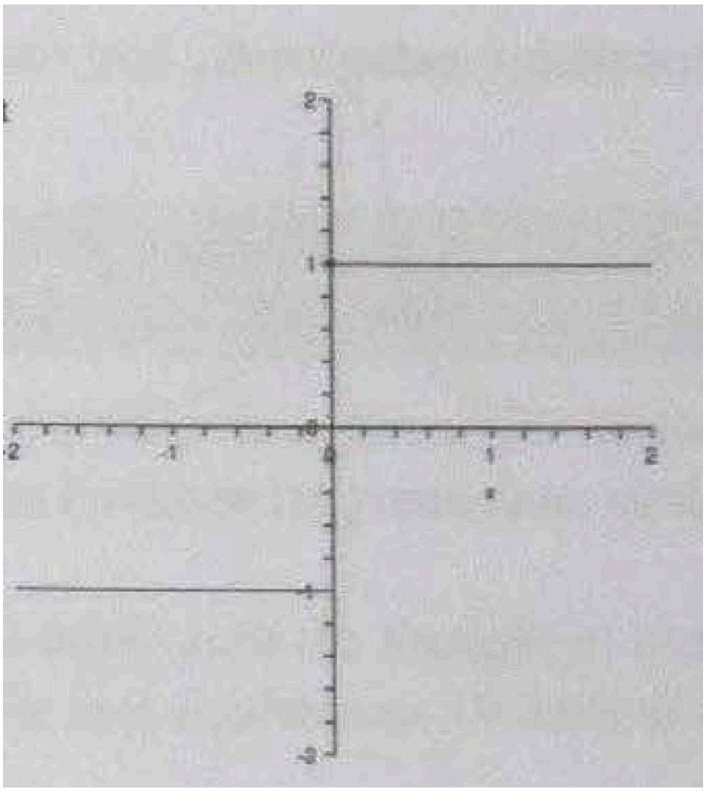
Mathematik für Informatik, p.186

(b) Anders geartet ist die Funktion (siehe Abb. 4.9, rechts)

$$g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x > 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Hier ist eine stetige Fortsetzung der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ offenbar nicht möglich, da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x)$ davon abhängt, von welcher Seite wir uns der

Stelle x_0 nähern. Die einseitigen Grenzwerte sind $\lim_{x\to 0-} g(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0+} g(x) = 1$.



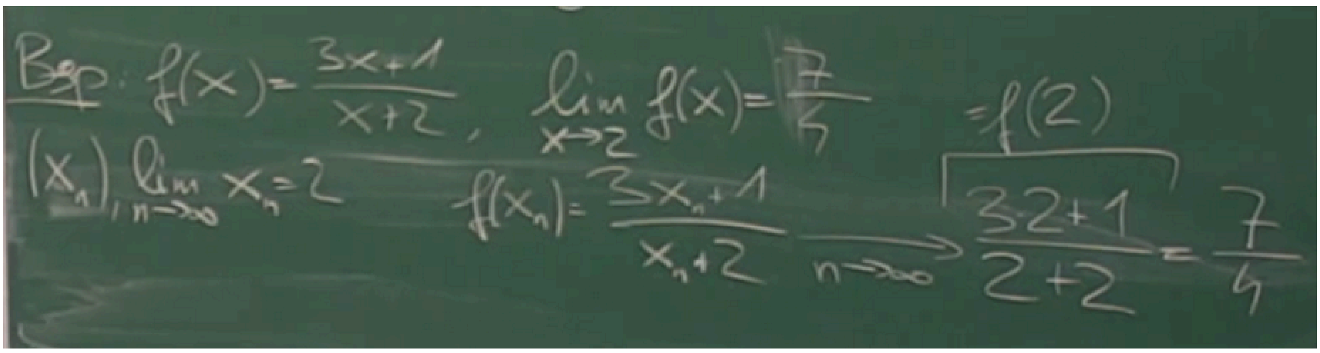
Weiter Beispiele:

Beispiel 4.83

Mathematik für Informatik, p.188

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

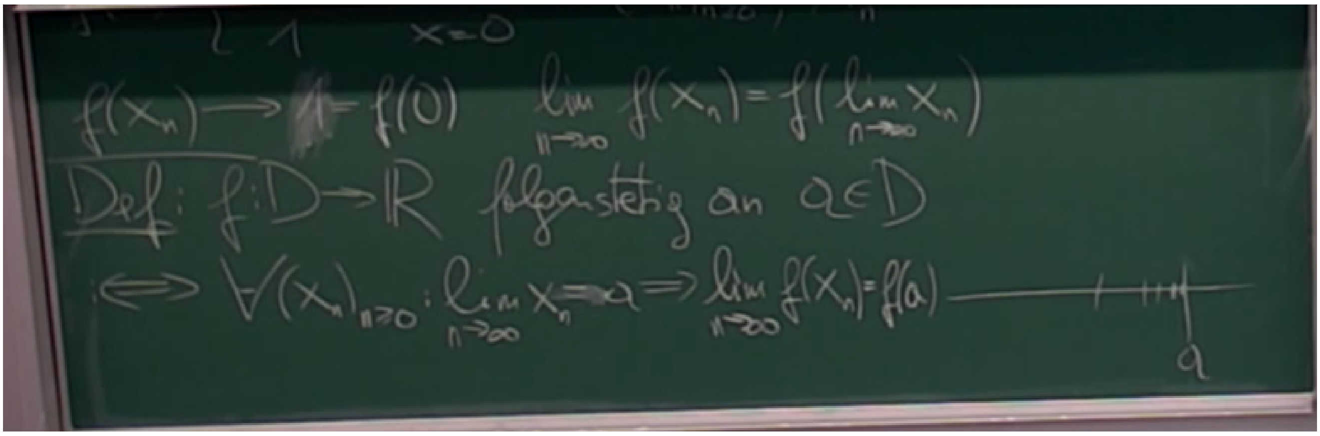
Man beachte, dass wir hier nicht mehr mit Folgen argumentieren müssen, sondern direkt Grenzwerte von Funktionen bestimmen können. Da Grenzwerte von Funktionen über Grenzwerte von Folgen definiert werden, sind nämlich auch alle Rechenregeln für letztere (Satz 4.14 und 4.16) direkt übertragbar.



Definition für Stetigkeit

Hier haben wir einmal eine Definition für Stetigkeit die zeigt, dass Stetigkeit nichts anderes ist, als dass man Grenzwertbildung und Funktionsauswertung miteinander vertauschen kann.

> **Definition 4.84**
>
> Mathematik für Informatik, p.189
>
> Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn $f\left(x_0\right)=\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Die Funktion f heißt stetig in D, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.



Wir haben den Grenzwert von Funktionen und damit auch die Stetigkeit über den Grenzwert von Folgen definiert. Hier noch eine äquivalente Definition der Stetigkeit:

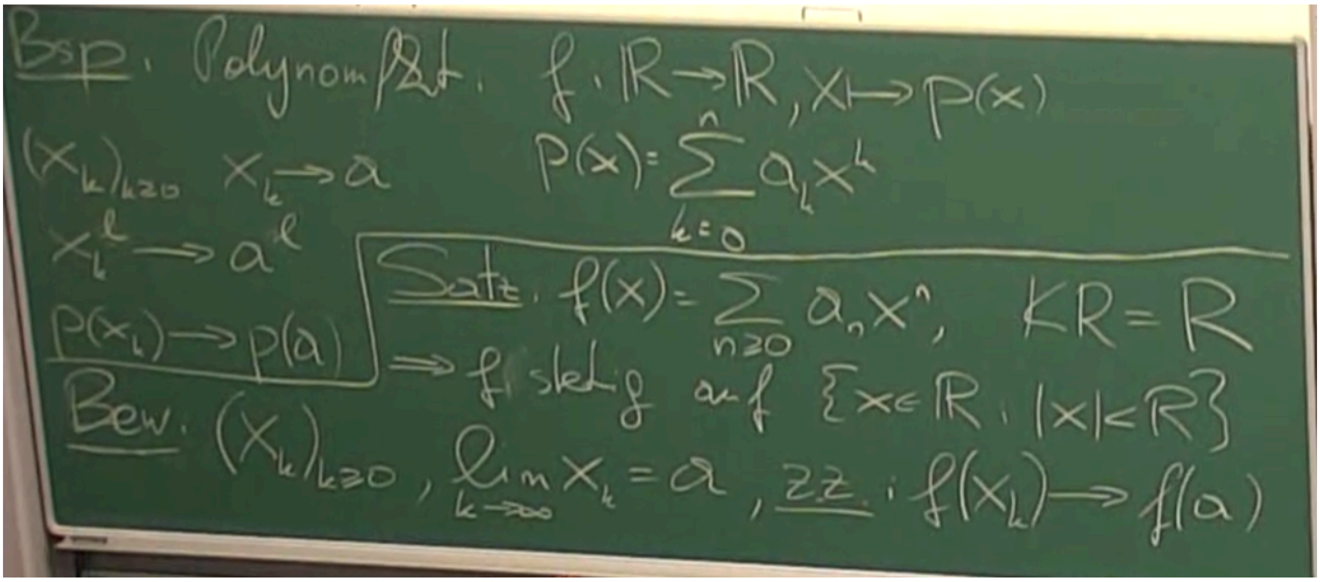
> **Definition 4.85**
>
> Mathematik für Informatik, p.189
>
> Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn
>
> $$\forall \varepsilon>0 \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0:\left(\left|x-x_0\right|<\delta \Longrightarrow\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon\right)$$

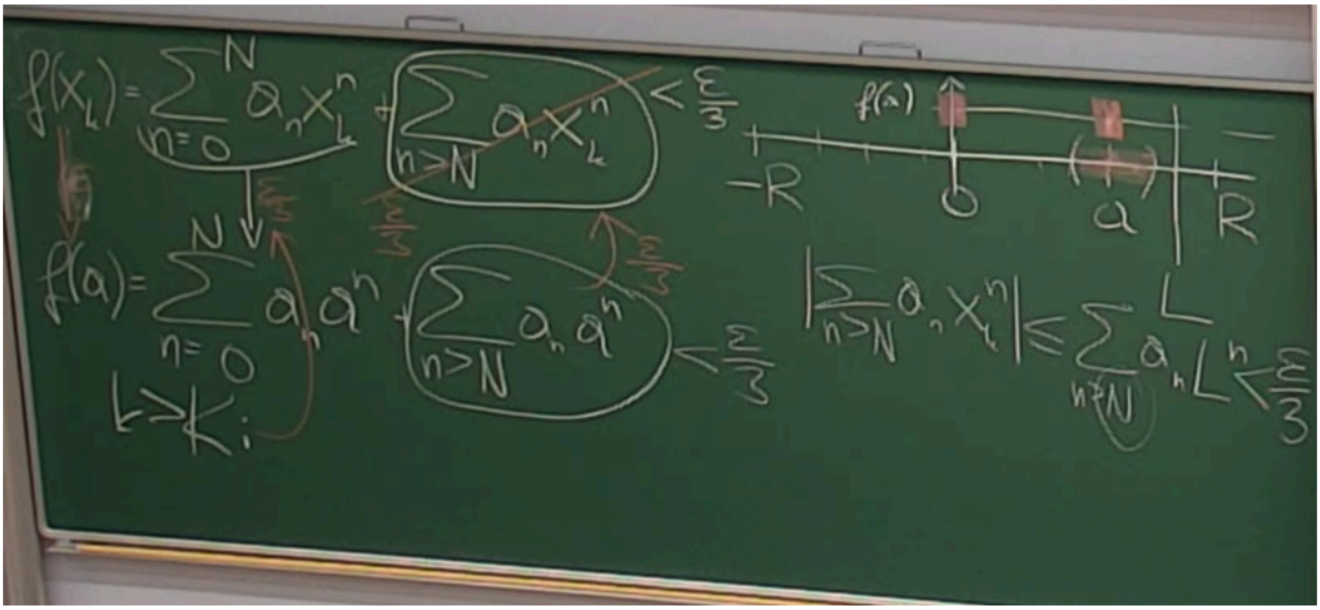
- **Anschauliche Bedeutung der Stetigkeitsdefinition:** - Betrachtung der Funktion $f(x)$ lokal um x_0

> \begin{aligned}
> \left|f\left(x{n}\right)-f(x)\right| & =\left|\sum{m \geq 0} a{m} x{n}^{m}-\sum{m \geq 0} a{m} x^{m}\right| \
> & \leq \sum{m=0}^{N}\left|a{m}\right|\left|x{n}^{m}-x^{m}\right|+\sum{m>N}\left(\left|a{m} x{n}^{m}\right|+\left|a_{m} x^{m}\right|\right) .
> \end{aligned}
>
> $Abbildung 4.12 Zur\$\varepsilon\$-\$\delta\$-Definition der Stetigkeit\$\mathrm{Da}\left|x_n\right| \leq r<R\$und\$|x| \leq r<R\$kön$

> \left|f\left(x{n}\right)-f(x)\right| \leq \sum{m=0}^{N}\left|a{m}\right|\left|x{n}^{m}-x^{m}\right|+c \frac{q^{N+1}}{1-q}
>
> $Gebenwirnunein\$\varepsilon > 0\$vor, dann gibtesein\$N\$, sodassderzweiteSummandkleiner\$\varepsilon/2\$ist. Da$

vo





Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.87

Mathematik für Informatik, p.190

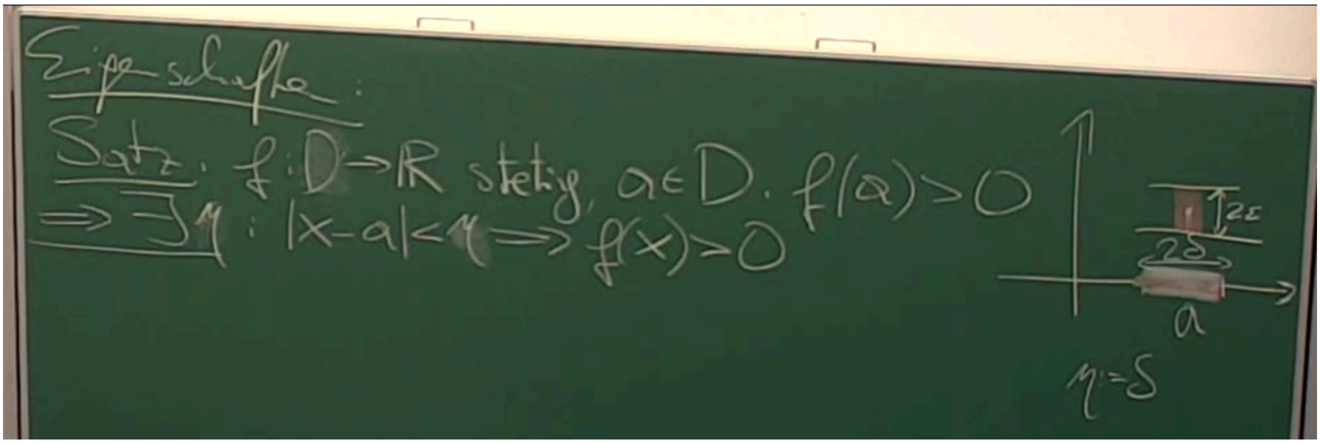
Eine direkte Konsequenz der Stetigkeit ist die Vorzeichenbeständigkeit.

Für jede stetige Funktion f mit $f(x_0) > 0$ gibt es eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$, so dass $f(x) > 0$, für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Für $f(x_0) < 0$ gilt eine analoge Aussage.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = f(x_0)/2$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f ein δ, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. Daraus folgt

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

für $|x - x_0| < \delta$.



Nullstellensatz (von Bolzano)

Satz 4.88 (Nullstellensatz von Bolzano)

Mathematik für Informatik, p.190

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f auf $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle, d.h., es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ nach folgendem Algorithmus: Sei $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Die Werte a_1 und b_1 werden in Abhängigkeit von $f_0 = f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ bestimmt:
$f_0 < 0$: Dann setzen wir $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ und $b_1 = b_0$.

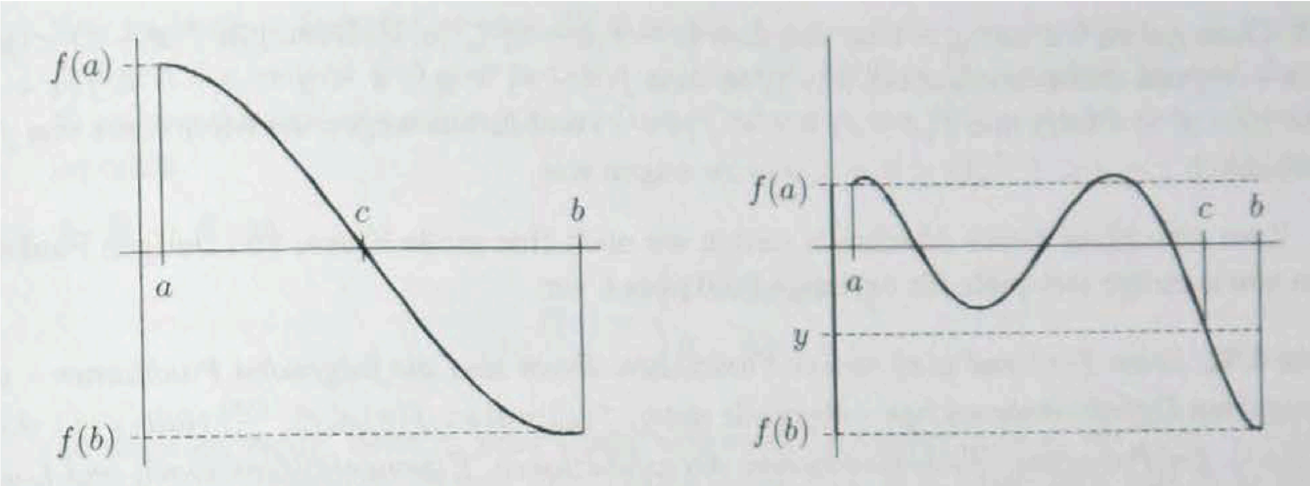
$f_0 > 0$: Dann setzen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

$f_0 = 0$: Dann haben wir die gewünschte Nullstelle und sind fertig.

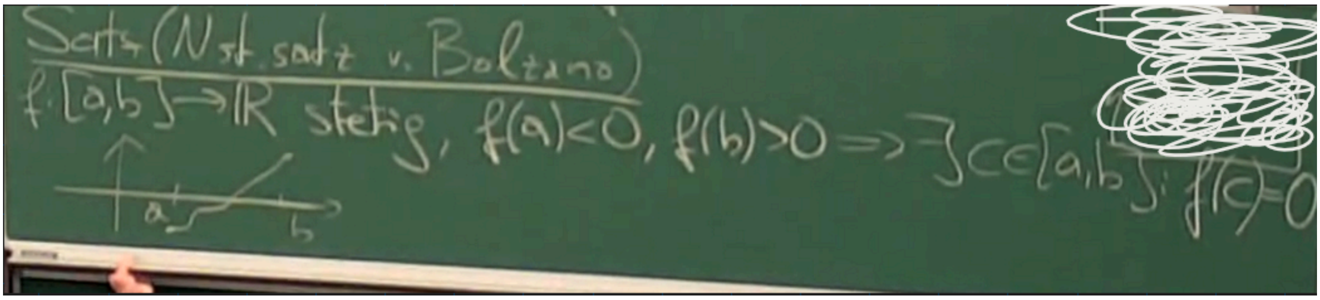
Falls wir noch keine Nullstelle gefunden haben, wenden wir das obige Verfahren auf $[a_1, b_1]$ an, usw.

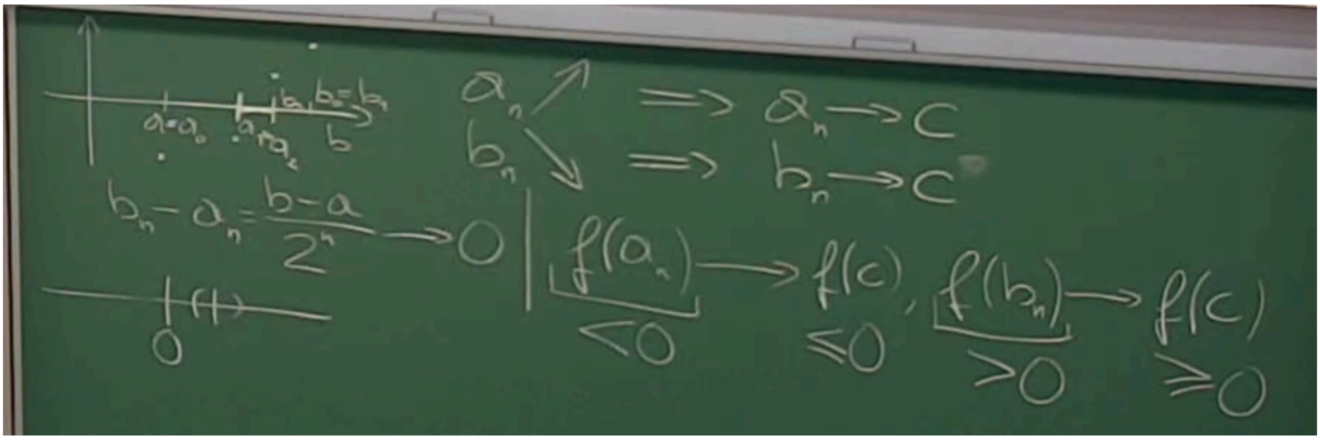
Auf diese Weise erhält man entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle oder zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$. Aufgrund der Konstruktion ist offensichtlich, dass $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$. Darüber hinaus sind die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, erstere ist monoton wachsend und letztere monoton fallend. Wegen

$|a_n - b_n| = |a - b| \cdot 2^{-n}$ konvergieren sowohl $(a_n)_{n \geq 0}$ als auch $(b_n)_{n \geq 0}$ gegen denselben Grenzwert c. Aus $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = c$ folgt nun aufgrund der Stetigkeit von f, dass $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c)$. Wegen $f(a_n) < 0$ muss jedoch $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0$ gelten. Analog gilt $\lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0$ und folglich $f(c) = 0$.



vo





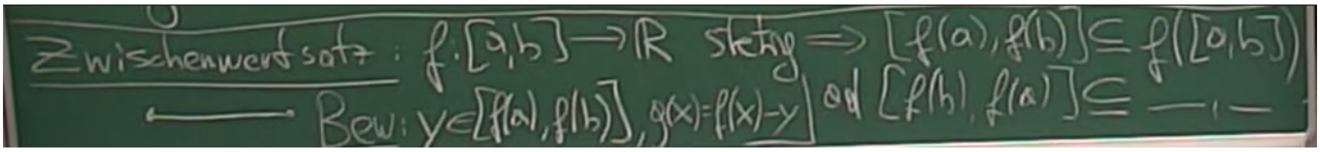
Zwischenwertsatz

ⓘ Satz 4.89 (Zwischenwertsatz)

Mathematik für Informatik, p.191

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ jeden Wert z wischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Beweis. Im Fall $f(a) = f(b)$ ist nichts zu beweisen. Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Ferner sei c beliebig mit $f(a) < y < f(b)$. Nun setzen wir $g(x) = f(x) - y$. Dann gilt $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Aus Satz 4.88 folgt nun die Existenz einer Nullstelle c von $g(x)$. Dieses c leistet aber bereits das Gewünschte, denn $f(c) = y$ (vgl. Abb. 4.13).



Weitere Sätze

Satz 4.90

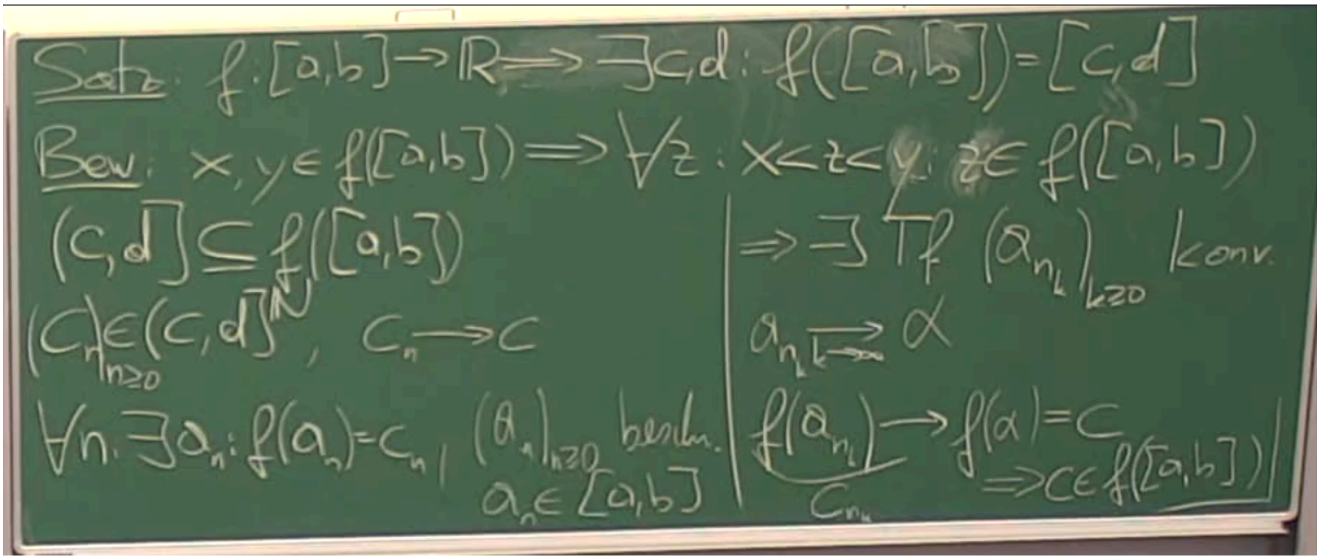
Mathematik für Informatik, p.191

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall.

Beweis. Für $x, y \in I$ gilt nach Satz 4.89, dass alle Werte zwischen $f(x)$ und $f(y)$ in $f(I)$ liegen. $f(I)$ ist also ein Intervall.

Sei $A = \sup f(I)$. Dann existiert eine Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ mit $b_n \to A$. Wegen $b_n \in f(I)$ existieren a_n mit $f(a_n) = b_n$. $\mathrm{Da} (a_n)_{n \geq 0}$ beschränkt ist, existiert nach Satz 4.27 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \geq 0}$. Sei $a = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von f, dass
$f(a) = A$. Analoge Argumente für inf $f(I)$ ergeben schließlich die Abgeschlossenheit von $f(I)$.

Der vorige Satz beinhaltet auch Folgendes: Eine auf einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion nimmt auf I ein Maximum und ein Minimum an.



Ausgehend vom vorigen Statz folgt der hier:

Satz 4.91

Mathematik für Informatik, p.191

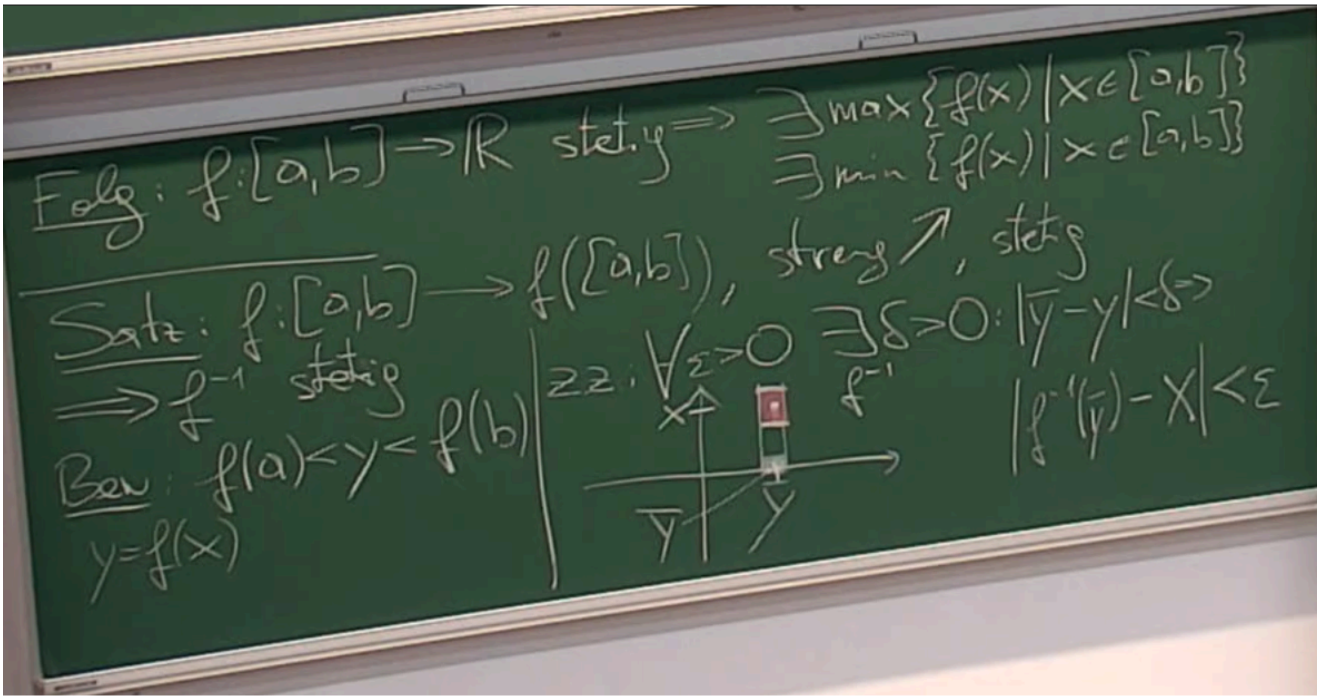
Sei $I=[a,b]$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}:f(I)\to I$ und ist ebenfalls stetig.

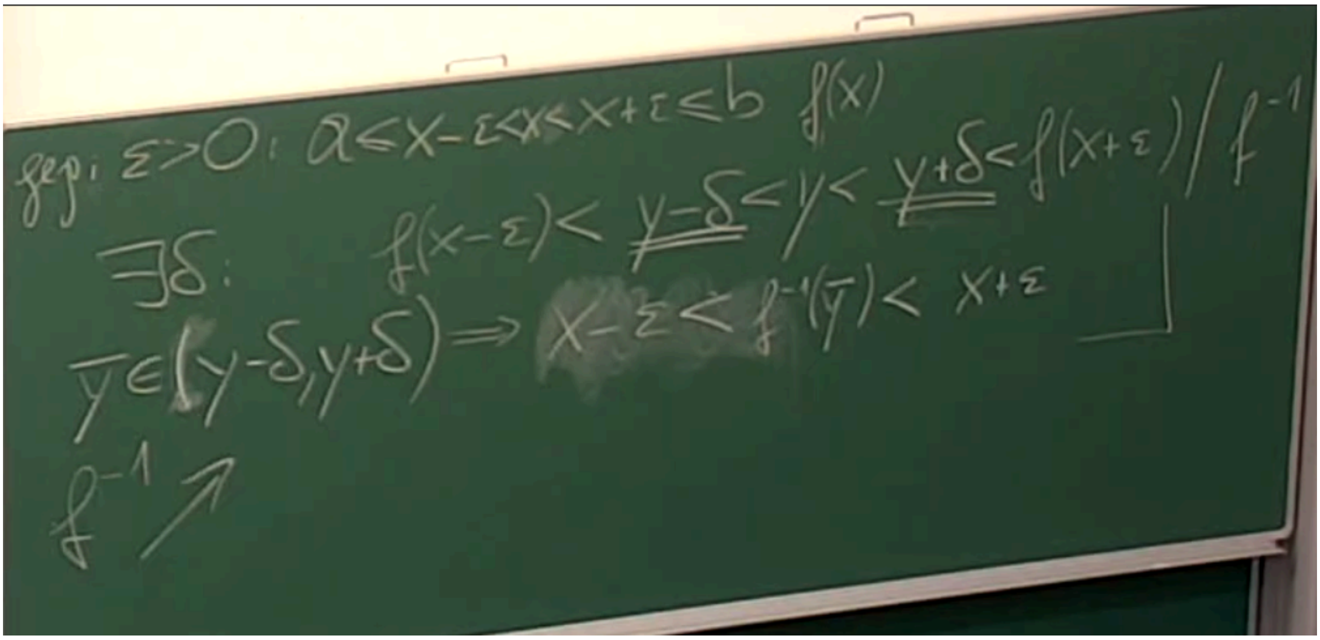
Beweis. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend. Wegen des Zwischenwertsatzes (Satz 4.89) nimmt f auf I alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, also ist $f(I)=[f(a),f(b)]$. Aufgrund der strengen Monotonie lässt sich f umkehren, und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend. Sei $y\in f(I)$, wobei wir uns auf den Fall $y\neq f(a)$ und $y\neq f(b)$ beschränken. Dann gilt $x=f^{-1}(y)\in(a,b)$. Die anderen Fälle (y am Rand des Intervalls) lassen sich ähnlich behandeln.

Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig an der Stelle y ist, also dass

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:|\bar{y}-y|<\delta\Longrightarrow\left|f^{-1}(\bar{y})-x\right|<\varepsilon$$

gilt. Dazu geben wir uns $\varepsilon>0$ so vor, dass $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\subseteq[a,b]$. Dann gilt $f(x-\varepsilon)<y<f(x+\varepsilon)$, und daher existiert ein $\delta>0$, so dass $f(x-\varepsilon)<y-\delta<y<y+\delta<f(x+\varepsilon)$. Aus $|\bar{y}-y|<\delta$ folgt nun $f(x-\varepsilon)<\bar{y}<f(x+\varepsilon)$ und daraus wegen der Monotonie von f^{-1} schließlich $x-\varepsilon<f^{-1}(\bar{y})<x+\varepsilon$, was zu zeigen war!





Satz 4.92

Mathematik für Informatik, p.192

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Funktionen - auf geeigneten Definitionsbereichen - ebenfalls stetig: $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(falls g(x) \neq 0)$, $f(g(x))$. Da Polynome, Winkelfunktionen, Arcusfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen stetig sind, folgt daraus, dass alle elementaren Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten selbstverständlich nur dann, wenn die betreffenden Funktionen einen geeigneten Definitionsbereich haben. So ist z.B. $f + g$ nur dort definiert, wo sowohl f als auch g definiert sind.

Unstetigkeiten

Beispiel 4.93 (Unstetigkeit)

Mathematik für Informatik, p.192

(a) Die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (siehe Abb. 4.14) ist unstetig an allen Stellen $x \in \mathbb{Z}$ und überall sonst stetig.

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (vgl. Abb. 4.11) ist im gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ stetig und im Punkt $x = 0$ nicht definiert. Setzen wir die Funktion auf $x = 0$ fort, z.B. mittels

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

so hat $g(x)$ eine Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$.

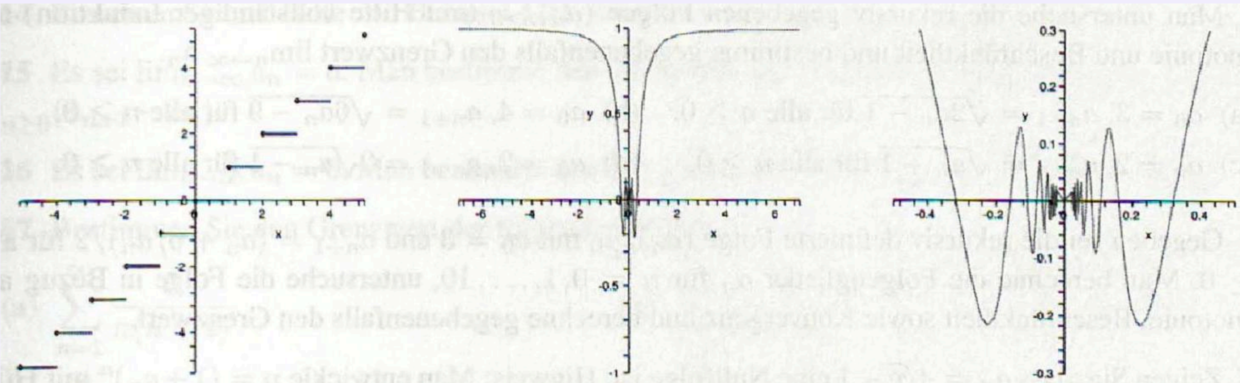


Abbildung 4.14 links: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, Mitte und rechts: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(c) Wie im vorigen Beispiel ist auch die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Es handelt sich aber um eine so genannte hebbare Unstetigkeit, da man durch Erweitern des Definitionsbereichs um 0 und Definieren von $f(0) = 0$ eine stetige Funktion erhält.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig, denn in jeder Umgebung einer rationalen Zahl x, wo $f(x) = 1$ gilt, liegen auch irrationale Zahlen, also Zahlen y mit $f(y) = 0$. Umgekehrt gibt es in jeder Umgebung einer irrationalen Zahl auch rationale Zahlen.

Quellen:

- Mathematik für Informatik;

- 4. Folgen Reihen und Funktionen