# 5. Divide and Conquer

Divide-and-Conquer: Allgemeines Prinzip für effiziente Problemlösungsstrategien.

Vorgehensweise:

- Teile: Zerlege das Problem in mehrere, meist zwei, kleinere Teilprobleme.
- Herrsche (Conquer): Löse jeden der Teilprobleme rekursiv.
- Zusammenführen (Combine): Fasse die Lösungen der Teilprobleme zu einer Gesamtlösung zusammen.

Zitat:

> *Divide et impera.*
> *Veni, vidi, vici.*
>
> *Julius Caesar*

---

## Sortieren: Wiederholung

- Primitive Sortierverfahren:
    - Bubblesort
    - Insertionsort
    - Selectionsort
- Laufzeit: Die Laufzeit dieser Verfahren liegt im Worst- und Average-Case immer in $\Theta(n^2)$.
- Frage: Kann man im Worst- und Average-Case schneller sortieren?
- Antwort: Ja. Mergesort ist ein Beispiel dafür.

# Mergesort (Sortieren durch Mischen)

- Mergesort:
  - Teile Array in zwei Hälften.
  - Sortiere jede Hälfte rekursiv.
  - Verschmelze zwei Hälften zu einem sortierten Ganzen.

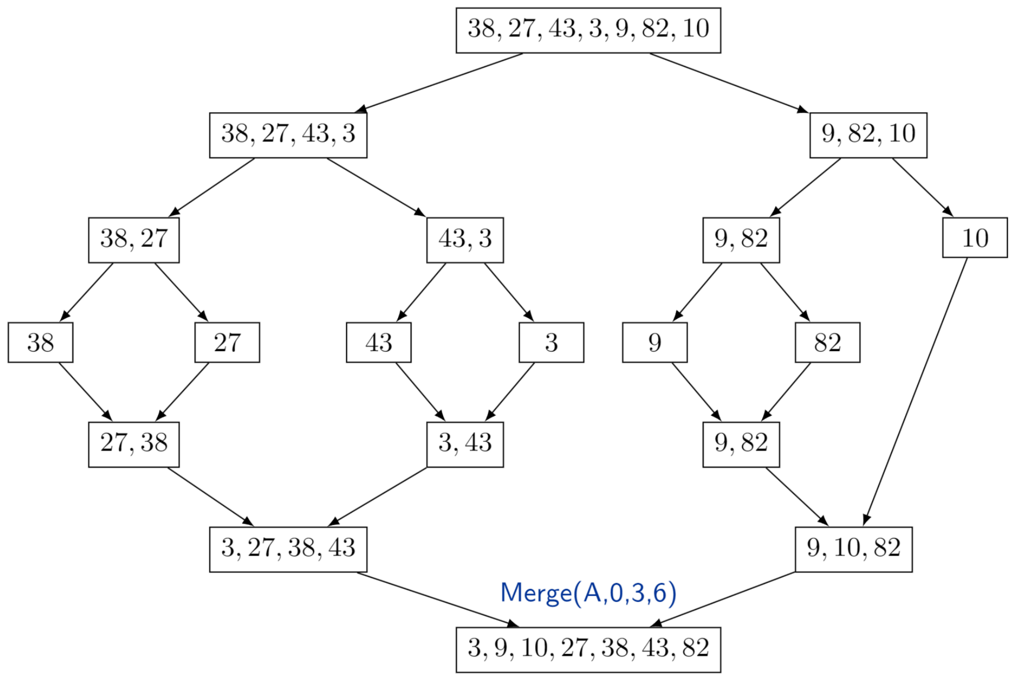
| | | | |
|---|---|---|---|
| A L G O R I T H M S | | | |
| A L G O R | I T H M S | teile | $O(1)$ |
| A G L O R | H I M S T | sortiere | $O(2T(n/2))$ |
| A G H I L M O R S T | | verschmelze | $O(n)$ |

- Pseudocode:
  - Mergesort für ein Array $A$.
  - Sortiert den Bereich $A[l]$ bis $A[r]$.

```
Mergesort(A,l,r):
if l < r
    m ← ⌊(l + r)/2⌋
    Mergesort(A,l,m)
    Mergesort(A,m + 1,r)
    Merge(A,l,m,r)
```

- Aufruf: Mergesort($A$, $0$, $n-1$) für ein Array $A$ mit $n$ Elementen.

## Beispiel




## Merging (Verschmelzen)

- Vorgehen: Verschmelze zwei sortierte Listen zu einer sortierten Gesamtliste.
- Wie kann man effizient verschmelzen?
  - Benutze temporäres Array.
  - Durchlaufe beide Listen vom Anfang an.
  - Führe die Elemente beider Listen im Reißverschlussverfahren zusammen, übernehme dabei jeweils das kleinste Element der beiden Listen.
  - Hat lineare Laufzeit.


- Pseudocode: Merge auf ein Array $A$. Verwendet Hilfsarray $B$.

```
Merge(A,l,m,r):
i ← l, j ← m+1, k ← l
while i ≤ m und j ≤ r
    if A[i] ≤ A[j]
        B[k] ← A[i], i ← i+1
    else
        B[k] ← A[j], j ← j+1
    k ← k+1
if i > m
    for h ← j bis r
        B[k] ← A[h], k ← k+1
else
    for h ← i bis m
        B[k] ← A[h], k ← k+1
for h ← l bis r
    A[h] ← B[h]
```

## Eine nützliche Rekursionsgleichung

- Definition: $C(n)$ = Anzahl der Schlüsselvergleiche (*comparisons*) in Mergesort bei einer Eingabegröße $n$.
- Mergesort Rekursion:

$$C(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 1 \\ \underbrace{C\left(\lceil n/2 \rceil\right)}_{\text{linke Hälfte}} + \underbrace{C\left(\lfloor n/2 \rfloor\right)}_{\text{rechte Hälfte}} + \underbrace{n}_{\text{Verschmelzen}} & \text{sonst} \end{cases}$$

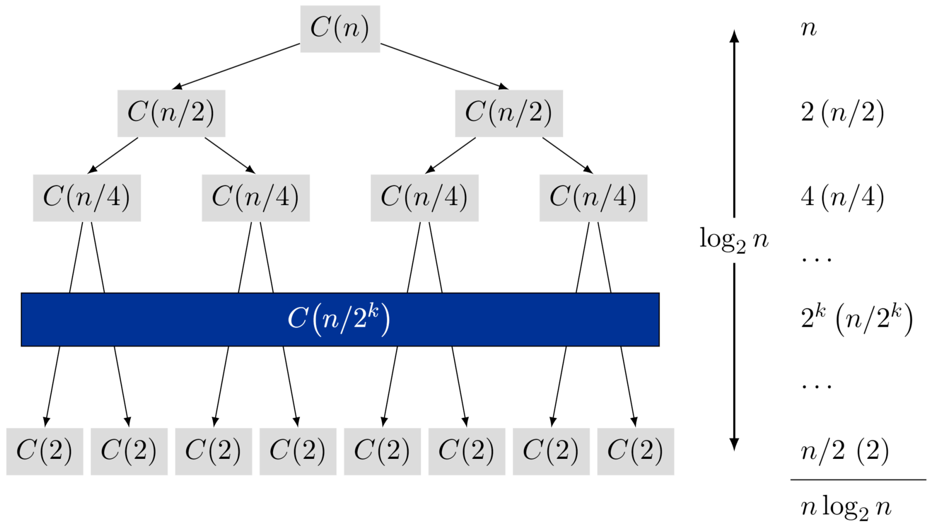
- Lösung: $C(n) = O(n \log_2 n)$.
- Beweis: Wir beschreiben mehrere Wege das $O(n \log_2 n)$ zu beweisen.
- Annahmen:
  - Wir nehmen anfänglich an, dass $n$ eine Zweierpotenz ist.
  - Für ein allgemeines $n'$ mit $\frac{n}{2} < n' < n$ (wobei $n$ eine Zweierpotenz ist) gilt dann:

$$C(n') = O(n \log n)$$

  - da $O(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}) = O(n \log n)$ gilt.

## Beweis durch Rekursionsbaum

$$C(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 1 \\ \underbrace{2C\,(n/2)}_{\text{Sortieren beider Hälften}} + \underbrace{n}_{\text{Verschmelzen}} & \text{sonst} \end{cases}$$




## Beweis durch Auflösen der Rekursion

Behauptung: Wenn $C(n)$ die Rekursion erfüllt, dann $C(n) \leq n \log_2 n$.

$$C(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 1 \\ \underbrace{2C\,(n/2)}_{\text{Sortieren beider Hälften}} + \underbrace{n}_{\text{Verschmelzen}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Für $n > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{C(n)}{n} &\leq \frac{2C(n/2)}{n} + 1 = \frac{C(n/2)}{n/2} + 1 \\ &\leq \frac{2C(n/4)}{n/2} + \frac{n/2}{n/2} + 1 = \frac{C(n/4)}{n/4} + 1 + 1 \\ &\leq \dots \\ &\leq \frac{C(n/n)}{n/n} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\log_2 n} \\ &= \log_2 n \end{aligned}$$

## Beweis durch Induktion

Behauptung: Wenn $C(n)$ die Rekursion erfüllt, dann $C(n) \leq n \log_2 n$.

$$C(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 1 \\ \underbrace{2C\,(n/2)}_{\text{Sortieren beider Hälften}} \quad + \quad \underbrace{n}_{\text{Verschmelzen}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: (durch Induktion auf $n$)

- Induktionsanfang: $n = 1$.
- Induktionsbehauptung: $C(n) \leq n \log_2 n$.
- Ziel: Zeige, dass $C(2n) \leq 2n \log_2 2n$.

$$\begin{aligned} C(2n) &\leq 2C(n) + 2n \\ &\leq 2n \log_2 n + 2n \\ &= 2n(\log_2 n + 1) \\ &= 2n(\log_2(2n/2) + 1) \\ &= 2n(\log_2 2n - \log_2 2 + 1) \\ &= 2n(\log_2 2n - 1 + 1) \\ &= 2n \log_2 2n \end{aligned}$$

## Analyse der Mergesort-Rekutsion

Behauptung: Wenn $C(n)$ die folgende Rekursion erfüllt, dann $C(n) \leq n\lceil \log_2 n \rceil$.

$$C(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 1 \\ \underbrace{C\,(\lceil n/2 \rceil)}_{\text{linke Hälfte}} + \underbrace{C\,(\lfloor n/2 \rfloor)}_{\text{rechte Hälfte}} + \underbrace{n}_{\text{Verschmelzen}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: (durch Induktion auf $n$)

- Induktionsanfang: $n = 1$.
- Definiere $n_1 = \lceil n/2 \rceil$ , $n_2 = \lfloor n/2 \rfloor$.
- Induktionsschritt: Ist wahr für $1, 2, \ldots, n-1$.

$$\begin{aligned} C(n) &\leq C(n_1) + C(n_2) + n \\ &\leq n_1 \lceil \log_2 n_1 \rceil + n_2 \lceil \log_2 n_2 \rceil + n \\ &\leq n_1 \lceil \log_2 n_1 \rceil + n_2 \lceil \log_2 n_1 \rceil + n \\ &= n \lceil \log_2 n_1 \rceil + n \\ &\leq n\left(\lceil \log_2 n \rceil - 1\right) + n \\ &= n \lceil \log_2 n \rceil \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \lceil n/2 \rceil \\ &\leq \lceil 2^{\lceil \log_2 n \rceil}/2 \rceil \\ &= 2^{\lceil \log_2 n \rceil}/2 \\ &\Rightarrow \log_2 n_1 \leq \lceil \log_2 n \rceil - 1 \end{aligned}$$

- Asymptotische untere Schranke für $C(n)$: Das Verschmelzen für $n$ Elemente benötigt zumindest $C_{best} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Schlüsselvergleiche.
- Daher gilt:

$$C_{best}(n) = C_{worst}(n) = C_{avg}(n) = \Theta(n \log n)$$

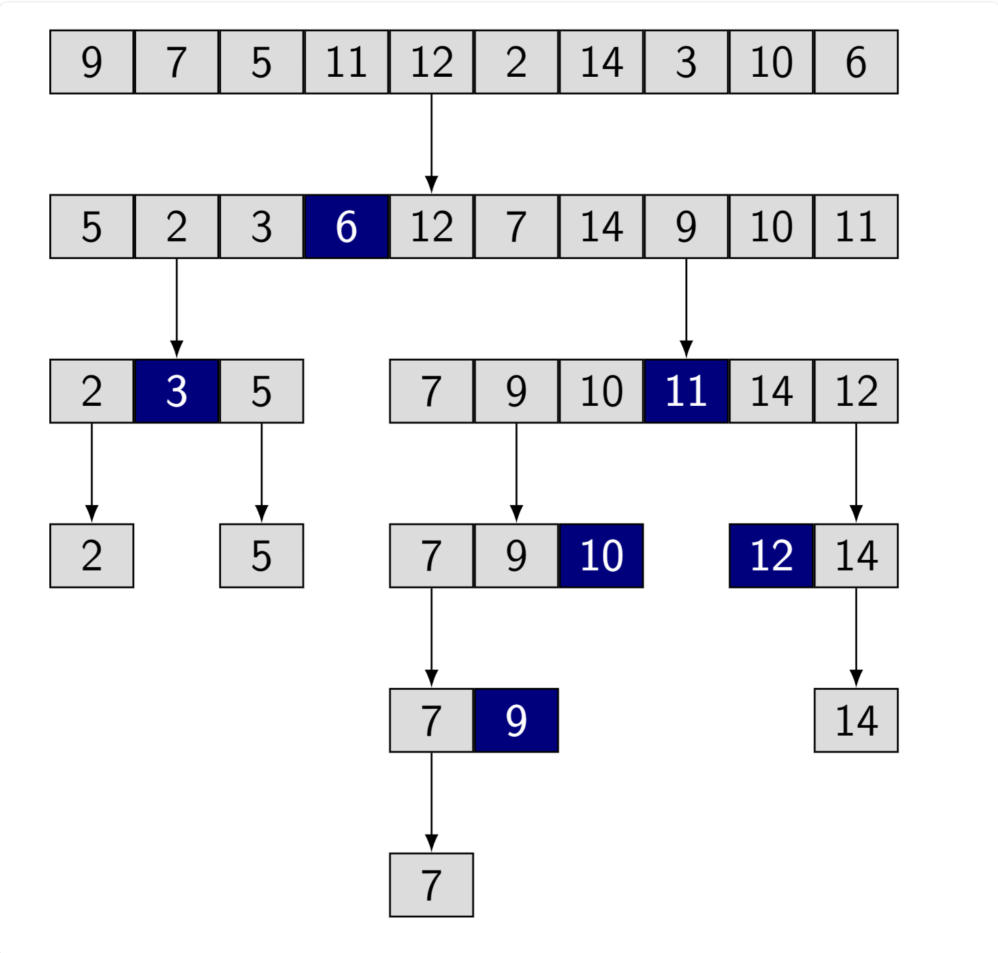
- Allgemein: Die Laufzeit von Mergesort wird durch die Anzahl der notwendigen Vergleiche dominiert.
- Daher gilt:

$$T_{best}(n) = T_{worst}(n) = T_{avg}(n) = \Theta(C(n)) = \Theta(n \log n)$$

# Quicksort

- Quicksort: Benutzt auch das Divide-and-Conquer-Prinzip, aber auf eine andere Art und Weise.
- Teile: Wähle „Pivotelement“ $x$ aus Folge $A$, z.B. das an der letzten Stelle stehende Element. Teile $A$ ohne $x$ so in zwei Teilfolgen $A_1$ und $A_2$, dass gilt:
  - $A_1$ enthält nur Elemente $\leq x$.
  - $A_2$ enthält nur Elemente $\geq x$.
- Herrsche:
  - Rekursiver Aufruf für $A_1$.
  - Rekursiver Aufruf für $A_2$.
- Kombiniere: Bilde $A$ durch Hintereinanderfügen von $A_1$, $x$, $A_2$.

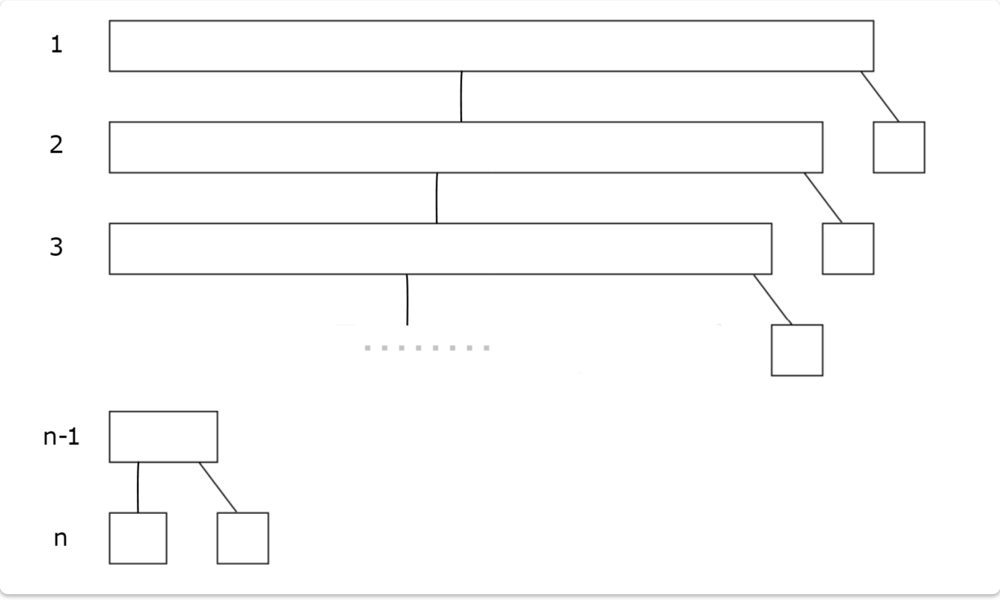
## Beispiel




## Analyse

- Best-Case:
  - Die beiden Teilfolgen haben *immer (ungefähr) die gleiche Länge*.
  - Die Höhe des Aufrufbaumes ist $\Theta(\log n)$.
  - Auf jeder Aufrufebene werden $\Theta(n)$ Vergleiche durchgeführt.
  - Die Anzahl der Vergleiche und die Laufzeit liegen in $\Theta(n \log n)$.

- Worst-Case: Jede (Teil-)Folge wird ***immer beim letzten (oder immer beim ersten) Element geteilt***.



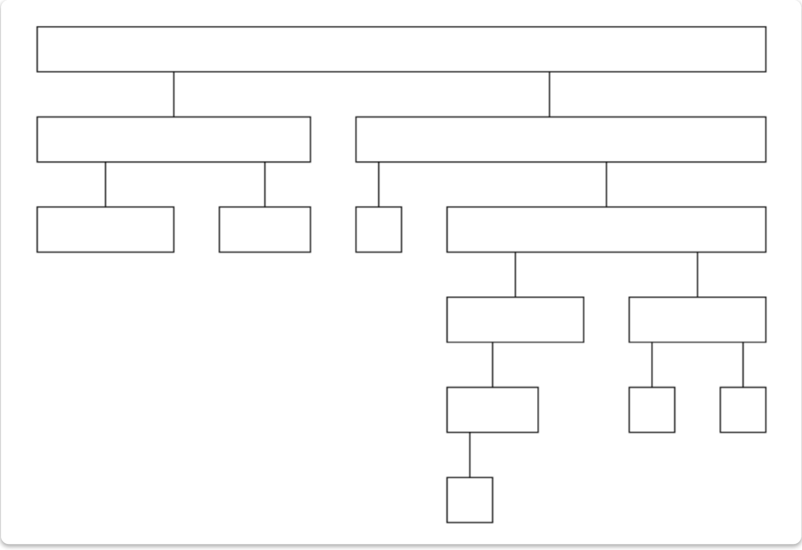

- Die Anzahl der Vergleiche ist $\Theta(n^2)$.

## Worst-Case:

- Mögliches Szenario:
  - *Aufsteigend sortierte Folge* und es wird ***immer das hinterste Element als Pivotelement gewählt***.
  - Alle restlichen Elemente sind kleiner als das Pivotelement und daher wird die Rekursion ***nur für die linke Seite*** (alle restlichen Elemente außer dem Pivotelement) weitergeführt. Die rechte Seite ist leer (*Terminierung der Rekursion*).
  - Die Größe der Teilfolge in der nächsten Rekursionsstufe verringert sich ***immer nur um 1!***
  - $\Theta(n)$ rekursive Aufrufe.
  - Die Laufzeit liegt in $\Theta(n^2)$.
  - Der zum Array zusätzlich benötigte Speicherplatz ist durch die $\Theta(n)$ rekursiven Aufrufe ebenfalls $\Theta(n)$.
- „Vermeiden" des Worst-Case in der Praxis:
  - Pivotelement ***immer zufällig wählen***.
    - *Randomisierter Quicksort*.
    - Es ist ***nicht mehr*** die sortierte Folge das Worst-Case-Szenario.
  - Betrachte ***jeweils das erste, letzte und mittlere Element*** (an der Position $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) und nimm den ***Median als Pivotelement***.

## Average-Case:

- Komplizierter Beweis zeigt, dass die Anzahl der Vergleiche und die Laufzeit dafür auch in $\Theta(n \log n)$ liegen.
- Beispiel für Average-Case: Jede (Teil-)Liste wird nahe der Mitte geteilt.



- Die Anzahl der Vergleiche ist $\Theta(n \log n)$.

# Speicherplatzkomplexität

- Speicherplatzkomplexität: Ist ein Maß für das Anwachsen des Speicherbedarfs eines Algorithmus in Abhängigkeit von der Eingabegröße.
- Beispiele für Speicherplatzkomplexität:
    - Quicksort: Worst-Case liegt in $\Theta(n)$, Best-/Average-Case liegt in $\Theta(\log n)$.
    - Mergesort: Best-/Average-/Worst-Case liegt in $\Theta(n)$.
- Praxis: In der Praxis wird daher Quicksort sehr oft Mergesort vorgezogen.

## Vergleich von Sortierverfahren

Tabelle: Laufzeit und Vergleiche.

| **Sortierverfahren** | **Best-Case** | **Average-Case** | **Worst-Case** |
|---|---|---|---|
| Insertionsort | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ |
| Selectionsort | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ |
| Mergesort | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ |
| Quicksort | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n^2)$ |

Tabelle: Zusätzlicher Speicher.

| **Sortierverfahren** | **Best-Case** | **Average-Case** | **Worst-Case** |
|---|---|---|---|
| Insertionsort | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Selectionsort | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Mergesort | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| Quicksort | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(n)$ |

# Einsatz von Sortierverfahren

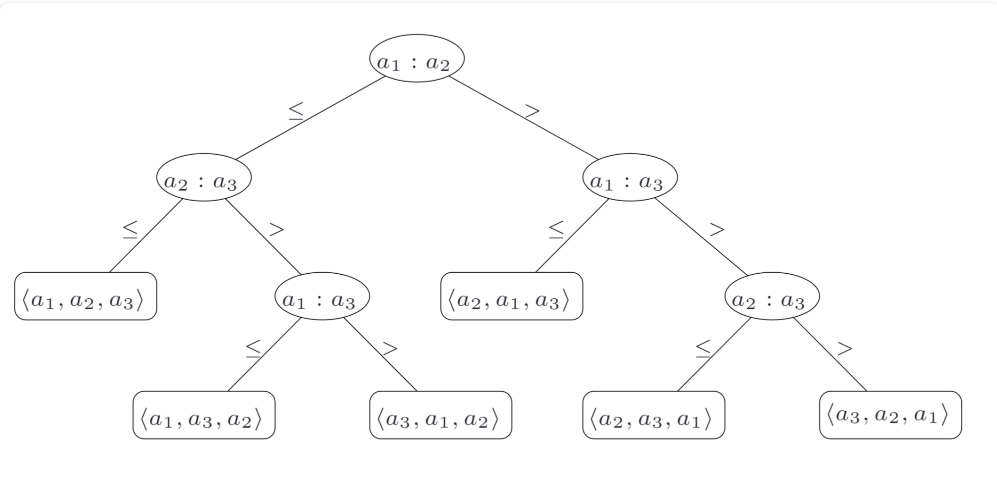
- Quicksort:
    - Wird sehr oft in allgemeinen Sortiersituationen bevorzugt.
- Mergesort:
    - Mergesort wird hauptsächlich für das Sortieren von Listen verwendet.
    - Wird auch für das Sortieren von Dateien auf externen Speichermedien eingesetzt.
    - Dabei wird aber eine iterative Version von Mergesort (*Bottom-up-Mergesort*) verwendet, bei der nur $\log n$-mal eine Datei sequentiell durchgegangen wird.

## Eine untere Schranke

- Ausgangslage: Wir haben verschiedene Sortieralgorithmen kennengelernt. Die Worst-Case Laufzeit liegt im Bereich $O(n \log n)$ bis $O(n^2)$.
- Frage: Geht es besser als in $O(n \log n)$ Zeit, z.B. $O(n)$?
- Antwort: Wir zeigen für das allgemeine Sortierproblem unter der Annahme, dass $n$ verschiedene Schlüssel sortiert werden müssen, dass $O(n \log n)$ optimal ist.

## Entscheidungsbaum

- Entscheidungsbaum:
    - Die Knoten entsprechen einem Vergleich von Elementen $a_i$ und $a_j$.
    - Die Blätter entsprechen den Permutationen.
- Beispiel: Entscheidungsbaum des Insertionsort Algorithmus für $(a_1, a_2, a_3)$.




- Anzahl der Schlüsselvergleiche: Die Anzahl der Schlüsselvergleiche im Worst-Case $C_{worst}$ entspricht genau der Anzahl der Knoten auf dem längsten Pfad von der Wurzel bis zu einem Blatt minus 1.
- Frage: Wie lautet die untere Schranke für die Höhe eines Entscheidungsbaums?
- Satz: Jeder Entscheidungsbaum für die Sortierung von $n$ paarweise verschiedenen Schlüsseln hat die Höhe $\Omega(n \log_2 n)$.

### Beweis

Beweis:

- Betrachte einen Entscheidungsbaum der Höhe $h$, der $n$ unterschiedliche Schlüssel sortiert.
- Der Baum hat mindestens $n!$ Blätter.
- $n! \leq 2^h$, das impliziert $h \geq \log_2(n!)$.
- Hilfsrechnung:
  $n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq (\lceil \frac{n}{2} \rceil)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}$
- $h \geq \log_2(n!) \geq \log_2\left(\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}\right) \geq \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log_2 n - 1) = \Omega(n \log_2 n)$

## Untere Schranke für allgemeines Sortierproblem

- Satz: Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt zum Sortieren von $n$ paarweise verschiedenen Schlüsseln mindestens $\Omega(n \log n)$ Laufzeit im Worst-Case.
- Folgerung: Mergesort ist ein asymptotisch *zeitoptimaler* Sortieralgorithmus. Es geht (asymptotisch) nicht besser!

# Lineare Sortierverfahren

- Beobachtung: Das Ergebnis für die untere Schranke basiert auf der Annahme, dass man keine Eigenschaften der zu sortierenden Elemente ausnutzt, sondern lediglich den Vergleichsoperator.
- Praxis: Tatsächlich sind aber meist Wörter über ein bestimmtes Alphabet (d.h. einer bestimmten Definitionsmenge) gegeben, z.B.:
  - Wörter über $\{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$.
  - Dezimalzahlen.
  - Ganzzahlige Werte aus einem kleinen Bereich.
- Lineare Sortierverfahren: Diese Information über die Art der Werte und ihren Wertebereich kann man zusätzlich ausnutzen und dadurch im Idealfall Verfahren erhalten, die auch im Worst-Case in linearer Zeit sortieren.

## Beispiel: Countsort

Eingabe: $n$ Zahlen im Bereich $0$ bis $z$ im Array A, Hilfsarray Counts, $z < n$

```
for j ← 0 bis z
    Counts[j] ← 0
for i ← 0 bis n − 1
    Counts[A[i]] ← Counts[A[i]] + 1
i ← 0
for j ← 0 bis z
    for k ← 0 bis Counts[j] − 1
        A[i] ← j
        i ← i + 1
```

Komplexität: Erste Schleife in $\Theta(z)$, zweite Schleife in $\Theta(n)$, dritte (mit vierter) Schleife kann nur maximal $n$ Zahlen bearbeiten und ist daher auch in $\Theta(n)$. Damit läuft der Algorithmus in $\Theta(z + n + n) = \Theta(n)$ (da $z = O(n)$).

---

# Beispiele zu Divide and Conquer:

Gute Beispiele für dieses Prinzip findet man in den Slides ab Seite 54.

Da hätte man ein mal Inversionen zählen und dann noch Closest Pair of Points