4.4 Elementare Funktionen

Link zur Formelsammlung: FS_4.4 Elementare Funktionen

Einfache Eigenschaften

Streng monoton fallend bzw. steigend

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to D$ ist streng monoton fallend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Umgekehrt heißt die Funktion streng monoton steigend, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Eine Funktion kann auch nur auf einem Intervall $I \subseteq D$ streng monoton steigend bzw. fallend definiert werden.

Bijektivität und Umkehrfunktion

Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so folgt auch automatisch die Bijektivität und es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt die gleichen Eigenschaften bezüglich der Monotonie.

Potenzen mit reellen Exponenten

Bei Potenzen x^α mit reellen Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ kann α als Grenzwert einer Folge a_n angeschrieben werden.

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Somit übertragen sich alle Rechenregeln auch auf das Rechnen mit reellen Exponenten.

Polynomfunktionen

Mathematik für Informatik, p.175

Beispiel 4.64

(a) Polynomfunktionen sind Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, d.h., die Abbildungsvorschrift ist ein Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten. Die Graphen einiger Beispiele finden sich in Abb. 4.2.

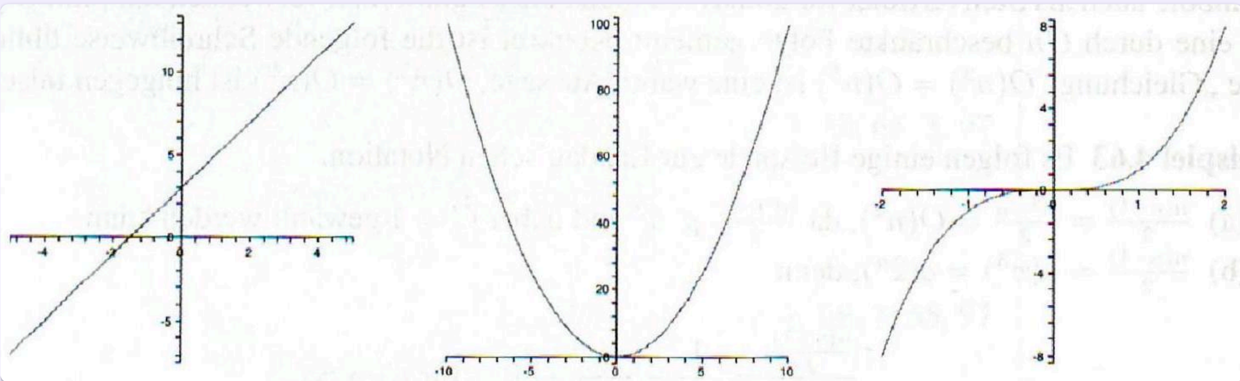


Abbildung 4.2 Polynomfunktionen: links: $f(x) = 2x + 3$, Mitte: $f(x) = x^2$, rechts: $f(x) = x^3$

(b) Rationale Funktionen sind Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen sind und $D = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$. Zum Beispiel ist $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ (siehe Abb. 4.3, links) eine rationale Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$.

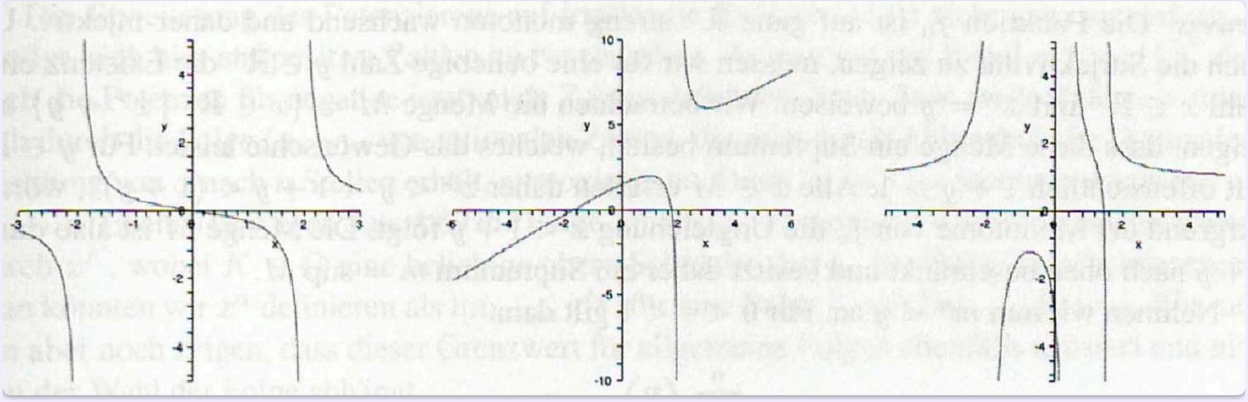
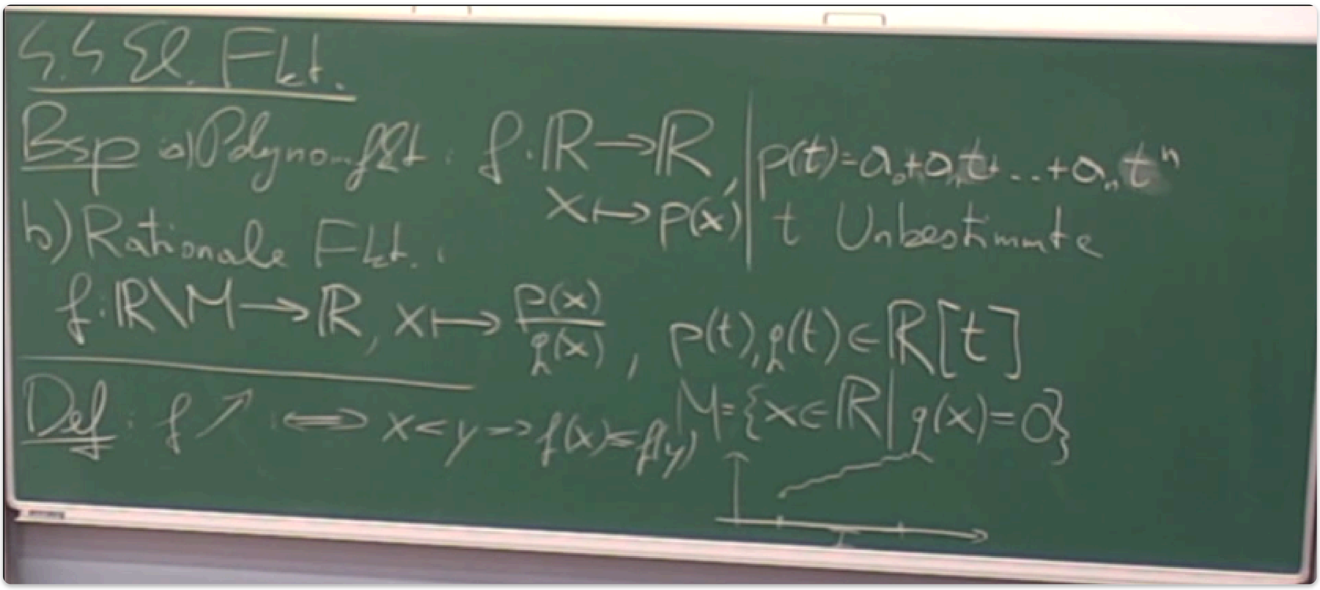


Abbildung 4.3 Rationale Funktionen: links: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, Mitte: $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^2-4}$, rechts: $f(x) = \frac{x^3-3}{x^3-3x+1}$

Polynomfunktionen und Rationale Funktionen aus vo:



Monotonie und Sätze dazu

Definition 4.65

Mathematik für Informatik, p.176

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset D$ ein Intervall. Dann heißt f auf I streng monoton wachsend, falls für $x, y \in I$ mit $x < y$ immer $f(x) < f(y)$ erfüllt ist. Analog heißt f auf I streng monoton fallend, falls aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) > f(y)$ folgt.

> *Bemerkung: Man beachte, dass aus der Bedingung $x < y \implies f(x) < f(y)$ auch die Umkehrung folgt, d.h., für streng monoton wachsende Funktionen sind die Aussagen $x < y$ und $f(x) < f(y)$ äquivalent. Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.*

Satz 4.66

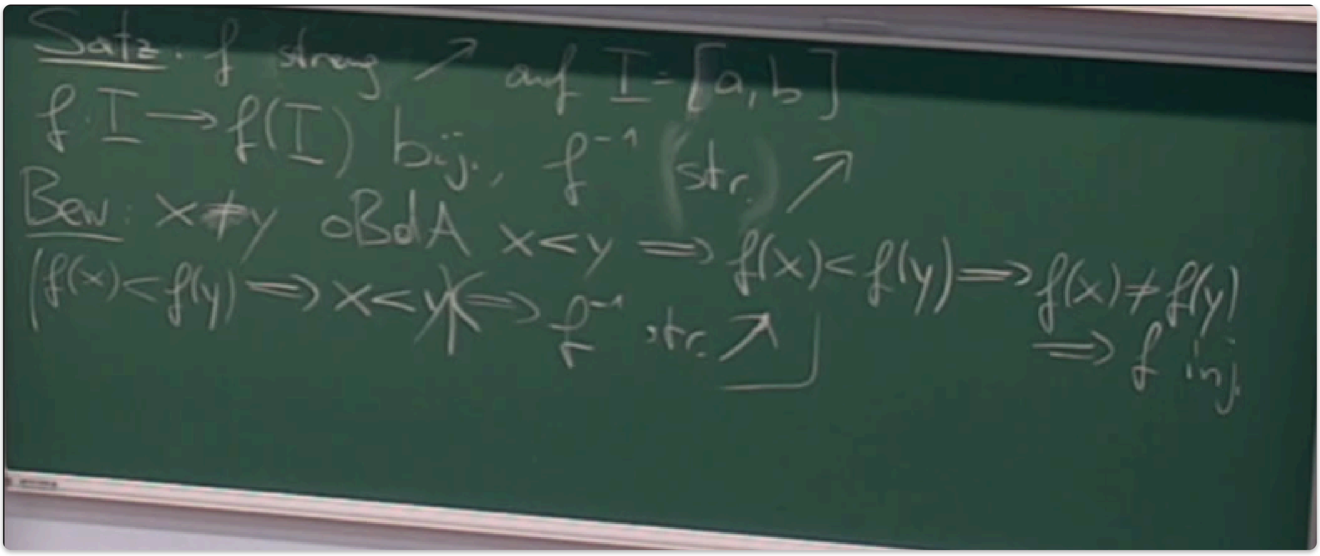
Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f : I \to f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher umkehren. Die Umkehrung ist im gleichen Sinne monoton wie f selbst.

Beweis. O.B.d.A. sei f auf I streng monoton wachsend. Weiters sei $x \neq y$, es gelte etwa $x < y$. Dann ist $f(x) < f(y)$, insbesondere sind also die Bilder von x und y unter f verschieden, und f ist daher injektiv. Da die Zielmenge $f(I)$ ist, ist f trivialerweise surjektiv und somit bijektiv.

Zum Beweis der zweiten Aussage müssen wir zeigen, dass $x < y \implies f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. Setzen wir $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, dann gilt $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Da f monoton wächst, folgt $u < v$, was zu zeigen war.

siehe sem_2/Analysis/vo/4. Folgen Reihen und Funktionen/4.1 Folgen > 2. Monotonie und Beschränktheit

vo:

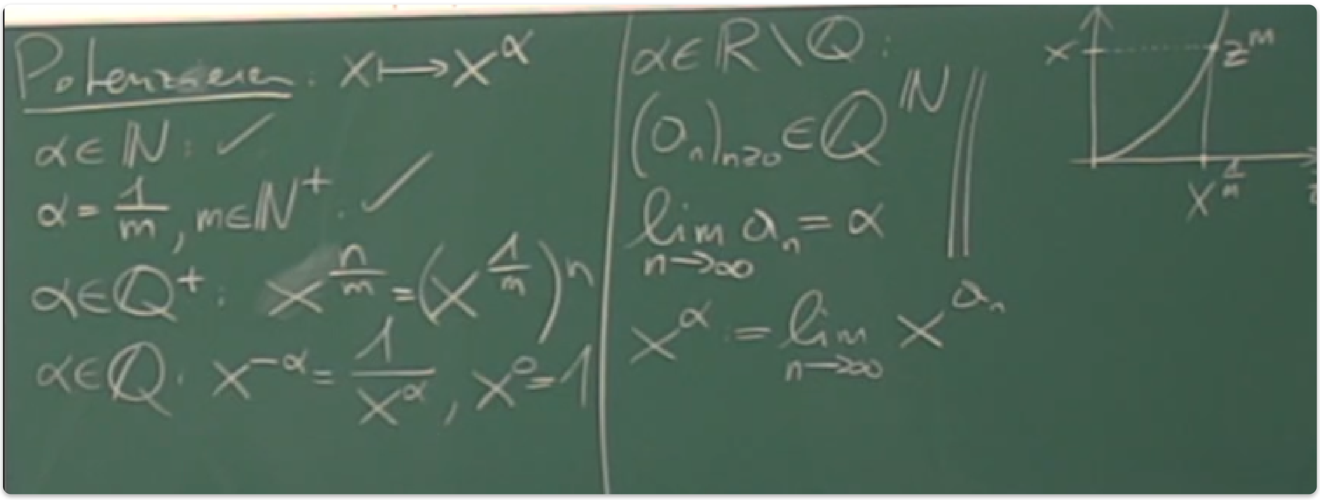


Potenzen mit reellen Exponenten

Definition

Mathematik für Informatik, p.177

Das Potenzieren mit natürlichem Exponenten, also die Berechnung von x^n mit $n \in \mathbb{N}$, ist elementar über die Multiplikation erklärt. Diese Definition ist aber nicht mehr anwendbar, wenn n keine natürliche Zahl ist. In diesem Abschnitt werden wir uns überlegen, wie man das Potenzieren auf nicht natürliche Exponenten verallgemeinern kann.



Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktionen haben grundsätzlich die Form:

$$f(x) = a^x \ mit \ a \in \mathbb{R}^+$$

Da eine Exponentialfunktion injektiv und surjektiv ist, folgt automatisch die Bijektivität. Somit existiert auch eine Umkehrfunktion.

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$
$$x = a^y \Leftrightarrow y = \frac{\log x}{\log a}$$

Rechenregeln

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$\ln(a^b) = b * \ln a$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Darstellung der Exponentialfunktion

Darstellungen der natürlichen Exponentialfunktion

> Darstellung als Grenzwert einer Folge

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

> Darstellung durch eine Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

> Funktionalgleichung

$$e^x * e^y = e^{x+y}$$

Definition 4.72

Mathematik für Informatik, p.179

Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch $\exp(x) = e^x$, wobei e die Euler'sche Zahl 2.71828 ... aus Beispiel 4.21 ist. Die allgemeine Exponentialfunktion lautet $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

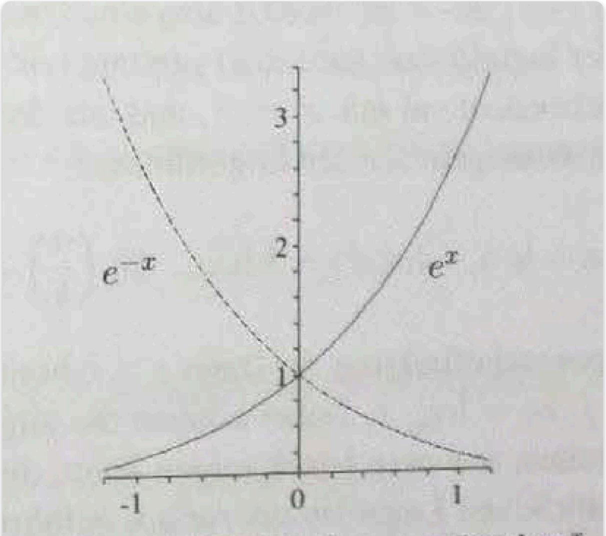
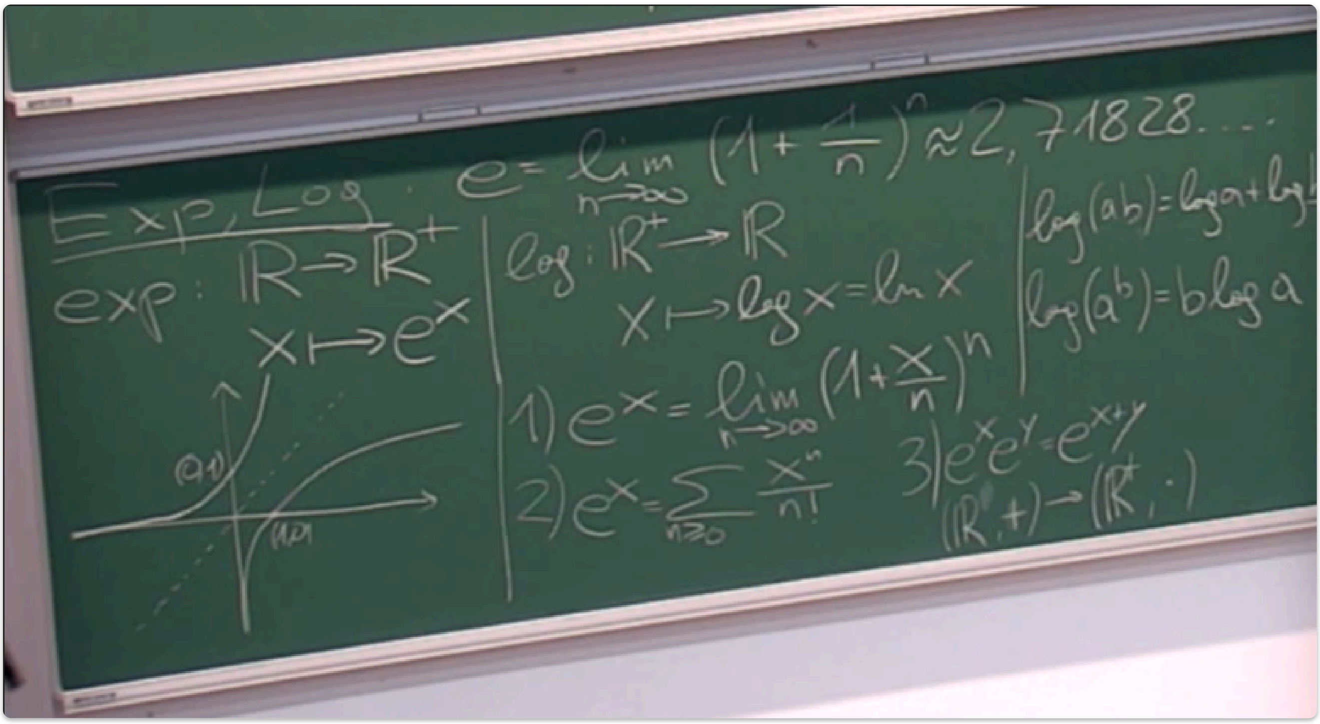
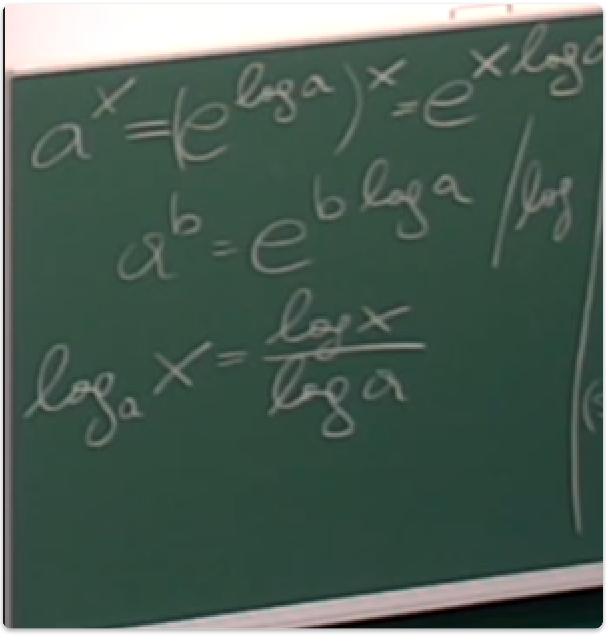


Abbildung 4.4 Die Graphen von e^x und e^{-x}

- Zusammengesetzte Exponentialfunktion: Entsteht durch die Verkettung der Exponentialfunktion mit $g(x)=-x2/2$.
- Wichtigkeit: Spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.
- Bekannte Bezeichnung: Wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet (siehe Abbildung 4.5).





Winkelfunktion und Arcusfunktionen

Reihendarstellung

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sonstige Formeln

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y + i \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + i \sin y \cos x \end{aligned}$$

Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen heißen

> Arcussinus
> Arcuscosinus
> Arcustangens
> – Bijektiv im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Da die Umkehrfunktionen nur das Intervall $[-1{,}1] \rightarrow [0{,}2\pi]$ abbildet, spricht man auch vom Hauptzweig, wenn man sich nur auf das Intervall $[0{,}2\pi]$ bezieht, da es offensichtlich unendlich viele Lösungen (Zweige) gibt.

Elementare Funktionen

Funktionen, die nur aus Polynomfunktionen, Logarithmus-, Exponential- und Winkelfunktionen, Arcusfunktionen, den Grundrechnungsarten, sowie Funktionskompositionen aufgebaut sind, heißen elementare Funktionen.

Mathematik für Informatik, p.183

- **Definition von Sinus (sin) und Cosinus (cos):**
  - $\sin(x)$: y-Koordinate eines Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - $\cos(x)$: x-Koordinate desselben Punktes X auf dem Einheitskreis.
  - Bogenlänge vom Bezugspunkt zum Punkt X beträgt x (vgl. Kapitel 1, Abb. 4.6).
  - Werden auch Winkelfunktionen genannt (enge Verbindung zum Winkel).
- **Periodische Fortsetzung für $x \notin [0, 2\pi)$:**
  - $\sin(x)$ und $\cos(x)$ werden durch periodische Fortsetzung definiert.
  - Gleichungen für die periodische Fortsetzung (werden im Folgenden erwartet).

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

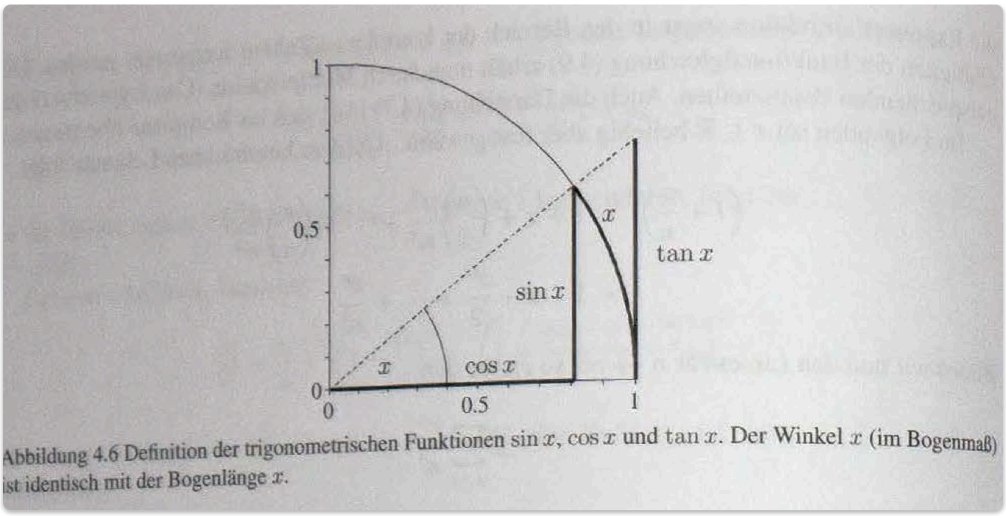
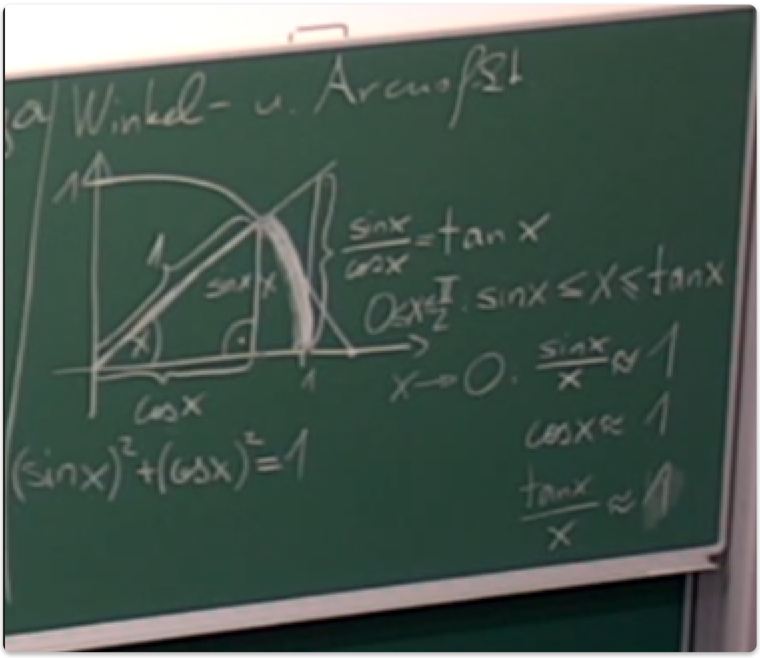
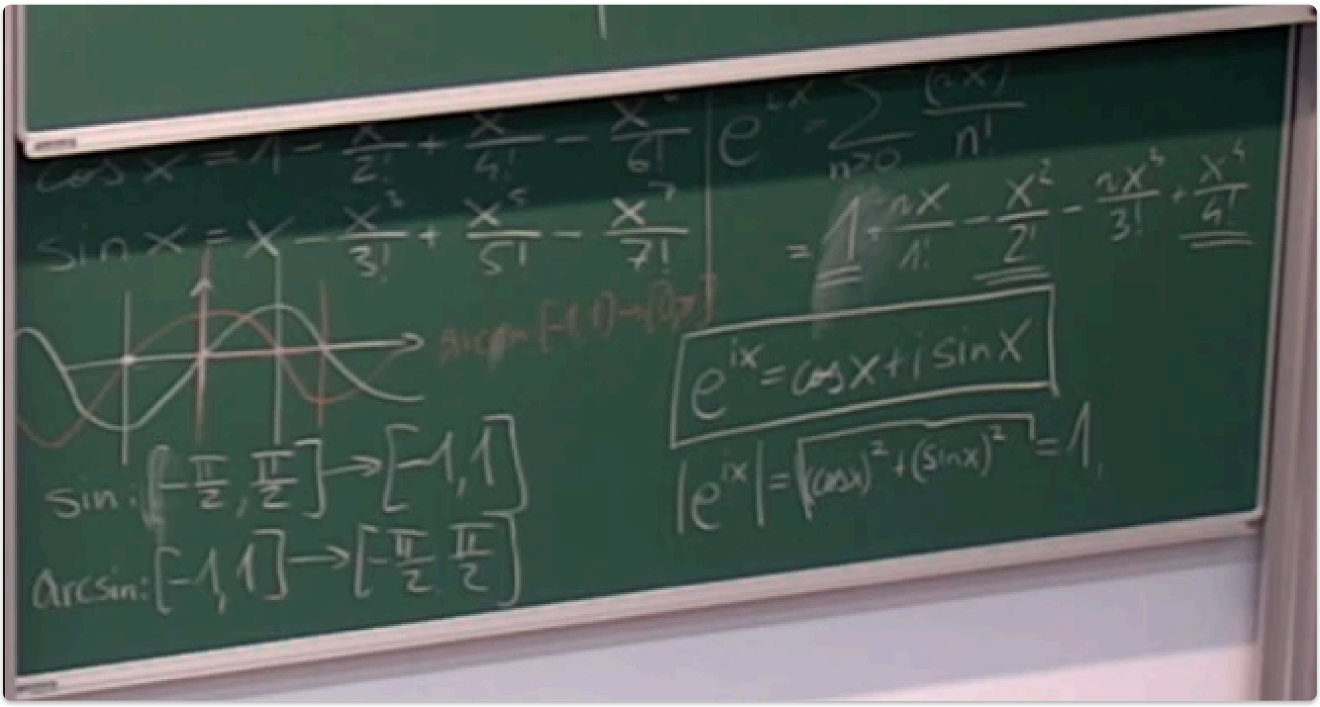


Abbildung 4.6 Definition der trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$. Der Winkel x (im Bogenmaß) ist identisch mit der Bogenlänge x.

vo (mit paar extras)





Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen