Симона Светозарова Любенова I курс
Софтуерно инженерство II група
Алгоритъм за решаване на задачи
2 и 3 от ореинамото по ЛА

зад. Дадено е матричното уравнение
$XA = (-3)A^t C - 5X$, където A и C са матрици с размерност 3x3. Да се намери матрицата X.

Решение: Имаме матричното уравнение $XA = (-3)A^t C - 5X$. За да оставим неизвестната матрица X само от едната страна, прехвърляме 5X отляво:
$XA + 5X = (-3)A^t C \rightarrow X(A+5) = (-3)A^t C$.
Тъй като A е матрица с размерност 3x3, а 5 е число, няма как да съберем матрица с число, но може да събираме матрици. Заради това си въвеждаме единична матрица с размерност 3x3, защото не може да събираме матрици с различна размерност. Единична матрица с размерност 3x3 изглежда по следния начин: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

По главния си диагонал има единици, а на останалите места - нули. След въвеждането на единичната матрица (E), уравнението изглежда по следния начин:
$X(A+5E) = (-3)A^t C$. През единичната ма-

трица E стои коефициентът 5, което означава, че трябва да умножим коефициента 5 с E.
Умножение на матрица с число се извършва, като всеки елемент от матрицата го умножим с въпросното число.

Пр: Нека $B \in M_3(F)$, $\lambda \in F$, където F е числово поле

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{квадратна матрица } 3\times 3}}{M_3(F)}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad \lambda B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\lambda B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Виждаме $5E = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Следващата стъпка от лявата страна е да съберем матрицата A с матрицата 5E.
Събиране/изваждане на матрици:
Нека $A, B \in M_3(F)$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Всяка позиция от новополучената матрица е сбор/разлика на елементите от съответната позиция на матриците, които събираме/изваждаме. Нека получената матрица, която също е с размерност 3x3, да означим с P. Тогава имаме: $XP = (-3)A^tC$. Отдясно A^t означава транспонираната матрица на A, т.е., за да получим A^t, трябва редовете в A да станат стълбове в A^t, а стълбовете в A да станат редове в A^t.

Пример: Нека $A \in M_3(F)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$

Тогава $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$

След като намерим матрицата A^t (след като сме транспонирали), остава да умножим A^t с C, както и с (-3). Няма значение дали първо ще умножим една от двете матрици с коефициента пред тях, (-3), или след като умножим двете матрици – резултатът ще е един и същ. Умножението на матрици е по-сложно от събирането/изваждането. За да умножим две матрици, първо трябва да проверим дали е изпълнено условието броят на стълбовете на първата матрица да е равен на броя на редовете на втората матрица. Получената матрица ще е с размерност брой на редовете на първата матрица x брой на стълбовете на втората матрица.

Пример: Нека $A \in F_{m \times n}$, $B \in F_{n \times k}$ и $A.B = C$.

Тогава $A_{m \times n} . B_{n \times k} = C_{m \times k}$

a_{ij} $\quad b_{jl}$ $\quad c_{il} = \sum a_{ij} . b_{jl}$

Правилото за умножение се нарича ред по стълб.

Пример:
$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}} . \underset{B}{(1, 2\ 3)_{1\times3}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times3}}.$$

$c_{11} = a_{11} . b_{11} + a_{12} . b_{12} + a_{13} . b_{13}$

$1 = 1.1 + 0.2 + 0.3 = 1$

При умножението не важи комутативният закон!

След като ще умножим A^t с C и с коефициента (-3), нека получената дясна част я означим с J. Тогава имаме следното матрично уравнение: $XP = J$. Уравнение от този тип се решава, като транспонираме матрицата P, след това транспонираме матрицата J и записваме двете транспонирани матрици в една обща, като ще приложим метода на Гаус. По този начин ще се стремим в лявата част на общата матрица да получим единичната матрица, а тази, която ще получим вдясно, ще е транспонираната матрица на X (X^t). За да намерим търсената матрица X, ще използваме, че $(X^t)^t = X$. Това матрично уравнение може да се реши и чрез обратната матрица на P (P^{-1}), където P е обратима матрица, а P^{-1} е нейната обратна. За да бъде една матрица обратима, т.е. да притежава обратна матрица, то нейната детерминанта трябва да е различна от 0, т.е. матрицата трябва да е неизродена. След като в този случай трябва да проверим дали детерминантата на P е 0, то означава, че и в случая с решаването на задачата чрез двете транспонирани матрици P^t и J^t също трябва да проверим дали $\det P = 0$. (Ако $\det P = 0$, то тогава задачата няма решение!) Детерминанта на матрица с размерност 3x3 се намира с формулата на Сарус.

Нека $A \in M_3(F)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

(Системата) Ако $\det P = 0$, то тогава трябва да видим в общата матрица, където ще приложим метода на Гаус, какво ще получим. Ако от лявата част получим само нули на някой от редовете, а отдясно, на същия ред, получим число, което не е 0, то тогава нямаме решение, а ако отляво получим на някой от редовете само нули и отдясно на същия ред получим само нули, то тогава имаме безброй много решения (с параметри ги намираме).

След като проверим детерминантата на матрицата P, транспонираме P и J и ги записваме в обща матрица: $(P^t \mid J^t)$. Чрез елементарни преобразувания ще намерим X^t, след което ще транспонираме X^t за да намерим X.

пример – Гаус

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -12 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -6 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -6 & -3 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & -27 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 3 & -18 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 18 \end{array}\right) \quad X^t = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & -27 \\ -9 & -3 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -9 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & -27 & 18 \end{pmatrix}}$$

3 зад. В линейното пространство $\mathbb{R}^n$ са зададени две числа m и n, както и векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Нека $U = l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е подпространство на $\mathbb{R}^n$, $l(a_1, a_2, a_3, a_n) = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\}$ и нека W е пространство от решенията на хомогенната система:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mm}x_n = 0 \end{cases}$$

Да се намери базис на U+W.

Решение: За да намерим базис на U+W, то трябва да намерим базис на W, като запишем коефициентите от системата в матрицата (съответно по редове) и чрез метода на Гаус да намерим вектори, които са базис на W. Тъй като W е пространство от решения на хомогенна система, то ако редовете на съставената матрица са по-малко на брой от стълбовете или по време на елементарните преобразувания получим нулеви редове и не сме обходили всички стълбове, то трябва да си въведем параметри на необходимите стълбове, чрез които да изразим обходените, след като да зададем произволни стойности на параметрите, за да намерим базис на W (базисът се състои от линейно независими вектори). Броят на независимите вектори всъщност е рангът на матрицата от коефициентите b. Тъй като векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не са записани в система, то след като ги запишем в матрище и извършим елементарни преобразувания, ако получим нулеви редове и/или ще обходим само някои стълбове, а не всички, не трябва да въвеждаме параметри. Линейно независимите вектори всъщност ще са тези, които остават, след като премахнем нулевите. Тези линейно независими вектори ще са базис на U. За да намерим базис на U+W, то трябва да запишем в обща матрица получените вектори от U и от W, след което да приложим метод на Гаус. Ако получим нулеви редове, ги премахваме и тук също не използваме параметри, както направихме в W. Базисът U+W се състои от векторите, които остават след извършването на елементарни преобразувания, като премахнем нулевите редове. Базисът U+W е съставен от линейно независими вектори. Можем да намерим този базис и без да намираме базис на U, а само базис на W. Разликата щеше да е в това, че в общата матрица ще запишем векторите от пространството U, без предварително да сме приложили метода на Гаус, а под тях ще запишем векторите от пространството W, след като сме приложили метода на Гаус и сме намерили негов базис. И двата подхода са верни. Нека дадем пример, за да видим какво би се получило:

$m=2,\ n=4$

$a_1=(2,8,-3,14)\quad a_2=(-1,2,3,5)\ \to U$

$a_3=(-1,14,6,29)\quad a_4=(0,12,3,24)$

$b_1=(0,1,1,0)\quad b_2=(10,7,0,-8)\ \to W$

Намиране базис на W

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -7 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cccc} & & p & q \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$x_2=-p$

$x_1=\dfrac{7p+8q}{10}$

$$\left(\frac{7p+8q}{10}, -p, p, q\right)$$

$p=10,\ q=0 \to (7,-10,10,0)$
$p=0,\ q=10 \to (8,0,0,10)$ } базис на W

Намиране базис на U

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 14 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 14 & 6 & 29 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 & 24 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 & 24 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /:3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Базис на U:
$(0,4,1,8)$
$(-1,-10,0,-19)$

Записване получените базиси в обща матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 7 & -10 & 10 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 7 & -50 & 0 & -80 \\ 8 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

... И така нататък обхождаме останалите стълбове. Базисът на U+W ще е съставен от получените редове с изключение на нулевите, ако има такива.