5.5 Uneigentliche Integrale

Definition 1. Art und 2. Art

Definition 5.58

Tafelbild1, Tafelbild2, Mathematik für Informatik, p.233

Sei f auf $[a,b)$ definiert und auf jedem Teilintervall $[a,c] \subset [a,b)$ integrierbar. Weiters sei $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$). Dann nennt man das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$$

uneigentliches Integral erster Art. Man spricht von Konvergenz bzw. Divergenz des Integrals je nachdem, ob dieser Grenzwert im eigentlichen Sinn existiert oder nicht. Eine analoge Definition gilt für Intervalle $(a,b]$ $\text{mit}_{\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für eine auf jedem Intervall $[a,b] \subset [a,\infty)$ integrierbare Funktion f nennt man das Integral

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

uneigentliches Integral zweiter Art. Auch dieses Integral kann entweder konvergent oder divergent sein, wobei - ebenso wie zuvor - im Fall der Konvergenz der Grenzwert nicht uneigentlich sein darf. Eine analoge Definition gilt für Intervalle $(-\infty,b]$.

Beispiele

Beispiel 5.59 (Uneigentliche Integrale erster Art)

Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.233, Mathematik für Informatik, p.234

(a) Das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (siehe Abb. 5.14, links) ist ein uneigentliches Integral erster Art, da für $x \to 0$ der Grenzwert des Integranden ∞ ist. Definitionsgemäß gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0+} (2-2\sqrt{c}) = 2.$$

(c) Ein Integral, das sich aus zwei uneigentlichen Integralen erster Art zusammensetzt, ist $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Hier ist der Integrand nicht am Rand des Integrationsbereichs unbeschränkt, sondern in dessen Innerem. Das Integral ist uneigentlich an der Stelle 0. Dass man dabei vorsichtig sein muss und nicht einfach die Stammfunktion an den Grenzen -1 und 1 (wo es ja keinerlei Probleme gibt) auswerten kann, zeigt die folgende nicht korrekte Rechnung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2$$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich falsch, da ein Blick auf Abb. 5.14 (rechts) sofort zeigt, dass das Integral nicht negativ sein kann.

Nun richtig gerechnet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \to 0+} \int_{-1}^{-c} \frac{dx}{x^2} + \lim_{c \to 0+} \int_{c}^{1} \frac{dx}{x^2}$$
$$= \lim_{c \to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_{-1}^{-c} + \lim_{c \to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_{c}^{1} = \lim_{c \to 0+} \left(\frac{1}{c} - 1\right) + \lim_{c \to 0+} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = \infty.$$

Das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ existiert daher nicht.

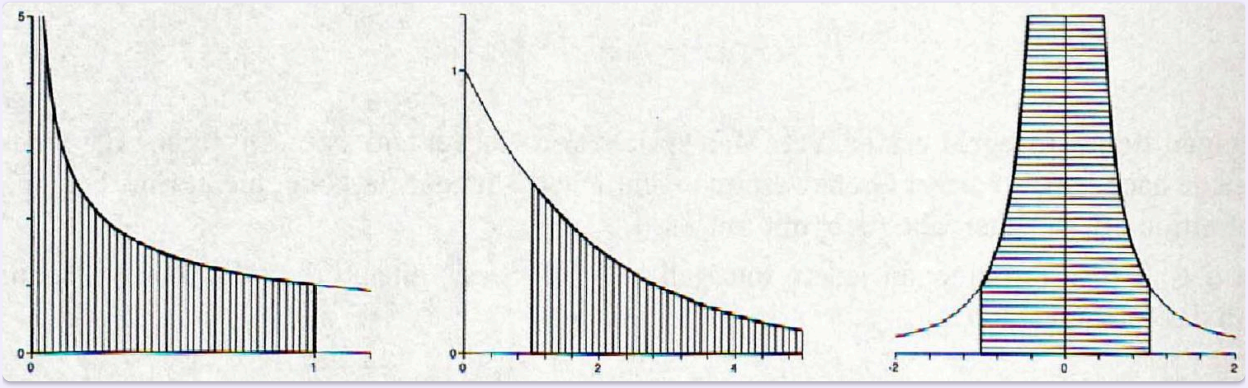

Abbildung 5.14 Uneigentliche Integrale erster und zweiter Art: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty e^{-x} dx$ und $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

☰ Beispiel 5.60 (Uneigentliche Integrale 2. Art)

Mathematik für Informatik, p.234

(a) Radioaktive Zerfallsprozesse können mit der Exponentialfunktion $f(x) = e^{-x}$ beschrieben werden. Die Gesamtemission ist dann das Integral über den betrachteten Zeitraum. Dies führt auf $\int_1^\infty e^{-x} dx$, ein uneigentliches Integral zweiter Art. Einsetzen in die Definition ergibt

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{c \to \infty} \int_1^c e^{-x} dx = \lim_{c \to \infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^c = \lim_{c \to \infty} \left(-e^{-c} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

Integralkriterium

Satz 5.62 (Integralkriterium)

Tafelbild zum Satz + Beispiel, Mathematik für Informatik, p.236

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative und monoton fallende Funktion. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.

Beweis. Analog zu Beispiel 5.57 b (siehe Abb. 5.13) erhält man die Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

und nach Grenzübergang für $n \to \infty$ die Behauptung.

Damit kann man jetzt das beweisen, was wir schon mal erwähnt haben:

Beispiel 5.63

Mathematik für Informatik, p.236

Die hyperharmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$. Für $\alpha \geq 2$ (bzw. $\alpha \leq 1$) haben wir die Konvergenz (bzw. Divergenz) bereits in Beispiel 4.49 gezeigt. Nach dem Integralkriterium konvergiert im Fall $\alpha > 0$ die Reihe genau dann, wenn das entsprechende Integral konvergiert. Für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \lim_{c\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^c = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = 1$ liegt die harmonische Reihe vor, deren Divergenz wir bereits im vorigen Kapitel nachgewiesen haben. Man kann aber auch in diesem Fall das Integralkriterium anwenden.