4.1 Folgen

Link zur Formelsammlung: FS_4.1 Folgen

1. Definitionen und Grenzwert

Definition

Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Menge M, die jeder natürlichen Zahl $n \epsilon \mathbb{N}$ ein Element $x_n \epsilon M$ zuordnet.

Beispiel: $\begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x_n = 2n \end{matrix}$ für $n \in \mathbb{N}$

Konstante Folge	**Arithmetische Folge**	**Geometrische Folge**
$x_n = 2 \to 2, 2, 2, 2, \ldots$	$x_n = x_0 + n * d \to 2, 5, 8, \ldots$	$x_n = x_n * q^n \to 2, 6, 18, \ldots.$

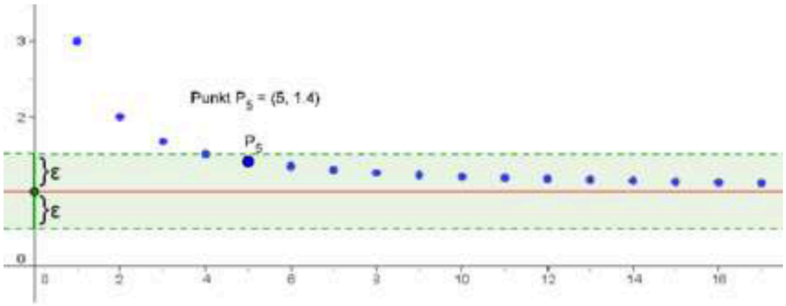
Folgen können entweder **explizit** oder **rekursiv** definiert werden.

Grenzwert

Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ϵ-Umgebung von a fast alle Folgenglieder x_n liegen.

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**. (Beispiel: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{n^2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(\epsilon) : |x_n - x| < \epsilon$$



Schreibweise

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ oder } x_n \to x$$

Divergenz

Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, heißt sie unbestimmt divergent. Das wäre zum Beispiel:

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Konvergenz

Besitzt eine Folge einen eindeutigen Grenzwert, ist sie bestimmt konvergent. Besitzt sie den Grenzwert $\pm\infty$ heißt sie unbestimmt konvergent bzw. bestimmt divergent.

1. Definition und Grenzwert

Mathematik für Informatik, p.154

☰ Beispiel 4.1

Betrachten wir die Zahlen $a_0 = 3, a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415$, $a_5 = 3.14159, a_6 = 3.141592, \ldots$ Allgemein sei a_n die Dezimalentwicklung von π bis zur n -ten Nachkommastelle. Je größer n ist, desto besser wird π von a_n approximiert, d.h., der Abstand $|a_n - \pi|$ wird mit wachsendem n immer kleiner. Dabei wird π sogar beliebig genau approximiert: Legt man zu Beginn eine erlaubte Abweichung fest (z.B. höchstens 10^{-m}), so wird diese Vorgabe von allen a_n mit hinreichend großem Index (in diesem Fall $n \geq m$) auch erfüllt. Dies ist die Grundidee des Grenzwertbegriffs.

Definition 4.2

Unter einer reellen Folge versteht man eine Anordnung von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Eine andere Schreibweise ist $(a_n)_{n\geq 0}$. Folgen können auch als Funktionen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden. In diesem Fall gilt $a(n) = a_n$. Die Zahlen a_n, aus denen die Folge aufgebaut ist, nennt man die Glieder der Folge, und n heißt Index des Folgenglieds a_n.

> *Bei Bedarf kann der Index auch mit 1 oder einer anderen natürlichen Zahl k beginnen, d.h. man betrachtet dann Folgen der Gestalt $(a_n)_{n\geq 1}$ bzw. $(a_n)_{n\geq k}$.*

Tafelbild

Beispiel 4.3

Mathematik für Informatik, p.155

Im Folgenden geben wir einige Beispiele für Folgen.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1 : 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(b) Mit $a_n = 2$ erhalten wir die Folge 2, 2, 2,2, ... Diese Folge ist eine konstante Folge.

(c) Die arithmetischen Folgen sind durch $a_n = a_0 + dn$ gegeben. Die Differenz von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, d.h., die Gleichung $a_n - a_{n-1} = d$ ist für alle $n \geq 1$ erfüllt. Beispiel: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$. Da ist einfach der Abstand zwischen den Folgegliedern immer gleich.

(d) Geometrische Folgen sind Folgen der Form $a_n = a_0 q^n$, d.h., der Quotient von je zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant, also $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Beispiel: $1, 3, 9, 27, 81,$. (Es ist sozusagen "wie eine Polynomfunktion")

(e) Folgen können auch rekursiv definiert werden, d.h., das n-te Folgenglied ist durch eine Funktion der vorher gehenden Folgenglieder bestimmt. Z.B. beschreibt

$a_0 = 1, a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ die Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
(Also kurz gesagt: Folgenglieder berechnet man sich mit den Vorigen)

Tafelbild

Häufungspunkte:

Mathematik für Informatik, p.156

Häufungspunkt

Wenn in jeder ϵ-Umgebung von x unendlich viele Folgengliederliegen, so ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\geq 0}$.
Im Gegensatz zum Grenzwert kann es mehrere Häufungspunkte geben.

Der größte Häufungspunkt heißt: **Limes superior**

Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior**

Konvergiert eine Folge, so gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \boldsymbol{lim\ sup}_{n\to\infty} x_n = \boldsymbol{lim\ inf}_{n\to\infty} x_n$, da es nur einen Häufungspunkt geben darf.

Definition Fast alle

"Fast alle" = alle bis auf endlich viele

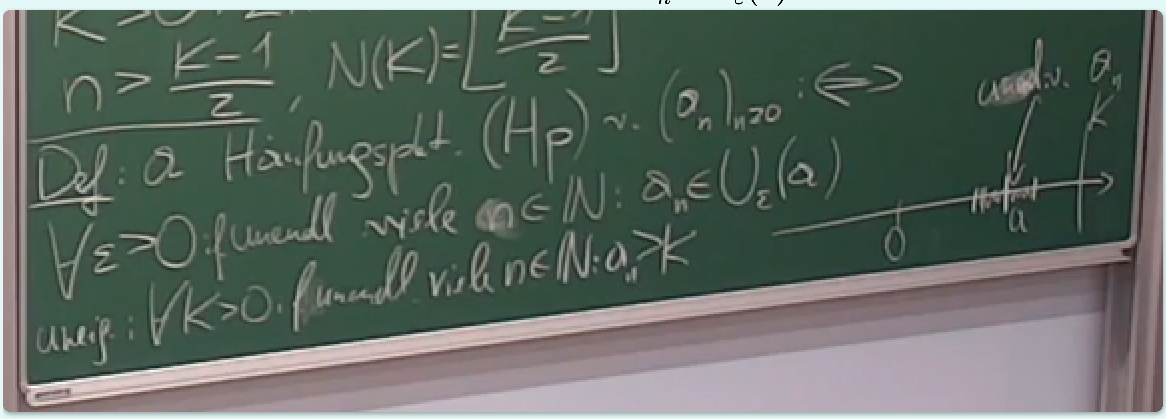
Definition ε-Umgebung

Wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$. Analog zum uneigentlichen Grenzwert werden uneigentliche Häufungspunkte definiert.

- Der größte Häufungspunkt (uneigentliche mit eingeschlossen) heißt Limes superior (man schreibt: $\limsup_{n\to\infty} a_n$),
- der kleinste Häufungspunkt Limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$).

Definition Häufungspunkt

Wenn für alle $\varepsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in U_\varepsilon(a)$



- Grenzwert einer Folge (a):

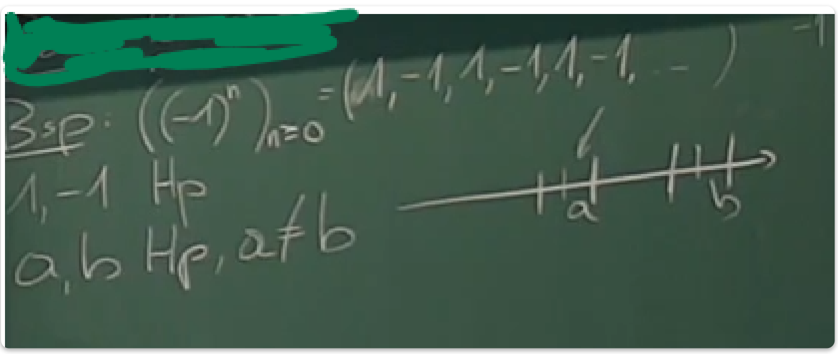
- Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Bedeutung: Ab N liegen alle Folgenglieder innerhalb des ε-Abstands um a.
- Konsequenz: Enthält eine ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder nicht, ist a kein Grenzwert.
  *
  

- Abbildung 4.1 Konvergenz von Folgen

- Häufungspunkt einer Folge (a):
  - Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält die ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder.
  - Anzahl der Folgenglieder außerhalb des ε-Abstands kann endlich oder unendlich sein.
- Limes superior und Limes inferior:
  - Existieren für jede Folge (eigentlich oder uneigentlich), im Gegensatz zum Grenzwert (siehe Beispiel 4.5).
- Zusammenhang zwischen Grenzwert und Häufungspunkt:
  - Jeder Grenzwert einer Folge ist auch ein Häufungspunkt.
  - Häufungspunkt ist eine abgeschwächte Version von Grenzwert
  - Es müssen unendlich viele in der ε Umgebung liegen, aber es können auch unendlich viele Außerhalb liegen
  - $\rightarrow$ Die Umkehrung gilt nicht.
- Eindeutigkeit des Grenzwerts:
  - Sind a und b zwei verschiedene Häufungspunkte, dann existiert ein $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - b|$, sodass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.
  - Folglich können nicht fast alle Folgenglieder in beiden Umgebungen liegen.
  - Eine konvergente Folge besitzt nur einen Häufungspunkt.
  - Im Falle der Konvergenz gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Tafelbild 1 zu Definitionen

Beispiel für Folge mit Häufungspunkte ohne Grenzwert:



Limes / Grenzwert:

Mathematik für Informatik, p.155

Man sagt, eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn sie für alle bis auf endlich viele Ausnahmen gilt. Weiters bezeichnen wir das Intervall

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} || x - a \mid < \varepsilon\}$$

als ε-Umgebung von a.

Definition 4.4

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h., falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

gilt.

> *Für fast alle n gilt an liegt in jeder U(epsilon) von a*

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt konvergent, falls sie einen Grenzwert a besitzt (siehe auch Abb. 4.1). In diesem Falle konvergiert die Folge gegen a, und man schreibt

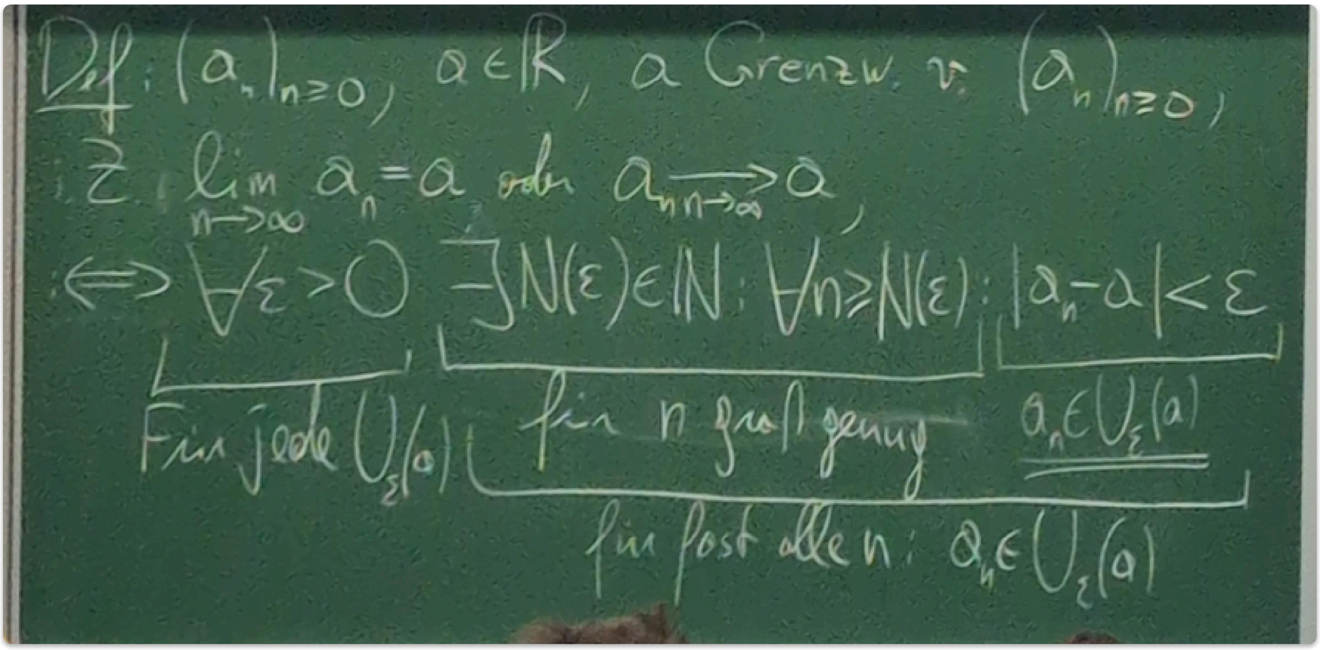
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \longrightarrow a$$

Besitzt die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ keinen Grenzwert, so heißt sie divergent. Eine Folge, die 0 als Grenzwert besitzt, nennt man auch Nullfolge.

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, deren Glieder beliebig groß werden, d.h., für die gilt

$$\forall K > 0 \exists N(K) \in \mathbb{N} \forall n > N(K) : a_n > K,$$

heißt uneigentlich konvergent, und man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analog definiert man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und nennt solche Folgen ebenfalls uneigentlich konvergent. Der Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ wird dann als uneigentlicher Grenzwert bezeichnet.



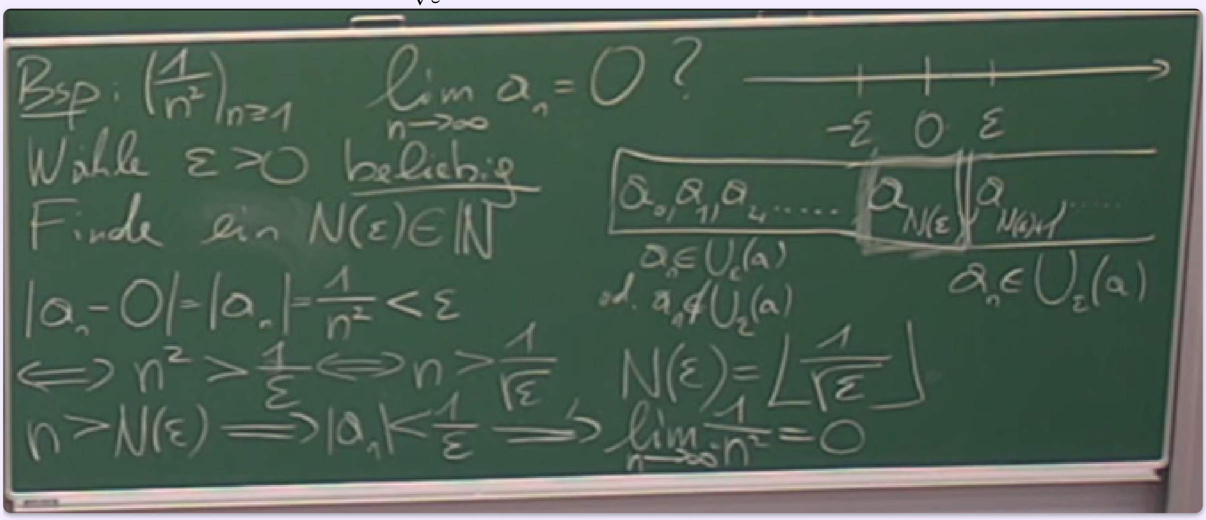
Erweitertes Tafelbild mit Definition von Uneig GW

Beispiele zu Limes:

Beispiel 4.5

Mathematik für Informatik, p.156

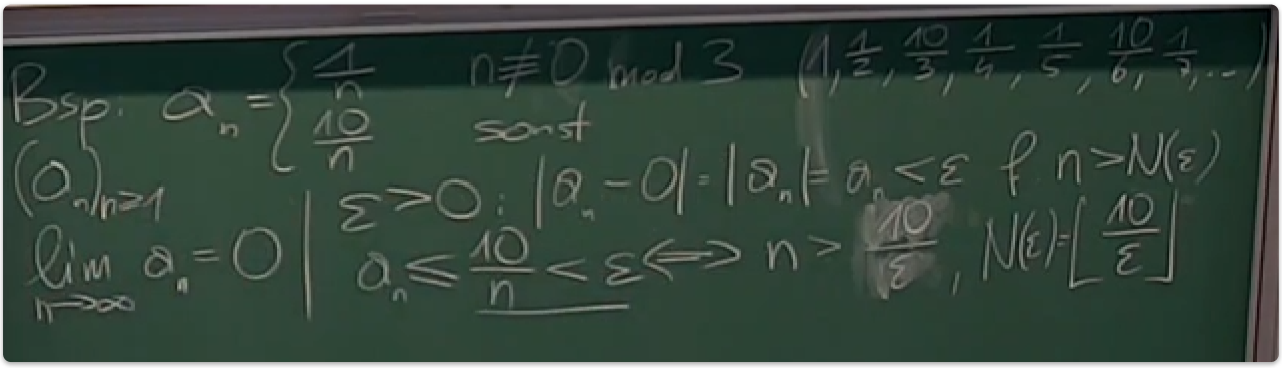
(a) Gegeben sei die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>1} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt $0 < a_n < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, Somit ist 0 Grenzwert dieser Folge:



(b) Sei $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Diese Folge ist divergent. Es liegen jeweils unendlich viele Folgenglieder in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(1)$ und $U_\varepsilon(-1)$. Also sind -1 und 1 Häufungspunkte der Folge. Daher besitzt diese Folge keinen Grenzwert.

(c) Die Folge $a_n = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ ist uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, da für jede beliebig vorgegebene Zahl $K > 0$ eine Quadratzahl existiert, die größer als K ist.

Weiteres Beispiel aus der vo bisschen ausführlicher:



---

2. Monotonie und Beschränktheit

Mathematik für Informatik, p.157

Monotonie

Eine Folge heißt

> monoton fallend, wenn $x_{n+1} \leq x_n$
> streng monoton fallend, wenn $x_{n+1} < x_n$
> monoton steigend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$
> streng monoton steigend, wenn $x_{n+1} > x_n$

Beschränktheit

Eine Folge x_n heißt beschränkt, wenn es Zahlen a, b gibt, so dass

$$\boldsymbol{a \leq x_n \leq b} \ \ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Definition 4.6

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar die strikte Ungleichung $a_{n+1} < a_n$, so spricht man von einer streng monoton fallenden Folge. Falls $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend.

Ergänzung:
Es gibt auch schließlich monoton wachsend/fallend. Davon spricht man genau dann, wenn die Funktion am Anfang macht was sie will, aber nach einer Zeit monoton wachsend/fallend ist.

- a_n schließlich monoton steigend :<=> $\forall n \geq k : a_{n+1} \geq a_n$

Beispiel 4.7

Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ ist streng monoton fallend, da wegen $(n+1)^2 > n^2$ die Ungleichung $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ gilt. Konstante Folgen sind sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend, jedoch in keinem Sinne streng monoton.

Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Die Folge $a_n = n$ ist monoton steigend.

Definition 4.8

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede solche Zahl S heißt obere **Schranke** von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Die *kleinste obere Schranke* wird das **Supremum** genannt. Das Supremum $\sup a_n$ ist somit jene reelle Zahl S_0, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $a_n \leq S_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Aus $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $S_0 \leq S$.

Analog definiert man Beschränktheit nach unten und untere Schranken. Die größte untere Schranke wird **Infimum** genannt und inf a_n geschrieben. Falls die Folge nicht nach oben bzw. unten beschränkt ist, setzt man $\sup a_n = \infty$ bzw. inf $a_n = -\infty$.

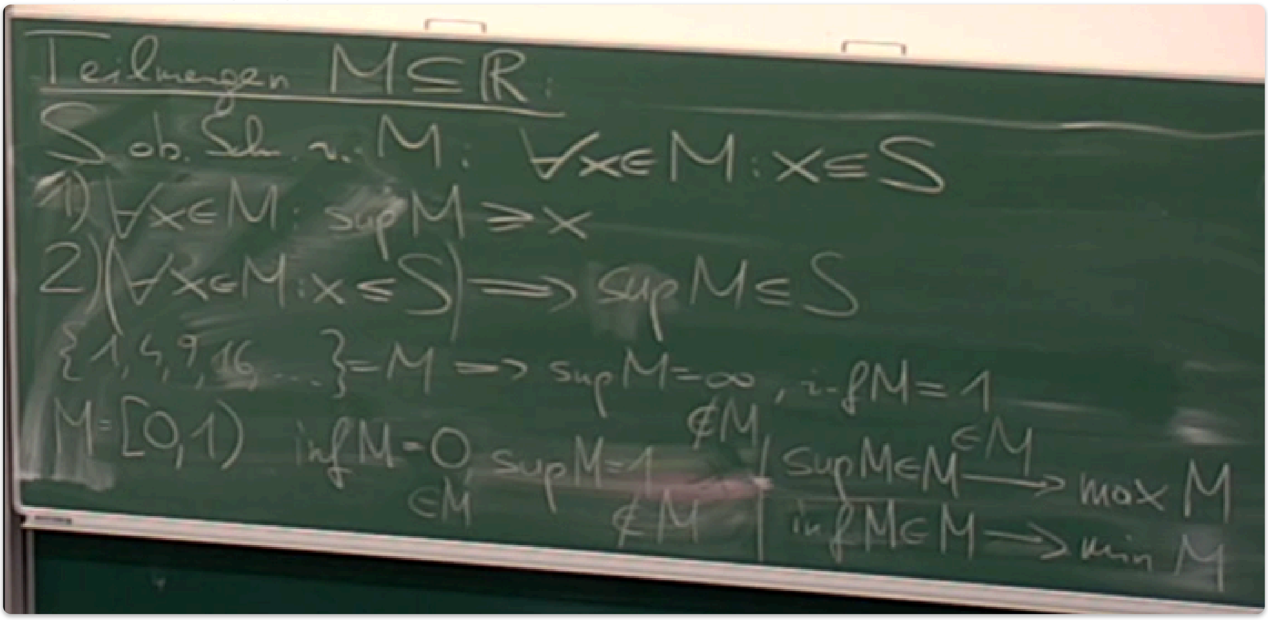
Wenn eine Folge nach oben und nach unten beschränkt ist, sprechen wir von einer **beschränkten Folge**.

Tafelbild 1
Tafelbild 2

Analogie: Mengen

- **Analoge Definition für Mengen ($M \subseteq \mathbb{R}$):**
  - Schranken, Supremum und Infimum können analog für Mengen reeller Zahlen definiert werden.
  - Reelle Zahlen besitzen Dezimalentwicklungen ($x = x_0.x_1x_2...$).
- **Finden des Supremums einer nach oben beschränkten, nicht leeren Menge M:**
  - Kleinste ganze Zahl, die obere Schranke ist: a_0.
  - Kleinste Zahl der Form $x_0.x_1$, die obere Schranke ist: a_1.
  - Sukzessive Fortsetzung für alle Dezimalstellen.
  - Resultierende monoton fallende Folge von oberen Schranken konvergiert zum Supremum ($\sup M$).
- **Finden des Infimums einer nach unten beschränkten, nicht leeren Menge M:**
  - Analoges Verfahren zum Supremum.
  - Ergebnis ist das Infimum ($\inf M$).
- **Unbeschränkte Mengen:** -
  - $\sup M = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist.
  - $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist.
- **Zusammenhang zwischen Folgen und Mengen:**
  - Das Supremum (Infimum) einer Folge ist identisch mit dem Supremum (Infimum) der

Menge ihrer Folgenglieder.



Sätze:

Sätze

Allgemein

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Hauptsatz über monotone Folgen

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen

Jede nach oben beschränkte Folge besitzt ein Supremum.
Jede nach unten beschränkte Folge besitzt ein Infimum.

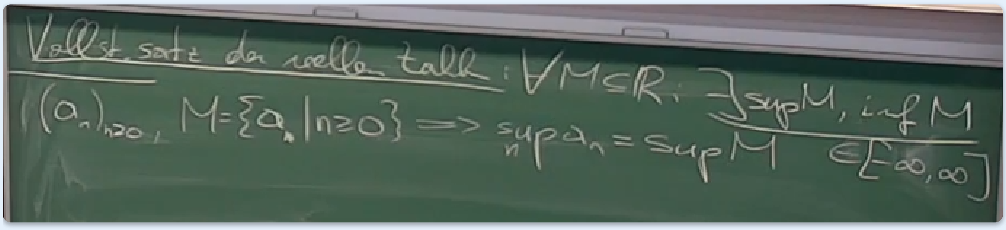
Bernoulli'sche Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}\; n \geq 2, x \geq -1, x \neq 0\colon\; (1+x)^n > 1 + nx$$

Mathematik für Informatik, p.157:

Satz 4.9 (Vollständigkeitssatz für die reellen Zahlen)

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum). Jede nach oben (unten) beschränkte reelle Folge besitzt ein Supremum (Infimum).

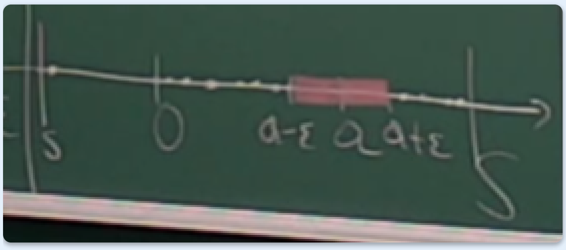


Satz

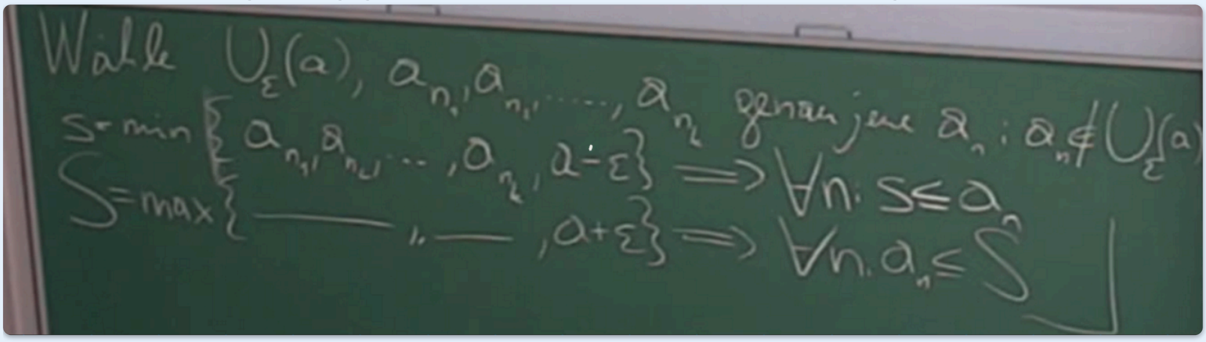
Jede konvergente Folge ist beschränkt

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Die Folgenglieder mit $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ seien $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$. Sei $\bar{\varepsilon} > \max_{i=1,\ldots,k} |a - a_{n_i}|$ (bzw. $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ im Fall $k = 0$). Dann gilt insbesondere $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$, und daher liegen alle Folgenglieder in $U_{\bar{\varepsilon}}(a)$. Die Intervallgrenzen $a - \bar{\varepsilon}$ bzw. $a + \bar{\varepsilon}$ sind dann untere bzw. obere Schranke von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Da wir links und rechts vom Grenzwert aufgrund der Definition von Konvergenz nur endlich viele Folgenglieder liegen haben, können wir die Grenzen einfach links/rechts davon setzen und haben eine beschränkte Folge:



Wir wählen eine Epsilon Umgebung von a, die enthält dann fast alle Folgenglieder. Zu jeder Epsilon Umgebung gibts nur endlich viele die draußen liegen, daher:



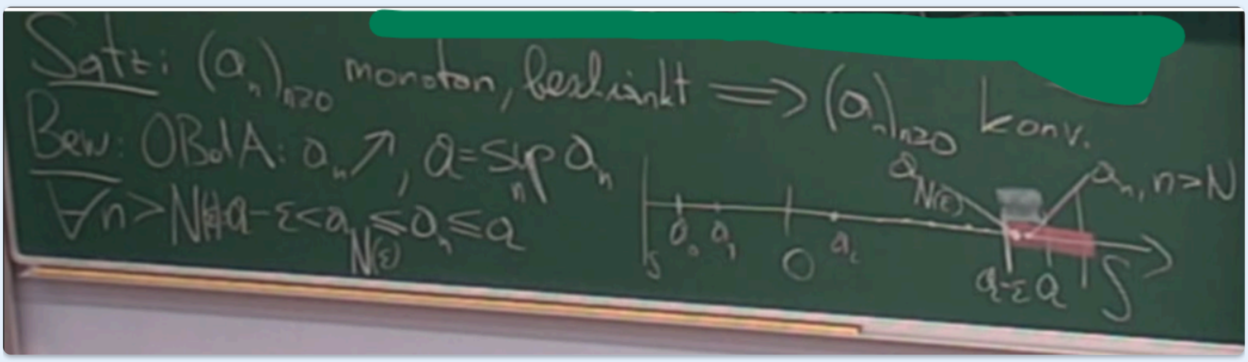
restliches Tafelbild davon

Satz 4.12 Hauptsatz über monotone Folgen

Mathematik für Informatik, p.158

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. O.B.d.A. sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton wachsende Folge. *Aus der Konvergenz folgt nach dem vorigen Satz die Beschränktheit*. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass Beschränktheit hinreichend für Konvergenz ist. Nach Satz 4.9 besitzt $(a_n)_{n\geq 0}$ ein Supremum. Sei $a = \sup a_n$ und $\varepsilon > 0$. Da $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $(a_n)_{n\geq 0}$ ist, existiert ein $N(\varepsilon)$ mit $a_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie muss $a_n > a - \varepsilon$ auch für alle $n > N(\varepsilon)$ gelten. Daher liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$. Da ε beliebig gewählt werden kann, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



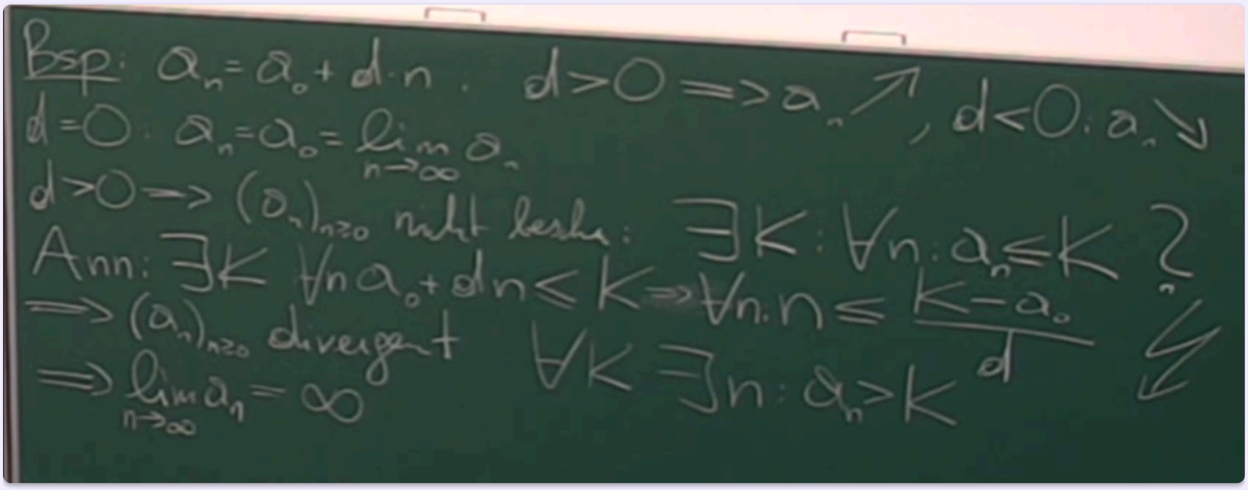
Man nimmt hier das Supremum der Folge, welches eben wie alle anderen unter der Schranke ist, dann schauen wir auf die Linke Seite der e-Umgebung, weil *auf der Rechten Seite kann ja nichts sein* und dann nimmt man sich aus der Umgebung das

Infimum, hat auf der linken Seite der ϵ-Umgebung nur endlich viele und alle anderen fast unendlich in der U_ϵ --> Konvergent

Beispiel 4.13

Arithmetische Folgen: $a_n = a_0 + nd$. Es ist leicht zu sehen, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ nur für $d = 0$ konvergent ist. In diesem Fall ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konstante Folge und $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$. Im Fall $d \neq 0$ ist $(a_n)_{n\geq 0}$ uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$, wobei das Vorzeichen mit jenem von d übereinstimmt.

Hier nochmal bisschen ausführlicher:



Es gibt kein solches k --> nicht nach oben beschränkt --> nicht beschränkt --> nicht divergent

3. Rechnen mit Grenzwerten

Rechnen mit Grenzwerten

Seien $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $lim_{n\to\infty}x_n = x$ und $lim_{n\to\infty}y_n = y$. Somit ist die Menge F aller konvergenten Folgen mit der Folgenaddition und Folgenmultiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum.

Addition/Subtraktion

$lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

$lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$

Multiplikation/Division

$lim_{n\to\infty}(x_n * y_n) = x * y$

$lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}\ falls\ y_n \neq 0\ und\ y \neq 0$

Rechnen mit uneigentlich konvergenten Folgen

Uneigentlich konvergent = Monoton steigend und unbeschränkt

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\ und\ lim_{n\to\infty}y_n = y$.

$lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty, falls\ y \in \mathbb{R}\ oder\ y = \infty$

$lim_{n\to\infty}\lambda x_n = \begin{cases} \infty, & falls\ \lambda > 0 \\ -\infty, & falls\ \lambda < 0 \end{cases}$

$lim_{n\to\infty}x_n y_n = \infty, falls\ y > 0$

$lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0, falls\ b \in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

ⓘ Satz 4.14

Mathematik für Informatik, p.158, Tafelbild, Mathematik für Informatik, p.159

Wir stellen nun einige Rechenregeln für konvergente Folgen vor.

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$, ($\to$ additiv)

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, ($\to$ homogen)

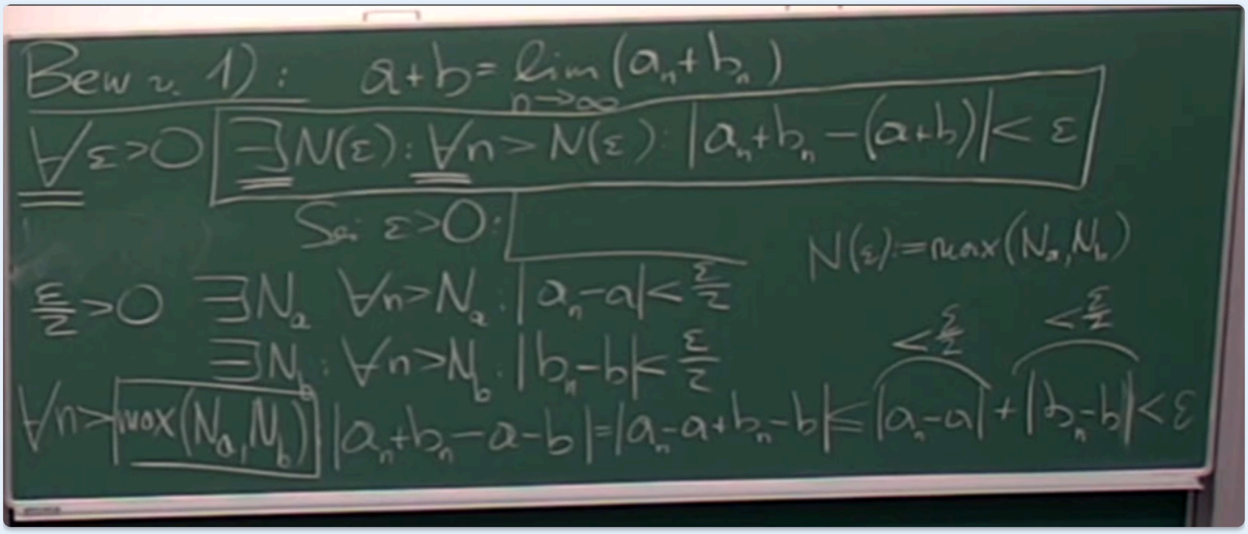
(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b_n \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $b \neq 0$.

(v) $\forall n \in \mathbb{N} : b_n > 0, a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$
Wenn hier $a < 0$ dann divergiert das gegen $-\infty$

Beweis. Wir begnügen uns mit dem Beweis der ersten Identität und überlassen den Rest als Übungsaufgabe. Es gelte also $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es daher N_1 und N_2, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N_1$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N_2$ gilt. Daraus folgt, dass $|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n > \max(N_1, N_2)$.

vo Tafelbild:



- Menge F der konvergenten Folgen:
  - Bildet mit Folgenaddition und Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$ einen Vektorraum.
  - Begründung: Die ersten beiden Rechenregeln aus Satz 4.14 implizieren, dass Addition und Multiplikation in F uneingeschränkt möglich sind.
  - F ist ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.
- Vorsicht beim Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten:
  - Rechenregeln für konvergente Folgen sind nicht übertragbar.
  - Rechte Seiten der Gleichungen sind nicht definiert.
  - Addition und Multiplikation für unendliche Größen sind nicht erklärt.

Rechenregeln mit einem lim = unendlich

ⓘ Satz 4.16

Mathematik für Informatik, p.159, Tafelbild

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine uneigentlich konvergente Folge und $\lambda\in\mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n=b$. Dann gilt

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$, falls $b\in\mathbb{R}$ oder $b=\infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n)=\begin{cases}\infty, \text{falls } \lambda>0,\\ -\infty, \text{falls } \lambda<0,\end{cases}$

Ergänzung: $0\cdot\infty$ ist unbestimmt

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\infty$, falls $b>0$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$, falls $b\in\mathbb{R}$.

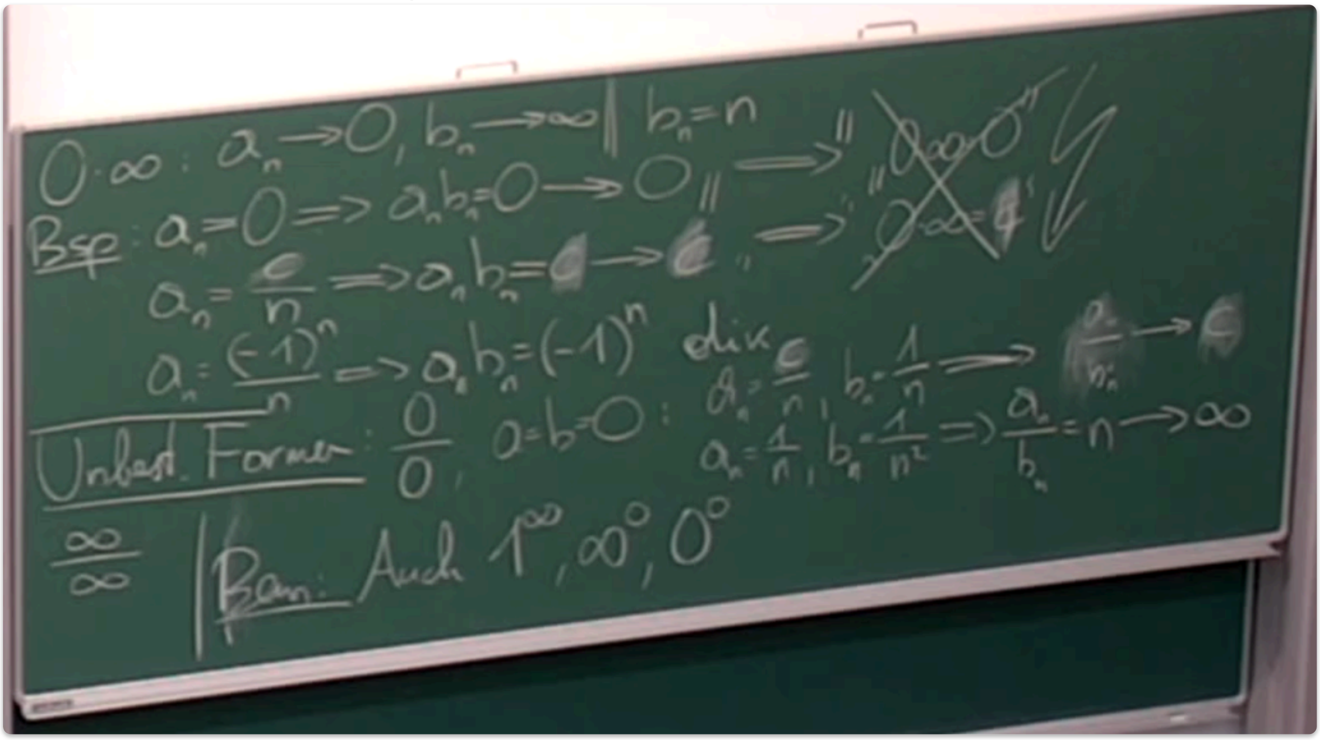
Beispiele:

dieses Unbestimmte auf der Rechten Seite der Tafel ^ behandeln wir jetzt noch genauer:
Mathematik für Informatik, p.159

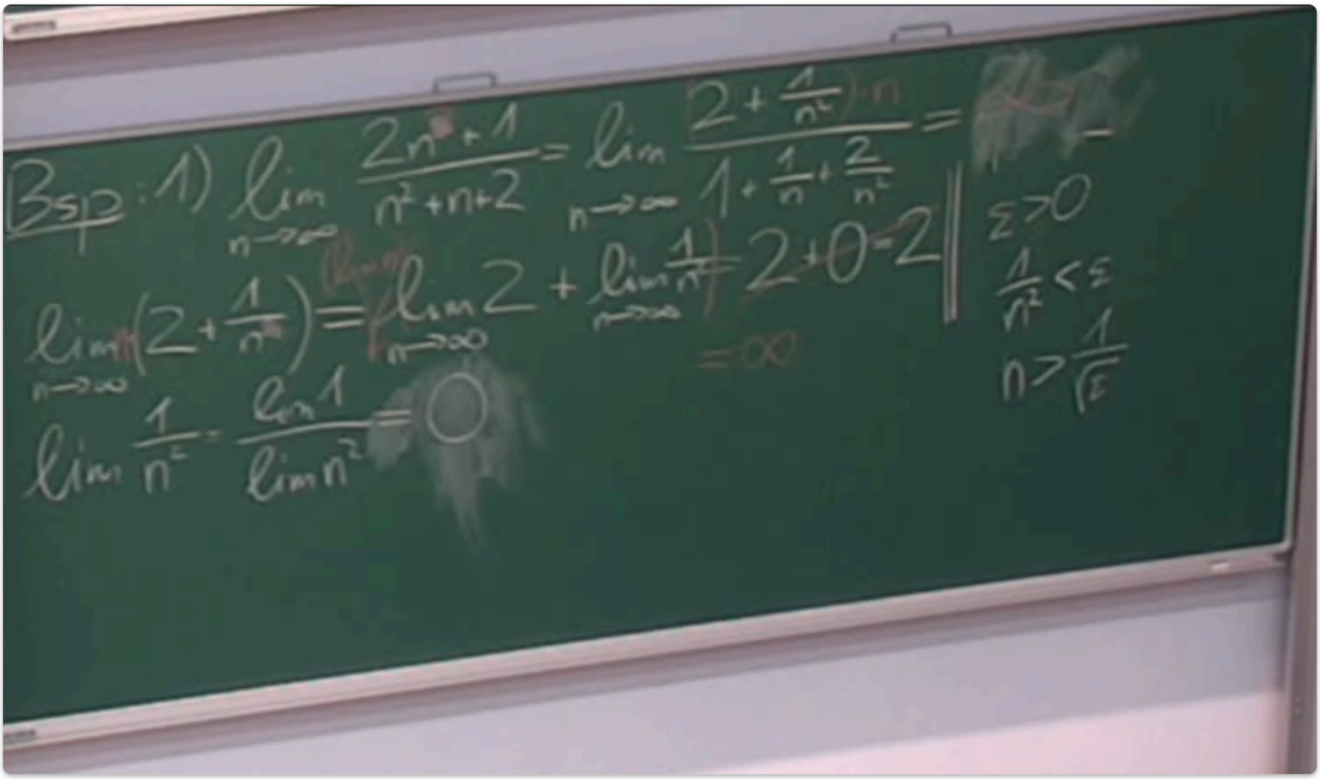
> ### Beispiel 4.15 Uneigentlich konvergente Folgen
>
> Betrachten wir die Folgen $a_n = n$ und $b_n = n + c_n, c_n \geq 0$. Beide Folgen sind uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Über die Differenz $a_n - b_n = c_n$ kann jedoch a priori keine Aussage gemacht werden. Ihr Verhalten hängt von der Folge c_n ab. Ähnlich verhält es sich bei Quotienten zweier uneigentlich konvergenten Folgen oder bei Quotienten zweier Nullfolgen: Es gilt beispielsweise
>
> $$\frac{n}{n^2} \to 0, \quad \frac{n^2}{n} \to \infty, \quad \frac{2n}{n} \to 2$$

- **Unbestimmte Formen:**
  - Ausdrücken wie $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ kann kein sinnvoller Wert zugewiesen werden.
  - Auch 1^∞, ∞^0 und 0^0 zählen zu den unbestimmten Formen (siehe Beispiel 4.19).
  - Nähere Behandlung in Abschnitt 5.2.
- **Rechenregeln für Grenzwerte und uneigentliche Grenzwerte:**
  - Die im vorigen Satz beschriebenen Rechenregeln sind mit bestimmten Einschränkungen auch für uneigentliche Grenzwerte gültig.

Hier sieht man nochmal was passieren würde wenn man $0 \cdot \infty$ rechnen würde:



Hier noch ein weiteres Beispiel aus der vo



Das was dann mit rot drübergeschrieben wurde war eine alternatives Beispiel wenn's nicht hoch 2 sondern hoch 3 gewesen wäre...

Beispiel 4.18

Mathematik für Informatik, p.160

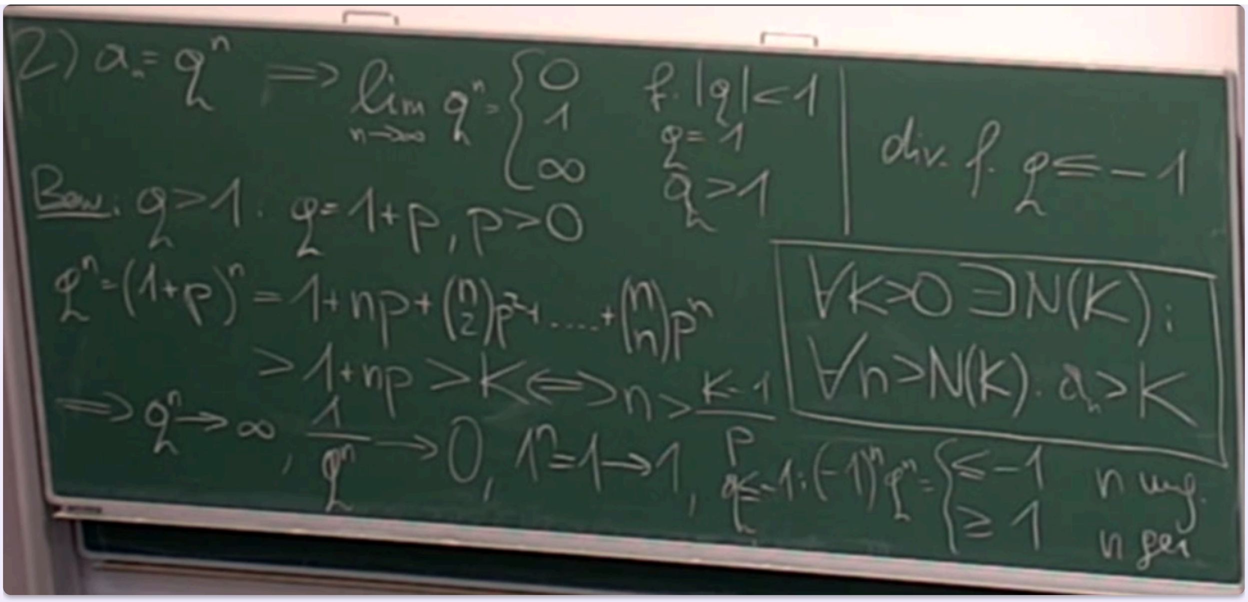
Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

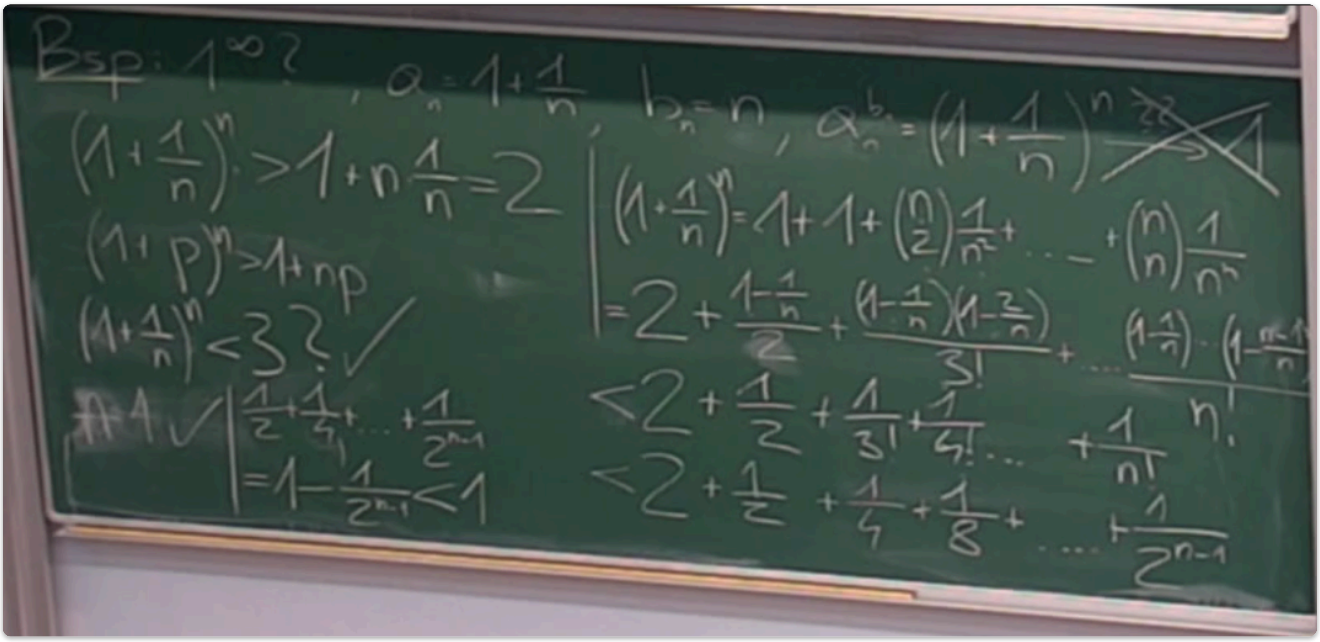
Um das zu zeigen, sei zunächst $q = 1 + p > 1$. Dann gilt aufgrund des Binomischen Lehrsatz

$$q^n = (1+p)^n = 1 + np + \binom{n}{2}p^2 + \cdots + \binom{n}{n}p^n \geq 1 + np \to \infty$$

(vgl. dazu auch Satz 4.20). Für $0 < q < 1$ gilt $\frac{1}{q} > 1$ und daher $\frac{1}{q^n} \to \infty$. Daraus folgt aber $q^n \to 0$, denn setzt man in Satz $4.16 a_n = \frac{1}{q^n}$ und $b_n = 1$, so folgt $q^n = \frac{b_n}{a_n} \to 0$. Der Fall $-1 < q < 0$ funktioniert analog, und die Fälle $q = 0$ und $q = 1$ sind trivial. Für $q \leq -1$ ist $(q^n)_{n\geq 0}$ divergent. Ähnlich lässt sich auch für $q \in \mathbb{C}$ argumentieren. Geometrische Folgen im Komplexen konvergieren also für q innerhalb des Einheitskreises sowie für $q = 1$ und divergieren für alle anderen Werte von q

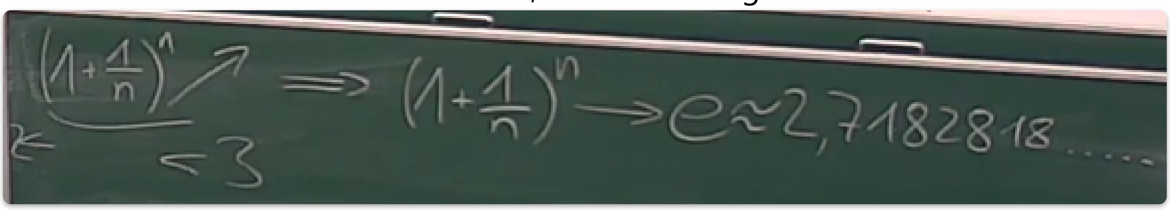


Noch ein kleines Beispiel zu 1^∞:



Damit haben wir also gezeigt, dass diese Folge gegen eine Zahl zwischen 2 und 3 konvergiert (um genau zu sein gegen die Eulersche Zahl), da uns immer wenn wir $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ rechnen, mit jedem Wert den wir dazuaddieren immer näher zu 1 kommen und uns immer genau das zu 1 fehlt was wir zuletzt dazuaddiert haben.

Dann fehlt uns nur noch zu erwähnen, dass diese Folge monoton wachsend ist:



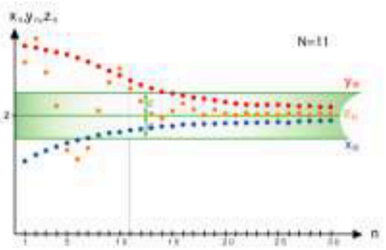
4. Konvergenzuntersuchung

Mathematik für Informatik, p.161

Konvergenzuntersuchungen

Sandwich-Theorem

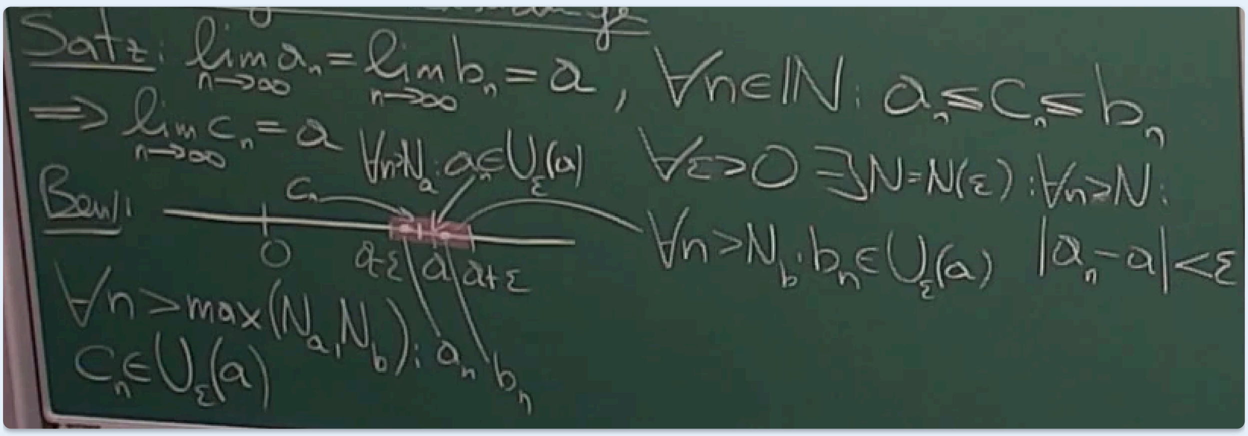
Will man den Grenzwert einer Folge (z_n) berechnen, kann man zwei einfache, bekannte Folgen wählen, für die gilt: $x_n \le z_n \le y_n$ und $lim_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty} y_n = z$ so folgt die Konvergenz: $lim_{n\to\infty} z_n = z$.



Bis jetzt:

- Konvergenzkriterium für Monotone Folgen (Satz 4.12)
  Ab jetzt:
- Konvergenz von allgemeinen Folgen
- wir starten mit einfachen hinreichenden Bedingung für Konvergenz:

> **Satz 4.22 Sandwich-Theorem**
>
> Seien $(a_n)_{n\ge0}$ und $(b_n)_{n\ge0}$ konvergente Folgen, deren Grenzwerte übereinstimmen, also: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.
>
> Sei $(c_n)_{n\ge0}$ eine Folge mit $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Konvergenz von $(c_n)_{n\ge0}$, und es gilt: $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
>
> Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_1$, und $b_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > N_2$. Daraus folgt $c_n \in U_\varepsilon(a)$, falls $n > \max(N_1, N_2)$.



Beispiel 4.23

Sei $\alpha > 0$. Gilt für eine Folge $\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha$, dann folgt $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zum Beweis benützen wir $\sqrt[n]{n} \to 1$ (siehe Übungsaufgaben). Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Anwendung des Sandwich-Theorems liefert nun die Behauptung.

Teilfolge:

Definition 4.24

Mathematik für Informatik, p.161

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürliche Zahlen. Dann nennt man die Folge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Beispiel 4.25

Tafelbild

(a) Die Folge der Quadratzahlen $\left(n^2\right)_{n\geq 1} = (1, 4, 9, 16\ldots)$ ist eine Teilfolge der Folge $(n)_{n\geq 1} = (\underline{1}, 2, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, 8, \underline{9}, 10, \ldots)$.

(b) Sei $(a_n)_{n\geq 0} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Diese Folge ist divergent. Nimmt man nur die *geraden Indizes*, so erhält man als Teilfolge die *konstante Folge* $(1, 1, 1, \ldots)$, also eine konvergente Folge.

Satz 4.26

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, die den **Häufungspunkt a** besitzt. Dann **gibt es eine gegen a konvergierende Teilfolge.** Falls umgekehrt $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a enthält, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Zu einem Häufungspunkt a der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ lässt sich auf folgende Weise eine konvergente Teilfolge konstruieren. Wir geben uns eine monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n > 0$ (z.B. $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 1/n$ für $n \geq 1$) vor. Dann gibt es in $U_{\varepsilon_0}(a)$ unendlich viele

Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 0}$. Wir wählen eines aus, beispielsweise a_{n_0}. Danach wählen wir ein $a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ mit $n_1 > n_0$, usw. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$. Denn bei Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0, so dass $\varepsilon \geq \varepsilon_{k_0} \geq \varepsilon_{k_0+1} \geq \cdots > 0$. Für alle $k \geq k_0$ gilt daher $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Sei umgekehrt eine konvergente Teilfolge gegeben. Dann ist ihr Grenzwert a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 0}$, denn in jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Glieder der Teilfolge, also insbesondere unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\geq 0}$.

Satz 4.27 Bolzano-Weierstraß

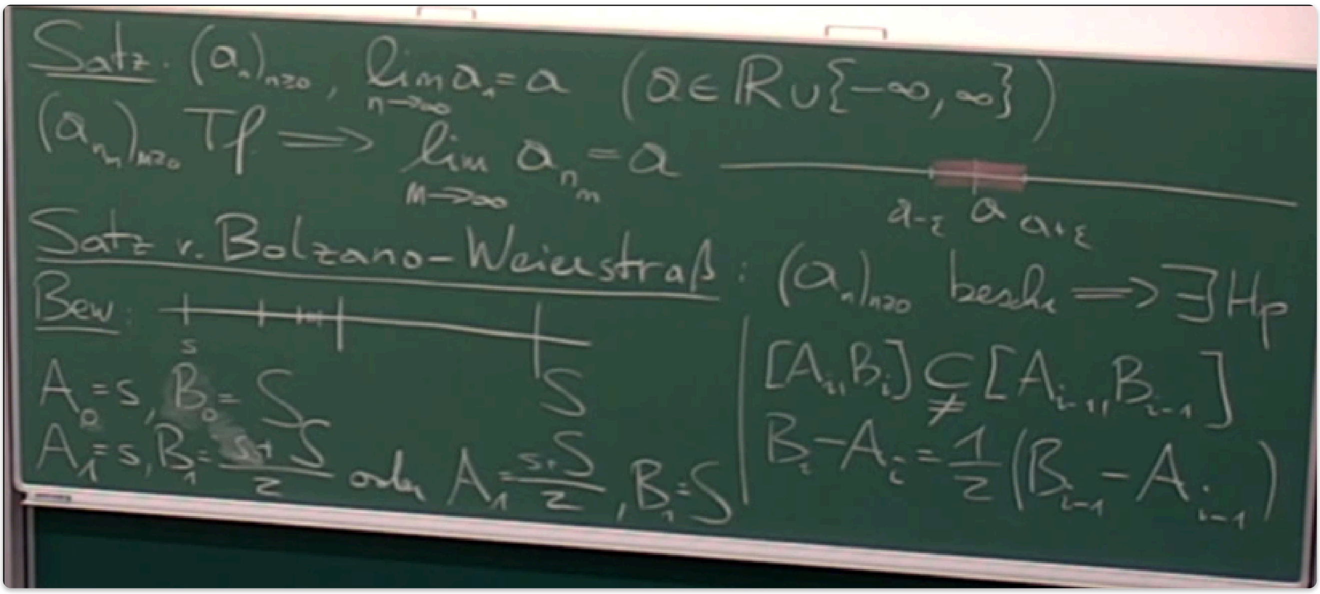
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ enthält einen Häufungspunkt.

Beweis. Die Aussage des Satzes ist nach Satz 4.26 äquivalent zur Existenz einer konvergenten Teilfolge. Aufgrund der Beschränktheit von $(a_n)_{n\geq 0}$ und des Hauptsatzes über monotone Folgen genügt es, die Existenz einer monotonen Teilfolge nachzuweisen.

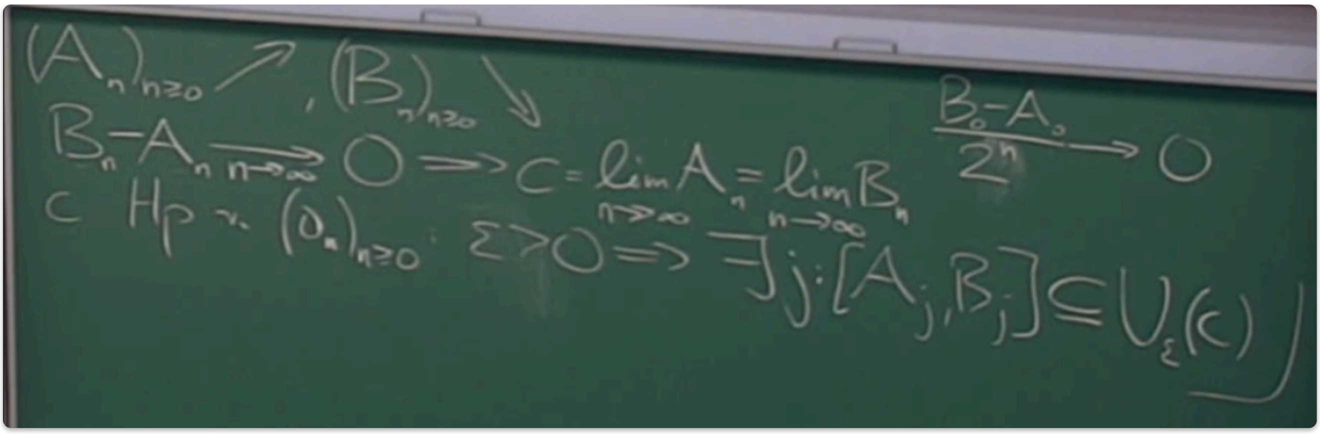
Sei $b_n = \sup(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$. Dann ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge. Sei $M = \{k \in \mathbb{N} \mid b_k < a_k\}$, d.h., $k \in M$ ist gleichbedeutend damit, dass a_k größer ist als sämtliche Folgenglieder mit größerem Index. Wir konstruieren nun eine monotone Folge, wobei wir unterscheiden müssen, ob M unendlich ist oder nicht. Falls M unendlich viele Elemente enthält, so ist $(a_k)_{k\in M}$ bereits eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$. Denn wenn $k_1, k_2 \in M$ mit $k_1 < k_2$, dann ist a_{k_1} laut Definition von M größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, also insbesondere größer als a_{k_2}.

Falls M endlich ist, so bekommen wir mit der oben beschriebenen Vorgangsweise nur endlich viele Elemente und somit keine Teilfolge. In diesem Fall kann man aber eine monoton wachsende Teilfolge konstruieren. Da M beschränkt ist, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, mit $n_1 > k$ für alle $k \in M$. Dann ist a_{n_1} nicht größer als alle nachfolgenden Folgenglieder, weil sonst n_1 ja in M enthalten wäre. Es gibt also ein mindestens ebenso großes Folgenglied a_{n_2} mit $n_2 > n_1$. Da auch $n_2 \notin M$, muss a_{n_3} mit $n_3 > n_2$ und $a_{n_3} \geq a_{n_2}$ existieren. Diesen Prozess setzen wir ad infinitum fort und erhalten auf diese Art eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

(hier unterscheiden sich leider Buch und Tafelbild)



Da haben wir dann Intervallschachtelungen. Wir teilen immer in die Hälfte und in einer der neuen Teilmengen müssen unendlich viele Folgeglieder liegen, **es können nicht in beiden Teilen unendlich viele liegen**.

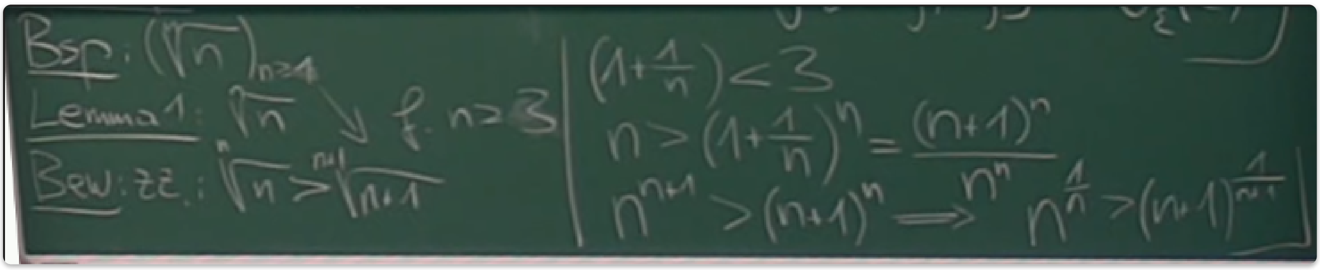


A_n und B_n sind da sie monoton sind beide Beschränkt und daher auch beide Konvergent. Und dank unseren Sätzen die wir schon definiert haben wissen wir, dass $B_n - A_n \to 0$ geht.

Dann behaupten wir das c ein Häufungspunkt von a_n ist. Wenn wir unsere Intervallschachtelung von oben nochmal anschauen, fällt auf, dass unser Intervall immer halbiert, also immer kleiner wird. Und in unserem Intervall liegen immer unendlich viele Folgenglieder. Daher muss ab einem gewissen Zeitpunkt unsere gesamte ϵ-Umgebung da drinnen liegen und deshalb können wir das (mit dem j) definieren.

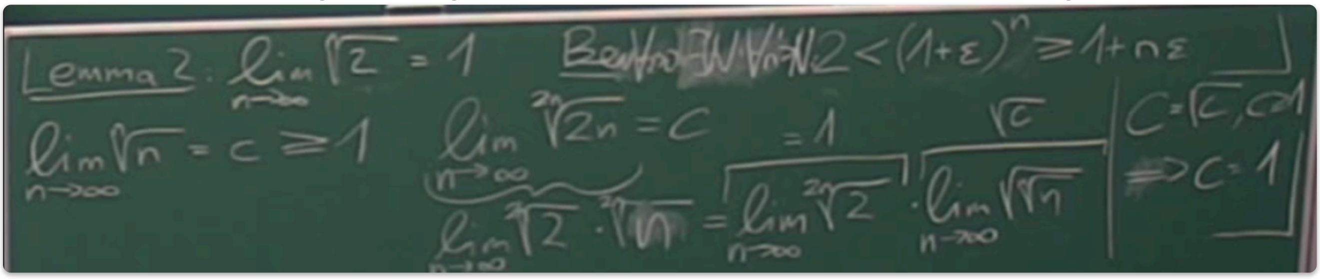
Beispiel aus vo:

Lemma 1:



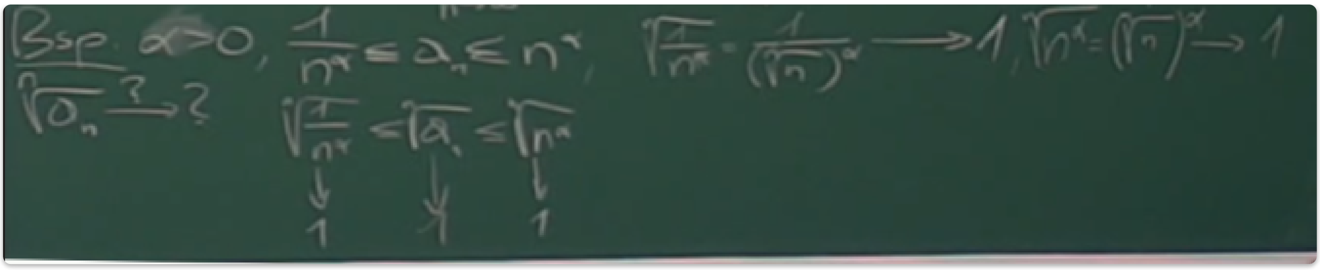
Also die Folge ist schonmal schließlich monoton fallend, und sie besteht aus lauter positiven Werten, also ist sie nach unten Beschränkt zu 0, und daher ist sie auch konvergent.

Wenn das eine konvergente Folge ist bestimmen wir den Grenzwert der Folge:



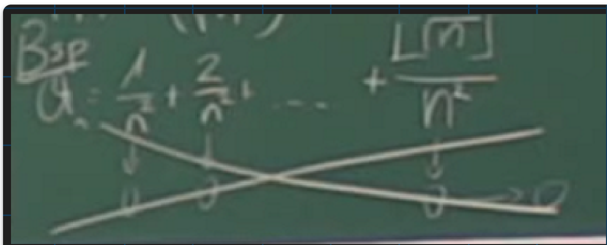
Zuerst beweisen wir dass die n-te Wurzel von 2 gegen 1 konvergiert und dann Schauen wir uns die n-te Wurzel von n an. Wenn diese Folge konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge, das heißt, dass wenn wir nur die geraden Indizes nehmen (also eine Teilfolge), dass der Grenzwert dann der gleiche ist. Diese Wurzel die wir dann haben, können wir aufspalten in 2 konvergenten Folgen. Dann können wir laut den Rechenregeln die Grenzwerte der beiden Folgen einzeln berechnen und dann miteinander multiplizieren.

Beispiel fürs Sandwich Theorem:



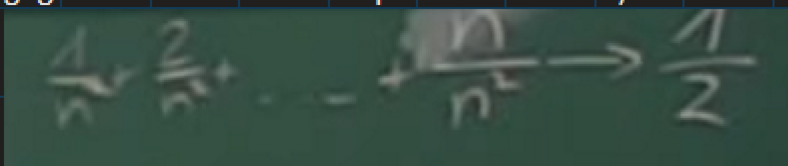
Wir wissen ja schon, dass $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 Konvergiert, daher konvergiert $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ auch gegen 1, Außerdem konvergiert $\sqrt[n]{n^\alpha}$ auch gegen 1, da man α herausziehen kann und dann einfach 1^α dort stehen hat. Und aufgrund des Sandwich theorems konvergiert dann auch die Folge dazwischen gegen 1.

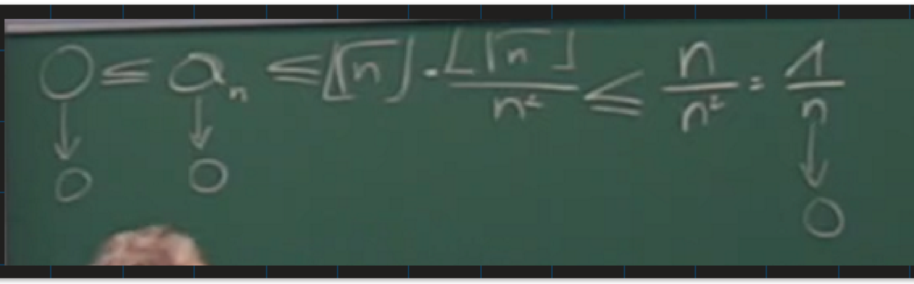
Weiteres Beispiel:



Da kann man nicht einfach davon ausgehen, dass das für alle gilt nur weil es für die ersten gilt

Das kann nämlich auch schiefgehen wie hier (am Anfang immer gegen 0 und ab einem Zeitpunkt nicht mehr):





So wäre es richtig, wieder durch verwenden vom Sandwich Theorem

Cauchykriterium:

Cauchykriterium

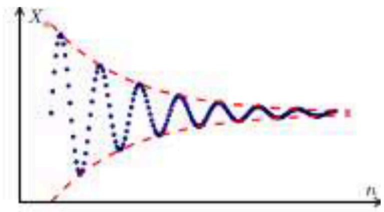
$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\epsilon): |x - a_n| < \epsilon$$

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, so dass $|x_n - x_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(e)$. Das heißt, es gibt einen Index, ab dem die Folge immer näher zueinander rückt.

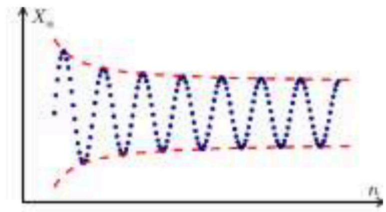
Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist!

Es gilt eigentlich dasselbe Prinzip wie beim Cauchy-Kriterium für Reihen.

Cauchy-Folge



Keine Cauchy-Folge



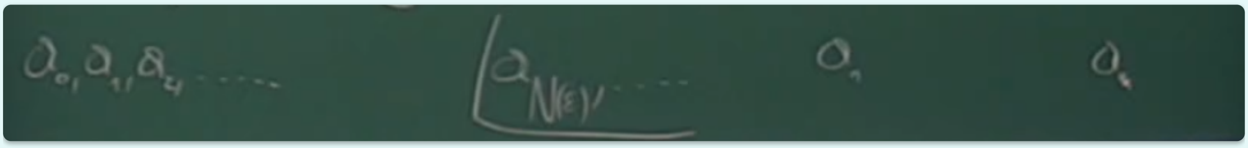
Dieses Kriterium gilt nicht in $\mathbb{Q}$.

Definition 4.28

Mathematik für Informatik p.174

Eine reelle Folge heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$.

Anschaulich bedeutet dies, dass Cauchyfolgen genau jene Folgen sind, für welche die Glieder mit großem Index nahe beieinander liegen.



also hier, ab einem gewissen Index N(ϵ) sind alle nachfolgenden Folgenglieder betragsmäßig näher als ϵ aneinander.

Satz 4.29 (Cauchykriterium)

Mathematik für Informatik, p.162

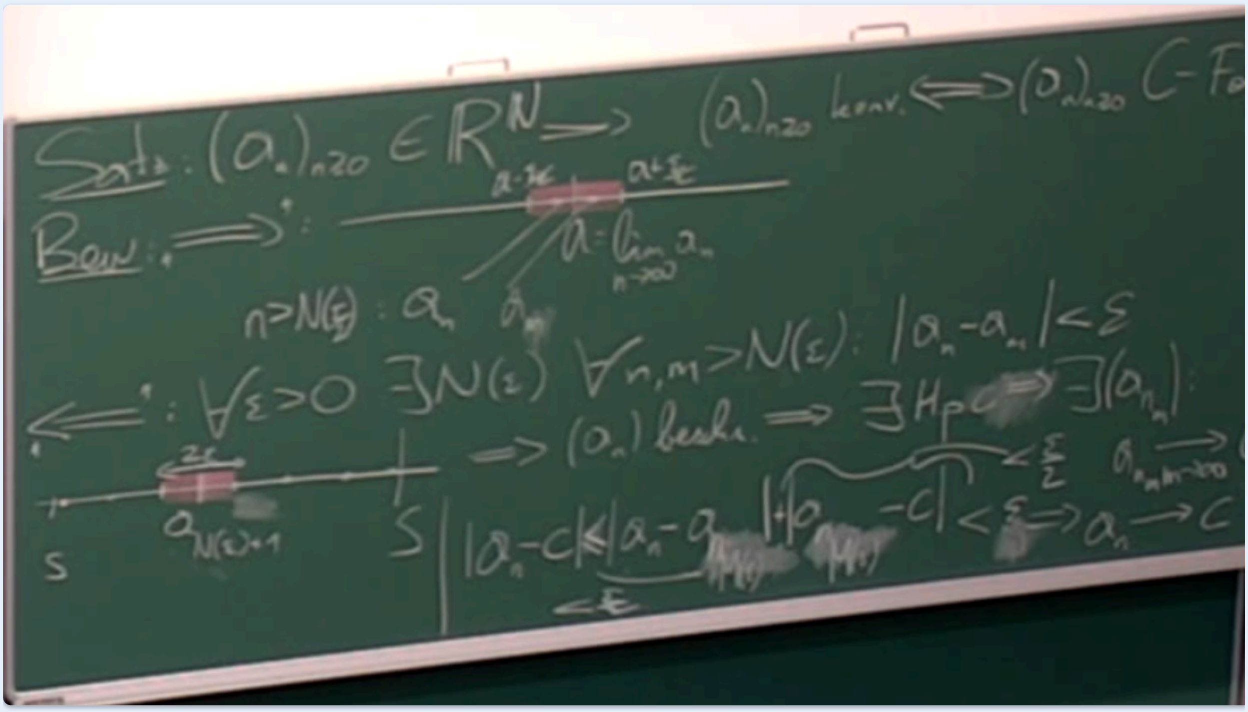
Eine reelle Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bemerkung: Man beachte, dass das Cauchykriterium in $\mathbb{Q}$ nicht gilt. Nehmen wir irgend eine Folge rationaler Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl konvergiert, z.B. die durch die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ bestimmte Folge $(1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots)$. Diese Folge ist in $\mathbb{R}$ konvergent und daher nach dem obigen Kriterium eine Cauchyfolge (was übrigens auch direkt leicht zu sehen ist). Da der Grenzwert aber keine rationale Zahl ist, ist diese Folge in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent. [1]28

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergent und $\varepsilon > 0$. Den Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 0}$ nennen wir a. Dann existiert $N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < N(\varepsilon)$, falls $n > N(\varepsilon)$. Seien nun $n, m > N(\varepsilon)$. Dann gilt $|a_n - a_m| = |a_n - a - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist daher eine Cauchyfolge.

Umkehrung: Gelte für ein $\varepsilon > 0$, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, denn für $m > N = N(\varepsilon)$ folgt aus $|a_m| - |a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}| < \varepsilon$, dass $|a_m| < |a_{N+1}| + \varepsilon$. Somit ist die Folge $(|a_{N+1}|, |a_{N+2}|, \ldots)$ durch $|a_{N+1}| + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Folglich ist $S = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + \varepsilon)$ eine obere Schranke von $(|a_n|)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist daher durch S nach oben und durch $-S$ nach unten beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann ein Häufungspunkt a und infolge dessen eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a$. Das bedeutet aber, dass für hinreichend große k, z.B. $k > K = K(\varepsilon)$, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ folgt. Sei nun $n > N$ und $k > \max(K, N)$, so dass also auch $n_k > N$ gilt. Dann folgt $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$ und daher $a_n \to a$.

Hier vielleicht nochmal anschaulicher der Beweis aus der vo:



Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen