4.2 Unendliche Reihen

Link zur Formelsammlung: FS_4.2 Unendliche Reihen

1 Der Begriff der unendlichen Reihe:

Unter einer unendlichen Reihe versteht man eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dabei ist (a_n) die Folge der Reihenglieder. Die Folge s_n mit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Folge der Partialsummen der Reihe. Unter dem Grenzwert (oder der Summe) der Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge. Ist die Folge konvergent bzw. divergent, heißt auch die Reihe konvergent bzw. divergent.

Falls die Reihe konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge.

Reihentypen

> Harmonische Reihe	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$
> Geometrische Reihe	$\sum_{n\geq 1} q^n \to$ $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ bei\ \lvert q\rvert > 1$; $s_n = \frac{1}{1-q}\ bei\ \lvert q\rvert < 1$; $s_n = 1\ bei\ \lvert q\rvert = 1$
> Teleskopsummen	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
> Alternierende Reihe	$\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$
> Exponentialreihe	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \approx e$
> Potenzreihe	$\sum_{n\geq 1} a_n (x-x_0)^n \to R = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert}$

Informationen zum Grenzwert: Limes

Dezimalentwicklung

Als Beispiel haben wir uns am Anfang die Dezimalentwicklung angeschaut:

Beispiel 4.31 (Dezimalentwicklungen)

Mathematik für Informatik, p.163

Reelle Zahlen lassen sich bekanntlich als Dezimalentwicklungen schreiben. Wie im vorigen Abschnitt besprochen, kann man sie aber auch als Grenzwerte von Folgen interpretieren, indem man aus der Dezimalentwicklung eine Folge konstruiert. Die Folgenglieder lassen sich auch als Summen von Zehnerpotenzen auffassen:

$$\frac{1}{9} = 0,111\cdots = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Definition Reihe

Definition Reihe

Mathematik für Informatik, p.164, Tafelbild

Definition 4.34 Unter einer unendlichen Reihe versteht man eine (formale) unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dabei ist $(a_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Reihenglieder. Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Folge der Partialsummen der Reihe. Unter dem Grenzwert (oder der Summe) der Reihe versteht man den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge. Ist die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ konvergent bzw. divergent, so heißt auch die Reihe konvergent bzw. divergent.

Wichtig

Kommutativität und Assoziativität muss nicht bei unendlichen Summen gelten!

Beispiel:

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + a_2 \dots$$

das kann so wohl: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0$,
aber auch $1-(1-1)-(1-1)\dots = 1$ sein

Deshalb schauen wir uns immer die Partialsummenfolgen s_n an:

$$\sum_{n\geq 0 a_n} := \lim_{n\to\infty} s_n$$

Satz 4.35

Mathematik für Informatik, p.164

Falls die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, so ist die Folge der Reihenglieder eine Nullfolge, d.h., $a_n \to 0$.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt $\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Die Reihenglieder lassen sich aber mit Hilfe der Partialsummenfolge durch $a_n = s_n - s_{n-1}$ beschreiben. Übergang zum Grenzwert ergibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Harmonische Reihe:

Beispiel 4.36

Mathematik für Informatik, p.164, Tafelbild

Die harmonische Reihe ist definiert durch

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Es gilt offensichtlich

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ ist also monoton wachsend und nach den obigen Überlegungen gilt $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \to \infty$. Die harmonische Reihe ist somit divergent. Dies zeigt, dass die Umkehrung des vorigen Satzes nicht richtig ist: Aus $a_n \to 0$ folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Geometrische Reihe:

Beispiel 4.37

Mathematik für Informatik, p.165, Tafelbild

Unter einer geometrischen Reihe versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

Die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ der geometrischen Reihe ist daher $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Folglich gilt wenn wir die Reihe mit q multiplizieren:

$$\begin{array}{rll} s_n & = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n & \\ qs_n & = \quad q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} & \\ \hline (1-q)s_n & = 1 & -q^{n+1} \end{array}$$

und für $q \neq 1$ erhalten wir

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Im Fall $|q| < 1$ folgt daraus die Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent, da die Folge der Summanden, also $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge ist.

Beispiel 4.38

Mathematik für Informatik, p.165

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Die Partialsummenfolge ist somit

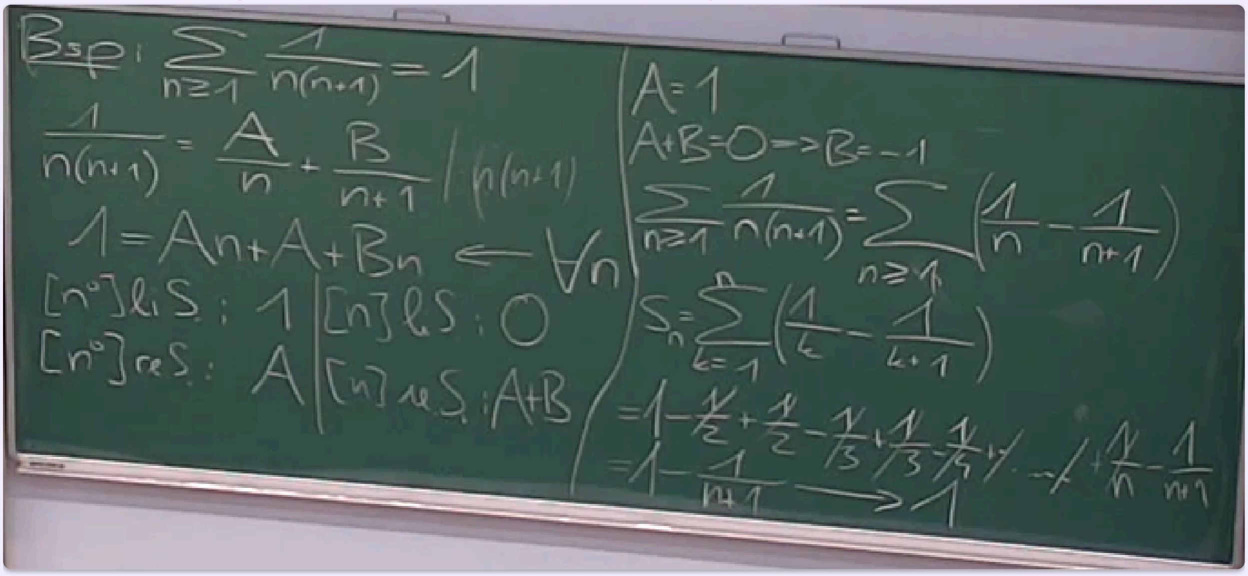
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Nach der Definition der Summe einer Reihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Summen, bei denen Auslöschungen wie in (4.2) auftreten, nennt man Teleskopsummen.

Hier die Erklärung wie wir auf die Zähler 1 und -1 gekommen sind:



2. Konvergenzkriterien:

Schnelle Übersicht:

Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium

$$(b_n \geq |a_n|) \wedge \sum_{n\geq 0} b_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ absolut konvergent}$$

Wähle eine größere, bereits bekannte Reihe die konvergiert.

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}; \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Minorantenkriterium

$$(b_n \leq |a_n|) \wedge \sum_{n\geq 0} b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ divergent}$$

Wähle eine kleinere, bereits bekannte Reihe die divergiert.

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Wurzelkriterium

Gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Quotientenkritierum

Gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Cauchy-Kriterium

$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N}\; m \geq n > N(\epsilon): \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$$

Man wählt einen bestimmten Index n einer Reihe und ein ϵ (z.b. 0,001). Ab diesem Index n darf die Summe aller restlichen Reste (= Summe der Partialsummen in einem bestimmten Intervall hinter n) nicht mehr den Wert von ϵ überschreiten. Kann man so einen Index wählen, ist die Reihe konvergent.

Zu jeder beliebig kleinen Zahl ϵ existiert eine Stelle n_ϵ sodass gilt: $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \quad k \geq m \geq n_\epsilon$.

Leibnitz-Kriterium

Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist.

Konvergenzkriterien:

Cauchykriterium:

2. Konvergenzkriterien (Mathematik für Informatik, p.166)

Konvergenzkriterien für Reihen:

- Ziel: Finden von Kriterien für die Konvergenz.
- Cauchykriterium für Folgen (Satz 4.29):
  - Direkte Übertragung auf Reihen möglich.
  - Anwendung des Kriteriums auf die Partialsummenfolge

Satz 4.39 (Cauchykriterium)

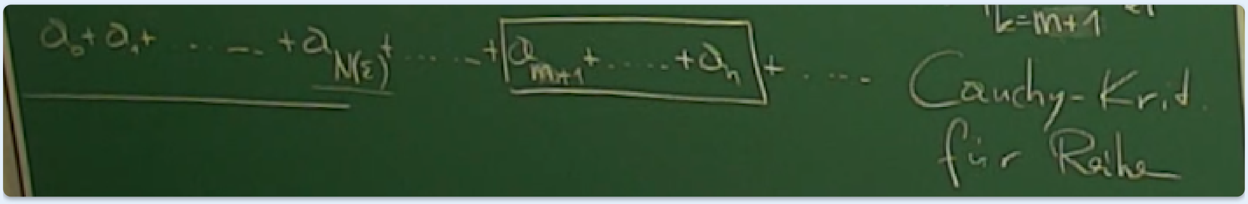
Tafelbild

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_n \right| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n > N(\varepsilon)$.

Wir betrachten sozusagen einen Teil aus der Summe und das Kriterium sagt aus, dass dann die Summe des Fensters kleiner ist als das Epsilon.



Leibnitz Kriterium:

Satz 4.41 Konvergenzkriterium von Leibniz

Mathematik für Informatik, p.166, Tafelbild1 Satz+Beweis, Tafelbild2, Beweis Fortsetzung + Beispiel

Eine alternierende Reihe $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, für die $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist konvergent.

Beweis. Wir betrachten die Teilfolgen $(s_{2n})_{n\geq 0}$ und $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ der Partialsummenfolge. Da a_n monoton fällt, ist

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+1})$$

eine monoton wachsende Folge, da $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$. *Aus demselben Grund ist*

$$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n})$$

(hier ist wichtig, dass man das +, welches jetzt in den Klammern wäre mit einem - ersetzt, weil ja vor der Klammer ein - ist...)

... *monoton fallend*. Weiters gilt $0 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq a_0$. Daraus folgt, dass $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ und $(s_{2n})_{n\geq 0}$ beschränkt und daher wegen Satz 4.12 konvergent sind. Sei $a = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ und $b = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Dann gilt auch $0 \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$, also ist $a = b = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Beispiel 4.42

Mathematik für Informatik, p.166

Die alternierende Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.41, denn in diesem Fall ist $a_n = \frac{1}{n}$ offensichtlich eine monoton fallende Nullfolge. Daher ist die Reihe konvergent.

Absolut und bedingt Konvergent:

Definition 4.43

Mathematik für Informatik, p.166

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ konvergent ist. Eine konvergente Reihe, welche nicht absolut konvergent ist, nennt man *bedingt konvergent*.

Satz 4.44

Mathematik für Informatik, p.166, Tafelbild

Eine **absolut konvergente Reihe ist auch konvergent**.

Beweis. Sei $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Aus dem *Cauchykriterium* (Satz 4.39) folgt, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $m \geq n > N$

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$$

Eine Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

und daraus folgt nach nochmaliger Anwendung von Satz 4.39 die Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Vergleichskriterien

Minoranten- und Majorantenkriterium:

Satz 4.47 (*Majorantenkriterium*)

Mathematik für Informatik, p.167

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum_n b_n$ konvergent ist, so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. In diesem Fall nennt man die Reihe $\sum_n b_n$ eine Majorante von $\sum_n a_n$.

Beweis. Anwendung des Cauchykriteriums: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k \varepsilon$$

für alle $m \geq n > N$. Daraus folgt die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Analog zum Konvergenzbeweis mittels Abschätzung nach oben durch konvergente Majoranten lässt sich auch ein Divergenzbeweis mittels Abschätzung nach unten durch divergente Minoranten durchführen.

Satz 4.48 (*Minorantenkriterium*)

Mathematik für Informatik, p.167

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen, so dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum_n a_n$ divergent ist, so ist auch die Reihe $\sum_n b_n$ divergent.
Die kleinere Reihe nennt man dann Minorante

Beweis:
$S_n^{(b)} \geq S_n^{(a)} \to \infty$
Wenn schon die kleinere Reihe divergent ist und gegen unendlich geht, dann kann die größere Reihe gar nicht mehr gegen etwas größeres gehen und divergiert auch.

Tafelbild

Wurzelkriterium

Satz 4.50 (Wurzelkriterium)

Mathematik für Informatik, p.168

Falls es eine Zahl q gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n$$

dann ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent.

Falls hingegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } n$$

so ist $\sum_n a_n$ divergent.

Bemerkung: Man beachte, dass die Konstante q in der ersten Ungleichung wesentlich ist. Die Bedingung

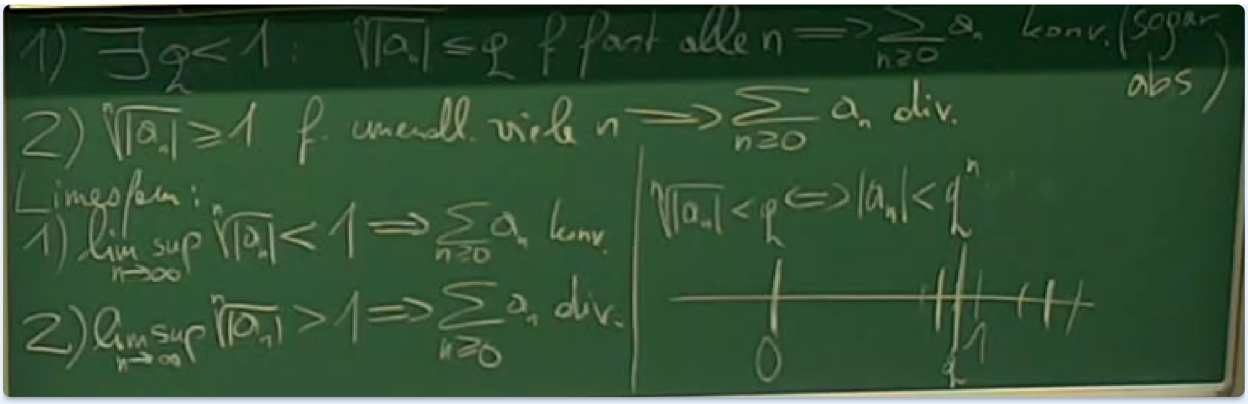
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

reicht nicht aus, wie das folgende Beispiel zeigt: Für die divergente harmonische Reihe ist $\sqrt[n]{|a_n|} = 1/\sqrt[n]{n}$. D.h., die Bedingung (4.6) ist erfüllt. Ferner gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$. Somit konvergiert auch $\sqrt[n]{|a_n|}$ gegen 1, also muss die Folge jede a priori vorgegebene Schranke $q < 1$ überschreiten. Die Bedingung (4.4) des Wurzelkriteriums ist somit verletzt.

Zu beachten ist aber, dass in diesem Fall auch (4.5) nicht erfüllt ist. Mit Hilfe des Wurzelkriteriums kann also nicht für jede Reihe eine Entscheidung über Konvergenz bzw. Divergenz getroffen werden.

Beweis. Aus (4.4) folgt, dass $|a_n| \leq q^n$ für fast alle n. Daher ist die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n$ eine konvergente Majorante, woraus die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$ folgt.

Bedingung (4.5) impliziert, dass $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n. Somit kann $(a_n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge sein und daher $\sum_n a_n$ nicht konvergieren.



Satz 4.51 (Limesform des Wurzelkriteriums)

Mathematik für Informatik, p.168

Aus $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ und aus $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ deren Divergenz.

Im Fall $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ist wieder keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe möglich.

Bemerkung: Dass Satz 4.51 tatsächlich eine Abschwächung von Satz 4.50 ist, zeigt das triviale Beispiel $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist (4.5) anwendbar, aber $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, weshalb Satz 4.51 keine Aussage liefert.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass die Aussage (4.4) äquivalent zu $\lim_{\sup_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist. Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so gilt sicherlich (4.5).

Quotienten-Kriterium:

Satz 4.52 (**Quotientenkriterium**)

Mathematik für Informatik, p.169, Tafelbild

Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls eine Zahl q existiert, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } n$$

so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt hingegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } n$$

so divergiert die Reihe $\sum_n a_n$.

Beweis. Im ersten Fall gilt für einen Index N und alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a_{n+1}| \leq q\,|a_n|$ und daher $|a_n| \leq q^{n-N} a_N$. Daher ist die geometrische Reihe $\sum_n |a_N| q^{n-N}$

eine konvergente Majorante.

Im Fall $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n ist $|a_n|$ eine ab einem gewissen Index N monoton wachsende Folge positiver Zahlen und damit sicherlich keine Nullfolge.

Auch beim Quotientenkriterium kann der Fall eintreten, dass keine der beiden Bedingungen zutrifft und daher keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe gemacht werden kann. Die harmonische Reihe ist etwa ein Beispiel, wo das Quotientenkriterium versagt.

Satz 4.53 (Limesform des Quotientenkriteriums) Aus $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ und aus $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ deren Divergenz.

Beispiel 4.54:

Beispiel 4.54

Mathematik für Informatik, p.169

(a) Wir untersuchen die Exponentialreihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

für festes $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für hinreichend große n, da $\frac{|x|}{n+1}$ eine Nullfolge ist. Das Quotientenkriterium sagt uns nun, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$. Wieder führt das Quotientenkriterium zum Ziel: Wegen (4.1) gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ für } n \geq 1,$$

und daher ist die Reihe konvergent.
(c) Sei $a_{2n} = \frac{1}{4^n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{4^{n-1}}$. Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 4 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{16} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

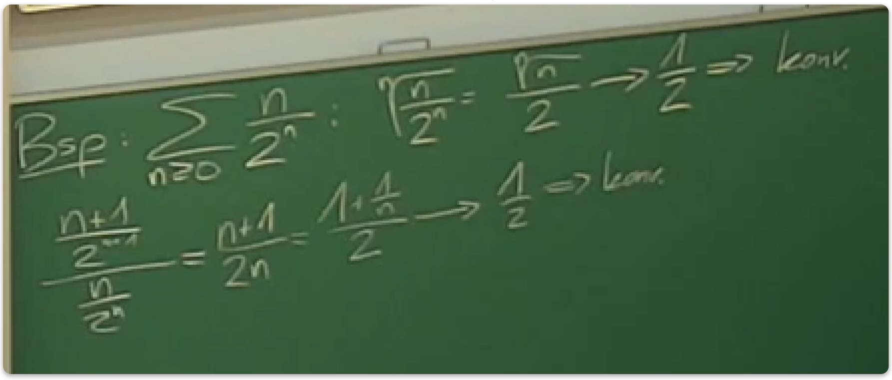
Daher gilt $\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 4$ und $\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1/16$. Das Quotientenkriterium liefert daher keine Aussage. Der Versuch mit dem Wurzelkriterium erweist sich jedoch als zielführend, denn

$$\sqrt[2n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt[2n+1]{\frac{1}{4^{n-1}}} = \sqrt[2n+1]{\frac{2^3}{2^{2n+1}}} = \sqrt[2n+1]{8} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ für } n \to \infty,$$

und daraus folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$.

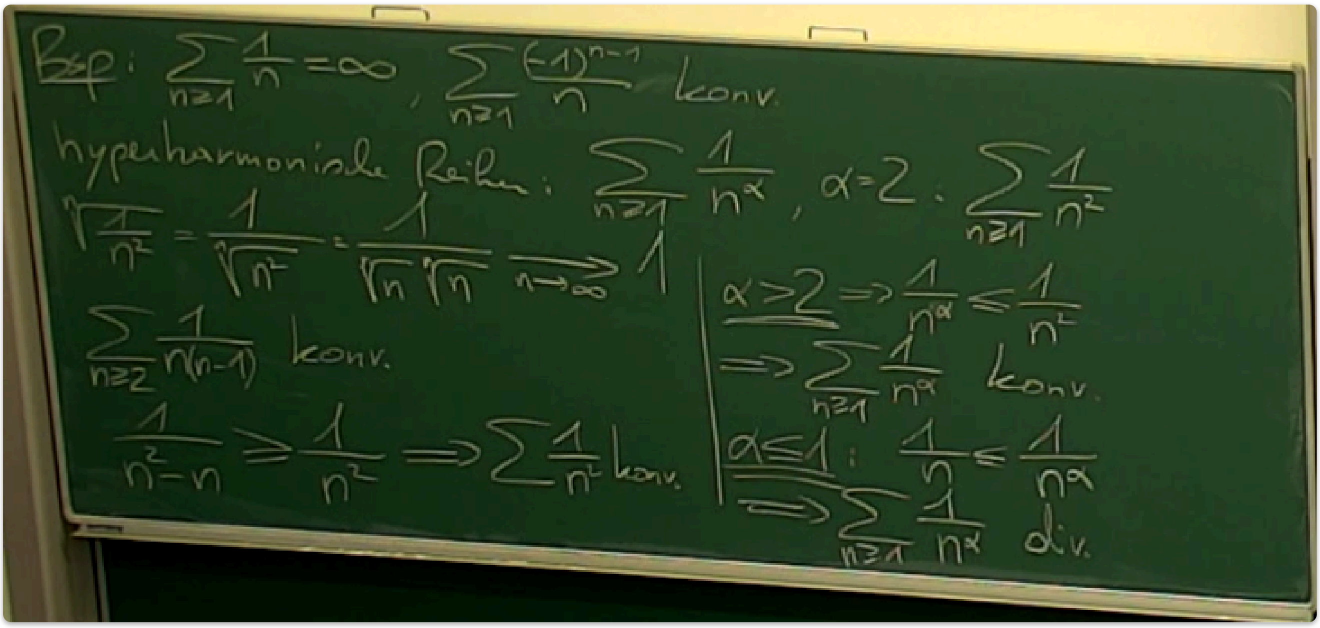
Allgemein lässt sich zeigen, dass das Wurzelkriterium leistungsfähiger ist als das Quotientenkriterium. Letzteres ist jedoch in vielen Fällen einfacher zu handhaben.

Da haben wir ein anderes Beispiel gemacht was ich nicht im Buch gefunden hab:



Tafelbild zu b)

Beispiel zu Hyperharmonischen Reihen



Hier sagen sowohl Wurzelkriterium und das Quotienten Kriterium nichts aus. Es liefert 1 also sagt das Quotienten Kriterium nicht aus, ob's konvergiert oder divergiert.

Wir haben hier eine konvergente Majorante zu unserer Reihe gefunden und wissen daher dass unsere Reihe konvergent ist.

Also können wir dann unsere neue Reihe gleich als Majorante verwenden um herauszufinden, dass unsere Reihe divergent ist, wenn $\alpha \leq_1$ und konvergent wenn $\alpha > 2$.

---

3. Potenzreihen

Cauchyprodukt und Potenzreihen

Mit dem Cauchyprodukt lassen sich Reihen multiplizieren.

$$(a_n) * (b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad mit\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Eine Anwendung des Cauchyprodukts ist Aufgabe 16 in der Beispielsammlung.

Cauchyprodukt und Potenzreihe:

Definition 4.57

Mathematik für Informatik, p.171

Unter einer Potenzreihe versteht man eine Reihe der Bauart $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$. Die Faktoren a_n heißen die Koeffizienten der Potenzreihe, x_0 ist der Entwicklungspunkt oder die Anschlussstelle.

Definition 4.55

Mathematik für Informatik, p.171, Tafelbild

Seien $\sum_{n>0} a_n$ und $\sum_{n>0} b_n$ zwei Reihen.
Unter dem Cauchyprodukt dieser beiden Reihen versteht man die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Satz 4.56

Mathematik für Informatik, p.171, Tafelbild

Falls $\sum_{n\geq 0} a_n = a$ und $\sum_{n\geq 0} b_n = b$ und beide Reihen absolut konvergieren, dann ist auch deren Cauchyprodukt absolut konvergent, und es gilt $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab$.

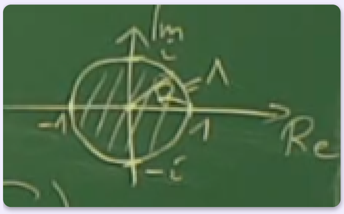
Ohne Beweis.

Beispiel 4.58

Beispiel 4.58

Mathematik für Informatik, p.171

(a) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n\geq 0} x^n$, eine Potenzreihe mit Anschlussstelle 0 und allen Koeffizienten gleich 1. Diese Reihe ist bekanntlich eine geometrische Reihe. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$. Ihr *Konvergenzbereich* ist somit das Innere des *Einheitskreises der Gauß'schen Zahlenebene*.



(b) Die binomische Reihe ist definiert durch $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Das Quotientenkriterium (in Limesform) liefert für $a_n = \binom{\alpha}{n} x^n$ und $\alpha \notin \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{\alpha}{n+1} x}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{(\alpha - n)x}{n+1} \to -x \text{ für } n \to \infty.$$

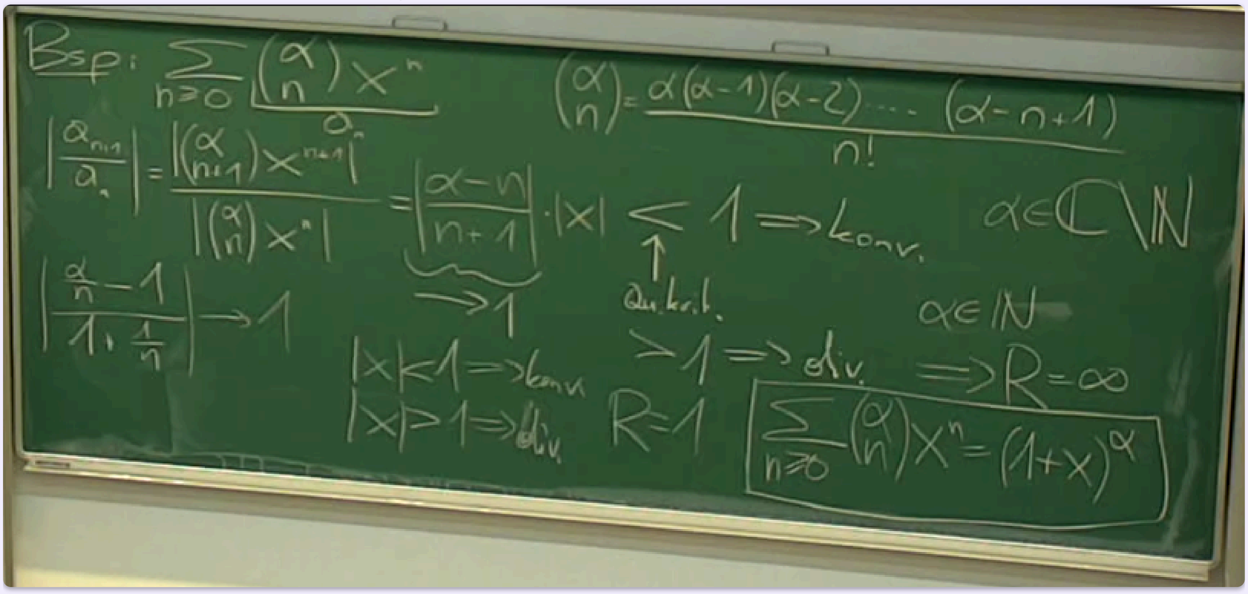
Im Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ ist diese Reihe daher für $|x| < 1$ konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Wie im vorigen Beispiel ist auch hier der Rand des Konvergenzbereichs ein Kreis.

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ besteht die Reihe nur aus endlich vielen Gliedern und konvergiert daher trivialerweise in ganz $\mathbb{C}$. Aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir in diesem Fall

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

In Kapitel 5 werden wir sehen, dass dies auch für $\alpha \notin \mathbb{N}$ zutrifft.

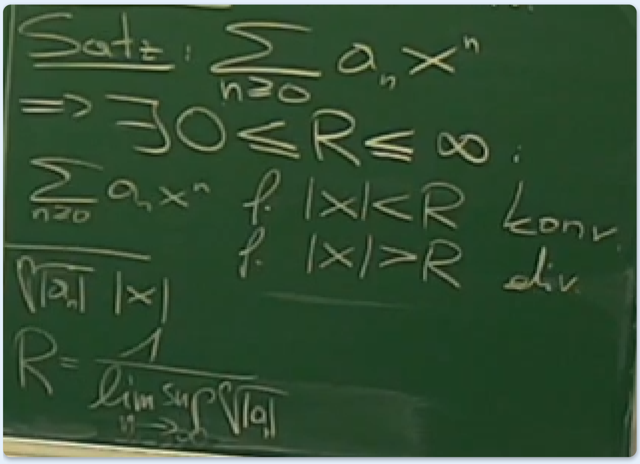
Bisschen anderer Rechenweg bzw vielleicht bisschen intuitiver:



Satz 4.60 Konvergenzradius

Mathematik für Informatik, p.172,

Satz 4.60 Sei $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R. Sei weiters $0<r<R$. Dann existieren Konstanten $c>0$ und $0<q<1$, so dass $|a_n(x-x_0)^n| \leq cq^n$ für alle x mit $|x-x_0| \leq r$.



Beweis. Wegen $r<R$ sind alle s mit $r<s<R$ immer noch innerhalb des Konvergenzkreises. Wir wählen ein solches s und setzen $q=r/s$. Dann folgt $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|r^n = |a_n|s^n q^n \leq cq^n$ für alle x mit $|x-x_0| \leq r$. Die Existenz von c in der letzten Ungleichung folgt daraus, dass $|a_n|s^n$ aufgrund der Konvergenz der Reihe eine Nullfolge und daher beschränkt sein muss.

Quellen:

- Mathematik für Informatik;
- 4. Folgen Reihen und Funktionen