

4.1 Folgen

Link zur Formelsammlung: [FS_4.1 Folgen](#)

1. Definitionen und Grenzwert

Definition

Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Menge M , die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in M$ zuordnet.

Beispiel: $\begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x_n = 2n \end{matrix}$ für $n \in \mathbb{N}$

Konstante Folge

$$x_n = 2 \rightarrow 2, 2, 2, 2, \dots$$

Arithmetische Folge

$$x_n = x_0 + n * d \rightarrow 2, 5, 8, \dots$$

Geometrische Folge

$$x_n = x_0 * q^n \rightarrow 2, 6, 18, \dots$$

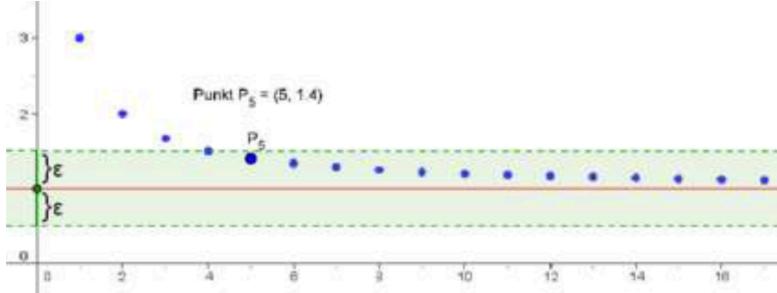
Folgen können entweder **explizit** oder **rekursiv** definiert werden.

Grenzwert

Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ϵ -Umgebung von a fast alle Folgenglieder x_n liegen.

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**. (Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{n^2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\epsilon) : |x_n - x| < \epsilon$$



Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ oder } x_n \rightarrow x$$

Divergenz

Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie **unbestimmt divergent**. Das wäre zum Beispiel:

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

Konvergenz

Besitzt eine Folge einen **eindeutigen Grenzwert**, ist sie **bestimmt konvergent**. Besitzt sie den Grenzwert $\pm\infty$ heißt sie **unbestimmt konvergent bzw. bestimmt divergent**.

1. Definition und Grenzwert

Mathematik für Informatik, p.154

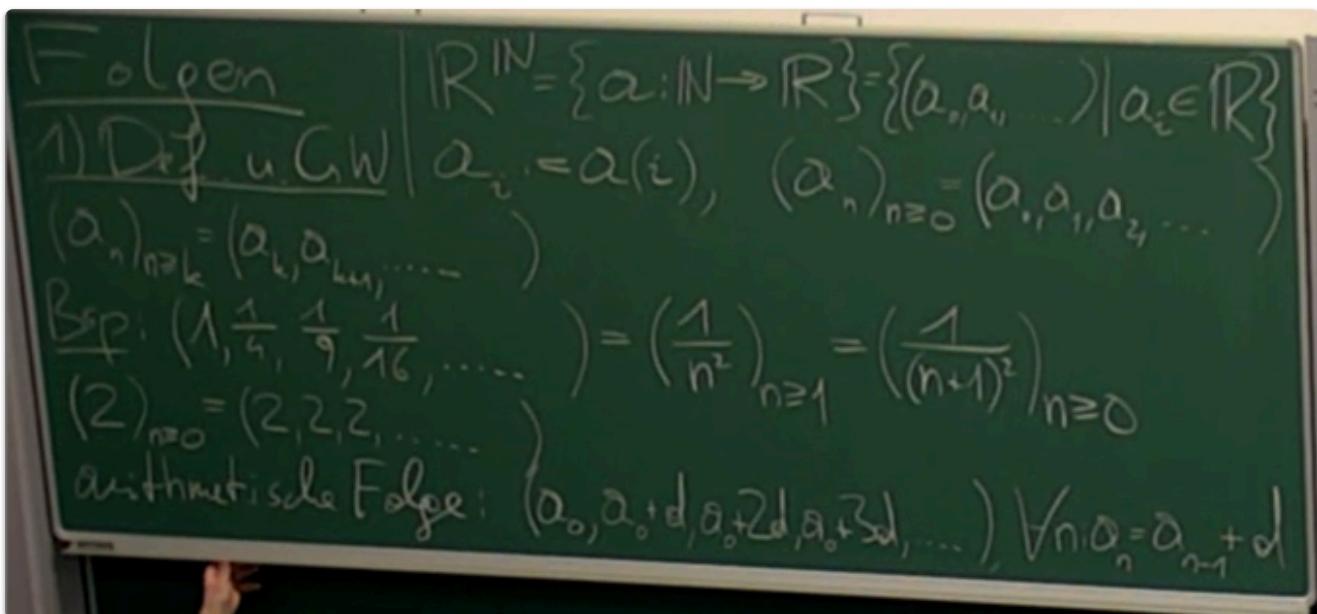
☰ Beispiel 4.1

Betrachten wir die Zahlen $a_0 = 3, a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415, a_5 = 3.14159, a_6 = 3.141592, \dots$. Allgemein sei a_n die Dezimalentwicklung von π bis zur n -ten Nachkommastelle. Je größer n ist, desto besser wird π von a_n approximiert, d.h., der Abstand $|a_n - \pi|$ wird mit wachsendem n immer kleiner. Dabei wird π sogar beliebig genau approximiert: Legt man zu Beginn eine erlaubte Abweichung fest (z.B. höchstens 10^{-m}), so wird diese Vorgabe von allen a_n mit hinreichend großem Index (in diesem Fall $n \geq m$) auch erfüllt. Dies ist die Grundidee des Grenzwertbegriffs.

⌚ Definition 4.2

Unter einer **reellen Folge** versteht man eine Anordnung von reellen Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots . Eine andere Schreibweise ist $(a_n)_{n \geq 0}$. Folgen können auch als Funktionen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden. In diesem Fall gilt $a(n) = a_n$. Die Zahlen a_n , aus denen die Folge aufgebaut ist, nennt man die Glieder der Folge, und n heißt Index des Folgenglieds a_n .

Bei Bedarf kann der Index auch mit 1 oder einer anderen natürlichen Zahl k beginnen, d.h. man betrachtet dann Folgen der Gestalt $(a_n)_{n \geq 1}$ bzw. $(a_n)_{n \geq k}$.



"Arithmetische Folge" ... eine Folge dessen Abstände immer gleich sind

☰ Beispiel 4.3

Mathematik für Informatik, p.155

Im Folgenden geben wir einige Beispiele für Folgen.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1 : 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

(b) Mit $a_n = 2$ erhalten wir die Folge 2, 2, 2, 2, ... Diese Folge ist eine **konstante Folge**.

(c) Die **arithmetischen Folgen** sind durch $a_n = a_0 + dn$ gegeben. Die Differenz von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, d.h., die Gleichung $a_n - a_{n-1} = d$ ist für alle $n \geq 1$ erfüllt. Beispiel: 1, 3, 5, 7, 9, ...

(d) **Geometrische Folgen** sind Folgen der Form $a_n = a_0 q^n$, d.h., der Quotient von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, also $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Beispiel: 1, 3, 9, 27, 81, ...

(e) Folgen können auch **rekursiv** definiert werden, d.h., das n -te Folgenglied ist durch eine Funktion der vorher gehenden Folgenglieder bestimmt. Z.B. beschreibt $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Geometrische Folge: "Wie eine Polynomfunktion"

Rekursiv: nächstes Folgenglied berechnet man mit unter anderem dem Vorherigen

Häufungspunkte:

Mathematik für Informatik, p.156

Häufungspunkt

Wenn in jeder ϵ -Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \geq 0}$. Im Gegensatz zum Grenzwert kann es mehrere Häufungspunkte geben.

Der größte Häufungspunkt heißt: **Limes superior**

Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior**

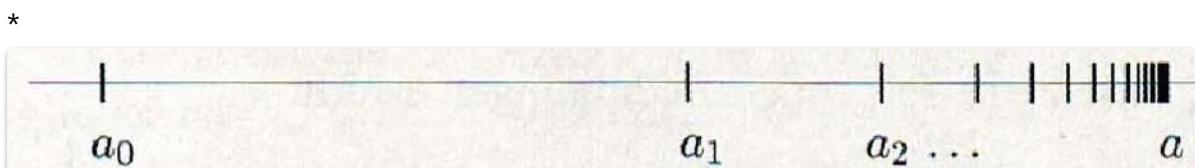
Konvergiert eine Folge, so gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, da es nur einen Häufungspunkt geben darf.

⌚ Definition ε -Umgebung

Wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geq 0}$. Analog zum uneigentlichen Grenzwert werden uneigentliche Häufungspunkte definiert. Der größte Häufungspunkt (uneigentliche mit eingeschlossen) heißt **Limes superior** (man schreibt: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$), der kleinste Häufungspunkt **Limes inferior** ($\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$).

- **Grenzwert einer Folge (a):**

- Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N , sodass für alle $n \geq N$ gilt:
 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Bedeutung: Ab N liegen alle Folgenglieder innerhalb des ε -Abstands um a .
- Konsequenz: Enthält eine ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder nicht, ist a kein Grenzwert.



- Abbildung 4.1 Konvergenz von Folgen

- **Häufungspunkt einer Folge (a):**

- Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält die ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder.
- Anzahl der Folgenglieder außerhalb des ε -Abstands kann endlich oder unendlich sein.

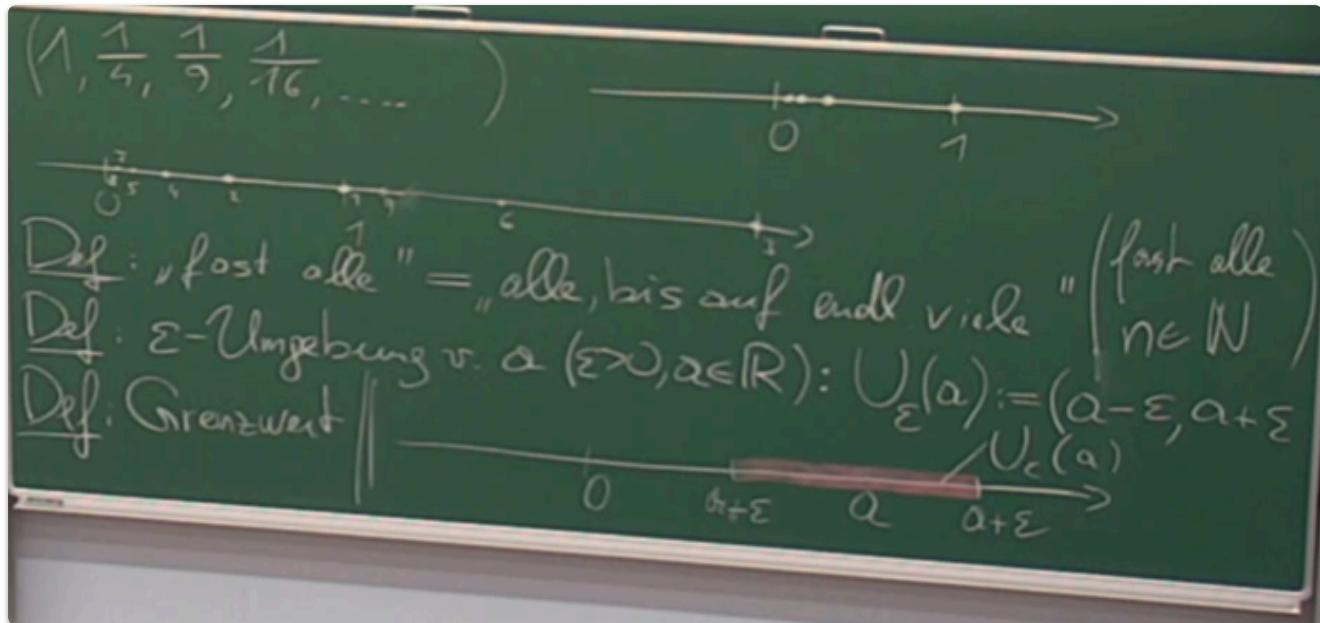
- **Limes superior und Limes inferior:**

- Existieren für jede Folge (eigentlich oder uneigentlich), im Gegensatz zum Grenzwert (siehe Beispiel 4.5).

- **Zusammenhang zwischen Grenzwert und Häufungspunkt:**

- Jeder Grenzwert einer Folge ist auch ein Häufungspunkt.

- Die Umkehrung gilt nicht.
- Eindeutigkeit des Grenzwerts:
 - Sind a und b zwei verschiedene Häufungspunkte, dann existiert ein $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - b|$, sodass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.
 - Folglich können nicht fast alle Folgenglieder in beiden Umgebungen liegen.
 - Eine konvergente Folge besitzt nur einen Häufungspunkt.
 - Im Falle der Konvergenz gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.



Limes / Grenzwert:

[Mathematik für Informatik, p.155](#)

Man sagt, eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn sie für alle bis auf endlich viele Ausnahmen gilt. Weiters bezeichnen wir das Intervall

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

als ε -Umgebung von a .

⌚ Definition 4.4

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h., falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ heißt konvergent, falls sie einen Grenzwert a besitzt (siehe auch Abb. 4.1). In diesem Falle konvergiert die Folge gegen a , und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \longrightarrow a$$

Besitzt die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ keinen Grenzwert, so heißt sie divergent. Eine Folge, die 0 als Grenzwert besitzt, nennt man auch Nullfolge.

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, deren Glieder beliebig groß werden, d.h., für die gilt

$$\forall K > 0 \exists N(K) \in \mathbb{N} \forall n > N(K) : a_n > K,$$

heißt uneigentlich konvergent, und man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Analog definiert man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ und nennt solche Folgen ebenfalls uneigentlich konvergent. Der Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ wird dann als uneigentlicher Grenzwert bezeichnet.

Def.: $(a_n)_{n \geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, a Grenzw. v. $(a_n)_{n \geq 0}$

i.Z. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ obw. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$

Für jede $U_\varepsilon(a)$ für n groß genug $a_n \in U_\varepsilon(a)$

für fast alle $n: a_n \in U_\varepsilon(a)$

Beispiele zu Limes:

☰ Beispiel 4.5

Mathematik für Informatik, p.156

(a) Gegeben sei die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n>1} = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots)$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt $0 < a_n < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Somit ist 0 Grenzwert dieser Folge.

(b) Sei $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$. Diese Folge ist divergent. Es liegen jeweils unendlich viele Folgenglieder in jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(1)$ und $U_\varepsilon(-1)$. Also sind -1 und 1 Häufungspunkte der Folge. Daher besitzt diese Folge keinen Grenzwert.

(c) Die Folge $a_n = (n^2)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$ ist uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, da für jede beliebig vorgegebene Zahl $K > 0$ eine Quadratzahl existiert, die größer als K ist.

Bsp: $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?

Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig

Finde ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

II. \mathbb{N}^+

Bsp: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{10}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(1, \frac{1}{2}, \frac{10}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{10}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\forall \varepsilon > 0: |a_n - 0| = |a_n| = a_n < \varepsilon \quad \text{f} \ddot{\text{o}} \quad n > N(\varepsilon)$

$a_n \leq \frac{10}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{10}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{10}{\varepsilon} \right\rceil$

Ungew. GlW: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0: \exists N(K) \in \mathbb{N}: \forall n > N(K), a_n > K$

2. Monotonie und Beschränktheit

Mathematik für Informatik, p.157

Monotonie

Eine Folge heißt

- > monoton fallend, wenn $x_{n+1} \leq x_n$
- > streng monoton fallend, wenn $x_{n+1} < x_n$
- > monoton steigend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$
- > streng monoton steigend, wenn $x_{n+1} > x_n$

Beschränktheit

Eine Folge x_n heißt beschränkt, wenn es Zahlen a, b gibt, so dass

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

⌚ Definition 4.6

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ heißt monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar die strikte Ungleichung $a_{n+1} < a_n$, so spricht man von einer streng monoton fallenden Folge. Falls $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend.

☰ Beispiel 4.7

Die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ ist streng monoton fallend, da wegen $(n+1)^2 > n^2$ die Ungleichung $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ gilt. Konstante Folgen sind sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend, jedoch in keinem Sinne streng monoton.

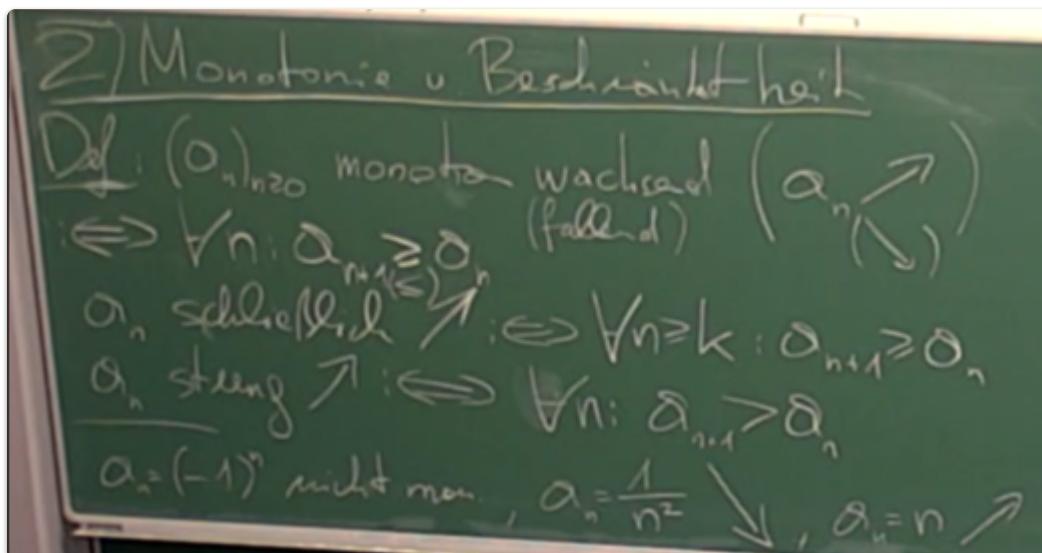
⌚ Definition 4.8

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede solche Zahl S heißt obere Schranke von $(a_n)_{n \geq 0}$. Die kleinste obere Schranke wird das Supremum genannt. Das Supremum $\sup a_n$ ist somit jene reelle Zahl S_0 , welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Es gilt $a_n \leq S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Aus $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $S_0 \leq S$.

Analog definiert man Beschränktheit nach unten und untere Schranken. Die größte untere Schranke wird Infimum genannt und $\inf a_n$ geschrieben. Falls die Folge nicht nach oben bzw. unten beschränkt ist, setzt man $\sup a_n = \infty$ bzw. $\inf a_n = -\infty$.

- **Analoge Definition für Mengen ($M \subseteq \mathbb{R}$):**
 - Schranken, Supremum und Infimum können analog für Mengen reeller Zahlen definiert werden.
 - Reelle Zahlen besitzen Dezimalentwicklungen ($x = x_0.x_1x_2\dots$).
- **Finden des Supremums einer nach oben beschränkten, nicht leeren Menge M :**
 - Kleinste ganze Zahl, die obere Schranke ist: a_0 .
 - Kleinste Zahl der Form $x_0.x_1$, die obere Schranke ist: a_1 .
 - Sukzessive Fortsetzung für alle Dezimalstellen.
 - Resultierende monoton fallende Folge von oberen Schranken konvergiert zum Supremum ($\sup M$).
- **Finden des Infimums einer nach unten beschränkten, nicht leeren Menge M :**
 - Analoges Verfahren zum Supremum.
 - Ergebnis ist das Infimum ($\inf M$).
- **Unbeschränkte Mengen:** -
 - $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist.
 - $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist.
- **Zusammenhang zwischen Folgen und Mengen:**
 - Das Supremum (Infimum) einer Folge ist identisch mit dem Supremum (Infimum) der Menge ihrer Folgenglieder.



Def: S ob. Schranken v. $(a_n)_{n \geq 0} \Leftrightarrow \forall n: a_n \leq S$

$S = \sup(a_n) \Leftrightarrow \forall n: a_n \leq S$

Supremum

$s = \inf a_n \Leftrightarrow \forall n: a_n \geq s$

Infimum

1) $\forall n: a_n \leq S$

2) $\forall S: \exists n: a_n \geq S \Rightarrow s \leq S$

Das kann man auch für Mengen machen:

Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$:

S ob. Schr. v. $M: \forall x \in M: x \leq S$

1) $\forall x \in M: \sup M \geq x$

2) $(\forall x \in M: x \leq S) \Rightarrow \sup M \leq S$

$\{1, 4, 9, 16, \dots\} = M \Rightarrow \sup M = \infty, i.f. M = 1$

$M = [0, 1) \quad \inf M = 0, \sup M = 1$

$\sup M \in M$	$\max M$
$\inf M \notin M$	$\min M$

Sätze:

Sätze

Allgemein

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Hauptsatz über monotone Folgen

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen

Jede nach oben beschränkte Folge besitzt ein Supremum.

Jede nach unten beschränkte Folge besitzt ein Infimum.

Bernoulli'sche Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq 2, x \geq -1, x \neq 0: (1+x)^n > 1 + nx$$

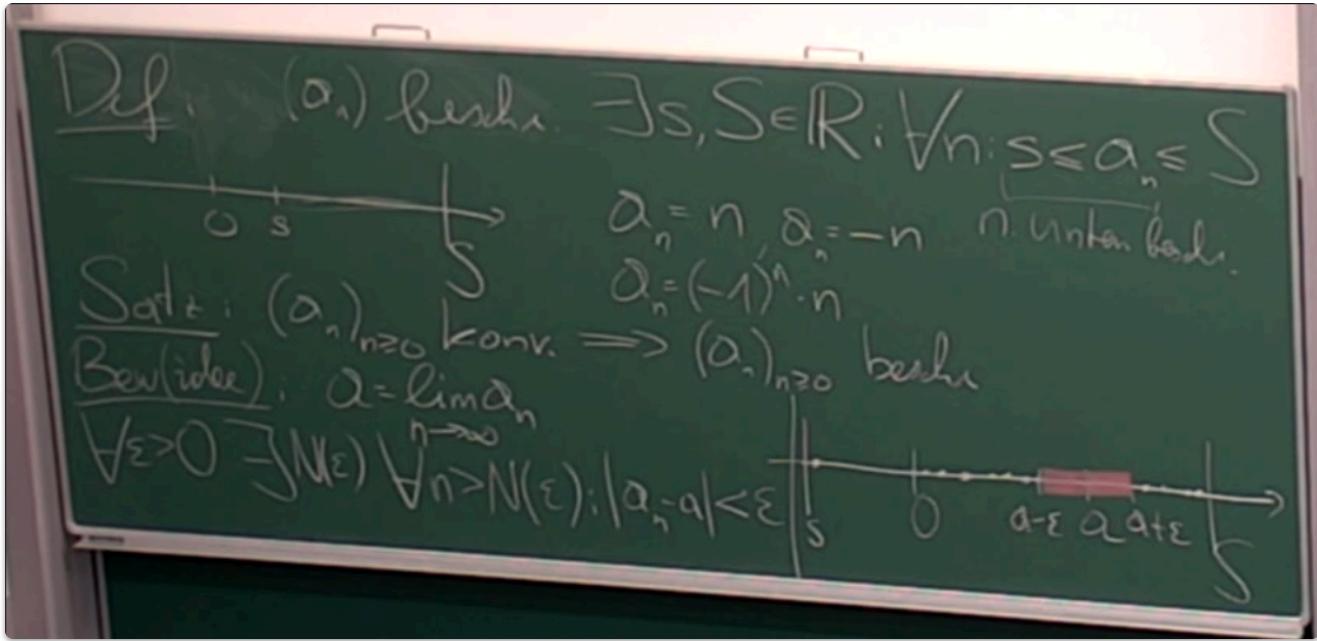
Mathematik für Informatik, p.157:

(i) Satz 4.9 (Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen)

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum (Infimum). Jede nach oben (unten) beschränkte reelle Folge besitzt ein Supremum (Infimum).

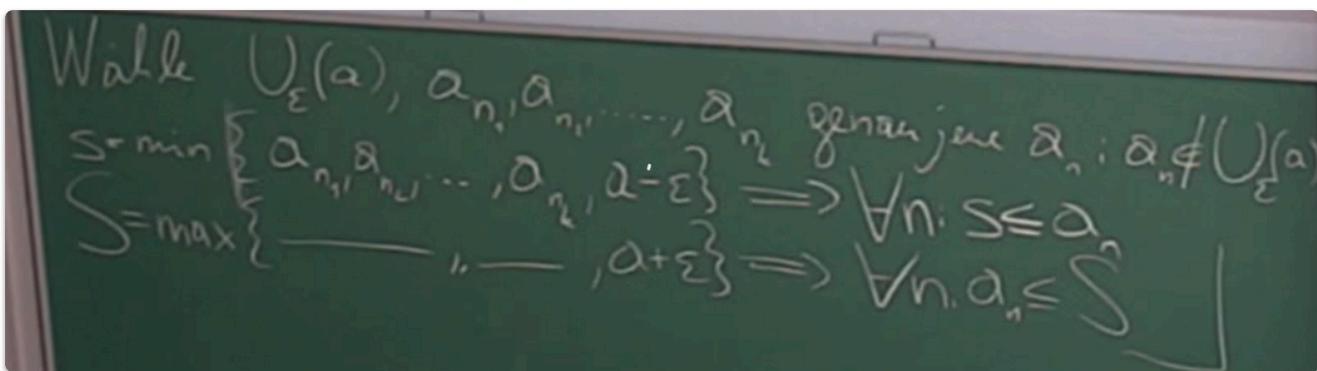
(i) Satz (Jede konvergente Folge ist beschränkt)

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Die Folgenglieder mit $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ seien $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$. Sei $\bar{\varepsilon} > \max_{i=1, \dots, k} |a - a_{n_i}|$ (bzw. $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ im Fall $k = 0$). Dann gilt insbesondere $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$, und daher liegen alle Folgenglieder in $U_{\bar{\varepsilon}}(a)$. Die Intervallgrenzen $a - \bar{\varepsilon}$ bzw. $a + \bar{\varepsilon}$ sind dann untere bzw. obere Schranke von $(a_n)_{n \geq 0}$.



Nach oben/unten Beschränkt

Wenn beides --> Folge beschränkt



① Satz 4.12 Hauptsatz über monotone Folgen

Mathematik für Informatik, p.158

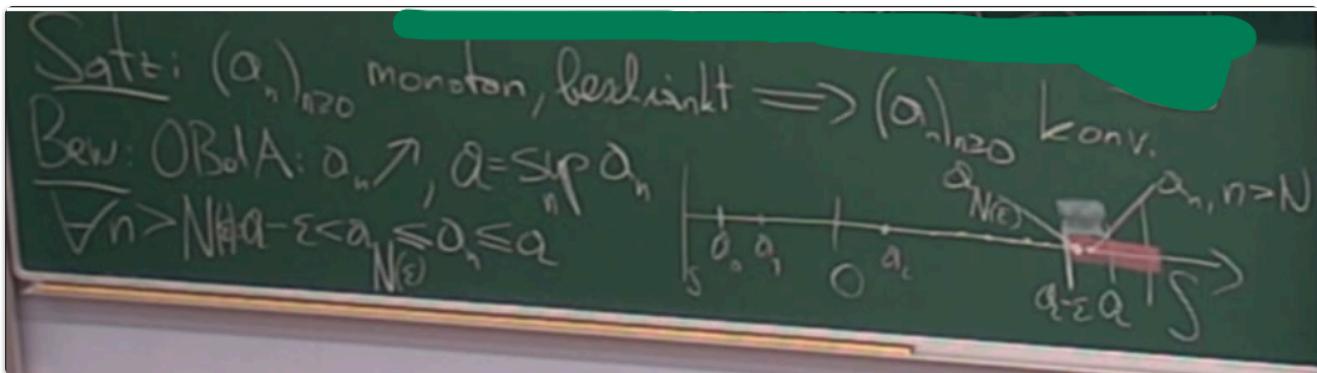
Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. O.B.d.A. sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine monoton wachsende Folge. Aus der Konvergenz folgt nach dem vorigen Satz die Beschränktheit. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass Beschränktheit hinreichend für Konvergenz ist. Nach Satz 4.9 besitzt $(a_n)_{n \geq 0}$ ein Supremum. Sei $a = \sup a_n$ und $\varepsilon > 0$. Da $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $(a_n)_{n \geq 0}$ ist, existiert ein $N(\varepsilon)$ mit $a_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie muss $a_n > a - \varepsilon$ auch für alle $n > N(\varepsilon)$ gelten. Daher liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Da ε beliebig gewählt werden kann, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

☰ Beispiel 4.13

Arithmetische Folgen: $a_n = a_0 + nd$. Es ist leicht zu sehen, dass $(a_n)_{n \geq 0}$ nur für $d = 0$ konvergent ist. In diesem Fall ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine konstante Folge und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$. Im

Fall $d \neq 0$ ist $(a_n)_{n \geq 0}$ uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$, wobei das Vorzeichen mit jenem von d übereinstimmt.



Man nimmt hier das Supremum der Folge, welches eben wie alle anderen unter der Schranke sind, dann schauen wir auf die Linke Seite der ϵ -Umgebung, weil auf der Rechten ist ja nichts und dann nimmt man sich aus der Umgebung das Infinum, hat auf der linken Seite der ϵ U nur endlich viele und alle anderen fast unendlich in der ϵ U --> Konvergent

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } a_n &= a_0 + d \cdot n \quad d > 0 \Rightarrow a_n \nearrow, d < 0 \cdot a_n \searrow \\ d = 0: \quad a_n &= a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ d > 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 0} \text{ nicht beschr.} \quad \exists K: \forall n: a_n \leq K? \\ \text{Ann: } \exists K \quad \forall n: a_0 + dn \leq K \Rightarrow \forall n: n \leq \frac{K - a_0}{d} \\ \Rightarrow (a_n)_{n \geq 0} \text{ divergent} \quad \forall K \quad \exists n: a_n > K \quad \text{d} \end{aligned}$$

Es gibt kein solches $K \rightarrow$ nicht nach oben beschränkt \rightarrow nicht beschränkt \rightarrow nicht divergent

3. Rechnen mit Grenzwerten

Rechnen mit Grenzwerten

Seien $(x_n)_{n \geq 0}$ und $(y_n)_{n \geq 0}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Somit ist die Menge F aller konvergenten Folgen mit der Folgenaddition und Folgenmultiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum.

Addition/Subtraktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x - y$$

Multiplikation/Division

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n * y_n) = x * y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{x}{y} \text{ falls } y_n \neq 0 \text{ und } y \neq 0$$

Rechnen mit uneigentlich konvergenten Folgen

Uneigentlich konvergent = Monoton steigend und unbeschränkt

Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty, \text{ falls } y \in \mathbb{R} \text{ oder } y = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \lambda > 0 \\ -\infty, & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty, \text{ falls } y > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0, \text{ falls } b \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln:

i Satz 4.14

Mathematik für Informatik, p.158

Wir stellen nun einige Rechenregeln für konvergente Folgen vor.

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

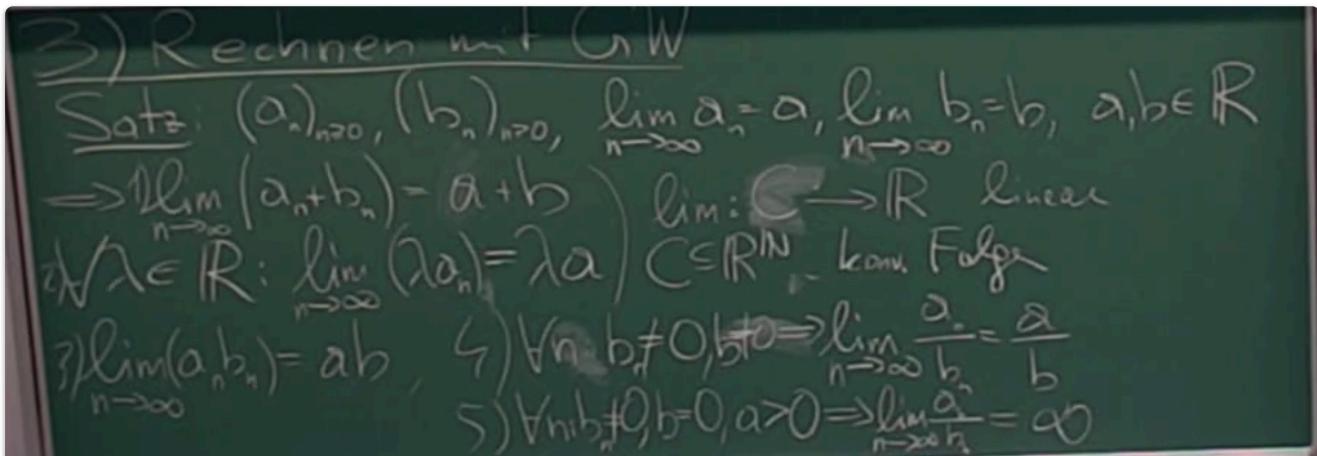
Dann gilt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, (\rightarrow \text{additiv})$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, (\rightarrow \text{homogen})$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab,$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ falls } b_n \neq 0, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ und } b \neq 0.$$



ⓘ Beweis vom obigen Satz

Mathematik für Informatik, p.159

Beweis. Wir begnügen uns mit dem Beweis der ersten Identität und überlassen den Rest als Übungsaufgabe. Es gelte also $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es daher N_1 und N_2 , so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N_1$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N_2$ gilt. Daraus folgt, dass $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n > \max(N_1, N_2)$.

- **Menge F der konvergenten Folgen:**

- Bildet mit Folgenaddition und Multiplikation mit einem Skalar aus \mathbb{R} einen Vektorraum.
- Begründung: Die ersten beiden Rechenregeln aus Satz 4.14 implizieren, dass Addition und Multiplikation in F uneingeschränkt möglich sind.
- F ist ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Vorsicht beim Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten:**

- Rechenregeln für konvergente Folgen sind nicht übertragbar.
- Rechte Seiten der Gleichungen sind nicht definiert.
- Addition und Multiplikation für unendliche Größen sind nicht erklärt.

The image shows a handwritten proof on a chalkboard. At the top, it says "Bew u. 1): $a+b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ ". Below this, there is a boxed statement: " $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) : |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ ". To the right of this, it says "Sei $\varepsilon > 0$ " and "N(ε) := max(N_a, N_b)". Below the boxed statement, there are two separate inequalities: " $\exists N_a : \forall n > N_a : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ " and " $\exists N_b : \forall n > N_b : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ". At the bottom, there is a final inequality: " $\forall n > \max(N_a, N_b) : |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ".

Rechenregeln mit einem $\lim = \infty$

ⓘ Satz 4.16

Mathematik für Informatik, p.159

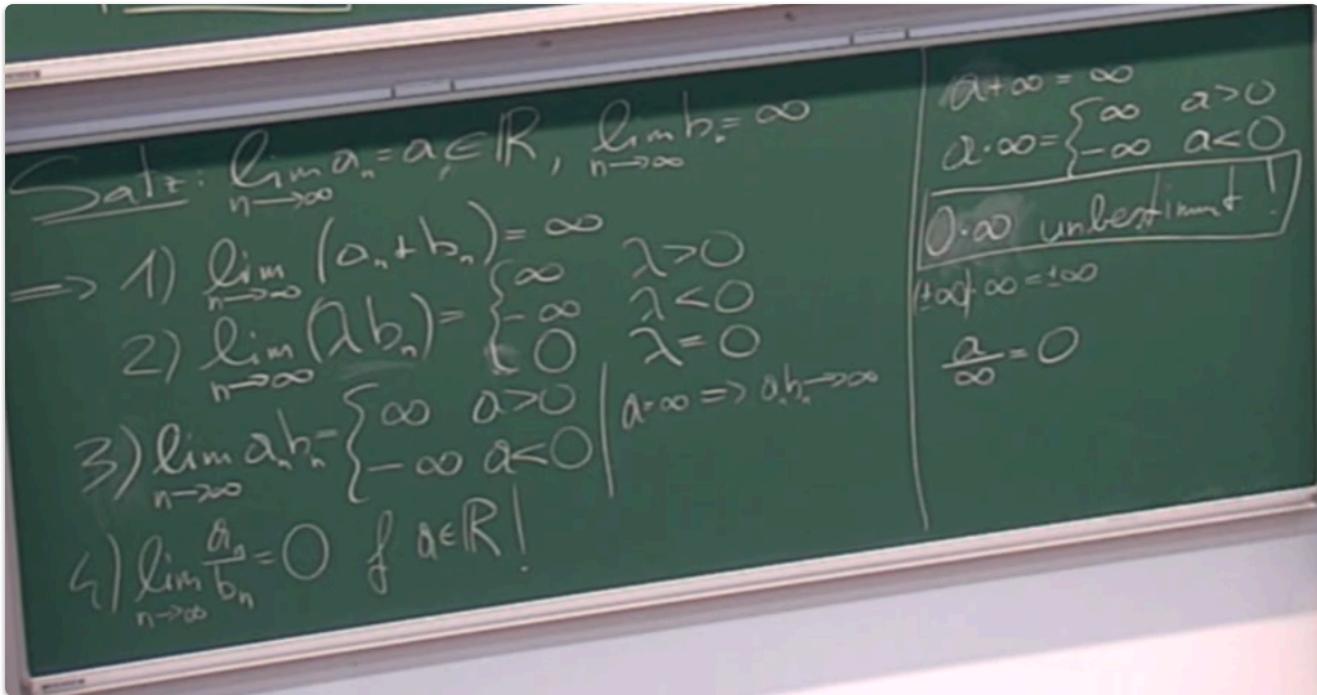
Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$, falls $b \in \mathbb{R}$ oder $b = \infty$,

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \lambda > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty, \text{ falls } b > 0,$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0, \text{ falls } b \in \mathbb{R}.$$



Beispiele:

dieses Unbestimmte auf der Rechten Seite der Tafel ^ behandeln wir jetzt noch genauer:
Mathematik für Informatik, p.159

☰ Beispiel 4.15 Uneigentlich konvergente Folgen

Betrachten wir die Folgen $a_n = n$ und $b_n = n + c_n$, $c_n \geq 0$. Beide Folgen sind uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Über die Differenz $a_n - b_n = c_n$ kann jedoch a priori keine Aussage gemacht werden. Ihr Verhalten hängt von der Folge c_n ab. Ähnlich verhält es sich bei Quotienten zweier uneigentlich konvergenter Folgen oder bei Quotienten zweier Nullfolgen: Es gilt beispielsweise

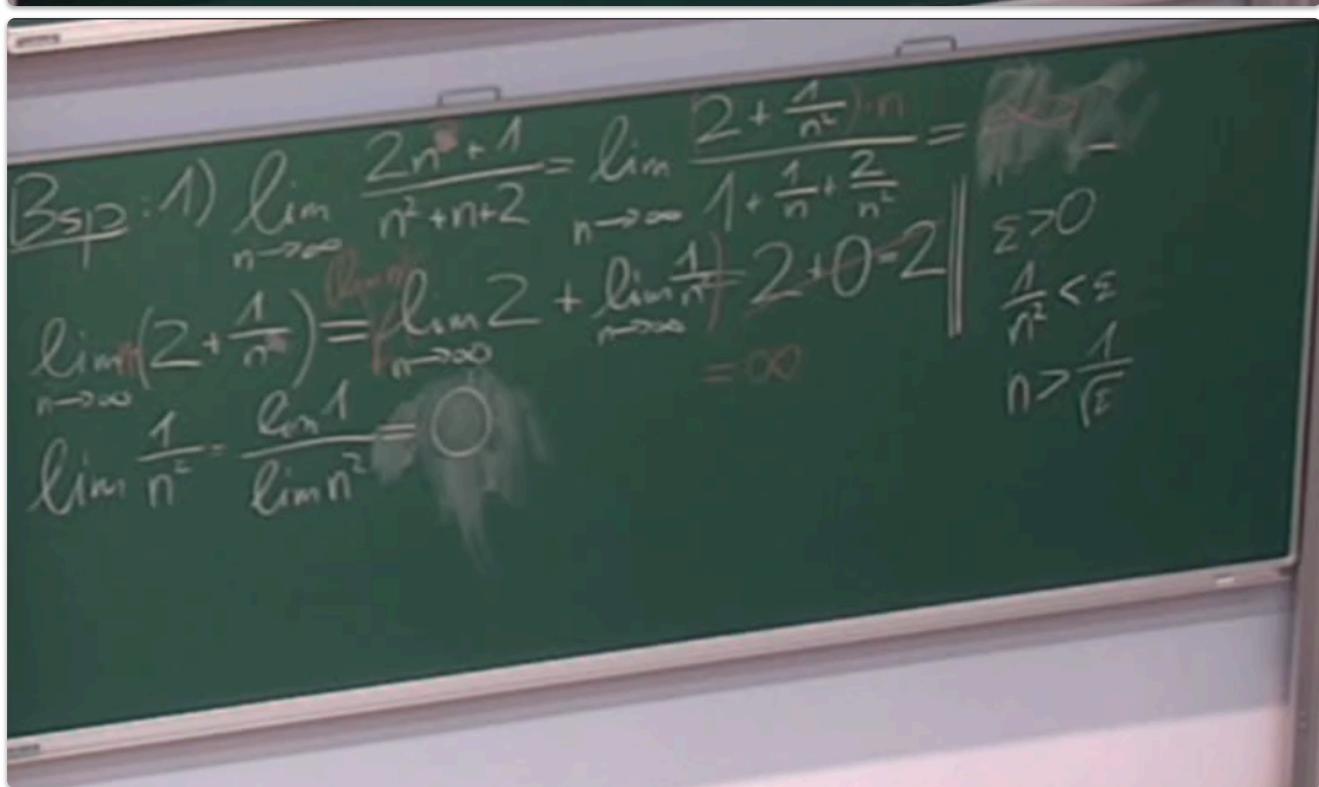
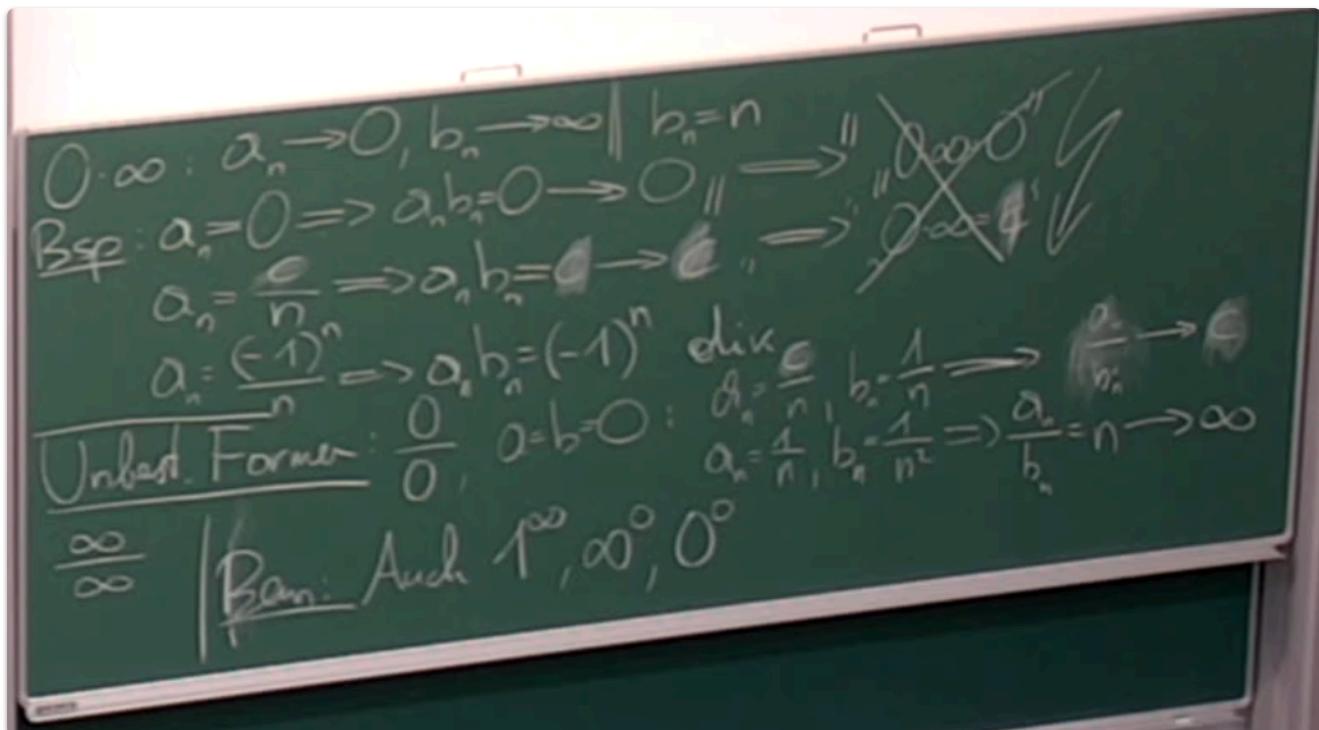
$$\frac{n}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{n^2}{n} \rightarrow \infty, \quad \frac{2n}{n} \rightarrow 2$$

- **Unbestimmte Formen:**

- Ausdrücken wie $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ kann kein sinnvoller Wert zugewiesen werden.
- Auch 1^∞ , ∞^0 und 0^0 zählen zu den unbestimmten Formen (siehe Beispiel 4.19).
- Nähere Behandlung in Abschnitt 5.2.

- **Rechenregeln für Grenzwerte und uneigentliche Grenzwerte:**

- Die im vorigen Satz beschriebenen Rechenregeln sind mit bestimmten Einschränkungen auch für uneigentliche Grenzwerte gültig.



☰ Beispiel 4.18

Mathematik für Informatik, p.160

Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Um das zu zeigen, sei zunächst $q = 1 + p > 1$. Dann gilt

$$q^n = (1 + p)^n = 1 + np + \binom{n}{2}p^2 + \cdots + \binom{n}{n}p^n \geq 1 + np \rightarrow \infty$$

(vgl. dazu auch Satz 4.20). Für $0 < q < 1$ gilt $\frac{1}{q} > 1$ und daher $\frac{1}{q^n} \rightarrow \infty$. Daraus folgt aber $q^n \rightarrow 0$, denn setzt man in Satz 4.16 $a_n = \frac{1}{q^n}$ und $b_n = 1$, so folgt $q^n = \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$. Der Fall $-1 < q < 0$ funktioniert analog, und die Fälle $q = 0$ und $q = 1$ sind trivial. Für $q \leq -1$ ist $(q^n)_{n \geq 0}$ divergent. Ähnlich lässt sich auch für $q \in \mathbb{C}$ argumentieren. Geometrische Folgen im Komplexen konvergieren also für q innerhalb des Einheitskreises sowie für $q = 1$ und divergieren für alle anderen Werte von q

Hier verwenden wir den [Binomischen Lehrsatz](#)

$$\begin{aligned} 2) a_n = q^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \begin{cases} 0 & \text{f. } |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \infty & q > 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{div. f. } q = -1 \\ \text{Bew. } q > 1. \quad q = 1 + p, p > 0 \end{array} \right. \\ q^n = (1+p)^n &= 1 + np + \binom{n}{2}p^2 + \cdots + \binom{n}{n}p^n \quad \boxed{\forall k > 0 \exists N(k)}: \\ &> 1 + np > k \Leftrightarrow n > \underline{k-1} \quad \boxed{\forall n > N(k). \quad a_n > k} \\ \Rightarrow q^n &\rightarrow \infty, \frac{1}{q^n} \rightarrow 0, 1^n = 1 \rightarrow 1, \underset{n \text{ unj.}}{q \leq -1}: (-1)^n q^n = \begin{cases} \leq -1 & n \text{ unj.} \\ \geq 1 & n \text{ ger.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } 1^\infty? \quad a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad b_n = n, \quad a_n^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\xrightarrow{?} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \left| \begin{array}{l} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ = 2 + \frac{1}{2} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots + \frac{(1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n})}{n!} \end{array} \right. \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 1 + np \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 3? \quad \checkmark \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} \\ = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

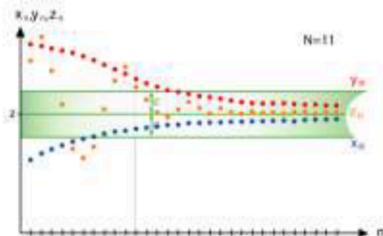
4. Konvergenzuntersuchung

Mathematik für Informatik, p.161

Konvergenzuntersuchungen

Sandwich-Theorem

Will man den Grenzwert einer Folge (z_n) berechnen, kann man zwei einfache, bekannte Folgen wählen, für die gilt: $x_n \leq z_n \leq y_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z$ so folgt die Konvergenz: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.



Bis jetzt:

- Konvergenzkriterium für Monotone Folgen (Satz 4.12)
Ab jetzt:
- Konvergenz von allgemeinen Folgen
- wir starten mit einfachen hinreichenden Bedingung für Konvergenz:

Satz 4.22 Sandwich-Theorem

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ konvergente Folgen, deren Grenzwerte übereinstimmen, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Sei $(c_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Konvergenz von $(c_n)_{n \geq 0}$, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_1$, und $b_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_2$. Daraus folgt $c_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > \max(N_1, N_2)$.

Beispiel 4.23

Sei $\alpha > 0$. Gilt für eine Folge $\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha$, dann folgt $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zum Beweis benutzen wir $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (siehe Übungsaufgaben). Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Anwendung des Sandwich-Theorems liefert nun die Behauptung.

7) Konvergenzuntersuchung

Satz: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq c_n \leq b_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \quad \forall n > N_a, c_n \in U_\varepsilon(a)$$

Beweis:

$$\forall n > \max(N_a, N_b); c_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N: b_n \in U_\varepsilon(a) \quad |a_n - a| < \varepsilon}$$

Teilfolge:

Mathematik für Informatik, p.161

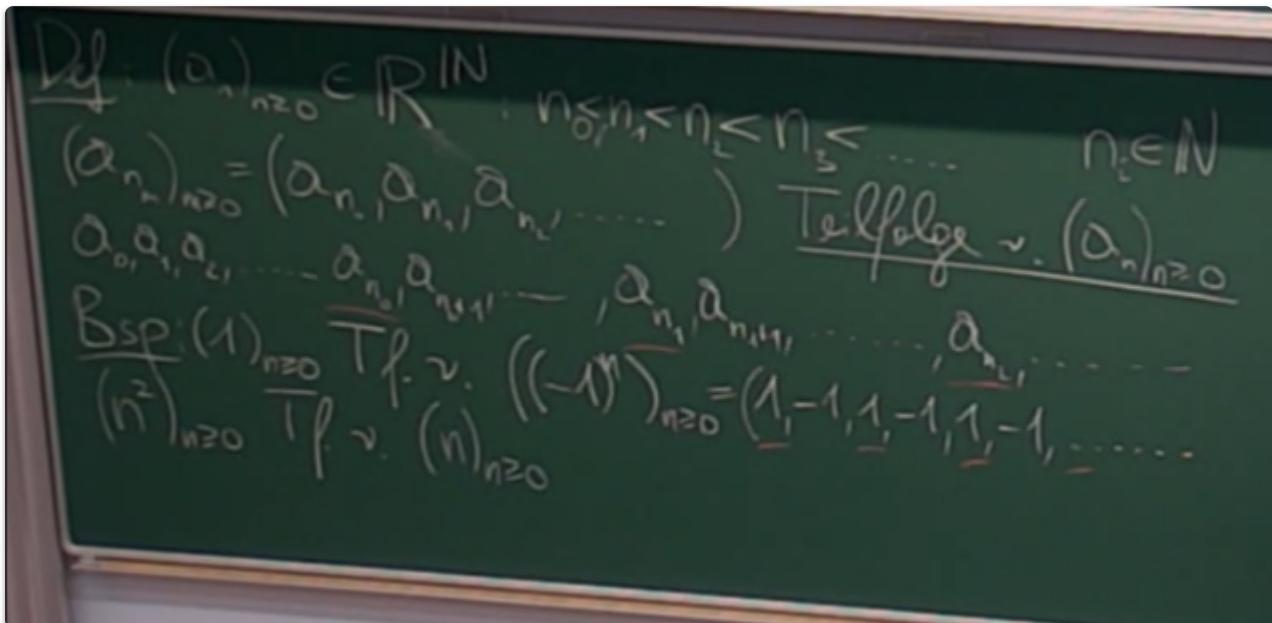
⌚ Definition 4.24

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ natürliche Zahlen. Dann nennt man die Folge $(a_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 0}$.

☰ Beispiel 4.25

(a) Die Folge der Quadratzahlen $(n^2)_{n \geq 1} = (1, 4, 9, 16, \dots)$ ist eine Teilfolge der Folge $(n)_{n \geq 1} = (\underline{1}, 2, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, 8, \underline{9}, 10, \dots)$.

(b) Sei $(a_n)_{n \geq 0} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$. Diese Folge ist divergent. Nimmt man nur die geraden Indizes, so erhält man als Teilfolge die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$, also eine konvergente Folge.



ⓘ Satz 4.26

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge, die den Häufungspunkt a besitzt. Dann gibt es eine gegen a konvergierende Teilfolge. Falls umgekehrt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a enthält, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geq 0}$.

Beweis. Zu einem Häufungspunkt a der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ lässt sich auf folgende Weise eine konvergente Teilfolge konstruieren. Wir geben uns eine monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n > 0$ (z.B. $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 1/n$ für $n \geq 1$) vor. Dann gibt es in $U_{\varepsilon_0}(a)$ unendlich viele

Folgenglieder von $(a_n)_{n \geq 0}$. Wir wählen eines aus, beispielsweise a_{n_0} . Danach wählen wir ein $a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ mit $n_1 > n_0$, usw. Dann ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 0}$. Denn bei Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0 , so dass $\varepsilon \geq \varepsilon_{k_0} \geq \varepsilon_{k_0+1} \geq \dots > 0$. Für alle $k \geq k_0$ gilt daher $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Sei umgekehrt eine konvergente Teilfolge gegeben. Dann ist ihr Grenzwert a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geq 0}$, denn in jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle Glieder der Teilfolge, also insbesondere unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \geq 0}$.

ⓘ Satz 4.27 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ enthält einen Häufungspunkt.

Beweis. Die Aussage des Satzes ist nach Satz 4.26 äquivalent zur Existenz einer konvergenten Teilfolge. Aufgrund der Beschränktheit von $(a_n)_{n \geq 0}$ und des Hauptsatzes über monotone Folgen genügt es, die Existenz einer monotonen Teilfolge nachzuweisen.

Sei $b_n = \sup(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$. Dann ist $(b_n)_{n \geq 0}$ eine monoton fallende Folge. Sei $M = \{k \in \mathbb{N} \mid b_k < a_k\}$, d.h., $k \in M$ ist gleichbedeutend damit, dass a_k größer ist als sämtliche Folgenglieder mit größerem Index. Wir konstruieren nun eine monotone Folge, wobei wir unterscheiden müssen, ob M unendlich ist oder nicht. Falls M unendlich viele Elemente enthält, so ist $(a_k)_{k \in M}$ bereits eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 0}$. Denn wenn $k_1, k_2 \in M$ mit $k_1 < k_2$, dann ist a_{k_1} laut Definition von M größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, also insbesondere größer als a_{k_2} .

Falls M endlich ist, so bekommen wir mit der oben beschriebenen Vorgangsweise nur endlich viele Elemente und somit keine Teilfolge. In diesem Fall kann man aber eine monoton wachsende Teilfolge konstruieren. Da M beschränkt ist, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, mit $n_1 > k$ für alle $k \in M$. Dann ist a_{n_1} nicht größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, weil sonst n_1 ja in M enthalten wäre. Es gibt also ein mindestens ebenso großes Folgenglied a_{n_2} mit $n_2 > n_1$. Da auch $n_2 \notin M$, muss a_{n_3} mit $n_3 > n_2$ und $a_{n_3} \geq a_{n_2}$ existieren. Diesen Prozess setzen wir ad infinitum fort und erhalten auf diese Art eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 0}$.

(hier unterscheiden sich leider Buch und Tafelbild)

Satz: $(a_n)_{n \geq 0}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)
 $(a_n)_{n \geq 0}$ T.f. $\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = a$

Satz v. Bolzano-Weierstraß: $(a_n)_{n \geq 0}$ beschr. $\Rightarrow \exists H_P$

Bew.: $\sum_{i=0}^{\infty} [A_i, B_i] \subset \sum_{i=1}^{\infty} [A_{i-1}, B_{i-1}]$
 $A_0 = S, B_0 = S$
 $A_1 = S, B_1 = \frac{S_1}{2}$ oder $A_1 = \frac{S_1}{2}, B_1 = S$ | $B_i - A_i = \frac{1}{2^i} (B_{i-1} - A_{i-1})$

$(A_n)_{n \geq 0} \nearrow, (B_n)_{n \geq 0} \searrow$
 $B_n - A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow C = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \xrightarrow{2^n} 0$
 $C \in H_P \vee (0_n)_{n \geq 0}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists j: [A_j, B_j] \subseteq \bigcup_{\varepsilon} (C)$

Lemma 1:

Bsp.: $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 1}$
Lemma 1: $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, n \geq 3$ | $(1 + \frac{1}{n})^{n-1} < 3$
Bew.: $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{n+1}$ | $n > (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n^n} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$

Lemma 2:

Lemma 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} = 1$ | Bew.: $\forall N \exists N/2 < (1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = c \geq 1$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2n} = c = 1$ | $c = \sqrt[2n]{c^n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt[n]{c^n}$ | $\Rightarrow c = 1$

Verwendung von Sandwich Theorem:

$$\text{Bsp. } \alpha > 0, \frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha, \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{(n^\alpha)^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 1, \sqrt[n]{n^\alpha} = (n^\alpha)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

	<p>Da kann man nicht einfach davon ausgehen, dass das für alle gilt nur weil es für die ersten gilt</p>	<p>Das kann nämlich auch schiefgehen wie hier (am Anfang immer gegen 0 und ab einem Zeitpunkt nicht mehr):</p>
	<p>So wäre es richtig, wieder durch verwenden vom Sandwich Theorem</p>	

Cauchykriterium:

Cauchykriterium

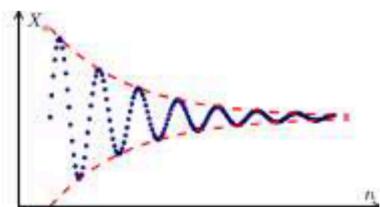
$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\epsilon): |x - a_n| < \epsilon$$

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, so dass $|x_n - x_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(\epsilon)$. Das heißt, es gibt einen Index, ab dem die Folge immer näher zueinander rückt.

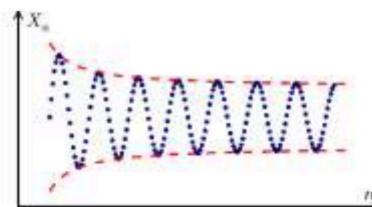
Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist!

Es gilt eigentlich dasselbe Prinzip wie beim Cauchy-Kriterium für Reihen.

Cauchy-Folge



Keine Cauchy-Folge



Dieses Kriterium gilt nicht in \mathbb{Q} .

Definition 4.28

Mathematik für Informatik p.174

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(\epsilon)$.

Anschaulich bedeutet dies, dass Cauchyfolgen genau jene Folgen sind, für welche die Glieder mit großem Index nahe beieinander liegen.

Daf: $(a_n)_{n \geq 0}$ Cauchyfolge
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n, m > N(\varepsilon); |a_n - a_m| < \varepsilon$

ⓘ Satz 4.29 (Cauchykriterium)

Mathematik für Informatik, p.162

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bemerkung: Man beachte, dass das Cauchykriterium in \mathbb{Q} nicht gilt. Nehmen wir irgend eine Folge rationaler Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl konvergiert, z.B. die durch die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ bestimmte Folge $(1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots)$. Diese Folge ist in \mathbb{R} konvergent und daher nach dem obigen Kriterium eine Cauchyfolge (was übrigens auch direkt leicht zu sehen ist). Da der Grenzwert aber keine rationale Zahl ist, ist diese Folge in \mathbb{Q} nicht konvergent.¹²⁸

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergent und $\varepsilon > 0$. Den Grenzwert von $(a_n)_{n \geq 0}$ nennen wir a . Dann existiert $N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon)$. Seien nun $n, m > N(\varepsilon)$. Dann gilt $|a_n - a_m| = |a_n - a - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist daher eine Cauchyfolge.

Umkehrung: Gelte für ein $\varepsilon > 0$, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$. Dann ist $(a_n)_{n \geq 0}$ beschränkt, denn für $m > N = N(\varepsilon)$ folgt aus $|a_m| - |a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}| < \varepsilon$, dass $|a_m| < |a_{N+1}| + \varepsilon$. Somit ist die Folge $(|a_{N+1}|, |a_{N+2}|, \dots)$ durch $|a_{N+1}| + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Folglich ist $S = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + \varepsilon)$ eine obere Schranke von $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist daher durch S nach oben und durch $-S$ nach unten beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann ein Häufungspunkt a und infolge dessen eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \rightarrow a$. Das bedeutet aber, dass für hinreichend große k , z.B. $k > K = K(\varepsilon)$, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ folgt. Sei nun $n > N$ und $k > \max(K, N)$, so dass also auch $n_k > N$ gilt. Dann folgt
 $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$ und daher $a_n \rightarrow a$.

Satz: $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow (a_n)_{n \geq 0}$ konv. $\Leftrightarrow (a_n)_{n \geq 0}$ C-Folge

Bew: \Rightarrow : $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$n > N(\varepsilon): a_n, a_m$

$\Leftarrow: \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m > N(\varepsilon): |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n)$ beschr. $\Rightarrow \exists H_p \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists (a_{n_k})$

$\sum |a_{n_k} - c| \leq \varepsilon$

$|a_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

$a_{n_k} \rightarrow c$

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen