6. FS - Kantenfilterung

Gradienten/Kantenfilterung

$$\nabla I = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- G_x und G_y sind die Gradientenkomponenten in horizontaler bzw. vertikaler Richtung

$$|\nabla I| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad \text{und} \quad \theta = \text{atan2}(G_y, G_x)$$

6. Kantenfilterung > Kantenfilterung

Laplace-Operator

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

wobei:

$$\frac{\partial f}{\partial^2 x}(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) - 2f(x,y)$$

in x Richtung und analog in y Richtung.

Fürs Filtern von einem Bild, zuerst Laplace Filter und dann das Ergebnis vom Ursprungsbild subtrahieren:

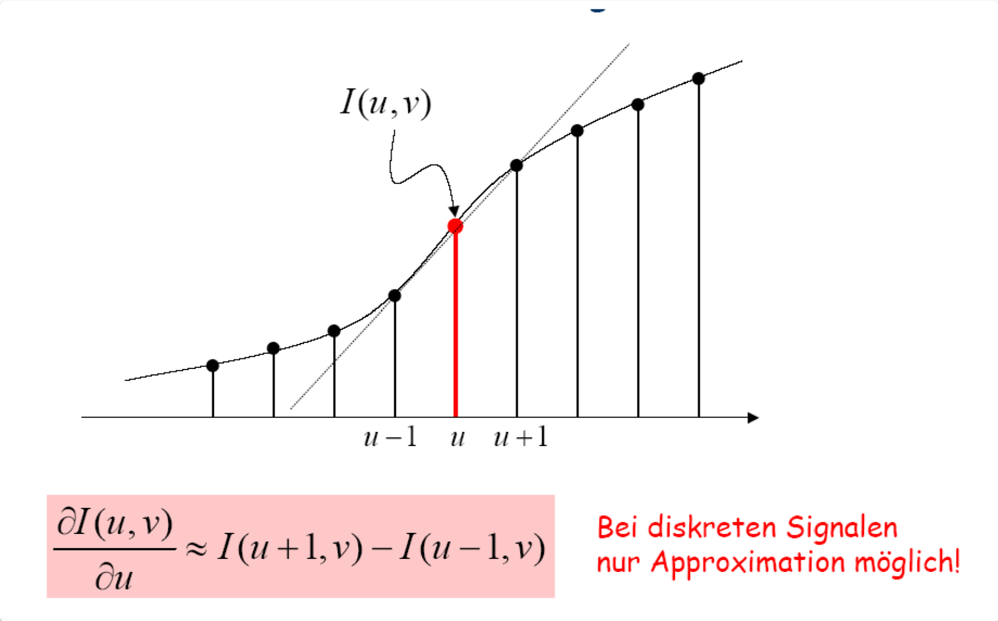
$$I' = I - w * (H^L * I)$$

- H^L ist Laplace Filter
- w bestimmt Intensität der Schärfung

6. Kantenfilterung > Laplace-Operator

Differenzenapproximation

$$\frac{df}{du}(u) \approx \frac{f(u+1) - f(u-1)}{2}$$



- Dies entspricht dem Anstieg einer Geraden, die durch die benachbarten Abtastwerte verläuft.

6. Kantenfilterung > Lösung Differenzenapproximation

Gradienten und Kanten in zweidimensionalen Bildern

Ein Bild wird als zweidimensionale Funktion $I(u, v)$ betrachtet

- Kanten im Bild = abrupte lokale Änderungen in Intensität oder Farbe
- Starke Änderungen = hohe Ableitungswerte → Hinweis auf Kante
- Erste Ableitung misst Stärke der Intensitätsänderung
- Für diskrete Funktionen ist die Ableitung nicht definiert → Approximation notwendig
- In 1D wird die erste Ableitung durch den Differenzenquotienten geschätzt:

$$\frac{df}{du}(u) \approx \frac{f(u+1) - f(u-1)}{2}$$

- In 2D: partielle Ableitungen entlang der Koordinatenachsen:

$$\frac{\partial I}{\partial u}(u, v), \quad \frac{\partial I}{\partial v}(u, v)$$

- Gradient Vektor:

$$\nabla I = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial u} \\ \frac{\partial I}{\partial v} \end{pmatrix}$$

- Betrag des Gradienten (Kantenstärke):

$$|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial v}\right)^2}$$

- Betrag des Gradienten ist rotationsinvariant
- Horizontale Ableitung kann geschätzt werden durch linearen Filter:

$$H_{Dx} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vertikale Ableitung entsprechend:

$$H_{Dy} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Filterantwort ist richtungsabhängig
- Horizontale Filter erkennen vertikale Kanten, vertikale Filter horizontale Kanten
- In flachen Bildregionen (konstante Intensität) ist die Filterantwort $null$

6. Kantenfilterung > **Gradienten und Kanten in zweidimensionalen Bildern**

Kantendetektion

- Gradienten in x- und y-Richtung:

$$D_x(u, v) = H_x * I$$

$$D_y(u, v) = H_y * I$$

- Kantenstärke:

$$E(u, v) = \sqrt{D_x(u, v)^2 + D_y(u, v)^2}$$

- Kantenrichtung:

$$\Phi(u, v) = \tan^{-1}\left(\frac{D_y(u, v)}{D_x(u, v)}\right)$$

6. Kantenfilterung > Mathematische Formulierungen

Weitere Kantenoperatoren

Roberts-Operator (ältester Kantenoperator)

- Sehr kleine Filtergröße: 2×2
- Schätzt Ableitungen entlang der Diagonalen
  - $H_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Kirsch-Operator

Filter für acht verschiedene Richtungen im Abstand von 45°
- Bietet höhere Präzision durch mehrere enger aufgestellte Filter für spezifische Richtungen
- Diese Acht Richtungen sehen so aus:

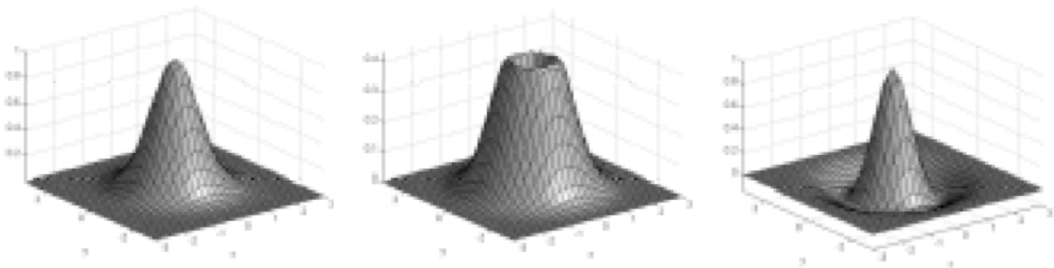
$$H_1^K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_2^K = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, H_3^K = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, H_4^K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H_5^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H_6^K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, H_7^K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, H_8^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kantenstärke E^K an der Stelle *(u,v)* ist als Maximum der einzelnen Filterergebnisse definiert, d.h. $E^K(u,v) = \max(D_1(u,v), D_2(u,v), \dots, D_8(u,v))$, und der am stärksten ansprechende Filter bestimmt auch die zugehörige Kantenrichtung. Derartige **Kompass-Operatoren** bieten allerdings kaum Vorteile gegenüber einfacheren Operatoren, wie z.B. dem Sobel-Operator. Ein Vorteil des Kirsch-Operators ist, dass er keine Wurzelberechnung benötigt.

6. Kantenfilterung > Weitere Kantenoperatoren

2D-Gauß-Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



Gauss' Bell Function — First derivative — Minus second derivative „Mexican Hat“

Wendet man den Laplace-Operator auf die Gauß-Funktion an, erhält man die kontinuierliche Repräsentation des LoG:

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} (1 - \frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$$

Die diskrete Approximation sollte für Kernel ungerader Kantenlänge durchgeführt werden, wobei der Ursprung des Kernels jeweils in der Mitte liegt. Für die Kantenlänge 5 entspricht dies dem unten abgebildeten Filter H^{LoG}. Die Abbildung zeigt ein Anwendungsbeispiel, die detektierten Kanten sind jetzt Ein Pixel breit.

$$H^{\mathrm{LoG}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Kantenfilterung > 2D-Gauß-Funktion