6.1 Funktionen in mehreren Variablen

Vorrausgesetzt wird hier meistens:

$$f : D \to R, D \subset R^n$$

mit meist $n = 2$

1. Einführende Beispiele

- Tafel1
- Tafel2
- Mathematik für Informatik, p.241
- Mathematik für Informatik, p.242
- Mathematik für Informatik, p.243

Beispiel 6.1

(a) Der Gesamtwiderstand R_{Ges} in einem Wechselstromkreis hängt vom Ohm'schen Widerstand R, dem kapazitiven Widerstand R_C und dem induktiven Widerstand R_L wie folgt ab :

$$R_{\text{Ges}} = \sqrt{R^2 + (R_C - R_L)^2}$$

(b) Lineare Funktionen in zwei Variablen sind gegeben durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ax + by$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sie beschreiben Ebenen durch den Ursprung [1] im $^{\mathbb{R}^3}$. Allgemein ist eine lineare Funktion über $\mathbb{R}^n$ von der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ und reellen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$. Geometrisch ist der Funktionsgraph eine so genannte Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$, die durch den Ursprung geht, also ein n-dimensionaler Unterraum.

(c) Polynomfunktionen in mehreren Variablen sind Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Bauart

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$. Der Grad einer Polynomfunktion ist definiert als Exponent der höchsten auftretenden Potenz, wobei die Exponenten der einzelnen Variablen addiert werden, also als $\max\{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \neq 0\}$.

(d) Elementare Funktionen in mehreren Variablen sind analog zu elementaren Funktionen in einer Variablen definiert. Funktionen in zwei Variablen mit einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ lassen sich auf verschiedene Arten veranschaulichen. Eine Möglichkeit ist die Darstellung als Fläche im dreidimensionalen Raum. Der Graph einer

Funktion $f(x,y)$ ist die Punktmenge $\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$ (siehe Abb. 6.1 für einige Beispiele von Graphen elementarer Funktionen in zwei Variablen).

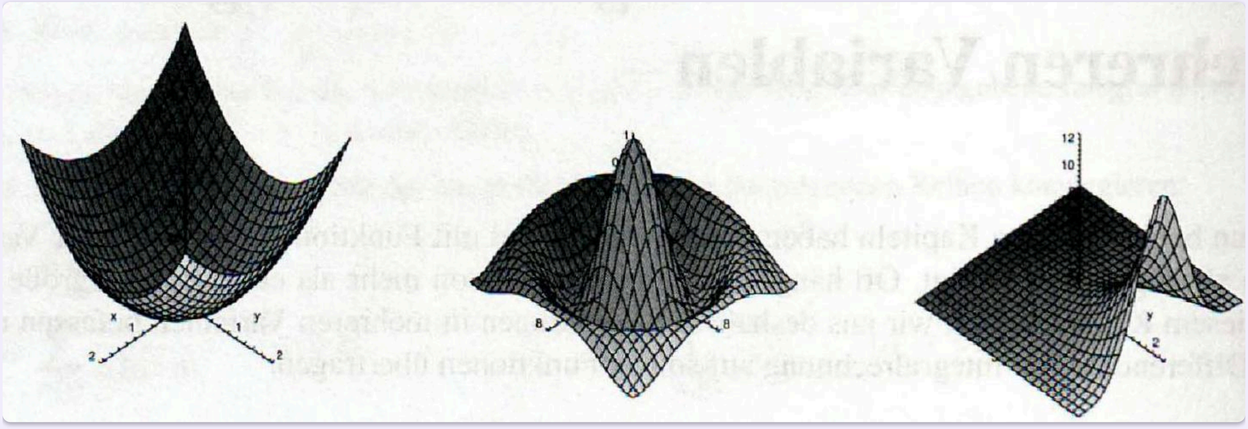


Abbildung 6.1 Funktionen $f(x,y) = 5x^2 + 7y^2 + 2, g(x,y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, h(x,y) = e^{-x^2+y}$

Eine andere Möglichkeit der Darstellung von Funktionen in zwei Variablen sind Niveaulinien (Isohypsen). Wie die Höhenschichtlinien in Landkarten beschreiben sie jeweils eine Punktmenge, auf der die Funktion einen vorgegebenen konstanten Wert hat. Die Niveaulinie zum Niveau c der Funktion $f(x,y)$ ist also die Menge $\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$ (siehe dazu Abb. 6.2).

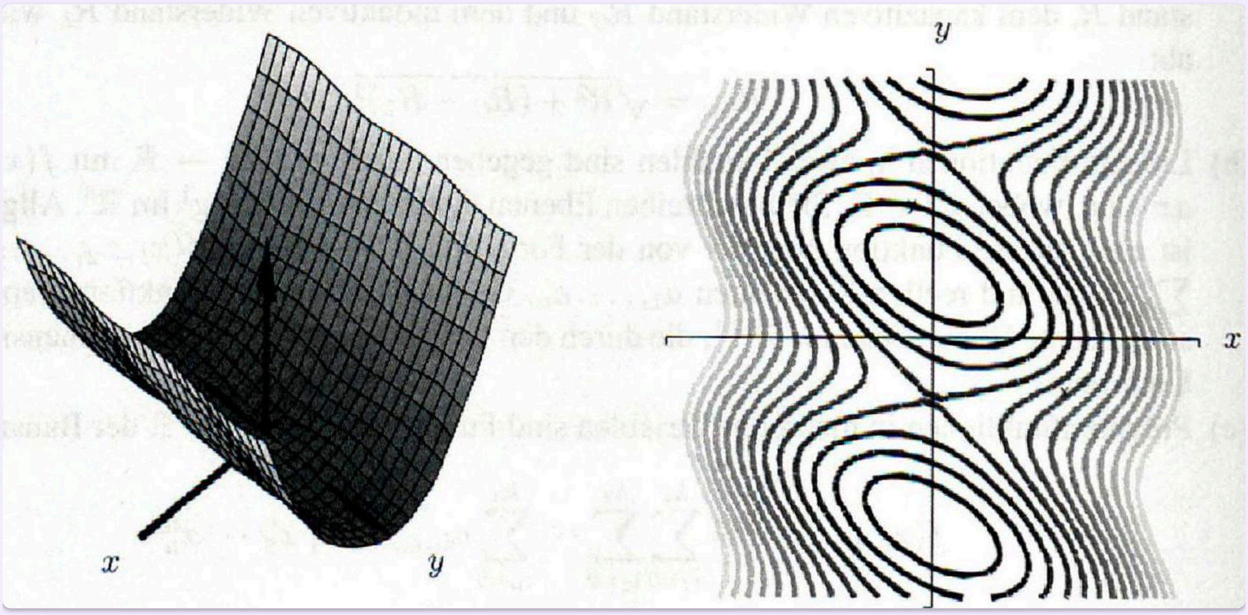


Abbildung 6.2 Graph und Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = \sin(x+y) + x^2$

(e) Die Werte der Funktionen in den voran gegangenen Beispielen liegen alle in $\mathbb{R}$. Solche Funktionen nennt man auch skalarwertig oder Skalarfelder. Vektorwertige Funktionen sind hingegen Funktionen, deren Definitions- bzw. Bildbereich Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ bzw. von $\mathbb{R}^m$ ist. Vektorwertige Funktionen mit $n = m$ nennt man auch Vektorfelder. Ein Beispiel für eine vektorwertige Funktion (siehe Abb. 6.3) ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin(xy) + e^y \end{pmatrix}$$

Solche Funktionen treten zum Beispiel bei der Beschreibung von Strömungen auf (jedem Ort im $\mathbb{R}^3$ wird eine Geschwindigkeit zugeordnet, die selbst wieder als Vektor des $\mathbb{R}^3$ dargestellt ist), ebenso bei Magnet- oder Gravitationsfeldern, etc.

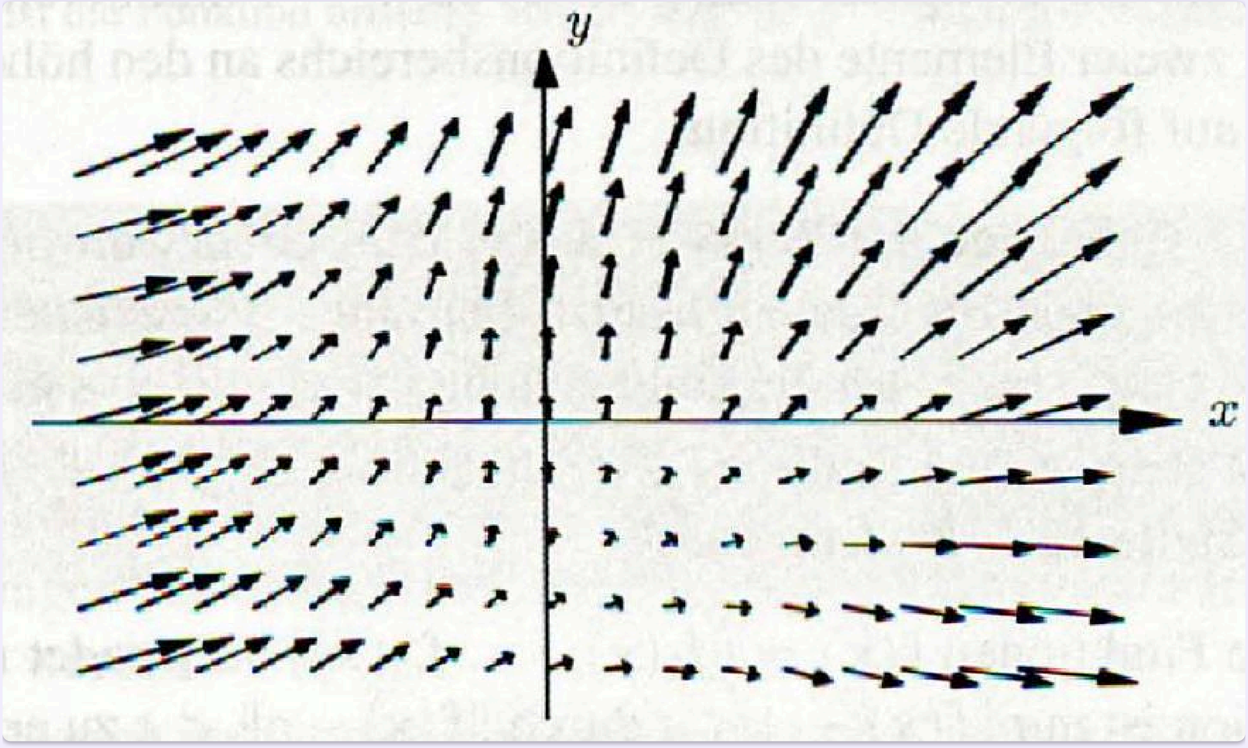


Abbildung 6.3 Das Vektorfeld aus Gleichung (6.1)

(f) Quadratische Formen sind Funktionen $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Bauart $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, wobei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix ist, d.h. $A^T = A$. Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ gilt $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Z.B. ist die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ bestimmte quadratische Form

$$q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 - 10xy + 9y^2$$

Diese quadratische Form lässt sich auch als Summe zweier Quadrate, nämlich als $q(x,y) = \left(2x - \frac{5}{2}y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2$ schreiben und nimmt daher mit Ausnahme der Stelle $(x,y) = (0,0)$ nur positive Werte an. Quadratische Formen mit dieser Eigenschaft (und ebenso die entsprechenden Matrizen) heißen positiv definit (siehe Abschnitt 3.7). Analog heißt q negativ definit, falls $q(x,y) < 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Falls die Ungleichung nicht strikt gilt, also $q(x,y) \geq 0$ bzw. $q(x,y) \leq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so spricht man von positiv bzw. negativ semidefiniten quadratischen Formen. Formen, die nicht semidefinit (und daher auch nicht definit) sind, nennt man indefinit. Ein einfaches Kriterium zur Feststellung der Definitheit einer Matrix ist das in Abschnitt 3.7 genannte Hauptminorenkriterium.

2. Grenzwert und Stetigkeit

Grenzwert

Um Differential- und Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen zu entwickeln, müssen Konzepte der Funktionen in einer Variablen übertragen werden.

Stetigkeit und Grenzwerte in R^n

- Zentrale Bedeutung: Der Begriff der Stetigkeit, welcher auf dem Grenzwertbegriff basiert.
- Ersetzung von Intervallen: Anstatt von Intervallen in $\mathbb{R}$ werden n-dimensionale Kugeln in $\mathbb{R}^n$ verwendet.

Definition 6.2

Mathematik für Informatik, p.244

Unter einer ε-Umgebung des Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ versteht man die Menge

$$U_{\varepsilon}(\mathrm{x}_0) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| < \varepsilon\}$$

also die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^n$, deren Abstand von $\mathbf{x}_0$ kleiner als ε ist. Diese Menge ist für $n = 1$ ein Intervall, für $n = 2$ eine Kreisscheibe und für $n = 3$ eine Kugel.

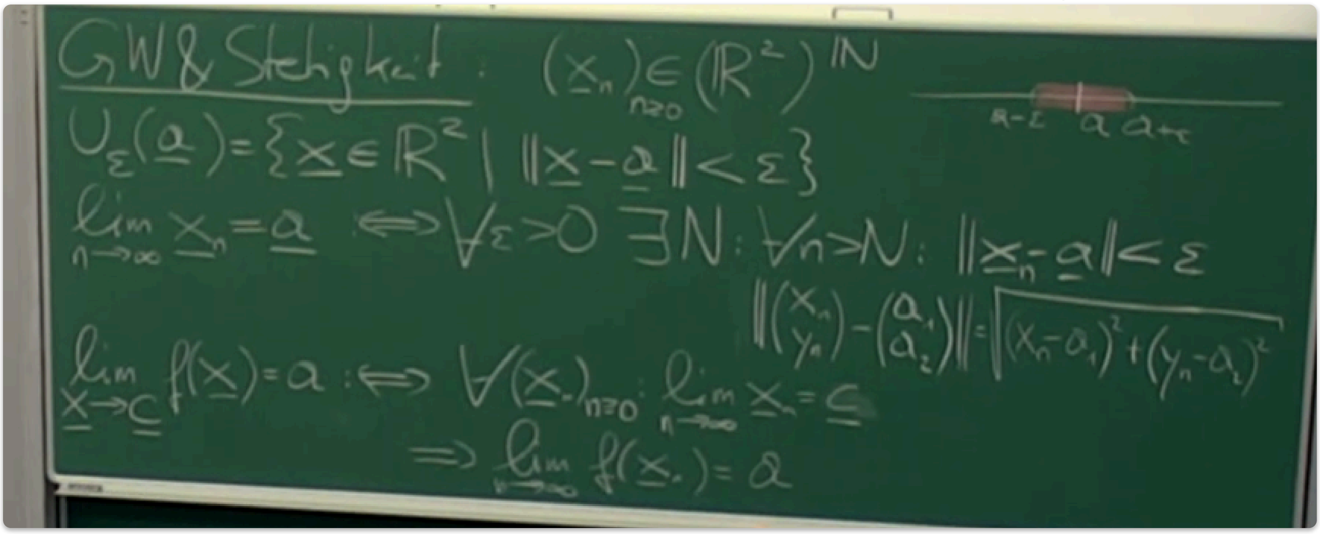
Damit lässt sich nun die Stetigkeit analog zum Fall $n = 1$ definieren. Man muss lediglich den Abstand $|x - x_0|$ zweier Elemente des Definitionsbereichs an den höher dimensionalen Fall anpassen. Dies führt auf folgende Definition.

Definition 6.3.1

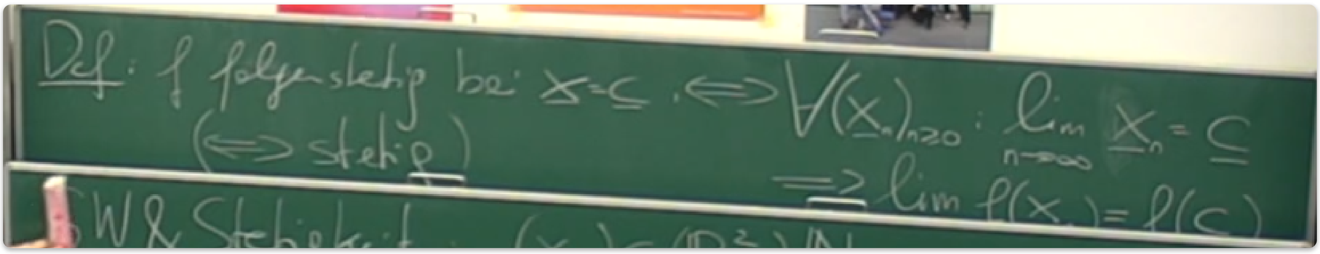
Mathematik für Informatik, p.244

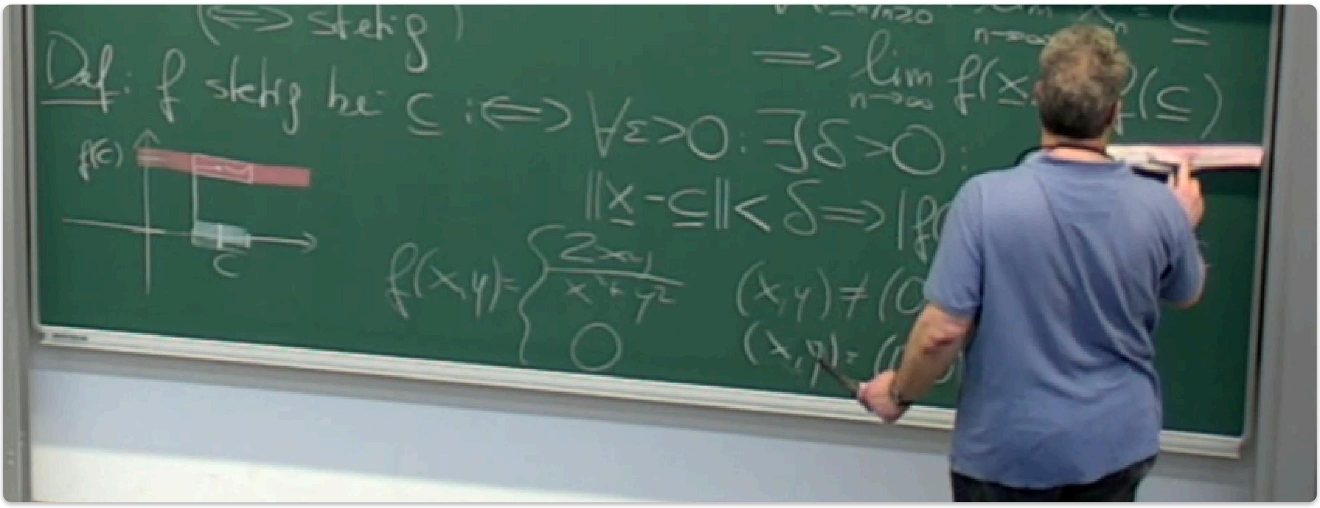
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Unter dem Grenzwert $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ versteht man jene Zahl c, die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\mathbf{x} \in D$ mit $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ die Ungleichung $|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon$ gilt.

Hälfte schon im Buch und das unten ist was anderes was ich im buch nicht gefunden hab:



Stetig:





find ich nicht im Buch vielleicht ist damit das gemeint:

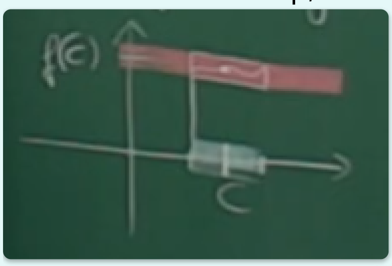
Definition 6.3.2

Mathematik für Informatik, p.244

Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in D$, falls $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, und stetig auf D, wenn f an jeder Stelle $\mathbf{x}_0 \in D$ stetig ist.

Für vektorwertige Funktionen $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ verwendet man die gleiche Idee. In der obigen Definition ist nur $|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon$ durch $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| < \varepsilon$ zu ersetzen. Die Stetigkeit von $\mathbf{f}$ ist übrigens gleichbedeutend damit, dass alle Koordinatenfunktionen $f_i(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, m$ stetig sind.

Hier ein kleiner Recap, so sah das bei $n = 1$ aus:



Statt dieser Geraden haben wir jetzt so eine Ebene

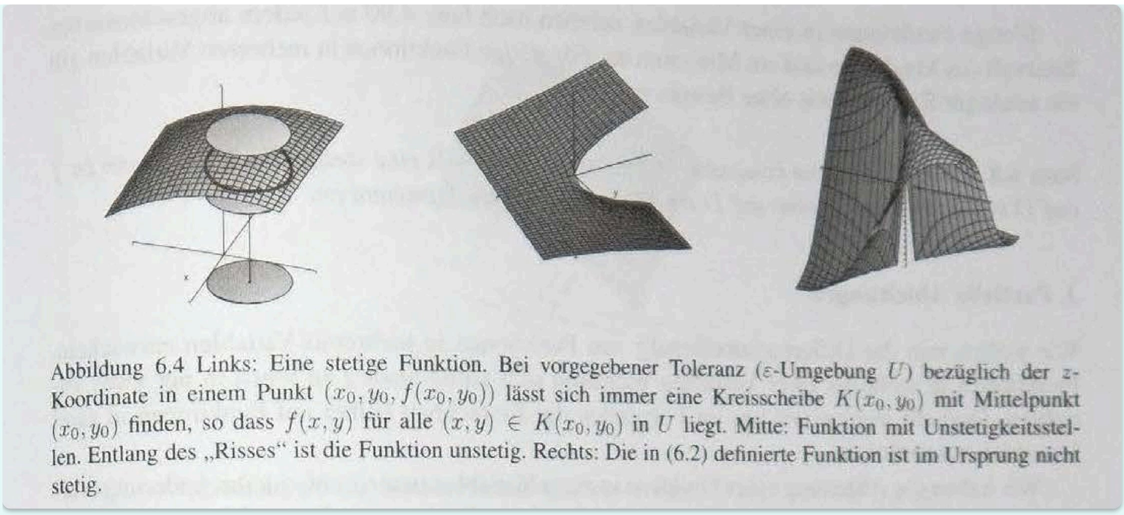
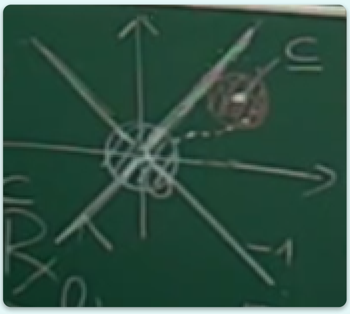


Abbildung 6.4 Links: Eine stetige Funktion. Bei vorgegebener Toleranz (ε-Umgebung U) bezüglich der z-Koordinate in einem Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ lässt sich immer eine Kreisscheibe $K(x_0, y_0)$ mit Mittelpunkt (x_0, y_0) finden, so dass $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in K(x_0, y_0)$ in U liegt. Mitte: Funktion mit Unstetigkeitsstellen. Entlang des „Risses" ist die Funktion unstetig. Rechts: Die in (6.2) definierte Funktion ist im Ursprung nicht stetig.

1. Bild zeigt einen typischen Funktionsverlauf für mehrere n und die zwei Kreise sind die Abgrenzungen der ϵ-Umgebung.
2. Bild zeigt eine unstetige Funktion
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

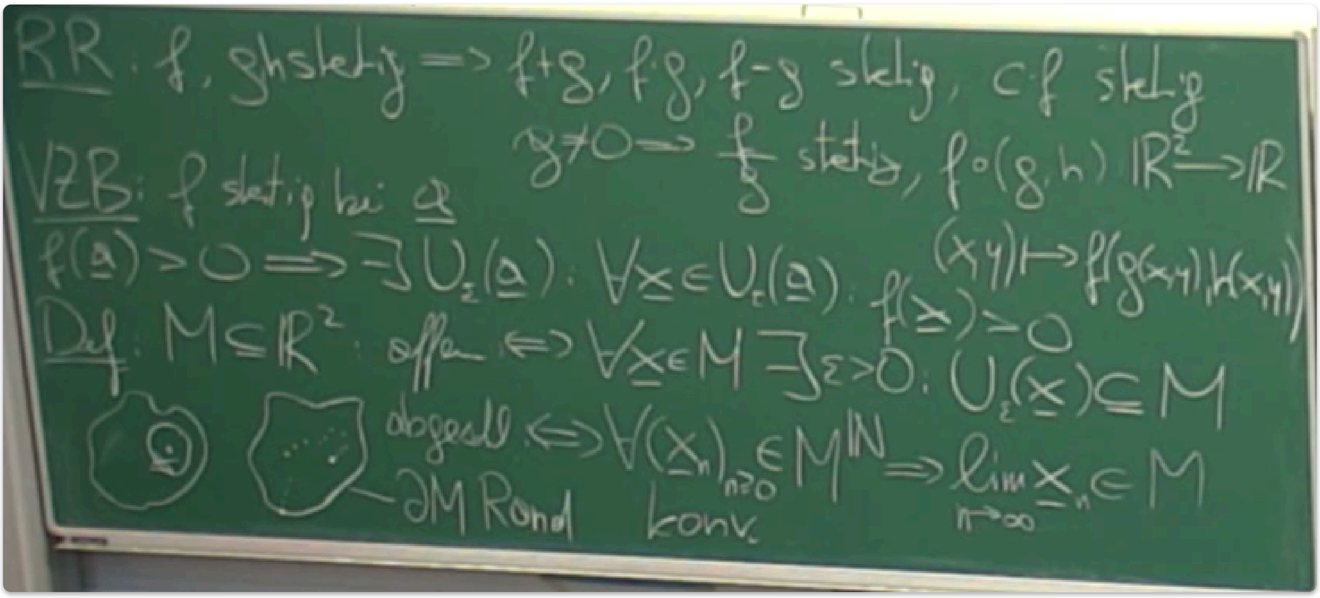


Satz 6.5

Mathematik für Informatik, p.244

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig an der Stelle $\mathbf{x} \in D$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$ für jede Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbf{x}_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

Rechenregeln (analog wie bei $n = 1$)



Mathematik für Informatik, p.245

- **Satz von der Vorzeichenbeständigkeit** ist direkt auf Funktionen in mehreren Variablen übertragbar:
    - Stetige Funktionen ändern *lokal* ihr Vorzeichen nicht (außer in der Umgebung von Nullstellen).
    - Die Regeln aus *Satz 4.92* gelten sinngemäß auch für Funktionen in mehreren Variablen.
    - Das Analogon zur **Existenz von Maxima und Minima auf Intervallen** gilt ebenfalls.
- Für eine präzisere Formulierung benötigen wir einen weiteren Begriff:
    - Die folgende Definition stellt *Verallgemeinerungen von offenen und abgeschlossenen Intervallen* bereit, die später noch benötigt werden.

Definition 6.6

Mathematik für Informatik, p.245, Pasted image 20250513091246.png

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn aus $\mathbf{x} \in D$ folgt, dass es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$.

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Glieder in D liegen, selbst wieder in D liegt.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nennt man **kompakt**.

Beispiel 6.7

Mathematik für Informatik, p.245

(a) Offene Intervalle (a, b) sind nach obiger Definition offene Mengen in $\mathbb{R}$. Denn jeder Punkt $c \in (a, b)$ liegt in der Umgebung $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$, die selbst zur Gänze in (a, b) liegt. Analog sind Kreisscheiben ohne Rand offene Mengen im $\mathbb{R}^2$. Sie sind aber keine offenen Mengen $\text{im}\, \mathbb{R}^3$, da die Umgebungen im $\mathbb{R}^3$ Kugeln sind und daher niemals Teilmengen von Kreisscheiben sein können. Ob eine Menge offen ist oder nicht, hängt also nicht von der Menge selbst ab, sondern von der Struktur der Umgebungen des Raumes. [2] In Vektorräumen wie $\mathbb{R}^n$ ist diese Struktur durch die Art der Abstandsmessung (also durch das Skalarprodukt, siehe Abschnitt 3.7) bestimmt.

(b) Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sowie Kreisscheiben oder Kugeln inklusive Rand sind jeweils abgeschlossene, ja sogar kompakte Mengen von $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Menge $\mathbb{R}$ ist eine sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von sich selbst.

- **Stetige Funktionen in einer Variablen** nehmen nach *Satz 4.90* auf jedem *abgeschlossenen Intervall* ein Maximum und ein Minimum an.
- Für **stetige Funktionen in mehreren Variablen** gilt ein *analoger Satz*. (Ohne Beweis)

ⓘ **Satz 6.8**

Mathematik für Informatik, p.246

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf D beschränkt und nimmt auf D ein Maximum und ein Minimum an.

3. Partielle Ableitung

Wurde schonmal in EVC verwendet: 6. Kantenfilterung

Einleitung

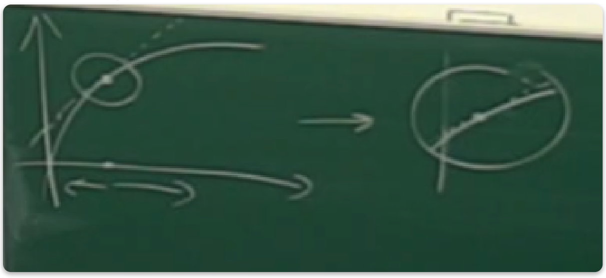
Mathematik für Informatik, p.246

Differentialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen

- Wir entwickeln die **Differentialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen**.
- Funktionen in mehr als zwei Variablen verhalten sich *analog* zu jenen in nur zwei Variablen.
- Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf **Funktionen in zwei Variablen**.

Ableitung in einer Variablen (Wiederholung)

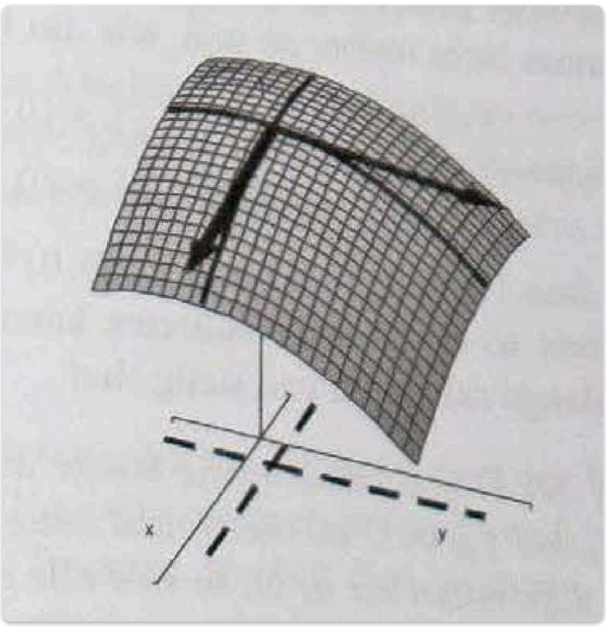
- Die Ableitung einer Funktion in einer Variablen wurde untersucht, um das *Änderungsverhalten* zu studieren.
- Der Anstieg des Funktionsgraphen in einem Punkt ist **gleichbedeutend mit dem Anstieg der Tangente**, die an Stellen, wo die Funktion differenzierbar ist, eindeutig bestimmt ist.



Steilheit von Funktionen in zwei Variablen

Mathematik für Informatik, p.246

- Funktionsgraphen für Funktionen in zwei Variablen bilden **Flächen im $\mathbb{R}^3$**.
- Ein Maß für das Änderungsverhalten der Funktion ist die **Steilheit dieser Fläche** in einem gegebenen Punkt.
- Der Anstieg am Punkt der Fläche ist **abhängig von der Richtung**, in der wir uns bewegen.
- Existiert an einem Punkt eine **eindeutig bestimmte Tangentialebene**, so bestimmt diese den Anstieg in jeder Richtung und somit das Änderungsverhalten der Funktion.
- Die Tangentialebene lässt sich bestimmen, indem man die **Anstiege in x- und in y-Richtung** bestimmt (siehe Abb. 6.5).
- Diese Anstiege sind die Ableitungen jener Funktionen in einer Variablen, die man erhält, wenn man eine Variable festhält:
    - Funktionen der Form $x \mapsto f(x, y)$ (für festes y)
    - Funktionen der Form $y \mapsto f(x, y)$ (für festes x)



Definition

Definition 6.9

Mathematik für Informatik, p.246

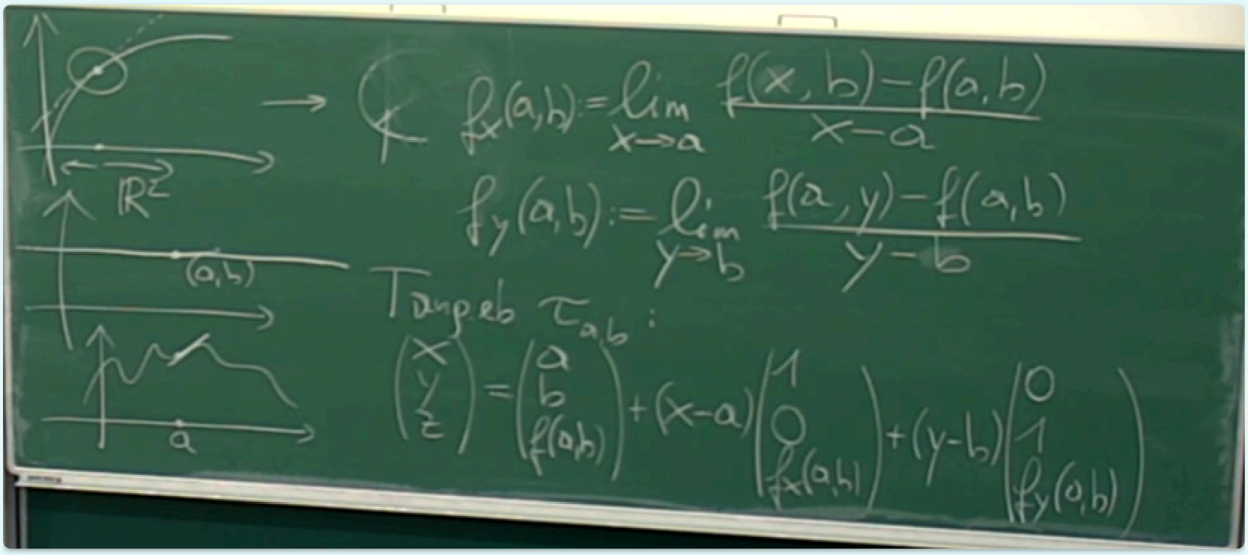
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^2$ und $(x_0, y_0) \in D$. Dann heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_x\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{x - x_0}$$

existiert, und partiell nach y differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_y\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{y \to y_0} \frac{f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{y - y_0}$$

existiert. Die beiden Grenzwerte $f_x\left(x_0, y_0\right)$ und $f_y\left(x_0, y_0\right)$ werden partielle Ableitungen von f nach x bzw. y genannt. Die Funktion f heißt partiell differenzierbar, wenn beide partiellen Ableitungen existieren, und stetig partiell differenzierbar, wenn beide partiellen Ableitungen überdies noch stetig sind.



Beispiel

Beispiel 6.10

Mathematik für Informatik, p.246, Mathematik für Informatik, p.247

Die Funktion $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - y^3 + \sin\left(x^2 + y\right) + 1$ ist in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2x\cos\left(x^2 + y\right)$ und $f_y(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + \cos\left(x^2 + y\right)$ sind ebenfalls partiell differenzierbar. Daher können wir auch partielle

Ableitungen höherer Ordnung bilden. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= f_{xx}(x,y) = 6x + 4y + 2\cos\left(x^2+y\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= f_{xy}(x,y) = 4x - 2x\sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4x - 2x\sin\left(x^2+y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= f_{yy}(x,y) = -6y - \sin\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Tangentialebene und ihre Existenz

Mathematik für Informatik, p.247

- Die **partiellen Ableitungen** legen die **Tangentialebene** $\tau(x_0, y_0)$ im Punkt (x_0, y_0) fest, *falls diese existiert*.
- **Parameterdarstellung der Tangentialebene:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

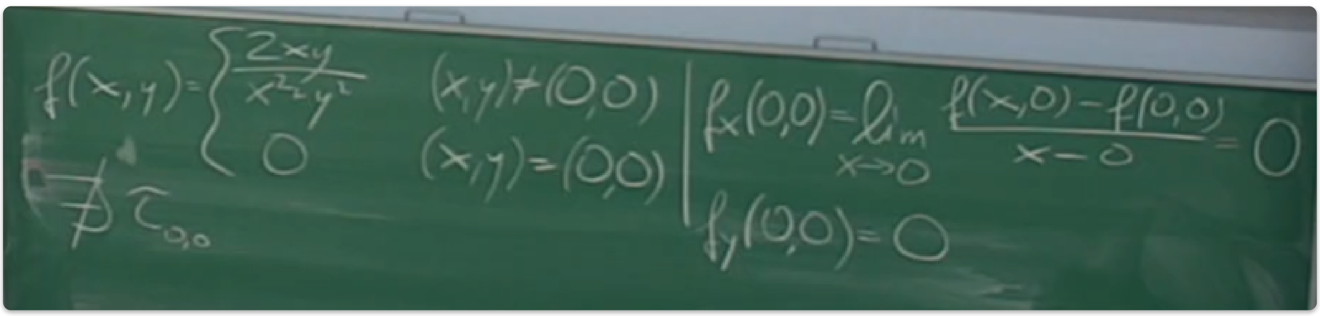
  (Hierbei ist $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ein Punkt auf der Ebene, und die Vektoren mit λ und μ sind Richtungsvektoren, die durch die partiellen Ableitungen bestimmt werden.)
- **Alternative Darstellung (Gleichung der Tangentialebene):**

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  (Diese Gleichung ist oft praktischer für Berechnungen.)
- **Wichtiger Hinweis:** Die Tangentialebene *muss nicht existieren*, selbst wenn die partiellen Ableitungen existieren.
  - **Beispiel:** Funktion aus (6.2) (siehe Abb. 6.4, rechtes Bild).
    - **--hier Abbildung 6.4, rechtes Bild einfügen--**
    - Für diese Funktion gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

      und analog $f_y(0,0) = 0$.
    - Trotz existierender partieller Ableitungen ist die Funktion bei $(0,0)$ **nicht einmal stetig**.
    - **Geometrische Bedeutung:** Die Tangenten in x- und y-Richtung existieren, aber die Tangentialebene existiert nicht. Die x- und y-Achse sind in diesem Fall die Nullstellenmenge der Funktion.



Satz von Schwarz

ⓘ **Satz 6.11 (Satz von Schwarz)**

Pasted image 20250513093334.png, Mathematik für Informatik, p.248

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen f_{xy} und f_{yx} in D existieren und stetig sind. Dann gilt

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Ist f m-mal stetig partiell differenzierbar in D, so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beispiel für den Satz