Vorwort

Diese Stoffsammlung/Zusammenfassung enthält den Stoff, der in der Analysis Vorlesung der TU Wien im Sommersemester 2025 vorgetragen wurde, der auch in "Mathematik für Informatik - Vierte erweiterte Auflage" zu finden ist. Die Struktur dieser Zusammenfassung basiert demnach auch der des Buchs.

Für einen schnellen Überblick über die Formeln, Sätze und Regeln, siehe: Formelsammlung von Markus

Hinweis

Derzeitig befindet sich in dieser Stoffsammlung nur Stoff, der für den 1. Analysis Test relevant ist. Weitere Kapitel folgen zeitnahe dem 2. Test und der Abschlussprüfung! (Rechtschreib- und Satzzeichenfehler bzw. Inkonsistenzen in der Formatierung werden noch ausgebessert).

Falls sich irgendwo Fehler befinden oder es Verbesserungsvorschläge gibt, bitte an @xmozz auf Discord wenden.

Legende

Definitionen

Sätze/Rechenregeln

Hinweis auf Einschränkung von Sätzen und Definitionen

Beispiele

Inhalt

4. Folgen Reihen und Funktionen

5.Differentialrechnung

4.1 Folgen

Link zur Formelsammlung: FS_4.1 Folgen

1. Definitionen und Grenzwert

Definition

Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Menge M, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in M$ zuordnet.

Beispiel: $\begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x_n = 2n \end{matrix}$ für $n \in \mathbb{N}$

Konstante Folge	Arithmetische Folge	Geometrische Folge
$x_n = 2 \to 2, 2, 2, 2, \ldots$	$x_n = x_0 + n * d \to 2, 5, 8, \ldots$	$x_n = x_n * q^n \to 2, 6, 18, \ldots.$

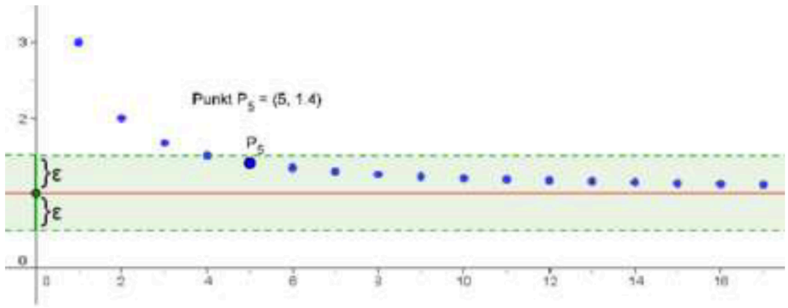
Folgen können entweder **explizit** oder **rekursiv** definiert werden.

Grenzwert

Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ϵ-Umgebung von a fast alle Folgenglieder x_n liegen.

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**. (Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{n^2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(\epsilon) : |x_n - x| < \epsilon$$



Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ oder } x_n \to x$$

Divergenz

Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie unbestimmt divergent. Das wäre zum Beispiel:

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Konvergenz

Besitzt eine Folge einen eindeutigen Grenzwert, ist sie bestimmt konvergent. Besitzt sie den Grenzwert $\pm\infty$ heißt sie unbestimmt konvergent bzw. bestimmt divergent.

1. Definition und Grenzwert

Mathematik für Informatik, p.154

☰ Beispiel 4.1

Betrachten wir die Zahlen $a_0 = 3, a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415$, $a_5 = 3.14159, a_6 = 3.141592, \ldots$ Allgemein sei a_n die Dezimalentwicklung von π bis zur n -ten Nachkommastelle. Je größer n ist, desto besser wird π von a_n approximiert, d.h., der Abstand $|a_n - \pi|$ wird mit wachsendem n immer kleiner. Dabei wird π sogar beliebig genau approximiert: Legt man zu Beginn eine erlaubte Abweichung fest (z.B. höchstens 10^{-m}), so wird diese Vorgabe von allen a_n mit hinreichend großem Index (in diesem Fall $n \geq m$) auch erfüllt. Dies ist die Grundidee des Grenzwertbegriffs.

Definition 4.2

Unter einer **reellen Folge** versteht man eine Anordnung von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Eine andere Schreibweise ist $(a_n)_{n\geq 0}$. Folgen können auch als Funktionen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden. In diesem Fall gilt $a(n) = a_n$. Die Zahlen a_n, aus denen die Folge aufgebaut ist, nennt man die Glieder der Folge, und n heißt Index des Folgenglieds a_n.

> *Bei Bedarf kann der Index auch mit 1 oder einer anderen natürlichen Zahl k beginnen, d.h. man betrachtet dann Folgen der Gestalt $(a_n)_{n\geq 1}$ bzw. $(a_n)_{n\geq k}$.*

Tafelbild

Beispiel 4.3

Mathematik für Informatik, p.155

Im Folgenden geben wir einige Beispiele für Folgen.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1 : 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(b) Mit $a_n = 2$ erhalten wir die Folge 2, 2, 2,2, ... Diese Folge ist eine **konstante Folge**.

(c) Die **arithmetischen Folgen** sind durch $a_n = a_0 + dn$ gegeben. Die Differenz von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, d.h., die Gleichung $a_n - a_{n-1} = d$ ist für alle $n \geq 1$ erfüllt. Beispiel: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$. Da ist einfach der Abstand zwischen den Folgegliedern immer gleich.

(d) **Geometrische Folgen** sind Folgen der Form $a_n = a_0 q^n$, d.h., der Quotient von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, also $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Beispiel: $1, 3, 9, 27, 81, .$ (Es ist sozusagen "wie eine Polynomfunktion")

(e) Folgen können auch **rekursiv** definiert werden, d.h., das n-te Folgenglied ist durch eine Funktion der vorher gehenden Folgenglieder bestimmt. Z.B. beschreibt

$a_0 = 1, a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ die Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
(Also kurz gesagt: Folgenglieder berechnet man sich mit den Vorigen)

Tafelbild

Häufungspunkte:

Mathematik für Informatik, p.156

Häufungspunkt

Wenn in jeder ϵ-Umgebung von x unendlich viele Folgengliederliegen, so ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\geq 0}$. Im Gegensatz zum Grenzwert kann es mehrere Häufungspunkte geben.

Der größte Häufungspunkt heißt: **Limes superior**

Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior**

Konvergiert eine Folge, so gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\sup_{n\to\infty} x_n = \lim\inf_{n\to\infty} x_n$, da es nur einen Häufungspunkt geben darf.

Definition Fast alle

"Fast alle" = alle bis auf endlich viele

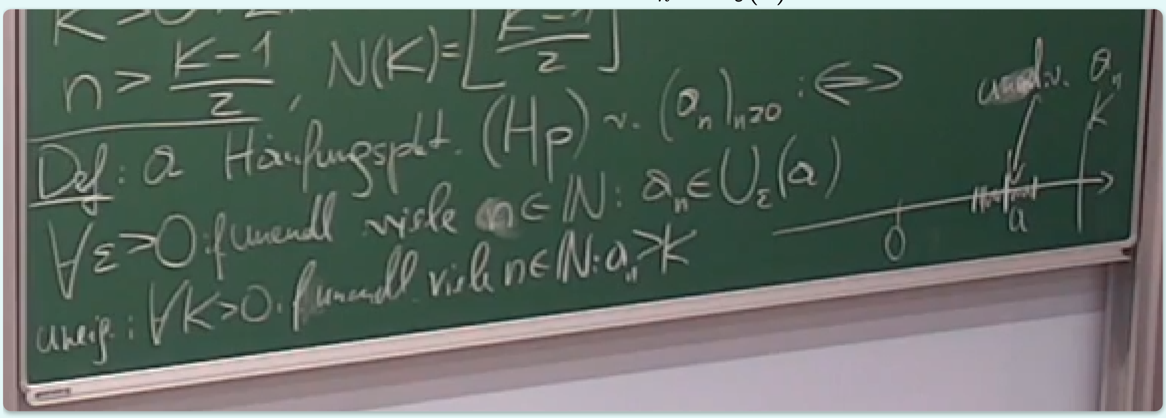
Definition ε-Umgebung

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$. Analog zum uneigentlichen Grenzwert werden uneigentliche Häufungspunkte definiert.

- Der größte Häufungspunkt (uneigentliche mit eingeschlossen) heißt Limes superior (man schreibt: $\limsup_{n\to\infty} a_n$),
- der kleinste Häufungspunkt Limes inferior $(\liminf_{n\to\infty} a_n)$.

Definition Häufungspunkt

Wenn für alle $\varepsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in U_\varepsilon(a)$



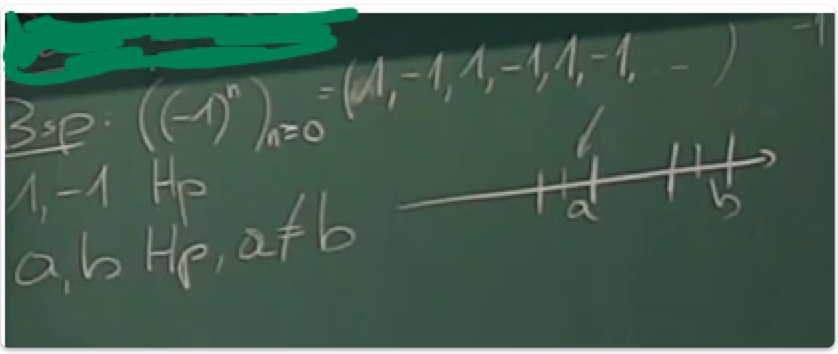
- Grenzwert einer Folge (a):
  - Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$|a_n - a| < \varepsilon$.
    - Bedeutung: Ab N liegen alle Folgenglieder innerhalb des ε-Abstands um a.
    - Konsequenz: Enthält eine ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder nicht, ist a kein Grenzwert.
      *
      

    - Abbildung 4.1 Konvergenz von Folgen
- **Häufungspunkt einer Folge (a):**
    - Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält die ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder.
    - Anzahl der Folgenglieder außerhalb des ε-Abstands kann endlich oder unendlich sein.
- **Limes superior und Limes inferior:**
    - Existieren für jede Folge (eigentlich oder uneigentlich), im Gegensatz zum Grenzwert (siehe Beispiel 4.5).
- **Zusammenhang zwischen Grenzwert und Häufungspunkt:**
    - Jeder Grenzwert einer Folge ist auch ein Häufungspunkt.
    - Häufungspunkt ist eine abgeschwächte Version von Grenzwert
    - Es müssen unendlich viele in der ε Umgebung liegen, aber es können auch unendlich viele Außerhalb liegen
    - $\rightarrow$ Die Umkehrung gilt nicht.
- **Eindeutigkeit des Grenzwerts:**
    - Sind a und b zwei verschiedene Häufungspunkte, dann existiert ein $\varepsilon < \frac{1}{2}|a-b|$, sodass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.
    - Folglich können nicht fast alle Folgenglieder in beiden Umgebungen liegen.
    - Eine konvergente Folge besitzt nur einen Häufungspunkt.
    - Im Falle der Konvergenz gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Tafelbild 1 zu Definitionen

Beispiel für Folge mit Häufungspunkte ohne Grenzwert:



Limes / Grenzwert:

Mathematik für Informatik, p.155

Man sagt, eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn sie für alle bis auf endlich viele Ausnahmen gilt. Weiters bezeichnen wir das Intervall

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} || x - a |< \varepsilon\}$$

als ε-Umgebung von a.

Definition 4.4

Erweitertes Tafelbild

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h., falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

gilt.

> *Für fast alle n gilt an liegt in jeder U(epsilon) von a*

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt konvergent, falls sie einen Grenzwert a besitzt (siehe auch Abb. 4.1). In diesem Falle konvergiert die Folge gegen a, und man schreibt

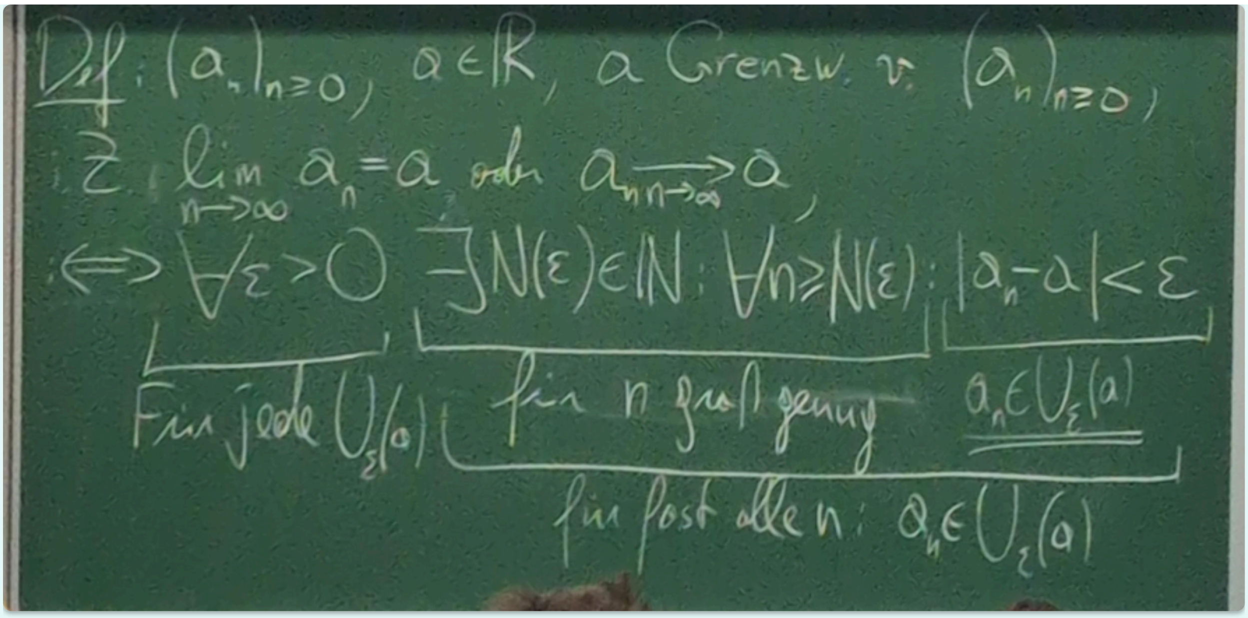
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \longrightarrow a$$

Besitzt die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ keinen Grenzwert, so heißt sie divergent. Eine Folge, die 0 als Grenzwert besitzt, nennt man auch Nullfolge.

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, deren Glieder beliebig groß werden, d.h., für die gilt

$$\forall K > 0 \exists N(K) \in \mathbb{N} \forall n > N(K) : a_n > K,$$

heißt uneigentlich konvergent, und man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analog definiert man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und nennt solche Folgen ebenfalls uneigentlich konvergent. Der Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ wird dann als uneigentlicher Grenzwert bezeichnet.

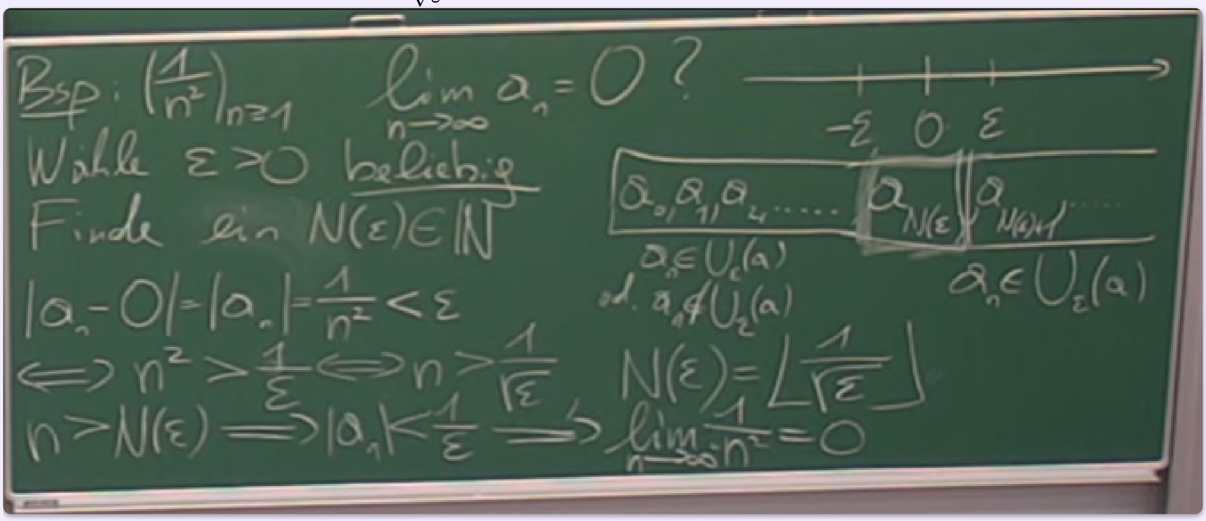


Beispiele zu Limes:

Beispiel 4.5

Mathematik für Informatik, p.156

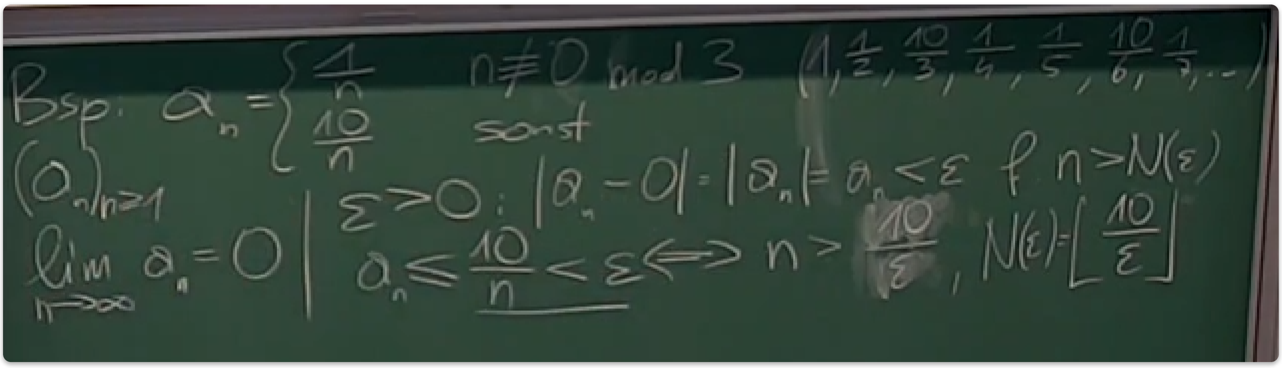
(a) Gegeben sei die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>1} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt $0 < a_n < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, Somit ist 0 Grenzwert dieser Folge:



(b) Sei $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Diese Folge ist divergent. Es liegen jeweils unendlich viele Folgenglieder in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(1)$ und $U_\varepsilon(-1)$. Also sind -1 und 1 Häufungspunkte der Folge. Daher besitzt diese Folge keinen Grenzwert.

(c) Die Folge $a_n = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ ist uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, da für jede beliebig vorgegebene Zahl $K > 0$ eine Quadratzahl existiert, die größer als K ist.

Weiteres Beispiel aus der vo bisschen ausführlicher:



2. Monotonie und Beschränktheit

Mathematik für Informatik, p.157

Monotonie

Eine Folge heißt

> monoton fallend, wenn $x_{n+1} \leq x_n$
> streng monoton fallend, wenn $x_{n+1} < x_n$
> monoton steigend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$
> streng monoton steigend, wenn $x_{n+1} > x_n$

Beschränktheit

Eine Folge x_n heißt beschränkt, wenn es Zahlen a, b gibt, so dass

$$\boldsymbol{a \leq x_n \leq b \ \ \forall n} \in \mathbb{N}.$$

Definition 4.6

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar die strikte Ungleichung $a_{n+1} < a_n$, so spricht man von einer streng monoton fallenden Folge. Falls $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend.

Ergänzung:
Es gibt auch schließlich monoton wachsend/fallend. Davon spricht man genau dann, wenn die Funktion am Anfang macht was sie will, aber nach einer Zeit monoton wachsend/fallend ist.

- a_n schließlich monoton steigend :<=> $\forall n \geq k : a_{n+1} \geq a_n$

Beispiel 4.7

Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ ist streng monoton fallend, da wegen $(n+1)^2 > n^2$ die Ungleichung $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ gilt. Konstante Folgen sind sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend, jedoch in keinem Sinne streng monoton.

Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Die Folge $a_n = n$ ist monoton steigend.

Definition 4.8

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede solche Zahl S heißt obere **Schranke** von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Die *kleinste obere Schranke* wird das **Supremum** genannt. Das Supremum $\sup a_n$ ist somit jene reelle Zahl S_0, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $a_n \leq S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Aus $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $S_0 \leq S$.

Analog definiert man Beschränktheit nach unten und untere Schranken. Die größte untere Schranke wird **Infimum** genannt und inf a_n geschrieben. Falls die Folge nicht nach oben bzw. unten beschränkt ist, setzt man $\sup a_n = \infty$ bzw. inf $a_n = -\infty$.

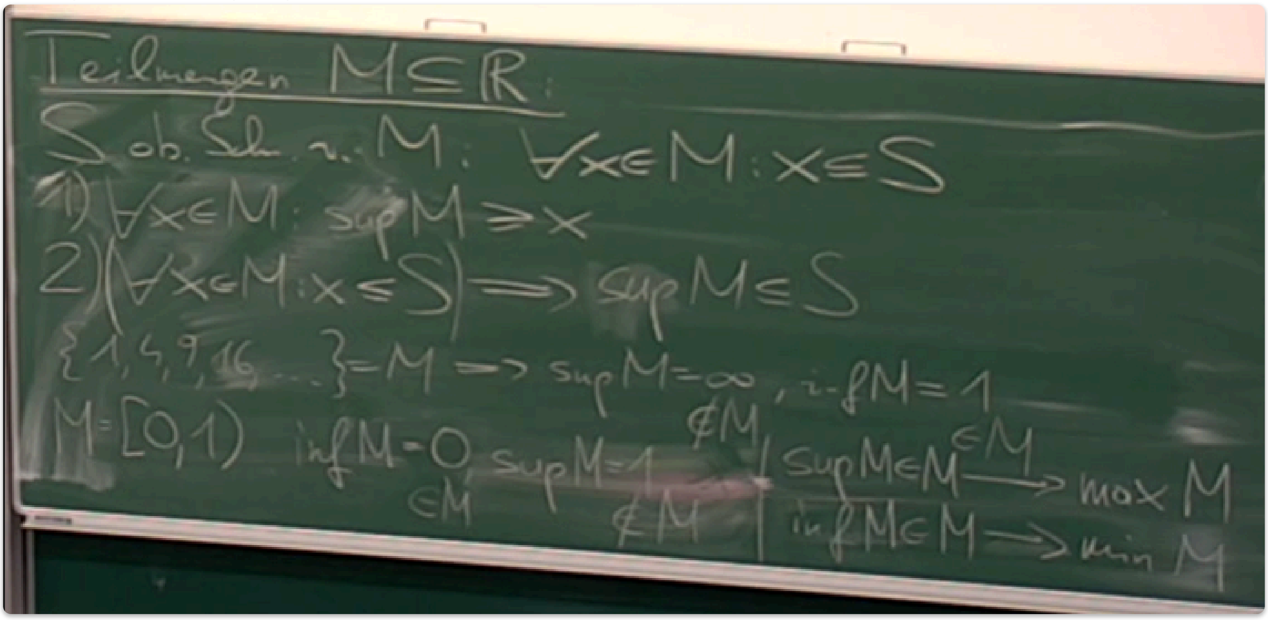
Wenn eine Folge nach oben und nach unten beschränkt ist, sprechen wir von einer **beschränkten Folge**.

Tafelbild 1
Tafelbild 2

Analogie: Mengen

- **Analoge Definition für Mengen ($M \subseteq \mathbb{R}$):**
  - Schranken, Supremum und Infimum können analog für Mengen reeller Zahlen definiert werden.
  - Reelle Zahlen besitzen Dezimalentwicklungen ($x = x_0.\, x_1 x_2 \ldots$).
- **Finden des Supremums einer nach oben beschränkten, nicht leeren Menge M:**
  - Kleinste ganze Zahl, die obere Schranke ist: a_0.
  - Kleinste Zahl der Form $x_0.\, x_1$, die obere Schranke ist: a_1.
  - Sukzessive Fortsetzung für alle Dezimalstellen.
  - Resultierende monoton fallende Folge von oberen Schranken konvergiert zum Supremum ($\sup M$).
- **Finden des Infimums einer nach unten beschränkten, nicht leeren Menge M:**
  - Analoges Verfahren zum Supremum.
  - Ergebnis ist das Infimum ($\inf M$).
- **Unbeschränkte Mengen:** -
  - $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist.
  - $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist.
- **Zusammenhang zwischen Folgen und Mengen:**
  - Das Supremum (Infimum) einer Folge ist identisch mit dem Supremum (Infimum) der

Menge ihrer Folgenglieder.



Sätze:

Sätze

Allgemein

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Hauptsatz über monotone Folgen

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen

Jede nach oben beschränkte Folge besitzt ein Supremum.
Jede nach unten beschränkte Folge besitzt ein Infimum.

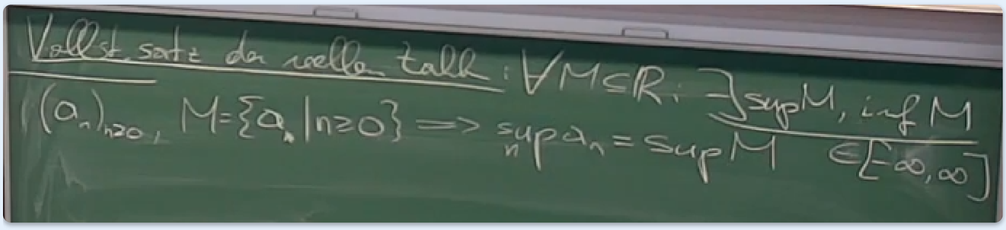
Bernoulli'sche Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}\; n \geq 2, x \geq -1, x \neq 0\colon\; (1+x)^n > 1 + nx$$

Mathematik für Informatik, p.157:

ⓘ Satz 4.9 (Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen)

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum). Jede nach oben (unten) beschränkte reelle Folge besitzt ein Supremum (Infimum).

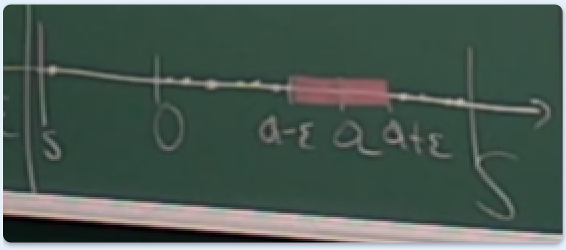


ⓘ Satz

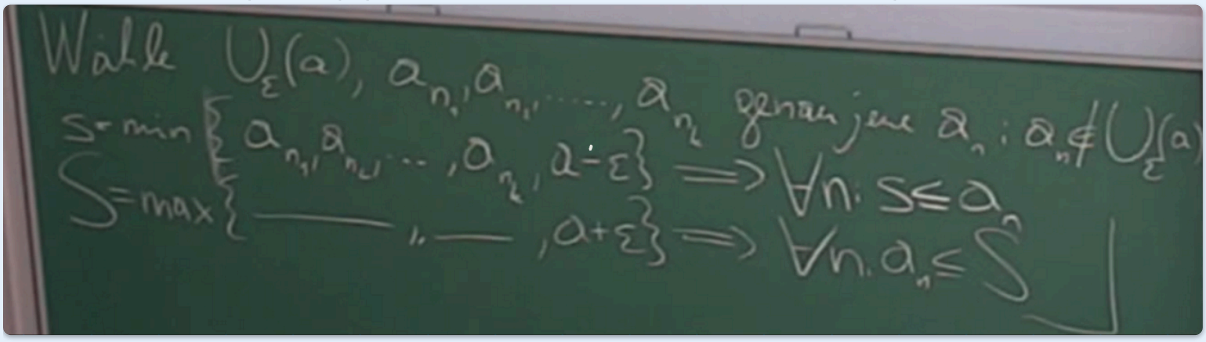
Jede konvergente Folge ist beschränkt

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Die Folgenglieder mit $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ seien $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$. Sei $\bar{\varepsilon} > \max_{i=1,\ldots,k} |a - a_{n_i}|$ (bzw. $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ im Fall $k = 0$). Dann gilt insbesondere $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$, und daher liegen alle Folgenglieder in $U_{\bar{\varepsilon}}(a)$. Die Intervallgrenzen $a - \bar{\varepsilon}$ bzw. $a + \bar{\varepsilon}$ sind dann untere bzw. obere Schranke von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Da wir links und rechts vom Grenzwert aufgrund der Definition von Konvergenz nur endlich viele Folgenglieder liegen haben, können wir die Grenzen einfach links/rechts davon setzen und haben eine beschränkte Folge:



Wir wählen eine Epsilon Umgebung von a, die enthält dann fast alle Folgenglieder. Zu jeder Epsilon Umgebung gibts nur endlich viele die draußen liegen, daher:



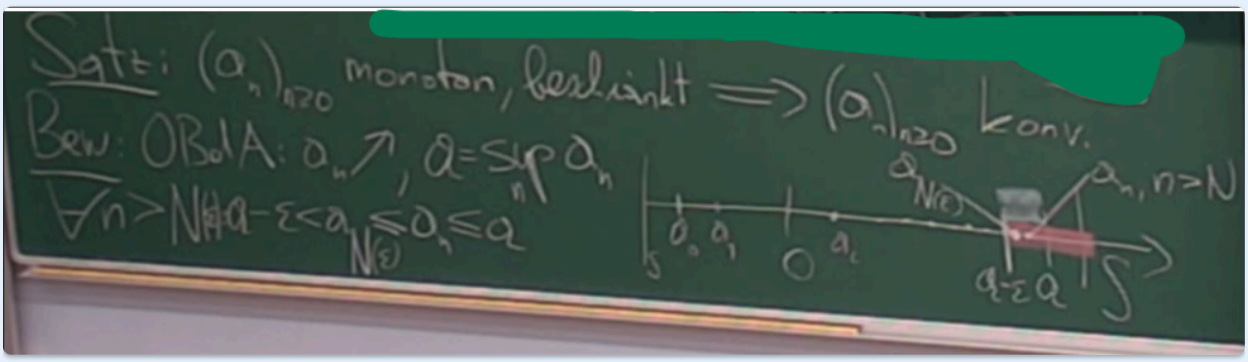
restliches Tafelbild davon

ⓘ Satz 4.12 Hauptsatz über monotone Folgen

Mathematik für Informatik, p.158

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. O.B.d.A. sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton wachsende Folge. *Aus der Konvergenz folgt nach dem vorigen Satz die Beschränktheit*. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass Beschränktheit hinreichend für Konvergenz ist. Nach Satz 4.9 besitzt $(a_n)_{n\geq 0}$ ein Supremum. Sei $a = \sup a_n$ und $\varepsilon > 0$. Da $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $(a_n)_{n\geq 0}$ ist, existiert ein $N(\varepsilon)$ mit $a_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie muss $a_n > a - \varepsilon$ auch für alle $n > N(\varepsilon)$ gelten. Daher liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Da ε beliebig gewählt werden kann, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



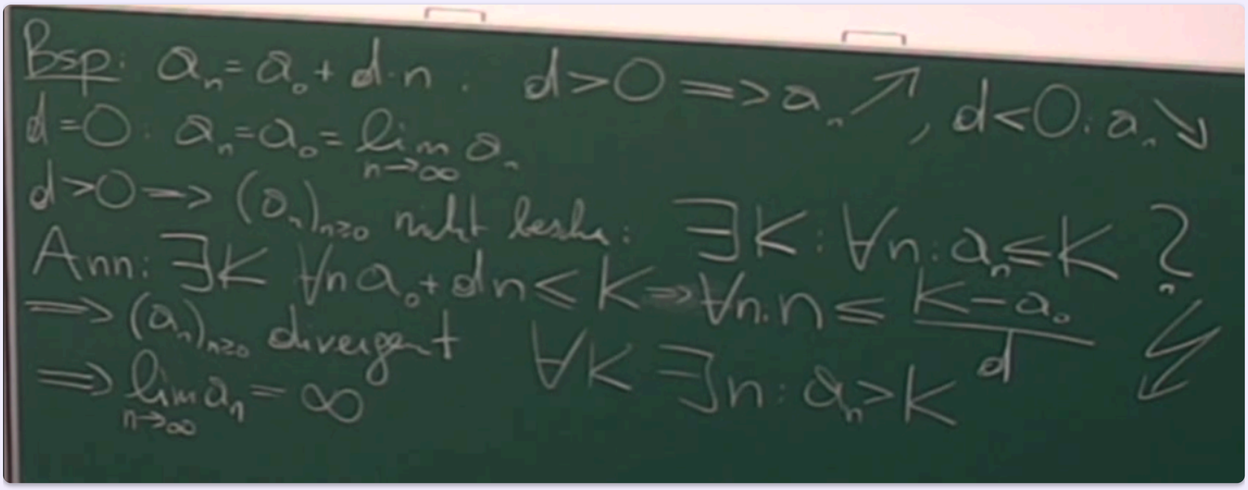
Man nimmt hier das Supremum der Folge, welches eben wie alle anderen unter der Schranke ist, dann schauen wir auf die Linke Seite der e-Umgebung, weil *auf der Rechten Seite kann ja nichts sein* und dann nimmt man sich aus der Umgebung das

Infimum, hat auf der linken Seite der ϵ-Umgebung nur endlich viele und alle anderen fast unendlich in der U_ϵ --> Konvergent

Beispiel 4.13

Arithmetische Folgen: $a_n = a_0 + nd$. Es ist leicht zu sehen, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ nur für $d = 0$ konvergent ist. In diesem Fall ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konstante Folge und $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$. Im Fall $d \neq 0$ ist $(a_n)_{n\geq 0}$ uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$, wobei das Vorzeichen mit jenem von d übereinstimmt.

Hier nochmal bisschen ausführlicher:



Es gibt kein solches k --> nicht nach oben beschränkt --> nicht beschränkt --> nicht divergent

3. Rechnen mit Grenzwerten

Rechnen mit Grenzwerten

Seien $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $lim_{n\to\infty}x_n = x$ und $lim_{n\to\infty}y_n = y$. Somit ist die Menge F aller konvergenten Folgen mit der Folgenaddition und Folgenmultiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum.

Addition/Subtraktion

$lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

$lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$

Multiplikation/Division

$lim_{n\to\infty}(x_n * y_n) = x * y$

$lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}\ falls\ y_n \neq 0\ und\ y \neq 0$

Rechnen mit uneigentlich konvergenten Folgen

Uneigentlich konvergent = Monoton steigend und unbeschränkt

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\ und\ lim_{n\to\infty}y_n = y$.

$lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty, falls\ y \in \mathbb{R}\ oder\ y = \infty$

$lim_{n\to\infty}\lambda x_n = \begin{cases} \infty, & falls\ \lambda > 0 \\ -\infty, & falls\ \lambda < 0 \end{cases}$

$lim_{n\to\infty}x_n y_n = \infty, falls\ y > 0$

$lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0, falls\ b \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

Satz 4.14

Mathematik für Informatik, p.158, Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.159

Wir stellen nun einige Rechenregeln für konvergente Folgen vor.

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$, ($\to$ additiv)

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, ($\to$ homogen)

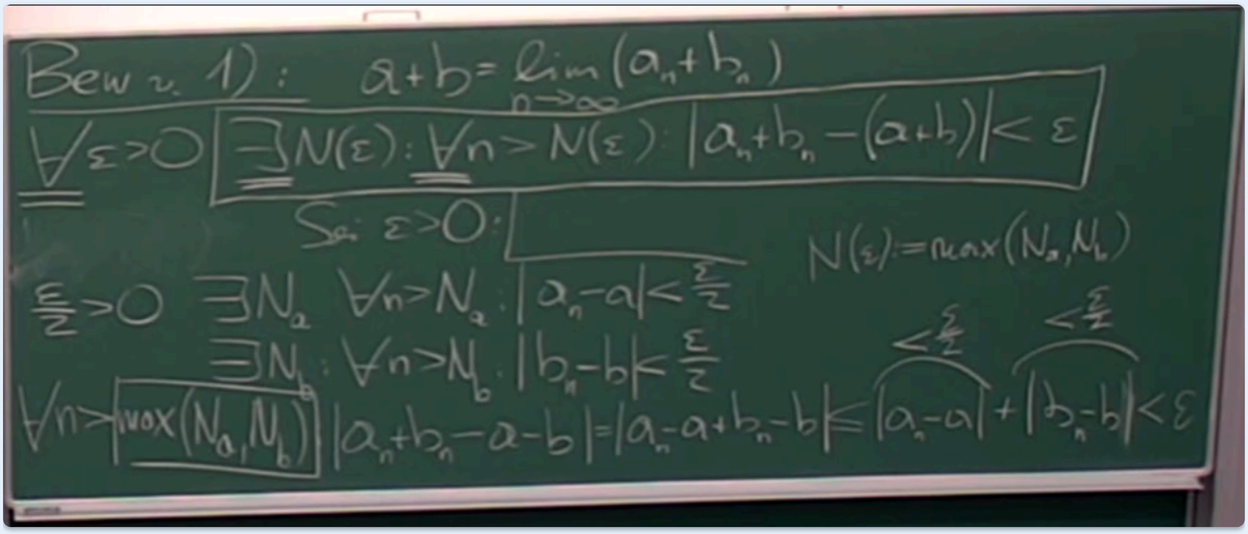
(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b_n \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $b \neq 0$.

(v) $\forall n \in \mathbb{N} : b_n > 0, a > 0 \implies \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^b} = \infty$
Wenn hier $a < 0$ dann divergiert das gegen $-\infty$

Beweis. Wir begnügen uns mit dem Beweis der ersten Identität und überlassen den Rest als Übungsaufgabe. Es gelte also $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es daher N_1 und N_2, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N_1$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N_2$ gilt. Daraus folgt, dass $|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n > \max(N_1, N_2)$.

vo Tafelbild:



- **Menge F der konvergenten Folgen:**
  - Bildet mit Folgenaddition und Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$ einen Vektorraum.
  - Begründung: Die ersten beiden Rechenregeln aus Satz 4.14 implizieren, dass Addition und Multiplikation in F uneingeschränkt möglich sind.
  - F ist ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- **Vorsicht beim Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten:**
  - Rechenregeln für konvergente Folgen sind nicht übertragbar.
  - Rechte Seiten der Gleichungen sind nicht definiert.
  - Addition und Multiplikation für unendliche Größen sind nicht erklärt.

Rechenregeln mit einem lim = unendlich

Satz 4.16

Mathematik für Informatik, p.159, Tafelbild

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$, falls $b \in \mathbb{R}$ oder $b = \infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \begin{cases} \infty, \text{falls } \lambda > 0, \\ -\infty, \text{falls } \lambda < 0, \end{cases}$

Ergänzung: $0 \cdot \infty$ ist unbestimmt

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$, falls $b > 0$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, falls $b \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

dieses Unbestimmte auf der Rechten Seite der Tafel ^ behandeln wir jetzt noch genauer:
Mathematik für Informatik, p.159

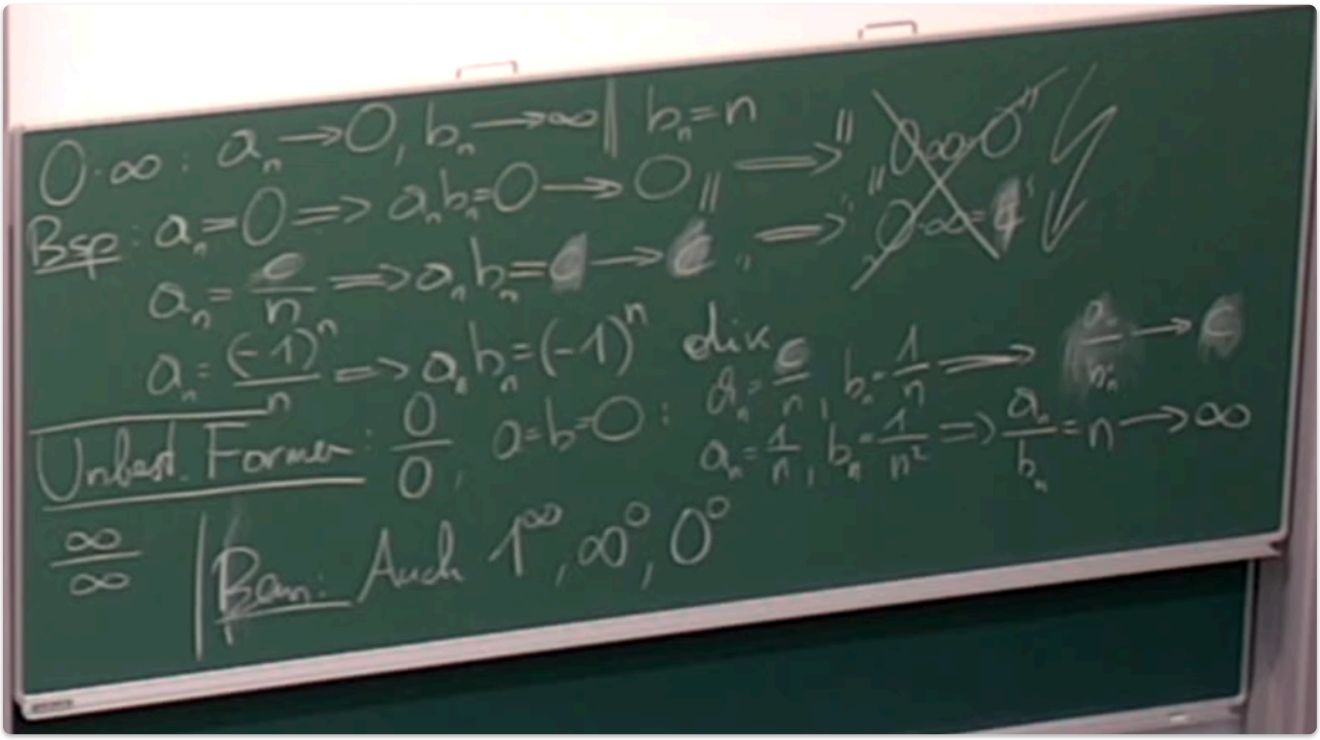
Beispiel 4.15 Uneigentlich konvergente Folgen

Betrachten wir die Folgen $a_n = n$ und $b_n = n + c_n, c_n \geq 0$. Beide Folgen sind uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Über die Differenz $a_n - b_n = c_n$ kann jedoch a priori keine Aussage gemacht werden. Ihr Verhalten hängt von der Folge c_n ab. Ähnlich verhält es sich bei Quotienten zweier uneigentlich konvergenten Folgen oder bei Quotienten zweier Nullfolgen: Es gilt beispielsweise

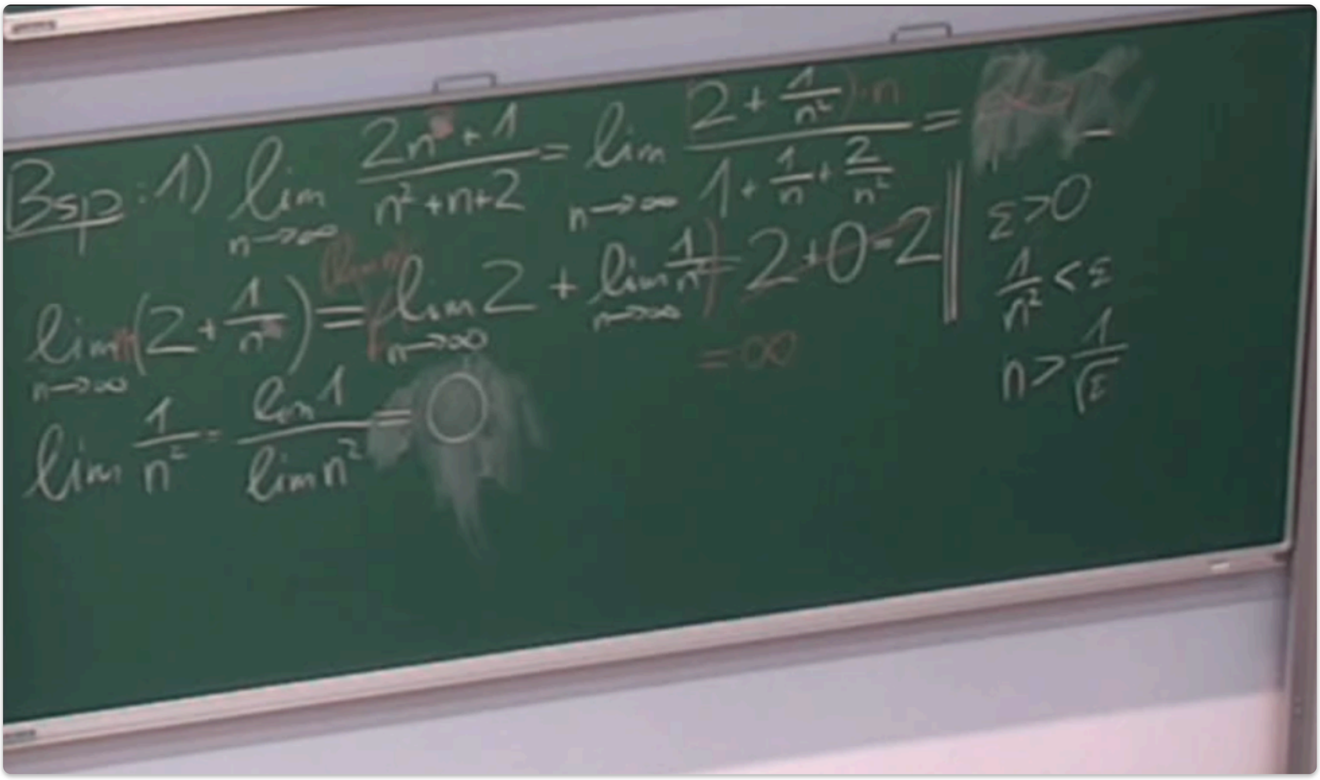
$$\frac{n}{n^2} \to 0, \quad \frac{n^2}{n} \to \infty, \quad \frac{2n}{n} \to 2$$

- **Unbestimmte Formen:**
  - Ausdrücken wie $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ kann kein sinnvoller Wert zugewiesen werden.
  - Auch 1^∞, ∞^0 und 0^0 zählen zu den unbestimmten Formen (siehe Beispiel 4.19).
  - Nähere Behandlung in Abschnitt 5.2.
- **Rechenregeln für Grenzwerte und uneigentliche Grenzwerte:**
  - Die im vorigen Satz beschriebenen Rechenregeln sind mit bestimmten Einschränkungen auch für uneigentliche Grenzwerte gültig.

Hier sieht man nochmal was passieren würde wenn man $0 \cdot \infty$ rechnen würde:



Hier noch ein weiteres Beispiel aus der vo



Das was dann mit rot drübergeschrieben wurde war eine alternatives Beispiel wenn's nicht hoch 2 sondern hoch 3 gewesen wäre...

Beispiel 4.18

Mathematik für Informatik, p.160

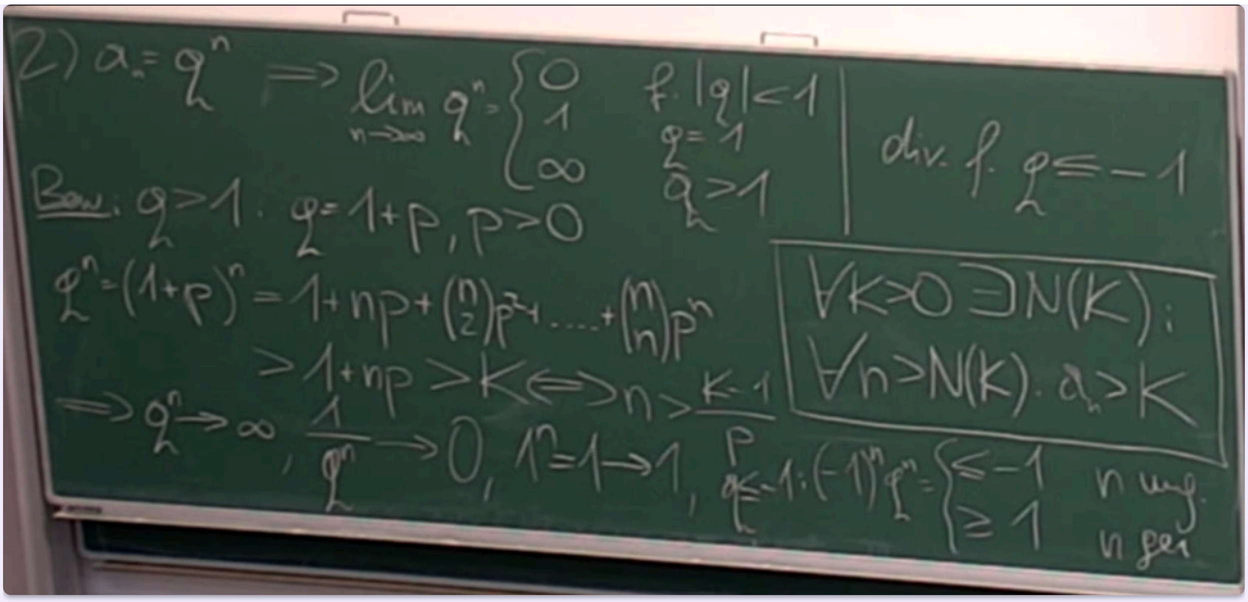
Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

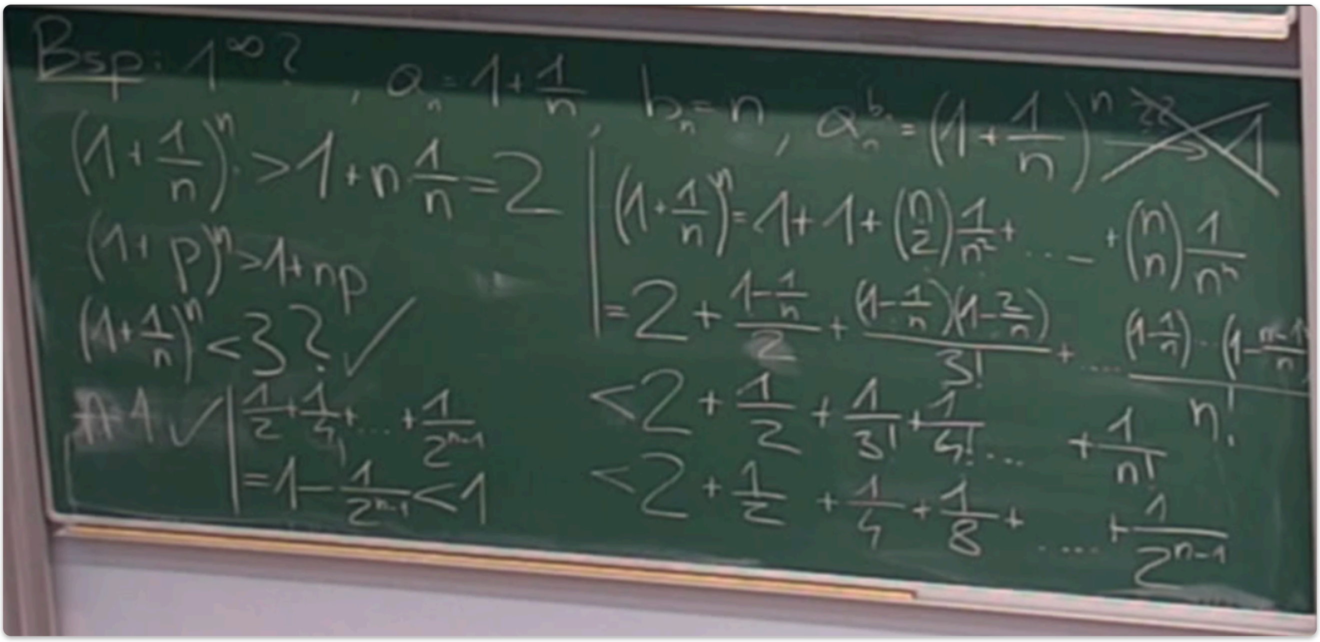
Um das zu zeigen, sei zunächst $q = 1 + p > 1$. Dann gilt aufgrund des Binomischen Lehrsatz

$$q^n = (1+p)^n = 1 + np + \binom{n}{2}p^2 + \cdots + \binom{n}{n}p^n \geq 1 + np \to \infty$$

(vgl. dazu auch Satz 4.20). Für $0 < q < 1$ gilt $\frac{1}{q} > 1$ und daher $\frac{1}{q^n} \to \infty$. Daraus folgt aber $q^n \to 0$, denn setzt man in Satz $4.16 a_n = \frac{1}{q^n}$ und $b_n = 1$, so folgt $q^n = \frac{b_n}{a_n} \to 0$. Der Fall $-1 < q < 0$ funktioniert analog, und die Fälle $q = 0$ und $q = 1$ sind trivial. Für $q \leq -1$ ist $(q^n)_{n\geq 0}$ divergent. Ähnlich lässt sich auch für $q \in \mathbb{C}$ argumentieren. Geometrische Folgen im Komplexen konvergieren also für q innerhalb des Einheitskreises sowie für $q = 1$ und divergieren für alle anderen Werte von q

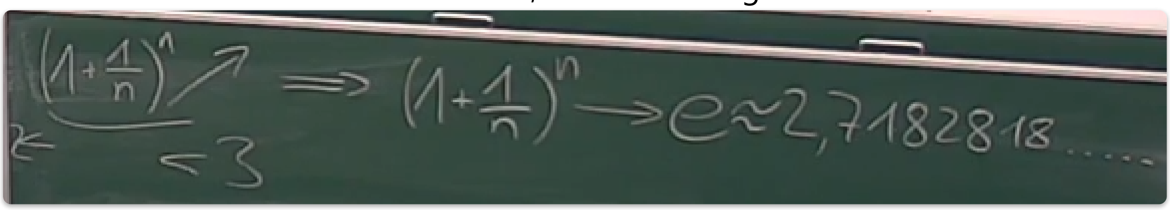


Noch ein kleines Beispiel zu 1^∞:



Damit haben wir also gezeigt, dass diese Folge gegen eine Zahl zwischen 2 und 3 konvergiert (um genau zu sein gegen die Eulersche Zahl), da uns immer wenn wir $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ rechnen, mit jedem Wert den wir dazuaddieren immer näher zu 1 kommen und uns immer genau das zu 1 fehlt was wir zuletzt dazuaddiert haben.

Dann fehlt uns nur noch zu erwähnen, dass diese Folge monoton wachsend ist:



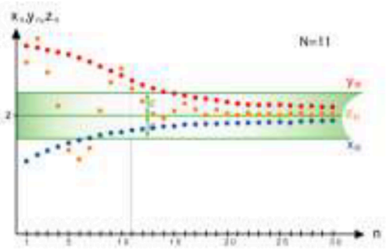
4. Konvergenzuntersuchung

Mathematik für Informatik, p.161

Konvergenzuntersuchungen

Sandwich-Theorem

Will man den Grenzwert einer Folge (z_n) berechnen, kann man zwei einfache, bekannte Folgen wählen, für die gilt: $x_n \leq z_n \leq y_n$ und $lim_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty} y_n = z$ so folgt die Konvergenz: $lim_{n\to\infty} z_n = z$.



Bis jetzt:

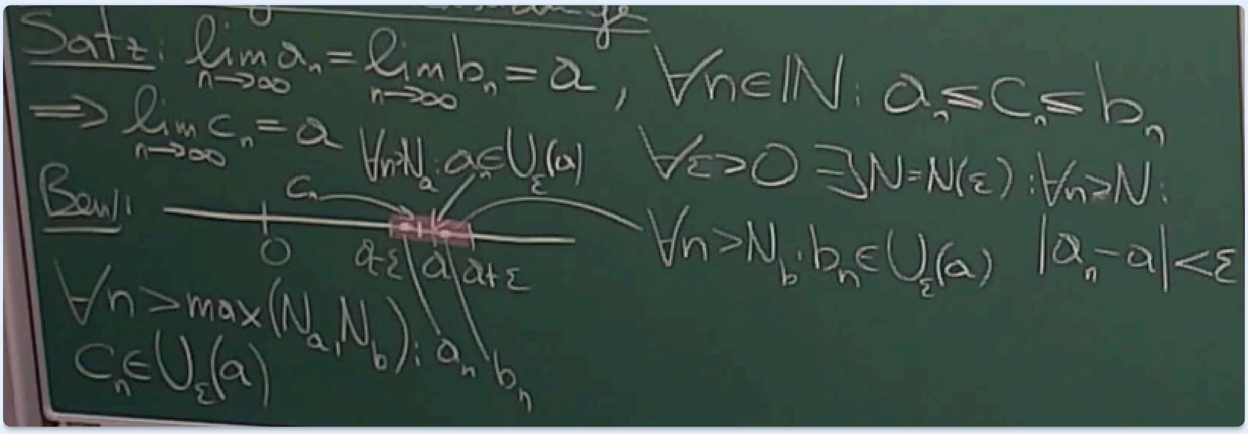
- Konvergenzkriterium für Monotone Folgen (Satz 4.12)
  Ab jetzt:
- Konvergenz von allgemeinen Folgen
- wir starten mit einfachen hinreichenden Bedingung für Konvergenz:

Satz 4.22 Sandwich-Theorem

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen, deren Grenzwerte übereinstimmen, also: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Sei $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Konvergenz von $(c_n)_{n\geq 0}$, und es gilt: $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_1$, und $b_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_2$. Daraus folgt $c_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > \max(N_1, N_2)$.



Beispiel 4.23

Sei $\alpha > 0$. Gilt für eine Folge $\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha$, dann folgt $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zum Beweis benützen wir $\sqrt[n]{n} \to 1$ (siehe Übungsaufgaben). Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Anwendung des Sandwich-Theorems liefert nun die Behauptung.

Teilfolge:

Definition 4.24

Mathematik für Informatik, p.161

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürliche Zahlen. Dann nennt man die Folge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Beispiel 4.25

Tafelbild

(a) Die Folge der Quadratzahlen $\left(n^2\right)_{n\geq 1} = (1, 4, 9, 16\ldots)$ ist eine Teilfolge der Folge $(n)_{n\geq 1} = (\underline{1}, 2, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, 8, \underline{9}, 10, \ldots)$.

(b) Sei $(a_n)_{n\geq 0} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Diese Folge ist divergent. Nimmt man nur die *geraden Indizes*, so erhält man als Teilfolge die *konstante Folge* $(1, 1, 1, \ldots)$, also eine konvergente Folge.

Satz 4.26

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, die den Häufungspunkt a besitzt. Dann gibt es eine gegen a konvergierende Teilfolge. Falls umgekehrt $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a enthält, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Zu einem Häufungspunkt a der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ lässt sich auf folgende Weise eine konvergente Teilfolge konstruieren. Wir geben uns eine monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n > 0$ (z.B. $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 1/n$ für $n \geq 1$) vor. Dann gibt es in $U_{\varepsilon_0}(a)$ unendlich viele

Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 0}$. Wir wählen eines aus, beispielsweise a_{n_0}. Danach wählen wir ein $a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ mit $n_1 > n_0$, usw. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$. Denn bei Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0, so dass $\varepsilon \geq \varepsilon_{k_0} \geq \varepsilon_{k_0+1} \geq \cdots > 0$. Für alle $k \geq k_0$ gilt daher $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Sei umgekehrt eine konvergente Teilfolge gegeben. Dann ist ihr Grenzwert a ein Häufungspunkt $\mathrm{von}\ (a_n)_{n\geq 0}$, denn in jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Glieder der Teilfolge, also insbesondere unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Satz 4.27 Bolzano-Weierstraß

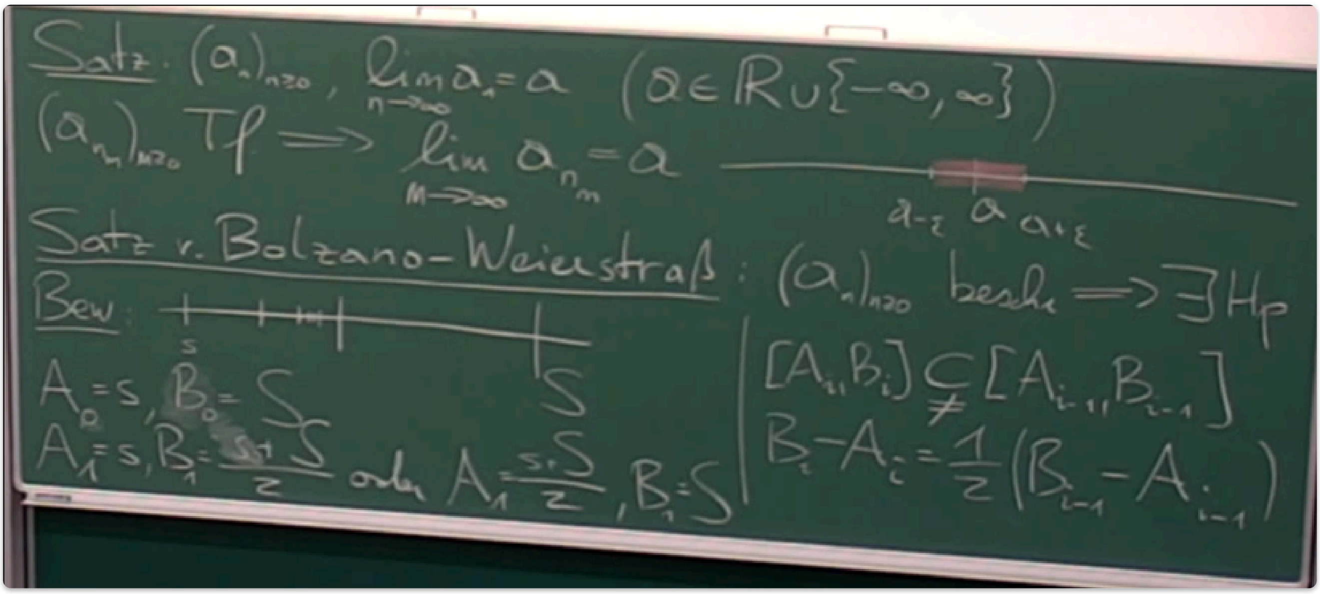
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ enthält einen Häufungspunkt.

Beweis. Die Aussage des Satzes ist nach Satz 4.26 äquivalent zur Existenz einer konvergenten Teilfolge. Aufgrund der Beschränktheit von $(a_n)_{n\geq 0}$ und des Hauptsatzes über monotone Folgen genügt es, die Existenz einer monotonen Teilfolge nachzuweisen.

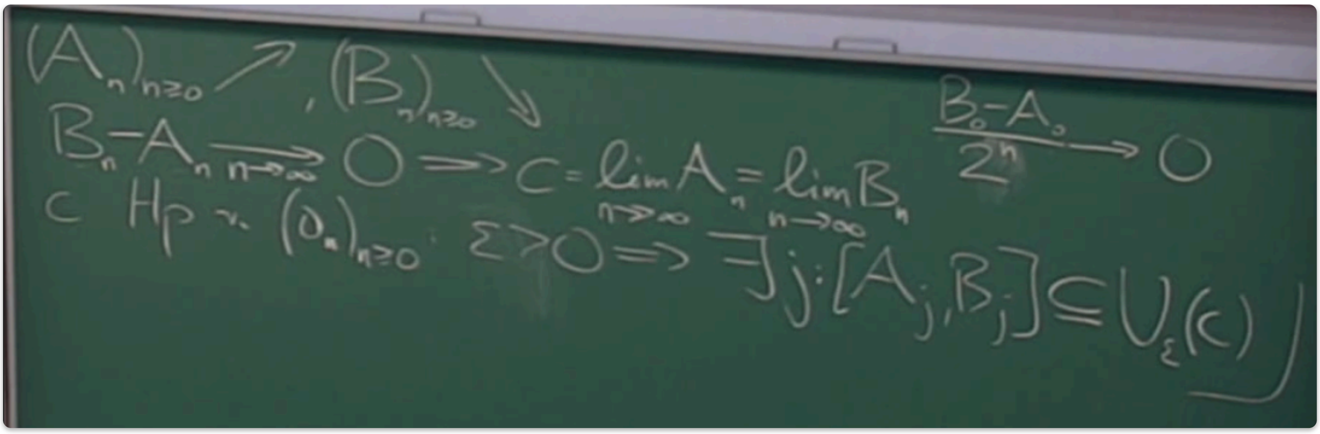
Sei $b_n = \sup(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$. Dann ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge. Sei $M = \{k \in \mathbb{N} \mid b_k < a_k\}$, d.h., $k \in M$ ist gleichbedeutend damit, dass a_k größer ist als sämtliche Folgenglieder mit größerem Index. Wir konstruieren nun eine monotone Folge, wobei wir unterscheiden müssen, ob M unendlich ist oder nicht. Falls M unendlich viele Elemente enthält, so ist $(a_k)_{k\in M}$ bereits eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$. Denn wenn $k_1, k_2 \in M$ mit $k_1 < k_2$, dann ist a_{k_1} laut Definition von M größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, also insbesondere größer als a_{k_2}.

Falls M endlich ist, so bekommen wir mit der oben beschriebenen Vorgangsweise nur endlich viele Elemente und somit keine Teilfolge. In diesem Fall kann man aber eine monoton wachsende Teilfolge konstruieren. Da M beschränkt ist, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, mit $n_1 > k$ für alle $k \in M$. Dann ist a_{n_1} nicht größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, weil sonst n_1 ja in M enthalten wäre. Es gibt also ein mindestens ebenso großes Folgenglied a_{n_2} mit $n_2 > n_1$. Da auch $n_2 \notin M$, muss a_{n_3} mit $n_3 > n_2$ und $a_{n_3} \geq a_{n_2}$ existieren. Diesen Prozess setzen wir ad infinitum fort und erhalten auf diese Art eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

(hier unterscheiden sich leider Buch und Tafelbild)



Da haben wir dann Intervallschachtelungen. Wir teilen immer in die Hälfte und in einer der neuen Teilmengen müssen unendlich viele Folgeglieder liegen, es können nicht in beiden Teilen unendlich viele liegen.

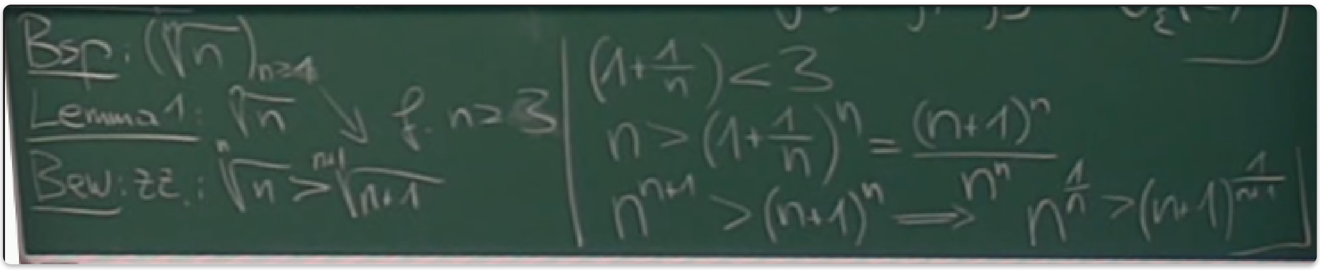


A_n und B_n sind da sie monoton sind beide Beschränkt und daher auch beide Konvergent. Und dank unseren Sätzen die wir schon definiert haben wissen wir, dass $B_n - A_n \to 0$ geht.

Dann behaupten wir das c ein Häufungspunkt von a_n ist. Wenn wir unsere Intervallschachtelung von oben nochmal anschauen, fällt auf, dass unser Intervall immer halbiert, also immer kleiner wird. Und in unserem Intervall liegen immer unendlich viele Folgenglieder. Daher muss ab einem gewissen Zeitpunkt unsere gesamte ϵ-Umgebung da drinnen liegen und deshalb können wir das (mit dem j) definieren.

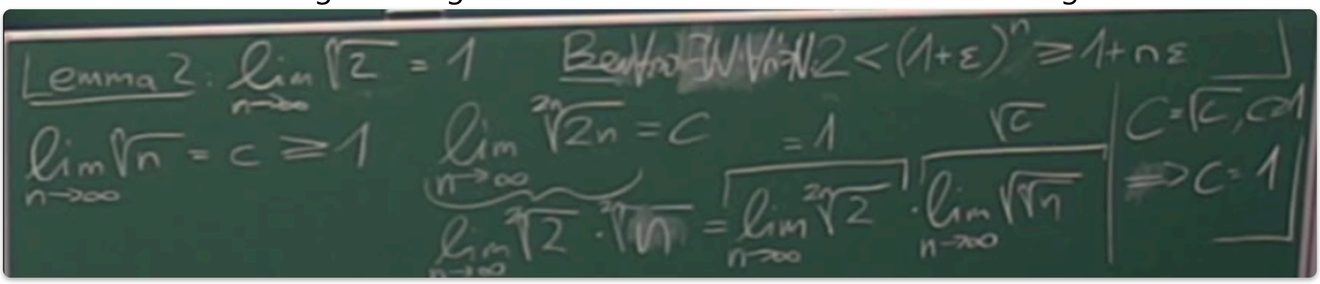
Beispiel aus vo:

Lemma 1:



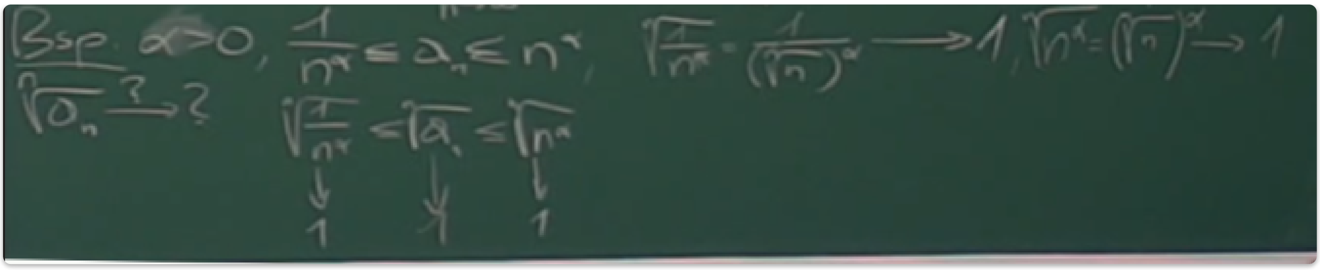
Also die Folge ist schonmal schließlich monoton fallend, und sie besteht aus lauter positiven Werten, also ist sie nach unten Beschränkt zu 0, und daher ist sie auch konvergent.

Wenn das eine konvergente Folge ist bestimmen wir den Grenzwert der Folge:



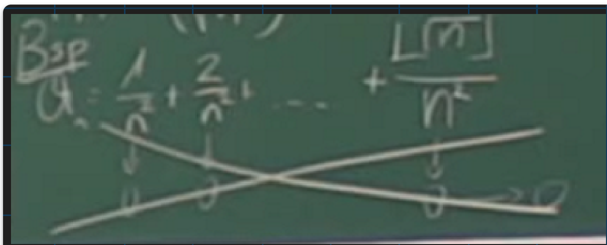
Zuerst beweisen wir dass die n-te Wurzel von 2 gegen 1 konvergiert und dann Schauen wir uns die n-te Wurzel von n an. Wenn diese Folge konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge, das heißt, dass wenn wir nur die geraden Indizes nehmen (also eine Teilfolge), dass der Grenzwert dann der gleiche ist. Diese Wurzel die wir dann haben, können wir aufspalten in 2 konvergenten Folgen. Dann können wir laut den Rechenregeln die Grenzwerte der beiden Folgen einzeln berechnen und dann miteinander multiplizieren.

Beispiel fürs Sandwich Theorem:



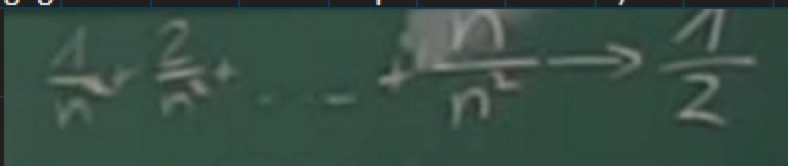
Wir wissen ja schon, dass $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 Konvergiert, daher konvergiert $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ auch gegen 1, Außerdem konvergiert $\sqrt[n]{n^\alpha}$ auch gegen 1, da man α herausziehen kann und dann einfach 1^α dort stehen hat. Und aufgrund des Sandwich theorems konvergiert dann auch die Folge dazwischen gegen 1.

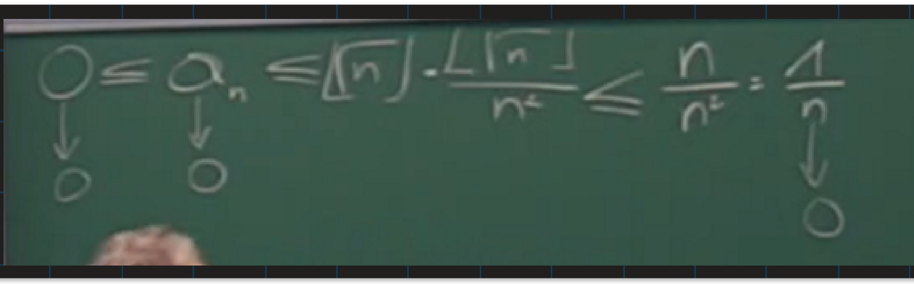
Weiteres Beispiel:



Da kann man nicht einfach davon ausgehen, dass das für alle gilt nur weil es für die ersten gilt

Das kann nämlich auch schiefgehen wie hier (am Anfang immer gegen 0 und ab einem Zeitpunkt nicht mehr):





So wäre es richtig, wieder durch verwenden vom Sandwich Theorem

Cauchykriterium:

Cauchykriterium

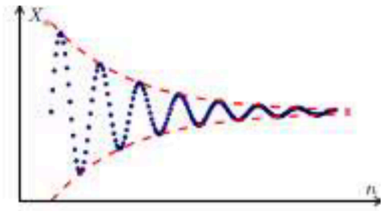
$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\epsilon): |x - a_n| < \epsilon$$

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, so dass $|x_n - x_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(e)$. Das heißt, es gibt einen Index, ab dem die Folge immer näher zueinander rückt.

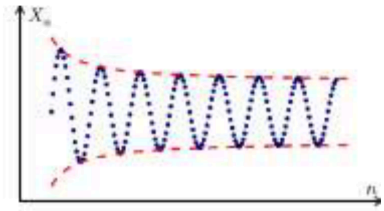
Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist!

Es gilt eigentlich dasselbe Prinzip wie beim Cauchy-Kriterium für Reihen.

Cauchy-Folge



Keine Cauchy-Folge



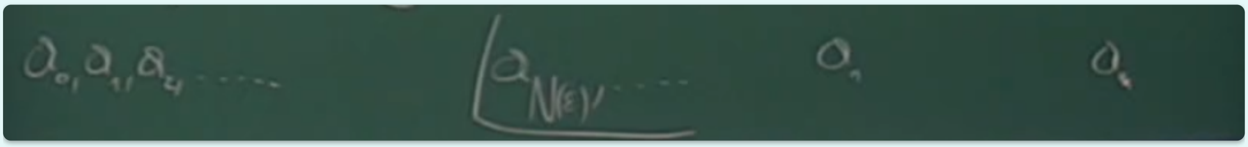
Dieses Kriterium gilt nicht in $\mathbb{Q}$.

Definition 4.28

Mathematik für Informatik p.174

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$.

Anschaulich bedeutet dies, dass Cauchyfolgen genau jene Folgen sind, für welche die Glieder mit großem Index nahe beieinander liegen.



also hier, ab einem gewissen Index N(ϵ) sind alle nachfolgenden Folgenglieder betragsmäßig näher als ϵ aneinander.

Satz 4.29 (Cauchykriterium)

Mathematik für Informatik, p.162

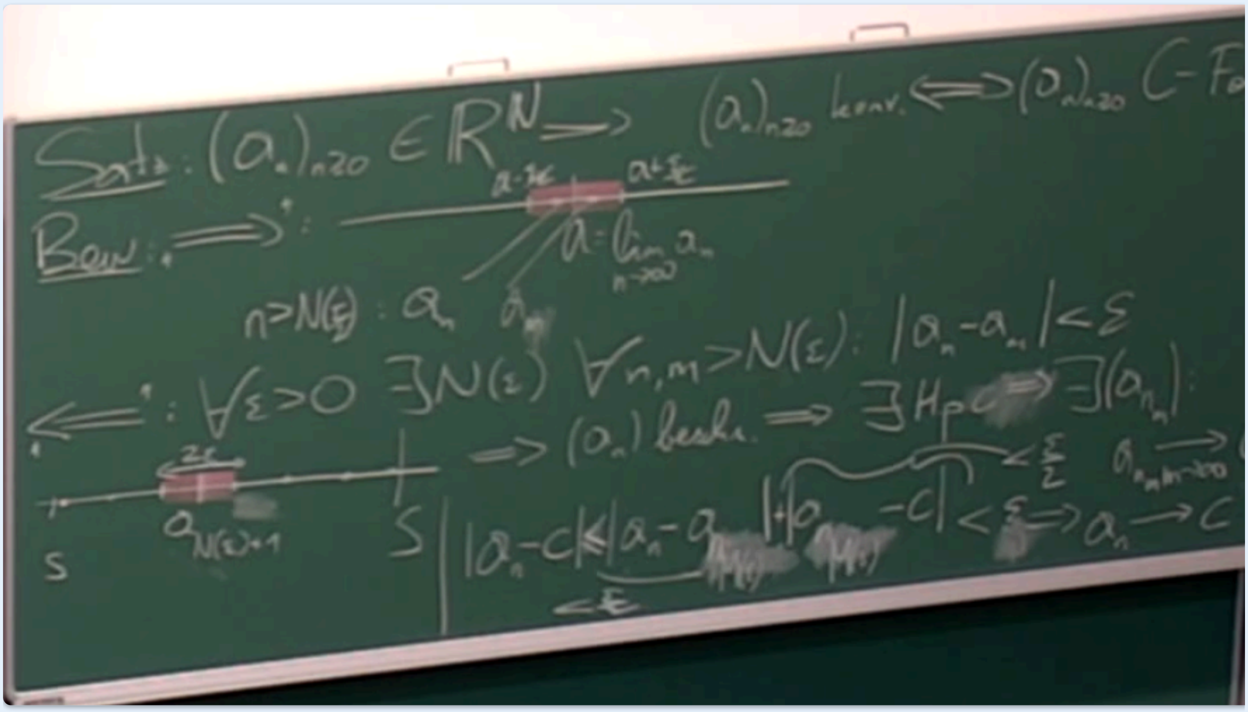
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bemerkung: Man beachte, dass das Cauchykriterium in $\mathbb{Q}$ nicht gilt. Nehmen wir irgend eine Folge rationaler Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl konvergiert, z.B. die durch die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ bestimmte Folge $(1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots)$. Diese Folge ist in $\mathbb{R}$ konvergent und daher nach dem obigen Kriterium eine Cauchyfolge (was übrigens auch direkt leicht zu sehen ist). Da der Grenzwert aber keine rationale Zahl ist, ist diese Folge in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergent und $\varepsilon > 0$. Den Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 0}$ nennen wir a. Dann existiert $N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < N(\varepsilon)$, falls $n > N(\varepsilon)$. Seien nun $n, m > N(\varepsilon)$. Dann gilt $|a_n - a_m| = |a_n - a - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist daher eine Cauchyfolge.

Umkehrung: Gelte für ein $\varepsilon > 0$, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, denn für $m > N = N(\varepsilon)$ folgt aus $|a_m| - |a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}| < \varepsilon$, dass $|a_m| < |a_{N+1}| + \varepsilon$. Somit ist die Folge $(|a_{N+1}|, |a_{N+2}|, \ldots)$ durch $|a_{N+1}| + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Folglich ist $S = \max\left(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + \varepsilon\right)$ eine obere Schranke von $(|a_n|)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist daher durch S nach oben und durch $-S$ nach unten beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann ein Häufungspunkt a und infolge dessen eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a$. Das bedeutet aber, dass für hinreichend große k, z.B. $k > K = K(\varepsilon)$, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ folgt. Sei nun $n > N$ und $k > \max(K, N)$, so dass also auch $n_k > N$ gilt. Dann folgt $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$ und daher $a_n \to a$.

Hier vielleicht nochmal anschaulicher der Beweis aus der vo:



Quellen:

- Mathematik für Informatik;

- 4. Folgen Reihen und Funktionen

4.2 Unendliche Reihen

Link zur Formelsammlung: FS_4.2 Unendliche Reihen

1 Der Begriff der unendlichen Reihe:

Unter einer unendlichen Reihe versteht man eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dabei ist (a_n) die Folge der Reihenglieder. Die Folge s_n mit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Folge der Partialsummen der Reihe. Unter dem Grenzwert (oder der Summe) der Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge. Ist die Folge konvergent bzw. divergent, heißt auch die Reihe konvergent bzw. divergent.

Falls die Reihe konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge.

Reihentypen

> Harmonische Reihe	$\sum_{n\geq1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$
> Geometrische Reihe	$\sum_{n\geq1} q^n \rightarrow$ $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $bei\ \lvert q\rvert > 1$; $s_n = \frac{1}{1-q}$ $bei\ \lvert q\rvert < 1$; $s_n = 1\ bei\ \lvert q\rvert = 1$
> Teleskopsummen	$\sum_{n\geq1} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
> Alternierende Reihe	$\sum_{n\geq1} (-1)^n a_n$
> Exponentialreihe	$\sum_{n\geq1} \frac{1}{n!} \approx e$
> Potenzreihe	$\sum_{n\geq1} a_n (x-x_0)^n \rightarrow R = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert}$

Informationen zum Grenzwert: Limes

Dezimalentwicklung

Als Beispiel haben wir uns am Anfang die Dezimalentwicklung angeschaut:

Beispiel 4.31 (Dezimalentwicklungen)

Mathematik für Informatik, p.163

Reelle Zahlen lassen sich bekanntlich als Dezimalentwicklungen schreiben. Wie im vorigen Abschnitt besprochen, kann man sie aber auch als Grenzwerte von Folgen interpretieren, indem man aus der Dezimalentwicklung eine Folge konstruiert. Die Folgenglieder lassen sich auch als Summen von Zehnerpotenzen auffassen:

$$\frac{1}{9} = 0,111\cdots = \sum_{k\geq1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Definition Reihe

Definition Reihe

Mathematik für Informatik, p.164, Tafelbild

Definition 4.34 Unter einer unendlichen Reihe versteht man eine (formale) unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dabei ist $(a_n)_{n \geq 0}$ die Folge der Reihenglieder. Die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Folge der Partialsummen der Reihe. Unter dem Grenzwert (oder der Summe) der Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge. Ist die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ konvergent bzw. divergent, so heißt auch die Reihe konvergent bzw. divergent.

Wichtig

Kommutativität und Assoziativität muss nicht bei unendlichen Summen gelten!

Beispiel:

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + a_2 \dots$$

das kann so wohl: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0$,
aber auch $1-(1-1)-(1-1)\dots = 1$ sein

Deshalb schauen wir uns immer die Partialsummenfolgen s_n an:

$$\sum_{n\geq 0 a_n} := \lim_{n\to\infty} s_n$$

Satz 4.35

Mathematik für Informatik, p.164

Falls die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge, d.h., $a_n \to 0$.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt $\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Die Reihenglieder lassen sich aber mit Hilfe der Partialsummenfolge durch $a_n = s_n - s_{n-1}$ beschreiben. Übergang zum Grenzwert ergibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Harmonische Reihe:

Beispiel 4.36

Mathematik für Informatik, p.164, Tafelbild

Die harmonische Reihe ist definiert durch

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$

Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} &\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}+\dots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\end{aligned}$$

Die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ ist also monoton wachsend und nach den obigen Überlegungen gilt $s_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2} \to \infty$. Die harmonische Reihe ist somit divergent. Dies zeigt, dass die Umkehrung des vorigen Satzes nicht richtig ist: Aus $a_n \to 0$ folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Geometrische Reihe:

Beispiel 4.37

Mathematik für Informatik, p.165, Tafelbild

Unter einer geometrischen Reihe versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1+q+q^2+q^3+\cdots$$

Die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ der geometrischen Reihe ist daher $s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n$. Folglich gilt wenn wir die Reihe mit q multiplizieren:

$$\begin{array}{rcll} s_n & = & 1+q+q^2+\cdots+q^n & \\ qs_n & = & \quad q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1} & \\ \hline (1-q)s_n & = & 1 & \qquad\qquad -q^{n+1}\end{array}$$

und für $q \neq 1$ erhalten wir

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Im Fall $|q| < 1$ folgt daraus die Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent, da die Folge der Summanden, also $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge ist.

☰ Beispiel 4.38

Mathematik für Informatik, p.165

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$. Die Partialsummenfolge ist somit

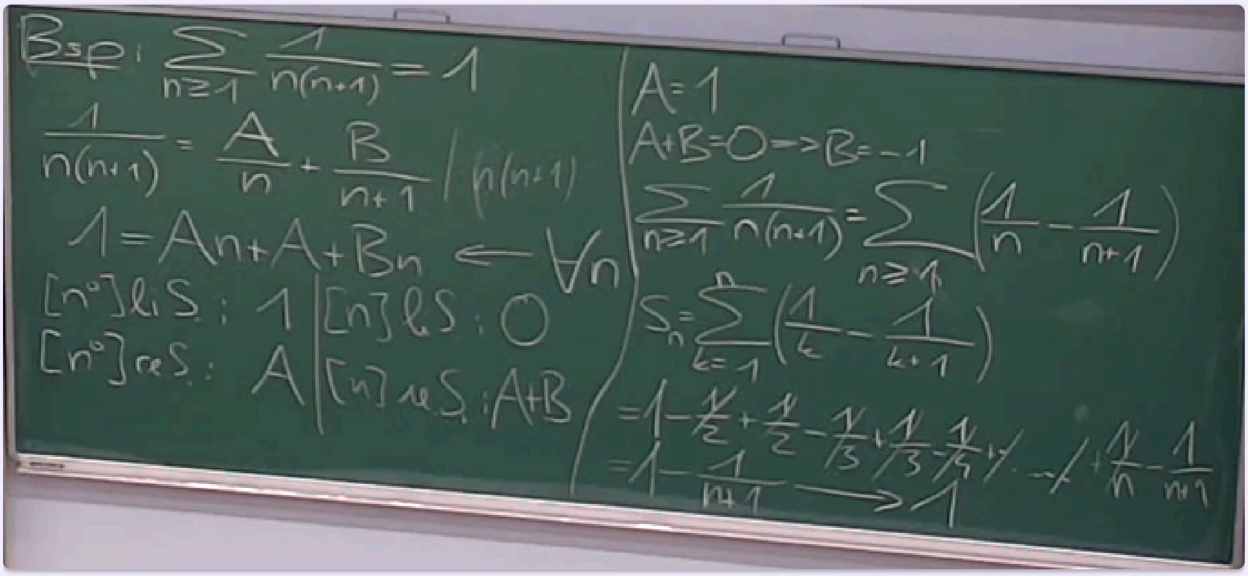
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Nach der Definition der Summe einer Reihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Summen, bei denen Auslöschungen wie in (4.2) auftreten, nennt man Teleskopsummen.

Hier die Erklärung wie wir auf die Zähler 1 und -1 gekommen sind:



2. Konvergenzkriterien:

Schnelle Übersicht:

Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium

$$(b_n \geq |a_n|) \wedge \sum_{n\geq 0} b_n \ konvergent \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \ absolut \ konvergent$$

Wähle eine größere, bereits bekannte Reihe die konvergiert.

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}; \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Minorantenkriterium

$$(b_n \leq |a_n|) \wedge \sum_{n\geq 0} b_n \ divergent \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \ divergent$$

Wähle eine kleinere, bereits bekannte Reihe die divergiert.

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Wurzelkriterium

Gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Quotientenkritierum

Gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Cauchy-Kriterium

$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \forall m,n \in \mathbb{N} \ m \geq n > N(\epsilon): \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon$$

Man wählt einen bestimmten Index n einer Reihe und ein ϵ (z.b. 0,001). Ab diesem Index n darf die Summe aller restlichen Reste (= Summe der Partialsummen in einem bestimmten Intervall hinter n) nicht mehr den Wert von ϵ überschreiten. Kann man so einen Index wählen, ist die Reihe konvergent.

Zu jeder beliebig kleinen Zahl ϵ existiert eine Stelle n_ϵ sodass gilt: $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \quad k \geq m \geq n_\epsilon$.

Leibnitz-Kriterium

Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist.

Konvergenzkriterien:

Cauchykriterium:

2. Konvergenzkriterien (Mathematik für Informatik, p.166)

Konvergenzkriterien für Reihen:

- Ziel: Finden von Kriterien für die Konvergenz.
- Cauchykriterium für Folgen (Satz 4.29):
  - Direkte Übertragung auf Reihen möglich.
  - Anwendung des Kriteriums auf die Partialsummenfolge

Satz 4.39 (Cauchykriterium)

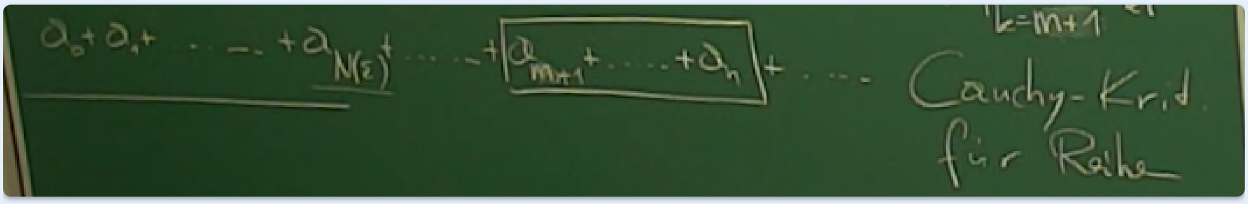
Tafelbild

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_n \right| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n > N(\varepsilon)$.

Wir betrachten sozusagen einen Teil aus der Summe und das Kriterium sagt aus, dass dann die Summe des Fensters kleiner ist als das Epsilon.



Leibnitz Kriterium:

Satz 4.41 Konvergenzkriterium von Leibniz

Mathematik für Informatik, p.166, Tafelbild1 Satz+Beweis, Tafelbild2, Beweis Fortsetzung + Beispiel

Eine alternierende Reihe $\sum_{n\geq0}(-1)^n a_n$, für die $(a_n)_{n\geq0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist konvergent.

Beweis. Wir betrachten die Teilfolgen $(s_{2n})_{n\geq0}$ und $(s_{2n+1})_{n\geq0}$ der Partialsummenfolge. Da a_n monoton fällt, ist

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+1})$$

eine monoton wachsende Folge, da $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$. *Aus demselben Grund ist*

$$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n})$$

(hier ist wichtig, dass man das +, welches jetzt in den Klammern wäre mit einem - ersetzt, weil ja vor der Klammer ein - ist...)

... *monoton fallend*. Weiters gilt $0 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq a_0$. Daraus folgt, dass $(s_{2n+1})_{n\geq0}$ und $(s_{2n})_{n\geq0}$ beschränkt und daher wegen Satz 4.12 konvergent sind. Sei $a = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ und $b = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Dann gilt auch $0 \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$, also ist $a = b = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Beispiel 4.42

Mathematik für Informatik, p.166

Die alternierende Reihe $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.41, denn in diesem Fall ist $a_n = \frac{1}{n}$ offensichtlich eine monoton fallende Nullfolge. Daher ist die Reihe konvergent.

Absolut und bedingt Konvergent:

Definition 4.43

Mathematik für Informatik, p.166

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ konvergent ist. Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, nennt man *bedingt konvergent*.

Satz 4.44

Mathematik für Informatik, p.166, Tafelbild

Eine **absolut konvergente Reihe ist auch konvergent**.

Beweis. Sei $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Aus dem *Cauchykriterium* (Satz 4.39) folgt, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $m \geq n > N$

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$$

Eine Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

und daraus folgt nach nochmaliger Anwendung von Satz 4.39 die Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Vergleichskriterien

Minoranten- und Majorantenkriterium:

ⓘ Satz 4.47 (*Majorantenkriterium*)

Mathematik für Informatik, p.167

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum_n b_n$ konvergent ist, so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. In diesem Fall nennt man die Reihe $\sum_n b_n$ eine Majorante von $\sum_n a_n$.

Beweis. Anwendung des Cauchykriteriums: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k \varepsilon$$

für alle $m \geq n > N$. Daraus folgt die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Analog zum Konvergenzbeweis mittels Abschätzung nach oben durch konvergente Majoranten lässt sich auch ein Divergenzbeweis mittels Abschätzung nach unten durch divergente Minoranten durchführen.

ⓘ Satz 4.48 (*Minorantenkriterium*)

Mathematik für Informatik, p.167

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen, so dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum_n a_n$ divergent ist, so ist auch die Reihe $\sum_n b_n$ divergent.
Die kleinere Reihe nennt man dann Minorante

Beweis:
$S_n^{(b)} \geq S_n^{(a)} \to \infty$
Wenn schon die kleinere Reihe divergent ist und gegen unendlich geht, dann kann die größere Reihe gar nicht mehr gegen etwas größeres gehen und divergiert auch.

Tafelbild

Wurzelkriterium

Satz 4.50 (Wurzelkriterium)

Mathematik für Informatik, p.168

Falls es eine Zahl q gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n$$

dann ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent.

Falls hingegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } n$$

so ist $\sum_n a_n$ divergent.

Bemerkung: Man beachte, dass die Konstante q in der ersten Ungleichung wesentlich ist. Die Bedingung

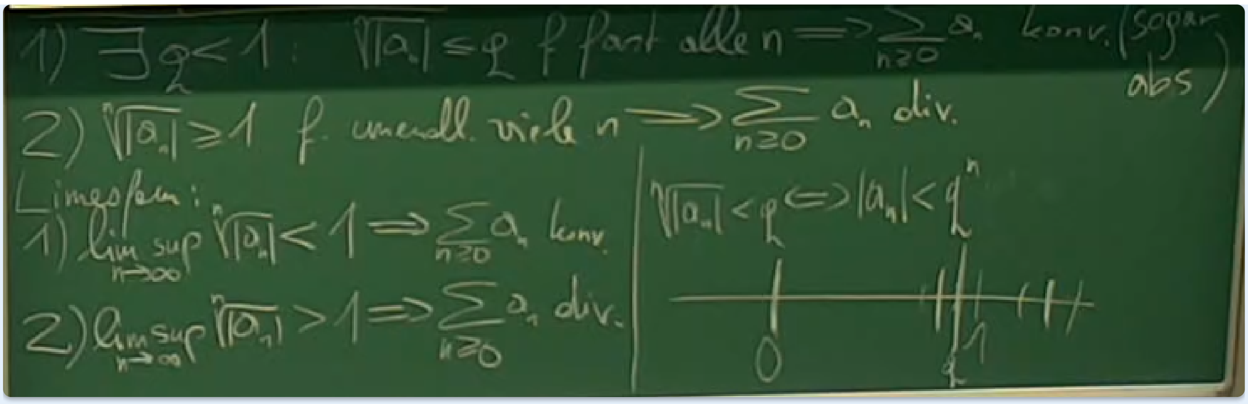
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

reicht nicht aus, wie das folgende Beispiel zeigt: Für die divergente harmonische Reihe ist $\sqrt[n]{|a_n|} = 1/\sqrt[n]{n}$. D.h., die Bedingung (4.6) ist erfüllt. Ferner gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$. Somit konvergiert auch $\sqrt[n]{|a_n|}$ gegen 1, also muss die Folge jede a priori vorgegebene Schranke $q < 1$ überschreiten. Die Bedingung (4.4) des Wurzelkriteriums ist somit verletzt.

Zu beachten ist aber, dass in diesem Fall auch (4.5) nicht erfüllt ist. Mit Hilfe des Wurzelkriteriums kann also nicht für jede Reihe eine Entscheidung über Konvergenz bzw. Divergenz getroffen werden.

Beweis. Aus (4.4) folgt, dass $|a_n| \leq q^n$ für fast alle n. Daher ist die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n$ eine konvergente Majorante, woraus die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$ folgt.

Bedingung (4.5) impliziert, dass $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n. Somit kann $(a_n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge sein und daher $\sum_n a_n$ nicht konvergieren.



ⓘ Satz 4.51 (Limesform des Wurzelkriteriums)

Mathematik für Informatik, p.168

Aus $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ und aus $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ deren Divergenz.

Im Fall $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ist wieder keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe möglich.

Bemerkung: Dass Satz 4.51 tatsächlich eine Abschwächung von Satz 4.50 ist, zeigt das triviale Beispiel $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist (4.5) anwendbar, aber $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, weshalb Satz 4.51 keine Aussage liefert.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass die Aussage (4.4) äquivalent zu $\lim_{\sup_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist. Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so gilt sicherlich (4.5).

Quotienten-Kriterium:

ⓘ Satz 4.52 (**Quotientenkriterium**)

Mathematik für Informatik, p.169, Tafelbild

Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls eine Zahl q existiert, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } n$$

so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt hingegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } n$$

so divergiert die Reihe $\sum_n a_n$.

Beweis. Im ersten Fall gilt für einen Index N und alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a_{n+1}| \leq q\,|a_n|$ und daher $|a_n| \leq q^{n-N} a_N$. Daher ist die geometrische Reihe $\sum_n |a_N| q^{n-N}$

eine konvergente Majorante.

Im Fall $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n ist $|a_n|$ eine ab einem gewissen Index N monoton wachsende Folge positiver Zahlen und damit sicherlich keine Nullfolge.

Auch beim Quotientenkriterium kann der Fall eintreten, dass keine der beiden Bedingungen zutrifft und daher keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe gemacht werden kann. Die harmonische Reihe ist etwa ein Beispiel, wo das Quotientenkriterium versagt.

Satz 4.53 (Limesform des Quotientenkriteriums) Aus $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ und aus $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ deren Divergenz.

Beispiel 4.54:

Beispiel 4.54

Mathematik für Informatik, p.169

(a) Wir untersuchen die Exponentialreihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

für festes $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für hinreichend große n, da $\frac{|x|}{n+1}$ eine Nullfolge ist. Das Quotientenkriterium sagt uns nun, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$. Wieder führt das Quotientenkriterium zum Ziel: Wegen (4.1) gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ für } n \geq 1,$$

und daher ist die Reihe konvergent.
(c) Sei $a_{2n} = \frac{1}{4^n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{4^{n-1}}$. Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 4 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{16} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

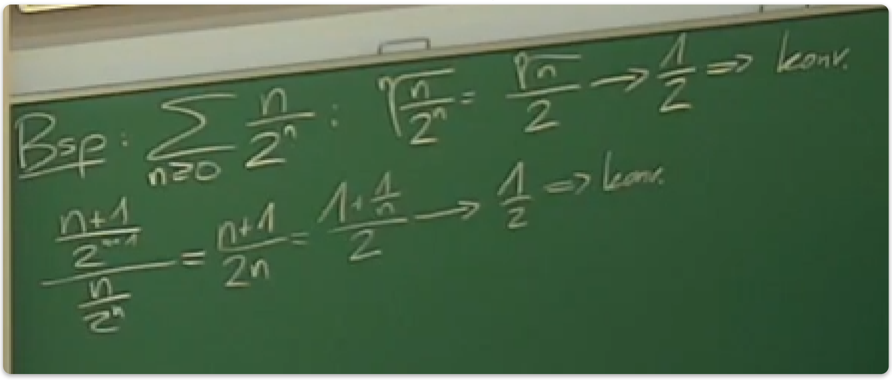
Daher gilt $\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 4$ und $\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1/16$. Das Quotientenkriterium liefert daher keine Aussage. Der Versuch mit dem Wurzelkriterium erweist sich jedoch als zielführend, denn

$$\sqrt[2n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt[2n+1]{\frac{1}{4^{n-1}}} = \sqrt[2n+1]{\frac{2^3}{2^{2n+1}}} = \sqrt[2n+1]{8} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ für } n \to \infty,$$

und daraus folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$.

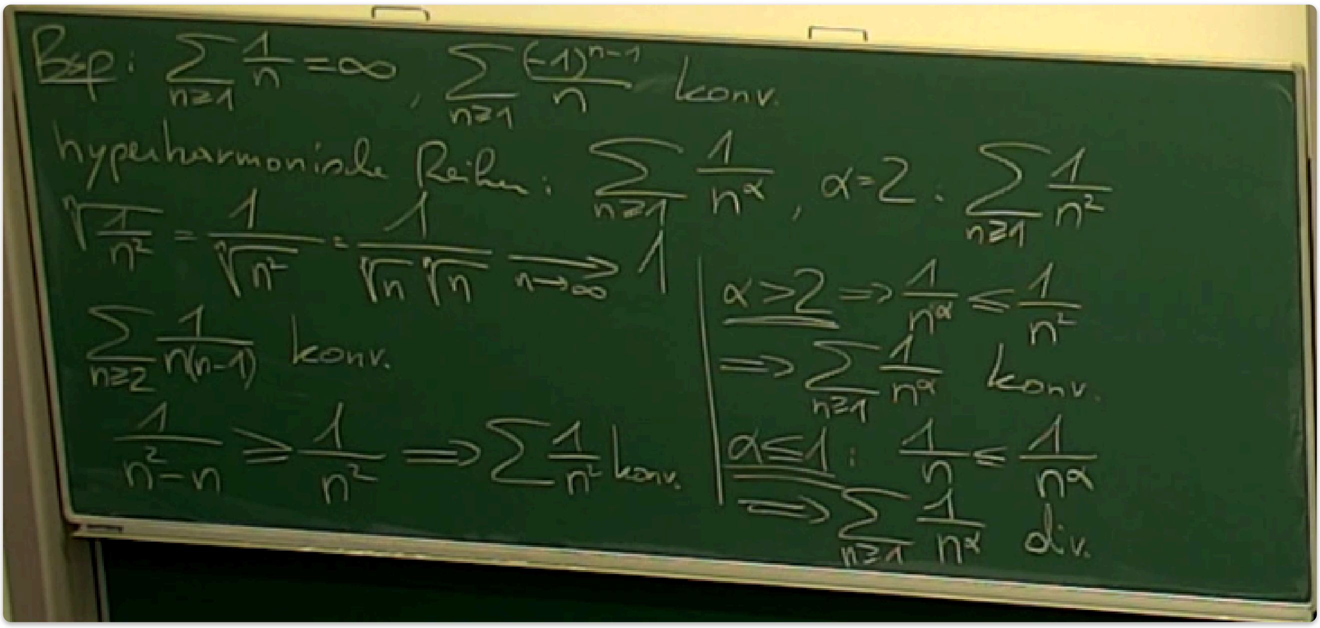
Allgemein lässt sich zeigen, dass das Wurzelkriterium leistungsfähiger ist als das Quotientenkriterium. Letzteres ist jedoch in vielen Fällen einfacher zu handhaben.

Da haben wir ein anderes Beispiel gemacht was ich nicht im Buch gefunden hab:



Tafelbild zu b)

Beispiel zu Hyperharmonischen Reihen



Hier sagen sowohl Wurzelkriterium und das Quotienten Kriterium nichts aus. Es liefert 1 also sagt das Quotienten Kriterium nicht aus, ob's konvergiert oder divergiert.

Wir haben hier eine konvergente Majorante zu unserer Reihe gefunden und wissen daher dass unsere Reihe konvergent ist.

Also können wir dann unsere neue Reihe gleich als Majorante verwenden um herauszufinden, dass unsere Reihe divergent ist, wenn $\alpha \leq_1$ und konvergent wenn $\alpha > 2$.

---

3. Potenzreihen

Cauchyprodukt und Potenzreihen

Mit dem Cauchyprodukt lassen sich Reihen multiplizieren.

$$(a_n) * (b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad mit\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Eine Anwendung des Cauchyprodukts ist Aufgabe 16 in der Beispielsammlung.

Cauchyprodukt und Potenzreihe:

Definition 4.57

Mathematik für Informatik, p.171

Unter einer Potenzreihe versteht man eine Reihe der Bauart $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$. Die Faktoren a_n heißen die Koeffizienten der Potenzreihe, x_0 ist der Entwicklungspunkt oder die Anschlussstelle.

Definition 4.55

Mathematik für Informatik, p.171, Tafelbild

Seien $\sum_{n>0} a_n$ und $\sum_{n>0} b_n$ zwei Reihen.
Unter dem Cauchyprodukt dieser beiden Reihen versteht man die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Satz 4.56

Mathematik für Informatik, p.171, Tafelbild

Falls $\sum_{n\geq 0} a_n = a$ und $\sum_{n\geq 0} b_n = b$ und beide Reihen absolut konvergieren, dann ist auch deren Cauchyprodukt absolut konvergent, und es gilt $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = ab$.

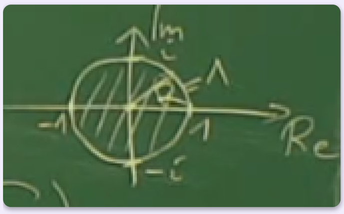
Ohne Beweis.

Beispiel 4.58

Beispiel 4.58

Mathematik für Informatik, p.171

(a) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n\geq 0} x^n$, eine Potenzreihe mit Anschlussstelle 0 und allen Koeffizienten gleich 1. Diese Reihe ist bekanntlich eine geometrische Reihe. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$. Ihr *Konvergenzbereich* ist somit das Innere des *Einheitskreises der Gauß'schen Zahlenebene*.



(b) Die binomische Reihe ist definiert durch $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Das Quotientenkriterium (in Limesform) liefert für $a_n = \binom{\alpha}{n} x^n$ und $\alpha \notin \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{\alpha}{n+1} x}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \to -x \text{ für } n \to \infty.$$

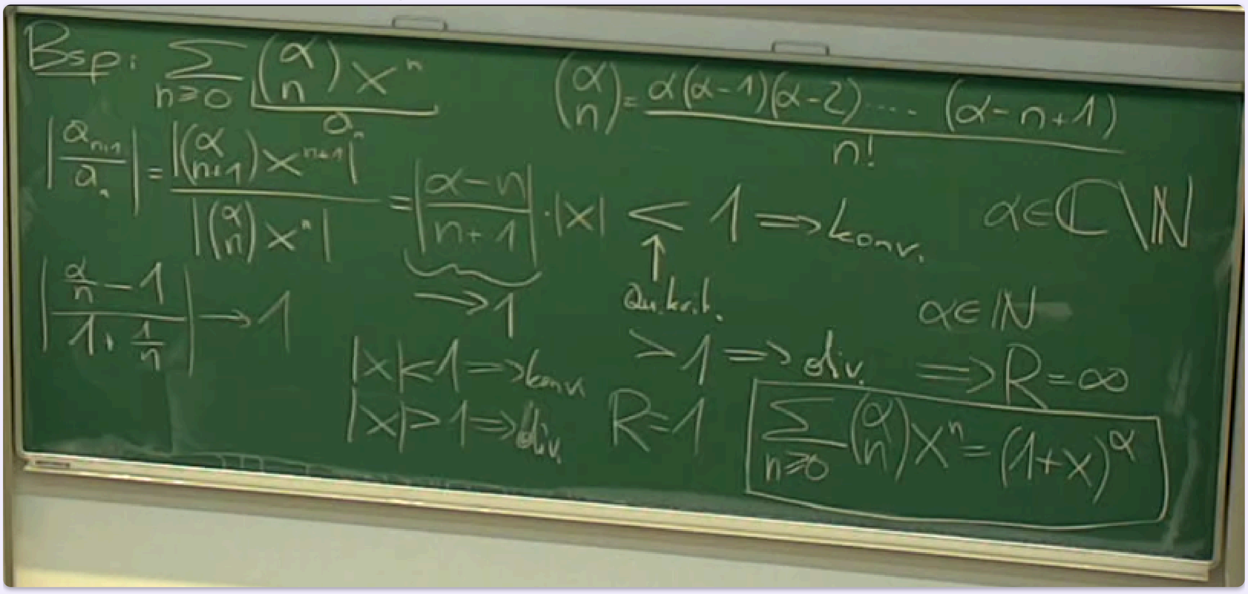
Im Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ ist diese Reihe daher für $|x| < 1$ konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Wie im vorigen Beispiel ist auch hier der Rand des Konvergenzbereichs ein Kreis.

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ besteht die Reihe nur aus endlich vielen Gliedern und konvergiert daher trivialerweise in ganz $\mathbb{C}$. Aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir in diesem Fall

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

In Kapitel 5 werden wir sehen, dass dies auch für $\alpha \notin \mathbb{N}$ zutrifft.

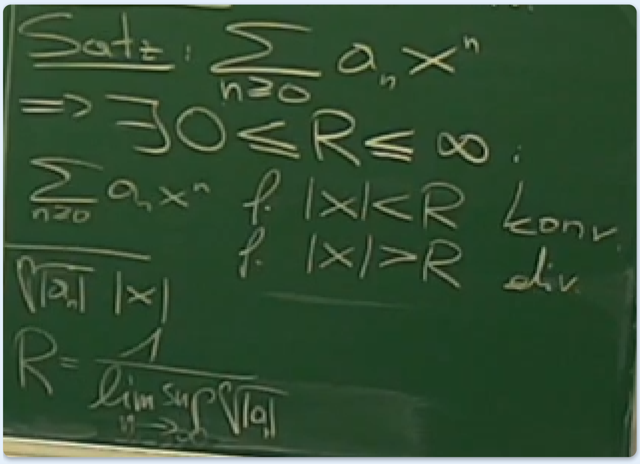
Bisschen anderer Rechenweg bzw vielleicht bisschen intuitiver:



Satz 4.60 Konvergenzradius

Mathematik für Informatik, p.172,

Satz 4.60 Sei $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R. Sei weiters $0 < r < R$. Dann existieren Konstanten $c > 0$ und $0 < q < 1$, so dass $|a_n(x-x_0)^n| \leq cq^n$ für alle x mit $|x-x_0| \leq r$.



Beweis. Wegen $r < R$ sind alle s mit $r < s < R$ immer noch innerhalb des Konvergenzkreises. Wir wählen ein solches s und setzen $q = r/s$. Dann folgt $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|r^n = |a_n|s^n q^n \leq cq^n$ für alle x mit $|x-x_0| \leq r$. Die Existenz von c in der letzten Ungleichung folgt daraus, dass $|a_n|s^n$ aufgrund der Konvergenz der Reihe eine Nullfolge und daher beschränkt sein muss.

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen

4.3 Asymptotischer Vergleich

Link zur Formelsammlung: FS_4.3 Asymptotischer Vergleich

Landau-Symbole

$a_n = O(b_n)$

Bedeutet: „a_n ist ein groß O von b_n, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$a_n = o(b_n)$

Bedeutet: „a_n ist ein klein O von b_n, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$a_n \sim b_n$

Bedeutet: „a_n ist asymptotisch gleich b_n, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

"Obere, untere Schranke und asymptotisch gleich"

Stichpunkte zur Performance-Analyse von Algorithmen

Mathematik für Informatik, p.173

- Folgen: Anwendung in Performance-Analyse von Algorithmen (z.B. Laufzeit).
- Algorithmen & Datenstrukturen: Operieren auf Größe n (Beispiel: Sortieren von n Zahlen).
- a_n: Bezeichnet benötigte Laufzeit.
- Laufzeit in Sekunden: Nicht zweckmäßig (abhängig von Hardware/Implementierung).
- Sinnvolles Maß (Komplexität): Anzahl benötigter Operationen (elementare Schritte).
- Analyse-Unterscheidung:
  - Average-Case: a_n = mittlere Anzahl Operationen für Datensatzgröße n.
  - Worst-Case: a_n = maximale Anzahl Operationen für Datensatzgröße n.

Definition 4.62 (Landau-Symbole)

Mathematik für Informatik, p.174

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen. Dann schreibt man

(i) $a_n = O(b_n)$ für $n \to \infty$ (gesprochen: „ a_n ist ein groß O von b_n "), falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt,

(ii) $a_n = o\left(b_n\right)$ für $n \to \infty$ (gesprochen: „, a_n ist ein klein O von b_n*), falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

gilt.

(iii) $a_n \sim b_n$ (gesprochen: , a_n ist asymptotisch gleich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

gilt.

(iv) $a_n = \Omega(b_n)$ für $n \to \infty$ (gesprochen: "a_n ist Omega von b_n"), falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leq C \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Weiter gilt: $a_n = \Omega(b_n)$ genau dann, wenn $b_n = O(a_n)$.

(v) $a_n = \Theta(b_n)$ für $n \to \infty$ (gesprochen: "a_n ist Theta von b_n"), falls es positive Konstanten C_1 und C_2 gibt, so dass

$$C_1|b_n| \leq |a_n| \leq C_2|b_n| \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, d.h. $a_n = \Theta(b_n)$ genau dann, wenn sowohl $a_n = O(b_n)$ als auch $a_n = \Omega(b_n)$ zutrifft.

Tafelbild1
Tafelbild2

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen

4.4 Elementare Funktionen

Link zur Formelsammlung: FS_4.4 Elementare Funktionen

Einfache Eigenschaften

Streng monoton fallend bzw. steigend

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to D$ ist streng monoton fallend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Umgekehrt heißt die Funktion streng monoton steigend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Eine Funktion kann auch nur auf einem Intervall $I \subseteq D$ streng monoton steigend bzw. fallend definiert werden.

Bijektivität und Umkehrfunktion

Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so folgt auch automatisch die Bijektivität und es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt die gleichen Eigenschaften bezüglich der Monotonie.

Potenzen mit reellen Exponenten

Bei Potenzen x^α mit reellen Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ kann α als Grenzwert einer Folge a_n angeschrieben werden.

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Somit übertragen sich alle Rechenregeln auch auf das Rechnen mit reellen Exponenten.

Polynomfunktionen

Beispiel 4.64

Mathematik für Informatik, p.175, Tafelbil

(a) Polynomfunktionen sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, d.h., die Abbildungsvorschrift ist ein Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten. Die Graphen einiger Beispiele finden sich in Abb. 4.2.

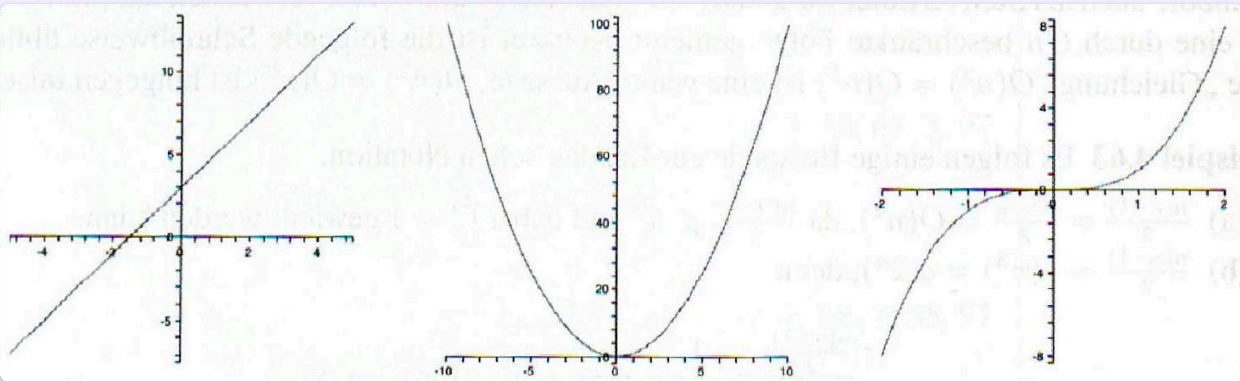


Abbildung 4.2 Polynomfunktionen: links: $f(x) = 2x + 3$, Mitte: $f(x) = x^2$, rechts: $f(x) = x^3$

(b) Rationale Funktionen sind Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen sind und $D = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$. Zum Beispiel ist $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ (siehe Abb. 4.3, links) eine rationale Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$.

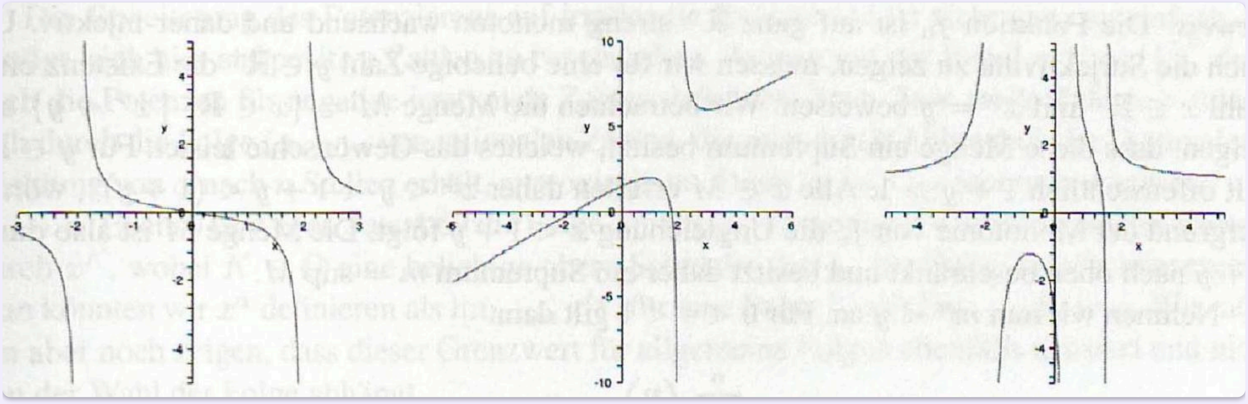


Abbildung 4.3 Rationale Funktionen: links: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, Mitte: $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^2-4}$, rechts: $f(x) = \frac{x^3-3}{x^3-3x+1}$

Monotonie und Sätze dazu

Definition 4.65

Mathematik für Informatik, p.176

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset D$ ein Intervall. Dann heißt f auf I streng monoton wachsend, falls für $x, y \in I$ mit $x < y$ immer $f(x) < f(y)$ erfüllt ist. Analog heißt f auf I streng monoton fallend, falls aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) > f(y)$ folgt.

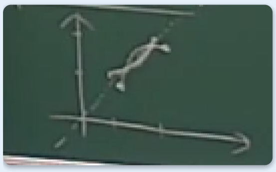
Bemerkung: Man beachte, dass aus der Bedingung $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ auch die Umkehrung folgt, d.h., für streng monoton wachsende Funktionen sind die Aussagen $x < y$ und $f(x) < f(y)$ äquivalent. Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Satz 4.66

Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f : I \to f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher umkehren. Die Umkehrung ist im gleichen Sinne monoton wie f selbst.

Beweis. O.B.d.A. sei f auf I streng monoton wachsend. Weiters sei $x \neq y$, es gelte etwa $x < y$. Dann ist $f(x) < f(y)$, insbesondere sind also die Bilder von x und y unter f verschieden, und f ist daher injektiv. Da die Zielmenge $f(I)$ ist, ist f trivialerweise surjektiv und somit bijektiv.

Zum Beweis der zweiten Aussage müssen wir zeigen, dass $x < y \Longrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. Setzen wir $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, dann gilt $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Da f monoton wächst, folgt $u < v$, was zu zeigen war.

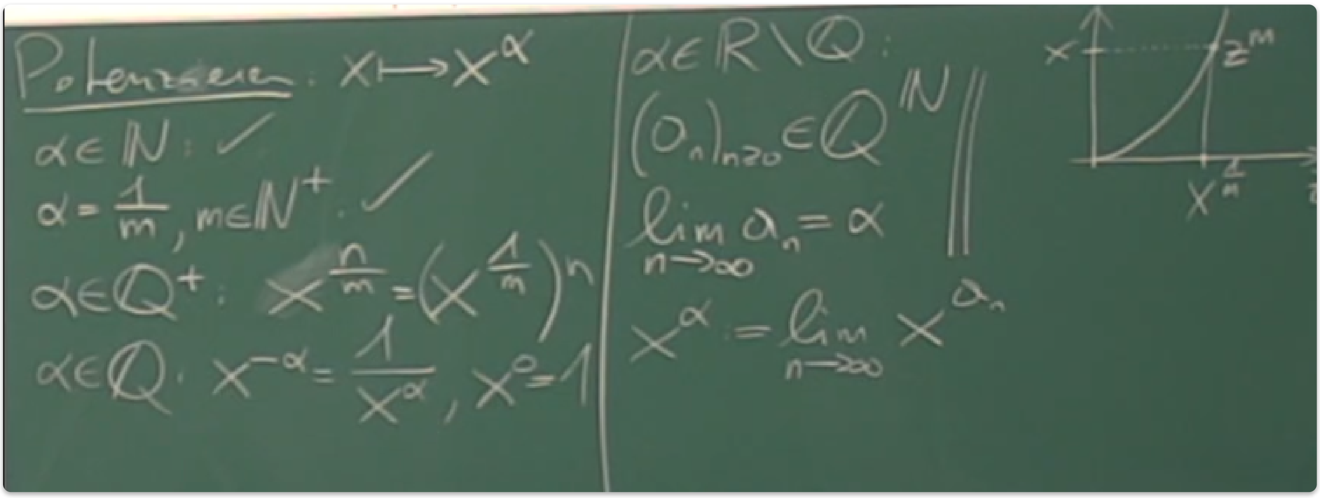


Mehr siehe: Monotonie, Tafelbild

Potenzen mit reellen Exponenten

Mathematik für Informatik, p.177

Das Potenzieren mit natürlichem Exponenten, also die Berechnung von x^n mit $n \in \mathbb{N}$, ist elementar über die Multiplikation erklärt. Diese Definition ist aber nicht mehr anwendbar, wenn n keine natürliche Zahl ist. In diesem Abschnitt werden wir uns überlegen, wie man das Potenzieren auf nicht natürliche Exponenten verallgemeinern kann.



Exponentialfunktion und Logarithmus

Definition 4.72

Mathematik für Informatik, p.179

Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch $\exp(x) = e^x$, wobei e die Euler'sche Zahl 2.71828 ... aus Beispiel 4.21 ist. Die allgemeine Exponentialfunktion lautet $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

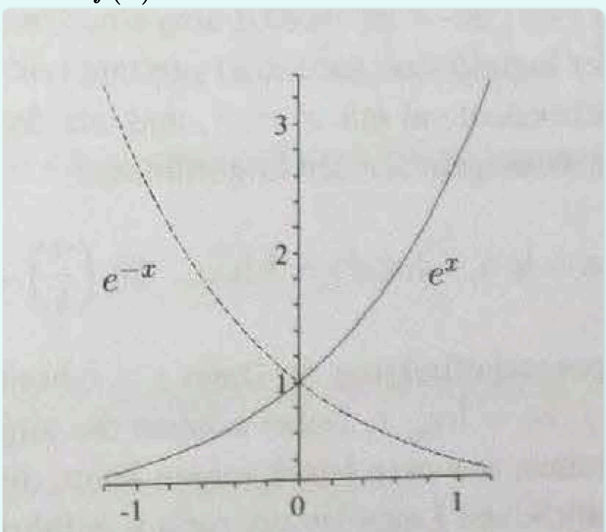


Abbildung 4.4 Die Graphen von e^x und e^{-x}

Satz 4.73

Tafelbild1, Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.179

Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$bijektiv ab.

Bemerkung: In Abschnitt 4.5 werden wir den Begriff der Stetigkeit vorstellen. Die Exponentialfunktion ist eine stetige Funktion (Satz 4.78). Daher folgt der obige Satz auch unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz (Satz 4.89).

Beweis. Aus Satz 4.69 (der nach den obigen Überlegungen auch für irrationale Exponenten gilt) folgt, dass die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und infolge dessen eine injektive Funktion ist.

Zum Beweis der Surjektivität betrachtet man die Folgen $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Erstere ist eine Nullfolge, letztere konvergiert uneigentlich gegen ∞. Aufgrund dessen gibt es zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ein $n \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y \leq e^n$. Wir setzen $a_0 = -n$ und $b_0 = n$. Halbieren des Intervalls $[a_0, b_0]$ liefert den Punkt $c = (a_0 + b_0)/2$. Falls c die Ungleichung $e^c < y$ erfüllt, dann setzen wir $a_1 = c$ und $b_1 = b_0$, andernfalls $a_1 = a_0$ und $b_1 = c$. Es gilt dann $e^{a_1} < y \leq e^{b_1}$. Das Intervall $[a_1, b_1]$ wird wieder halbiert, und in analoger Weise definieren wir a_2 und b_2. So entstehen eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ (vgl. Intervallschachtelungen aus Abschnitt 1.1). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$. Daher sind diese beiden Folgen konvergent. Die Differenz $b_n - a_n$ ist die Länge des n-ten Intervalls. Deshalb bilden die Differenzen eine Nullfolge. Es folgt somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$, also $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^\alpha$. Wegen $e^{a_n} < y \leq e^{b_n}$ gilt $e^\alpha = y$, womit die Surjektivität der Exponentialfunktion gezeigt ist.

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$besitzt also eine Umkehrfunktion. Diese wird natürlicher Logarithmus (oder logarithmus naturalis) genannt und mit dem Symbol *ln* bezeichnet. Damit ist $y = \ln x$ gleichbedeutend mit $x = e^y$, und aus den Rechenregeln für Potenzen folgen unmittelbar einige Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(a^b\right) = b \ln a, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Auch die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ besitzt eine Umkehrfunktion, den Logarithmus zur Basis a, $f(x) = \log_a x$. Dabei können die allgemeine Exponentialfunktion und der allgemeine Logarithmus, wie man leicht zeigen kann, direkt auf die natürliche Exponentialfunktion bzw. den natürlichen Logarithmus zurück geführt werden. Es gilt $a^x = e^{x \ln a}$ gilt $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- **Zusammengesetzte Exponentialfunktion:** Entsteht durch die Verkettung der Exponentialfunktion mit g(x)=−x2/2.
- **Wichtigkeit:** Spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

- Bekannte Bezeichnung: Wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet (siehe Abbildung 4.5).

Darstellung der Exponentialfunktion

Satz 4.74

Mathematik für Informatik, p.181

Die natürliche Exponentialfunktion e^x besitzt die folgenden Eigenschaften.

(i) Darstellung als Grenzwert einer Folge:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

(ii) Darstellung durch eine Potenzreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

(iii) Funktionalgleichung:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Bemerkung: Für $x = 1$ ergibt sich dann insbesondere

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Die Funktionalgleichung (4.9) folgt direkt aus der Definition als Potenz der Euler'schen Zahl e. Um die anderen Eigenschaften zu zeigen, wollen wir zunächst die Funktion $E(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Existenz dieses Grenzwerts: Aufgabe 4.14) und ihren Zusammenhang zur Exponentialfunktion studieren. Wir wissen ja bereits aus Beispiel 4.21, dass $E(1) = e$.29

Winkelfunktion und Arcusfunktionen

Mathematik für Informatik, p.183, Tafelbild

- Definition von Sinus (sin) und Cosinus (cos):
  - $\sin(x)$: y-Koordinate eines Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - $\cos(x)$: x-Koordinate desselben Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - Bogenlänge vom Bezugspunkt zum Punkt X beträgt x (vgl. Kapitel 1, Abb. 4.6).
  - Werden auch Winkelfunktionen genannt (enge Verbindung zum Winkel).
- Periodische Fortsetzung für $x \notin [0, 2\pi)$:
  - $\sin(x)$ und $\cos(x)$ werden durch periodische Fortsetzung definiert.
  - Gleichungen für die periodische Fortsetzung (werden im Folgenden erwartet).

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

- Wichtig:
  - $\frac{\sin(x)}{(x)} \approx 1$
  - $\cos(x) \approx 1$
  - $\frac{\tan(x)}{x} \approx 1$
  - $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

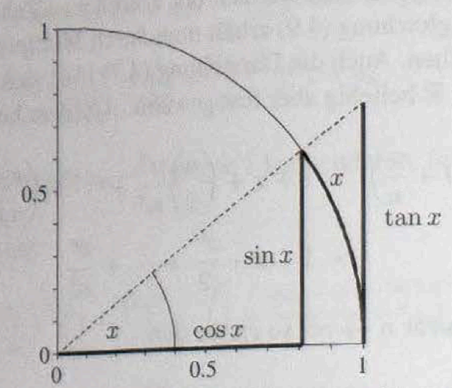
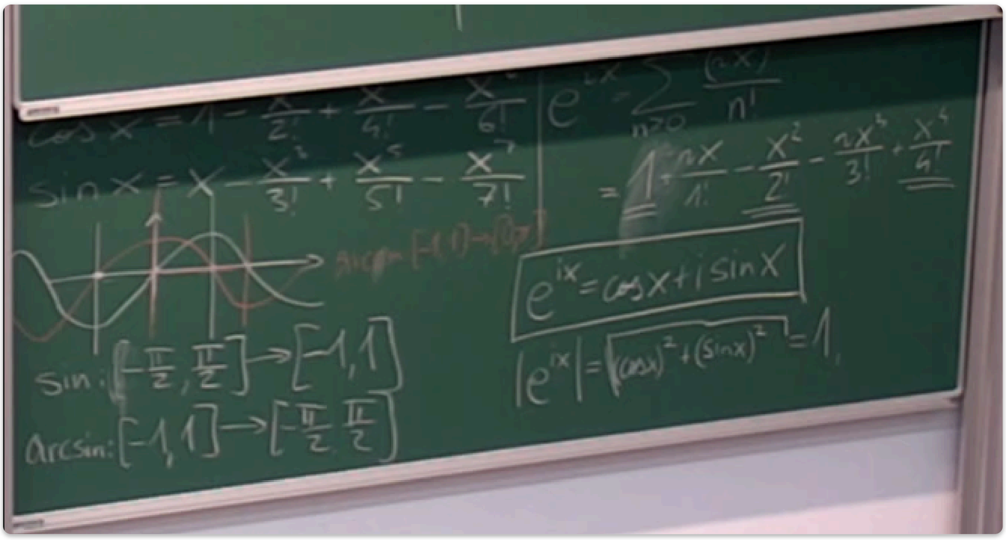


Abbildung 4.6 Definition der trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$. Der Winkel x (im Bogenmaß) ist identisch mit der Bogenlänge x.



Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen

4.5 Grenzwert und Stetigkeit

Hier wird der Grenzwertbegriff (Siehe 4.1 Folgen > 1. Definitionen und Grenzwert) für Folgen auf Funktionen übertragen.

- genaue Beschreibung vom lokalen Verhalten von Funktionen und dessen Graphen
- Funktionen in einem Linienzug zeichenbar --> stetig
- Diese anschauliche Definition in der Mathematik aber zu ungenau
- Link zur Formelsammlung: FS_4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

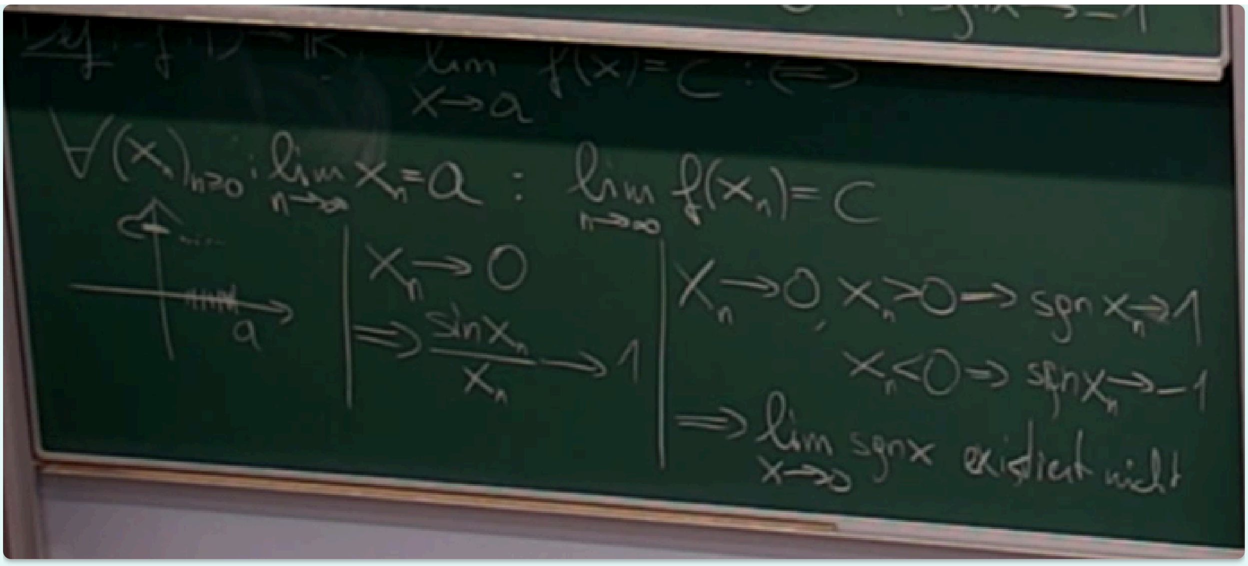
Definition für Grenzwert für Funktionen

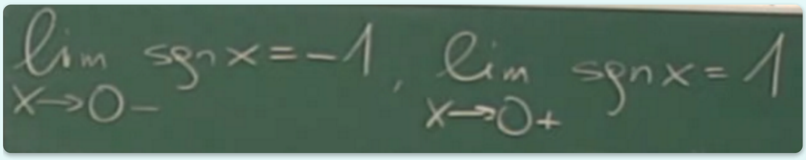
Definition 4.82

Mathematik für Informatik, p.187

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ **besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert $c (c \in \mathbb{R})$,** wenn für jede Folge $(x_n)_{n>1} (x_n \in D)$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Falls aus $x_n \rightarrow \infty$ folgt, dass $f(x_n) \rightarrow c$, dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$. In Fällen $c = -\infty$ und $c = +\infty$ spricht man von einem *uneigentlichen Grenzwert* an der Stelle x_0.

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Man schreibt auch: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = c$.





Das sgn(x) ist in dem Fall ob es ein linksseitiger oder rechtsseitiger Grenzwert ist.

Beispiel für stetige Funktion:

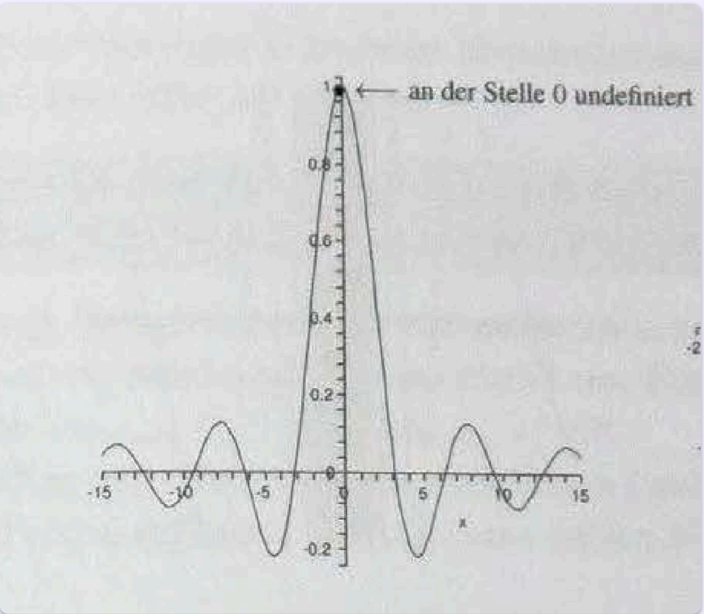
Beispiel 4.81.1

Mathematik für Informatik, p.186

(a) Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Den Graphen der Funktion zeigt Abb. 4.9. Offensichtlich ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da wir bei Einsetzen von 0 den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten. Es gibt aber offensichtlich einen Grenzwert: Wenn x sich 0 nähert, so strebt $\frac{\sin x}{x}$ gegen 1 . Auch Abb. 4.6 zeigt, dass für kleine Werte von x die Bogenlänge ungefähr so groß ist wie $\sin x$. Es scheint also natürlich, die Funktion $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ mittels der Definition $f(0) = 1$ fortzusetzen.



Beispiel für unstetige Funktion

Beispiel 4.81.2

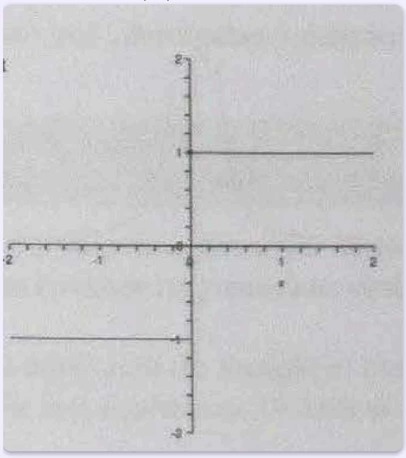
Mathematik für Informatik, p.186

(b) Anders geartet ist die Funktion (siehe Abb. 4.9, rechts)

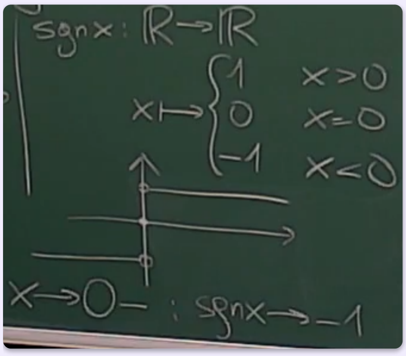
$$g : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x > 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Hier ist eine stetige Fortsetzung der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ offenbar nicht möglich, da der Grenzwert $\lim_{x \to 0} g(x)$ davon abhängt, von welcher Seite wir uns der

Stelle x_0 nähern. Die einseitigen Grenzwerte sind $\lim_{x\to 0-} g(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0+} g(x) = 1$.



Wenn die Funktion sich jetzt von links an 0 annähert kommt -1 raus und wenn sie sich von rechts annähert kommt 1 raus. in der vo hatten wir noch eine abgeänderte Version des Beispiels, mit einem Wert für 0:



Weiter Beispiele:

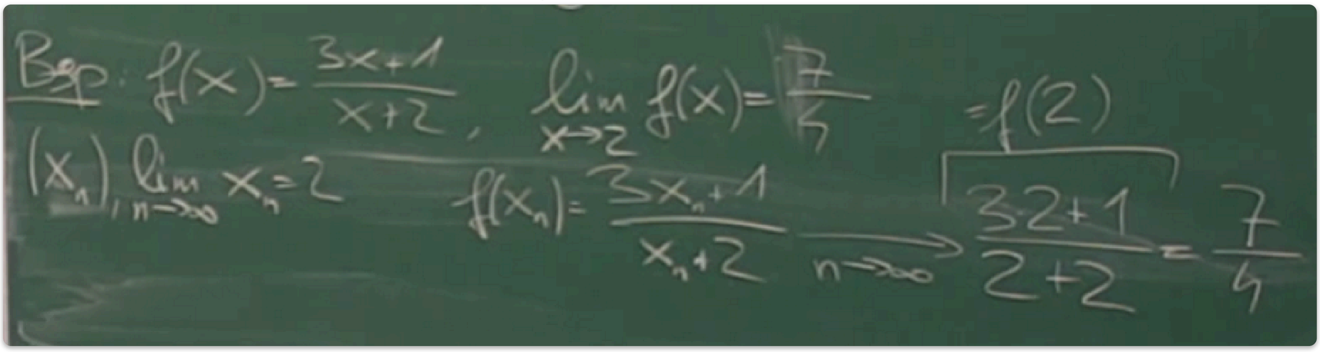
☰ Beispiel 4.83

Mathematik für Informatik, p.188

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

Man beachte, dass wir hier nicht mehr mit Folgen argumentieren müssen, sondern direkt Grenzwerte von Funktionen bestimmen können. Da Grenzwerte von Funktionen über Grenzwerte von Folgen definiert werden, sind nämlich auch alle Rechenregeln für letztere (Satz 4.14 und 4.16) direkt übertragbar.

In vo haben wir bissi anderes Beispiel gemacht:



Definition für Stetigkeit

Hier haben wir einmal eine Definition für Stetigkeit die zeigt, dass Stetigkeit nichts anderes ist, als dass man Grenzwertbildung und Funktionsauswertung miteinander vertauschen kann.

Definition 4.84

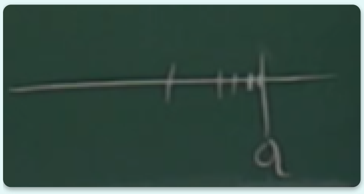
Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig an der Stelle** $x_0 \in D$, wenn $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Die Funktion f heißt stetig in D, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

In vo war Definition bissi anders formuliert:

$$\forall (x_n)_{n \geq 0} : \lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

Heißt: eine Funktion ist **folgestetig** sobald man vertauschen kann ob man den Limes von einem Punkt oder der kompletten Funktion nehmen kann.



Wir haben den Grenzwert von Funktionen und damit auch die Stetigkeit über den Grenzwert von Folgen definiert. Hier noch eine äquivalente Definition der Stetigkeit:

Definition 4.85

Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

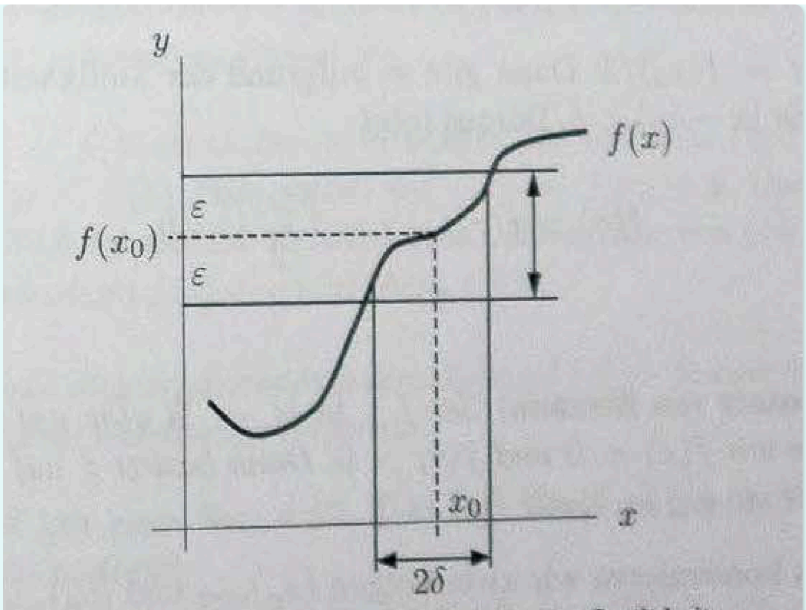


Abbildung 4.12 Zur ε-δ-Definition der Stetigkeit

Also man will ähnlich wie bei Folgen und Reihen schauen, ob bei kleinen Änderungen auf der x-Achse immernoch im Abstand ϵ sein.

- **Anschauliche Bedeutung der Stetigkeitsdefinition:**
  - Betrachtung der Funktion $f(x)$ lokal um x_0.
  - Vorgabe einer Toleranz $\varepsilon > 0$ für den Funktionswert: $f(x)$ bewegt sich in $I_1 = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.
  - **Stetigkeit:** Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Intervall $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ um das Argument x_0, sodass $f(x)$ das Intervall I_1 nicht verlässt, solange $x \in I_0$ (siehe Abb. 4.12).
  - **Intuition:** Bei einer stetigen Funktion ändert sich der Funktionswert nur geringfügig, wenn sich das Argument nur geringfügig ändert.

Definition

f folgestetig an a $<=>$ *f stetig* an a

Sätze und Beispiele zur Stetigkeit

Beispiel aus VO

Beispiel: Polynomstetigkeit

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto p(x)$, wobei $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom ist.

Behauptung: f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis:

Sei $(x_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ für ein $a\in\mathbb{R}$.

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(a)$, d.h., $\lim_{k\to\infty} p(x_k)=p(a)$.

Da $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, gilt für jede Potenz $l\geq 0$:

$$\lim_{k\to\infty} x_k^l = a^l$$

Somit gilt auch für die Linearkombination der Potenzen (das Polynom):

$$\lim_{k\to\infty} p(x_k)=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i\left(\lim_{k\to\infty} x_k^i\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i a^i = p(a)$$

Da dies für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ gilt, ist die Funktion $f(x)=p(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

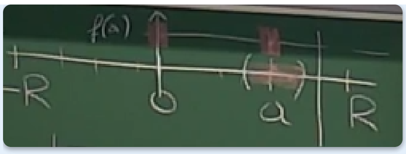
Satz 4.86

Mathematik für Informatik, p.189, Tafelbild, Tafelbild2
Sei $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine (reelle oder komplexe) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Der Konvergenzradius der Potenzreihe sei R. Dann ist f im Konvergenzkreis $|x|<R$ stetig.

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $x_0=0$. Sei $|x|<R$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n\to x$. Ferner bezeichne r eine Konstante mit $|x|\leq r<R$. Für hinreichend große n gilt dann $|x_n|\leq r$. Unter diesen Bedingungen gilt nun

$$\left|f\left(x_n\right)-f(x)\right|=\left|\sum_{m\geq 0} a_m x_n^m-\sum_{m\geq 0} a_m x^m\right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N}\left|a_m\right|\left|x_n^m-x^m\right|+\sum_{m>N}\left(\left|a_m x_n^m\right|+\left|a_m x^m\right|\right).$$



Da $|x_n| \leq r < R$ und $|x| \leq r < R$ können wir nach Satz 4.60 den in (4.14) auftretenden Reihenrest durch eine geometrische Reihe abschätzen. Es gibt also $c > 0$ und $0 < q < 1$ mit

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \sum_{m=0}^{N} |a_m| \, |x_n^m - x^m| + c\frac{q^{N+1}}{1-q}$$

Geben wir nun ein $\varepsilon > 0$ vor, dann gibt es ein N, so dass der zweite Summand kleiner $\varepsilon/2$ ist. Da wegen $x_n \to x$ auch $x_n^m \to x^m$ gilt, ist auch der erste Summand für hinreichend große n kleiner als $\varepsilon/2$, womit das $\varepsilon - \delta$-Kriterium für f (Definition 4.85) bewiesen ist.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.87

Mathematik für Informatik, p.190, Tafelbild
Eine direkte Konsequenz der Stetigkeit ist die Vorzeichenbeständigkeit.

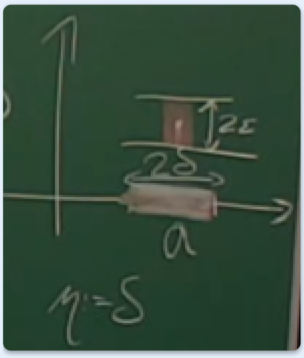
Für jede stetige Funktion *f mit $f(x_0) > 0$ gibt es eine δ-Umgebung* $U_\delta(x_0)$, so dass $f(x) > 0$, für alle $x \in U_\delta(x_0)$. *Für $f(x_0) < 0$ gilt eine analoge Aussage*.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = f(x_0)/2$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f ein δ, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. Daraus folgt

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

für $|x - x_0| < \delta$.

Intuitive Erklärung:
Wenn du an einem bestimmten Punkt (x_0) auf dieser Kurve bist und der Funktionswert dort ($f(x_0)$) positiv ist (also die Kurve oberhalb der x-Achse liegt), dann sagt der Satz, dass es in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes auch noch ein kleines Stück der Kurve geben muss, das ebenfalls oberhalb der x-Achse liegt.



Nullstellensatz (von Bolzano)

ⓘ Satz 4.88 (Nullstellensatz von Bolzano)

Mathematik für Informatik, p.190, Tafelbild, Tafelbild2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f auf $[a, b]$ **mindestens eine Nullstelle**, d.h., es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ nach folgendem Algorithmus: Sei $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Die Werte a_1 und b_1 werden in Abhängigkeit von $f_0 = f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ bestimmt:

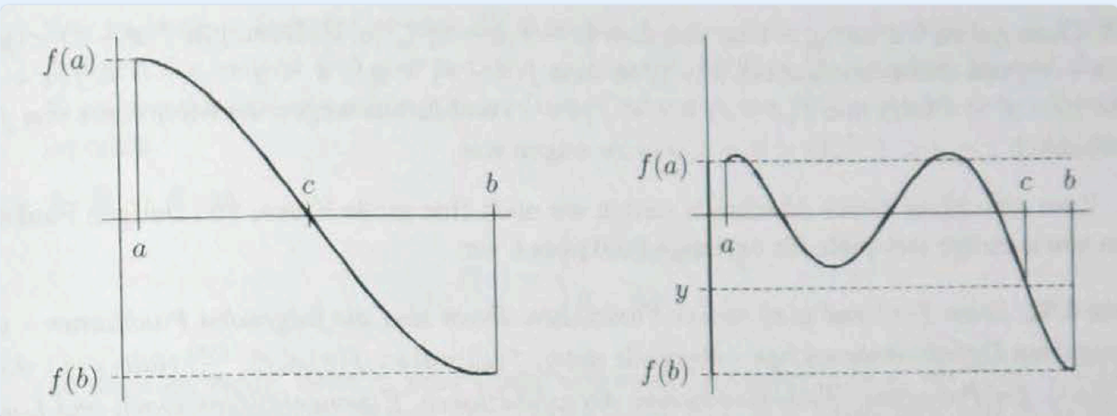
$f_0 < 0 :$ Dann setzen wir $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ und $b_1 = b_0$.

$f_0 > 0 :$ Dann setzen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

$f_0 = 0 :$ Dann haben wir die gewünschte Nullstelle und sind fertig.

Falls wir noch keine Nullstelle gefunden haben, wenden wir das obige Verfahren auf $[a_1, b_1]$ an, usw.

Auf diese Weise erhält man entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle oder zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$. Aufgrund der Konstruktion ist offensichtlich, dass $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$. Darüber hinaus sind die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, erstere ist monoton wachsend und letztere monoton fallend. Wegen $|a_n - b_n| = |a - b| \cdot 2^{-n}$ konvergieren sowohl $(a_n)_{n\geq 0}$ als auch $(b_n)_{n\geq 0}$ gegen denselben Grenzwert c. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ folgt nun aufgrund der Stetigkeit von f, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$. Wegen $f(a_n) < 0$ muss jedoch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ gelten. Analog gilt $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ und folglich $f(c) = 0$.



Zwischenwertsatz

Satz 4.89 (Zwischenwertsatz)

Mathematik für Informatik, p.191, Tafel

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ jeden Wert z wischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Beweis. Im Fall $f(a) = f(b)$ ist nichts zu beweisen. Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Ferner sei c beliebig mit $f(a) < y < f(b)$. Nun setzen wir $g(x) = f(x) - y$. Dann gilt $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Aus Satz 4.88 folgt nun die Existenz einer Nullstelle c von $g(x)$. Dieses c leistet aber bereits das Gewünschte, denn $f(c) = y$ (vgl. Abb. 4.13).

Also alle Werte die zwischen den beiden Werten einer stetigen Funktion liegen, sind auch stetig.

Weitere Sätze

Satz 4.90

Mathematik für Informatik, p.191, Tafel

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. *Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall*.

Beweis. Für $x, y \in I$ gilt nach Satz 4.89, dass alle Werte zwischen $f(x)$ und $f(y)$ in $f(I)$ liegen. $f(I)$ ist also ein Intervall.

Sei $A = \sup f(I)$. Dann existiert eine Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ mit $b_n \to A$. Wegen $b_n \in f(I)$ existieren a_n mit $f\left(a_n\right) = b_n$. $\mathrm{Da}(a_n)_{n \geq 0}$ beschränkt ist, existiert nach Satz 4.27 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \geq 0}$. Sei $a = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von f, dass
$f(a) = A$. Analoge Argumente für inf $f(I)$ ergeben schließlich die Abgeschlossenheit von $f(I)$.

Der vorige Satz beinhaltet auch Folgendes: Eine auf einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion nimmt auf I ein Maximum und ein Minimum an.

Ausgehend vom vorigen Statz folgt der hier:

Satz 4.91

Mathematik für Informatik, p.191, Tafelbild 1, Tafelbild 2

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ und ist ebenfalls stetig.

Beweis. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend. Wegen des Zwischenwertsatzes (Satz 4.89) nimmt f auf I alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, also ist $f(I) = [f(a), f(b)]$. Aufgrund der strengen Monotonie lässt sich f umkehren, und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend. Sei $y \in f(I)$, wobei wir uns auf den Fall $y \neq f(a)$ und $y \neq f(b)$ beschränken. Dann gilt $x = f^{-1}(y) \in (a, b)$. Die anderen Fälle (y am Rand des Intervalls) lassen sich ähnlich behandeln.

Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig an der Stelle y ist, also dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\bar{y} - y| < \delta \Longrightarrow \left|f^{-1}(\bar{y}) - x\right| < \varepsilon$$

gilt. Dazu geben wir uns $\varepsilon > 0$ so vor, dass $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subseteq [a, b]$. Dann gilt $f(x - \varepsilon) < y < f(x + \varepsilon)$, und daher existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x - \varepsilon) < y - \delta < y < y + \delta < f(x + \varepsilon)$$

. Aus $|\bar{y} - y| < \delta$ folgt nun $f(x - \varepsilon) < \bar{y} < f(x + \varepsilon)$ und daraus wegen der Monotonie von f^{-1} schließlich $x - \varepsilon < f^{-1}(\bar{y}) < x + \varepsilon$, was zu zeigen war!

Satz 4.92

Mathematik für Informatik, p.192

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Funktionen - auf geeigneten Definitionsbereichen - ebenfalls stetig:

- $f(x) \pm g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- $\frac{f(x)}{g(x)} (falls g(x) \neq 0)$,
- $f(g(x))$.

Da Polynome, Winkelfunktionen, Arcusfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen stetig sind, folgt daraus, dass alle elementaren Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten selbstverständlich nur dann, wenn die betreffenden Funktionen einen geeigneten Definitionsbereich haben. So ist z.B. $f + g$

nur dort definiert, wo sowohl f als auch g definiert sind.

Unstetigkeiten

Beispiel 4.93 (Unstetigkeit)

Mathematik für Informatik, p.192

(a) Die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (siehe Abb. 4.14) ist *unstetig an allen Stellen $x \in \mathbb{Z}$* und überall sonst stetig. Sie ist also **stückweise Stetig**

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (vgl. Abb. 4.11) ist im **gesamten Definitionsbereich** $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ **stetig** und im Punkt $x = 0$ **nicht definiert**. Setzen wir die Funktion auf $x = 0$ fort, z.B. mittels

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

so hat $g(x)$ eine **Unstetigkeitsstelle** bei $x = 0$.

(c) Wie im vorigen Beispiel ist auch die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ **an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.** Es handelt sich aber um eine so genannte hebbare Unstetigkeit, da man durch Erweitern des Definitionsbereichs um 0 und Definieren von $f(0) = 0$ eine stetige Funktion erhält.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig, denn in jeder Umgebung einer rationalen Zahl x, wo $f(x) = 1$ gilt, liegen auch irrationale Zahlen, also Zahlen y mit $f(y) = 0$. Umgekehrt gibt es in jeder Umgebung einer irrationalen Zahl auch rationale Zahlen.

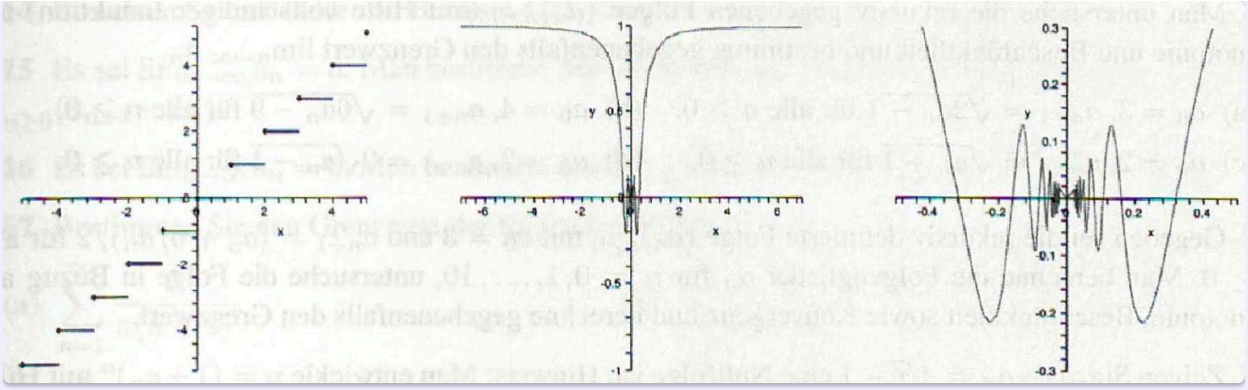


Abbildung 4.14 links: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, Mitte und rechts: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Quellen:

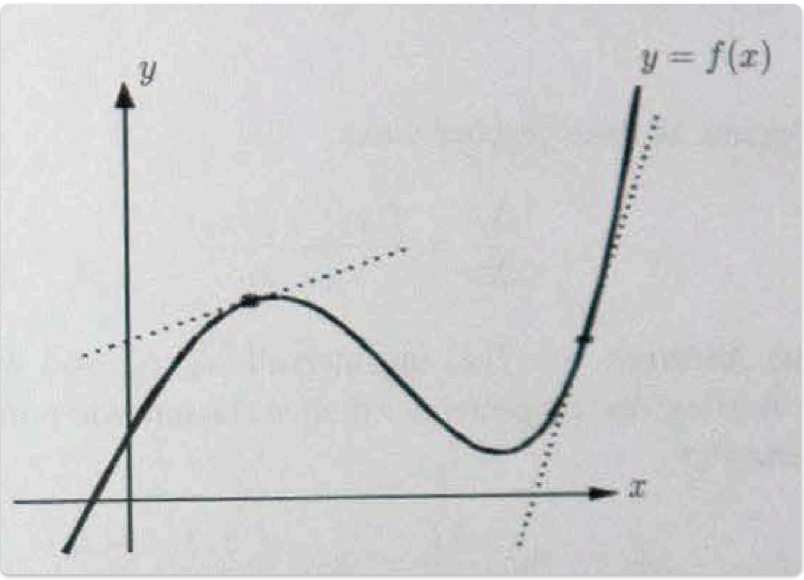
- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen

5.1 Ableitung

Einleitung

Bedeutung der Tangente

- Die Tangente beschreibt die lokale Änderung der Funktion an einem bestimmten Punkt
- Sie gibt an, wie schnell sich der Funktionswert bei einer Änderung des Arguments verändert



Anstieg der Tangente

- Der Anstieg der Tangente entspricht der Änderungsrate der Funktion an der betrachteten Stelle
- Steiler Funktionsgraph $\Rightarrow$ große Änderungsrate, d.h. eine kleine Änderung im Argument führt zu einer großen Änderung im Funktionswert
- Flacher Funktionsgraph $\Rightarrow$ kleine Änderungsrate, d.h. eine Änderung im Argument führt nur zu einer geringen Änderung des Funktionswertes

Physikalische Bedeutung

- Ist $f(t)$ der Ort eines Objekts zur Zeit t, so entspricht die Änderung von $f(t)$ der Geschwindigkeit
- Die Tangente an den Graphen von $f(t)$ gibt also die Geschwindigkeit des Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt an

Bedeutung für Approximationen

- Bei starker Vergrößerung („Hineinzoomen") sieht der Funktionsgraph lokal wie eine Gerade aus

- Die Tangente dient als lineare Approximation der Funktion in der Umgebung eines Punktes
- Vorteil: Eine Gerade ist einfacher zu handhaben als komplexere Funktionen

Definitionen

Definition Sekante / Mittleränderung / Differentialquotient

Mathematik für Informatik, p.200

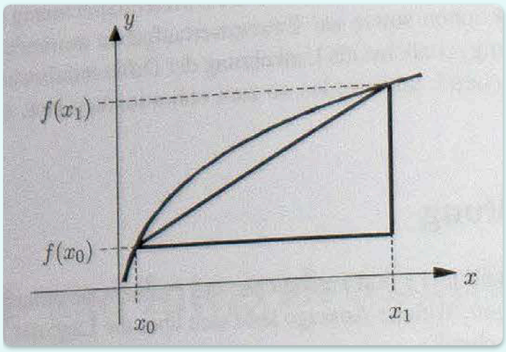
Der Anstieg der Sekante ist gegeben durch:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}$$

Das ist die mittlere Änderung von $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$ und wird Differenzenquotient genannt. Um den Anstieg der Tangente zu erhalten, lassen wir nun Δx gegen 0 gehen und berechnen den Grenzwert

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}$$

Diese Größe heißt, falls der Grenzwert existiert, Differentialquotient.



Definition 5.1

Tafelbild

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt x_0, falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert wird dann die Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt und mit $f'\left(x_0\right)$ bezeichnet. Falls f für alle $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f.

Hier wird der Differenzenquotient mit dem Limes erweitert

Beispiel zu Ableitungen von einfachen Funktionen

Beispiel 5.2 (Ableitungen einfacher Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.201, Tafelbild

(a) Konstante Funktionen $f(x) = c$. Es gilt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$ für alle x_0. Daher folgt aus $f(x) = c$, dass $f'(x) = 0$.

(b) Lineare Funktionen $f(x) = ax + b$. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

Es gilt also $f'(x) = a$. Die Ableitung von linearen Funktionen ist konstant.

(c) Für $f(x) = 2x^2 + 1$ folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2(x + x_0) = 4x_0.$$

In vo haben wir die Ableitung von $f(x) = x^3$ berechnet:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

(d) Für Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Also kurzgefasst: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
In ähnlicher Weise kann zeigen, dass die analoge Aussage auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt (siehe Übungsaufgaben)

(e) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ erfüllt

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Daher gilt zunächst

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 > 0 \\ -1 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$$

Interessant ist aber der Fall $x_0 = 0$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Da $\frac{|x|}{x}$ in jeder Umgebung um $x = 0$ sowohl die Werte -1 als auch 1 annimmt, kann der Grenzwert nicht existieren. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle $x = 0$ zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar.

Satz 5.3

Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.202

Eine Funktion, die **in x_0 differenzierbar ist, ist dort auch stetig**.

Beweis. Sei $f(x)$ in x_0 differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{0} = 0$$

Daher ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h., f ist stetig in x_0.

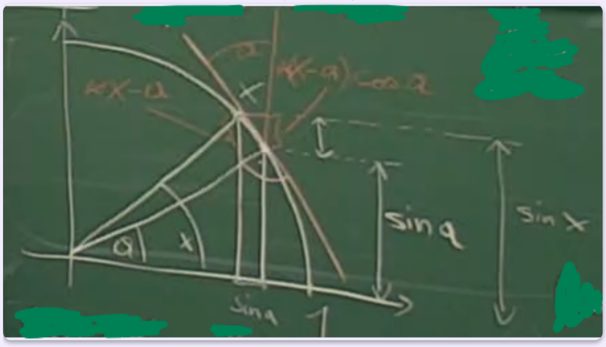
☰ Beispiel 5.4 (Ableitungen elementarer Funktionen)

Mathematik für Informatik, p.202, Tafelbild

(a) $f(x) = \sin x$: Mit Hilfe des Additionstheorems (4.11) für die Sinusfunktion, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, bekommen wir

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x_0 \cos(x - x_0) + \sin(x - x_0) \cos x_0 - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \sin x_0 \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{0 \text{ wegen } (4.13)} + \cos x_0 \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{1 \text{ wegen } (4.12)} \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher $(\sin x)' = \cos x$. Analog zeigt man $(\cos x)' = -\sin x$.



(b) Differenziert man die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, so erhält man

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0}$$

Durch Einsetzen der Exponentialreihe kann man $\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$ weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} &= \frac{\left(1 + (x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots\right) - 1}{x - x_0} \\ &= \left(1 + \frac{(x - x_0)}{2!} + \frac{(x - x_0)^2}{3!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erkennt man, dass für $x > x_0$ die Ungleichungen

$$1 \leq \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \leq \left(1 + \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots\right) = e^{x - x_0}$$

erfüllt sind. Aufgrund der Stetigkeit von e^x gilt $\lim_{x \to x_0} e^{x-x_0} = 1$, und daraus folgt $\lim_{x \to x_0+} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$. Analog zeigt man $\lim_{x \to x_0-} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$ und erhält infolge dessen $(e^x)' = e^x$.

Ableitungsregeln

Satz 5.5 (Ableitungsregeln)

Mathematik für Informatik, p.203, tafelbild, 400|Tafelbild

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(cf(x))' = cf'(x)$.

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$. Diese Regel gemeinsam mit (i) besagt, dass die Differentiation eine *lineare Abbildung* ist.

(iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Produktregel)

(iv) Falls $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(v) Sei $F(x) = f(g(x))$ eine zusammengesetzte Funktion. Dann gilt

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x). \qquad (\text{ Kettenregel })$$

Hier wird f als äußere Funktion, g als innere Funktion bezeichnet. Die Kettenregel besagt demnach: Äußere Funktion ableiten und mit der inneren Ableitung (genauer: der Ableitung der inneren Funktion) multiplizieren.

In der Leibniz'schen Schreibweise lässt sich diese Regel besonders kurz schreiben: Fasst man nämlich $g(x)$ als Argument von f auf, dann erhält man

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

(vi) Falls $f : D \to f(D)$ invertierbar ist und die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt, dann gilt für alle $y \in f(D)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

In der Leibniz'schen Schreibweise ist diese Regel besonders einprägsam: Gilt $f(x) = y$, so lässt sich $f'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$ schreiben. Für die Umkehrfunktion gilt aber $x = f^{-1}(y)$ und bei Differentiation nach y schreibt man dann $\frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Die obige Regel lautet nun

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beweis von Produktregel

Beweis Produktregel

Mathematik für Informatik, p.203

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind trivial, weshalb wir uns gleich der Produktregel zuwenden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x)}_{g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)} .
\end{aligned}
$$

Beweis von Kettenregel

Beweis Kettenregel

Mathematik für Informatik, p.204

Zum Beweis der Kettenregel betrachten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{g(x) - g\left(x_0\right)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g\left(x_0\right)}{x - x_0}.$$

Der zweite Faktor ist definitionsgemäß $g'\left(x_0\right)$. Da g differenzierbar und folglich auch stetig ist, folgt $\lim_{x \to x_0} g(x) = g\left(x_0\right)$. Daher ist der erste Faktor gleich $f'\left(g\left(x_0\right)\right)$ wie behauptet. Zu beachten ist, dass diese Herleitung $g(x) \neq g\left(x_0\right)$ voraussetzt. Im Fall $g(x) = g\left(x_0\right)$ verschwindet aber der Differenzenquotient in (5.2), so dass diese Fälle bei der Grenzwertbildung in (5.2) keine Rolle spielen.

Die Quotientenregel beweist man durch Anwendung der Produktregel auf $f(x) \frac{1}{g(x)}$, wobei auf den zweiten Faktor die Kettenregel angewendet werden muss (mit $\frac{1}{g(x)} = h(g(x))$ und $h(x) = \frac{1}{x}$, siehe auch Beispiel 5.2d).

Um (vi) zu beweisen, setzen wir $f(x) = y$ und $f\left(x_0\right) = y_0$. Nun rufen wir uns in Erinnerung, dass f stetig ist (wegen Satz 5.3) und daher f^{-1} ebenso (wegen Satz 4.91). Somit gilt: Wenn y gegen y_0 konvergiert, dann auch $x \to x_0$. Das impliziert

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\left(y_0\right)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f\left(x_0\right)} = \frac{1}{f'\left(x_0\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y_0\right)\right)}$$

Eine Beweisführung mit Hilfe der Kettenregel (Differentiation beider Seiten der Gleichung $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ nach y) setzt die Differenzierbarkeit von f^{-1} voraus, die man dann gesondert beweisen müsste.

Beweis von Quotientenregel

Beweis der Quotientenregel

zz:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Herleitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Produktregel (PR):

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Anwendung der Kettenregel auf $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (g(x)^{-1})'$:

$$\begin{aligned} &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)\right) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\right) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Gleichnamig machen der Brüche:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Zusammenfassen:

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Ableitung elementarer Funktionen

Beispiel 5.6 Ableitung elementarer Funktionen

Mathematik für Informatik, p.204, Tafelbild1, Tafelbild2

(a) Aus $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5$ folgt nach Anwendung der Ableitungsregel (ii) und Ableiten der Potenzfunktionen $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$

(b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^x$. Anwendung der Produktregel ergibt $f'(x) = 2xe^x + \left(1 + x^2\right)e^x = \left(1 + 2x + x^2\right)e^x = (1 + x)^2 e^x$

(c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

(d) Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Mit Ableitungsregel (vi) und $(e^x)' = e^x$ erhalten wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(e) Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Hier lässt sich die Funktion umschreiben zu $f(x) = e^{\alpha \ln x}$ und nun nach der Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Die bereits bekannte Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten ist also für alle Exponenten gültig.

(f) Die Funktion $f(x) = \sin\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$ ist mehrfach geschachtelt. Es gilt $f(x) = f_1\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right)$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ und $f_3(x) = 1 + x^2$. Folglich haben wir $f_1'(x) = \cos x$, $f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f_3'(x) = 2x$. Die Ableitung von f ermittelt man nun mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = f_1'\left((f_2 \circ f_3)(x)\right) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = f_1'\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right) \cdot f_2'\left(f_3(x)\right) \cdot f_3'(x)$$

Das ergibt

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right).$$

(g) $f(x) = \arctan x$. Setzen wir $y = f(x)$, dann folgt $x = \tan y$. Weiters gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Kurzfassung der grundlegenden Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
ax^k	$(ak)x^{k-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Höhere Ableitungen

Mathematik für Informatik, p.205

Bis jetzt haben wir in diesem Abschnitt nur erste Ableitungen betrachtet. Falls jedoch die Ableitung einer Funktion wiederum differenzierbar ist, so lassen sich auch höhere Ableitungen bestimmen.

Definition 5.7 (n-te Ableitung)

Eine Funktion $f(x)$ heißt an einer Stelle $x_0 n$-mal differenzierbar, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ existiert, die rekursiv durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(1)}(x) = f'(x)$$

definiert ist. Ist $f^{(n)}$ auch stetig in x_0, dann heißt $f(x) n$-mal stetig differenzierbar in x_0.

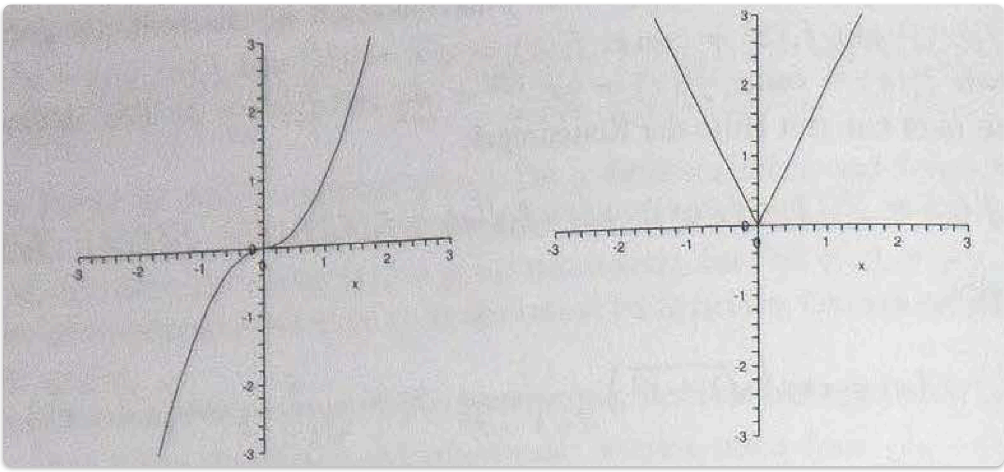
Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable

5.2 Satz von Taylor

1. Mittelwertsatzt

Differentialrechnung wird auch verwendet um Aussagen über Gestalten von Graphen von Funktionen zu gewinnen. Beispielsweise kann man hier anhand der Ableitung die Steigung ablesen von der Stammfunktion.



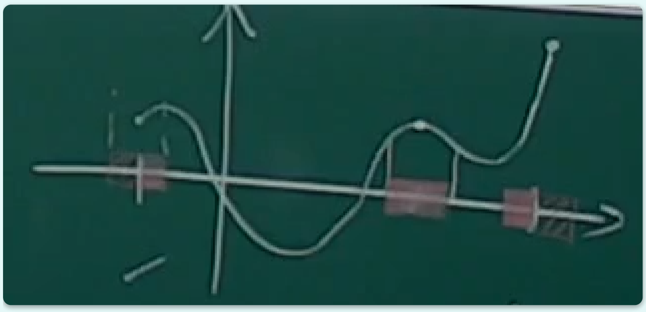
Maximum und Minimum

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild1, Tafelbild2

Definition 5.10

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein relatives Maximum (oder lokales Maximum), wenn es eine Umgebung $U_{\varepsilon}(x_0)$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_{\varepsilon}(x_0) \cap D$ gilt.
Also wenn ich im Definitionsbereich bin und ich in einem hinreichend kleinen Intervall x_0 das größte Element ist.

Die Stelle x_0 heißt absolutes Maximum, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x in D gilt. Analog sind relative und absolute Minima definiert. Minima und Maxima nent man auch Extrema oder Extremwerte von f.



Wenn eine differenzierbare Funktion ein lokales Extremum besitzt, welches innerhalb (und nicht am Rande) des Definitionsbereichs liegt, hat an der Stelle eine waagrechte Tangente.

Definition 5.11 (Erweitert durch vo)

Definition 5.11 (Erweitert)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- Das Innere von D, bezeichnet als $\mathring{D}$, ist die Menge aller Punkte $x \in D$, für die es eine offene Umgebung $U_{\varepsilon}(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ gibt, die vollständig in D enthalten ist:

  $$\mathring{D} = \{x \in D \mid \exists \varepsilon > 0 : U_{\varepsilon}(x) \subseteq D\}$$

  Ist speziell $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so ist dessen Inneres $\mathring{I} = (a, b)$. Die Elemente von $\mathring{D}$ heißen innere Punkte.
- Der Rand von D, bezeichnet als ∂D, ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die jede offene Umgebung $U_{\varepsilon}(x)$ sowohl Punkte in D als auch Punkte außerhalb von D enthält:

  $$\partial D = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : U_{\varepsilon}(x) \cap D \neq \emptyset \wedge U_{\varepsilon}(x) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset\}$$

- Der Abschluss von D, bezeichnet als $\overline{D}$, ist die Vereinigung der Menge D mit ihrem Rand ∂D:

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

  Es gilt auch $\overline{D} = \mathring{D} \cup \partial D$.
- Eine Menge D heißt abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt: $D = \overline{D}$.
- Eine Menge D heißt offen, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt: $D = \mathring{D}$.

Satz 5.12

Mathematik für Informatik, p.206, Tafelbild

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x_0 *ein lokales Extremum* im Inneren von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Wichtige Bemerkung dafür:

- Nicht anwendbar am Rand von D
- Extrema am Rand von D nicht definiert
- --> man muss den Rand gesondert untersuchen

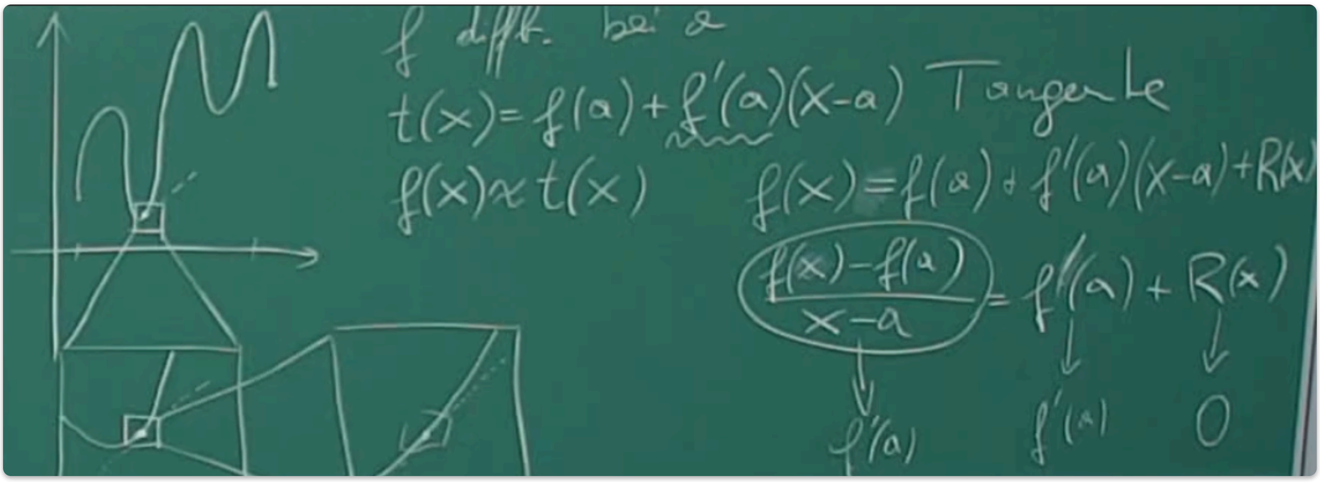
Beweis. O.B.d.A. sei x_0 ein lokales Minimum. Es gilt also $f(x) - f(x_0) \geq 0$ für alle x in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$. Aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ folgt, dass die einseitigen Grenzwerte für $x \rightarrow x_0+$ und $x \rightarrow x_0$ - existieren und übereinstimmen. Daher haben wir einerseits

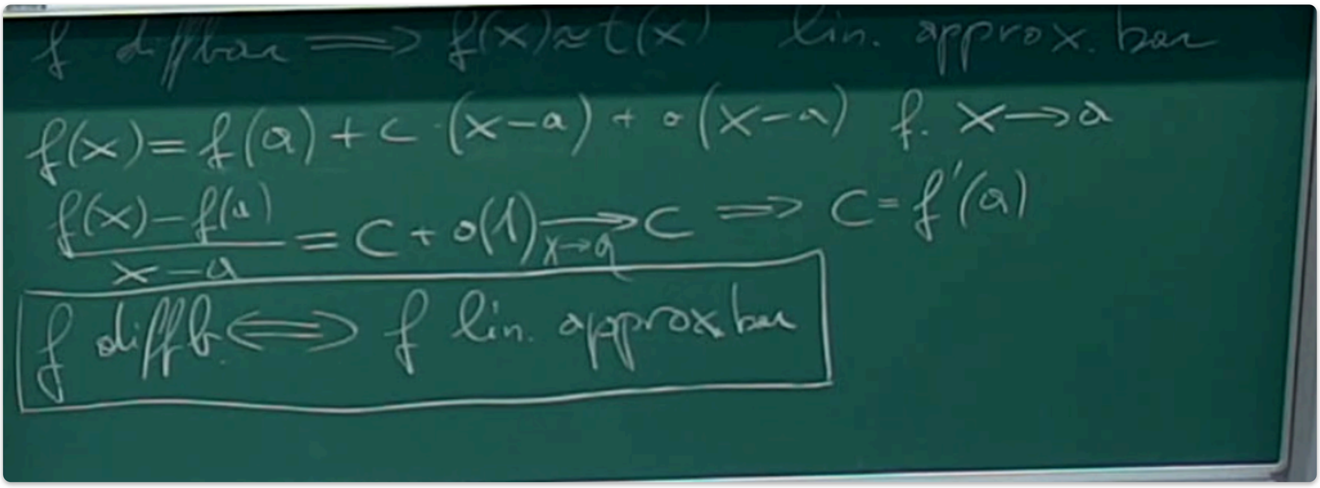
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und andererseits

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.


f diffb. bei a
t(x) = f(a) + f'(a)(x-a) Tangente
f(x) ≈ t(x)
f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)
(f(x) - f(a))/(x-a) = f'(a) + R(x)
f'(a)
f'(a)
0


f diffbar ⟹ f(x) ≈ t(x) lin. approx. bar
f(x) = f(a) + c·(x-a) + o(x-a) f. x → a
(f(x) - f(a))/(x-a) = c + o(1) → c ⟹ c = f'(a)
x → a
f diffb ⟺ f lin. approx.bar

Info

Tafelbild

Ableitung und mittlere Änderung

Lokale Änderung (Ableitung)

Die Ableitung von f an der Stelle a, $f'(a)$, ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dies beschreibt die lokale Änderungsrate der Funktion f am Punkt a.

Mittlere Änderung

Für ein Intervall $I = [c, d]$ ist die mittlere Änderungsrate der Funktion f gegeben durch:

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Dies entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(c, f(c))$ und $(d, f(d))$ auf dem Graphen von f.

Grafische Darstellung

- Die Ableitung $f'(a)$ entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.
- Die mittlere Änderung entspricht der Steigung der Sekante durch zwei Punkte auf dem Graphen.

Mittelwertsatz

Satz 5.14 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

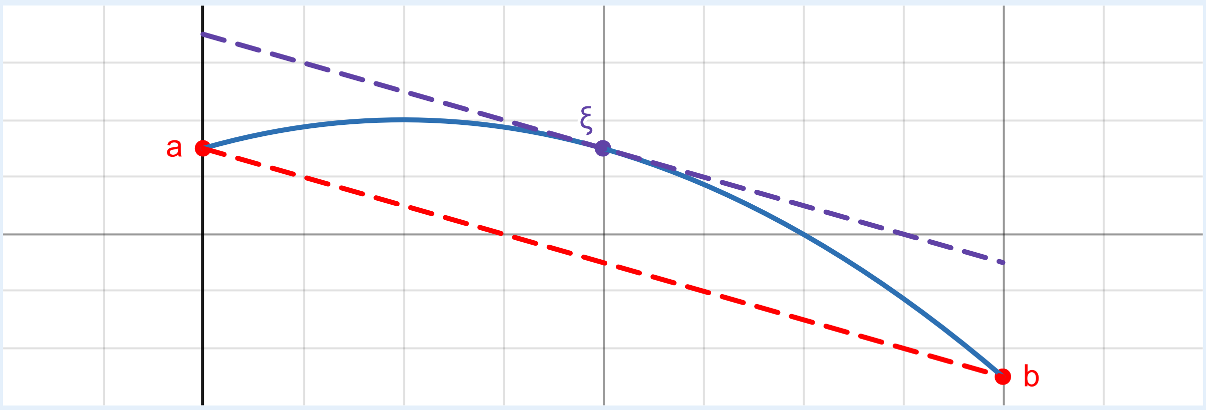
Beweis. Falls f eine lineare Funktion $f(x) = cx + d$ ist (der Graph also eine Gerade ist), dann ist die Behauptung trivial. Andernfalls ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

nicht konstant, aber offensichtlich stetig in $[a, b]$. Daher besitzt sie nach Satz 4.90 ein Maximum und ein Minimum in $[a, b]$. Wegen $F(a) = F(b) = f(a)$ muss eines dieser beiden Extrema im Inneren der Intervalls liegen. Wir nennen die entsprechende Stelle ξ. Aus Satz 5.12 folgt nun, dass $F'(\xi) = 0$. Anwendung der Differentiationsregeln (Satz 5.5) ergibt

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.



Satz 5.16

Mathematik für Informatik, p.208, Tafelbild

Seien f und g zwei auf einem Intervall I stetige und in dessen Innerem $\mathring{I}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in I$. Dann ist die Differenz $f(x) - g(x)$ auf I konstant, d.h., f und g unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

Beweis. Wir zeichnen einen Punkt $x_0 \in I$ aus und setzen $F(x) = f(x) - g(x)$. Dann lässt sich wegen des Mittelwertsatzes für jedes $x \in I$ ein $\xi \in \stackrel{\circ}{I}$ finden, so dass $F(x) = F\left(x_0\right) + F'(\xi)\left(x - x_0\right)$. Daher folgt aus $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, dass $F(x) = F\left(x_0\right)$, also F konstant ist.

Bis hierhin sollte der Stoff des 1. Übungstests gehen. Alles danach sollte für den 1. Test irrelevant sein, ist vollständigkeitshalber trotzdem noch in dem File.

---

2. Taylorreihen

Lineare Approximation

- Gleichung (5.3): Tangente als beste lineare Approximation von $f(x)$ nahe x_0
- Lineare Approximation entspricht einem Polynom 1. Ordnung

Motivation für bessere Approximationen

- Lineare Approximation genügt nicht immer für hohe Genauigkeit
- Bessere Approximationen können nicht linear sein, sollen aber möglichst einfach bleiben
- Naheliegende Wahl: Polynome höherer Ordnung

Polynomdarstellung

- Gegeben: $f(x)$ ist lokal durch ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad n annäherbar
- Darstellung um x_0:
  $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$

Bestimmung der Koeffizienten

Beispiel

Mathematik für Informatik, p.209

- Eine Möglichkeit: Lösen eines linearen Gleichungssystems
- Alternativ: Differentialrechnung
  - Durch wiederholtes Differenzieren können die Koeffizienten a_k berechnet werden

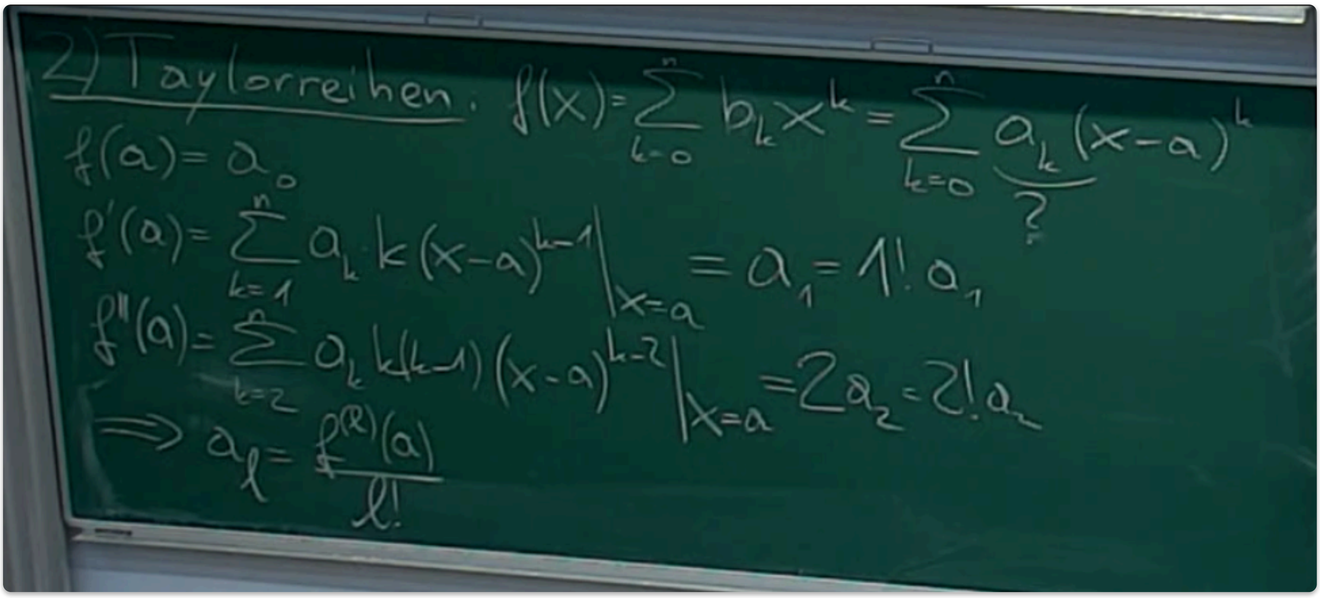
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \ldots \\ f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4(x-x_0) + \ldots \end{aligned}$$

woraus nach Einsetzen von $x = x_0$ und Umformen

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

folgt.

Bei Funktionen, die eine Darstellung als Potenzreihe besitzen, können wir in ähnlicher Weise vorgehen.


2) Taylorreihen: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{?} (x-a)^k$
$f(a)=a_0$
$f'(a)=\sum_{k=1}^{n} a_k\, k\,(x-a)^{k-1}\Big|_{x=a} = a_1 = 1!\, a_1$
$f''(a)=\sum_{k=2}^{n} a_k\, k(k-1)\,(x-a)^{k-2}\Big|_{x=a} = 2a_2 = 2!\, a_2$
$\Longrightarrow a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$

Satz 5.17

Mathematik für Informatik, p.209, Tafelbild

Sei $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist $f(x)$ im Konvergenzbereich differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren, d.h., für alle x mit $|x-x_0| < R$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $x_0 = 0$ (andernfalls setzt man $\bar{x} = x - x_0$ und benützt die Kettenregel). Seien nun $|x|, |y| < R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{y^n - x^n}{y-x} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Da die Reihe auf der rechten Seite von (5.4) und die Reihe von $f(x)$ denselben Konvergenzradius haben, folgt aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium für Reihen und der Tatsache, dass Potenzreihen im Konvergenzbereich absolut konvergieren, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $\sum_{n>N} n\,|a_n| \cdot |x|^n < \varepsilon/2$. Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $g(x) = \sum_{n\geq 0} n\,|a_n| \cdot |x|^n$ (siehe Satz 4.86) gilt auch $\sum_{n>N} n\,|a_n| \cdot |y|^n < \varepsilon$ für alle $y \in U_\delta(x)$ (mit δ hinreichend klein). Daher spalten wir die Summe (5.5) auf und bekommen (für $y \in U_\delta(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = &\sum_{n=0}^{N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right) \\ &+ \sum_{n>N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right) \end{aligned}$$

wobei

$$\left|\sum_{n>N} a_n \left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right)\right| \leq \sum_{n>N} na_n \max\left(|x|^n, |y|^n\right) < \varepsilon$$

Daher liefert der Grenzübergang $y \to x$ schließlich

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N} na_n x^{n-1} + R_N$$

mit $|R_N| \leq \varepsilon$.

Definition der Taylorreihe

5.20 Die Reihe

Mathematik für Informatik, p.211, Tafelbild

$$f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2}\left(x-x_0\right)^2+\frac{f'''\left(x_0\right)}{3!}\left(x-x_0\right)^3+\dots$$
$$=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

heißt Taylorreihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt (mit Anschlussstelle) x_0. Der Sonderfall $x_0=0$ wird auch McLaurinreihe genannt.

Bricht man die Taylorreihe nach n Gliedern ab, so erhält man

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+R_n$$

Dies nent man die Taylor'sche Formel mit Restglied R_n. Die Summe vor dem Restglied wird Taylorpolynom n-ter Ordnung genannt. R_n ist der Abbruchfehler und selbstverständlich von n, x und x_0 abhängig.

Satz von Taylor

Satz 5.21 (**Satz von Taylor**)

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel

Sei f auf dem Intervall $I=[x_0,x]$ (bzw. $[x,x_0]$)n-mal stetig differenzierbar und im Inneren $\mathring{I}$ von $I(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert eine Zahl $\xi\in\mathring{I}$, so dass

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

Der Term $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ heißt Restglied von Lagrange. Falls f unendlich oft stetig differenzierbar ist, so ist auch die Taylorreihe von f definiert. Die Taylorreihe stimmt genau dann mit der Funktion $f(x)$ überein, wenn $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Funktionen, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und deren Ableitungen nicht zu schnell wachsen, beliebig genau durch Polynome approximieren.

Beispiele für die Taylorentwicklungen

Beispiel 5.22 Beispiele für Taylorentwicklungen.

Mathematik für Informatik, p.211, Tafel1, tafel2, tafel3, tafel4, Tafel5

(a)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n. Daher erhalten wir wegen $e^0 = 1$ die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Analog lassen sich die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ bestimmen. Abbrechen der Exponentialreihe nach dem n-ten Glied führt auf das Restglied $R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ mit $0 < \xi < x$. Der Fehler ist also durch $\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ beschränkt. Für jedes feste x gilt somit $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ (vgl. Aufgabe 4.21), d.h., die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$. Wir wissen bereits, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Daraus folgt $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, und Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

mit $0 < \xi < x$. Das Restglied lässt sich für $0 \le x \le 1$ durch

$$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \le \frac{1}{n+1}$$

abschätzen. Man kann zeigen, dass das Restglied sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$, also im gesamten komplexen Konvergenzbereich der Reihe, gegen 0 konvergiert. Dazu sind aber andere Darstellungen des Restglieds (z.B. das so genannte Cauchy'sche Restglied) nötig, die wir in diesem Buch nicht behandeln. Die Konvergenz der Taylorreihe gegen $f(x)$ lässt sich auch folgendermaßen zeigen: Sei $g(x) = \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}x^n/n$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Potenzreihe für $|x| < 1$, und Anwendung von Satz 5.17 ergibt (unter Benützung der Formel für die Summe der geometrischen Reihe aus Beispiel 4.37)

$$g'(x) = \sum_{n\ge0}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$

Aus Satz 5.16 folgt nun, dass $f(x) - g(x) = c$. Die Konstante c kann man ganz leicht berechnen: Da $f(0) - g(0) = c$ gelten muss, folgt $c = 0$.

Zusammenfassend gilt also für $|x| < 1$ und wegen des Abel'schen Grenzwertsatzes (Satz 5.19) auch für $x = 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Für $x = 1$ erhält man die bereits in Kapitel 4 (Beispiel 4.33) erwähnte Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

(c)

Allgemein stellt die binomische Reihe (siehe Beispiel 4.58) die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dar. Differenzieren ergibt nämlich $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Auch hier lässt sich zeigen, dass das Restglied $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ auf dem gesamten Konvergenzbereich der binomischen Reihe gegen 0 konvergiert. Damit gilt für $|x| < 1$ die Darstellung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(d)

Nicht jede Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, besitzt eine Potenzreihendarstellung. Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen an der Stelle 0 verschwinden. Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 lautet daher $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ und stimmt offensichtlich nur im Punkt $x = 0$ mit $f(x)$ überein.

3 Monotonie und die 1. Ableitung

Dank Mittelwertsatz und Taylor Satz lassen sich weitere Sätze über Gestalt des Graphens von einer Funktion herleiten:

Satz 5.23

Mathematik für Informatik, p.213

Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $f(x)$ ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf I, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$. Falls die Ableitung auf I die strikte Ungleichung erfült, so ist $f(x)$ auf I streng monoton.

Beweis. Da beide Fälle analog zu beweisen sind, sei o.B.d.A. $f(x)$ monoton wachsend. Dann gilt für $x<y$ definitionsgemäß $f(x) \leq f(y)$. Sei nun $x_0 \in I$.

Aufgrund der Differenzierbarkeit von f genügt es, den rechtsseitigen Grenzwert $x \rightarrow x_0+$ zu betrachten. Hier ist $x>x_0$. Daher gilt

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \geq 0$$

da sowohl Zähler als auch Nenner des Differenzenquotienten positiv sind.

Umkehrung: Gelte nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Wir wählen $x, y \in I$ beliebig, so dass $x<y$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Zahl ξ mit $x<\xi<y$, die

$$0 \leq f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

erfüllt. Daraus folgt aber $f(x) \leq f(y)$ und im Falle der strikten Ungleichung sogar $f(x)<f(y)$.

vo: sem_2/ANA/vo/5. Differenzialrechnung/attachments/Pasted image 20250414115759.png

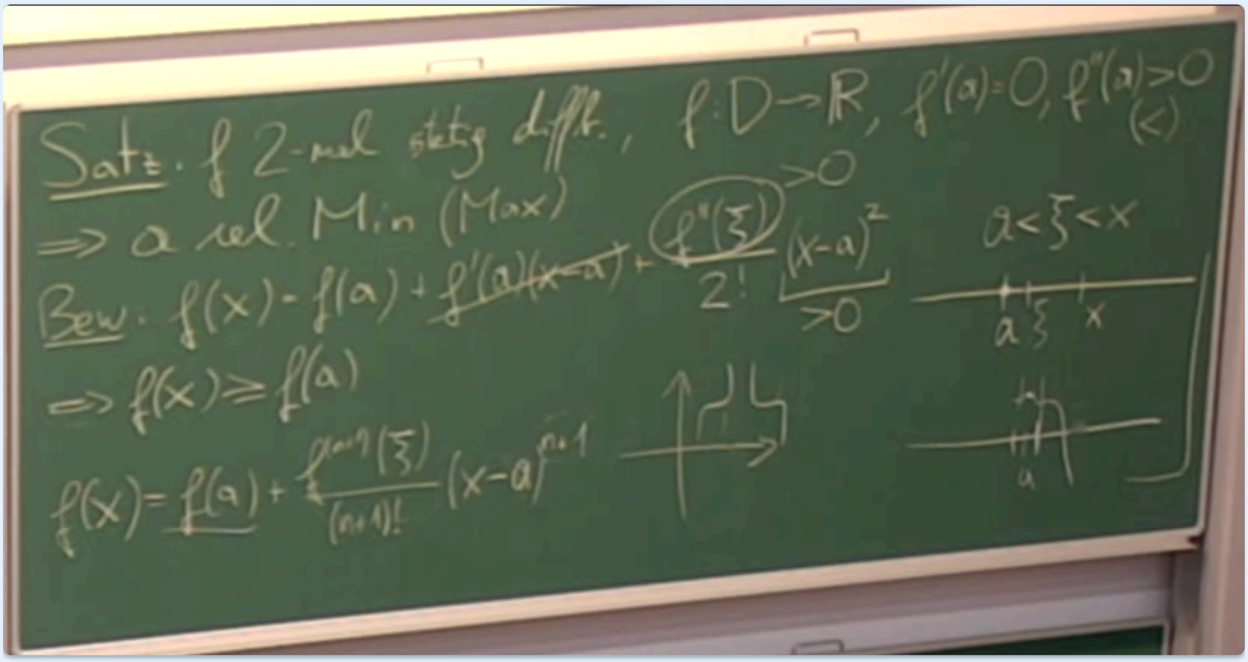
Satz 5.25

Mathematik für Informatik, p.214
Sei f zweimal stetig differenzierbar und $f'\left(x_0\right)=0$. Dann gilt: $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, falls $f''\left(x_0\right)<0$, und ein relatives Minimum, falls $f''\left(x_0\right)>0$.

Beweis. Sei $f''\left(x_0\right)<0$. Ein relatives Maximum liegt vor, wenn für x in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ von x_0 gilt: $f(x) \leq f\left(x_0\right)$. Wir approximieren $f(x)$ in $U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor. Da $f''\left(x_0\right)<0$ und f'' stetig ist, folgt aus Satz 4.87, dass ε so klein gewählt werden kann, dass $f''(\xi)<0$ für alle $\xi \in U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ gültig ist. Für $x \in U_{\varepsilon}\left(x_0\right)$ und ξ zwischen x_0 und x folgt daraus

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{<0}\underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} \leq f(x_0)$$

wie behauptet.



4. Die zweite Ableitung

Wie die erste Ableitung hat auch die 2. Ableitung eine geometrische Interpretation. Sie ist das Maß für die Krümmung des Funktionsgraphen.

Definition 5.28 konvex/konkav

Mathematik für Informatik, p.216

Definition 5.28 Eine Funktion f heißt auf einem Intervall I konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt: $f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Gilt sogar $f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$, so heißt f strikt konvex. Falls $f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$ (bzw. die strikte Ungleichung) für $0 < \lambda < 1$ gilt, so nennt man f konkav (bzw. strikt konkav).

Eine Funktion ist konvex, wenn ihr Graph bei Betrachtung von unten konvex aussieht.

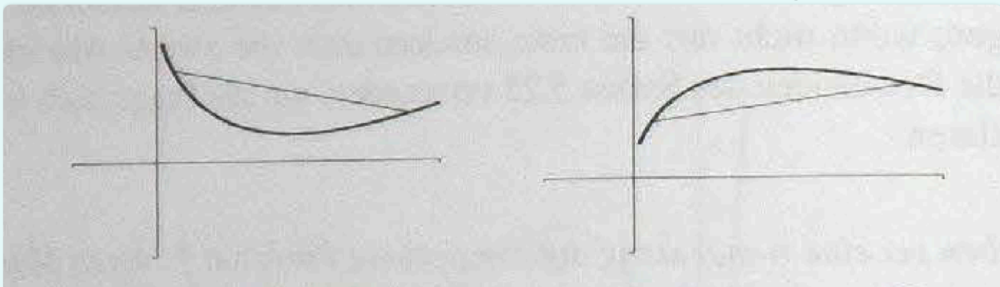


Abbildung 5.8 Konvexe (links) und konkave Funktion (rechts)

Satz 5.29

Mathematik für Informatik, p.216, Tafel1, Tafel2, Tafel3, Tafel4

Sei f auf dem Intervall I stetig und im Inneren $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (bzw. konkav) auf I, wenn f' auf $\mathring{I}$ monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Strikte Konvexität (bzw. Konkavität) gilt genau dann, wenn f' streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Beweis. Da f genau dann konkav ist, wenn $-f$ konvex ist, genügt es, den Satz hinsichtlich der Konvexität von f zu zeigen. Nehmen wir zunächst an, dass f' monoton wachsend sei. Seien $x, y \in I$ mit $x < y, 0 < \lambda < 1$ und $z = x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Wir müssen zeigen, dass $f(z) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$. Diese Ungleichung lässt sich umschreiben zu

$$f(z) = (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$
$$\iff (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) \leq \lambda(f(y) - f(z)).$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren ξ und η mit $f(z) - f(x) = (z - x)f'(\xi)$ und $f(y) - f(z) = (y - z)f'(\eta)$, wobei $x < \xi < z < \eta < y$. Damit ist (5.7) äquivalent zu

$(1-\lambda)(z-x)f'(\xi) \leq \lambda(y-z)f'(\eta)$. Es gilt nun

$$(1-\lambda)(z-x) = (1-\lambda)\lambda(y-x) = \lambda(y-z)$$

und überdies wegen $\xi < \eta$ und der Monotonie von f' auch $f'(\xi) \leq f'(\eta)$. Damit ist die Konvexität von f nachgewiesen. Im Fall $f'(\xi) < f'(\eta)$ folgt unmittelbar die strikte Konvexität.

Sei umgekehrt f konvex und x, y, z, λ wie oben. Einerseits gilt

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda(y-x)}$$

andererseits aufgrund der Konvexität von f

$$\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Dies impliziert $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Indem man nun den Fall $\lambda \to 1$ betrachtet, gewinnt man in analoger Weise die Abschätzung $f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ und damit $f'(x) \leq f'(y)$. Dass strikte Konvexität die strenge Monotonie von f' zur Folge hat, ist nun offensichtlich.

5. Regel von de l' Hospital

Regel von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital wird immer dann angewandt, wenn bei einer Grenzwertberechnung die unbestimmten Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten. Wichtig dabei ist, dass f, g im Intervall (a, b) stetig differenzierbar sind und es gilt: $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; mit \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \; bzw. \infty$$

In diesem Fall können wir beide Funktionen einzeln ableiten und den Grenzwert mit der Ableitung berechnen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Grund, wieso wir das dürfen, liegt im allgemeinen Mittelwertsatz.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mathematik für Informatik, p.219

Satz 5.35 (Regel von de l'Hospital)

Seien die Funktionen f und g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Inneren (a, b). Weiters sei $x_0 \in [a, b]$ und gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ferner sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (bzw. der einseitige Grenzwert, falls $x_0 = a$ oder $x_0 = b$). Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis. Die Aussage folgt fast unmittelbar aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz. Es gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit $x_0 < \xi < x$ (bzw. $x < \xi < x_0$). Setzen wir $\xi = \xi(x)$, dann folgt aus $x \to x_0$ auch $\xi \to x_0$. Daher gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und das entspricht genau der Behauptung.

Bemerkung: Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Regel von de l'Hospital auch in noch allgemeineren Situationen gültig ist. Weiters gelten analoge Aussagen zu Satz 5.35 für $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ und für $x_0 = \pm\infty$.

Beispiel 5.36 (Anwendung der Regel von de l'Hospital)

Tafel1, Tafel2

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$: Hier erhalten wir zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Daher ist (5.8) anwendbar. Differentiation von Zähler und Nenner führt auf $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$: Hier kann die Regel von de l'Hospital zweimal hintereinander angewendet werden. Wir erhalten $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$: Hier erhalten wir die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Eine hinreichend häufige Anwendung von (5.8) liefert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{n! x^0}{e^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion wächst also (für $x \to \infty$) stärker als jede Potenz von x.

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ mit $\alpha > 0$: Anwendung von (5.8) ergibt

Beweis folgt aus dem Mittelwertsatz

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 5. Differential und Integralrechnung in einer Variable