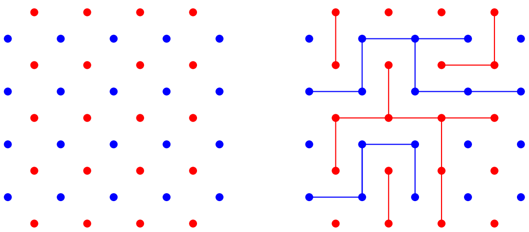
橋を架けろの組合せゲーム理論に基づく調査

岐阜大学 工学部 電気電子・情報工学科　草刈研究室　内田宗明

1. はじめに

「橋を架けろ (Bridg-It)」は，二人の対局者 (左と右と呼ぶ) が図 1a のような格子状に支柱を設置した盤上で行う．図中で青 (赤) 点が左 (右) 対局者の支柱である．各対局者は隣接する自分の支柱間に橋ユニットを交互に架橋する．なお重ねて架橋することは許されない．左 (右) 対局者は，盤の左 (上) 端から右 (下) 端まで橋，すなわち連続した橋ユニットの道，を架ければ勝利となる．このゲームには，全域木戦略と呼ぶ必勝法が発見されている．



(a) 橋を架けろの盤　(b) 左対局者の勝利局面

図 1: 局面の例

全域木戦略は左対局者が初期局面からの実行をするときのみを考慮した戦略であることから，途中の局面からは実行できず，右対局者は実行できない．本研究では，任意の局面に対応し，両対局者とも実行できるよう拡張した随意全域木戦略を提案する．また，随意全域木戦略は任意の局面で必勝戦略でありどちらかの対局者が実行できると予想する．この系として引き分けが存在しないことが導ける．

随意全域木戦略が与える選択肢は複数存在することがある．選択肢の優劣を判別するために優劣判別関数を導入し，優劣判別手法を提案する．提案した判別手法の正当性を組合せゲーム理論に基づき調査する．

2. 全域木戦略

橋を架けろは左必勝であり，左の応手として定式化される全域木を用いた必勝戦略が知られている [3]．この戦略を全域木戦略と呼ぶことにする．この必勝戦略の鍵を握るのは次の命題である．

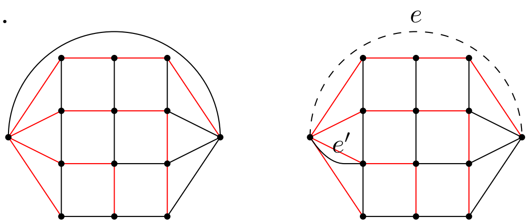
命題 2.1 T, T' という 2 つの全域木が連結グラフ G に含まれていて，$e \in E(T) - E(T')$ であるとき，$T - e + e'$ が G の全域木となる辺 $e' \in E(T') - E(T)$ が存在する．

初期局面に対応するグラフを以下のように定義する: 頂点を左対局者の支柱とし，辺を左対局者の隣接支柱に対応する頂点間としたグラフを考える．その際，盤の左端の支柱と右端の支柱をそれぞれ一つの単一な支柱とみなし，左端の支柱と右端の支柱をつなぐ補助辺が存在するとみなす．

全域木戦略実行手順を以下に示す．この戦略は右の手に対応する左の応手として定式化されている．

1. 初期局面に対応するグラフ G を作成する．
2. グラフ G 中の 2 つの辺素な全域木を求める．
3. ゲームが終了するまで手順 4,5 を繰り返す．
4. グラフ G 中の右が架橋した橋ユニットに対応する辺 e(初手の場合は補助辺とする) を削除し，命題 2.1 に従って対応する辺 e' を選択し，その辺を二重辺に変更する．
5. e' に対応する橋ユニットを架橋する．

下図 (a) は初期局面 (図 1a) に対応するグラフで，2 つの辺素な全域木をそれぞれ黒と赤で表している．図 (b) は左対局者が初手で全域木戦略に従って手順 4 を行った例である．



(a) 初期局面に対応するグラフ　(b) 全域木戦略に従う初手の例

3. 随意全域木戦略

前節で紹介した全域木戦略は，初期局面に対応するグラフから常にその戦略に従うことで勝利できるという左対局者用の戦略であった．よって，一度全域木戦略から外れた手を打ってしまった場合は実行できず，右対局者はそもそも実行することができない．

本研究では，任意の局面に対応し，両対局者とも実行できるよう拡張した随意全域木戦略を提案する．提案戦略を設計するために，左対局者グラフと右対局者グラフ，および生成分と死成分という概念を導入する．

定義 3.1 (左対局者グラフと右対局者グラフ) ゲームの局面に対応する左対局者グラフとは，頂点を左対局者の支柱とし，辺を左対局者の隣接支柱に対応する頂点間としたグラフである．その際，盤の左端の支柱と右端の支柱をそれぞれ一つの単一な支柱とみなす．また，架橋していない隣接支柱間を一重辺，左対局者が架橋している隣接支柱間を二重辺，右対局者が架橋している隣接支柱間の辺はないものとする．同様に，対局者を反対に考えることで，右対局者グラフも定義する．

定義 3.2 (生成分と死成分) 任意の局面を考える際，対応する対局者グラフが非連結な場合がある．そこで，ゲームの

局面に対応した左 (右) 対局者グラフにおいて，盤の左 (上) 端と右 (下) 端の支柱に対応する頂点をともに含む成分を生成分と呼び，そうでない成分を死成分と呼ぶ.

随意全域木戦略　随意全域木戦略実行手順を以下に示す.

1. 局面に対応するグラフ G(左対局者の場合は左対局者グラフ，右対局者の場合は右対局者グラフ) を作成する.
2. グラフ G 中の生成分 C を求める．求められないときは勝ち手なしとして終了する.
3. 生成分 C において，二重辺に変更することで 2 つの辺素な全域木を取ることができる一重辺を選択する．その辺を二重辺に変更する．選択できないときは勝ち手なしとして終了する.
4. 手順 3 で選択した辺に対応する橋ユニットを架橋する.

この手順は以下の予想に基づき設計している.

予想 1

- 生成分が存在しないときは相手の勝利局面である.
- 生成分において，2 つの辺素な全域木を取ることができないときその対局者は必勝手をもたない.

提案した随意全域木戦略に対して，以下の予想を立てる.

予想 2

- 随意全域木戦略は実行できるとき必勝戦略である.
- どちらかの対局者が随意全域木戦略を実行できる.

なお予想 2 が正しければ,「橋を架けろ」には引き分けが存在しないことが直ちに導ける.

4. 選択肢の優劣判別方法の予想

随意全域木戦略を実行している際，複数の選択肢が生じる例がある．そこで選択肢の優劣を判別するための関数を導入し，判別方法を提案する．ここでいう優劣を定義するために組合せゲーム理論 [1] を用いる.

「橋を架けろ」のようなゲームのことを組合せゲームと呼び，組合せゲームを代数的に取り扱う理論が組合せゲーム理論である．橋を架けろを理論的に組合せゲーム理論で取り扱うためには，最後に手を打った対局者が勝利するという形への再定式化が必要となる．本研究ではその再定式化を行い調査する．まず，判別に用いる関数を定義する.

定義 4.1 (優劣判別関数 $b_L(G), b_R(G)$) 局面 G において，関数 $b_L(G), b_R(G)$ を以下のように定義する.

$b_L(G) = n \Leftrightarrow$ 左が橋ユニットを最小n本架橋すれば勝利
$b_R(G) = n \Leftrightarrow$ 右が橋ユニットを最小n本架橋すれば勝利

ただし，何本架橋しても勝利局面とならないとき $n = \infty$ とする.

優劣判別関数を用いることで，任意の局面に対して各対局者の選択肢の組合せゲーム理論における比較演算に従い定義される優劣が以下のように判別できると予想する.

予想 3

局面 G 中の支柱間 e_i と e_j に橋ユニットを架橋する左選択肢 G_i^L と G_j^L に対して，以下が成立する.

- $b_L(G_i^L) < b_L(G_j^L)$ のとき: $G_i^L > G_j^L$ となる
- $b_L(G_i^L) = b_L(G_j^L)$ かつ $b_L(G_i^R) < b_L(G_j^R)$ のとき: $G_i^L > G_j^L$ となる

同様に右選択肢 G_i^R と G_j^R に対して, 以下が成立する.

- $b_R(G_i^R) < b_R(G_j^R)$ のとき: $G_i^R < G_j^R$ となる
- $b_R(G_i^R) = b_R(G_j^R)$ かつ $b_R(G_i^L) < b_R(G_j^L)$ のとき: $G_i^R < G_j^R$ となる

また，等価性も以下のように判別できると予想する.

予想 4

左選択肢 G^L 中に $b_L(G^L) = 0$ が存在しないとき，局面 G 中の支柱間 e_i と e_j に橋ユニットを架橋する左選択肢 G_i^L と G_j^L は，以下が成立する.

- $b_L(G_i^L) = b_L(G_j^L)$ かつ $b_L(G_i^R) = b_L(G_j^R)$ のとき: $G_i^L = G_j^L$ となる

右選択肢に対しても対局者を反対に考えることで同様の性質が成立する.

組合せゲーム理論における様々な代数計算を行えるソフトウェアである CGSuite[1] を用いてこれらの予想を検証し，簡単な例では成立することを確認している.

5. 今後の課題

随意全域木戦略を提案したが，この戦略が必勝戦略であることや予想した各種性質の検証はできていない．また選択肢の優劣判別方法も予想したが十分な検証ができていない．これらの検証は今後の課題である.

CGSuite での「橋を架けろ」の実装において勝利局面の判定アルゴリズムの最適化が不十分であると考える．それにより，局面値を計算できる局面が限定されてしまい，データが十分に収集できなかった．アルゴリズムの最適化とさらなるデータの収集が今後の課題である.

参考文献

[1] M.H.Albert, R.J.Nowakowski, D.Wolfe(川辺治之訳), 組合せゲーム理論入門: 勝利の方程式, 共立出版, 2011

[2] R.J.Wilson(西関隆夫, 西関裕子訳), グラフ理論入門 (原書第 4 版), 近代科学社, 2001

[3] D.B.West, Introduction to Graph Theory (2nd Edition), Pearson Education,Inc, 2001