7. FS - Globale Operationen

Kosinus- und Sinusfunktionen

- Kosinusfunktion:
  - $cos(x)$ hat den Wert 1 am Ursprung ($cos(0) = 1$)
  - Durchläuft von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode
- Sinusfunktion:
  - $sin(x)$ hat den Wert 0 am Ursprung ($sin(0) = 0$)
  - Durchläuft ebenfalls von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ eine volle Periode

7. Globale Operationen > Kosinus- und Sinusfunktionen

Frequenz und Periode

Für $cos(x)$ innerhalb einer Strecke der Länge $T = 2\pi$ ist die Anzahl der Perioden 1: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

7. Globale Operationen > Frequenz und Perioden

Addition von Cos/Sin Funktionen

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

Erweiterung auf beliebige Funktionen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x)$$

- Fourierkoeffizienten:
  - A_k, B_k: Bestimmen das Gewicht der jeweiligen Kosinus- und Sinusfunktionen.
  - Frequenzen der beteiligten Funktionen: Ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0.
- Fourieranalyse: Berechnung der Fourierkoeffizienten aus der gegebenen Funktion $g(x)$.

7. Globale Operationen > Addition von Kosinus- und Sinusfunktionen

---

Fourierintegral

- Fourierintegral: Erweiterung auf nicht periodische Funktionen, die ebenfalls als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können:

$$g(x) = \int_0^\infty A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \sin(\omega x)\, d\omega$$

- Koeffizienten A_ω und B_ω:
    - Beschreiben die Amplitude der entsprechenden Kosinus- bzw. Sinusfunktion bei der Frequenz ω.
    - Bestimmung der Koeffizienten:

$$A_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x)$$

$$B_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x)$$

- Spektrum der Funktion:
    - $A(\omega)$ und $B(\omega)$ sind kontinuierliche Funktionen, die das Spektrum der Frequenzen im Signal repräsentieren.

Fouriertransformation und Fourier-Spektrum

- Fouriertransformation:
    - Vereinfacht die Darstellung, indem die Ausgangsfunktion $g(x)$ und das Spektrum als komplexwertige Funktionen betrachtet werden.
- Fourierspektrum $G(\omega)$:
    - Wird als komplexe Funktion dargestellt:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) g(x)$$

7. Globale Operationen > Fourierintegral – Nicht periodische Funktionen

---

Diskrete Fourier-Transformationen

DFT: Vorwärtstransformation

Für ein diskretes Signal $g(u)$ der Länge M (mit $u = 0, \dots, M-1$), wird das Fourierspektrum $G(m)$ für $m = 0, \dots, M-1$ durch die Vorwärtstransformation berechnet:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) e^{-i\frac{2\pi mu}{M}}$$

DFT: Inverse Transformation

Die inverse DFT zur Rekonstruktion des Signals $g(u)$ aus dem Spektrum $G(m)$:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) e^{i\frac{2\pi mu}{M}}$$

- Beide Transformationen sind identisch: Vorwärts- und inverse DFT sind mathematisch symmetrisch.

Eigenschaften des Fourierspektrums

- Sowohl das Signal $g(u)$ als auch das Fourierspektrum $G(m)$ sind komplexwertige Vektoren der Länge M.
- Betrag des Fourierspektrums (Magnitude):

$$\|G(m)\| = \sqrt{G_{\text{real}}^2(m) + G_{\text{imag}}^2(m)}$$

  7. Globale Operationen > Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Convolution Theorem

Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich gleich der Punktweise-Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich.

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) Ff * g$$

7. Globale Operationen > Convolution Theorem

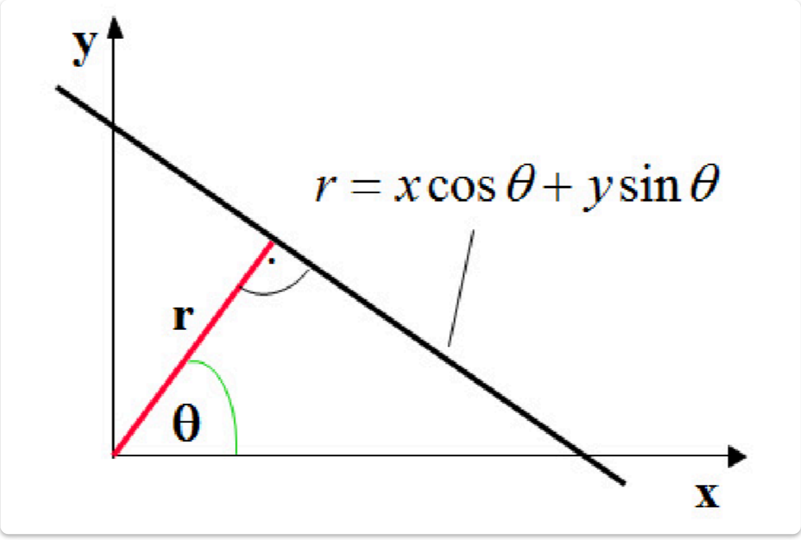
Hough Transformation

Andere Darstellung von Linien

Statt 5. FS - Rasterisierung > Linien Darstellung wird hier die Hessesche Normalform verwendet:

$$r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$$

- Parameter:
  - r: Normalabstand der Geraden zum Ursprung.
  - θ: Winkel des Normalabstands zur x-Achse.


y
$r = x\cos\theta + y\sin\theta$
r
θ
x