Appunti Teoria dei Segnali

A.A 2021/2022

Simone Coco

Premessa

Spero questi appunti vi possano aiutare nell'apprendimento della materia, ci tengo però a precisare che, seppur ben curati, essi non potranno mai sostituire il libro o quanto detto dal professore, anche perché, trattandosi di appunti, potrebbero esservi degli errori.

Mi scuso anticipatamente per eventuali errori grammaticali o eventuali parole di poco senso (a volte per velocizzare il lavoro ho utilizzato la compilazione vocale, che spesso interpreta le parole a modo proprio), ho rivisto tutto il lavoro prima di pubblicarlo, ma potrebbe capitare che qualche errore mi sia sfuggito.
Vi consiglio di seguire questi appunti in parallelo al professore, in questo modo se vi è qualche errore potete facilmente correggerlo.

Purtroppo non ho fatto degli appunti digitali anche per la parte riguardante la teoria delle probabilità, ma questo blocco potrà comunque servirvi per il modulo sulla teoria dei segnali; potete infatti trovare i seguenti capitoli:

1. Introduzione allo studio dei segnali
2. Sviluppo in Serie di Fourier
3. Concetto di Trasformata di Fourier
4. Esercizi vari sui segnali determinati
5. Funzioni generalizzate e formula di Poisson
6. Sistemi lineari stazionari e concetto di filtraggio
7. Teorema del campionamento
8. I processi aleatori

Non mi resta che augurarvi un buon studio e farvi i miei auguri per i prossimi esami!

Simone Coco

1. Introduzione allo studio dei segnali

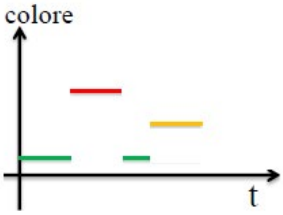
Che cos'è un segnale?

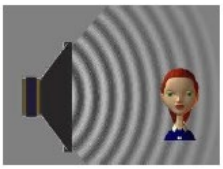
Il segnale è una grandezza fisica variabile che si occupa di trasportare informazioni di qualsiasi natura. Possiamo suddividere differenti tipologie di segnale: onde acustiche (suono), segnali visivi, segnali elettrici, etc…

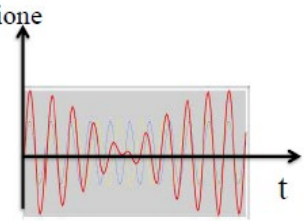
Noi ci occuperemo solo dei segnali elettrici, questo perché tutti i segnali possono essere **trasdotti** in segnali elettrici, ovvero possono essere convertiti in segnali elettrici.
Esempio: un microfono è un trasduttore per le onde sonore, esso prende in ingresso il segnale acustico e lo trasforma in un segnale elettrico, che trasporta le stesse informazioni del segnale acustico (questo vuol dire che il microfono è un dispositivo che in qualche modo non ne altera il contenuto informativo del segnale originale).

La variazione del segnale è quella che effettivamente permette il trasporto dell'informazione stessa.
Infatti, è proprio la variazione del segnale che ci fa recepire l'informazione:
Se un semaforo rimanesse costantemente acceso con luce verde non darebbe alcuna informazione e la sua presenza sarebbe superflua; quando invece il segnale visivo del semaforo articola le informazioni che trasporta in tre colori l'utente può ricevere un chiaro messaggio: se il semaforo è rosso è previsto l'arresto, se è giallo è previsto il disimpegno immediato dell'incrocio e solo se è verde l'utente prosegue la marcia.
Per questo motivo possiamo allora affermare che la corrente che giunge alla rete domestica non trasporta alcun tipo di informazione: essa è periodica e non varia, per cui non trasporta alcun tipo di informazione.

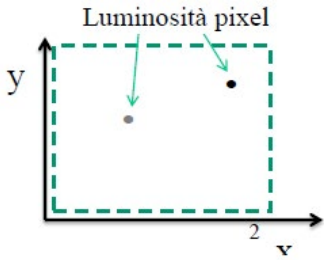
Normalmente il segnale può essere rappresentato, il metodo più comune per rappresentare quest'ultimo è mediante una certa **funzione del tempo**, parleremo dunque di segnale del tipo x(t).







Tuttavia, non tutte le funzioni vengono rappresentate nel tempo: si pensi ad esempio ad un'immagine, anche essa trasporta un certo tipo di messaggio, quindi può essere vista come un segnale visivo. Per quest'ultima è possibile verificare una certa coordinata "x" ed una "y", ogni punto $P(x, y)$ potrà corrispondere un certo livello di luminosità; se l'immagine è a colori, per ogni punto vi saranno tre funzioni che ne caratterizzano i colori: una per il colore rosso (R), una per il colore verde (G) ed una per il blu (B).



Un altro particolare segnale è il segnale video: quest'ultimo è formato da un insieme di frame che avanzano nel tempo. Questo segnale è un **segnale discretizzato**, ovvero un segnale che non è continuo nel tempo ma avanza per un certo numero di frame. In questo caso il tempo è discreto e viene contato in base al numero di frame.
La "continuità" del video è data dall'interpolazione che forma il cervello: i frame avanzano molto velocemente, circa a 44.100 frame al secondo, ed il cervello non riesce a distinguerli, dando l'impressione di avere un'immagine in movimento.

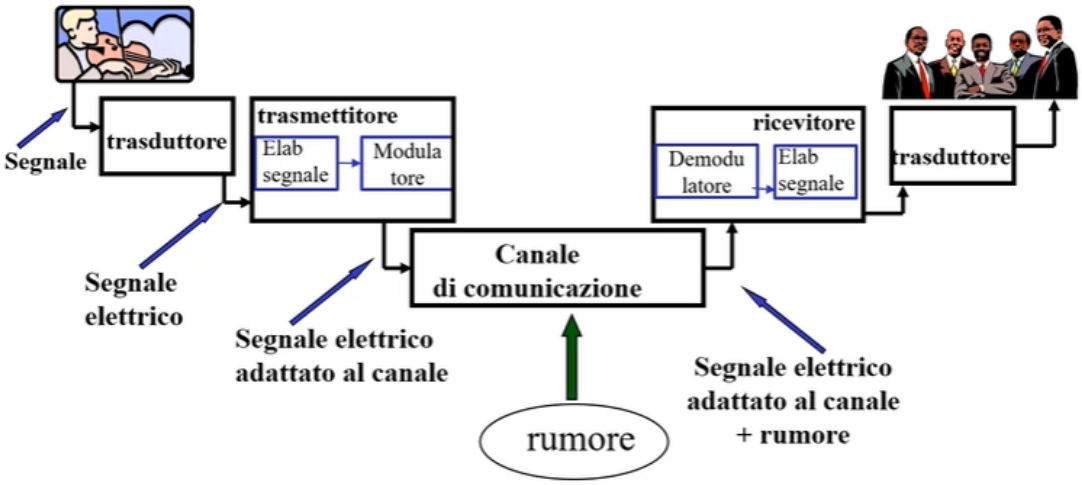
Il Sistema di comunicazione

Una sorgente emette un certo segnale, sia ad esempio audio. Tale segnale viene passato ad un trasduttore che lo converte opportunamente in un segnale elettrico, quest'ultimo viene ulteriormente amplificato, se necessario, da un amplificatore. Sia il trasduttore che l'amplificatore sono dei sistemi analogici che non alterano in alcun modo il contenuto informativo che trasporta il segnale.

Una volta trasdotto il segnale, questo deve essere trasmesso mediante opportuno canale di comunicazione: sia esso etereo, l'aria, l'acqua o il rame.
Purtroppo il segnale elettrico non è adatto ad essere trasmesso su un canale perché i mezzi di comunicazione hanno una certa resistenza fisica: se si parla di un segnale elettrico che viaggia per mezzo di una corrente elettrica e quindi di una tensione elettrica, quando questo viene immesso in un canale in rame sente una certa attenuazione: il cavo ha una certa resistenza che ostacola il passaggio di corrente e quindi che lascia attenuare il segnale; il risultato è un esaurimento del segnale elettrico.
La resistenza con cui il canale si oppone al passaggio del segnale è funzione della frequenza di quest'ultimo, per cui vi sono canali di comunicazione che non prevedono il passaggio di determinati segnali entro un certo tempo di frequenza: i vecchi sistemi telefonici funzionavano ad una frequenza di 0.4 KHz , ma a questa frequenza un cavo di rame (il doppino telefonico) opporrebbe una resistenza parecchio elevata, è necessario quindi **modificare il segnale elettrico, adattandolo al canale di comunicazione.** Per fare questa operazione sarà necessario **elaborare e modulare** il segnale.
In questo modo il segnale, con lo stesso contenuto informativo, è possibile traslarlo in banda così che esso assuma dei valori opportuni di frequenza per cui non si abbia un'elevata resistenza da parte del canale, nello specifico, maggiore è la frequenza e minore sarà la resistenza.

Una volta raggiunto il canale di comunicazione, al segnale viene aggiunto del rumore: una componente additiva cui non si può fare a meno, un disturbo che non può essere eliminato in alcun modo (si pensi ad esempio al rumore termico, che dipende dall'agitazione termica degli elettroni: questi, sotto agitazione, generano una corrente che si somma al segnale utile, disturbandone il contenuto). In ricezione deve essere sempre possibile distinguere il rumore dal segnale utile, si deve avere un ottimo rapporto segnale/rumore affinché sia possibile scindere l'effetto del rumore dal segnale utile.

Al canale viene connesso anche il ricevitore che dovrà effettuare le operazioni inverse al trasmettitore: dovrà demodulare il segnale, ottenendo il segnale elettrico iniziale, lo elaborerà e lo passerà ad un trasduttore. Il trasduttore in ricezione ha il funzionamento contrario rispetto a quello in ricezione: questo convertirà il segnale elettrico in un segnale di una certa natura (se, ad esempio, si tratta di una cassa questa trasduce la tensione in segnale acustico).



Nel mondo dell'ICT (Information & Communication Technologies) è fondamentale parlare di segnali: l'informazione, come detto, è la variazione di un segnale; la comunicazione si basa sul trasferimento e sulla manipolazione di un segnale; quest'ultimo ha quindi un ruolo centrale nelle tecnologie odierne.

Progettazione de sistemi e teoria dei segnali

Nella progettazione dei sistemi sorge un problema di notevole importanza: quando viene progettato un qualsiasi sistema che dovrà aver a che fare con dei segnali, non è possibile stimare a monte quali possano essere i segnali con cui dovrà operare.
Esempio: quando viene progettata l'antenna di un cellulare non è possibile stimare a monte quale sia il segnale con cui opererà tale antenna, esso non è stimabile a monte perché ad ogni chiamata è associato un segnale distinto e non prevedibile.

Nella realtà la progettazione avviene sulla base delle conoscenze di massima che si hanno sui segnali: i segnali con cui opera un certo sistema hanno determinate caratteristiche (un valore medio, un certo range di ampiezze, etc…). Sulla base di queste informazioni potrà essere possibile stimare un "segnale tipo" e lavorare con tale modello; tutti i casi reali potranno essere più o meno approssimati da questo modello, qualora quest'ultimo fosse troppo "grossolano", l'approssimazione sarebbe eccessiva e la progettazione risulterebbe troppo poco realistica, quindi poco affidabile.

La teoria dei segnali permette di utilizzare dei modelli matematici (delle funzioni matematiche) che permettono di modellizzare la realtà in modo da ottenere questi "segnali tipo" sul quale operare.
Esempio: Uno degli strumenti matematici che sfrutteremo e che sta alla base dell'analisi dello spettro di un segnale è l'analisi di Fourier, quest'ultima permette di lavorare sulle armoniche che formano un segnale ed è alla base del funzionamento di molti strumenti quali gli analizzatori dello spettro.

Analizzatore di spettro

Classificazione dei segnali

Le classificazioni dei segnali possono essere effettuate secondo differenti principi. Una prima differenza da cui possiamo trarre una classificazione è quella che persiste tra **i segnali determinati** ed **i segnali aleatori.**

- **Segnali determinati:** sono dei segnali cui andamento nel tempo è perfettamente noto; sono quindi segnali che possono essere stimati a monte nella progettazione del sistema.
  Questi segnali possono essere schematizzati come una **funzione matematica ad una o più variabili:**
  $$f(t): R \rightarrow R$$
  Questa funzione è deterministica: **siamo in grado di conoscere il valore dell'informazione** (sia essa una tensione se si sta parlando di segnale elettrico) **istante per istante**.
  Queste tipologie di segnali sono in qualche modo **registrati**: il segnale si è già presentato al momento della misurazione (è infatti determinato) ed è stato registrato su un apposito supporto (sia esso un file, un disco magnetico o un foglio).
  La corrente elettrica è un altro tipo di segnale deterministico: questa giunge alle reti domestiche con un andamento di tipo cosinusoidale, quest'ultimo è un andamento noto, di cui si conosce la forma d'onda e che quindi può essere studiato.
  Trattandosi di un segnale approssimabile con una funzione ad una o più variabile, questo segnale si può studiare con delle forme d'onda note e dei modelli matematici ben precisi.

- **Segnali aleatori:** sono segnali cui non è possibile stimare a priori un andamento; questo significa che non possono essere stimati perfettamente in sede di progettazione, occorre lavorare con dei segnali che in media li approssimino bene, per tal motivo diremo che **il suo andamento è noto solo nelle caratteristiche statistiche principali** (parleremo dunque di valor medio, etc..).
  Per questi segnali occorre uno studio affidato alla teoria delle probabilità (viene studiato come processo casuale o stocastico) perché non è possibile associarne un modello matematico visto l'imprevedibilità della sua forma d'onda.
  È quindi necessario approfondire la teoria delle probabilità per affrontare questi segnali.

Durante la registrazione di un segnale possiamo suddividere quest'ultimo in:

- segnale determinato: la parte di segnale che è stata registrata fino all'istante corrente, di cui è possibile apprezzarne l'evoluzione in quanto registrata
- segnale aleatorio: la parte che deve ancora essere registrata, di cui non si conosce l'evoluzione.

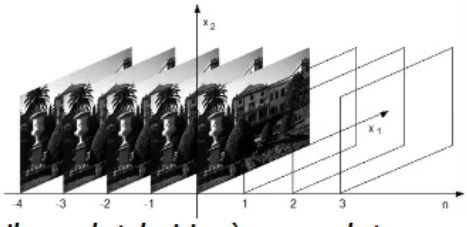
Quindi il segnale è unico, tuttavia possiamo dirlo "determinato" se si conosce il suo andamento, aleatorio se si sconosce quest'ultimo.

Consideriamo i **segnali determinati**, come abbiamo detto questi possono essere espressi come una funzione nel tempo, che viene rappresentata da un certo andamento nel tempo mediante un'apposita funzione matematica.
Possiamo allora classificare i segnali determinati in funzione del tempo: essendo tali segnali delle funzioni del tempo, quest'ultimo costituisce il dominio del segnale, per cui è possibile suddividere il segnale in funzione del dominio temporale, parleremo di **segnali a tempo continuo** e **segnali a tempo discreto**.

- **Segnali a tempo continuo:** sono segnali che esistono con continuità nel tempo, essi esistono ed assumono un certo valore ad ogni istante di tempo, a prescindere dai valori assunti (siano essi continui, come i segnali analogici, o discreti, come i segnali quantizzati).

- **Segnali a tempo discreto:** sono segnali che discretizzano il tempo ed esistono sono a certi istanti precisi di tempo. Basti pensare al segnale televisivo: quest'ultimo è un segnale formato da frame per secondo (fps) ed esiste solo frame dopo frame, quindi il tempo viene discretizzato in funzione dei frame e i suoi valori non sono assunti in maniera continua nel tempo.

L'elettrocardiogramma è un segnale continuo nel tempo



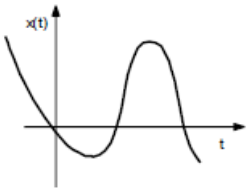
Il segnale televisivo è un segnale tempo discreto (fps)

Un'altra classificazione può riguardare il codominio: come fatto per il dominio temporale, per i segnali determinati è anche possibile stabilire una classificazione a seconda dei valori che questi assumono (quindi in funzione del loro codominio). In questo caso parleremo di **segnali ad ampiezza continua** e **segnali ad ampiezza discreta.**

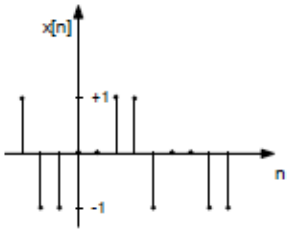
- **Segnali ad ampiezza continua:** sono segnali che possono assumere con continuità tutti i valori che rientrano in un certo range delimitato tra un valore minimo ed un valore massimo (possono assumere infiniti valori entro un range stabilito).

- **Segnali ad ampiezza discreta:** sono segnali che hanno come codominio un insieme numerabile, quindi assumono dei valori stabiliti, eventualmente limitati tra un valore minimo ed un valore massimo, tali valori non sono assunti però con continuità.

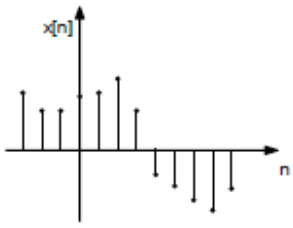
Da queste ultime due classificazioni possiamo parlare di:



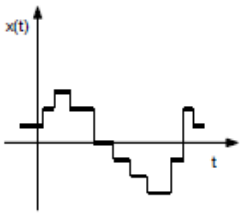
- **Segnali analogici:** sono dei segnali **tempo continuo** e ad **ampiezza continua**, quindi possono assumere in maniera continua (nel tempo) tutti i valori compresi tra un valore massimo ed uno minimo (possono cioè assumere in maniera continua tutti i valori nel suo codominio).
  Essi sono caratterizzati da valori continui sia nel dominio (tempo) che nel codominio (ampiezze)



- **Segnali numerici o digitali:** sono dei segnali **tempo discreto** e ad **ampiezza discreta**, essi assumono dei valori discreti, come -1 e +1, senza assumere con continuità tutti i valori che si trovano tra quest'ultimi; il tempo in cui essi assumono tali valori non viene scandito in modo continuo ma a sequenze di intervalli.
  I segnali numerici sono praticamente delle sequenze, per questo motivo non si indicano come x(t) ma come x[n], con "n" numero di intervalli.
  Essi sono caratterizzati da valori discreti sia nel dominio (intervalli di tempo) che nel codominio (intervalli di ampiezze)

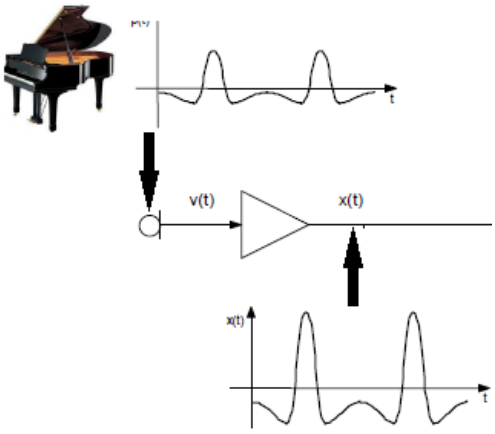


- **Segnali tempo discreto:** sono dei segnali che possono assumere con continuità tutti i valori del dominio ma ad intervalli discreti di tempo. Questi segnali sono quelli che provengono, ad esempio, da un campionatore: i **segnali campionati;** quest'ultimi si ottengono scandendo ad intervalli periodici un segnale analogico, il risultato è una sequenza di valori continui ad intervalli periodici.
  I segnali tempo discreto sono praticamente delle sequenze, per questo motivo non si indicano come x(t) ma come x[n], con "n" numero di intervalli.
  Essi sono caratterizzati da valori discreti nel dominio (intervalli di tempo) e da valori continui nel codominio (ampiezze)



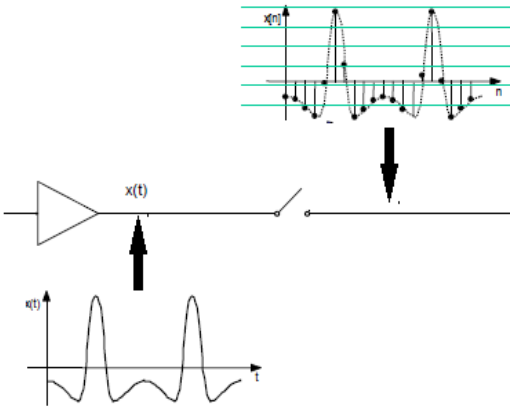
- **Segnali quantizzati:** sono dei segnali che possono assumere solo certi intervalli di ampiezze, in qualsiasi istante di tempo, pertanto sono a **tempo continuo** e ad **ampiezza discreta**. Questi segnali sono quelli che si ottengono a seguito della quantizzazione, un processo che prende in ingresso un segnale campionato (quindi tempo discreto a valori continui) e ne trae in uscita un segnale tempo continuo a valori discretizzati in intervalli di ampiezze.
  Essi sono caratterizzati da valori continui nel dominio (tempo) e da valori discreti nel codominio (intervalli di ampiezze)

<u>Esempio: Masterizzazione di un CD</u>



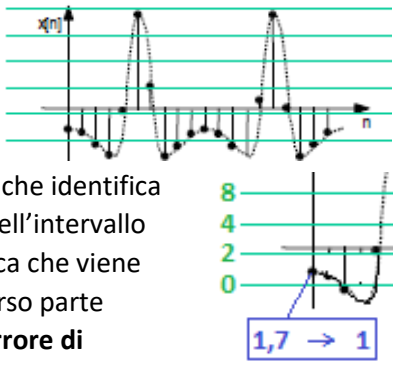
Un esempio che mette in risalto i quattro segnali appena affrontati è quello della registrazione di un brano su un CD.
Lo strumento emette un segnale analogico, che viene opportunamente trasdotto dal microfono, che lo converte in una debole corrente elettrica; quest'ultima viene opportunamente amplificata da un amplificatore (il "triangolo" nello schema) poiché è troppo bassa; l'amplificatore non modifica il segnale se non nelle sue ampiezze, ne consegue che il segnale ottenuto ha la stessa onda del segnale originale ma di ampiezze maggiori.
Il circuito elettronico lavora in digitale, quindi non può utilizzare questo segnale; quest'ultimo deve essere digitalizzato: affinché possa essere archiviato come file il segnale analogico deve essere "trasformato" in una sequenza di bit.

Il primo step della digitalizzazione è il **campionamento**: un campionatore (che possiamo vedere al momento come un interruttore on/off) darà in uscita un segnale che è tempo discreto a valori continui. Il funzionamento è il seguente: in ingresso al campionatore giunge il segnale analogico che è stato amplificato (quest'ultimo è un segnale tempo continuo a valori continui), ad intervalli periodici di tempo viene chiuso o aperto l'interruttore: quando esso è aperto non viene letta alcuna uscita, quando è chiuso viene letta la tensione (o la corrente) del segnale. Il risultato allora sarà un segnale a tempo discreto e valori continui: i valori vengono assunti solo ad intervalli di tempo (quando l'interruttore è chiuso), tali valori però possono ancora coincidere con qualsiasi valore di ampiezza. Il segnale risultante è il **segnale campionato**.

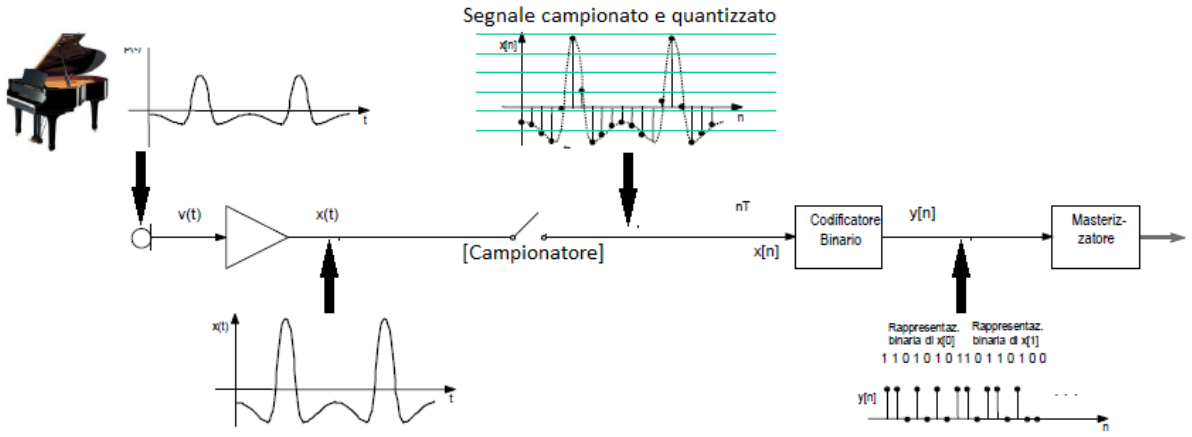


Come vedremo dal teorema del campionamento, affinché il segnale non perda di qualità (e quindi affinché l'informazione rimanga integra) si deve campionare ad una specifica frequenza, quella di Nyquist.

Il secondo step della digitalizzazione prevede la **codifica** del segnale: i valori continui del segnale campionato devono essere rappresentati da una certa sequenza di n bit.
Supponiamo che tale codifica avvenga a 8 bit: ogni parola sarà formata da una sequenza di 8 bit, pertanto sarà possibile rappresentare il range continuo di valori con un numero pari a $2^8 = 256$ sequenze di bit; ciò che dunque vogliamo ottenere è la rappresentazione di valori continui mediante 256 livelli, in altre parole: vogliamo discretizzare i valori che potrà assumere il segnale in un range di 256 livelli.
Per discretizzare i valori continui del segnale campionato affinché questi possano essere rappresentati da una sequenza finita di bit dovremo affrontare il problema della **quantizzazione:** vengono divisi tutti i valori assumibili dal segnale campionato in intervalli finiti (nel nostro caso 256 intervalli, nello schema questi vengono delimitati dalle "righe" del grafico); dopo di che i valori che rientrano in un intervallo vengono sostituiti con il valore medio dell'intervallo (e successivamente con la codifica che identifica tale numero): se un campione è caratterizzato da un'ampiezza pari a 1,7V si ritroverà nell'intervallo tra 0 e 2 e verrà approssimato dal valore che si trova in mezzo ad essi: 1. Questo significa che viene effettuata la sostituzione: $1{,}7V \rightarrow 1$ questo ci porta ad un errore di fondo (abbiamo perso parte dell'informazione: il valore decimale $0.7V$), tale errore è sempre presente ed è detto **errore di quantizzazione**; più sono i bit che utilizziamo e più stretti saranno gli intervalli, di conseguenza minore sarà l'errore di quantizzazione, tuttavia, aumentando il numero di bit utilizzati aumenta la lunghezza delle word per la digitalizzazione, quindi la dimensione del file e la banda.



I valori assunti dal segnale quantizzato (che sarà un segnale tempo continuo ad ampiezza discreta) vengono opportunamente codificati da un codificatore binario e vengono trasformati in una sequenza di bit, ottenendo così il segnale digitale (tempo discreto a valori discreti). Il segnale passa poi al masterizzatore.



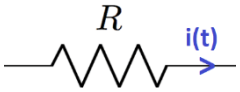
Analisi dei segnali nel dominio del tempo

Affrontiamo adesso la caratterizzazione dei segnali determinati nel dominio del tempo.
Quando analizziamo un segnale nel dominio del tempo, oltre al suo andamento (ovvero alla sua forma d'onda), siamo orientati a ricavare determinati valori caratteristici di quest'ultimo, nello specifico siamo interessati a:

- → **Energia del segnale**
- → **Potenza del segnale**
- → **Valor medio del segnale**
- → **Valor efficace del segnale**

(Spesso ci interessa conoscere solo energia, potenza e valor medio; è meno frequente la richiesta del valore efficace).

Potenza istantanea ed Energia di un segnale



Supponiamo di considerare una resistenza attraversata da una corrente $i(t)$, fisicamente sappiamo che esiste una potenza istantanea correlata alla corrente in questione, quest'ultima è data da:

$$P_{ist}(t) = R * [i(t)]^2$$

La potenza misurata istante per istante (= istantanea), è quindi **proporzionale al quadrato del segnale:** essa si trova moltiplicando il valore costante della resistenza "R" con il quadrato della corrente, ovvero del segnale nel tempo che stiamo considerando: $[i(t)]^2$.

Da questo esempio possiamo dedurre un'importante definizione:
La potenza istantanea al tempo "t" di un segnale è data, a meno di una costante*, dal quadrato del segnale stesso.

$$\boldsymbol{P_{IST}(t) = [x(t)]^2}$$

*diciamo "a meno di una costante" perché nella definizione non stiamo prendendo in considerazione una eventuale costante come "R", supponendola unitaria. In realtà ci importa poco del valore di quest'ultima perché stiamo ricavando la potenza istantanea per arrivare a parlare dell'energia del segnale che, definendosi come integrale della potenza istantanea, prescinde dalla presenza della costante.

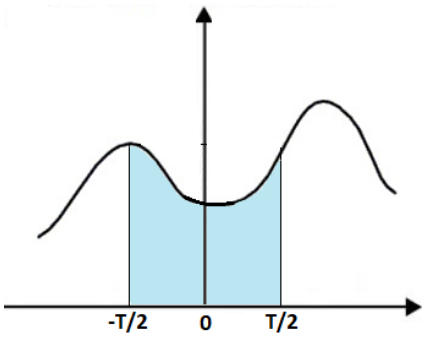
Continuiamo a trattare l'esempio della resistenza: se volessimo ricavare l'energia che viene dissipata per effetto Joule su di essa dovremo integrare il valore della potenza istantanea tra due intervalli "T_1" e "T_2":

$$E = \int_{T_1}^{T_2} P_{ist}(t)\, dt = \int_{T_1}^{T_2} R * [i(t)]^2\, dt = \int_{T_1}^{T_2} [i(t)]^2\, dt$$

L'energia coincide praticamente con **l'integrale del quadrato del segnale.**

Più in generale, possiamo estendere il concetto di energia ad un qualsiasi segnale $x(t)$;
Considerando un segnale in un intervallo "T", in cui esso assume una forma qualunque, possiamo esprimere l'energia del segnale in tale intervallo come l'integrale tra -T/2 e T/2 del quadrato del modulo del segnale:

$$\boldsymbol{E_T = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt}$$



NB! Nella formula non trattiamo il quadrato del segnale ma il **modulo al quadrato del segnale** quindi si faccia attenzione a non elevare al quadrato il segnale bensì il suo modulo, specie quando si tratta un segnale complesso.

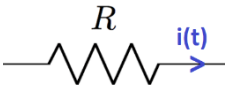
Chiaramente questa energia è calcolata esattamente nell'intervallo "T"; si ricordi, inoltre, che analiticamente <u>l'integrale corrisponde all'area sottesa dal grafico in un dato intervallo</u>.

Potenza (media) di un segnale

Parliamo adesso del concetto di potenza del segnale.

NB! Non parliamo della potenza istantanea del segnale, quella calcolata istante per istante (che abbiamo prima trattato per arrivare alla definizione di energia) ma della **potenza media** del segnale.

Prendendo come esempio il resistore, la potenza media dissipata su esso si può ottenere rapportando l'energia al periodo "T" in cui si è calcolata quest'ultima. L'energia l'abbiamo calcolata tra T_1 e T_2:



$$E_T = \int_{T_1}^{T_2} [i(t)]^2 \, dt$$

Per cui supponendo che $T = T_2 - T_1$ possiamo dedurre il valore della potenza media dissipata sul resistore:

$$P_M = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} [i(t)]^2 \, dt$$

Più in generale, possiamo definire la potenza di qualsiasi segnale $x(t)$;

Considerando un segnale in un intervallo "T", in cui ad esso è associata una certa energia "E_T", possiamo esprimere la potenza del segnale in tale intervallo come il rapporto tra l'energia dissipata da quest'ultimo e il periodo in cui avviene tale dissipazione:

$$\boxed{\boldsymbol{P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt}}$$

Nonché come rapporto tra "T" e l'integrale del modulo al quadrato del segnale, definito tra +T/2 e -T/2.

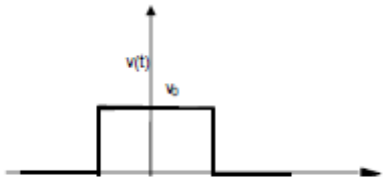
I segnali che abbiamo visto come esempio sono dei segnali reali: ogni segnale inizia e si esaurisce in un certo tempo "T", non esistono infatti segnali infiniti. Ne consegue dunque che **tutti i segnali hanno una potenza ed un'energia finita.** Tuttavia spesso, dato che i segnali potrebbero essere complessi da trattare, possiamo dover lavorare con dei **modelli di segnali** che prevedono delle durate infinite e una potenza o un'energia infinita (parleremo infatti di "segnali di energia" o "segnali di potenza"), come vedremo.

<u>Esempio</u>: se volessimo calcolare la potenza media che viene dissipata dal segnale elettrico che giunge alla rete domestica tra le 8 del mattino alle 22 di sera, sapendo che tale segnale è: $V(t) = 220\cos(\omega t + \varphi)$, che il segnale elettrico ha una frequenza di $f_0 = 50Hz$ e assumendo che $\varphi = 0$, possiamo ottenere la potenza come:

$$P_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |220\cos(\omega t + \varphi)|^2 \, dt \quad = \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |220\cos(2\pi f_0 + 0)|^2 \, dt$$

$$P_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |220\cos(2\pi(50))|^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |220\cos(100\pi)|^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |220\,(1)|^2 \, dt$$

<u>Esempio</u>: supponiamo di calcolare l'energia del segnale emesso da una batteria reale, quest'ultima erogherà una tensione costante pari a v_0 in un intervallo compreso tra $-T/2$ e $+T/2$ ed una tensione nulla al di furi di questo intervallo (NB! In realtà non viene mai erogata una tensione costante, quest'ultima si degrada nel tempo, insieme alla batteria).



$$v(t) = v_o \; \forall t \in [-T/2, T/2]$$

Per ricavare l'energia applicheremo la seguente formula:

$$E_T = \int_{T_1}^{T_2} [v(t)]^2 \, dt \quad \rightarrow \quad E_T = \int_{-T/2}^{+T/2} [v_0]^2 \, dt \; = \; v_0^2 \int_{-T/2}^{+T/2} dt \rightarrow \; E_T = v_0^2 \, T$$

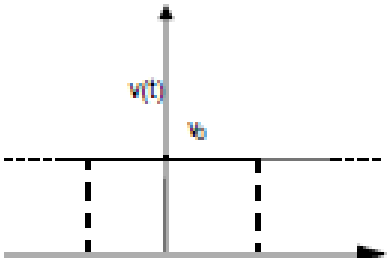
Per ricavare la potenza applicheremo la seguente formula:

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} [v(t)]^2 \, dt \quad \rightarrow \quad P_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} [v_0]^2 \, dt \; = \frac{v_0^2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} dt = \frac{v_0^2}{T} * T = v_0^2 \quad \rightarrow \quad P_T = v_0^2$$

Segnali di potenza e segnali di energia

Abbiamo visto come ricavare energia e potenza dei segnali finiti nel tempo; tuttavia spesso ci ritroveremo ad operare con dei modelli di segnale, dei segnali che non esistono ma che aiutano nella trattazione.

Si pensi ad esempio ad una batteria ideale che eroga tensione V_0 da $-\infty$ a $+\infty$, chiaramente quest'ultima non esiste ed il segnale di tensione che viene generato è un anch'esso ideale: è un segnale che non ha inizio né fine perché si propaga all'infinito.

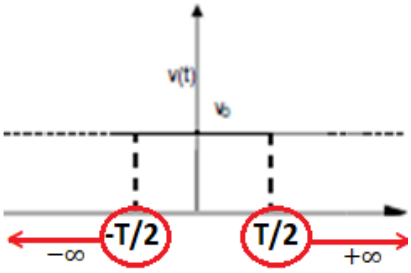


Se guardassimo però lungo la finestra temporale tra $-T/2$ e $+T/2$, questo segnale approssima quello di una batteria reale, come quello visto nell'esempio precedente, il che significa che questo modello di segnale va bene per approssimare un segnale reale se limitassimo l'osservazione in un intervallo preciso.

In questo caso, se andassimo a ricavare l'energia di questo segnale otterremmo un valore di energia infinita; passando al limite per $T \to \infty$ possiamo ricavare il valore di quest'ultima, che corrisponde sostanzialmente all'integrale tra $\pm\infty$ del segnale:

$$E_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} [v(t)]^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [v(t)]^2\, dt = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dt = v_0^2 * \infty$$

$$\boxed{E_T = \infty}$$



[Il limite ci consente di calcolare prima l'energia tra -T/2 e T/2 e poi di estendere tale valore a tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, in questo modo abbiamo praticamente calcolato il valore dell'energia estendendo all'infinito il periodo di osservazione.

Vediamo adesso come calcolare la potenza del segnale in questione: come prima, consideriamo il caso compreso tra -T/2 e T/2, estendendo poi all'intervallo $(-\infty, +\infty)$, mediante il passaggio al limite per $T \to \infty$ Questa volta andremo a mantenere il valore di T e T/2, andando a sostituire $T \to \infty$ solo a posteriori (quindi una volta aver svolto interamente l'integrale); il metodo è analogo a quello di prima, il motivo per cui non abbiamo sostituito al limite l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ è legato alla presenza di 1/T: svolgendo l'integrale andremo a semplificare il valore di "T", ciò non sarebbe possibile se sostituissimo immediatamente il valore infinito a quest'ultima.

$$P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [v(t)]^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} * v_0^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} * v_0^2 \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} * v_0^2 * T = v_0^2 \rightarrow \boxed{P_T = v_0^2}$$

L'energia di questa batteria è (idealmente) infinita, la potenza media invece è pari a v_0^2 questo perché eroga una tensione costante $v(t) = v_0$ istante per istante, quindi, dato che la potenza istantanea è espressa come quadrato del segnale, avremo una potenza istantanea sempre pari a v_0^2, ed essendo quest'ultima costante anche la potenza media sarà pari a v_0^2.

Come possiamo vedere, questo segnale, che come abbiamo detto è puramente ideale, ha un valore di energia infinito ed un valore di potenza finito; un segnale così fatto prende il nome di **segnale di potenza.**

Segnale di energia

Un segnale di energia è un segnale ideale che **si estende tra** $-\infty$ **e** $+\infty$ (quindi viene definito con il limite per $T \to \infty$) e che ha un **valore di energia finito** ed un **valore di potenza nullo.**

$\boldsymbol{E_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt \;<\; \infty}$	$\boldsymbol{P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt \;= 0}$

Segnale di potenza

Un segnale di potenza è un segnale ideale che **si estende tra** $-\infty$ **e** $+\infty$ (quindi viene definito con il limite per $T \to \infty$) e che ha un **valore di potenza non nullo** ed un **valore di energia infinito.**

$\boldsymbol{E_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt \;=\; \infty}$	$\boldsymbol{P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt \;\neq 0}$

In realtà i segnali hanno sempre un periodo di vita in cui iniziano e si esauriscono, il che significa che non esistono dei veri e propri segnali di energia o di potenza, essi hanno sempre un'energia ed una potenza finita. Tuttavia i segnali di energia e di potenza sono dei modelli utili per approssimare dei casi specifici e semplificarne lo studio.

Un segnale ideale definito tra $-\infty$ **e** $+\infty$ **può essere o di energia o di potenza ma mai entrambe le cose congiuntamente**.

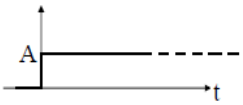
Quando ci troviamo davanti ad un segnale simile dobbiamo capire se è di energia o di potenza, in questo modo ricavando dapprima una delle due grandezze possiamo già riconoscere la seconda.

[I segnali ideali, come detto, sono definiti in un range infinito e possono essere solo di energia o di potenza; questo significa che quando troviamo un segnale definito tra $-\infty$ e $+\infty$ ci basterà, ad esempio, calcolare prima l'energia e in base al valore di quest'ultima possiamo subito capire se si tratta di un segnale di energia o di potenza e ricavare la potenza di conseguenza sapendo che se si tratta di un segnale di energia allora la potenza è nulla altrimenti sarà non nulla – ed in tal caso dovremmo comunque calcolarla – chiaramente questo vale anche se prima calcolassimo la potenza.]

<u>Esempio: riconoscimento di un segnale di potenza</u>

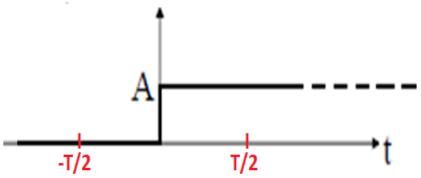
Sia dato il seguente segnale:

$$\begin{cases} x(t) = A & \forall t > 0 \\ x(t) = 0 & altrove \end{cases}$$



È un segnale ideale perché è definito tra $-\infty$ e $+\infty$ **,** possiamo osservare se è un segnale di energia o di potenza. Calcoliamo la potenza e verifichiamone il valore (avremmo potuto iniziare anche dall'energia):

1. Fissiamo un intervallo in cui studiare la potenza del segnale, per poi estendere quest'ultimo ad infinito e realizzare quale sia il valore della potenza in questione. L'ampiezza dell'intervallo in questione è "T":
$$\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = T$$



2. Calcoliamo l'integrale mediante opportuna formula:
$$P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2\, dt$$
Come osserviamo dal grafico, il segnale è praticamente definito da 0 a T/2 poiché per t < 0 esso è nullo; per questo motivo osserveremo l'integrale solo tra 0 e T/2.
$$P_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} * \frac{T}{2} \;\to\; P_T = \frac{A^2}{2}$$

Abbiamo ottenuto un valore di potenza finito: il segnale è di potenza (come il caso della batteria ideale)

Esempio: riconoscimento di un segnale di potenza

Supponiamo di avere un segnale complesso, che possiamo scomporre con le formule di Eulero:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

Questo segnale è un segnale periodico, essendo formato dalla somma di un coseno ed un seno, il che significa che è un segnale definito tra $-\infty$ e $+\infty$ che è diverso da zero un'infinità di punti, quindi dovremo aspettarci che sia un segnale di potenza poiché la sua energia sarà infinita.

Possiamo affermare la supposizione di quanto detto calcolando l'energia di questo segnale:

$$E_T = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t|^2\,dt$$

Per calcolare il modulo di un numero complesso si deve ricavare la parte reale e quella immaginaria; in questo caso avremo:

$$Re\,\{x(t)\} = \cos\omega_0 t \qquad\qquad Im\,\{x(t)\} = \sin\omega_0 t$$

Ricordando che il modulo di un numero complesso è dato da: $|x(t)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ possiamo ricavare il modulo del segnale in questione come segue:

$$|x(t)| = \sqrt{[\cos\omega_0 t]^2 + [\sin\omega_0 t]^2} = \sqrt{\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t} = \sqrt{1} = 1$$

Sostituendo allora possiamo trovare:

$$E_T = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}1\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty}T \to E_T = \infty$$

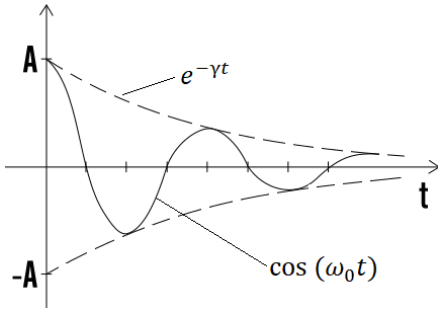
Come possiamo osservare, anche questo è un segnale di potenza perché la sua energia è infinita.
Dualmente, se avessimo calcolato la potenza avemmo ricavato un valore finito che ci avrebbe portato alla stessa conclusione, possiamo verificarlo:

$$P_T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t|^2\,dt = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}1\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} * T \to P_T = 1$$

La potenza è unitaria, come volevasi dimostrare il valore di quest'ultima è finito.

Esempio: riconoscimento di un segnale di energia, la cisoide

Analizziamo un particolare segnale che prende il nome di cisoide, quest'ultimo altro non è che un **coseno smorzato da un esponenziale**, ha la seguente forma d'onda e viene espresso mediante la seguente legge:



$$x(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t) \quad con \quad t \in (0, +\infty) \;\; e \;\; \gamma > 0$$

La cisoide è un segnale che si protrae all'infinito, per cui è ideale ed è possibile stabilire se esso è di potenza o di energia, è difficile stabilirlo a monte: assume infiniti valori diversi da zero ma tende a zero a causa dello smorzamento, per capirlo è necessario studiarlo. Valutiamo l'energia per capire di che segnale si tratta:

Il segnale è definito tra 0 e $+\infty$, per cui ricaveremo l'energia come integrale definito tra questi estremi:

$$E_T = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt \;\;\rightarrow\;\; E_T = \int_0^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

Quello che praticamente abbiamo fatto è il seguente: dato che il passaggio al limite per $t \to \infty$ del segnale lo effettuiamo per estendere l'osservazione del segnale da $-\infty$ a $+\infty$, abbiamo direttamente considerato l'integrale del segnale tra $-\infty$ e $+\infty$, siccome il segnale è solo definito tra 0 e $+\infty$ abbiamo scritto direttamente l'integrale tra questi due estremi poiché al di là di essi non vi è segnale.

Il segnale è puramente reale: né nell'esponenziale né nel coseno figurano termini immaginari, per cui si tratta di un segnale puramente reale, il che significa che il modulo quadro coincide praticamente con il quadrato del segnale stesso:

$$E_T = \int_0^{+\infty}|x(t)|^2\,dt \;=\; \int_0^{+\infty}|e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t)|^2\,dt \;=\; \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t)\;dt$$

Dalle formule trigonometriche possiamo eseguire la seguente sostituzione:

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2} \;\rightarrow\; E_T = \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t)\;dt \;=\; \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\,\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\;dt$$

Dalle formule di Eulero possiamo effettuare una seconda sostituzione: $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$E_T = \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\,\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\,dt \;\rightarrow\; E_T = \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\,\frac{1+\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}}{2}\;dt$$

A questo punto suddividiamo del termine frazionario $\frac{1}{2}$ da $\frac{e^{2j\omega_0 t}+e^{-2j\omega_0 t}}{2}$ e vediamo di risolvere gli integrali:

$$E_T = \int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\,\frac{1+\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}}{2}\;dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-2\gamma t}\,dt \;+\; \int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}}{2}\;e^{-2\gamma t}\;dt$$

$$E_T = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\,dt \;+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\;e^{-2\gamma t}\;dt$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2\gamma t}}{-2\gamma}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}*\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{(2j\omega_0-2\gamma)t} + e^{(-2j\omega_0-2\gamma)t}\,dt$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2\gamma t}}{-2\gamma}\right]_0^{+\infty} + \;\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{(2j\omega_0-2\gamma)t}\,dt \;+\; \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-(2j\omega_0+2\gamma)t}\,dt$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2\gamma t}}{-2\gamma}\right]_0^{+\infty} + \;\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{(2j\omega_0-2\gamma)t}\,dt \;+\frac{1}{4}\left[\frac{e^{-(2j\omega_0+2\gamma)t}}{-2j\omega_0-2\gamma}\right]_0^{+\infty}$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\infty}-e^{0}}{-2\gamma}\right] + \;\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{(2j\omega_0-2\gamma)t}\,dt \;+\frac{1}{4}\left[\frac{e^{-\infty}-e^{0}}{-2j\omega_0-2\gamma}\right]$$

$$E_T = \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t}\, dt + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{-2j\omega_0 - 2\gamma}\right]$$

Come possiamo vedere, abbiamo risolto solo due dei tre integrali, questo perché essi erano più semplici da trattare data la negazione che annullava l'esponenziale: $e^{-\infty} = 0$;
Per l'ultimo integrale rimasto non possiamo appoggiarci sulla negazione e dovremo ragionare come segue: esso deriva dal prodotto di due funzioni che abbiamo effettuato precedentemente:

$$\int_0^{+\infty} e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t}\, dt \quad \rightarrow \quad e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t} = e^{2j\omega_0 t} * e^{-2\gamma t}$$

- $\rightarrow$ $e^{-2\gamma t}$ è una funzione che per $t \rightarrow \infty$ va a zero perché è un esponenziale negativo
- $\rightarrow$ $e^{2j\omega_0 t}$ come abbiamo visto prima è una somma di coseni. Il coseno è sempre limitato tra -1 e 1, questo significa che non può tendere mai ad infinito.

Dall'analisi delle singole funzioni che formano l'argomento dell'integrale possiamo dedurre che si tratta del prodotto di una funzione limitata ed una funzione che al tendere di $t \rightarrow \infty$ si annulla; ne consegue allora che il prodotto tra i due quanto $t \rightarrow \infty$ vale zero.

Dovremo anche contare il caso in cui $t \rightarrow 0$: in questo caso l'esponenziale si annulla e, come visto, avremo che $e^0 = 1$.

$$\int_0^{+\infty} e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t} = \left[\frac{e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t}}{2j\omega_0 - 2\gamma}\right]_0^{\infty} = \left[\frac{0 - e^0}{2j\omega_0 - 2\gamma}\right] = -\frac{1}{2j\omega_0 - 2\gamma}$$

Sostituendo quanto trovato nella formula otteniamo:

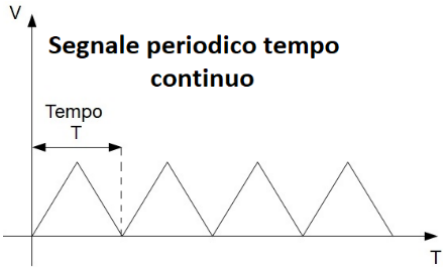
$$E_T = \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{(2j\omega_0 - 2\gamma)t}\, dt + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{-2j\omega_0 - 2\gamma}\right] = \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2j\omega_0 - 2\gamma}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{-2j\omega_0 - 2\gamma}\right]$$

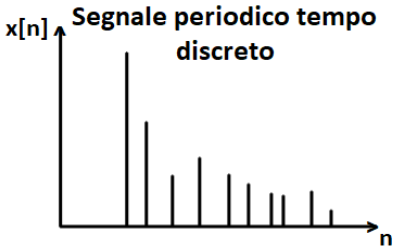
$$E_T = \frac{1}{4\gamma} + \left[-\frac{1}{8j\omega_0 - 8\gamma}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{-8j\omega_0 - 8\gamma}\right] = \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{8}\left[\left(-\frac{1}{j\omega_0 - \gamma}\right) + \left(\frac{1}{j\omega_0 + \gamma}\right)\right]$$

$$E_T = \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\omega_0^2 + \gamma^2}\right]$$

Il segnale periodico

I segnali periodici sono dei segnali che, dopo un certo periodo, si ripetono uguali a sé stessi. Dei segnali periodici notevoli sono il coseno, il seno o i treni di triangoli e rettangoli; questi segnali appena citati sono tutti a tempo continuo, tuttavia, possono esistere anche segnali periodici a tempo discreto, si tratta di successioni x[n] (per i segnali discreti non si utilizza "t" ma "n" che sta ad indicare il numero di intervalli).





Essendo segnali periodici, che si estendono da $-\infty$ a $+\infty$, sono ideali e per questo motivo è possibile studiare se essi sono segnali di energia o di potenza.

Possiamo affermare che **ogni segnale periodico è un segnale di potenza:** sono dei segnali che hanno sempre **energia infinita** perché assumono dei valori diversi da zero.

Supponendo di avere il seguente segnale periodico:

$$x(t) = x(t + nT_0)$$

Possiamo calcolare l'energia nel periodo e la potenza dell'intero segnale (non calcoliamo l'energia dell'intero segnale perché sappiamo già essere infinita per definizione di segnale di potenza).

Energia nel periodo

Consideriamo una troncatura del segnale, quella che si estende da $-T_0/2$ a $+T_0/2$; considerando solo questa porzione di segnale possiamo trattare quest'ultima come un segnale non periodico, quindi applicare la formula dell'energia di un segnale, che coinciderà con la formula dell'energia nel periodo:

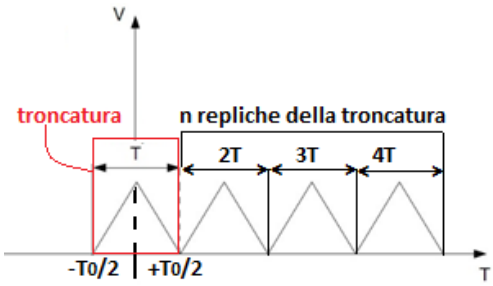
$$\boxed{E_{T0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt}$$

Potenza (complessiva) del segnale

Per calcolare la potenza di questo segnale ci basti ricordare che questa si ricava come **rapporto tra l'energia nel periodo ed il periodo:**

$$P_x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nT_0} E_{T0} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Nell'integrale gli intervalli di integrazione sono cambiati: $\pm nT_0/2$. Tuttavia, considerare un integrale con tali estremi coincide praticamente con il considerare *n volte* l'integrale di estremi $\pm T_0/2$, questo perché calcolare la potenza su tutto il segnale equivale praticamente a calcolare la potenza del segnale troncato tra $-T_0/2$ e $T_0/2$ e moltiplicare tutto per n volte, con "n" numero di intervalli in cui si ripete il segnale; per questo motivo possiamo considerare il seguente integrale:



$$P_x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} |x(t)|^2 \, dt \quad \rightarrow \quad P_x = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{nT_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Conoscendo come trovare l'energia nel periodo di un segnale periodico possiamo sostituire e possiamo semplificare le "n" a numeratore e denominatore, in questo modo è anche possibile rimuovere il passaggio a limite per $n \to \infty$ dato che non vi sarà alcuna "n":

$$E_{T0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt \quad \rightarrow \quad P_x = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{nT_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}T_0} E_{T0} \quad \rightarrow \quad \boxed{P_x = \frac{E_{T0}}{T_0}}$$

Esempio: calcolo della potenza di un segnale periodico

Supponiamo di avere il seguente segnale periodico e di volerne ricavare la potenza.

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Sappiamo che quest'ultimo è un segnale di potenza, pertanto ci aspettiamo una potenza finita e non nulla ed un'energia infinita.

1. Calcoliamo l'energia nel periodo del segnale

Per arrivare alla potenza del segnale periodico è necessario ricavare l'energia nel periodo e dividere quest'ultima per il periodo stesso, dunque ricaviamo per prima cosa tale energia:

$$E_{T0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |cos\,(\omega_0 t)|^2\, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos^2(\omega_0 t)\; dt$$

Il coseno è puramente reale, quindi il suo modulo quadro coincide esattamente con il coseno quadro. Ricordando la formula trigonometrica possiamo ricondurre il coseno quadro come segue:

$$E_{T0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos^2(\omega_0 t)\; dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}\; dt = \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\omega_0 t)\; dt + \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\, dt$$

Ricordando dalle formule di Eulero che: $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$ possiamo sostituire:

$$\frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\omega_0 t)\; dt \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}}{2}\; dt$$

$$E_{T0} = \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}}{2}\; dt + \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt$$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{2j\omega_0 t}\; dt + \frac{1}{4}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-2j\omega_0 t}\; dt + \frac{1}{2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt$$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2j\omega_0 t}}{-2j\omega_0}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2j\omega_0 t}}{2j\omega_0}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} + \frac{1}{2}[T]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{T_0}{2}$$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2j\omega_0 T_0/2} - e^{2j\omega_0 T_0/2}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2j\omega_0 T_0/2} - e^{-2j\omega_0 T_0/2}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{2}[T]_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

Si noti che $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; questo ci servirà nella sostituzione per l'integrazione:

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-\frac{2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0}{2}} - e^{\frac{2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0}{2}}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{4}$$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0/2} - e^{2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0/2}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0/2} - e^{-2j\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)T_0/2}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{2}[T]_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2j\pi} - e^{2j\pi}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2j\pi} - e^{-2j\pi}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right)\right]$$

Dalle formule di Eulero possiamo sostituire: $\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$E_{T0} = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2j\pi} - e^{2j\pi}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2j\pi} - e^{-2j\pi}}{-2j\omega_0}\right] + \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{4j\omega_0}[\sin(\pi) + \sin(\pi)] + \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}T_0$$

$$E_{T0} = \frac{1}{2}T_0$$

2. Calcoliamo la potenza del segnale

Avendo il valore dell'energia nel periodo, affinché si possa ottenere la potenza del segnale, basterà dividere tale quantità per il periodo stesso:

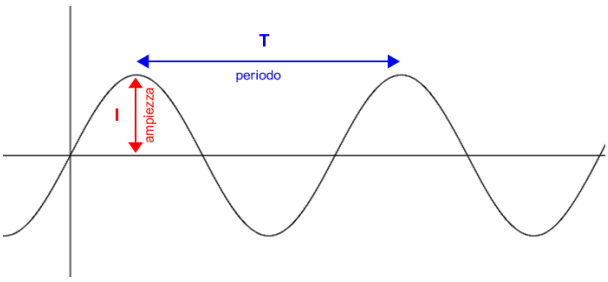
$$P_x = \frac{E_{T0}}{T_0} = \frac{1}{T_0} * \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad P_x = \frac{1}{2}$$

In generale, possiamo dire che quando si ha un segnale del tipo $\boldsymbol{a\cos(\omega_0 t)}$ la sua potenza si trova come:

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{a^2}{2}}}$$

2. La serie di Fourier

Analisi dei segnali periodici

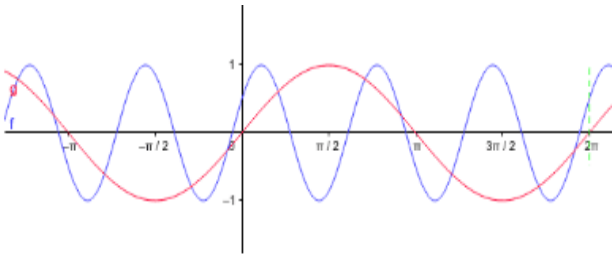


Un segnale periodico è un segnale che si ripete uguale a sé stesso in un periodo pari a "T_0";
come abbiamo già detto, un segnale periodico oscilla idealmente all'infinito e, dato che assume dei valori diversi da zero nel tempo, possiamo affermare che la sua energia è infinita, pertanto tutti i segnali periodici sono segnali di potenza.

Frequenza

Caratteristica dei segnali periodici è la **frequenza** che viene definita come inverso del periodo:

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$



Segnali a frequenze differenti

La frequenza si indica in Hertz [Hz] e indica **il numero di cicli completi che il segnale impiega in un secondo**; in altre parole: è il **numero di oscillazioni del segnale entro un secondo.**
<u>Esempio</u>: se il periodo di un segnale periodico è $T_0 = 10ms$ la frequenza di questo segnale è:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 Hz \quad \rightarrow 1000\ cicli\ al\ secondo$$

Nella rappresentazione mediante una legge, la frequenza non è direttamente esplicitata: viene espressa la **pulsazione** che è data da: $\omega_0 = \frac{f_0}{2\pi} : \sin(\boldsymbol{\omega_0} t\ +\ \varphi)$

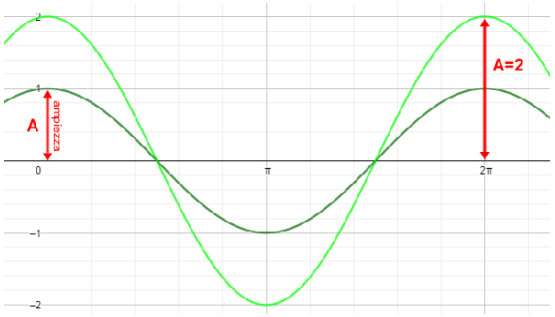
Fase

Un'altra caratteristica del segnale è la fase: la fase di una funzione periodica ad un certo istante temporale è la frazione di periodo trascorsa rispetto ad un tempo fissato.

Viene fissata una fase iniziale φ_0 che identifica la "posizione iniziale" del segnale, questa rappresenta il valore iniziale dell'angolo di fase; una volta che avviene lo sviluppo del segnale periodico, sia esso $\sin\,(\omega t + \varphi_0)$, la fase viene modificata ed è variabile nel tempo: passa dal valore iniziale φ_0 a $(\omega t + \varphi_0)$.

L'effetto di un'alterazione della fase di un segnale periodico porta praticamente allo sfasamento del segnale, ovvero ad una traslazione (in avanti o indietro) del segnale.

Ampiezza



L'ampiezza di un segnale altro non è che "l'amplificazione" che viene data al segnale: se consideriamo un segnale sinusoidale, quest'ultimo può essere moltiplicato per un coefficiente "A", quest'ultimo prende il nome di ampiezza del segnale.

Poiché la sinusoide (così come la cosinusoide) è un segnale limitato tra -1 e 1 la moltiplicazione per un coefficiente "A" porta il segnale a crescere "verticalmente": i suoi valori non saranno più limitati tra 1 e -1 ma tra A e -A; chiaramente si parla di "crescita verticale" solo se $A > 1$.

Qualora l'ampiezza fosse negativa allora si parla anche di ribaltamento del segnale: esso si ribalta rispetto alla sua forma iniziale a causa della presenza del segno negativo.

Il problema dell'analisi di un segnale periodico sta nell'analisi di segnali che non hanno un andamento sinusoidale o cosinusoidale, ad esempio un segnale a dente di sega. Con gli strumenti che abbiamo non possiamo studiare qualsiasi segnale periodico, per questo introdurremo la **serie di Fourier.**

Richiami numeri complessi

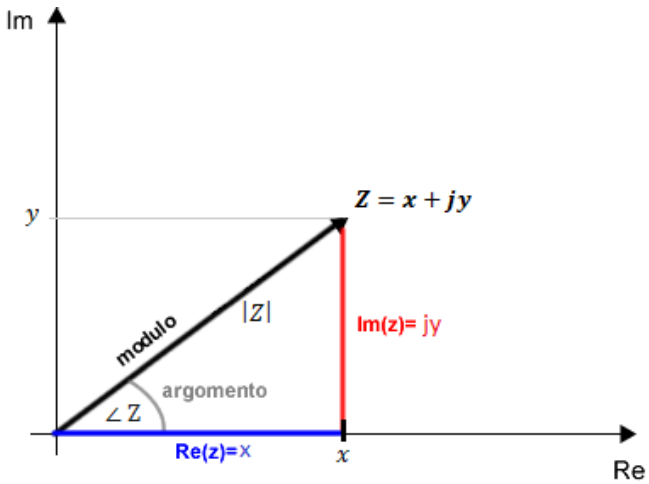
Prima di operare con la serie di Fourier è necessario richiamare alcuni concetti sui numeri complessi. Un numero complesso si può rappresentare come somma tra la sua parte reale e quella immaginaria:

$$\boldsymbol{Z = Re + Im = x + jy}$$

Questa è una delle notazioni di un numero complesso, tuttavia, esistono differenti rappresentazioni di tali numeri, una di questa prevede l'espressione in funzione di **modulo e fase** del numero complesso; quest'ultime grandezze si possono ricavare come:

$$Modulo: \quad |Z| = \sqrt{\{Re\}^2 + \{Im\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Fase: \quad \angle \mathrm{Z} = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \quad (\{Re\} > 0) \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \quad (\{Re\} < 0) \end{cases}$$



Nel modulo, quando viene riportata la parte immaginaria essa è privata del coefficiente immaginario "j".
La fase viene calcolata differentemente in funzione della parte reale: se quest'ultima è negativa viene previsto uno sfasamento di π dell'arcotangente.
È possibile rappresentare questo numero in un grafico in cui ascissa è l'asse reale e ordinata è quello immaginario. Il risultato sarà un vettore avente modulo $|Z|$ e fase (angolo sotteso con l'asse reale) $\angle$ Z.

Da questa rappresentazione possiamo osservare che:

$$x = Re\{Z\} = |Z| \cos(\angle \mathrm{Z}) \qquad y = Im\{Z\} = |Z| \sin(\angle \mathrm{Z})$$

Possiamo allora scrivere quanto segue:

$$Z = x + jy = |Z| \cos(\angle \mathrm{Z}) + j|Z| \sin(\angle Z) = |Z| \left[\cos(\angle \mathrm{Z}) + jsin(\angle \mathrm{Z})\right]$$

Ricordando le **formule di Eulero:**

$\cos(\varphi) = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$	$\sin(\varphi) = \dfrac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

Possiamo ottenere una terza rappresentazione di un numero complesso, in funzione di esponenziali:

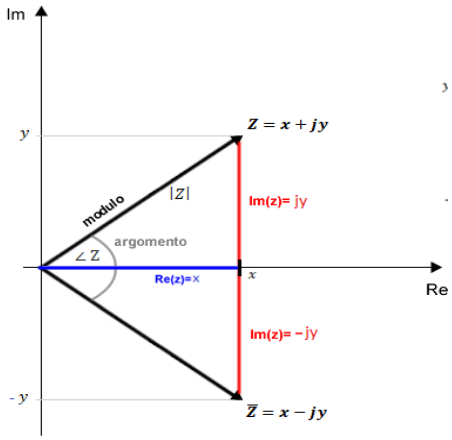
$$Z = |Z| \left[\cos(\angle \mathrm{Z}) + jsin(\angle \mathrm{Z})\right] = |Z| \left[\frac{e^{j\angle \mathrm{Z}} + e^{-j\angle \mathrm{Z}}}{2} + \frac{e^{j\angle \mathrm{Z}} - e^{-j\angle \mathrm{Z}}}{2j}\right] = |Z|\, e^{j\angle \mathrm{Z}} \quad \rightarrow \quad Z = |Z|\, e^{j\angle \mathrm{Z}}$$

Complementare

Il complementare di un numero complesso è praticamente un numero complesso avente la parte immaginaria cambiata di segno. Nella rappresentazione grafica si tratta praticamente di un vettore ribaltato rispetto all'asse reale: un vettore che avrà, appunto, la parte immaginaria cambiata di segno.

$$Z = Re + Im = x + jy$$

$$\boldsymbol{\bar{Z} = Re + Im = x - jy}$$



Segnali sinusoidali e fasori

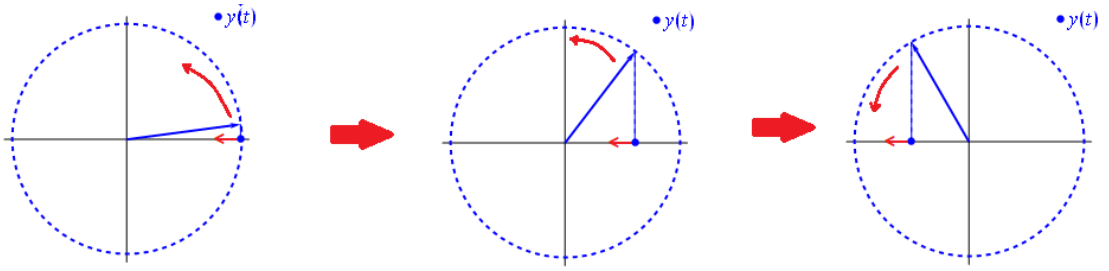
Il fasore è un numero complesso che possiamo esprimere nella seguente forma:

$$Z = A\, e^{\,j(2\pi f_o t + \varphi_0)}$$

Nello specifico, riferendoci alla rappresentazione di un numero complesso sul piano, diremo che **il fasore è un vettore del piano complesso che ruota**.

Esso, infatti, è caratterizzato da un angolo che ruota: la fase varia in funzione del tempo dato che ha una forma del tipo: $\varphi = 2\pi f_o t + \varphi_0$, il fatto che dipenda dal tempo "t" rende questa fase variabile nel tempo, il che vuol dire che si comporta come un angolo che varia continuamente.

La quantità $\omega_0 = 2\pi f_0$ è la **velocità angolare**, ciò conferma che il vettore è un vettore roteante che si sposta con una certa velocità angolare.

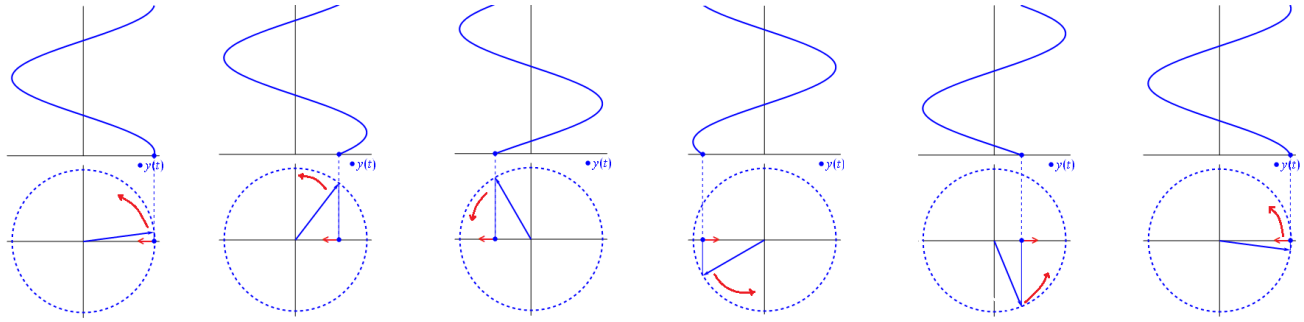


Tempo t1: $Z = A\, e^{\,j(2\pi f_0 t_1 + \varphi_0)}$ **Tempo t2:** $Z = A\, e^{\,j(2\pi f_0 t_2 + \varphi_0)}$ **Tempo t3:** $Z = A\, e^{\,j(2\pi f_0 t_3 + \varphi_0)}$

Al fasore è correlato il coseno: **la parte reale di un fasore corrisponde ad un segnale cosinusoidale di ampiezza "A", frequenza "f_0" e di fase iniziale "φ_0":**

$$Re\{Z\} = Re\{A\, e^{\,j(2\pi f_o t + \varphi_0)}\} = \cos\,(2\pi f_o t + \varphi_0)$$

Nella rotazione del fasore la parte reale spazia tra -1 e 1, rappresentando l'andamento del coseno.
Se si suppone di avere un'ampiezza unitaria $A = 1$, una fase iniziale nulla $\varphi_0 = 0$ e di partire da $t_0 = 0s$ il fasore corrispondente sarà $Z = e^{\,j(2\pi f_o(0))} = 1$, dopo di che man mano che il tempo aumenta la parte reale tende a diminuire, fino a raggiungere lo zero quando il fasore avrà raggiunto il valore di $\pi/2$; dopo di che la parte reale diminuirà fino a raggiungere il valore -1 per poi riprendere a crescere nuovamente, tendendo a 1.
Questo appena descritto è praticamente l'andamento cosinusoidale (infatti per $\varphi = \pi/2 \rightarrow \cos(\pi/2) = 0$)



Movimento del fasore: il fasore è un vettore complesso che ruota nel tempo, la rotazione lungo la circonferenza che si trova nel piano complesso porta alla variazione della parte reale del fasore tra -1 e 1; questo implica che la variazione della parte reale del fasore porta alla formazione di un segnale cosinusoidale

Possiamo allora definire il fasore come segue: **Il fasore è un numero complesso cui parte reale rappresenta un segnale cosinusoidale.** Dato che il segnale cosinusoidale è oscillante, la sua fase varia nel tempo, il che porta ad affermare che **il fasore è un numero complesso avente una fase ($2\pi f_o t + \varphi_0$) variabile, quindi è rappresentato da un vettore che ruota nel piano complesso la cui parte reale rappresenta un coseno.**

È possibile anche valutare la variazione del fasore lungo l'asse immaginario: in questo caso staremmo osservando l'andamento di un seno:

$$Im\{Z\} = Im\{A\, e^{\,j(2\pi f_o t + \varphi_0)}\} = \sin\,(2\pi f_o t + \varphi_0)$$

Avendo specificato cosa sia un fasore possiamo affrontare meglio le **formule di Eulero**; abbiamo definito il coseno come:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

Con i fasori otteniamo allora:

$$\cos(2\pi f_o t + \varphi_0) = \frac{e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} + e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)}}{2} = \frac{1}{2} e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)}$$

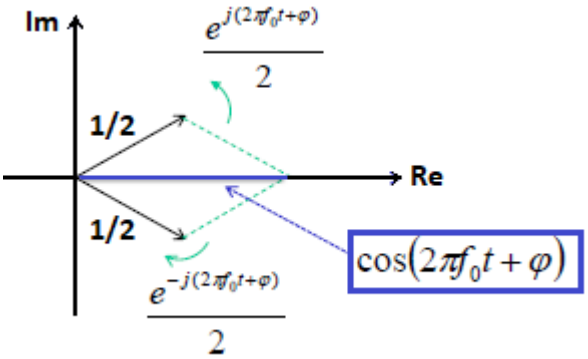
Ma adesso possiamo affermare che questa forma del coseno può essere vista come somma di due numeri complessi di modulo 1/2 che ruotano con una velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$.

L'unica differenza tra i due numeri complessi sta praticamente nel segno dell'esponenziale, ovvero nel verso di rotazione:

$$\frac{1}{2} e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} \rightarrow \textit{fasore ruotante in verso antiorario}$$

$$\frac{1}{2} e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)} \rightarrow \textit{fasore ruotante in verso orario}$$

La somma vettoriale di questi due fasori torna esattamente $\cos(2\pi f_o t + \varphi_0)$.



La stessa cosa si può ricavare con il seno:

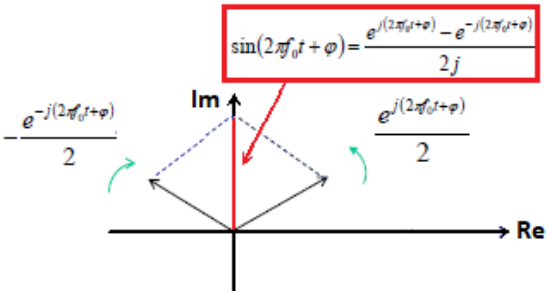
$$\sin(2\pi f_o t + \varphi_0) = \frac{e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} - e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)}}{2j} = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)}$$

Esso è dato dalla somma algebrica di due vettori che ruotano, i fasori:

$$\frac{1}{2j} e^{j(2\pi f_o t + \varphi_0)} \rightarrow \textit{fasore ruotante in verso antiorario}$$

$$-\frac{1}{2j} e^{-j(2\pi f_o t + \varphi_0)} \rightarrow \textit{fasore ruotante in verso orario}$$

La somma vettoriale di questi versori da praticamente il seno: $\sin(2\pi f_o t + \varphi_0)$.



NB! Perché il seno contiene l'unita immaginaria "j" al denominatore?
Il seno è una funzione che varia nell'asse immaginario, ne consegue che esso avrà l'unità immaginaria "j" per stare in questo asse. Nella rappresentazione viene omesso poiché è dato per scontato che tutti i numeri in questo asse abbiano l'unità immaginaria.

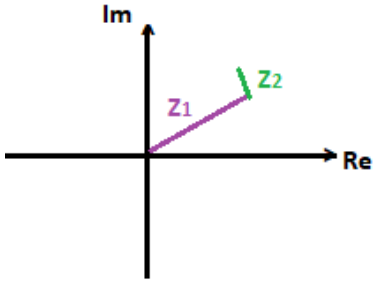
Quindi possiamo vedere i segnali cosinusoidali e sinusoidali come dei fasori e quindi affrontarli come numeri complessi. I fasori sono dei numeri complessi, rappresentati da vettori che ruotano, quindi aventi la fase che varia. L'utilizzo dei fasori è utile perché la parte reale di quest'ultimi rappresenta praticamente l'andamento di un coseno.

La somma di fasori

Supponiamo adesso di non valutare solo un singolo segnale sinusoidale (sia esso un coseno o un seno), ma di voler studiare un segnale più complesso, ad esempio un segnale formato dalla **somma di due segnali sinusoidali (o cosinusoidali):**

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + B\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$$

Sappiamo che ad ogni cosinusoide è associato un fasore, per cui stavolta nel piano complesso in cui sono rappresentati i fasori non troveremo un singolo fasore ma un **fasore somma** dato, appunto, dalla somma dei fasori che rappresentano i due coseni che formano il segnale da studiare.



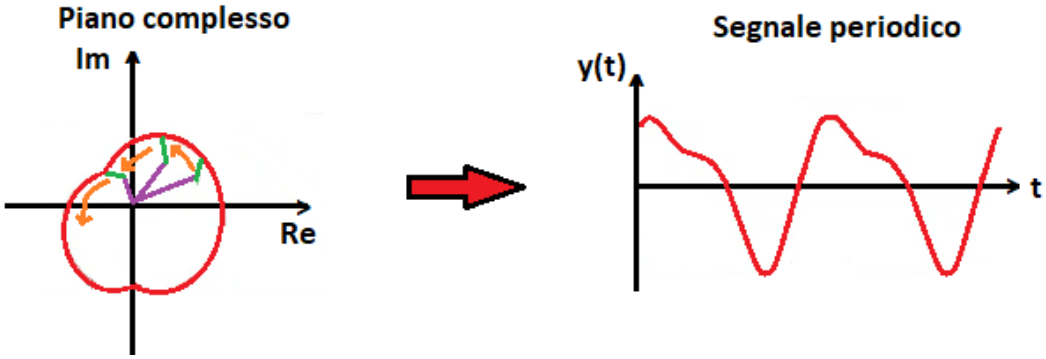
Poggiandoci sulla rappresentazione vettoriale, possiamo affermare che per sommare due fasori, questi si pongono in modo che la punta di uno coincida con la coda dell'altro [somma punta-coda dei vettori]. Ne consegue allora che nel piano complesso il fasore risultante sarà quello rappresentato.

Facciamo un'ulteriore supposizione: **la velocità angolare della prima cosinusoide è ω_0 e la velocità angolare della seconda codinusoide è $\omega_1 = 2\omega_0$.**

Quindi il fasore più piccolo ruoterà più velocemente del fasore più grande considerando che la sua velocità angolare è doppia rispetto a quella di quest'ultimo.

Questo significa che quando il primo fasore Z_1 avrà compiuto mezzo giro il secondo fasore Z_2 avrà già compiuto un giro completo; quando Z_1 avrà completato il giro Z_2 avrà già fatto due giri e quindi entrambi ripartiranno dalla posizione iniziale. Per cui il comportamento di questo segnale è ancora periodico: ogni volta che viene compiuto un giro dal fasore più lento (in questo caso Z_1) lo scenario che si ripresenta è identico a quello iniziale.

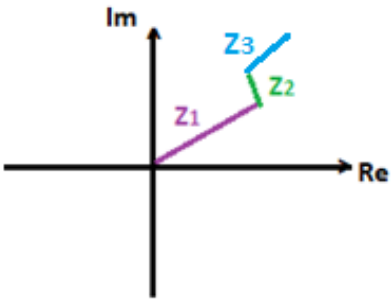
Ci aspettiamo allora che la proiezione di questa somma sia ancora un segnale periodico avente un periodo T_0 che coincide con il periodo del segnale più lento (quindi nel nostro caso Z_1), ovvero con il periodo del segnale avente **frequenza minore (e quindi avente periodo maggiore)**



Anche quest'ultimo è un segnale periodico ma non è né un coseno né un seno; praticamente ci stiamo avvicinando alla valutazione dei vari parametri per segnali periodici differenti dal seno e dal coseno.

Questo segnale avrà il periodo pari al periodo più grande tra i due segnali e quindi una frequenza che è la più piccola tra le frequenze dei due segnali che lo compongono; tuttavia intrinsecamente quest'ultimo è formato da due segnali: uno avente una certa frequenza f_0 ed uno che avrà una frequenza pari al doppio di quest'ultima: $f_1 = 2f_0$ (questo perché il secondo fasore ruota ad una velocità doppia rispetto al primo: $\omega_1 = 2\omega_0$ e dato che $\omega_0 = 2\pi f_0$ avremo che $\omega_1 = 4\pi f_0$, quindi una frequenza $f_1 = 2f_0$).

Se inserissimo un terzo segnale Z_3 in modo che **la velocità angolare del suo fasore corrispondente sia pari al tripo della velocità angolare del fasore inziale Z_1** otterremo praticamente che questo terzo fasore ruota più velocemente dei primi due ma che al termine del periodo di Z_1 tutti e tre si ritrovano a ricominciare da capo;



In questo modo otterremmo praticamente ancora un segnale periodico che avrà una forma d'onda differente ma sarà ancora di periodo T_0, pari al periodo del segnale con periodo maggiore e quindi avente una frequenza che corrispone a quella più piccola tra tutti (dato che Z_1 è il segnale più lento a ruotare).

Quello che abbiamo fatto è stato praticamente **aggiungere un'armonica**, ovvero un segnale sinusoidale che, sommato agli altri due, ha caratterizzato il segnale periodico in questione.

In questo caso il segnale ha tre armoniche: un coseno a frequenza f_0 (che viene detta frequenza portante) e fase φ_0 a cui corrisponde il fasore Z_1, un secondo coseno a frequenza $f_1 = 2f_0$ e fase φ_1 a cui corrisponde il fasore Z_2, un terzo coseno a frequenza $f_2 = 3f_0$ e fase φ_2 a cui corrisponde il fasore Z_3.
Aggiungendo armoniche si ottengono segnali periodici di forme differenti, quindi possiamo affermare che **qualsiasi segnale periodico è formato da armoniche, ovvero da segnali cosinusoidali.**

Il periodo del segnale periodico è il periodo maggiore tra tutte le armoniche, ovvero quello della portante T_0, ne consegue allora che la frequenza del segnale periodico è quella più piccola, quella della prima armonica, che viene detta **frequenza portante.**

Questo concetto fonda le basi allo **sviluppo in serie di Fourier** che afferma che qualsiasi segnale periodico può essere scomposto nella somma di un termine costante (segnale continuo) ed una serie di oscillazioni armoniche (nonché dunque una serie di coseni aventi frequenze multiple della frequenza portante).

Lo sviluppo in serie di Fourier

Avendo chiarito che ogni segnale periodico può essere espresso come somma di due o più armoniche, ovvero come somma di due o più segnali cosinusoidali possiamo dare l'enunciato dello **sviluppo in serie di Fourier** ed affrontare lo studio di quest'ultimo:

> **"Qualsiasi segnale periodico $x(t)$, avente periodo $T_0 = 1/f_0$, può essere scomposto nella somma di infiniti termini di cui uno è un termine costante (segnale continuo) ed una serie di oscillazioni armoniche."**

Il termine costante sarebbe un **segnale continuo a_0,** con oscillazioni armoniche si intende una **serie di coseni,** a frequenze sempre crescenti e multiple della frequenza portante f_0 (quella del primo coseno), con un'ampiezza a_i ed una fase iniziale φ_i:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos[2\pi f_0 t + \varphi_1] + a_2\cos\,[2\pi(2f_0)t + \varphi_2] + [\dots] + a_k\cos\,[2\pi\,(kf_0)t + \varphi_k]$$

Qualunque segnale periodico può essere sviluppato in serie di Fourier.

Quello che abbiamo scritto è lo **sviluppo in serie di Fourier in forma polare** che può essere scritto in forma compatta come segue:

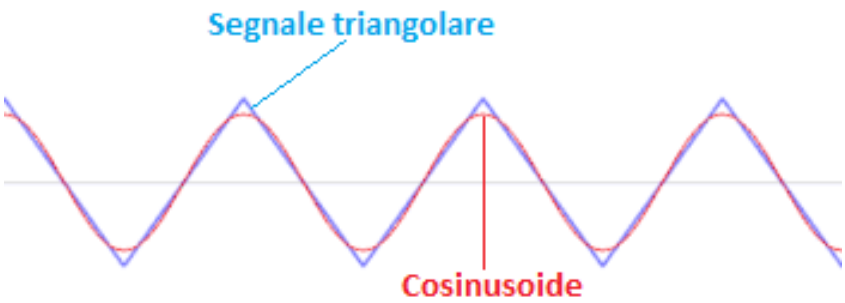
$$\boxed{x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(2\pi\, kf_0\, t + \varphi_k)}$$

Di ogni termine cosinusoidale varia:

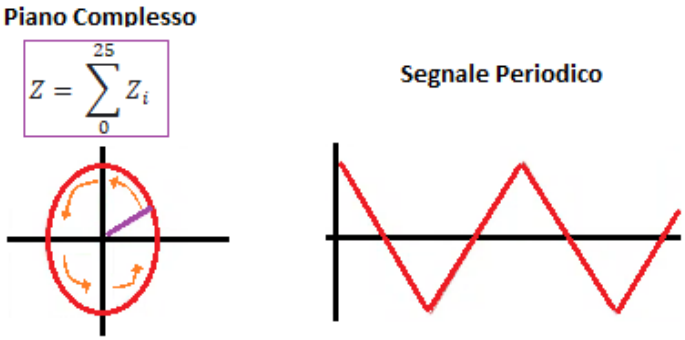
→ La frequenza, che sarà multipla della frequenza portante f_0: $2f_0\,, 3f_0\,, 4f_0\,, [\dots]\,, kf_0$

→ L'ampiezza: $a_1\,, a_2\,, a_3\,, a_4\,, [\dots]\,, a_k$

<u>Esempio</u>: si prenda in considerazione come segnale periodico un **segnale triangolare**; se dovessimo vedere questo come segnale formato da più cosinusoidi (così come affermato dallo sviluppo in serie di Fourier), possiamo già notare che il suo andamento è molto simile a quello di un coseno, fatta eccezione chiaramente delle "punte" ai picchi del segnale:



Man mano che aumentano le componenti cosinusoidali otteniamo un'approssimazione migliore del triangolo. Ad esempio, se andassimo a considerare 25 componenti, ovvero 25 fasori uniti in un'unica somma che girano insieme nel piano complesso, andremo ad ottenere praticamente un segnale triangolare ben approssimato; più aumentano le componenti e migliore sarà il risultato finale.



Il risultato in questione avrà una frequenza pari a f_0, la frequenza della prima armonica (correlata a Z_0);
se $f_0 = 100Hz$ l'ultima armonica ha frequenza $f_{25} = 25f_0 = 2.5\ KHz$

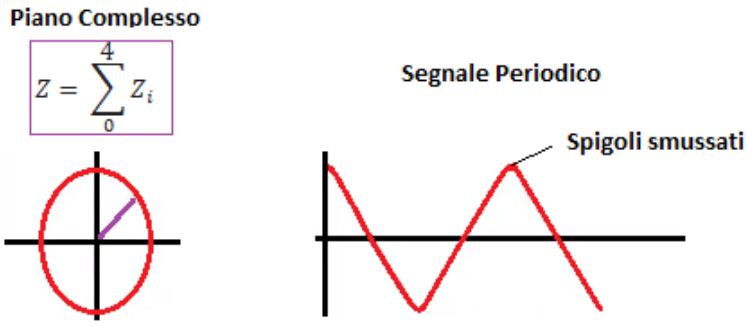
Si noti però che la massima frequenza corrisponde alla **larghezza della banda del segnale:**

$$\boldsymbol{B = f_{MAX}}$$

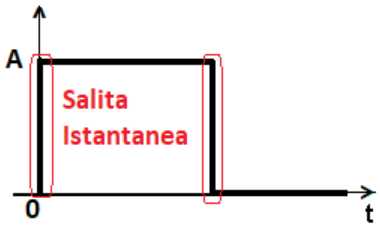
Per cui con 25 armoniche si occupa una banda di larghezza notevole: si parla di una banda che arriva a

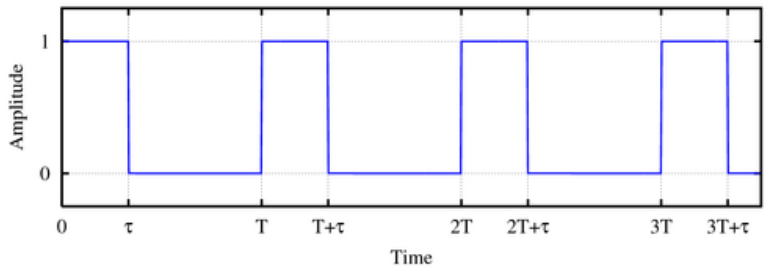
$$f_{MAX} = 2.5kHZ \rightarrow B = 2.5kHz;$$

Se l'approssimazione è sufficiente possiamo anche valutare meno componenti armoniche: ad esempio, con 4 armoniche (4 componenti cosinusoidali) si ottiene già un segnale che ben approssima il segnale triangolare; quest'ultimo avrà degli "spigoli" più smussati ai picchi però è abbastanza pulito per approssimare correttamente un segnale triangolare. Il vantaggio di diminuire il numero di armoniche che formano il segnale è quello di **risparmiare banda** poiché con sole quattro armoniche avremo che la frequenza massima del segnale, correlata all'ultima armonica, che sarà: $4f_0 = 400Hz \rightarrow B = 400Hz$.



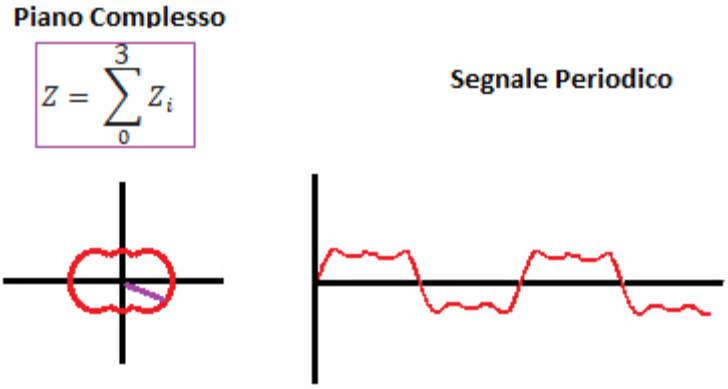
Esempio: si prenda adesso in considerazione come segnale periodico un **segnale onda quadra**; quest'ultimo non è un segnale reale: ha un fronte di salita istantaneo, che non è fisicamente realizzabile dato che nessun segnale può passare da 0 a A (con "A" ampiezza massima) istantaneamente.
Questo segnale ha un certo periodo "T" che va da fronte a fronte.





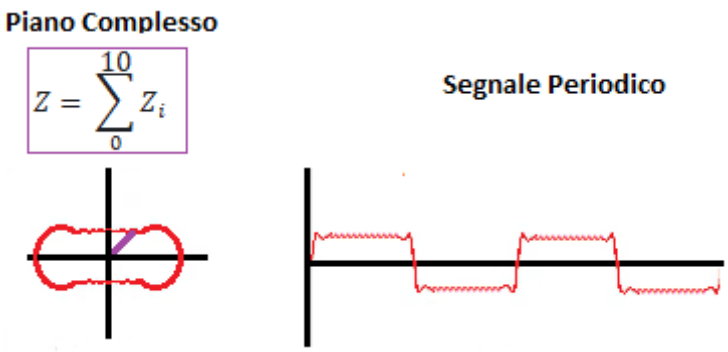
A differenza dell'onda triangolare, che nella sua forma assomiglia bene o male ad un coseno, l'onda quadra non è per niente simile ad un semplice coseno. Realmente non è realizzabile, come già detto, tuttavia se idealmente sommassimo tutte le infinite armoniche potremmo raggiungere un segnale rettangolare (nella realtà il numero di armoniche è sempre finito poiché altrimenti avremmo bisogno di una banda infinita per cui il segnale rimane comunque irrealizzabile, oltre che per la fisica realizzabilità anche per un concetto di armoniche e banda).

Con tre armoniche possiamo ottenere un segnale che faccia intravedere un andamento simile a quello dell'onda quadra; come possiamo notare, il fronte di salita non è immediato ma è obliquo, in generale aumentando il numero di armoniche questo fronte diventa sempre più ripido ma non sarà mai esattamente perpendicolare all'asse orizzontale, affinché ciò accada il numero delle armoniche dovrà tendere ad infinito.



Se aumentassimo il numero di armoniche, ad esempio utilizzassimo 10 armoniche il risultato sarebbe un segnale avente un fronte di salita ancora obliquo ma più ripido del caso con 3 armoniche e le oscillazioni sarebbero più frequenti, il che porta il segnale ad assomigliare ancora di più ad un treno di rettangoli.

Più aumentano le armoniche e minore sarà il numero di ripple (oscillazioni che si trovano nella parte del segnale che dovrebbe essere continua), nel caso di infinite armoniche si ha esattamente il segnale rettangolare.



Con queto segnale, per avere un'ottima approssimazione, si dovrebbe arrivare a circa 20 armoniche. Questo significa che questo segnale occupa una banda notevole; se ad esempio considerassimo la prima armonica a frequenza fondamentale $f_0 = 100Hz$ l'ultima armonica avrà una frequenza $f_{20} = 2\ kHz$ e questo porta ad una banda piuttosto ampia per un solo segnale:

$$B = f_{MAX} = 2\ kHz$$

Questo significa che per trasferire un segnale onda quadra avremo necessariamente bisogno di una banda maggiore (più larga) ripetto a quella necessaria al trasferimento di un segnale triangolare.

Quindi rianalizzando lo sviluppo in serie di Fourier di un qualsiasi segnale periodico $x(t)$:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos[2\pi f_0 t + \varphi_1] + a_2\cos\,[2\pi(2f_0)t + \varphi_2] + [\dots] + a_k\cos\,[2\pi\,(kf_0)t + \varphi_k]$$

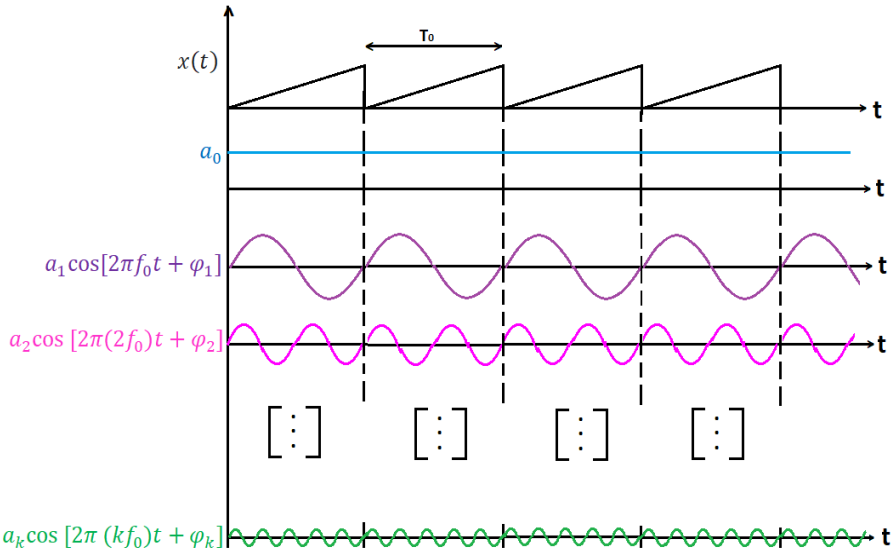
possiamo identificare:

- → a_0: componente continua del segnale periodico
- → $a_1\cos[2\pi f_0 t + \varphi_1]$: prima armonica, a **frequenza f_0, la frequenza portante**
- → $a_k\cos\,[2\pi\,(kf_0)t + \varphi_k]$: ultima armonica, a **frequenza f_k,** che identifica la **larghezza di banda**

Questa forma sta praticamente esprimendo il concetto fino ad ora ribadito: il segnale $x(t)$ viene visto come somma di un segnale continuo ed una serie di segnali cosinusoidali che prendono il nome di armoniche: il primo segnale cosinusoidale a periodo T_0, con "T_0" il periodo del segnale e quindi a frequenza (fondamentale) $f_0 = 1/T_0$, la seconda armonica sarà a frequenza multipla: $f_1 = 2f_0 \rightarrow T_1 = T_0/2$, la terza armonica avrà frequenza $f_2 = 3f_0 \rightarrow T_2 = T_0/3$ e così via fino all'ultima armonica che avrà una frequenza $f_k = f_{MAX} = kf_0$, questa frequenza è la massima frequenza del segnale periodico $x(t)$ ed è pari alla larghezza della banda del segnale stesso.

Il segnale $x(t)$ è dato dalla somma di tutti i segnali cosinusoidali: ogni punto nel segnale $x(t)$ si ottiene sommando i punti di tutti i segnali cosinusoidali all'istante "t".

Quindi mentre un segnale periodico sinusoidale (o cosinusoidale) è formato da una sola frequenza, **un qualsiasi segnale periodico è formato dalla somma di più frequenze**: delle frequenze delle armoniche che lo compongono.



L'analisi in frequenza dei segnali periocidi è fondamentale: se non avessimo iniziato ad analizzare nel dominio delle frequenze non ci saremmo mai accorti che un segnale periodico si può scomporre in una serie di armoniche (coseni) dato che questa informazione non si riesce a cogliere nel dominio del tempo. Questa analisi, ad esempio, è importante per capire se un canale è adatto o meno per il trasporto di uno specifico segnale periodico.

Concetto di canale adeguato per segnali periodici

È importante riuscire a capire se il canale in cui viene emesso il segnale periodico per il trasferimento sia adatto o meno: il canale è formato da una certa resistenza che varia in funzione della frequenza del segnale che lo attraversa, quindi può capitare che il canale attenui il segnale se, ad esempio, l'attenuazione riguarda un segnale periodico può capitare che essa sia differente per le varie armoniche che lo compongono. In questo caso diremo che il canale non è adatto al segnale in questione poiché l'attenuazione deve riguardare **tutte le armoniche** in maniera uniforme perché se il canale attenua in modo differente le varie armoniche il segnale uscente, dato dalla somma di quest'ultime, non sarà più simile a quello in ingresso, quindi viene alterato il contenuto. Dunque **il canale deve attenuare uniformemente le armoniche, altrimenti non è adeguato.**

Nell'enunciato abbiamo definito la "forma compatta" della forma polare dello sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\ (2\pi\, k f_0\, t + \varphi_k)$$

Quest'ultima è stata ottenuta partendo dalla forma polare della serie di Fourier vista finora:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos[2\pi f_0 t + \varphi_1] + a_2 \cos\,[2\pi(2f_0)t + \varphi_2] + [\dots] + a_k \cos\,[2\pi\,(kf_0)t + \varphi_k]$$

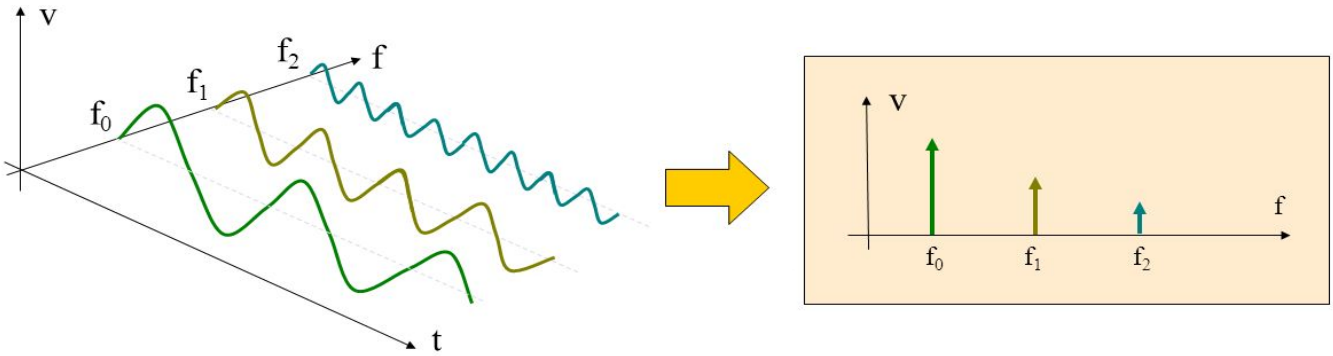
Avendo sostituiro ad "a_k" il valore "A_K" con $A_K = a_k/2$ tra poco giustificheremo questa scelta spiegando il perche di tale sostituzione.

Introduzione allo spettro del segnale

Vedremo adesso come vengono rappresentate le armoniche che formano il segnale attraverso la concezione di **spettro del segnale,** nello specifico affronteremo lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi, che considerano rispettivamente le ampiezze dei vari segnali cosinusoidali in cui viene scomposto il segnale e le fasi di quest'ultime.

Per capire cosa sia uno spettro e quali sono le informazioni che contiene basti osservare la seguente immagine che prende in esame lo spettro delle ampiezze (ma la stessa cosa si potrebbe dedurre da quello delle fasi): possiamo notare un grafico tridimensionale in cui nell'asse verticale vengono poste le ampiezze delle varie armoniche (supponendo si tratti di un segnale di tensione i valori saranno espressi in Volt [V]) e negli altri due assi si osserva l'andamento temporale (t) e quello frequenziale (f).

Ogni armonica f_0 , $(f_1 = 2f_0)$, $(f_2 = 3f_0)$ ha un certo andamento cosinusoidale nel tempo(t); possiamo considerare lo spettro delle ampiezze come la "vista frontale" di questo grafico tridimensionale: vedremo solo l'asse verticale V e quello orizzontale f, senza poter osservare l'andamento temporale del segnale ma consapevoli che ad ogni armonica corrisponde un certo andamento (cosinusoidale) nel tempo.



Lo spettro unilatero di ampiezza e fase

Supponiamo di disporre della serie di Fourier in forma polare reale e di voler graficare quest'ultima, nello specifico di voler graficarla mettendo in evidenza il contributo di tutte le armoniche che la compongono, alle varie frequenze e alle varie fasi di quest'ultime.

Avremo allora bisogno di una rappresentazione dei segnali in funzione della frequenza (dato che le armoniche le possiamo osservare solo in quest'ultimo dominio). Per tale rappresentazione affrontiamo quello che prende il nome di **spettro unilatero**: questo è il grafico che rappresenta le varie componenti nell'asse delle frequenze, parleremo di **spettro unilatero di ampiezza e spettro unilatero di fase**.

Spettro unilatero di ampiezza: rappresenta l'ampiezza di ogni segnale cosinusoidale che compone il segnale periodico, in funzione della frequenza. Ad ogni frequenza (multipla della frequenza fondamentale) corrisponderà un'armonica e quindi l'ampiezza corrispondente ad essa.

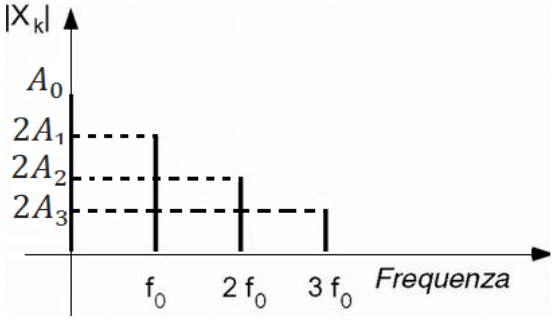
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(2\pi\, kf_0\, t + \varphi_k) = A_0 + [2A_1 cos(2\pi\, f_0\, t + \varphi_1) + 2A_2 cos(2\pi\, 2f_0\, t + \varphi_2) \dots]$$

Come possiamo osservare, ogni armonica ha un'ampiezza pari a $2A_i\ con\ 1 \leq i \leq k$ e quindi nella rappresentazione ritroveremo tutte queste ampiezze in prossimità dei vari multipli della frequenza f_0:

- $2A_1 cos(2\pi\, f_0\, t + \varphi_1) : ampizza\ 2A_1\ frequenza\ f_0$
- $2A_2 cos(2\pi\, 2f_0\, t + \varphi_2) : ampizza\ 2A_2\ frequenza\ 2f_0$
- $2A_3 cos(2\pi\, 3f_0\, t + \varphi_2) : ampizza\ 2A_3\ frequenza\ 3f_0$

La componente A_0 è costante ed ha frequenza nulla:è centrata in 0.

La somma di tutte le componenti da l'ampiezza totale del segnale: $2A_K$



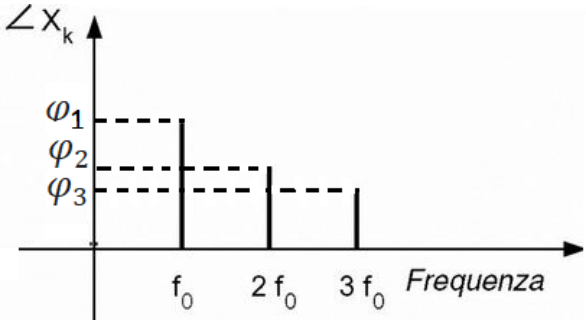
Spettro unilatero di fase: rappresenta la fase iniziale di ogni segnale cosinusoidale che compone il segnale periodico, in funzione della frequenza. Ad ogni frequenza (multipla della frequenza fondamentale) corrisponderà un'armonica e quindi la fase corrispondente ad essa.

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(2\pi\, kf_0\, t + \varphi_k) = A_0 + [2A_1 cos(2\pi\, f_0\, t + \varphi_1) + 2A_2 cos(2\pi\, 2f_0\, t + \varphi_2) \dots]$$

Come possiamo osservare, ogni armonica ha una propria fase iniziale pari a $\varphi_i\ con 1 \leq i \leq k$ e quindi nella rappresentazione ritroveremo tutte queste fasi iniziali in corrispondenza dei vari multipli della frequenza portante f_0:

- $2A_1 cos(2\pi\, f_0\, t + \varphi_1)\ \ fase\ iniziale\ \varphi_1\ frequenza\ f_0$
- $2A_2 cos(2\pi\, 2f_0\, t + \varphi_2) : fase\ iniziale\ \varphi_2\ \ frequenza\ 2f_0$
- $2A_3 cos(2\pi\, 3f_0\, t + \varphi_2) : fase\ iniziale\ \varphi_3\ \ frequenza\ 3f_0$

Questa volta per la componente A_0 non è prevista alcuna fase dato che è un segnale continuo.



Analizzando insieme sia spettro unilatero delle ampiezze che lo spettro unilatero delle fasi possiamo ricavare il segnale periodico scritto in funzione delle armoniche che lo compongono.

Esiste uno strumento che preso in ingresso il segnale $x(t)$ torna i grafici dello spettro (unilatero) di ampiezza e dello spettro (unilatero) di fase e prende il nome di **analizzatore di spettro.**

Lo spettro di un segnale periodico è a righe: le armoniche che formano il segnale sono tutte equidistanziate dato che si trovano a frequenze multiple e sia ampiezze che fasi sono rappresentate da righe, non sarà così ordinato per i segnali aperiodici (come vedremo).

Serie di Fourier in forma complessa e spettro bilatero

Abbiamo introdotto la serie di Fourier nella sua **forma polare reale**, tuttavia è bene sapere che esistono ben tre modi di rappresentare la serie di Fourier:

1. Serie di Fourier in forma polare reale
2. Serie di Fourier in forma complessa
3. Serie di Fourier in forma rettangolare

Chiaramente le tre forme sono correlate ed è sempre possibile passare da una all'altra.

Affrontiamo adesso la **serie di Fourier in forma complessa**, per farlo dovremo nuovamente fare affidamento alle **formule di Eulero:**

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

Scrivendo in questa forma il coseno possiamo ottenere quanto segue dalla serie di Fourier:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(2\pi\, kf_0\, t + \varphi_k) \rightarrow\; x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{e^{j\,(2\pi\, kf_0\, t\, +\, \varphi_k)} + e^{-j\,(2\pi\, kf_0 t\, +\, \varphi_k)}}{2}\right]$$

NB! Abbiamo detto che avremmo spiegato perché sarebbe stata effettuata la sostituzione $A_k = a_k/2$, il motivo è proprio legato alla rappresentazione in forma complessa: questa sostituzione ci permette di semplificare il 2 ad inizio sommatoria con il 2 al denominatore.

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, [e^{j\,(2\pi\, kf_0\, t\, +\, \varphi_k)} + e^{-j\,(2\pi\, kf_0\, t\, +\, \varphi_k)}]$$

Suddividiamo i due termini complessi:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{j\,(2\pi\, kf_0\, t\, +\, \varphi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-j\,(2\pi\, kf_0\, t\, +\, \varphi_k)}$$

Entrambi gli esponenti degli esponenziali sono formati da una somma: $(2\pi\, kf_0\, t\; +\; \varphi_k)$ poiché la somma di esponenti si ottiene con un prodotto possiamo suddividere ogni esponenziale come prodotto di due esponenziali:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{j\,\varphi_k}\; e^{j(2\pi k f_0\, t)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-j\,\varphi_k}\; e^{-j(2\pi k f_0\, t)}$$

Questa non è ancora la forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier, ma ci permette di studiarne una rappresentazione grafica, ovvero lo spettro, della forma complessa della serie di Fourier.

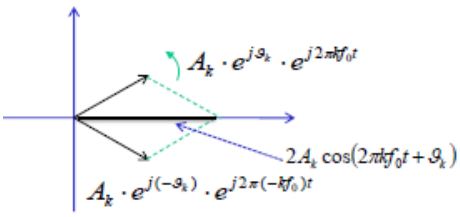
Spettro bilatero della serie di Fourier in forma complessa

Si noti che scrivendo in questa forma si esplicitano due numeri complessi in funzione di modulo e fase:

$$A_k\, e^{j\,\varphi_k} \rightarrow |Z| = A_k \quad \angle Z = \varphi_k$$
$$A_k\, e^{-j\,\varphi_k} \rightarrow |Z| = A_k \quad \angle Z = -\varphi_k$$

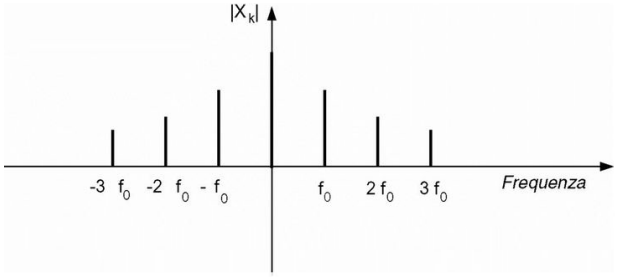
Graficamente, le armoniche (le cosinusoidi) che formano il segnale periodico si possono quindi associare a dei fasori nel piano complesso che ruotano: il numero complesso suddiviso come $A_k\, e^{j\,\varphi_k}\; e^{j(2\pi k f_0\, t)}$ è formato da:

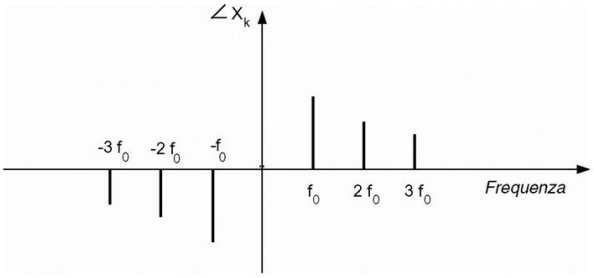
- $\rightarrow$ un fattore costante che chiameremo $X_K = A_K\, e^{j\,\varphi_k}$
- $\rightarrow$ un fattore che varia nel tempo che definisce la rotazione del fasore: $e^{-j(2\pi k f_0\, t)}$



Per ogni componente si ha un diverso fattore X_K ed un diverso fattore $e^{-j(2\pi k f_0\, t)}$ che continua a variare nel tempo; quando andremo a rappresentare lo spettro della serie di Fourier in forma complessa andremo a rappresentare praticamente i vari X_k di tutte le armoniche.

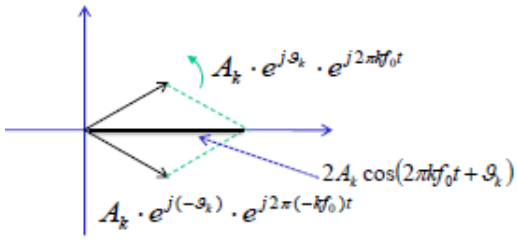
A questo punto, avendo il modulo e la fase di ogni X_K possiamo rappresentarli nello spettro.

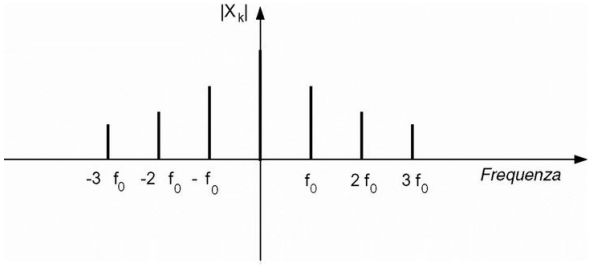


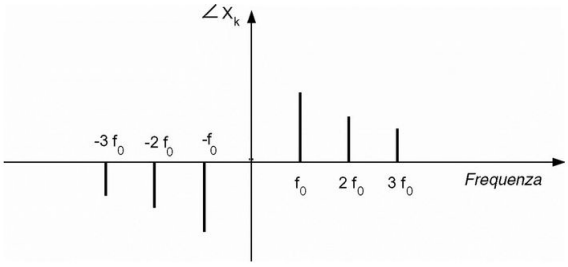


Abbiamo rappresentato quello che prima era un coseno con il numero complesso corrispondente

Questo spettro prende il nome di **spettro bilatero**: si tratta di uno spettro che prevede anche le frequenze negative; in realtà non esistono frequenze negative, tuttavia in questo caso vengono prese in considerazione poiché si sta scrivendo il coseno come somma di due numeri complessi di cui uno con esponente negativo, quindi viene rappresentata l'ampiezza dell'armonica che ruota in f_0 e quella che ruota in $-f_0$ e la stessa cosa vale anche per le fasi. Quindi le frequenze negative indicano i fasori controrotanti.





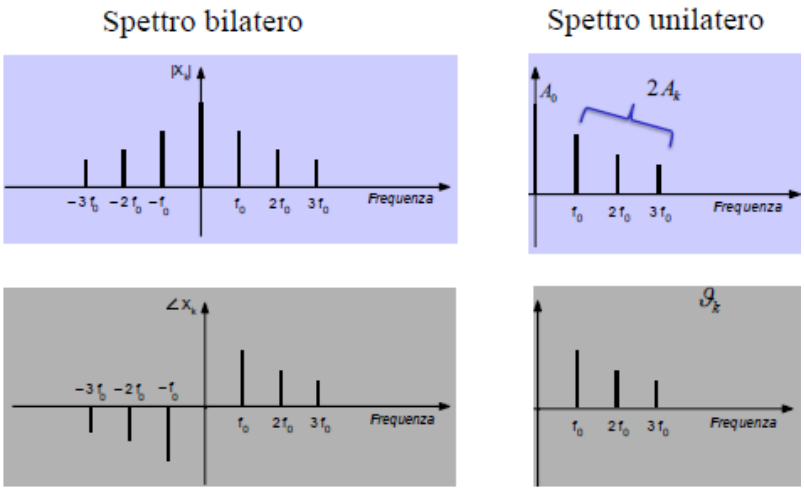


Quindi, ricapitolando:

- Nello spettro unilatero rappresentiamo l'ampiezza $2A_k$ che altro non è che l'ampiezza del coseno.

- Nello spettro bilatero andiamo a rappresentare l'ampiezza A_k che corrisponde all'ampiezza dei due termini esponenziali: $A_k\ e^{j\,\varphi_k}$ e $A_k\ e^{-j\,\varphi_k}$, che sommati daranno il coseno (e di fatto sommando le due ampiezze si ritorna allo spettro unilatero: $A_k + A_k = 2A_k$).

Lo stesso discorso vale anche per la fase.



Quindi partendo dalla **forma polare** sella serie di Fourier possiamo ricavare lo **spettro unlatero** (in cui tutte le ampiezze valgono $2A_i$), dopo di che è possibile passare alla sua **forma complessa** e da essa si può ricavare lo **spettro bilatero** (in cui le ampiezza valgono A_i) ma esso è del tutto analogo al primo.

Uno strumento fa sempre vedere lo spettro unilatero perché questo è lo spettro reale dei segnali, tuttavia negli esercizi utilizzeremo lo spettro bilatero, che è solo una rappresentazione matematica.

Il motivo per cui per la forma complessa si ha uno spettro bilatero è correlato al legame che c'è nelle formule di Eulero tra coseno e la sua forma complessa:

$$a\cos(2\pi f_0 t) = \frac{ae^{j(2\pi f_0 t)} + ae^{-j(2\pi f_0 t)}}{2}$$

L'ampiezza dei due fasori rotanti è pari alla metà.

Ritornando alla serie di Fourier, riprendiamo i passaggi matematici per ricavare definitivamente la sua forma complessa:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{j\,\varphi_k}\; e^{j(2\pi k f_0\, t)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-j\,\varphi_k}\; e^{-j(2\pi k f_0\, t)}$$

Abbiamo detto che $X_K = A_k\, e^{j\,\varphi_k}$ per cui possiamo effettuare questa sostituzione:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k\; e^{-j(2\pi k f_0\, t)}$$

NB! X_0 è correlato ad A_0, che come sappiamo è centrato alla frequenza $f = 0$, per cui corrisponde a:

$$X_0 = A_0\, e^{j\,\varphi_k}\, e^{j(2\pi k(0)\, t)} = A_0 * 1 = A_0$$

Puntiamo la nostra attenzione sulla seconda sommatoria e spostiamo il segno meno in k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k\; e^{-j(2\pi k f_0\, t)} \xrightarrow{Spostiamo\ il\ meno\ in\ \text{"k"}} \sum_{k=1}^{\infty} X_k\; e^{\,j(2\pi(-k) f_0\, t)}$$

In questo modo abbiamo una sommatoria in cui varia “k” e tale “k” si trova all’eponente ed è negativo, ciò comporta che possiamo inserire il meno direttamente agli estremi della sommatoria e, siccome $-1 > -\infty$ invertiremo l’ordine di quest’ultimi ottenendo quanto segue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k\; e^{-j(2\pi k f_0\, t)} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} X_k\; e^{\,j(2\pi(-k) f_0\, t)} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k\; e^{\,j(2\pi(k) f_0\, t)}$$

In questo modo abbiamo ottenuto praticamente tre termini:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k\; e^{j(2\pi k f_0\, t)}$$

Ovvero:

1. il termine X_0 che è quello che si ottiene praticamente per $k = 0$
2. La sommatoria che racchiude tutte le componenti da 1 a ∞ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)}$$

3. La sommatoria che racchiude tutte le armoniche da $-\infty$ a -1 :

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k\; e^{j(2\pi k f_0\, t)}$$

A questo punto abbiamo praticamente considerato tutto l’intervallo a disposizione poiché stiamo valutando praticamente $k\ che\ va\ da\ 1\ a + \infty, k\ che\ va\ da - \infty\ a - 1\ e\ k = 0$ quindi possiamo direttamente scrivere:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k\; e^{j(2\pi k f_0\, t)} \rightarrow \boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)}}$$

Questa è la **forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier**.

Correlazione tra i coefficienti X_k nella forma complessa ed i coefficienti A_k nella forma reale

Possiamo mettere a confronto il valore "X_k" dello sviluppo di Fourier in forma complessa con il valore "A_K" della serie di Fourier in forma reale polare:

Forma complessa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Forma polare reale:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$$

Dato che $X_k = A_k e^{j\theta_k}$ possiamo scrivere:

$$\boxed{X_K = \begin{cases} A_k\, e^{j\theta_k} & per\ k = 1, \dots, \infty \\ A_0 & per\ k = 0 \\ A_{-k}\, e^{-j\theta_{-k}} & per\ k = -1, \dots, -\infty \end{cases}}$$

Da questa osservazione possiamo dedurre che:

$$A_k \triangleq |X_k| \qquad \vartheta_k = \angle X_k$$

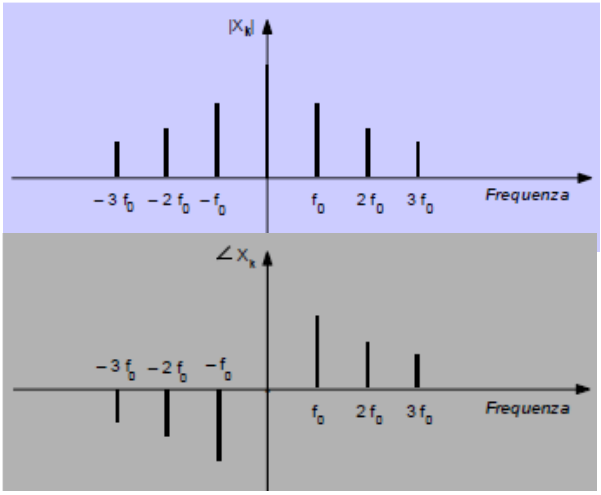
Note sullo spettro di ampiezze e fasi: spettro pari e spettro dispari

Questo sviluppo è anaologo agli altri due (quello in forma reale polare e quello in forma rettangolare) ed è quello più utilizzato negli esercizi e nella pratica. Con lo sviluppo di Fourier in forma complessa riusciamo a **vedere in termini positivi e negativi i fasori rotanti che formano le armoniche, nonché le cosinusoidi che formano il segnale periodico $x(t)$.** La rappresentazione è sempre in frequenza: lo **spettro bilatero.**

Vale sempre che:

→ **Lo spettro delle ampiezze è pari perché $|X_k| = |-X_k|$**
Una funzione è detta pari se accade che
$$f(x) = f(-x)$$
e che quindi assume dei valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate (quello delle ampiezze).

→ **Lo spettro delle fasi è dispari: $\angle -X_k = -\angle X_k$**
Una funzione è detta dispari se accade che
$$-f(x) = f(-x)$$
e che quindi assume dei valori simmetrici rispetto all'origine.



Se non vengono rispettati questi criteri allora il segnale rappresentato non è un segnale reale (ciò è causa di errore se il segnale è reale ma non si ottengono i criteri citati).

Può essere dimostrato che $X_{-k} = X_k^*$ per cui i moduli dovranno corrispondere e le fasi saranno opposte:

$$X_{-k} = X_k^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$$

Dimostrazione matematica:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)(\cos 2\pi k f_0 t - j sen 2\pi k f_0 t) dt$$

$$\boxed{X_k^*} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)(\cos 2\pi k f_0 t + j sen 2\pi k f_0 t) dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{+j2\pi k f_0 t} dt = \boxed{X_{-k}}$$

Calcolo di X_k per la forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier

A questo punto ci poniamo il seguente quesito: conoscendo $x(t)$, il segnale periodico nel tempo, è posibile calcolare i coefficienti X_k? Sicuramente si dato che è la stessa forma complessa a metterli a confronto:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)}}$$

Vediamo allora come calcolare tutti i coefficienti X_k , così facendo sarebbe possibile ottenere l'andamento dello spettro di ampiezza e dello spettro di fase.

Partiamo dalla forma complessa della serie di Fourier e moltiplichiamo per $\boldsymbol{e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)}}$ e dopo di che **integriamo nel periodo (tra $-T_0/2$ e $T_0/2$)**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)} \rightarrow x(t) * \boldsymbol{e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)} * \boldsymbol{e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)}}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \boldsymbol{x(t) * e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)}} \; \boldsymbol{dt} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)} * e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)} dt$$

Eseguiamo la moltiplicazione, in questo modo otterremo praticamente un unico esponenziale cui esponente è dato dalla somma degli esponenti:

$$e^{j(2\pi k f_0 \, t)} * e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)} = e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t}$$

Ottenendo quindi:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) * e^{-j(2\pi n f_o t)} \, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 t)} \; e^{-j(2\pi n f_o t)} \, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \; e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt$$

Si noti che la sommatoria dei termini X_k non dipende direttamente dal tempo, per questo motivo è possibile tirarla fuori dal segno dell'inttegrale:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \; e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \, e^{-j\,(2\pi\, n f_o\, t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt$$

L'esponenziale rimane dentro all'integrale poiché dipende dal tempo.

Occupiamoci dell'integrale, risolvendolo:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt = \left[\frac{e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t}}{j2\pi(k-n) f_0}\right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, [T_0/2]}}{j2\pi(k-n) f_0} - \frac{e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, [-T_0/2]}}{j2\pi(k-n) f_0}$$

si ricordi che $f_0 * T_0 = 1$ poiché sono complementari, quindi $f_0 * T_0/2 = 1/2$:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt = \left[\frac{e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t}}{j2\pi(k-n) f_0}\right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{e^{j\,2\pi\,(k-n)[1/2]} - e^{j\,2\pi\,(k-n)[-1/2]}}{j2\pi(k-n) f_0}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n) f_0\, t} \, dt = \frac{e^{j\,2\pi\,(k-n)[1/2]} - e^{-j\,2\pi\,(k-n)[1/2]}}{j2\pi(k-n) f_0} = \frac{e^{j\,\pi\,(k-n)} - e^{-j\,\pi\,(k-n)}}{j2\pi(k-n) f_0}$$

Ma si noti che si è praticamente ottenuta la forma complessa di un seno:

$$\frac{e^{j\,\pi\,(k-n)} - e^{-j\,\pi\,(k-n)}}{j2} = \sin[\pi(k-n)] \quad \rightarrow \quad \frac{e^{j\pi(k-n)} - e^{-j\pi(k-n)}}{j2\pi(k-n)f_0} = \frac{\sin[\pi\,(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

Otteniamo quindi:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt = \frac{\sin[\pi\,(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

→ Fintanto che $k \neq n$ tale valore è nullo perché $\sin\big((k-n)\pi\big) = 0$, qualsiasi sia il multiplo di π, il seno si annulla:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t}\,dt = \frac{\sin[\pi\,(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \xrightarrow{Se\ k\neq n\ \rightarrow k-n=p} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t}\,dt = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi f_0} = 0$$

→ Se invece $k = n \rightarrow k - n = 0$ il seno non si annulla, anzi sarà unitario: $\sin(k-n) = \sin(0) = 1$ conviene analizzare questo caso partendo dall'integrale (altrimenti si annulla il denominatore):

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi(k-n)f_0\,t}\,dt \xrightarrow{Se\ k=n\ allora\ k-n=0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(0)f_0\,t}\,dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\,dt = \frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right) = T_0$$

Abbiamo quindi risolto l'integrale:

$$\begin{cases} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt = \dfrac{\sin[\pi\,(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = 0 & per\ k \neq n \\ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt = \dfrac{\sin[\pi\,(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = 1 & per\ k = n \end{cases}$$

Avendolo risolto, ritorniamo al calcolo del termine X_k:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) * e^{-j\,(2\pi\,nf_o\,t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt$$

Abbiamo chiarito che l'integrale si annulla per $k \neq n$ e andando a moltiplicare la sommatoria esso annullerebbe l'intero risultato. Ne consegue allora che **ha senso studiare tale sommatoria solo nel caso di $\boldsymbol{k = n}$:**

→ Per $k = n$ l'integrale vale:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\,2\pi\,(0)f_0\,t}\,dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt = \frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right) = T_0$$

→ Per $k = n$ la sommatoria vale:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k = X_n$$

Per cui sostituendo otteniamo:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j\,(2\pi\,nf_o\,t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi\,(k-n)f_0\,t}\,dt \xrightarrow{Per\ k=n} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j(2\pi\,nf_o\,t)} = X_n T_0$$

Da questo risultato otteniamo la formula cercata:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j(2\pi\,nf_o t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{j2\pi\,(k-n)f_0 t}dt = X_n T_0 \rightarrow \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j\,2\pi\,k\,f_0\,t}\,dt}$$

Con questa formula è possibile ottenere tutti i "k" coefficienti X_k della forma polare dello sviluppo di Fourier.

Note sul valor medio di un segnale e sul coefficiente X_k

Il valor medio di un segnale viene definito come:

$$V_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

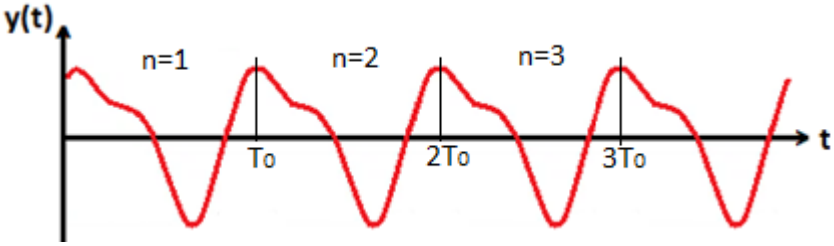
Questo è il valor medio di un qualunque segnale, sia esso periodico o meno.

Se $x(t)$ è un segnale periodico, possiamo scrivere il valore medio come segue:

$$V_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0}\int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)\,dt$$

Avendo praticamente sostituito il periodo "T" con "nT_0" .

All'aumentare di "n" si colgono sempre più periodi, quindi sempre più porzioni del segnale: se $n = 2$ avremo preso parte del segnale che si sarà già ripetuta due volte, arrivando a $2T$, se $n = 3$ si staranno considerando tre ripetizioni del segnale, etc.. Considerando $n \to \infty$ prendiamo quindi tutto il segnale periodico.



Ma questo integrale può essere scritto portando fuori "n" dagli estremi dell'integrale perché considerare un integrale tra $-nT_0/2$ ed $nT_0/2$ significa praticamente considerare n volte l'integrale definito tra $-T_0/2$ e $T_0/2$:

$$V_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0}\int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nT_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

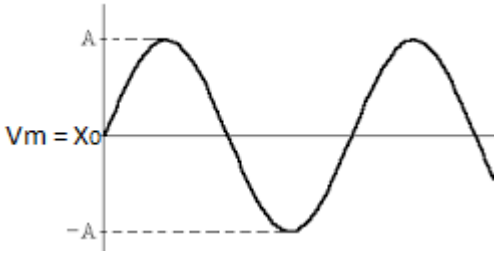
E semplificando "n" possiamo praticamente rimuovere l'operatore limite per $n \to \infty$ poiché non sarà presente alcuna "n" nell'espressione; possiamo poi passare al calcolo dell'integrale:

$$V_m = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nT_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

A questo punto ragioniamo per analogia: la quantità appena ottenuta è praticamente il coefficiente X_0:

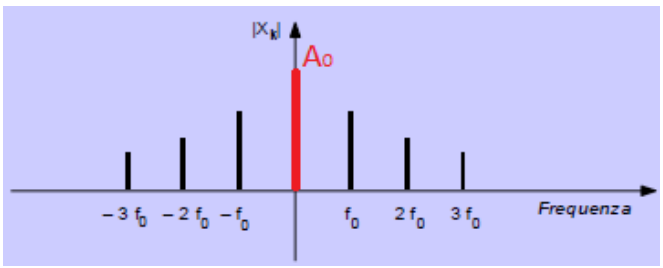
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j\,2\pi\,k\,f_0\,t}\,dt \;\xrightarrow{per\ k=0}\; X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

Il risultato appena ricavato ci sta ad indicare che **il valor medio di un segnale periodico coincide con la sua componente continua**. Il che significa che l'evoluzione del segnale avviene attorno alla sua componente continua. Quindi se la componente continua è non nulla, essa rappresenta il valor medio del segnale.



<u>Esempio</u>: se la componente continua di una tensione sinusoidale è pari a +5V significa che il segnale si evolve attorno al valor medio di 5V.

Questo significa dunque che nello spettro delle ampiezze il valore dell'armonica A_0, centrato sull'asse delle ordinate, corrisponde al valore medio del segnale nel tempo.

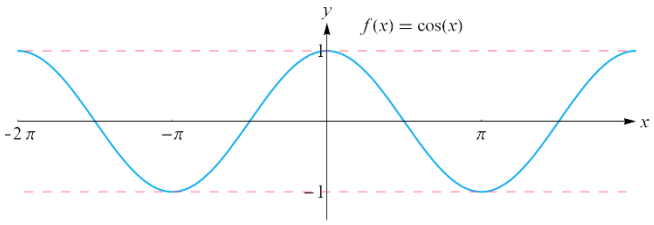


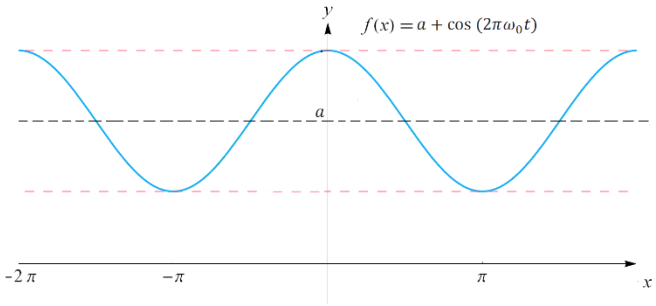
Esempio: Supponiamo di analizzare un classico segnale cosinusoidale: quest'utlimo sarà centrato in zero poiché oscilla attorno all'asse delle ascisse ed è limitato tra -1 e +1.

$$x(t) = \cos\,(2\pi\omega_0 t)$$

Se a questo segnale cosinusoidale sommassimo un valore "a" otterremmo ancora una cosinusoide ma stavolta essa sarà traslata in modo che la cosinusoide oscilli attorno a tale valore.

$$x(t) = a + \cos\,(2\pi\omega_0 t)$$





Serie di Fourier in forma rettangolare

Abbiamo fino ad ora parlato di serie di Fourier in forma polare ed in forma complessa; di queste due forme abbiamo appreso che **la forma polare è quella che viene analizzata dagli strumenti per l'analisi dei segnali** mentre **la forma complessa è quella che preferiremo utilizzare poiché è più semplice per i calcoli.**

È bene introdurre adesso la terza (ed ultima) forma della serie di Fourier: la **forma rettangolare,** essa è poco utilizzata ma è bene conoscerla.

Partiamo dalla forma polare della serie di Fourier:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(2\pi\, k f_0\, t + \varphi_k)$$

Dalle formule della trigonometria possiamo vedere il coseno come segue:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Possiamo quindi applicare tale formula "dividendo" così il coseno: $\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$, per ottenere così:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) \;=\; A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t)\cos(\varphi_k) - \sin(2\pi k f_0 t)\sin(\varphi_k)$$

Utilizziamo i termini:

$$a_0 = A_0 \qquad\qquad a_k = A_k \cos(\varphi_k) \qquad\qquad b_k = A_k \sin(\varphi_k)$$

In modo da sostituire così nella formula:

$$x(t) = \; A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t)\cos(\varphi_k) - \sin(2\pi k f_0 t)\sin(\varphi_k)$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

Quindi la **forma rettangolare della serie di Fourier** è la seguente:

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)}$$

Possiamo immediatamente notare una correlazione tra i coefficienti $[a_k\ , b_k\ ]$ della forma rettangolare e i coefficienti X_k della forma complessa:

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{a_k}\cos(2\pi k f_0 t)) - \boxed{b_k}\sin(2\pi k f_0 t)}$$

forma rettangolare

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{X_k} e^{-j(2\pi k f_0\, t)}}$$

forma complessa

Abbiamo definito il k-esimo coefficiente X_k come:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\,2\pi\,k\,f_0\,t}\,dt$$

Con le formule di Eulero possiamo scrivere questo coefficiente come segue:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\,2\pi\,k\,f_0\,t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,[\cos(2\pi k f_0 t) - j sin(2\pi k f_0 t)]\,dt$$

Questa forma ci permette di individuare praticamente la parte reale e quella immaginaria del coefficiente X_k:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,[\underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{Re\{X_k\}} - \underbrace{j sin(2\pi k f_0 t)}_{Im\{X_k\}}]\,dt$$

E quindi si può dedurre che queste equivalgono ai coefficienti a_k e b_k dello sviluppo di Fourier in forma rettangolare:

$$a_k = Re\{X_k\} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\ dt\ = A_k \cos\,(\varphi_k)$$

$$b_k = Im\{X_k\} = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\ dt\ = A_k \sin\,(\varphi_k)$$

Ricapitolando, è sempre possibile scrivere lo stesso sviluppo in serie di Fourier in tre differenti modi, tutte e tre sono correlati da delle formule matematiche che ne correlano i coefficienti che le rappresentano:

- **Forma Reale Polare:** è la forma analizzata dagli analizzatori di spettro (considera pertanto solo frequenze positive → **spettro unilatero**)

$$\boxed{x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\ (2\pi\ k f_0\ t + \varphi_k)}$$

È possibile passare da **forma reale** → **forma complessa** con le seguenti relazioni:

$X_0 = A_0$

$X_k = A_k e^{j\varphi_k}$ con $k = 1,2, \dots$

$X_{-k} = A_{-k} e^{j\varphi_{-k}}$ con $k = \cdots, -2, -1$

- **Forma Complessa:** è la forma più utilizzata per i calcoli data la sua semplicità a confronto delle altre due forme (considera pertanto sia frequenze positive che negative → **spettro bilatero**)

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{j(2\pi k f_0\ t)}}$$

In cui i vari coefficienti X_k si possono ricavare come segue:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\ dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\ 2\pi\ k\ f_0\ t}\ dt$$

- **Forma Rettangolare (o trigonometrica) :** è la forma meno utilizzata

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)}$$

In cui i coefficienti che figurano si trovano come:

$a_0 = A_0$ $\qquad a_k = A_k \cos(\varphi_k)$ $\qquad b_k = A_k \sin(\varphi_k)$

È possibile passare da **forma complessa** → **forma rettangolare** con le seguenti relazioni:

$$a_k = Re\{X_k\} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\ dt\ = A_k \cos\ (\varphi_k)$$

$$b_k = Im\{X_k\} = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\ dt\ = A_k \sin\ (\varphi_k)$$

Esempio: supponiamo di avere un segnale cosinusoidale e di volerlo rappresentare in serie di Fourier:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$$

La serie di fourier prevede la rappresentazione di un segnale periodico come somma di tante cosinusoidi; trattandosi di un'unica cosinusoide, lo sviluppo in serie di Fourier prevede solo la suddetta cosinusoide, annullando tutti gli altri termini.

Scriviamo il coseno in forma complessa mediante le formule di Eulero:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad x(t) = a\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2}$$

Questo risultato si può confrontare con la forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier: gli unici termini che figurano sono quelli legati alla prima armonica: X_1 e alla sua reciproca: X_{-1} poiché tutte le altre armoniche sono nulle, quindi ne consegue che tutti gli altri termini X_k sono nulli.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j(2\pi k f_0\, t)} = \frac{a}{2}\, e^{j(2\pi f_0 t)} + \frac{a}{2} e^{-j(2\pi f_0 t)} = X_1 e^{j(2\pi f_0 t)} + X_{-1} e^{-j(2\pi f_0 t)}$$

Abbiamo quindi ottenuto:

$$X_1 = \frac{a}{2} \qquad X_{-1} = \frac{a}{2} \qquad X_k = 0\ \forall\, k \neq \pm 1$$

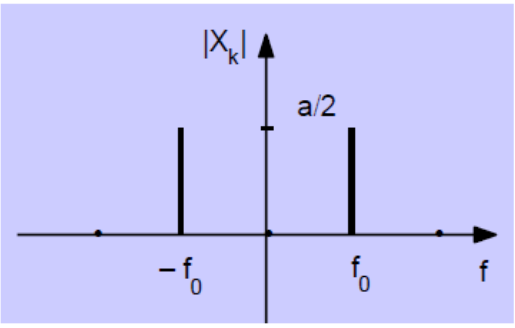
Se andremo a rappresentare il modulo nello spettro delle ampiezze andremo a trovare uno spettro (bilatero poiché la rappresentazione complessa include anche le frequenze negative) in cui sono presenti due sole armoniche speculari: quella a frequenza f_0 e quella frequenza $-f_0$.

Possiamo anche rappresentare le fasi ma troveremo delle fasi nulle perché:

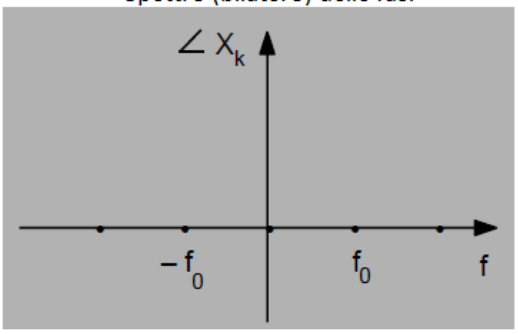
$$\varphi = \angle X_k = arctg\left(\frac{Im\{x(t)\}}{Re\{x(t)\}}\right) = \frac{0}{a/2} = 0$$

Con la rappresentazione unilatera non figurerebbero le frequnze negative (che ricordiamo comunque non essere fisicamente realistiche), quindi ne consegue che la rappresentazione avrebbe la sola armonica in f_0.

Spettro (bilatero) delle ampiezze



Spettro (bilatero) delle fasi



Questo esempio conferma quanto detto in teoria: il coseno è stato rappresentato nello spettro delle ampiezze da una "linea" avente ampiezza pari a quella del coseno. Poiché il segnale è una singola cosinusoide non sono presenti altre linee a rappresentare altre componenti. In questo caso specifico la parte immaginaria è nulla, pertanto non ritroveremo alcuna fase rappresentata poiché essa sarà nulla, tuttavia è bene tener presente che le fasi vanno calcolare e rappresentate nell'apposito spettro. In questo caso avremmo ritrovato una sola fase poiché vi è un solo coseno e la relativa "speculare" dato che stiamo trattando degli spettri bilateri.

– Come abbiamo fatto ad individuare i termini X_k partendo dalla forma complessa del segnale scritta mediante formule di Eulero?
La forma complessa prevede una sommatoria di termini:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j(2\pi k f_0 t)} = X_1\, e^{j[2\pi(f_0)t]} + X_{-1}\, e^{-j[2\pi(f_0)t]} + X_2\, e^{j[2\pi(2f_0)t]} + X_{-2}\, e^{-j[2\pi(2f_0)t]} + \cdots$$

Quello che praticamente abbiamo fatto è stato individuare i termini $\left[X_{\pm k}\, e^{[2\pi(\pm k f_0)t]}\right]$ per confronto, basandoci sui multipli della frequena f_0:

In questo caso sono presenti solo i termini $X_1\, e^{j[2\pi(f_0)t]}$ e $X_{-1}\, e^{-j[2\pi(f_0)t]}$ poiché nella forma complessa del segnale troviamo solo esponenziali aventi $\pm f_0$:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad x(t) = a\,\frac{e^{j(2\pi \boldsymbol{f_0} t)} + e^{-j(2\pi \boldsymbol{f_0} t)}}{2}$$

Abbiamo allora ragionato per ugualianza: il termine X_k va a moltiplicare l'esponenziale, pertanto dovremo necessariamente avere che:

$$X_1 = X_{-1} = \frac{a}{2}$$

<u>Esempio</u>: Facciamo il medesimo esempio considerando una componente cosinusoidale in più e scriviamo direttamente il segnale in forma complessa:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t) + b\,cos(4\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad x(t) = a\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2} + b\,\frac{e^{j[2\pi(2f_0)t]} + e^{-j[2\pi(2f_0)t]}}{2}$$

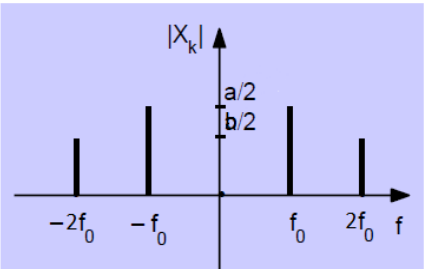
A questo punto possiamo osservare ben due armoniche insieme alle relative complementari, per uin totale di quattro armoniche nello spettro delle ampiezze bilatero: le due cosinusoidi a frequenza f_0 e $2f_0$ insieme alle complementari a frequenze -f_0 e $-2f_0$:

$$X_1 = X_{-1} = \frac{a}{2}$$

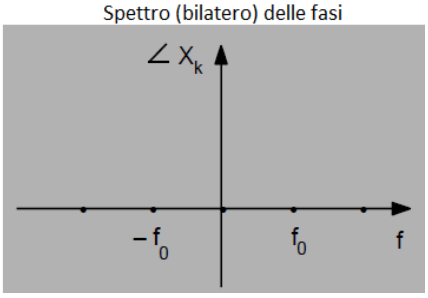
$$X_2 = X_{-2} = \frac{b}{2}$$

Le fasi sono ancora nulle perché non vi è alcuna parte immaginaria.

Spettro (bilatero) delle ampiezze



Spettro (bilatero) delle fasi

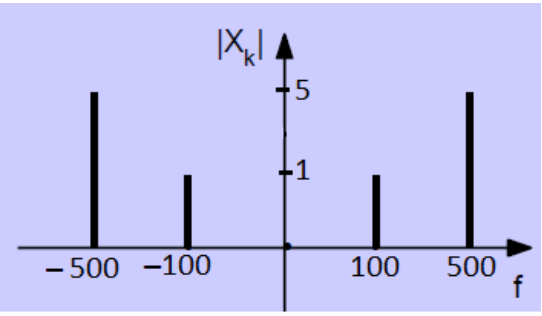


Per arrivare allo sviluppo in serie di Fourier in forma complessa dobbiamo per prima cosa passare alla forma complessa del segnale mediante la formula di Eulero e, dopo di che, sfruttando l'identità troveremo i vari termini "X_k".

<u>Esempio</u>: se ci viene dato un segnale somma di coseni è immediato disegnarne lo spettro: basterà considerarare il coseno a frequenza più piccola (che individua la portante f_0), verificare che la frequenza dei coseni a seguire siano multipli di quest'ultima e, considerando le varie ampiezze dei coseni in questione, disegnare lo spettro delle ampiezze con gli opportuni valori in prossimità delle frequenze individuate.

$$x(t) = 2\cos(2\pi 100t) + 10\cos\,(2\pi 500t)$$

In questo caso $f_0 = 100$ e la seconda frequenza è $f_2 = 5f_0$ che avranno rispettivamente ampiezza $a/2 = 2/2 = 1$ e $b/2 = 10/2 = 5$



Spettro (bilatero) delle ampiezze

È importante ricordare che le ampiezze in uno spettro bilatero (quindi nella forma complessa dello sviluppo) vengono dimezzate; questa, come possiamo vedere, è ua conseguenza della formula di Eulero:

$$x(t) = 2\cos(2\pi 100t) + 10\cos(2\pi 500t) \quad \rightarrow \quad x(t) = \; 2\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2} + 10\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2}$$

$$X_1 = 2/2 \;= 1 \qquad X_2 = 10/2 \;= 5$$

Esempio: supponiamo adesso di considerare lo **sviluppo in sierie di Fourier di una sinusoide**. Fino ad ora abbiamo considerato delle armoniche che altro non sono che cosinusoidi, ma come agire con una sinusoide? In realtà la sinusoide altro non è che una cosinusoide sfasata di -90° ($-\pi/2$) per cui potremo sempre scriverla in funzione di un coseno e agire come fatto fino ad ora:

$$x(t) = \mathrm{a}\sin(2\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad x(t) = a\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Quello che praticamente varia è solo la fase, quindi ci aspettiamo che lo spettro delle ampiezze sia identico a quello di un coseno e che a variare sia solo lo spettro delle fasi.

Passimo dunque alla forma complessa del segnale in questione:

$$x(t) = a\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \; a\,\frac{e^{j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}}{2} = a\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)}e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j(2\pi f_0 t)}e^{j\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Abbiamo, inoltre, "suddviso" l'esponenziale come prodotto di due esponenziali dato che lo sfasamento viene sommato algebricamente e la somma di esponenziali può essere vista come prodotto di due numeri cui base è identica e varia solo l'esponente.

A questo punto possiamo scrivere il risultato come segue:

$$x(t) = \; a\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)}e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j(2\pi f_0 t)}e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} = \; ae^{-j\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{j(2\pi f_0 t)}}{2} + ae^{j\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2}$$

Avendo scritto in questa forma proseguiamo con il confronto con la serie di Fourier:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j(2\pi k f_0 t)} = X_1\, e^{j[2\pi(f_0)t]} + X_{-1}\, e^{-j[2\pi(f_0)t]} + X_2\, e^{j[2\pi(2f_0)t]} + X_{-2}\, e^{-j[2\pi(2f_0)t]} + \cdots$$

Non abbiamo termini costanti, per cui $X_0 = 0$

Come possiamo notare nel nostro segnale figura solo l'armonica principale f_0 il che significa che dovremo aspettarci uno spettro bilatero delle ampiezze che considera solo l'armonica principale in f_0 e la sua controparte negativa in $-f_0$:

$$x(t) = ae^{-j\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{j(2\pi \boldsymbol{f}_0 t)}}{2} + ae^{j\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-j(2\pi \boldsymbol{f_0} t)}}{2}$$

Quindi avremo che:

$$X_1 = \frac{a}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad X_{-1} = \frac{a}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad X_k = 0\;\forall k \neq \pm 1$$

Possiamo ottenere i moduli e le fasi in funzione di X_1 e X_{-1}: ricordando che questi sono rappresentati come numeri complessi del tipo $z = A\,e^{\pm j\theta}$ in cui:

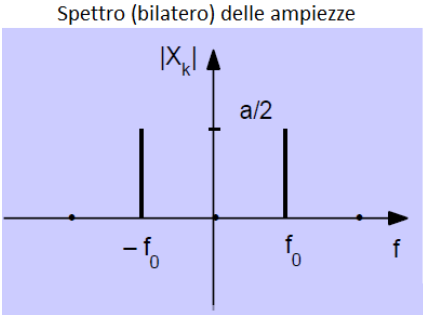
- $|A|$ è il modulo del numero complesso
- θ è la fase del numero complesso

Otteniamo quindi:

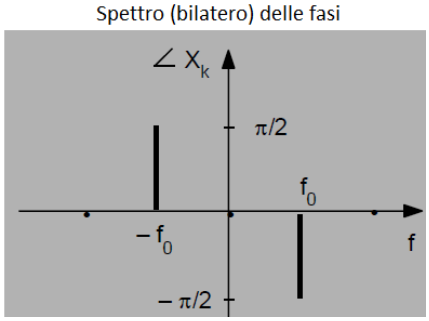
$$X_1 = \frac{a}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \;\rightarrow\; |X_1| = \frac{a}{2} \quad \angle X_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad\qquad X_{-1} = \frac{a}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \;\rightarrow\; |X_{-1}| = \frac{a}{2} \quad \angle X_{-1} = \frac{\pi}{2}$$

Quindi dal punto di vista dei moduli otteniamo lo stesso risultato ottenuto per il coseno nell'esempio precedente, per le fasi invece otteniamo un nuovo spettro: si tratta di una funzione dispari che prevede una fase negativa per frequenze positive ed una fase positiva per frequenze negative. Del resto, il coseno differisce dal seno proprio per uno sfasamento.

Spettro (bilatero) delle ampiezze



Spettro (bilatero) delle fasi



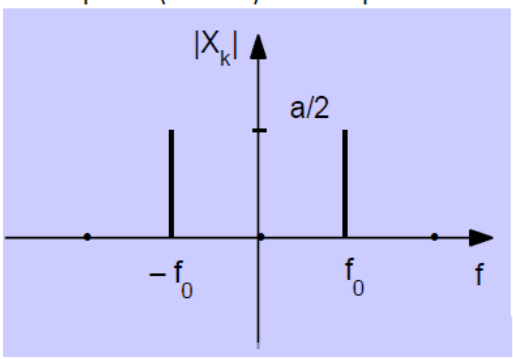
Proprietà della Serie di Fourier

Simmetria dello spettro bilatero

Sia dato un **segnale reale** $x(t)$ (Quindi un segnale fisicamente realizzabile), allora **il suo spettro delle ampiezza è sempre una funzione pari e lo spettro delle fasi è sempre una funzione dispari**

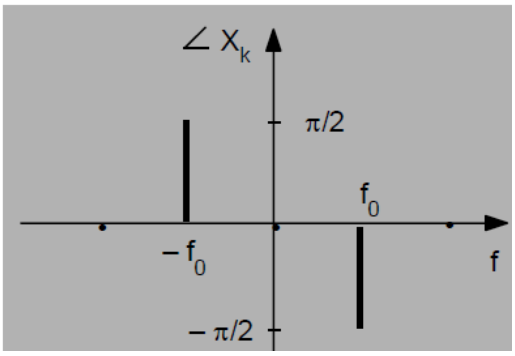
$\boldsymbol{Modulo\ (ampiezza)}$: $|X_k| = |X_{-k}|$

Spettro (bilatero) delle ampiezze



$\boldsymbol{Fase}$: $\angle X_k = -\angle X_{-k}$

Spettro (bilatero) delle fasi

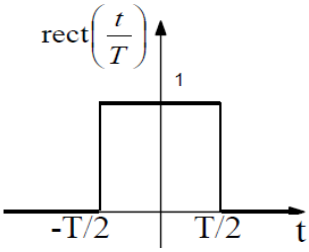


Linerarità

Sia dato un segnale che è combinazione lineare di altri due segnali nel tempo allora le sue componenti armoniche saranno date dalla combinazione lineare delle componenti armoniche dei segnali che lo compongono.

$$\boldsymbol{z(t) = x(t) + y(t) \ \rightarrow \quad Z_k = aX_k + bY_k}$$

Il segnale rettangolare: Rect()



I segnali che andremo ad affrontare sono dei segnali composti da dei segnali elementari, uno di essi è il **segnale rettangolare**.

Il segnale Rect è un segnale diverso da 0 all'interno di un intervallo limitato di ampiezza "T": per esattezza assume valore unitario tra $-T/2$ e $T/2$ e si annulla al di fuori di questo intervallo. Matematicamente questo si esprime come:

$$a * rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} a & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si noti che il rect di base vale 1 all'interno dell'intervallo $[-T/2\ , T/2]$ ma se viene opportunamente amplificato (moltiplicato) per un'ampiezza "a" allora all'interno di questo intervallo assumerà il valore pari all'amplificazione.

Spesso questo segnale viene anche indicato come:

$$\pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

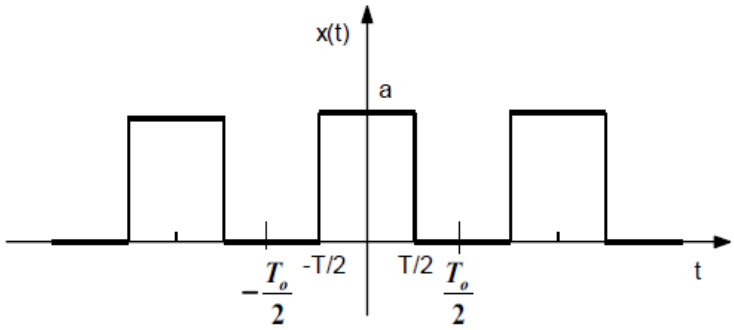
NB! Tra parentesi non vi è una vera e propria frazione: "t/T" sta solo a segnalare che è una funzione nel dominio del tempo e che è definita in un intervallo di ampiezza "T"; è bene quindi chiarire che non si tratta di una frazione semplificabile!

Il treno di impulsi rettangolari

Il rect viene spesso impiegato nel treno di impulsi rettangolari: si tratta di un segnale periodico nato dalla periodicizzazione di un rect. Esso sostanzialmente consiste nella somma di più rect che vengono man mano sfasati di un certo periodo "T_0", il risultato è un treno di rect equidistanti, distanziati del periodo T_0.

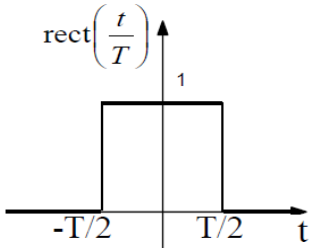
Posto che il segnale di base sia:

$$x(t) = a\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



Allora possiamo ottenere il treno di impulsi dalla periodicizzazione di quest'ultimo, ovvero inserendo tale segnale all'interno di una sommatoria che va da $-\infty$ a $+\infty$, e sfasando tutti i rect della sommatoria della stessa quantità: il periodo T_0, così facendo si sommano praticamente tanti rect.

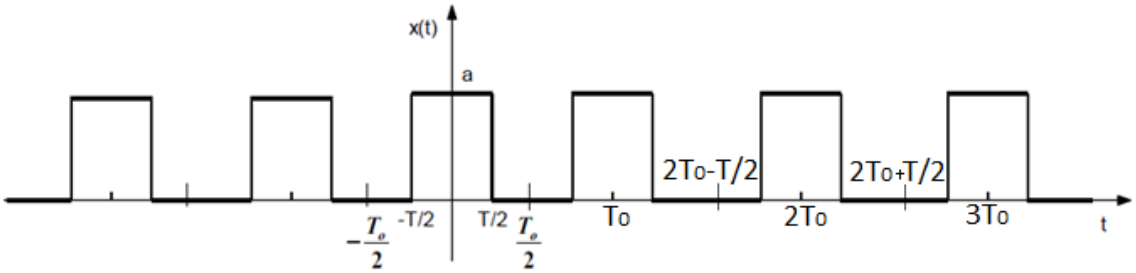
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, rect\left(\frac{t - nT_o}{T}\right)$$



Come possiamo notare dal grafico del rect, quest'ultimo è centrato esattamente a metà del rettangolo ed ha un'ampiezza totale pari a T, quindi l'asse divide il rettangolo esattamente a metà e questo andrà da $-T/2$ a $+T/2$. Questo significa che il treno di rect, che si ricava ripetendo ogni T_0 il segnale elementare rect, prevede una serie di rect che sono tutti centrati per multipli di T_0:

- $n = 0 \rightarrow$ si ricava praticamente il rect elementare visto finora
- $n = 1 \rightarrow$ si ricava un rect traslato e centrato in T_0
- $n = 2 \rightarrow$ si ricava un rect traslato di T_0 e centrato in $2T_0$

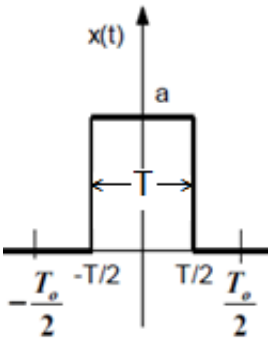
Ogni rect del treno avrà un'ampiezza pari a T e pertanto si estenderà da $[nT_0 - T/2]$ a $[nT_0 + T/2]$.



Chiaramente il disrcorso vale anche per i rect che si trovano sul semiasse negativo.

Se "n" va da $-\infty$ a $+\infty$ si ottiene un treno di infiniti rect. È bene precisare che T e T_0 sono differenti:

- T_0 è il periodo con cui ogni rect si ripete uguale a se stesso
- T è l'ampiezza di ogni rect all'interno del treno



Viene chiamato **duty-cycle δ** il rapporto tra i due:

$$\delta = \frac{T}{T_0}$$

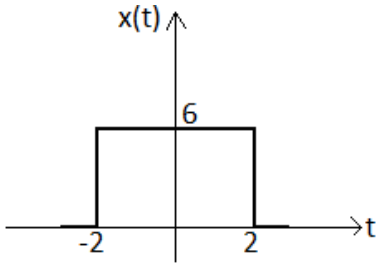
Per un treno di rect deve sempre avvenire che $T < T_0$.

In generale, vale sempre la periodicizzazione dei segnali: se $x(t)$ è il segnale di partenza, il segnale $y(t)$ ottenuto dalla periodicizzazione di quest'utlimo avrà una forma del tipo:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

Con "T_0" periodo del segnale $y(t)$

<u>Esempio</u>: consideriamo il seguente Rect e vediamo come rappresentarlo:



$$x(t) = 6\, rect\left(\frac{t}{4}\right)$$

In questo caso avremo un'ampiezza pari a $A = 6$ ed una base del rettangolo che sarà grande $T = 4$, questa conoscenza ci permette di rappresentare il rettangolo: dato che **non vi è alcun sfasamento** poiché il rect è incentrato in "t", si tratta di un rettangolo che è centrato nell'origine (0) di base 4 e altezza 6; per cui andrà da $-\frac{T}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ a $\frac{T}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Chiaramente, questo segnale vale 6 all'interno dell'intervallo $[-2, 2]$ e 0 al di fuori:

$$a * rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} a & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} \quad \rightarrow \quad x(t) = 6\, rect\left(\frac{t}{4}\right) = \begin{cases} 6 & |t| < 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Possiamo verificare se il segnale rect è un segnale di potenza o di energia:
Verifichiamo se l'energia del segnale è finita o meno

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt \;\rightarrow\; E_x = \int_{-2}^{2} [6]^2\, dt = 36 \int_{-2}^{2} dt = 36\, [\, t\,]_{-2}^{2} = 34 * 4 = 144$$

L'energia è finita, questo significa che **il rect è un segnale di energia,** in quanto tale allora esso avrà una potenza nulla.

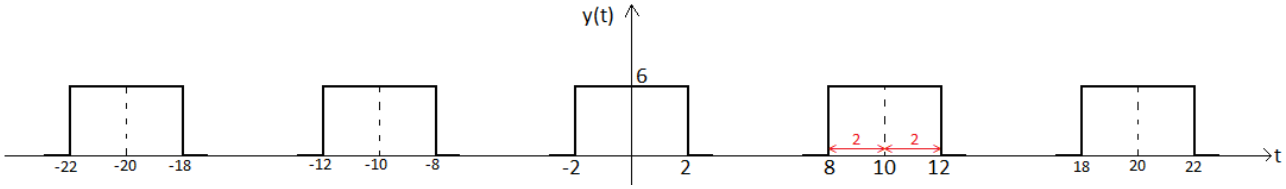
$\rightarrow$ Periodicizzazione del rect

Possiamo anche periodicizzare questo segnale per ottenere un treno di impulsi che avranno tutti ampiezza pari a 6:

$$y(t) = \sum_{b} 6\, rect\left(\frac{t - 10n}{4}\right)$$

Questo è un treno di rect che ripete un rect con un periodo $\tau = 10$, per cui per ogni muliplo $n\tau$ troveremo il centro di un nuovo rect appartenente al treno.

Quando si deve disegnare questo segnale periodico dobbiamo considerare il segnale troncato "di partenza" che abbiamo precedentemente trovato: questo era centrato in $t = 0$;
sappiamo che ogni rect si ripete con periodo $\tau = 10$, questo significa che ad ogni multiplo di 10 dovremo far corrispondere il "centro" del rect.
Dopo di che, sapendo che ogni rect ha una base pari a 4, andremo a considerare $(n\tau - 2)$ a sinistra dal centro del rect e $(n\tau + 2)$ a destra dal centro, in questo modo otteniamo un rect di base 4 esattamente centrato in $n\tau$.
Chiaramente, ogni rect ha la stessa ampiezza: è pari a 6 in questo caso.

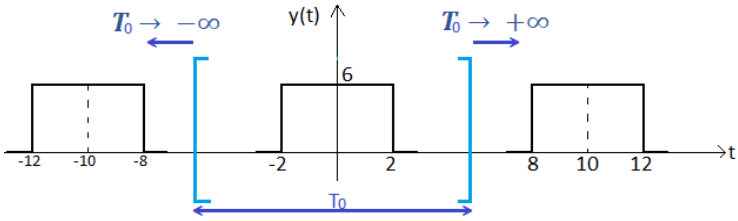


A questo punto possiamo chiederci se questo treno di rect è un segnale di energia o di potenza. La risposta in realtà è immediata: **tutti i segnali periodici sono segnali di potenza**, d'altronde il treno di rect è un segnale composto da tanti rect che vengono ripetuti all'infinito, questo significa che il segnale ha l'energia di ogni singolo rect ripetuta all'infinito, in altre parole: la sua energia è infinita, dunque è un segnale di potenza. Possiamo calcolare la potenza di un segnale periodico come il rapporto dell'energia che esso assume nel periodo (quindi nel singolo rect) ed il periodo stesso:

$$P_y \triangleq \frac{E_T}{T} = \frac{E_x}{T} = \frac{144}{T} = \frac{144}{10} = 14.4$$

Se volessimo conoscere il **valor medio (nel tempo) di un generico segnale** basterà applicare la definizione:

$$< x(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)d_t$$



Praticamente consideriamo una "finestra" di ampiezza T (dove "T" non è il periodo) e si fa tendere l'ampiezza di tale finestra all'infinito con l'operazione di limite

Per un generico segnale periodico la formula viene adattata a quest'ultimo:

$$< x(t) > = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0}\int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)d_t$$

Integrare nell'intervallo $[-nT/2\,, nT/2]$ equivale praticamente a considerare n volte l'integrale del segnale troncato nell'intervallo $[-T/2\,, T/2]$, per questo motivo è possibile "portar la <n> fuori dal segno di integrale":

$$\int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)d_t = n\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t$$

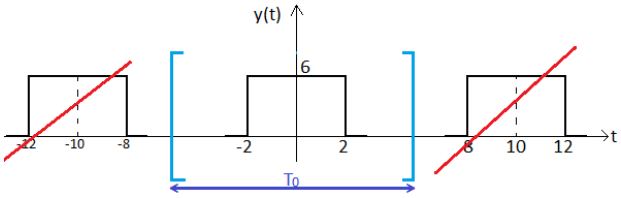
La "n" che tiriamo fuori dal segno di integrale viene semplificata con quella al denominatore:

$$< x(t) > = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0}\int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)d_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0}\, n\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t$$

A questo punto il passaggio a limite per $n \to \infty$ perde di significato poiché effettivamente non figura nessuna "n" nella relazione esplicitata, pertanto rimuoviamo l'operatore limite:

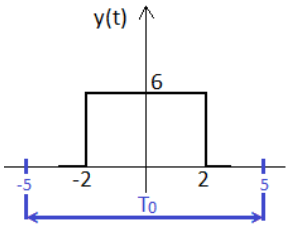
$$< x(t) > = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t \quad \to \quad < x(t) > = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t$$

Il risultato ottenuto è praticamente così spiegabile: estendere l'osservazione con una finestra che ingloba tutto il segnale è superfluo: trattandosi di un segnale periodico, quest'ultimo si ripete uguale a se stesso per ogni periodo, quindi piuttosto che analizzare tutto il segnale analizzaremo la sua troncatura con una finestra che include solo il primo periodo.



Nel nostro caso allora, supponendo di fissare una finestra di integrazione avente ampiezza pari a $T_0 = 10$, ovvero una finestra che si protrae da -5 a 5, incentrandosi in $t = 0$, otterremo il seguente valore medio:

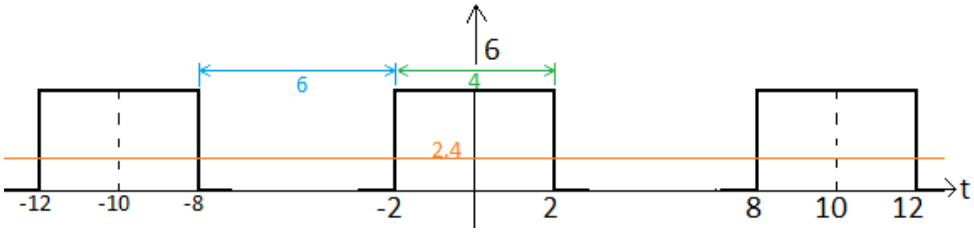
$$< x(t) > = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)d_t \quad \to \quad < x(t) > = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} x(t)d_t = \frac{1}{10}\int_{-2}^{2} 6\,dt$$



L'integrazione tra -5 e 5 torna il rect di ampiezza 6 definito da -2 e 2 e nient'altro poiché al di fuori di $[-2, 2]$ il rect è nullo e di conseguenza lo è anche il suo integrale.

$$\int_{-5}^{5} x(t)d_t = \frac{1}{10}\int_{-2}^{2} 6\,dt = \frac{6}{10}\int_{-2}^{2} dt = \frac{6}{10}[x]_{-2}^{2} = \frac{24}{10} = 2.4$$

Nel segnale periodico vi sono periodi di larghezza pari a 4 in cui è presente il rect di ampiezza 6 e dei periodi leggermente più lunghi, con una larghezza pari a 6, in cui vi è assenza di segnale. Mediamente, dunque il valore attorno al quale si evolve il segnale è pari a 2.4, che va al di sotto della metà.



Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa per il treno di impulsi rettangolari

Vediamio adesso di ricavare lo sviluppo in serie di Fourier in forma complessa del treno di impulsi rettangolari:

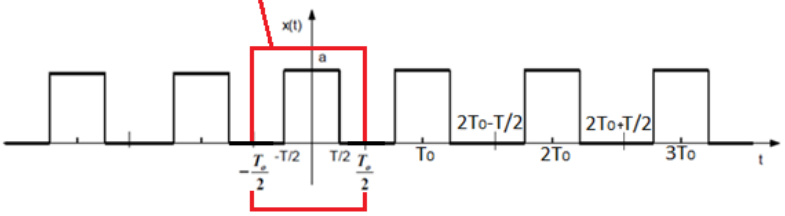
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, rect\left(\frac{t - nT_o}{T}\right)$$

Per prima cosa calcoliamo il termine X_k, applicando la sua definizione troviamo quanto segue:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\,2\pi\,k\,f_0\,t}\,dt \;\rightarrow\; X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, rect\left(\frac{t - nT_o}{T}\right)\right] e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Si noti che stiamo considerando l'integrale tra $-T_0/2$ e $+T_0/2$, ma integrando in questo intervallo non si cosidera l'intero treno di impulsi rettangolari ma solo il rect troncato tra $-T_0/2$ e $+T_0/2$:

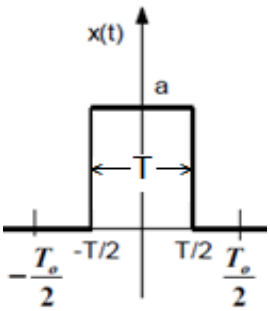
$$X_k = \frac{1}{T_0}\boxed{\int_{-T_0/2}^{T_0/2}}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, rect\left(\frac{t - nT_o}{T}\right)\right.$$



Quindi stiamo praticamente considerando solo il rect per $n = 0$ (il rect "di partenza"); pertanto non ha senso considerate tutto il treno di impulsi se poi andremo a considerare solo il rect che si trova tra $-T_0/2$ e $+T_0/2$ quindi possiamo sostituire:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, rect\left(\frac{t - nT_o}{T}\right)\right] e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \rightarrow X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Analizzando il rect, possiamo osservare che esso vale "a" in un intervallo $[-T/2\,, +T/2]$ all'interno dell'intervallo d'integrazione $[-T_0/2\,, +T_0/2]$ e 0 altrove; quindi possiamo scrivere il valore del rect: trascureremo la parte in cui si annulla e considereremo la parte utile del segnale, in cui assume il valore a, ovvero nell'intervallo $[-T/2\,, +T/2]$



$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} a\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Nella formula non consideriamo le parti di segnale che si trovano negli intervalli $[-T_0/2\,, -T/2]$ e $[+T_0/2\,, +T/2]$ perché in tali intervalli il segnale si annulla:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} a\, e^{-j2\pi k f_0 t} + \cancel{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{-T/2} 0\, e^{-j2\pi k f_0 t}} + \cancel{\frac{1}{T_0}\int_{T/2}^{T_0/2} 0\, e^{-j2\pi k f_0 t}}\,dt$$

Quindi, rimane solamente la parte di segnale che si trova nell'intervallo $[-T/2\,, +T/2]$ e vale "a":

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} a\, e^{-j2\pi k f_0 t}$$

NB! "Rect()" è un nome, è chiaro che quando dobbiamo integrare quest'ultimo dovremo sostituire la sua espressione matematica: si tratta di un segnale costante avente una certa ampiezza "a" (un gradino), in questo caso $a = 1$

Continuiamo con l'integrazione, risolvendo l'integrale per trovare il coefficiente X_k:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} a\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{a}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Risolviamo l'integrale dell'esponenziale:

$$X_k = \frac{a}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\right]_{T/2}^{T/2} \rightarrow X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 [T/2]} - e^{-j2\pi k f_0 [-T/2]}}{-j2\pi k f_0}\right]$$

$$X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 [T/2]} - e^{j2\pi k f_0 [T/2]}}{-j2\pi k f_0}\right]$$

All'esponente possiamo semplificare il 2 a moltiplicare π con il 2 al denominatore di T/2:

$$X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 [T/2]} - e^{j2\pi k f_0 [T/2]}}{-j2\pi k f_0}\right] = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j\pi k f_0 [T]} - e^{j\pi k f_0 [T]}}{-j2\pi k f_0}\right]$$

Si noti che abbiamo ottenuto la forma di Eulero di un seno:

$$X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{\boxed{e^{-j\pi k f_0 [T]} - e^{j\pi k f_0 [T]}}}{\boxed{-j2}\,\pi k f_0}\right] \qquad \sin(\pi k f_0 T)$$

Quindi possiamo effettuare tale sostituzione per ottenere il seguente risultato:

$$X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{e^{-j\pi k f_0 [T]} - e^{j\pi k f_0 [T]}}{-j2\pi k f_0}\right] = \frac{a}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0}\right] \rightarrow X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0}\right]$$

NB! Chiaramente non è possibile semplificare T con f_0 perché non si tratta di $T_0 = 1/f_0$!

Il nostro intento è quello di ricavare una forma "particolare" del seno (si tratta del seno cardinale, come vedremo tra poco), per ottenerla dovremo far sì che il denominatore del seno sia esattamente uguale all'argomento di quest'ultimo. Per ottenere questa forma allora andremo a moltiplicare e dividere per "T":

$$X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0}\right] \xrightarrow{Moltiplico/Divido\ per\ T} X_k = \frac{a}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0}\right]\frac{T}{T} \rightarrow X_k = \frac{aT}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0 T}\right]$$

A questo punto introduciamo una nuova funzione che prende il nome di **seno cardinale** e vien fuori da una "forma particolare" di un seno (ne studieremo l'andamento e le caratteristiche dopo questa trattazione):

$$\boxed{sinc(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}}$$

Avendo introdotto il seno cardinale possiamo scrivere il risultato di X_k ottenuto come segue:

$$X_k = \frac{aT}{T_0}\left[\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0 T}\right] \rightarrow X_k = \frac{aT}{T_0}\, sinc(k f_0 T)$$

Possiamo scrivere questo risultato in un'altra forma, ricordando che $f_0 = 1/T_0$:

$$X_k = \frac{aT}{T_0}\, sinc(k f_0 T) \rightarrow \boxed{X_k = \frac{aT}{T_0}\, sinc\left(\frac{kT}{T_0}\right)}$$

E siccome precedentemente abbiamo definito il **duty-cycle δ**:

$$\delta = \frac{T}{T_0}$$

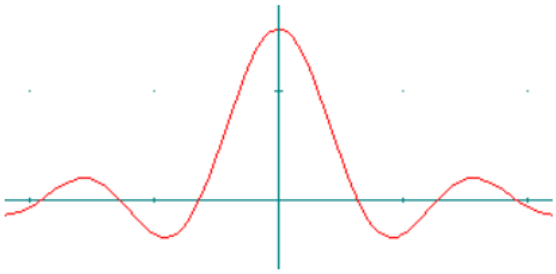
Possiamo ulteriormente sostituire e ottenere il seguente risultato:

$$\boxed{X_k = a\delta\, sinc(k\delta)}$$

Il segnale seno cardinale: Sinc()

Nella trattazione dello sviluppo di Fourier in forma complessa del treno di impulsi rettangolari abbiamo trattato il **seno cardinale**, quest'ultimo aveva la seguente forma:

$$\boxed{sinc(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}}$$



Questo segnale ha il grafico rappresentato ed ha le seguenti caratteristiche:

- **Vale 1 quando il suo argomento è pari a zero**
- **Si annulla ogni volta che il suo argomento assume un valore intero**

<u>Esempio</u>: Avendo note queste due caratteristiche fondamentali del seno cardinale, calcoliamo un'ipotetica X_k di un treno di impulsi rettangolari, supponendo di avere $\alpha = kT = 1$ ed un duty factor: $\delta = T/T_0 = 0.5$. Vediamo di ricavare i punti che andranno a formare il seno cardinale verificandone il valore al variare di "k":

$$X_k = a\delta\, sinc(k\delta) = 0.5\, sinc(0.5k)$$

$$k = 0 \;\rightarrow\; 0.5\, sinc(0) = 0.5 \qquad infatti: 0.5\, sinc(0) = 0.5\frac{\sin(0)}{\pi} = 0.5(1) = 0.5$$

$$k = 1 \;\rightarrow\; X_k = a\delta\, sinc(k\delta) = \frac{aT}{T_0}\frac{\sin(\delta k\pi)}{\delta k\pi} = a\delta\frac{\sin(\delta k\pi)}{\delta k\pi} = 0.5\frac{\sin(1/2\pi k)}{1/2k\pi} = 0.5\frac{\sin(1/2\pi)}{1/2\pi} = \frac{0.5}{\pi}$$

$$k = 2 \;\rightarrow\; X_k = a\delta\, sinc(k\delta) = 0.5 sinc(1) = 0 \qquad infatti: 0.5\, sinc(1) = 0.5\frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$k = 3 \;\rightarrow\; X_k = 0.5\frac{\sin(3/2\pi)}{3/2\pi} = 0.5\frac{\sin(3/2\pi)}{3/2\pi} = 0.5 * \frac{-1}{3/2\pi} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$k = 4 \;\rightarrow\; X_k = a\delta\, sinc(k\delta) = 0.5 sinc(2) = 0 \qquad infatti: 0.5\, sinc(2) = 0.5\frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0$$

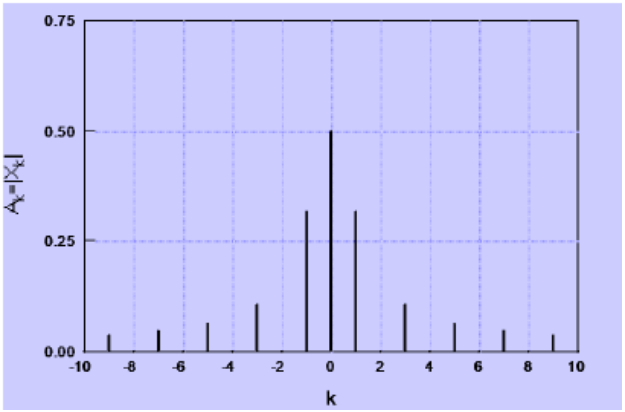
$$k = 5 \;\rightarrow\; X_k = 0.5\frac{\sin(5/2\pi)}{5/2\pi} = 0.5\frac{\sin(5/2\pi)}{5/2\pi} = 0.5 * \frac{-1}{5/2\pi} = -\frac{1}{5\pi}$$

$$k = 6 \;\rightarrow\; X_k = a\delta\, sinc(k\delta) = 0.5 sinc(3) = 0 \qquad infatti: 0.5\, sinc(3) = 0.5\frac{\sin(3\pi)}{3\pi} = 0$$

Dopo questo esperimento possiamo schematizzare i moduli dei vari X_k, ottenendo così lo spettro delle ampiezze del segnale treno di rect corrispondente.

$$|X_0| = 0.5; \quad |X_1| = \frac{0.5}{\pi}; \quad |X_2| = 0; \quad |X_3| = \frac{1}{3\pi};$$

$$|X_4| = 0; \quad |X_5| = \frac{1}{5\pi}; \quad |X_6| = 0$$



Per valori di "k" dispari il segnale assume determinati valori mentre per i valori pari si annulla. Quindi per frequenze kf_0 in cui "k" è pari non vi è alcuna "linea" per quelle in cui "k" è dispari invece si. La componente continua è $X_0 = 0.5$.

Da questo esempio possiamo intuire perché valgono le proprietà del seno cardinale:

1. Il seno cardinale vale 1 quando il suo argomento è nullo perché a valere 1 è proprio il seno che rappresenta:

$$sinc(0) = \frac{\sin(0)}{\pi\alpha} = 1$$

2. Il seno cardinale si annulla per valori interi perché si tratta del seno di multipli di π:

$$sinc(0) = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 0 \qquad con\ k \in N$$

A questo punto, avendo ricavato lo spettro delle ampiezze, è anche bene ricavare quello delle fasi $\angle X_k$.

Avendo la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso possiamo ricavare la fase come spiegato nello specchietto.

$$z = Re + jIm$$
$$\angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad per\ Re > 0$$
$$\angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi \quad per\ Re < 0$$

Si noti però che nel nostro esempio non abbiamo una parte immaginaria:

$$X_k = a\delta\ sinc(k\delta) = 0.5\ sinc(0.5k)$$

Questo significa che la parte immaginaria è nulla (questa è una caratteristica legata al fatto che il segnale sia pari, come vedremo).

Quindi la fase può valere solo 0 o π in funzione del fatto che la parte reale sia maggiore o minore di zero:

$$\angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad per\ Re > 0 \ \rightarrow\ \angle z = arctg(0) = 0$$

$$\angle z = arct\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi \quad per\ Re < 0 \ \rightarrow\ \angle z = arct(0) + \pi = \pi$$

Infatti come possiamo verificare:

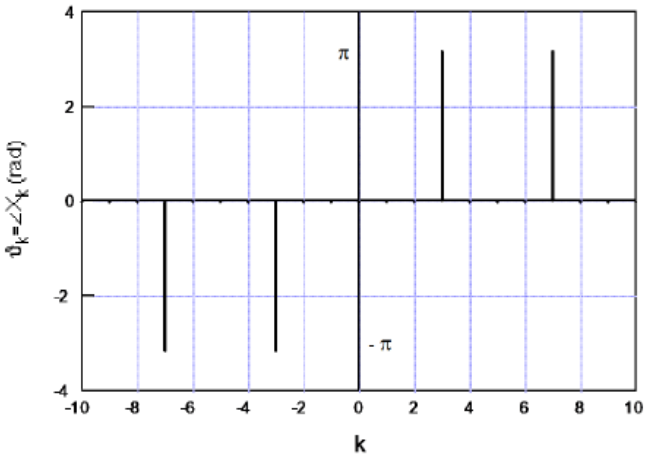
$$k = 0 \ \rightarrow\ X_k = 0.5 \ \rightarrow Re > 0\,, Im = 0 \rightarrow\ \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 0$$
$$k = 1 \ \rightarrow\ X_k = \frac{0.5}{\pi} \ \rightarrow Re > 0\,, Im = 0 \ \rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 0$$
$$k = 2 \ \rightarrow\ X_k = 0 \ \rightarrow\ Re = 0\,, Im = 0 \ \rightarrow\ \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 0$$
$$k = 3 \ \rightarrow\ X_k = -\frac{1}{3\pi} \ \rightarrow\ Re < 0\,, Im = 0 \ \rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi = \pi$$
$$k = 4 \ \rightarrow\ X_k = 0 \ \rightarrow\ Re = 0\,, Im = 0 \ \rightarrow\ \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 0$$
$$k = 5 \ \rightarrow\ X_k = -\frac{1}{5\pi} \ \rightarrow\ Re < 0\,, Im = 0 \ \rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi = \pi$$
$$k = 6 \ \rightarrow\ X_k = 0 \ \rightarrow\ Re = 0\,, Im = 0 \ \rightarrow\ \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 0$$

Come possiamo vedere avremo solo "linee" dello spettro delle fasi che assumono valore 0 o π.

Non abbiamo parlato delle componenti speculari per i vari "k" negativi, né per la fase né per le ampiezze ma, sapendo che lo spettro delle ampiezze è speculare rispetto all'asse verticale mentre quello delle fasi è speculare rispetto all'origine possiamo automaticamente tracciare la restante parte dello spettro bilatero.

Ricordando che:

- → **Lo spettro delle ampiezze è pari:** $|\boldsymbol{X_k}| = |-\boldsymbol{X_k}|$
- → **Lo spettro delle fasi è dispari:** $\angle -\mathbf{X_k} = -\angle\,\mathbf{X_k}$



Spettro di un segnale pari e spettro di un segnale dispari

A questo punto ci poniamo il seguente quesito: dall'analisi nel dominio del tempo, è possibile intuire qualche proprietà legata allo spettro del medesimo segnale nel dominio delle frequenze e i vari X_k che lo compongono?

Per rispondere a questa domanda è bene sin da subito richiamare le differenze tra segnali pari e segnali dispari:

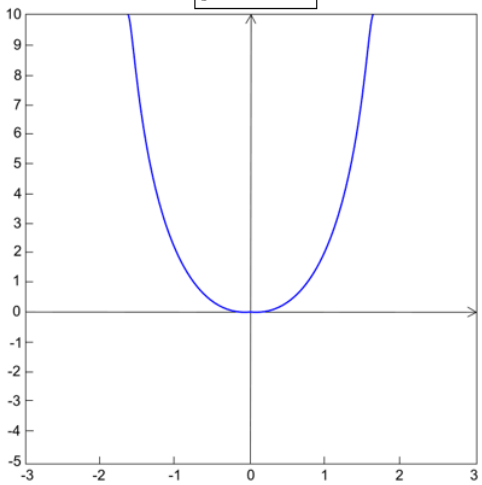
- Un segnale viene detto **pari** se il suo andamento mostra una certa simmetria con l'**asse delle ordinate**, per cui tracciando il suo grafico, se è possibile riconoscere che questo mostra una certa simmetria con l'asse verticale, allora esso è pari
- Un segnale viene invece detto **dispari** se la simmetria che dimostra è riferita all'**origine**, dunque tracciando il suo grafico potremo notare una certa simmetria rispetto all'origine; se così fosse allora il segnale è da considerare dispari.

Si noti che, a differenza dei numeri, i segnali possono anche essere **né pari né dispari**, poiché la parità/disparità non è un elemento fondamentale della funzione (a differenza dei numeri cui è possibile stabilire se sono pari o dispari dalla divisione per due).

Con i criteri appena acquisiti differenziamo alcuni esempi di funzioni pari, dispari o né pari né dispari:

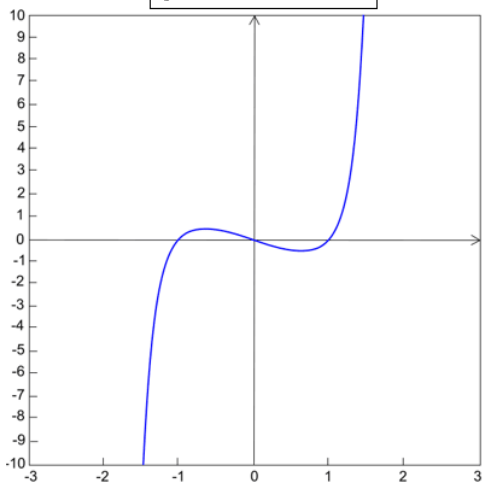
Funzione Polinomiale: è una funzione pari data la simmetria rispetto all'asse verticale

$$y = x^4 + x^2$$



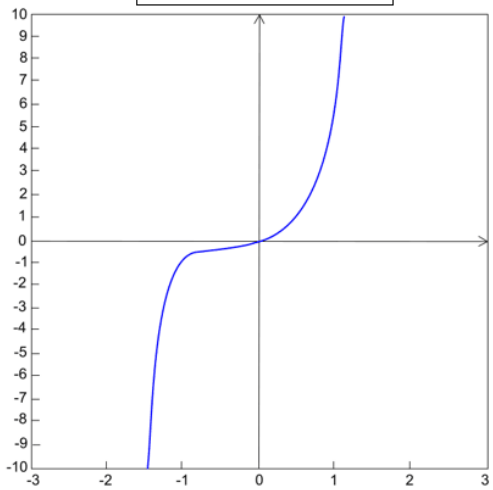
Funzione (generica): è una funzione dispari data la simmetria rispetto all'origine

$$y = x^7 - x^5 + x^3 - x$$



Funzione (generica): è una funzione nè pari nè nè dispari perché non presenta simmetrie

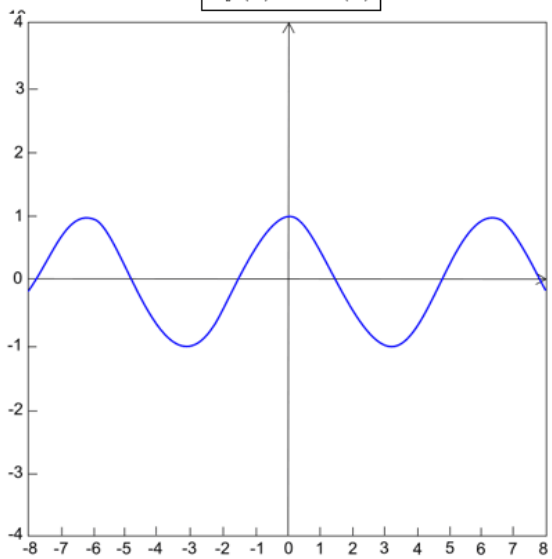
$$y = x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x$$



Possiamo anche contraddistinguere dei segnali comunemente utilizzati come il coseno ed il seno:

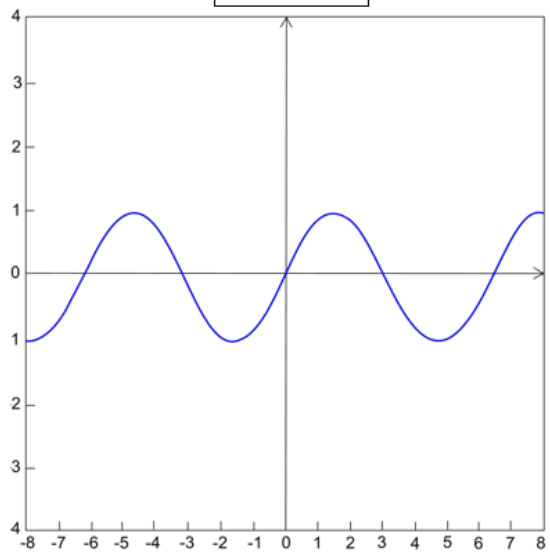
Funzione Coseno: è una funzione pari data la simmetria rispetto all'asse verticale

$$f(x) = \cos(x)$$



Funzione Seno: è una funzione dispari data la simmetria rispetto all'origine

$$f(x) = \sin(x)$$



A questo punto, avendo individuato i criteri per distinguere i segnali pari, quelli dispari e quelli che non sono né pari né dispari, possiamo continuare la trattazione traento le nostre conclusioni sulle trasformate dei segnali pari e/o dispari.

Traformata di un segnale pari

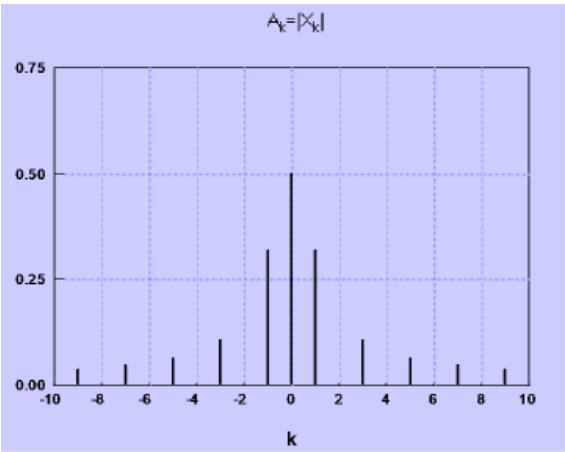
Possiamo dimostrare **che se il segnale nel tempo è pari, quindi se è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il suo spettro è formato da funzioni X_k pari e puramente reali**.

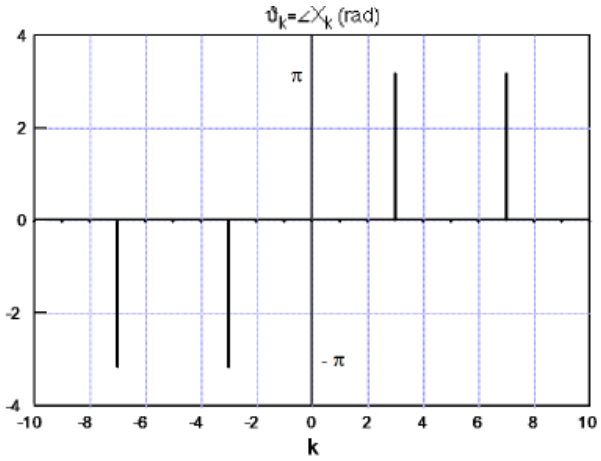
- Questa caretteristica non si nota particolarmente nei moduli in cui l'andamento del segnale è sempre segnato da valori reali positivi essendo dedotti dall'operazione di modulo: $|X_K| \geq 0$
- Tuttavia è una caratteristica che si nota nelle fasi in cui possiamo realizzare che i valori che può assumere saranno 0 o $\pm\,\pi$ poiché:

$$\rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad per\ Re > 0 \ \rightarrow \angle z = arctg(0) = 0$$

$$\rightarrow \angle z = arct\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi \quad per\ Re < 0 \ \rightarrow \ \angle z = arct(0) + \pi = \pi$$

<u>Esempio</u>: il seno cardinale è un segnale pari, questo lo possiamo osservare dallo spettro delle ampiezze e da quello delle fasi: lo spettro delle ampiezze ha valori positivi (così come per ogni segnale, sia esso pari o dispari) mentre lo spettro delle fasi ha valori che valgono solo $\pm\,\pi$ o 0.





A questo punto, avendo capito che X_k per funzioni pari sarà un coefficiente puramente reale, possiamo semplificarne la formula per ottenerlo poiché non avrà alcuna parte immaginaria; quindi applicando la definzione per ricavare i coefficienti X_k:

$$X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \xrightarrow{Formule\ di\ Eulero} X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t) - j\sin(2\pi k f_0 t)]dt$$

Dalla scomposizione di Eulero possiamo sostituire l'esponenziale come differenza di un coseno e di un seno immaginario. In questo modo otteniamo X_k in funzione di una parte reale (il coseno) e una immaginaria (seno):

$$Re\{X_K\} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]\,dt \qquad Im\,\{X_K\} = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\sin(2\pi k f_0 t)]\,dt$$

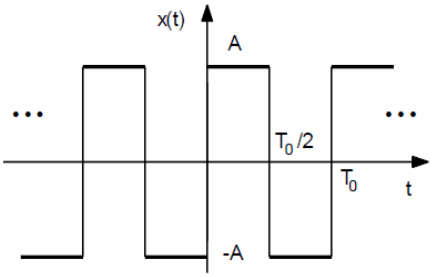
Sapendo che il **coseno è un segnale pari** possiamo non considerare la parte immaginaria: **il coefficiente X_k di un segnale pari è puramente reale** quindi possiamo $Im\{X_k\} = 0$ e quindi possiamo rimuoverlo:

$$X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t) - j\sin(2\pi k f_0 t)]dt \xrightarrow{Im\{X_k\}=0} \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt$$

Dato che $x(t)$ e $\cos(\cdot)$ sono due funzioni pari, quindi simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, possiamo anche scrivere:

$$\boxed{X_K = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt}$$

<u>Esempio: Onda quadra pari</u>



Supponiamo di avere il seguente treno di rect e di voler calcolare il coefficiente X_k. Il treno di rect in questione è un segnale che varia da A a -A ed è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, quindi è un segnale pari.

Possiamo allora calcolare il coefficiente X_k con la "formula semplificata" per i segnali pari:

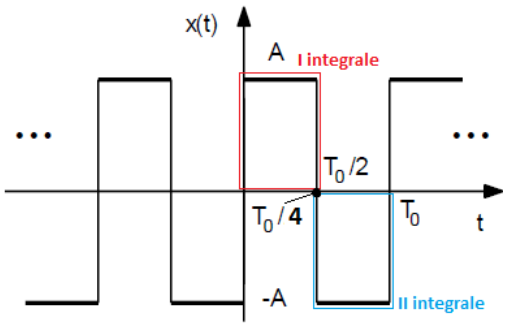
$$X_k = Re\{X_k\} = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt$$

Come possiamo osservare, il segnale tra 0 e $T_0/2$ varia: dobbiamo quindi "spezzare" l'integrale individuando due intervalli di integrazione: $[0\,, T_0/4]$ in cui $x(t) = A$ e $[T_0/4\,, T_0/2]$ in cui $x(t) = -A$.

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{0}^{\frac{T_0}{4}} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{4}} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]dt\right]$$

Sostituendo:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\left[\int_{0}^{\frac{T_0}{4}} A[\cos(2\pi k f_0 t)]dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} -A[\cos(2\pi k f_0 t)]dt\right]$$



A questo punto risolviamo l'integrale, ricordando che l'integrale di un coseno è il rapporto tra un seno avente lo stesso argomento e la derivata dell'argomento stesso:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\left[A\left[\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{(2\pi k f_0)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}} - A\left[\frac{\sin\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}\right)}{(2\pi k f_0)}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}}\right] = \frac{2A}{T_0}\left[\left[\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{(2\pi k f_0)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}} - \left[\frac{\sin(2\pi k f_0 t)}{(2\pi k f_0)}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}}\right]$$

Sostituiamo i valori d'integrazione:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\left(\frac{\sin\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}\right)}{(2\pi k f_0)} - \frac{\sin(0)}{(2\pi k f_0)}\right) - \left(\frac{\sin\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)}{(2\pi k f_0)} - \frac{\sin\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}\right)}{(2\pi k f_0)}\right)\right]$$

Semplifichiamo gli argomeni delle varie funzioni seno e rimuoviamo $\sin(0)$ poiché è pari a zero:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\left(\frac{\sin\left(\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)}{(2\pi k f_0)}\right) - \left(\frac{\sin(\pi k f_0 T_0)}{(2\pi k f_0)} - \frac{\sin\left(\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)}{(2\pi k f_0)}\right)\right]$$

Si noti che $\sin(\pi) = \sin(k\pi) = 0$ per cui possiamo rimuovere questo termine ottenendo così:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\left(\frac{\sin\left(\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)}{(2\pi k f_0)}\right) - \left(-\frac{\sin\left(\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right)}{(2\pi k f_0)}\right)\right] \rightarrow X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)}\right]$$

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)}\right] = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)}\right]$$

A questo punto possiamo anche semplificare il rapporto tra T_0 ed f_0 dato che l'uno è il reciproco dell'altro:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k f_0 T_0\right)}{(2\pi k f_0)}\right] = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{(2\pi k f_0)}\right] = \frac{2A}{T_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{(\pi k f_0)}\right] = 2A\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{T_0(2\pi k f_0)}\right] = 2A\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{(2\pi k)}\right]$$

$$X_k = 2A\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{(2\pi k)}\right] = 2A\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)}\right]$$

Per ricavare una formula notevole, ovvero quella che ci sarà il seno cardinale ragioniamo come segue: avere un 2 a moltiplicare equivale ad avere un 2 a dividere al denominatore, per cui sposteremo il 2 a moltiplicare l'ampiezza "A" a dividere il denominatore.
(difatti, quando abbiamo un termine a dividere al denominatore, questo passa a moltiplicare il numeratore, stiamo praticamente effettuando il procedimento inverso); così facendo otteniamo:

$$X_k = 2A\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)}\right] = A\left[\frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{(2k\pi)}{2}}\right] = A\, sinc\left(\frac{k}{2}\right)$$

Dalla definizione di sinc sappiamo che questo si annulla per valori interi di "k" dato che in questo caso otterremmo praticamente dei multipli di π che annullerebbe il seno che definisce proprio il seno cardinale:

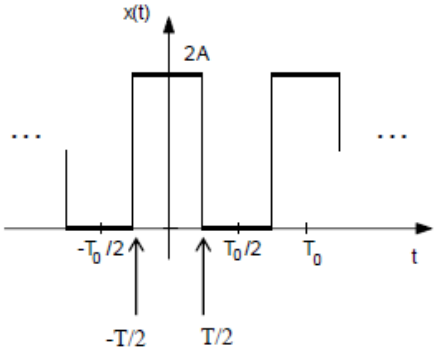
$$sinc(k) = \left[\frac{2\sin(k\pi)}{k\pi}\right]$$

Questo significa che, in questo caso, quando k è pari allora il valore di $k/2$ sarà intero dato che "k" sarà divisibile per due, quindi il segnale si annulla; se invece k è dispari allora il valore del seno cardinale non si annulla: l'argomento del seno che lo approssima assume valori multipli a $\pi/2$.

Quando $k = 0$ il seno cardinale vale uno:

$$sinc(0) = \frac{\sin(0)}{\pi\alpha} = 1$$

Possiamo anche affrontare un ragionamento analogo:



Consideriamo il segnale $x(t)$ come un treno di impulsi cui ampiezza non sia "A" ma doppia: 2A:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2A\, rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

Questo segnale è chiaramente differente dal segnale che ci è stato dato da consegna: rispetto a quest'ultimo esso è "sollevato" poiché viene moltiplicato per un'ampiezza doppia, che porta il segnale a "sollevarsi", difatti la massima ampiezza sarà $2A$ (e non A) e la minima sarà 0 (e non $-A$).

A questo punto allora è possibile ottenere il segnale precedente $y(t)$ andando ad "abbassare" il grafico del nuovo segnale $x(t)$ di una quantità pari ad "A": così facendo otteniamo il segnale di prima, un treno di rect aventi ampiezza che varia tra A e $-A$.

Quello che facciamo è praticamente una somma punto-a-punto dei due grafici: consideriamo il grafico del nuovo segnale $x(t)$ e sottriamo ad esso un segnale costante "A".

Nell'esempio a lato possiamo osservare tre punti presi giusto per esempio:

→ Il punto (1) è ottenuto sommando -A (o, dualmente, sottraendo A) al valore del segnale x(t) in questo punto: quest'ultimo vale $x(1) = 2A$, quindi il risultato sarà

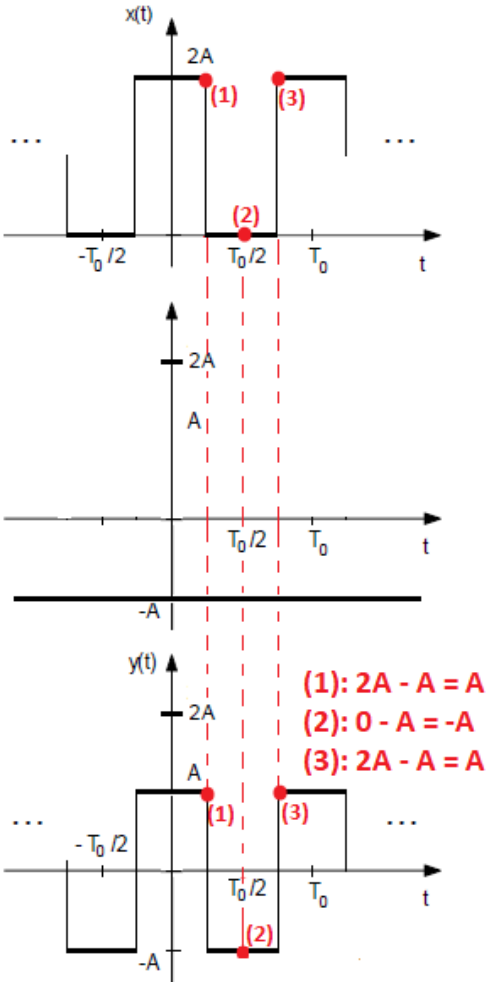
$$y(t) \triangleq x(t) - A \rightarrow y(1) = 2A - A = A$$

→ Il punto (2) è ottenuto sommando -A (o, dualmente, sottraendo A) al valore del segnale x(t) in questo punto: quest'ultimo vale $x(2) = 0$, quindi il risultato sarà

$$y(t) \triangleq x(t) - A \rightarrow y(2) = 0 - A = -A$$

→ Il punto (3) è ottenuto sommando -A (o, dualmente, sottraendo A) al valore del segnale x(t) in questo punto: quest'ultimo vale $x(3) = 2A$, quindi il risultato sarà

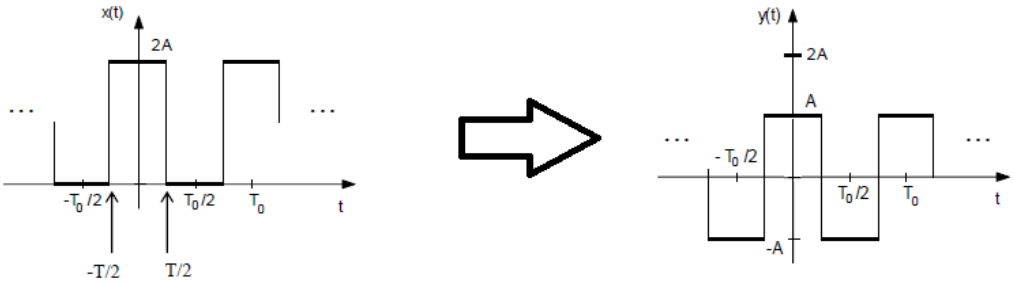
$$y(t) \triangleq x(t) - A \rightarrow y(3) = 2A - A = A$$



Le somme punto-a-punto sono praticamente identiche poiché si tratta di un segnale periodico. Sommando tutti i punti otteniamo la nuova funzione:

$$y(t) = x(t) - A$$

Che è praticamente la funzione treno di impulsi di ampiezza "A" dell'esempio precedente:



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) \qquad y(t) = x(t) - A$$

Se volessimo trovare le componenti armoniche nel dominio della frequenza del segnale $y(t)$, i vari Y_k , avremo praticamente una componente data dalla componente armonica di $x(t)$: X_k e quella di $-A$, ovvero un'armonica a frequenza costante A_o.

$$y(t) = x(t) - A \quad \rightarrow \quad Y_k = X_k - A$$

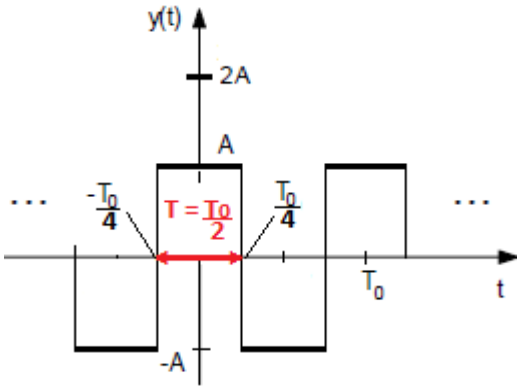
Quindi per $k = 0$ avremo un'armonica formata da $X_0 - A_0$ mentre per tutte le altre armoniche avremo solo il contributo di X_k perché "A" è un segnale costante e in quanto tale è formato da una sola armonica (quella in f_0):

$$Y_k = \begin{cases} X_0 - A_0 & per\ k = 0 \\ X_k & per\ k \neq 0 \end{cases}$$

Siccome per un Rect vale sempre che il suo sviluppo in serie di Fourier è dat da un seno cardinale del tipo:

$$X_k = a\delta\ sinc(k\delta)$$

Dove "a" è l'ampiezza e δ è il duty-cycle, ottenibile come rapporto tra la largezza della base del rect T e il periodo T_0: $\delta = T/T_0$



In questo caso il duty-cycle è dato da:

$$\delta = \frac{T}{T_0} = \frac{\frac{T_0}{2}}{T_0} = \frac{1}{2}$$

Mentre l'ampiezza è quella del segnale $x(t)$, ovvero 2A.

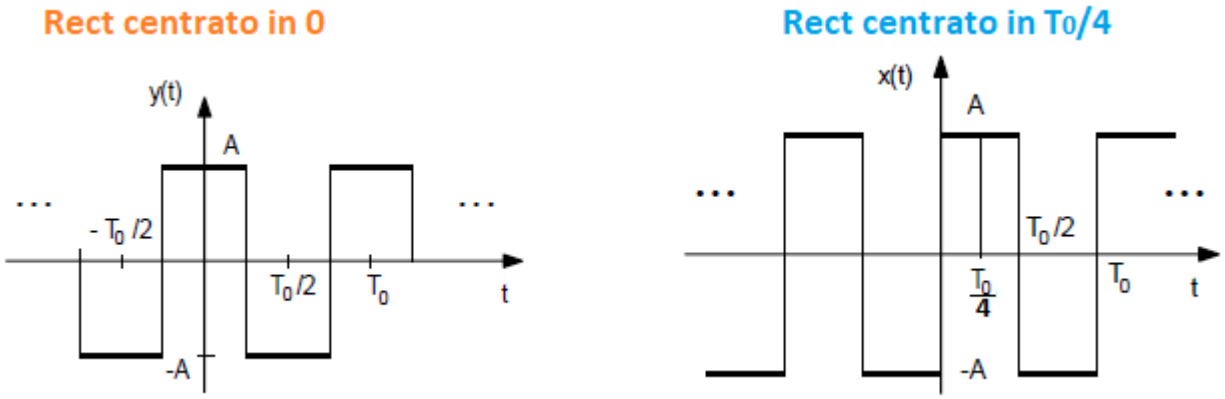
Sostituendo nella formula otteniamo:

$$X_k = 2A * \frac{1}{2}\ sinc\left(k * \frac{1}{2}\right) = A\ sinc\ \left(\frac{k}{2}\right)$$

Traformata di un segnale dispari

Possiamo dimostrare che **se il segnale nel tempo è dispari, quindi se è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani, allora il suo spettro è formato da funzioni X_k dispari e puramente immaginari**.

NB! È bene capire però che non potremo mai osservare delle differenze notevoli di un segnale pari ed uno dispari osservando lo spettro delle ampiezze di quest'utlimi; si consideri il segnale rect, nello specifico se ne considerino due versioni: uno centrato in 0 ed uno centrato in un $T_0/4$ come rappresentato in figura:



Applicando le definizioni di segnali pari e dispari possiamo osservare che:

→ Il segnale Rect centrato in 0 è un segnale pari perché è simmetrico rispetto all'asse verticale

→ Il segnale Rect centrato in $T_0/4$ è un segnale dispari poiché è simmetrico rispetto all'origine

Questo potrebbe sembrarci paradossale dato che si tratta di due segnali praticamente identici: si tratta dello stesso rect, l'unica differenza sta nel fatto che i segnali sono sfasati; il secondo rect infatti si è ottenuto attraverso uno sfasamento che ha portato il suo centro da 0 a $T_0/4$.

Effettivamente ciò è quello che accade quando analizziamo gli spettri: lo spettro delle ampiezze non ci da informazioni circa la parità o la disparità del segnale perché analizza le ampiezze, ovvero i moduli del segnale; la reale differenza risiede nello spettro delle fasi in cui ci possiamo accorgere che un segnale è pari o dispari a seconda dell'andamento; ed effettivamente abbiamo constatato che preso un segnale periodico qualunque, è possibile considerare pari o dispari quest'ultimo a seconda del suo sfasamento.

Dato che X_k per funzioni dispari sarà un coefficiente puramente immaginario, semplifichiamo la formula, applicando la definzione per ricavare i coefficienti X_k otteniamo:

$$X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \xrightarrow{Formule\ di\ Eulero} X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t) - j sin(2\pi k f_0 t)]dt$$

Dalla scomposizione di Eulero possiamo sostituire l'esponenziale come differenza di un coseno e di un seno immaginario:

$$Re\{X_K\} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t)]\,dt \qquad Im\,\{X_K\} = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[sin(2\pi k f_0 t)]\,dt$$

Dato **il coefficiente X_k di un segnale dispari è puramente immaginario** possiamo non considerare la parte reale, ovvero il coseno: $Re\{X_k\} = 0$:

$$X_K \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[\cos(2\pi k f_0 t) - j sin(2\pi k f_0 t)]dt \xrightarrow{Re\{X_k\}=0} \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[-j sin(2\pi k f_0 t)]dt$$

Dato che $x(t)$ e $\cos(\cdot)$ sono due funzioni pari, quindi simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, possiamo anche scrivere:

$$\boxed{X_K = \frac{-j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[sin(2\pi k f_0 t)]dt = \frac{-2j}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[sin(2\pi k f_0 t)]dt}$$

Quindi ricapitolando, per uno spettro di un segnale dispari:

- Non si nota particolarmente alcuna differenza con i segnali pari nello spettro delle ampiezzei, in cui l'andamento del segnale è caratterizzato dai moduli, quindi da valori reali positivi, essendo dedotti dall'operazione di modulo: $|X_K| \geq 0$
- Tuttavia la differenza con i segnali pari si nota nelle fasi, in cui possiamo realizzare che i valori che ogni coefficiente può assumere saranno pari a $\pm\pi/2$ poiché:

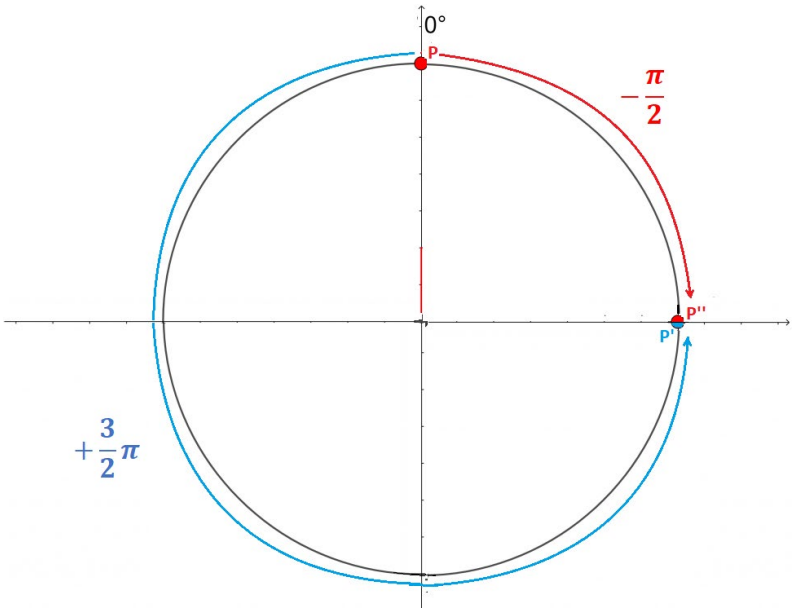
$$\rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad per\ Im > 0 \ \rightarrow \angle z = arctg\left(\frac{Im}{0}\right) = arctg(\infty) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\rightarrow \angle z = arct\left(\frac{Im}{Re}\right) + \pi \quad per\ Im < 0 \ \rightarrow \ \angle z = arct\left(\frac{Im}{0}\right) + \pi = arctg(\infty) + \pi = \frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$$

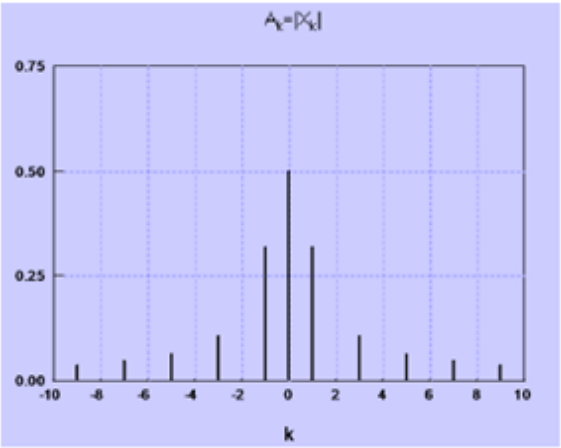
Come facciamo a dire che $\frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$?

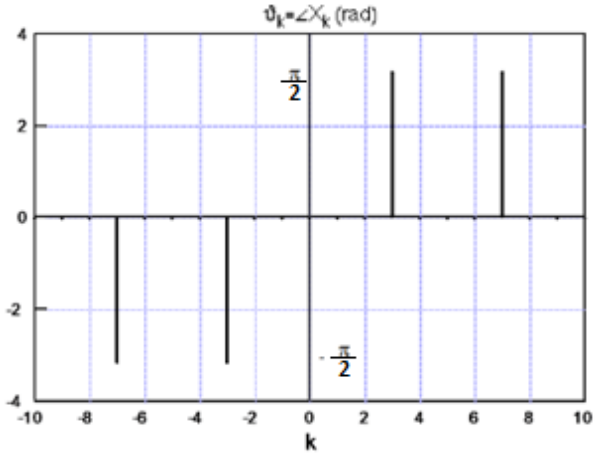
Questa è una proprietà legata alla trigonometria: se si parte dal punto P (in cui rotazione è 0) e si effettua una rotazione di $\frac{3}{2}\pi$ in senso antiorario si raggiunge il punto P' situato in $\frac{3}{2}\pi$

Tuttavia, si ottiene praticamente lo stesso risultato se, anziché effettuare una rotazione in senso orario la si effettua in senso antiorario di $-\frac{\pi}{2}$ partendo dal medesimo punto P: viene raggiungo il punto P'' sistuato in $-\frac{\pi}{2}$ che coincide praticamente con il punto P'. Quindi possiamo concludere che i due valori sono equivalenti dal punto di vista della rotazione.



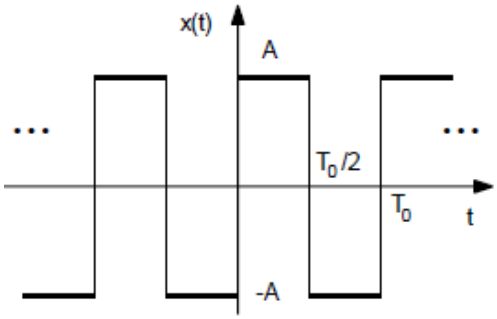
Quindi il tipico spettro di un segnale dispari prevede quantità solo positive nello spettro delle ampiezze (così come ogni segnale) ed uno spettro limitato tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ in cui la fase può assumere solo uno di questi due valori; in figura è presente un esempio di uno spettro di un possibile segnale dispari:





Esempio: Onda quadra dispari

Supponiamo di avere adesso un treno di rect centrato in $T_0/4$, per cui un segnale che sarà simmetrico rispetto all'origine e quindi un treno di rect dispari e supponiamo di voler calcolare il coefficiente X_k. Possiamo basarci sulla forma semplificata della relazione di X_k, che ci tornerà un risultato puramente immaginario:



$$X_K = \frac{-j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)[sin(2\pi k f_0 t)]dt = \frac{-2j}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[sin(2\pi k f_0 t)]dt$$

Come possiamo osservare, tra $0\ e\ T_0/2$ il segnale $x(t)$ assume un valore costante pari ad A (non sarà quindi necessario dover suddividere questo intervallo in sottointervalli poiché il segnale rimane fisso e costante, a differenza del caso di onda quadra pari); per cui sostituiamo tale valore:

$$X_k = \frac{-2j}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)[\sin(2\pi k f_0 t)]dt = \frac{-2j}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} A[sin(2\pi k f_0 t)]dt \ = -j\frac{2A}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}[sin(2\pi k f_0 t)]dt$$

A questo punto risolviamo l'integrale ricordando che l'integrale di un seno è pari al rapporto tra un coseno negativo avente lo stesso argomento e la derivata dell'argomento stesso:

$$X_k \ = -j\frac{2A}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}[sin(2\pi k f_0 t)]dt \ = -j\frac{2A}{T_0}\left[-\frac{cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} = -j\frac{2A}{T_0 2\pi k f_0}[-cos(2\pi k f_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

Cambiamo il segno e semplifichiamo il termine a moltiplicare ricordando che T_0 ef f_0 sono recicproci e quindi si possono semplificare :

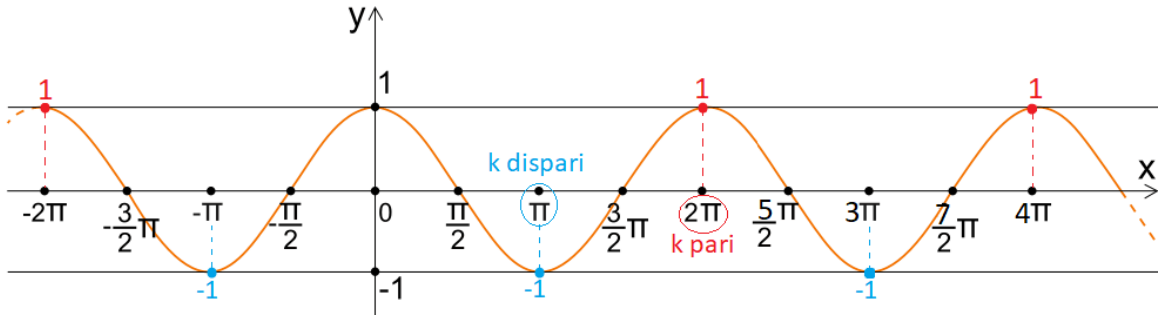
$$X_k = -j\frac{2A}{T_0 2\pi k f_0}[-cos(2\pi k f_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} = j\frac{A}{\pi k}[cos(2\pi k f_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

Calcoliamo il coseno nell'ìintervallo indicato dall'integrale (ricordando che $\cos(0) = 1$):

$$X_k = j\frac{A}{\pi k}[cos(2\pi k f_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} = j\frac{A}{\pi k}\left[cos\left(2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}\right) - \cos(0)\right] = j\frac{A}{\pi k}[cos(\pi k f_0 T_0) - 1]$$

$$X_k = j\frac{A}{\pi k}[cos(\pi k) - 1]$$

Si noti che $\cos(\pi) = 1$, quindi il coseno varia al variare di k: se esso è pari allora $\cos(k\pi) = 1$ se invece è dispari troveremo che $\cos(k\pi) = -1$; quindi avremo che $\cos(k\pi) = \pm 1$. Vediamo questo risultato come la potenza di -1: $(-1)^k$, in questo modo se k è $pari$ allora $(-1)^k = 1$ mentre se k è $dispari$ allora $(-1)^k = -1$



Per cui scriveremo:

$$X_k = j\frac{A}{\pi k}[cos(\pi k) - 1] = j\frac{A}{\pi k}[(-1)^k - 1] \ \rightarrow X_k = \begin{cases} 0 & per\ k\ pari \\ \dfrac{2A}{j\pi k} & per\ k\ dispari \end{cases}$$

Questo significa che per tutti i "k" pari si annulla mentre per tutti i "k" dispari mantiene un certo valore:

$$X_k = \ j\frac{A}{\pi k}[(-1)^k - 1] \ \xrightarrow{k\ dispari} X_k = \ j\frac{A}{\pi k}[-1 - 1] = -\frac{j2A}{\pi k} \ = -\frac{j2A\ (j)}{\pi k\ (j)} = -\frac{2A\ (-1)}{j\pi k} = \frac{2A}{j\pi k}$$

Abbiamo moltiplicato e diviso per (j), spostandolo così al denominatore e rimovendo il segno negativo.

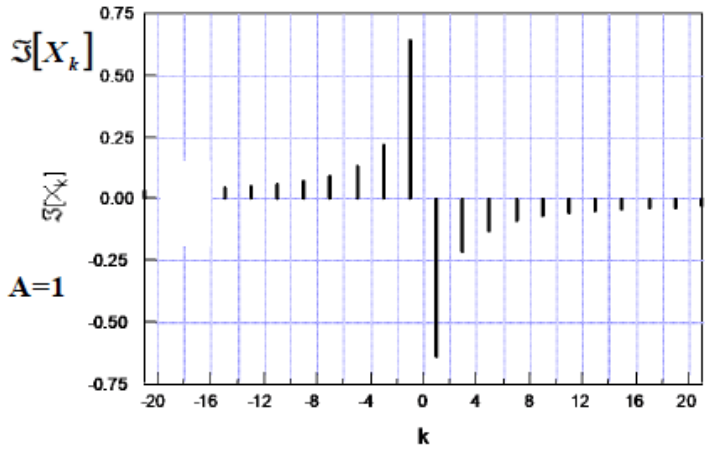
Come possiamo osservare, il modulo delle fasi è limitato tra $\pm\pi/2$: X_k è un numero puramente immaginario per cui dovremo ricavare l'arcotangente cui argomento è $\pm\infty$ il segno dell'arcotangente, e quindi quello della fase, dipende dal valore di "k":

$$\angle X_k = arctg\left(\frac{Im\{X_k\}}{Re\{X_k\}}\right) = arctg\left(\frac{\frac{2A}{\pi k}}{0}\right) = \begin{cases} arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} & per\ k > 0 \\ arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2} & per\ k < 0 \end{cases}$$

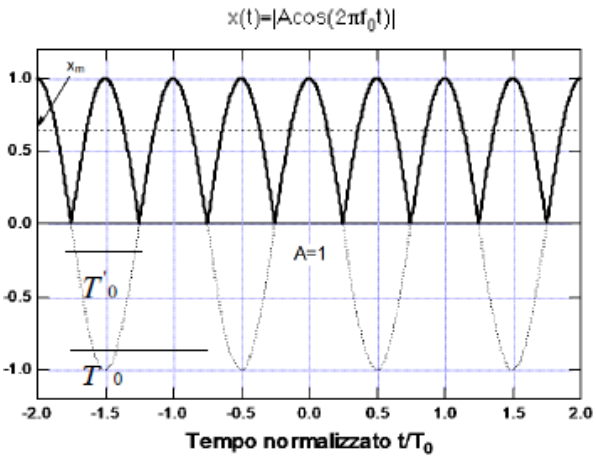
Per quanto riguarda il modulo possiamo confermare che esso sia sempre positivo e che diminuisce all'aumentare di k, dato che esso si trova al denominatore. Quindi i moduli diminuiscono con un andamento pari ad 1/k

$$|X_k| = \left|\frac{2A}{j\pi k}\right| \qquad X_k \to 0\ se\ k \to \infty$$

D'altronde questo è l'andamento che assume la parte immaginaria di X_k rappresentata nel grafico: sia per $k\ positivi$ che per $k\ negativi$ si può osservare un'attenuazione della parte immaginaria, che tende a zero man mano che k aumenta.
L'andamento delle ampiezze è simile all'andamento di $Im\{X_k\}$, con l'unica differenza che lo spettro delle ampiezze è sempre e solo positivo dato che si ottiene con il passaggio al modulo di X_k

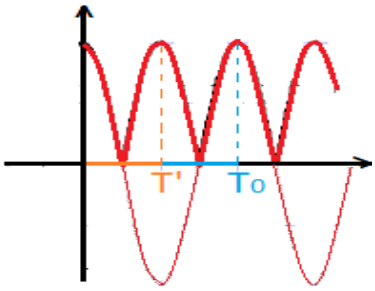


Esempio: il segnale cosinusoidale raddrizzato a doppia semionda



Il segnale cosinusoidale raddrizzato è un coseno cui la parte negativa viene ribaltata, in questo modo si ottiene un segnale sempre positivo che varia tra 0 e 1 (a meno di amplificazioni "A"), a differenza del segnale cosinusoidale che varia da -1 a 1.

Questi segnali sono, ad esempio, i segnali (chiamati "ripple") in uscita dei raddrizzatori a doppia semionda, presenti negli alimentatori dei dispositivi affinché possano ribaltare la parte negativa della tensione (quindi della corrente) sinudoidale proveniente dalla rete in modo che, grazie anche all'azione di altri componenti, al dispositivo arrivi una tensione continua.



Dal grafico notiamo subito che il coseno ribaltato subisce una riduzione del periodo con il quale si ripete: essendoci il ribaltamento **il periodo si dimezza**, per cui se tale segnale è stato ottenuto da un coseno di periodo T_0 allora il coseno raddrizzato avrà un periodo pari a $T_0' = T_0/2$.

Questo significa che la frequenza di questo segnale raddoppia, dato che $f_0{}' = 1/T_0{}'$; d'altronde, come si può notare dal grafico, è facile pensare che se il coseno compie 250 cicli al secondo allora il coseno raddrizzato che vien fuori dal ribaltamento della parte negativa di quest'ultimo compierà 500 cicli (poiché si alternerà tra il suo valore massimo ed il suo valore minimo con il doppio della rapidità).

La forma analitica di questo segnale prevede il coseno in valore assoluto, in modo che esso possa assumere solo valori positivi:

$$x(t) = A|\cos(2\pi f_0 t)|$$

Si noti che il segnale coseno è un segnale pari e con esso anche la sua versione raddrizzata poiché il segnale è simmetrico rispetto all'asse verticale (possiamo d'altronde notarlo anche dal grafico della funzione), questo significa che è possibile ricavarne i coefficienti X_k attraverso la funzione semplificata:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_o t)\,dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_o t)\,dt$$

In questo caso avremo un periodo $T_0' = \frac{T_0}{2}$ e una frequenza $f_0' = 2f_0$ per cui sostituendo otteniamo:

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi k f_o t)\,dt \;\rightarrow\; X_k = \frac{2}{T_0{}'}\int_0^{T_0'/2} [A\cos(2\pi f_o t)]\cos(2\pi k f_o{}' t)\,dt$$

La formula chiaramente va applicata con l'opprtuno periodo del segnale, in questo caso il primo coseno è il segnale $x(t)$, che al momento trascuriamo, mentre il secondo coseno è quello che interessa la formula del coefficiente di Fourier X_k per segnali pari, in questo caso la frequenza da sostituire sarà $f_o{}'$ dato che è la frequenza del segnale cosinusoidale raddrizzato; stessa cosa vale per gli estremi di integrazione dell'integrale: in questo caso deve essere inserito $T_0' = T_0/2$, che è il periodo del coseno raddrizzato.

Questo perché quando andiamo a sviluppare in serie di Fourier, il periodo e la frequenza di X_k che vengono raffigurati nella formula sono quelli del segnale di cui si vuole ricavare il coefficiente

$$X_k = \frac{2A}{T_0/2}\int_0^{\frac{\frac{T_0}{2}}{2}} \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi k(2f_o)t)\,dt = \frac{4A}{T_0}\int_0^{T_0/4} \cos(2\pi f_o t)\cos(4\pi k f_o t)\,dt$$

Si noti che, dalla formula trigonometrica di somma, il prodotto di due coseni si può vedere come una somma tra due coseni cui argomenti sono la somma e la differenza degli argomenti dei singoli coseni:

$$\boxed{cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}}$$

Per cui nel nostro caso:

$$X_k = \frac{4A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} cos(2\pi f_o t)\cos(4\pi k f_o t)\,dt = \frac{4A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} \frac{cos(2\pi f_o t + 4\pi k f_o t) + \cos(2\pi f_o t + 4\pi k f_o t)\,1}{2}\,dt$$

$$X_k = \frac{4A}{T_0}\int_0^{T_0/4} \frac{\cos\,[2\pi f_o t(1+2k)] + \cos[2\pi f_o t(1-2k)]}{2}\,dt$$

Portiamo fuori dal segno dell'integrale 1/2 che viene semplificato con il 4 del numeratore del coefficiente che moltiplica l'integrale:

$$X_k = \frac{4A}{2T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos[2\pi f_o t(1+2k)] + \cos[2\pi f_o t(1-2k)]\,dt$$

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos[2\pi f_o t(1+2k)] + \cos[2\pi f_o t(1-2k)]\,dt$$

Risolviamo a questo punto l'integrale, dato che si tratta dell'integrale somma, per la linearità dell'integrale lo suddividiamo nella somma di due integrali:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos[2\pi f_o t(1+2k)]dt + \int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos[2\pi f_o t(1-2k)]\,dt$$

Ricordando che l'integrale di un coseno è pari al rapporto tra il seno avente il medesimo argomento e la derivata dell'argomento stesso possiamo risolvere i due integrali:

$$X_k = \frac{2A}{T_0}\left\{\left[\frac{sin[2\pi f_o t(1+2k)]}{2\pi f_o(1+2k)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}} + \left[\frac{sin[2\pi f_o t(1-2k)]}{2\pi f_o(1-2k)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}}\right\}$$

A questo punto, prima di sostituire gli estremi di integrazione, andiamo a semplificare il 2 al denominatore di entrambi gli argomenti dell'integrale con il 2 del numeratore del parametro a moltiplicare e, insieme ad essi, le frequenze f_0 presenti al denominatore degli argomenti con T_0 al denominatore del parametro a moltiplicare, essendo questi reciproci:

$$X_k = A\left\{\left[\frac{sin[2\pi f_o t(1+2k)]}{\pi(1+2k)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}} + \left[\frac{sin[2\pi f_o t(1-2k)]}{\pi(1-2k)}\right]_0^{\frac{T_0}{4}}\right\}$$

A questo punto sostituendo otteniamo:

$$X_k = A\left\{\left[\frac{sin\left[2\pi f_o \frac{T_0}{4}(1+2k) - \sin(0)\right]}{\pi(1+2k)}\right] + \left[\frac{sin\left[2\pi f_o \frac{T_0}{4}(1-2k) - \sin(0)\right]}{\pi(1-2k)}\right]\right\}$$

Ricordando che $\sin(0) = 0$ rimuoviamo quest'utlimo e semplifichiamo ciò che si trova all'argomento del seno (il 2 con il 4 ed f_0 con T_0); inoltre portiamo fuori il π dal denominatore delle due funzioni seno e lo poniamo al denominatore di A:

$$X_k = A\left\{\left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right]}{\pi(1+2k)}\right] + \left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]}{\pi(1-2k)}\right]\right\} = \frac{A}{\pi}\left\{\left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right]}{(1+2k)}\right] + \left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]}{(1-2k)}\right]\right\}$$

$$X_k = \frac{A}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{(1+2k)}\ sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right]\right] + \left[\frac{1}{(1-2k)} sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]\right]\right\}$$

Facciamo adesso la seguente considerazione: osserviamo le due funzioni seno al variare di k

→ k = 0 $\quad sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

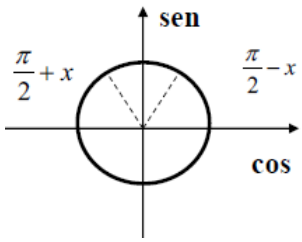
→ k = 1 $\quad sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \qquad sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

→ k = 2 $\quad sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1 \qquad sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$

→ k = 3 $\quad sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) = -1 \qquad sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = \sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = -1$

→ k = 4 $\quad sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left(\frac{9}{2}\pi\right) = 1 \qquad sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = \sin\left(-\frac{7}{2}\pi\right) = 1$

Come possiamo notare, entrambe le due funzioni seno continuano ad oscillare tra 1 e -1; quindi entrambi sono pari a $(-1)^k$ poiché per $k\ pari$ essi valgono 1 mentre per $k\ dispari$ valgono -1:



$$sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = (-1)^k$$

Quindi sostituendo nella formula dedotta otteniamo:

$$X_k = \frac{A}{\pi}\left\{\left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right]}{(1+2k)}\right] + \left[\frac{sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]}{(1-2k)}\right]\right\} = \frac{A}{\pi}\left\{\left[\frac{(-1)^k}{(1+2k)}\right] + \left[\frac{(-1)^k}{(1-2k)}\right]\right\}$$

$$X_k = \frac{A(-1)^k}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{(1+2k)}\right] + \left[\frac{1}{(1-2k)}\right]\right\} = \frac{A(-1)^k}{\pi}\left\{\frac{(1-2k)+(1+2k)}{1-4k^2}\right\} = \frac{A(-1)^k}{\pi}\left[\frac{2}{1-4k^2}\right]$$

$$X_k = (-1)^k\ \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{1-4k^2}\right]$$

Osservando questo coefficiente, possiamo già affermare che l'ampiezza delle armoniche decrescono molto più velocemente dei segnali visti fino ad ora, questo perché "k" si trova al denominatore ed ha un andamento al quadrato, il che porta il segnale a decrescere in maniera molto veloce.

Numero massimo di armoniche per approssimare un segnale

Dagli esempi visti fino ad ora possiamo affermare dunque che vi sono dei segnali cui armoniche decrescono rapidamente ed altri in cui la decrescita è più lenta. Uno di quest'ultimi casi è proprio il treno di onde quadre, che è formato da dei rect, che sono segnali che variano istantemente nel tempo. A differenza di questo segnale, il coseno raddrizzato decresce più lentamente: l'onda impiega un certo tempo di salita/di discesa prima di spostarsi da un picco all'altro; in questo caso le armoniche decrescono più lentamamente.

Ci siamo posti questo problema per far seguito ad un quesito: quando andiamo a ricavare lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale, lo esprimiamo teoricamente in funzione di infinite armoniche, ovvero come somma di infiniti termini cosinudoidali, attraverso l'equazione di sintesi:

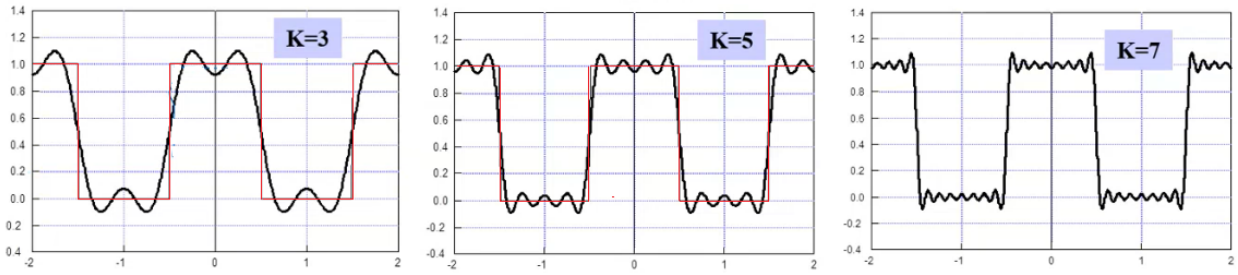
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

Tuttavia, quando deve essere ricostruito il segnale di partenza a partire dalle armoniche che lo formano è impossibile considerare tutte le infinite armoniche; sarà necessario valutare un certo numero massimo "K" di armoniche per la ricostruzione del segnale temporale, quindi il segnale che si ottiene dalla ricostruzione sarà necessariamente un'approssimazione del segnale orinale $x(t)$ [dato che non stiamo considerando tutte le sue infinite armoniche ma solo le prime K]. Quello che si ottiene dunque è il segnale approssimato:

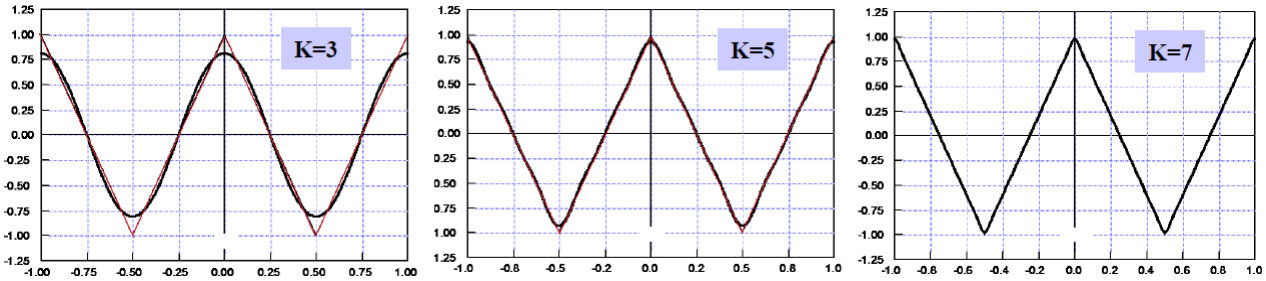
$$x_k(t) = \sum_{k=-K}^{+K} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

Quello che ci chiediamo allora è: **quale dovrebbe essere il numero massimo K di armoniche affinchè la ricostruzione risulti essere fedele al segnale originale?**

- Quando un **segnale varia molto velocemente nel tempo** è necessario un **numero maggore di armoniche** per approssimarlo con un segnale simile. Nel caso di onda quadra, serve un numero "K" di armoniche elevato affinché $x_k(t)$ risulti fedele al segnale originale $x(t)$:



- Quando un **segnale varia molto lentamente nel tempo, il numero di armoniche da dover considerare per ricostruire il segnale è più ridotto** perché possiamo riuscire ad ottenere comunque un segnale ben approssimato. Nel caso di onda triangolare, siccome il segnale varia più lentamente, si può ottenere una buona approssimazione a partire da un numero minore di armoniche:



Le armoniche dei segnali più lenti decrescono più velocemente perché le armoniche per valori di k elevati **influiscono poco** sull'approssimazione del segnale; differente è la situzione per i **segnali cui variazione è più ripida**: questi **hanno bisogno di più armoniche** per essere approssimati ed è per questo motivo che la decrescita delle armoniche è più contenuta, poiché queste **influiscono di più** sull'approssimazione del segnale.

Chiaramente, **maggiore è il numero di armoniche che si devono utilizzare per approssimare il segnale e maggiore sarà la banda necessaria a trasmettere quest'ultimo**: un segnale che ha bisogno di 7 armoniche per essere trasmesso con una buona approssimazione, supponendo che la frequenza fondamentale sia $f_0 = 1000\ Hz$ ha bisogno di una banda pari ad almeno $B = 7000\ Hz$ per essere trasmesso senza alcuna perdita; dualmente, un segnale che varia più lentamente avrà bisogno di una banda minore, a parità di frequenza portante, se bastano 3 armoniche avremo bisogno di una banda $B = 3000Hz$

La banda ha un certo costo: il canale (sia esso l'etere o un qualsiasi altro tipo di canale) è suddiviso in "blocchi" a varie frequenze, per cui è necessario comprare una serie di blocchi per una banda maggiore.

Test Socrative: Serie di Fourier 1

1. **Un segnale periodico di periodo T può essere scomposto**
   - **A.** Nella somma di segnali cosinusoidali a frequenza pati a 1/T
   - **B.** In un segnale cosinusoidale a frequenza 1/T
   - **C.** In un segnale cosinusoidale a frequenza 1/T + segnali cosinusoidali a frequenza multipla di 1/T
   - **D.** In un segnale continuo + un segnale cosinusoidale a frequenza 1/T + segnali cosinusoidali a frequenza multipla di 1/T

Risposta esatta: D

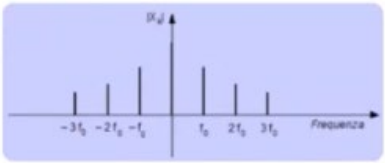
2. **Un segnale costante nel tempo è un segnale**
   - **A.** A frequenza f=1/T
   - **B.** A frequenza f = 0

Risposta esatta: B

3. **Lo spettro di un segnale periodico contiene sicuramente infinite armoniche**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: B → Non è detto: il segnale si scompone in infinite armoniche ma alcune di esse possono essere nulle (in alcuni casi può accadere che $X_k = 0$)

4. **Lo spettro in figura è sicuramente**
   - **A.** Lo spettro di un segnale aperiodico
   - **B.** Lo spettro di un segnale periodico
   - **C.** Può essere lo spettro di un segnale periodico in funzione delle sue armoniche



Risposta esatta: B → si tratta di uno spettro a righe quindi deve essere quello di un segnale periodico

5. **Lo spettro delle ampiezza di un segnale $x(t)$ rappresenta le ampiezza e le frequenze dei segnali cosinusoidali la cui somma rappresenta il segnale $x(t)$**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A

6. **Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale "aperiodico" $x(t)$ permette di rappresentare il segnale nel dominio della frequenza**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: B → Lo sviluppo in serie di Fourier permette la rappresentazione in frequenza dei soli segnali periodici (per i segnali aperiodici serve la trasformata di Fourier, come vedremo in seguito)

7. **Se i coefficienti di Fourier nello sviluppo in serie di uns egnale $x(t)$ sono reali, lo spettro delle fasi del segnale è nullo o pigreco**
   - **C.** Vero
   - **D.** Falso

Risposta esatta: A → Si tratta di un segnale pari, che presenta la sola parte reale dello sviluppo in serie di Fourier; avendo una parte immaginaria nulla la fase è data da $arctg(0) = 0$ quando la parte reale è positiva e da $arctg(0) + \pi = \pi$ quando la parte reale è negativa.

8. **La fase di un numeto complesso Z, se Re{Z}<0 è pari a**
   - **A.** $arctg\left(\frac{Im\{Z\}}{Re\{Z\}}\right)$
   - **B.** $arctg\left(\frac{Im\{Z\}}{Re\{Z\}}\right) + \pi$

Risposta esatta: B

9. **Un segnale $x(t)$ è pari se $x(t) = x(-t)$**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A

10. **Un segnale $x(t)$ pari ha spettro X_k appartenente ai reali**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A → Si tratta della formula semplificata di $X_k$per segnali pari

11. **Lo spettro unilatero delle ampiezze per un segnale $x(t)$ è una funzione pari delle frequenze**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: B → Lo spettro unilatero non può essere una funzione pari: esso prevede solo la rappresentazione per frequenze positive, quindi non mostra alcuna simmetria rieptto all'asse verticale dato che non vi è alcuna parte negativa.

12. **Lo spettro bilatero delle ampiezze per un segnale $x(t)$**
   - **A.** È pari ovvero $|X_k| = |-X_k| \rightarrow |X_k| = |X_{-k}|$
   - **B.** È dispari, ovvero $|X_k| = -|X_k| \rightarrow |X_k| = -|X_{-k}|$

Risposta esatta: A

13. **Lo spettro bilatero delle fasi di un segnale $x(t)$**
   - **A.** È pari ovvero $\angle X_k = \angle -X_k \rightarrow \angle X_k = \angle X_{-k}$
   - **B.** È dispari ovvero $\angle X_k = -\angle X_{-k}$

Risposta esatta: B

14. **La formula: $\int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t)cos(2\pi k f_o t)dt$ rappresenta**
   - **A.** X_n
   - **B.** La parte reale di X_k
   - **C.** La parte immaginaria di X_n

Risposta esatta: B

15. **Un segnale $x(t)$**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: B

3. La trasformata di Fourier

Analisi dei segnali aperiodici: la trasformata di Fourier.

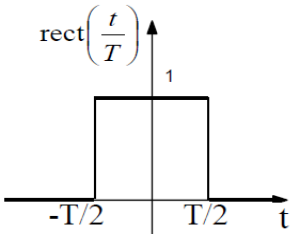
Abbiamo fino ad ora trattato l'analisi di Fourier per i segnali periodici, ovvero quei segnali che si ripetono uguali a sé stessi in un certo periodo "T". Per questi tipi di segnali esiste lo **sviluppo in serie di Fourier,** che ci permette di scomporre il segnale nelle armoniche che lo compongono, ovvero in una serie di segnali cosinusoidali aventi una frequenza multipla (intera) della frequenza portante "f_0".

Tuttavia, nella realtà è difficile trovarsi a lavorare con dei segnali periodici: i segnali con cui abbiamo a che fare ogni giorno sono dei **segnali aperiodici**, che non si ripetono uguali a sé stessi; questi segnali sono trattati nel dominio della frequenza mediante l'operatore di **Trasformata di Fourier** (e non tramite la serie di Fourier utilizzata per i segnali periodici!), che si rifà ai concetti dello sviluppo in serie di Fourier.

Attraverso le trasformate di Fourier, mediante un apposito teorema che studieremo, potremo rappresentare anche i segnali periodici, quindi in realtà lo strumento che useremo sarà la **trasformata di Fourier** e non la serie di Fourier, pur sfruttando però tutte le conoscenze su quest'ultima acquisite finora.

Interpretazione della trasformata di Fourier.

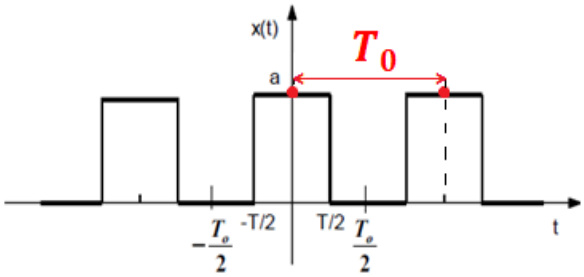
Per meglio capire il concetto di trasformata di Fourier ci riferiamo ad un esempio. Consideriamo il segnale $rect(t/T)$ visto fino ad ora:



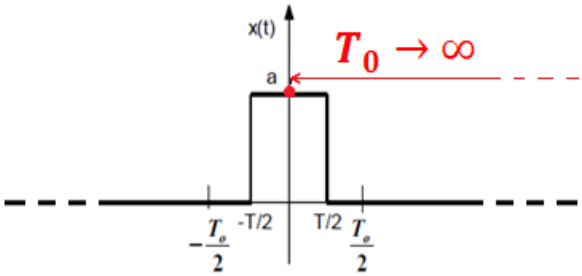
$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Questo segnale è aperiodico dato che non ripete.

Supponiamo di voler ottenere il segnale $rect(t/T)$ da un treno di rect, ovvero dal segnale che si otterrebbe per periodicizzazione di una serie di rect in un certo periodo T; in questo modo, sapendo ottenere lo spettro si un segnale periodico come il treno di onde quadre, saremmo in grado di ottenere anche lo spettro del segnale aperiodico $rect(t/T)$.



Il treno di onde quadre si ripete entro un certo periodo T_0; se "estendessimo" questo periodo facendolo tendere ad infinito ($T_0 \to \infty$) possiamo immaginare che il treno di rect tende a somigliare al singolo rect poiché il prossimo del treno si troverebbe ad una distanza infinita (ovvero si ripeterebbe dopo un tempo infinito).



Quindi possiamo assumere che il segnale rect si possa ottenere a partire da un treno di rect e facendo tendere ad infinito il suo periodo:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

(Dove $x_p(t)$ è il segnale periodico, ovvero il treno di onde quadre)

Ci chiediamo allora quanto segue: *cosa succede al segnale periodico $x_p(t)$ quando il suo periodo "T_0" tende ad infinito?*
Partiamo dal presupposto che possiamo sviluppare $x_p(t)$ in serie di Fourier, essendo quest'ultimo un segnale periodico:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

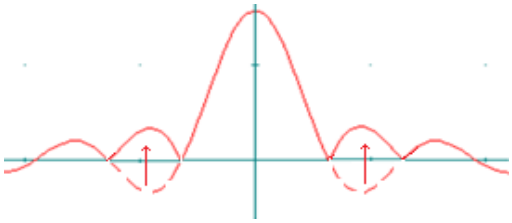
$$Dove\ X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

Quindi sostituendo ad $x_p(t)$ il suo sviluppo in serie di Fourier otteniamo:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \right\} = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \right] e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$

Ciò che finora abbiamo fatto è stato praticamenre vedere un segnale aperiodico come il rect "$x(t)$" in funzione di un segnale periodico $x(t)$ (nel nostro caso un treno di rect) di periodo infinito; essendo quest'ultimo un segnale periodico, lo abbiamo sviluppato in serie di Fourier, esplicitando infine il coefficiente "X_k".

Analizziamo adesso cosa accade allo spettro del segnale: lo spettro di un treno di onde quadre è un **seno cardinale**; se analizziamo lo spettro delle ampiezza, troveremo tanti seni cardinali, a frequenze differenti e multiple di f_0 (la frequenza portante) e, trattandosi di moduli, questi seni cardinali avranno tutti la parte negativa ribaltata.

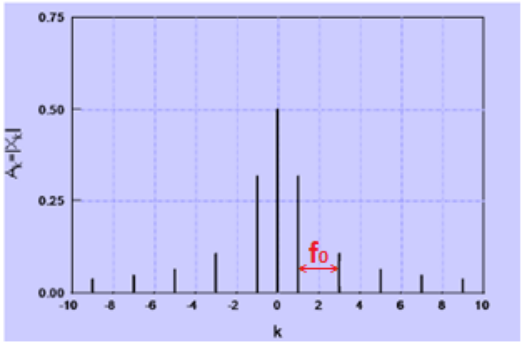


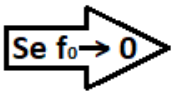
Ci chiediamo allora: *Cosa accade alle armoniche quando $T_0 \to \infty$?*
Aumentando T_0 e facendolo tendere ad infinito otteniamo una progressiva diminuizione della portante f_0 fino a che questa non tenderà a zero; questo comportamento è dovuto al fatto che il periodo è il reciproco della frequenza e viceversa, quindi al tendere all'infinito di uno vi sarà il tendere a zero dell'altro.

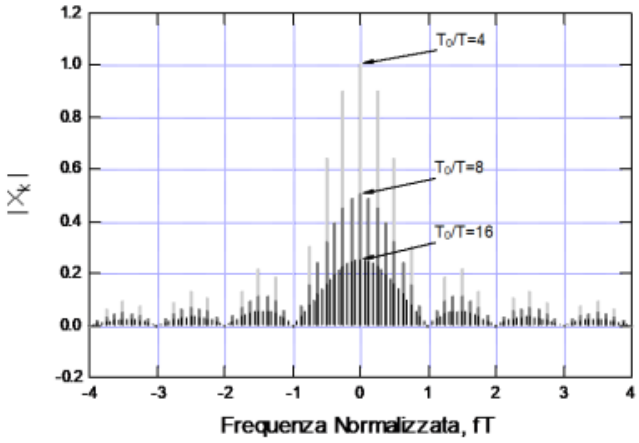
$$f_0 = \frac{1}{T_0} \qquad se\ \ T_0 \to \infty\ \ allora\ f_0 \to 0$$

Si noti che le armoniche dello spettro si distanziano tutte di f_0, infatti abbiamo armoniche che si trovano alle frequenze: $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots\ , (k-1)f_0, kf_0 \dots$

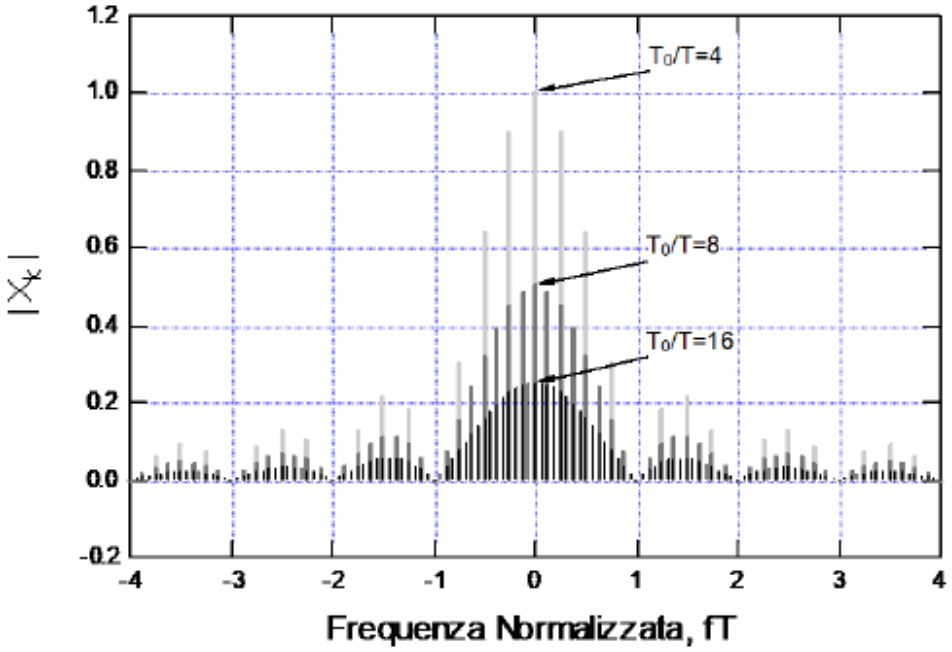
Questo significa che, facendo tendere il periodo T_0 ad infinito, diminuisce la frequenza portante f_0 e, di conseguenza, diminuisce la distanza tra le armoniche; il risultato è **uno spettro che si "infittisce" sempre di più, fin quando le armoniche non si sovrappongono.**







Come possiamo vedere in figura, man mano che l'argomento del rect T_0/T aumenta (passando da 4 a 16) lo spettro si infittisce sempre di più; quando $T_0 \to \infty$ lo spettro sarà praticamente **continuo** poiché la distanza fra le armoniche, la frequenza portante $f_0 = 1/T_0$ sarà praticamente nulla.



Quindi dal passaggio da spettro di un segnale periodico a spettro di un segnale aperiodico possiamo notare un cambiamento radicale: **lo spettro di un segnale periodico è a righe, lo spettro di un segnale aperiodico è praticamente continuo** poiché la distanza tra le armoniche tende a zero.

Tuttavia, è bene notare cosa sta accadendo anche al coefficiente X_k dello sviluppo in serie di Fourier: quest'ultimo dipende dal parametro $1/T_0$, che moltiplica l'integrale, questo significa che al tendere di T_0 a infinito, questo rapporto tenderà a zero, facendo così diminuire di volta in volta il coefficiente X_k, quindi facendo diminuire progressivamente l'ampiezza del segnale.

$$X_k = \frac{1}{T_o}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \to X_k \; diminuisce\; sotto\; l'azione\; di\; \frac{1}{T_0}$$

$$L'ampiezza\; di\; x(t) diminuisce: x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$

Per ovviare a questo problema di natura prettamente matematica possiamo definire un nuovo parametro: $\boldsymbol{X(kf_o)}$ definito come segue:

$$X(kf_0) \triangleq T_0 X_k \;\; \to \;\; X(kf_0 t) = T_0 \left[\frac{1}{T_o} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \right] = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$X(kf_0)$ è praticamente il **coefficiente $\boldsymbol{X_k}$ normalizzato**.

Quando facciamo tendere il periodo all'infinito: $T_0 \to \infty$, nel coefficiente normalizzato $X(kf_o)$ accade che:

- il prodotto all'esponente kf_0 tende ad una variabile continua "f";
- gli estremi d'integrazione tendono ad infinito: passano da $\pm T_0/2$ a $\pm\infty$ poiché T_0 tende a infinito.
- Il segnale periodico $x_p(t)$ diventa un segnale aperiodico $x(t)$ poiché il suo periodo T_0 tende a infinto

Quindi a questo punto, quando si fa tendere il periodo all'infinito, il coefficiente normalizzato diventa il seguente:

$$X(kf_0) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \boldsymbol{x_p(t)}\, e^{-j2\pi \boldsymbol{kf_0} t}\, dt \xrightarrow{T_0 \to \infty} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)}\, e^{-j2\pi \boldsymbol{f} t}\, dt \to \boxed{\boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}}$$

A questo punto, considerando nuovamente il segnale aperiodico $x(t)$ ottenuto facendo tendere il periodo T_0 ad infinito, possiamo sostituire a "X_k" il coefficiente normalizzato "$X(kf_0)$" poiché:

$$X(kf_0) \triangleq T_0 X_k \quad \rightarrow \quad X_k = \frac{X(kf_0)}{T_0} = X(kf_0) * f_0$$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \rightarrow x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) * f_0 * e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$

Quando si fa tendere $T_0 \rightarrow \infty$ si possono osservare i seguenti effetti su $x(t)$:

- La sommatoria diventa un integrale
- Il coefficiente $X(kf_0)$ diventa $X(f)$ come già visto
- All'esponente dell'esponenziale avremo che il prodotto kf_0 tende ad una variabile continua "f"
- La "distanza" tra le armoniche f_0 tende a diventare infinitesima: df

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X(kf_0)} \; e^{j2\pi \boldsymbol{kf_0} t} \; \boldsymbol{f_0} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X(f)} \, e^{j2\pi \boldsymbol{f} t} \, \boldsymbol{df} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, e^{j2\pi f t} \, df}}$$

Ricapitolando, quando si tratta di un segjnale periodico è possibile lavorare con quest'ultimo nell'ambito delle frequenze, per farlo, è necessario eseguire la seguente trasformazione:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \, df = F^{-1}[X(f)]} \\ \boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-j2\pi f t} \, dt = F[x(t)] = A(f) e^{j\theta(f)}} \end{cases}}$$

Queste formule ci stanno ad indicare che per un segnale aperiodico è ancora possibile la trattazione nel dominio della frequenza; quest'ultimo infatti viene espresso come integrale esteso all'intero dominio (tra $-\infty$ e $+\infty$) della **trasformata di fourier** $\boldsymbol{X(f)}$ moltiplicata per l'esponenziale.
Si noti che stavolta all'esponente di entrambi gli esponenziali non vi è più "kf_o" ma solo "f" poiché si tratta di una funzione continua, infatti lo spettro è continuo e non discreto come accadeva per lo sviluppo in serie dei segnali periodici.

→ $\boldsymbol{X(f)}$ si dice essere la **Trasformata di Fourier,** intendendo l'operazione di integrazione del segnale nel $x(t)$ moltiplicato per l'esponenziale $e^{-j2\pi f t}$**.** La trasformata permette di ricavare l'equivalente in frequenza, e quindi lo spettro, del segnale nel tempo $x(t)$;
La trasformata può essere vista anche come $X(f) = A(f) \, e^{\theta(f)}$, in cui $A(f)$ è lo spettro delle ampiezze, cioè il modulo di $X(f)$ e $\theta(f)$è la fase il resto sarà l'ampiezza dello spettro.

$$\boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-j2\pi f t} \, dt = F[x(t)] = A(f) e^{j\theta(f)}}$$

$$\boldsymbol{con \; A(f) = |X(f)| \qquad e \qquad \theta(f) = \angle X(f) = arctg\left(\frac{Re\{X(f)\}}{Im\{X(f)\}}\right)}$$

→ $\boldsymbol{x(t)}$ è l'**Antitrasformata di Fourier,** con essa si intende l'operazione di integrazione della trasformata di Fourier $X(f)$ moltiplicata per l'esponenziale $e^{j2\pi f t}$**.** L'antitrasformata permette di ricavare il segnale nel tempo conoscendone il suo spettro in frequenza.

$$\boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \, df = F^{-1}[X(f)]}$$

Quindi la **traformata** consente il passaggio $\boldsymbol{Dominio\ del\ tempo \rightarrow Dominio\ della\ frequenza}$ mentre l'**antitrasformata** permette l'inverso: $\boldsymbol{Dominio\ della\ frequenza \rightarrow Dominio\ del\ tempo}$

Differenze tra lo sviluppo in serie di Fourier e la trasformata di Fourier

Possiamo allora già distinguere alcune differenze fondamentali tra lo sviluppo in serie di Fourier e l'operazione di trasformata di fourier: a livello teorico abbiamo capito che:

- Lo **sviluppo in serie di Fourier** è adatto **solo per i segnali periodici**
- La **trasformata di Fourier** è adatta **ai segnali aperiodici ma anche ai segnali periodici**, come vedremo in seguito con la trattazione di uno specifico teorema.

Dal punto di vista matermatico possiamo notare alcune differenze :

- Nello **sviluppo in serie di Fourier** ciò che otteniamo è un segnale **discreto**, visto come sommatoria di un certo numero di armoniche (cosinusoidi); questo significa che viene espresso come sommatoria e che lo sviluppo verte sul coefficiente X_k, che è un coefficiente discreto. Essendo discreto, all'esponente troveremo sempre il termine "kf_0"

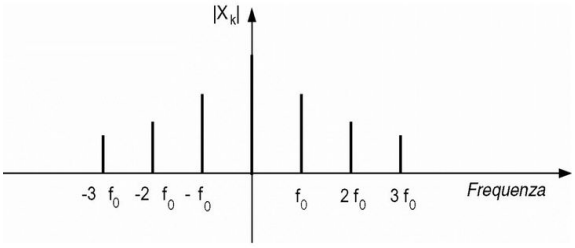
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j(2\pi k f_0 t)} \qquad\qquad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\,2\pi\, k\, f_0\, t}\, dt$$

- Nell'operazione di **trasformata di Fourier** invece $x(t)$ è un segnale **continuo** e, come tale, viene espresso da un integrale in cui vi è la presenza del coefficiente $X(f)$, che altro non è che la **trasformata di Fourier** del segnale. Essendo continuo, troveremo all'esponente "f" e non "kf_0"

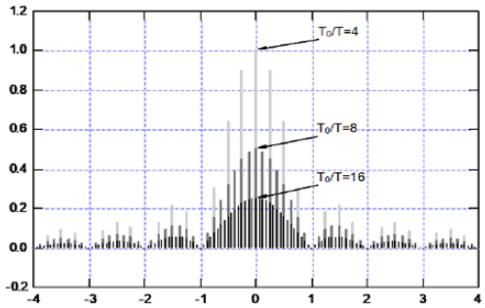
$$\boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df} \qquad\qquad \boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

Riportiamo anche due importanti differenze riguardanti gli spettri (delle ampiezze) di uin segnale periodico e di uno aperiodico:

- Un segnale periodico è un segnale che avrà sempre uno spettro discreto, a conferma di ciò è il risultato che otteniamo dallo sviluppo in serie di Fourier: il segnale viene espresso come sommatoria di più armoniche, che nello spettro vengono rappresentate come una serie di "righe", per questo spesso questo spettro viene chiamato **spettro a righe,** ed è pertanto discreto



- Un segnale aperiodico, invece, è un segnale che ha uno spettro continuo perché se vedessimo quest'ultimo come un segnale periodico di periodo infinito otterremmo uno spettro cui tutte le armoniche si "infittiscono", dato che si distanziano di una quantità infinitesima: $f_0 \rightarrow df$.
  A conferma di questa tesi vi è il concetto di trasformazione di Fourier, che torna un segnale continuo in frequenza (quindi uno spettro continuo).

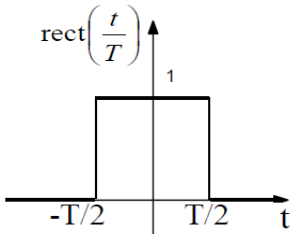


Ricapitolando, quando abbiamo trattato lo sviluppo in serie di Foruier dei segnali periodici abbiamo visto che ogni segnale periodico può essere suddiviso in una serie di coseni che variano periodicamente nel tempo.
Ci siamo poi concentrati sul dominio della frequenza, mediante lo sviluppo in serie di Fourier, ricavando due importanti rappresentazioni: lo spettro delle ampiezze e lo spettro delle fasi del segnale periodico.

Dualmente, per quanto riguarda i segnali aperiodici potremo utilizzare solamente l'operatore di Trasformata di Fourier per trattare il segnale dal punto di vista delle frequenze (e questo, come vedremo, varrà anche per i segnali periodici, quindi possiamo vedere l'operatore di trasformata come un operatore che va bene per qualsiasi segnale quando si deve passare al dominio della frequenza).

Esempi sul calcolo della trasformata di Fourier

Esempio: La trasformata di Fourier di un segnale rect



supponiamo di voler ottenere lo spettro di un semplice segnale $rect(t/T)$ stavolta non periodicizzato (non il treno di onde quadre ottenuto per periodicizzazione ma proprio il singolo rect).

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Essendo un segnale aperiodico, per passare al dominio delle frequenze, quindi per ottenere lo spettro di modulo e fase, dovremmo ricorrere all'operatore di **Trasformata di Fourier:**

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \rightarrow \quad X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 * e^{-j2\pi f t}\, dt = \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

Dato che il segnale è definito solo nell'intervallo $[-T/2\,, +T/2]$, l'integrale esteso all'infinito diventa l'integrale tra $\pm T_0/2$ poiché il segnale è nullo altrove; in tale intervallo il rect ha unì'ampiezza unitaria, per cui varrà 1.

$$X(f) = \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-T/2}^{T/2} = \left[\frac{e^{-j2\pi f (T/2)}}{-j2\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f (-T/2)}}{-j2\pi f}\right] = \left[\frac{e^{-j2\pi f (T/2)} - e^{-j2\pi f (-T/2)}}{-j2\pi f}\right]$$

$$X(f) = \left[\frac{e^{-j2\pi f (T/2)} - e^{j2\pi f (T/2)}}{-j2\pi f}\right] = \left[\frac{e^{-j\pi f (T)} - e^{j\pi f (T)}}{-j2\pi f}\right] = -\frac{e^{-j\pi f (T)} - e^{j\pi f (T)}}{j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{e^{j\pi f (T)} - e^{-j\pi f (T)}}{j2\pi f} \xrightarrow{Eulero} X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$X(f)$ assume un valore molto simile alla forma di un seno cardinale, per ottenere tale forma andremo a moltiplicare e dividere per T:

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} * \frac{T}{T} = T * \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T sinc(fT) \quad \rightarrow \quad X(f) = T sinc(fT)$$

Se andassimo a calcolare la trasformata quando $f = 0$:

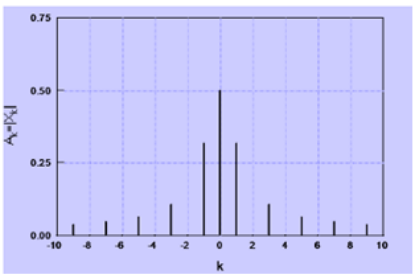
$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 * e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \rightarrow \quad X(0) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 * e^{-j2\pi 0 t}\, dt = \quad \rightarrow \quad \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dt = \quad T = T\, sinc(0)$$

Possiamo vederlo in funzione del seno cardinale considerando che $sinc(0) = 1$

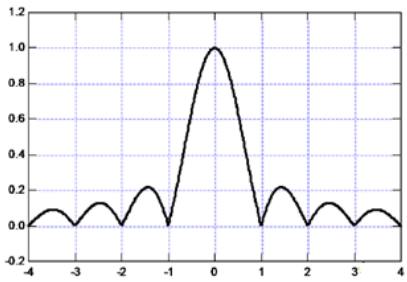
Lo spettro delle ampiezze è quello rappresentato, che prevede il seno cardinale avente la parte negativa ribaltata (poiché si trattano i moduli). Ma si noti che questo spettro è molto simile allo spettro del treno di rect: quest'ultimo seguiva l'inviluppo di un seno cardinale ma era formato da una serie di armoniche, che avevamo trovato al variare di X_k.

Come possiamo vedere, lo spettro del segnale rect è continuo, mentre lo spettro del treno di onde quadre, ottenuto per periodicizzazione del rect, è discreto.

Spettro treno di rect



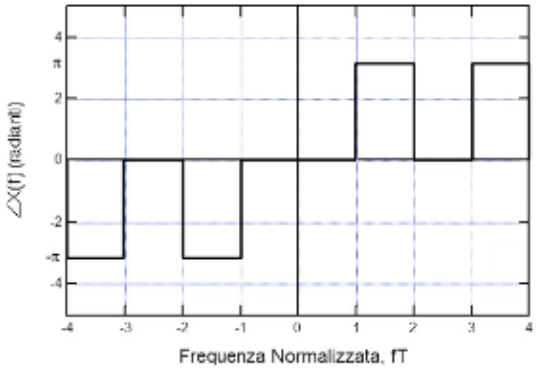
Spettro del singolo rect



Possiamo anche tracciare lo spettro delle fasi: quest'ultimo varia tra 0 e π, poiché non è presente alcuna parte immaginaria, per cui:

$$\angle X(f) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) & per\ Re\{X(f)\} > 0 \\ arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) + \pi & per\ Re\{X(f)\} < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \angle X(f) = \begin{cases} 0 & per\ Re\{X(f)\} > 0 \\ \pi & per\ Re\{X(f)\} < 0 \end{cases}$$

*Per valutare quando $R\{F(x)\} < 0$ dovremo andare a considerare il seno cardinale non in modulo e valutare quando esso è negativo.

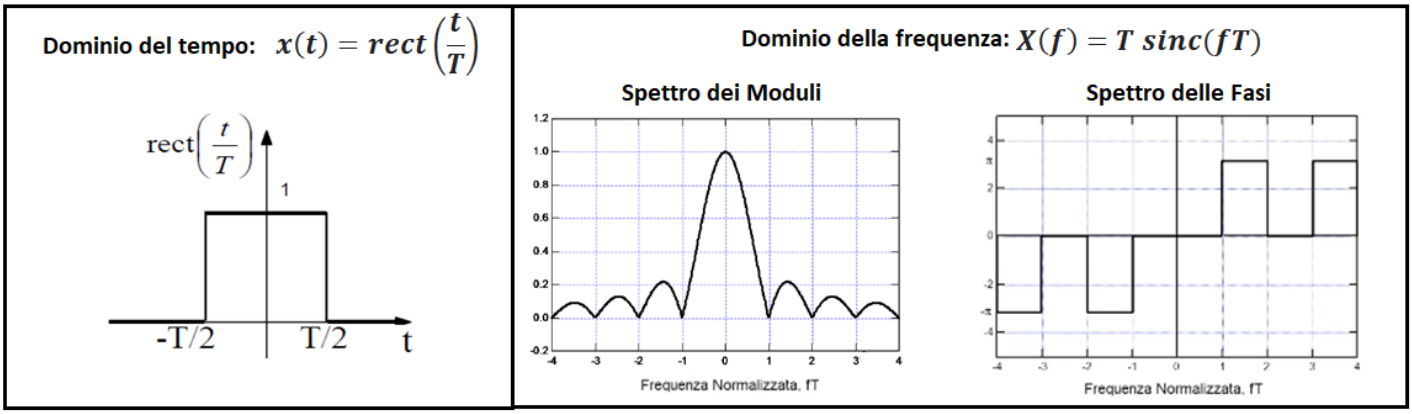


Si noti che questo corrisponde esattamente alla fase di un treno di rect. Possiamo allora affermare che **lo spettro delle fasi del segnale aperiodico è identico allo spettro delle fasi del segnale periodico ottenuto per periodicizzazione.**

Il rect è un segnale base che utilizzaremo spesso, per questo motivo è bene conoscere già a monte la sua traformata, in modo da non doverla ricavare continuamente; è bene allora tenere a mente che:

Dominio del tempo	***Dominio della frequenza***
$\boldsymbol{x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)}$ $\rightarrow$	$\boldsymbol{X(f) = T\ sinc(fT)}$

Se si ha un segnale nel dominio del tempo che consiste in un rect, la sua Trasformata di Fourier nel dominio della frequenza è un seno cardinale, pertanto il suo spettro delle ampiezze è un seno cardinale mentre il suo spettro delle fasi oscilla tra 0 e π

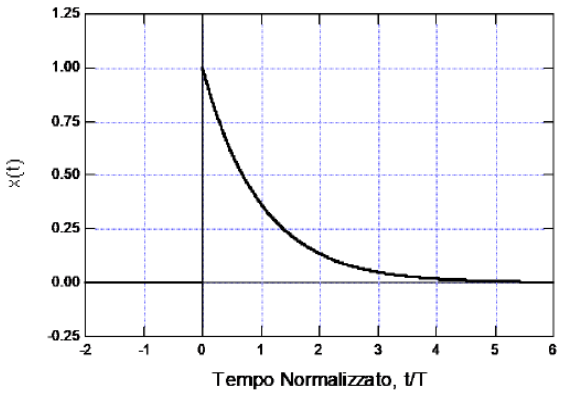


Si tenga sempre presente che lavorare nel dominio della frequenza ci da delle informazioni in più quali quelle sullo spettro, tuttavia, si continua a trattare lo stesso segnale: trattare un segnale rect nel dominio del tempo equivale a trattare un seno cardinale nel dominio della frequenza e viceversa, si tratta dello stesso segnale ma visto in due domini differenti.

Esempio: La trasformata di Fourier di un segnale esponenziale unilatero

Studiamo adesso la trasformata di un segnale esponenziale unilatero, ovvero un segnale formato da un esponenziale decrescente ed un gradino unitario $u(t)$ che rende il segnale unilatero: dato che $u(t)$ assume un valore unitario per $t > 0$ e sarà nullo altrove, l'esponenziale sarà definito solo sul semiasse positivo.

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) \qquad con\ u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Essendo un esponenziale decrescente, il segnale partirà da $u(t) = 1$ e decrescerà con un andamento esponenziale fino a 0. Questo è un segnale che ben rappresenta, ad esempio, la scarica di un componente.

L'andamento temporale rappresentato non da alcuna informazione circa la composizione in frequenza di quest'ultimo: da quante armoniche è formato? A quali frequenze si trovano? Che ampiezza ha ognuna di essa? Per rispondere a queste domande dovremo passare al dominio della frequenza e analizzare in quest'ultimo il segnale; per farlo andremo dunque a studiare la **trasformata di Forurier del segnale esponenziale unilatero** (non andremo ad utilizzare lo sviluppo in serie perché si tratta di un segnale aperiodico ma, più in generale, è sempre possibile ricavare la trasformata di un segnale, sia esso periodico o aperiodico, mentre non si può dire lo stesso dello sviluppo in serie di Fourier: quest'ultimo si può applicare solo ai segnali periodici).

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \rightarrow \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) \right] e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Come possiamo osservare, l'esponenziale unilatero è definito solo nell'intervallo $(0, +\infty)$ poiché quando $t < 0$ il gradino vale $u(t) = 0$ e quindi il segnale è nullo altrove. Dato che stiamo considerando il segnale nell'intervallo in cui è definito, il gradino varrà $u(t) = 1$ per cui ad esso sostituiremo il suo valore:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) \right] e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} 1 * (e^{-\frac{t}{T}}) * e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(j2\pi f t + \frac{t}{T}\right)}\, dt$$

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(j2\pi f + \frac{1}{T}\right)}\, dt = \left[\frac{e^{-t\left(j2\pi f + \frac{1}{T}\right)}}{-j2\pi f + \frac{1}{T}} \right]_0^{+\infty} = \left[0 - \frac{1}{-j2\pi f + \frac{1}{T}} \right] = \frac{1}{j2\pi f + \frac{1}{T}} \quad \rightarrow X(f) = \frac{T}{1 + j2\pi f}$$

Possiamo notare che stavolta, a differenza del rect, la trasformata di Fourier dell'esponenziale presenta sia una parte reale che una parte immaginaria.

Se volessimo ricavare la trasformata esplicitandone la parte reale e quella immaginaria dovremo moltiplicare e dividere per il coniugato della parte complessa, ovvero per la parte complessa avente la parte immaginaria cambiata di segno:

$$X(f) = \frac{T}{1 + j2\pi f} * \frac{1 - j2\pi f}{1 - j2\pi f} = \frac{T\,(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{T - j2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2}$$

$$Re\{X(f)\} = \frac{T}{1 + (2\pi f T)^2} \qquad\qquad Im\{X(f)\} = -\frac{2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2}$$

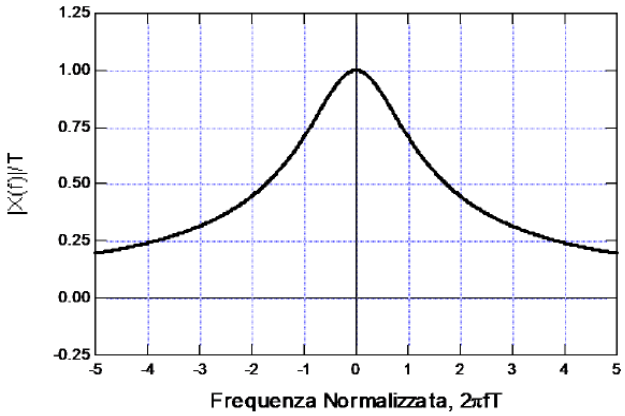
Avendo ricavato la parte immaginaria e la parte reale della trasformata possiamo trovare modulo e fase di quest'ultima:

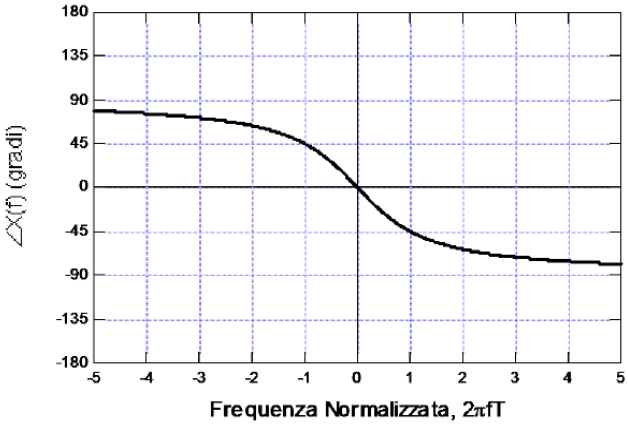
$$|X(f)| \triangleq \sqrt{Re\{X(f)\}^2 + Im\{X(f)\}^2} = \sqrt{\left[\frac{T}{1 + (2\pi f T)^2}\right]^2 + \left[-\frac{2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2}\right]^2} = \frac{T}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$

$$\angle X(f) \triangleq arctg\left(\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) \ per\ Re\{X(f)\} > 0 \quad \rightarrow \angle X(f) = -arctg(2\pi f T)$$

Se volessimo rappresentare lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi otterremmo i seguenti grafici:

$$\begin{cases} |X(f)| = \dfrac{T}{\sqrt{1+(2\pi fT)^2}} \\ \angle X(f) = -arctg(2\pi fT) \end{cases}$$





Si noti che entrambi i grafici non sono espressi in funzione della sola frequenza f ma in funzione della frequenza normalizzata $2\pi fT$.

Quando $f = 0$ la fase è nulla poiché $-arctg(0) = 0$, quando invece $f \to \infty$ avremo $-arctg(\infty) = -(90°)$ e quindi dualmente per $f \to -\infty$ avremo $-arctg(-\infty) = -(-90°) = +90°$

Dominio del tempo	***Dominio della frequenza***
$\boldsymbol{x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)} \quad \rightarrow$	$\boldsymbol{X(f) = \dfrac{T}{1 + j2\pi f}}$

Proprietà della trasformata di Fourier

Andiamo adesso a verificare tutte le proprietà della trasformata di Foruier, per alcune ne ometteremo la dimostrazione in quanto già affrontata quando abbiamo trattato la serie di Fourier.

1) Simmetria Hermitiana

La trasformata di Fourier è una funzione complessa che può essere definita, come visto, in funzione della sua parte reale e la sua parte immaginaria:

$$X(f) = Re\{X(f)\} + Im\{X(f)\}$$

Se il segnale nel dominio del tempo $x(t)$, da cui viene ricavata la trasformata $X(f)$, è una **funzione reale** allora la parte reale e la parte immaginaria della trasformata possono essere scritti in funzioni di seno e coseno:

$$x(t) \text{ è } una\ funzione\ reale \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Re\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\,dt \\ Im\{X(f)\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt \end{cases}$$

Otteniamo quindi:

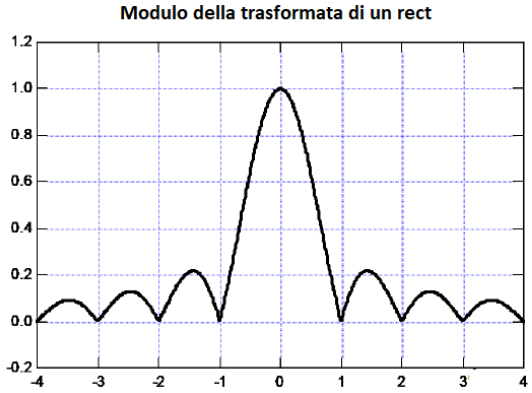
$$X(f)Re\{X(f)\} + Im\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\,dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

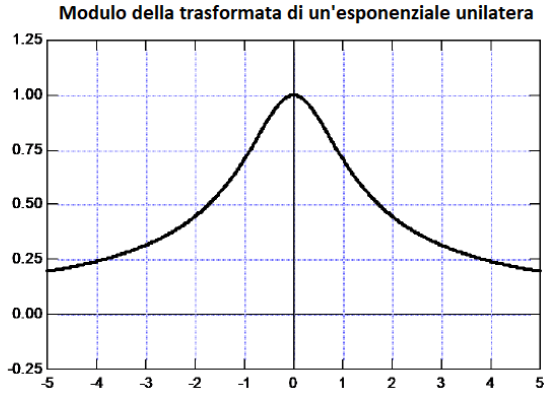
La parte reale è sempre una funzione pari mentre la parte immaginaria è sempre una funzione dispari, pertanto ne consegue che il modulo della trasformata si Forurier sarà sempre pari (dunque simmetrico rispetto all'asse verticale) e le fasi saranno sempre dispari (quindi simmatriche rispetto all'origine)

$$\begin{cases} Re\{X(f)\} = Re\{-X(f)\} \\ Im\{X(f)\} = -Im\{-X(f)\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |X(f)| = |X(-f)| \\ \angle X(f) = -\angle X(-f) \end{cases}$$

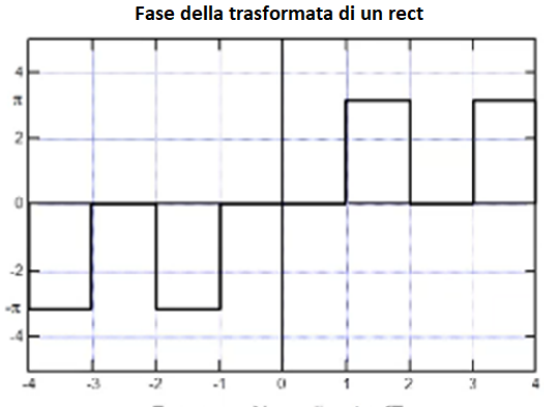
Questa simmetria prende il nome di **simmetria Hermitiana o coniugata**

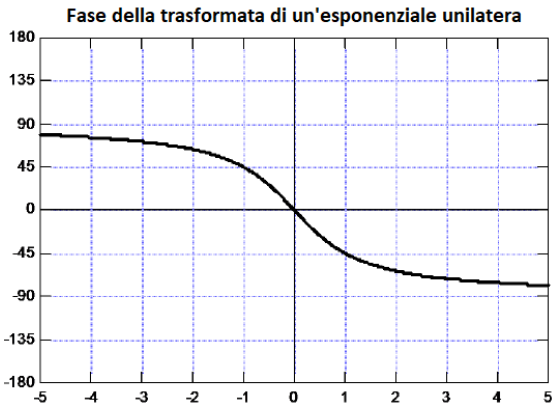
Infatti, per i due esempi trattati abbiamo notato la simmetria dei moduli rispetto all'asse verticale:





E la simmetria delle fasi rispetto all'origine:





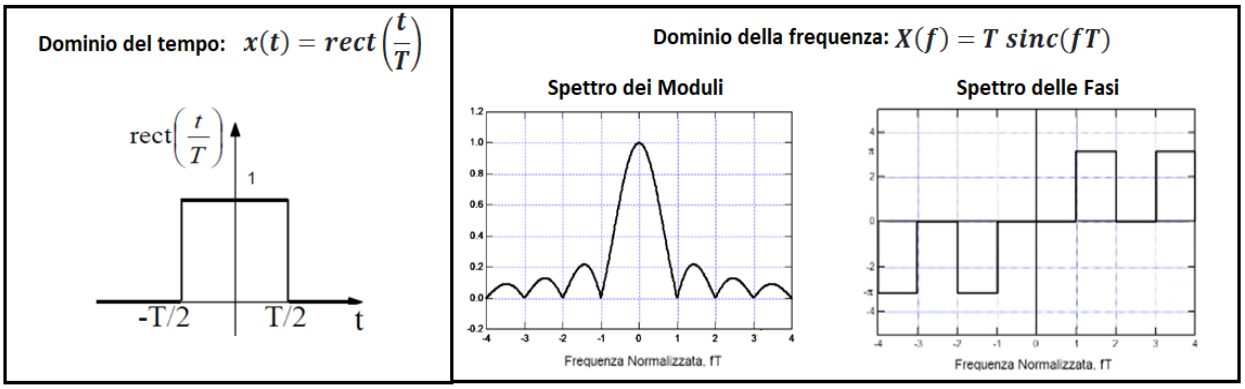
2) Trasformata di un segnale temporale reale e pari

Se il segnale nel dominio del tempo $x(t)$, da cui viene ricavata la trasformata $X(f)$, è una **funzione reale pari** allora il suo spettro sarà puramente reale, il che significa che **la trasformata sarà puramente reale**, quindi la parte immaginaria di quest'ultima sarà nulla e la parte reale si trova come il doppio dell'integrale definito tra 0 e $+\infty$ del segnale temporale moltiplicato il coseno $\cos(2\pi f t)$:

$$x(t) \text{ è } una\ funzione\ reale\ pari \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Re\{X(f)\} = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\,dt \\ Im\{X(f)\} = 0 \end{cases}$$

Dato che il coseno è una funzione pari e quindi possiamo vedere la parte reale come il doppio dell'integrale con il coseno a moltiplicare il segnale $x(t)$

Questo è quanto abbiamo visto con il segnale rect, infatti la sua trasformata consisteva in un seno cardinale puramente reale:



3) Trasformata di un segnale temporale reale e dispari

Se invece il segnale nel dominio del tempo $x(t)$, da cui viene ricavata la trasformata $X(f)$, è una **funzione reale dispari** allora il suo spettro sarà puramente immaginario, il che significa che **la trasformata sarà puramente immaginaria**, quindi la parte reale sarà nulla e la parte immaginaria si trova come segue:

$$x(t) \text{ è } una\ funzione\ reale\ dispari \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Re\{X(f)\} = 0 \\ Im\{X(f)\} = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt \end{cases}$$

Dato che il seno è una funzione dispari e quindi possiamo vedere la parte immaginaria come il doppio dell'integrale con il seno a moltiplicare il segnale $x(t)$ (ed un opportuno segno negativo).

Si noti che abbiamo parlato solo di segnali temporali reali "$x(t)$" poiché nella realtà i segnali non reali non esistono, possiamo trarre un'astrazione matematica non fisicamente realizzabile di quest'ultimi ma non esistono in natura dei segnali che non abbiano una parte reale.

Teoremi sulla trasformata di Fourier

Affrontiamo adesso alcuni teoremi che caratterizzano la trasformata di Fourier e che ne permettono l'utilizzo in alcuni casi particolari; li utilizzeremo quando faremo gli esercizi.

1) Teorema sulla linearità della trasformata di Fourier

HP: Sia $x(t)$ un segnale combinazione lineare di altri due segnali:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

TS: Allora per linearità la trasformata di Fourier del segnale [X(f)] sarà data dalla combinazione lineare delle trasformate dei segnali che compongono il segnale $x(t)$:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \quad X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

Dimostrazione:

Se calcoliamo la trasformata $X(f)$ applicando la definizione sostituendo ad $x(t)$ la combinazione lineare dei segnali che lo compongono otteniamo praticamente la somma delle trasformate dei segnali componenti, dato che l'integrale è un operatore lineare:

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad \rightarrow \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)]\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$Per\ linearità\ dell'integrale: \quad X(f) = a\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad + b\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$X(f) = a\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad + b\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad = aX_1(f) + bX_2(f)$$

□

2) Teorema sulla dualità della trasformata di Fourier

HP: Si supponga di avere un segnale nel dominio del tempo $x(t)$ a cui corrisponde un segnale nel dominio della frequenza $X(f)$:

$$x(t) \xrightarrow{F[x(f)]} X(f)$$

TS: Si supponga dunque di considerare un segnale nel tempo che abbia lo stesso andamento che ha la trasformata $X(f)$ nel suo dominio (ovvero quella della frequenza); allora possiamo osservare che trasformando questo segnale otterremo uno spettro avente lo stesso andamento del segnale $x(t)$ ma avente argomento cambiato di segno (dunque $x(-f)$):

$$x(t) \xrightarrow{F[x(t)]} X(f) \quad \rightarrow \quad X(t) \xrightarrow{F[x(t)]} x(-f)$$

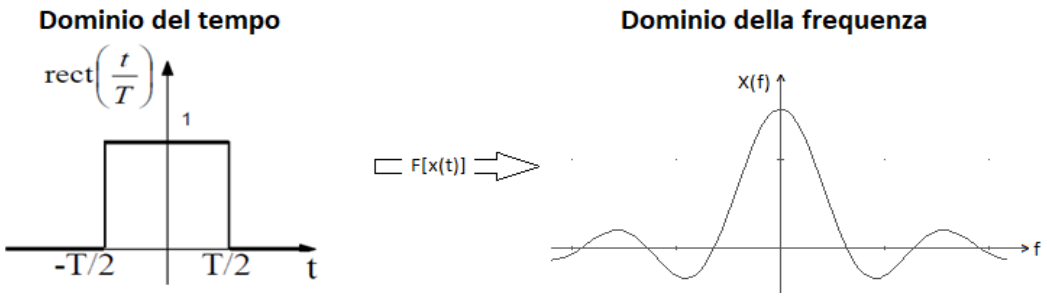
Dimostrazione:

Supponiamo, ad esempio, che nel dominio del tempo abbiamo un segnale rect:

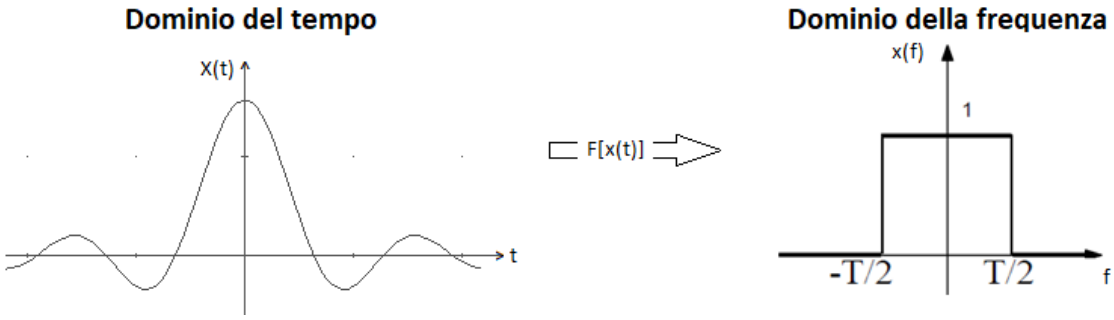
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

allora, come sappiamo, se ne calcolassimo la sua trasformata $X(f)$ otterremmo un seno cardinale:

$$X(f) = F[x(t)] = F\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] = Tsinc(fT)$$



Per dimostrare questo teorema dovremo verificare che considerando un seno cardinale nel dominio del tempo (quindi un segnale temporale avente lo stesso andamento della trasformata di Fourier prima ottenuta), questo avrà come trasformata un rect cui argomento è cambiato di segno.



NB! In questo caso il rect è un segnale pari, quindi $X(f) = X(-f)$ e la forma del rect rimane praticamente invariata ma si tenga presente che ciò vale solo per i segnali pari!

Passiamo dunque alla dimostrazione di questo teorema:

$x(t)$ è dato dall'antitrasformata di $X(f)$ per definizione:

$$x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, dt$$

Supponiamo di scambiare formalmente le variabili: $t \to f$, otttenendo così il seguente risultato:

$$x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, dt \quad \to \quad x(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt$$

A questo punto supponiamo di effettuare un secondo cambio di variabile: passiamo da f a $-f$: $f \to -f$. Dovremo praticamente effettuare la sostituzione in $x(f) \to x(-f)$ e cambiare il segnlo all'esponente:

$$x(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt \quad \to \quad x(-f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Ma si noti che la quantità ottenuta è la trasformata di Fourier di $X(t)$, trattandosi dell'integrale tra $\pm\infty$ del prodotto di $X(t)$ e l'esponenziale $e^{-j2\pi f t}$:

$$X(f) = F[x(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \to \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = F[X(t)] = x(-f)$$

□

Riferendoci all'esempio precedente, scriveremo:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F[\,]} T\, sinc(fT) \qquad B\, sinc(tB) \xrightarrow{F[\,]} rect\left(\frac{-f}{B}\right) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

*Con $B = T$ che sta per "Banda" ed è equivalente a T.

In generale vale che:

$$B\, sinc(tB) \xrightarrow{F[\,]} rect\left(\frac{-f}{B}\right) = rect\left(\frac{f}{B}\right) \quad \to \quad \boxed{sinc(tB) \xrightarrow{F[\,]} \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)}$$

3) Teorema sulla traslazione nel tempo

HP: Si supponga di disporre di un segnale traslato nel tempo di una quantità "t_0", ovvero di un segnale che non sarà centrato in 0 ma in t_0:

$$x(t - t_0)$$

TS: Alla traslazione nel dominio del tempo corrisponde una moltiplicazione per l'esponenziale $e^{-j2\pi f t_0}$ (con t_0 traslazione nell'asse temporale):

$$F\,[x(t - t_0)] = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

Dimostrazione:

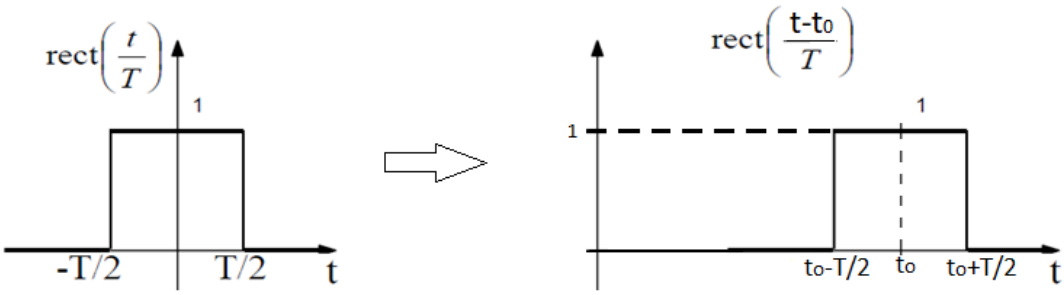
Prima di dimostrare il teorema vediamo di capire cosa significa avere una traslazione nel dominio del tempo e ciò che essa comporta sia nel dominio temporale che nel dominio frequenziale.

Supponiamo che il segnale traslato sia un rect, e che esso venga traslato di t_0:

$$x(t - t_0) = rect\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

Quest'ultimo non sarà centrato in 0 come il classico $rect(t/T)$, bensì verrà centrato in t_0:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & per\ |t| \geq \frac{T_0}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad x(t - t_0) = rect\left(\frac{t - t_0}{T}\right) = \begin{cases} 1 & per\ |t| \geq \frac{T_0}{2} + t_0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$



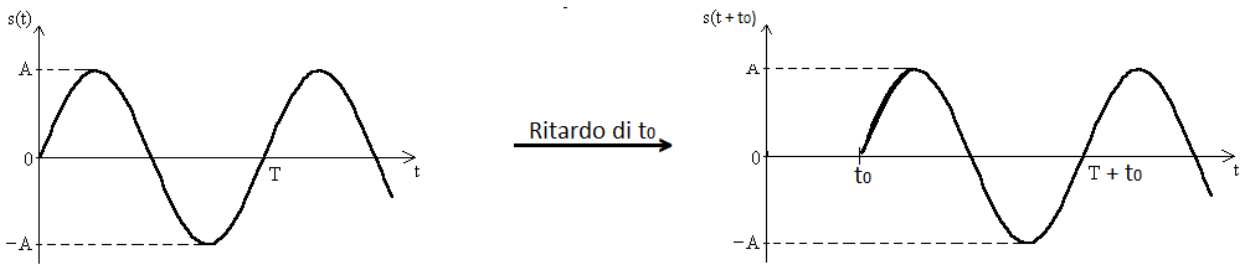
Dal risultato della tesi possiamo osservare che il modulo del segnale dopo la traslazione rimane invariatopoiché il modulo dell'esponenziale è unitario:

$$\left|e^{-j2\pi f t_0}\right| = 1 \;\rightarrow\; \left|X(f)e^{-j2\pi f t_0}\right| = |X(f)|$$

Ciò che varia è praticamente la fase, dato che l'esponente dell'esponenziale identifica la fase e dato che nel dominio della frequenza la trasformata di un segnale ritardato consinste in una moltiplicazione della trasformata del segnale (non ritardato) per un esponenziale, sicuramente avremo una modifica della fase:

$$X(f)\, e^{-j2\pi f t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\; e^{-j2\pi f t_0}\, dt$$

Inoltre, si tratta di uno **sfasamento lineare alla frequenza "*f*"** pertanto aumenta con essa.
Dunque ci aspettiamo uno spettro delle ampiezze invariato ed uno spettro delle fasi differente.
Infatti se, ad esempio, applicassimo un ritardo, quindi uno sfasamento, ad una sinusoide non noteremo un cambiamento delle ampiezze ma solo un cambiamento di fase:



Possiamo allora affermare che:

- Un ritardo temporale **modifica lo spettro di fase** della trasformata di Fourier del segnale ma non ne altera lo spettro delle ampizze.
- Lo sfasamento del ritardo **varia linearmente con la frequenza.**

Inoltre, come vedremo, dallo spettro delle ampiezze sarà possibile calcolare la potenza; questo significa che a seguito della traslaizone temporale il segnale non potrà subire alcuna variazione in energia (e/o potenza) poiché le ampiezze non variano;
d'altronde, questo è più che normale: nella rete elettrica di casa non arriva più potenza da parte del segnale sinusoidale della tensione se la presa viene attacca ad un certo istante "t_0", l'unica cosa che varia è lo sfasamento per la sinusoide della tensione considerata nel dato momento t_0.

Dimostriamo il teorema:
La trasformata "$Y(f)$" del tegnale traslato $x(t-t_0)$ è data dalla sua definizione:

$$Y(f) = F[x(t-t_0)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Poniamo la seguente sostituzione: $\boldsymbol{\alpha = t - t_o}$ per praticità, ottenendo:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}\, dt \;\rightarrow\; Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f(\alpha+t_0)}\, d\alpha$$

Si noti che abbiamo effettuato le seguenti sostituzioni:

→ "$x(t-t_0)$" è diventato $x(\alpha)$ dato che, per definizione, abbiamo supposto $\boldsymbol{\alpha = t - t_0}$
→ "t" all'esponente è stato espresso in funzione di α: dato che $\alpha = t - t_0$ allora $\boldsymbol{t = \alpha + t_0}$
→ Dato che "t_0" è una costante (è un ritardo fissato), avremo che $\boldsymbol{dt = d(\alpha + t_0) = d\alpha}$

A questo punto "spezziamo" l'esponenziale, dato che all'esponente vi è la somma $(\alpha + t_0)$, possiamo scrivere:

$$e^{-j2\pi f(\alpha+t_0)} = e^{-j2\pi f\alpha} * e^{-j2\pi f t_0}$$

Allora sotto il segno d'integrazione ricaviamo:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f(\alpha+t_0)}\, d\alpha \quad\rightarrow\quad Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\left[e^{-j2\pi f\alpha} * e^{-j2\pi f t_0}\right] d\alpha$$

Ma dato che stiamo integrando rispetto ad α, l'esponenziale $e^{-j2\pi f t_0}$ è praticamente costante poiché non presenta alcun termine in α all'esponente; per tal motivo possiamo portarlo fuori dal segno d'integrazione:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\left[e^{-j2\pi f\alpha} * e^{-j2\pi f t_0}\right] d\alpha \;\rightarrow\; Y(f) = e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha$$

Ma si noti che la quantità identificata dall'integrale è praticamente la trasformata $X(f)$ di $x(\alpha)$, per cui abbiamo ottenuto la nostra trasformata del segnale traslato come prodotto tra la trasformata del segnale (non traslato) moltiplicata per l'esponenziale:

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha \;\rightarrow\; Y(f) = e^{-j2\pi f t_0}\, X(f)$$

□

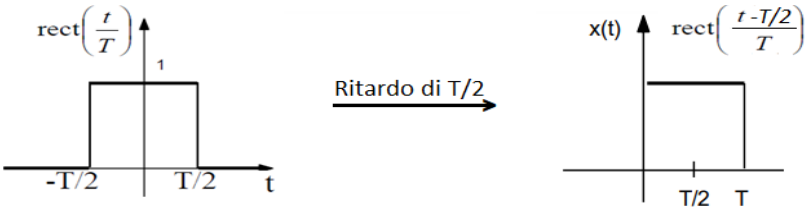
Rispetto alla trasformata del segnale non ritardato $[X(f)]$ possiamo osservare che il modulo rimane invariato mentre la fase varia:

$$X(f) = |X(f)|\, e^{j\angle Y(f)} \;\rightarrow\; Y(f) = |X(f)|\; e^{j\angle X(f)}\, e^{-j2\pi f t_0} = |X|\, e^{j[\angle X(f) - 2\pi f t_0]}$$

Modulo:	Fase:
$\lvert Y(f)\rvert = \lvert X(f)\rvert$	$\angle Y(f) = \angle X(f) - 2\pi f t_0$

Esempio: supponiamo di avere un rect ritardato di $T/2$

$$x\left(t-\frac{T}{2}\right)=rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$



Con il teorema della traslazione nel tempo possiamo immediatamente ottenere il risultato, avendo un ritardo di $T/2$ e sapendo che la trasformata di un segnale rect è un seno cardinale, otteniamo:

$$x(t)=\ rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f)=T\ sinc(fT)e^{-j2\pi f(T/2)}$$

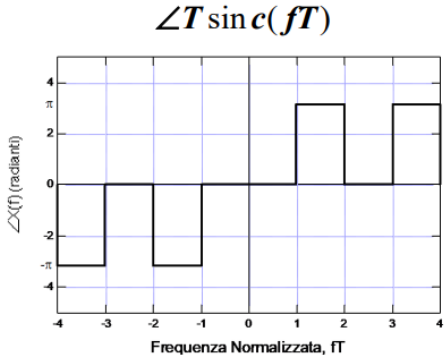
Semplificando all'esponente otteniamo che:

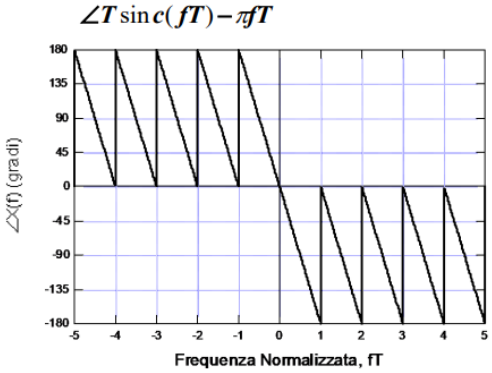
$$X(f)=T\ sinc(fT)e^{-j\pi fT}$$

Da cui possiamo scrivere modulo e fase:

$$|X(f)|=|Tsinc(fT)| \quad \angle Y(f)=\angle\, Tsinc(fT)-\pi fT$$

Il risultato è che dalla classica fase che varia tra 0 e π con un andamento "rettangolare", ottenuamo una fase che continua a varia tra 0 e π ma con un andamento "a dente di sega":





4) Teorema sul cambiamento della scala temporale

Uno dei teoremi che ci permette di capire bene la relazione tra tempo e frequenza, a prescindere dalla sua dimostrazione, è il teorema sul cambiamento della scala temporale.

HP: Si supponga di disporre di un segnale $x(t)$ avente come spettro la corrispettiva trasformata $X(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f)$$

Se viene moltiplicata la variabile temporale "t" per un certo parametro "α", che in valore assoluto può essere maggiore o minore di 1 viene modificata la scala dei tempi; nello specifico avremo che:

$$y(t) = x(\alpha t) \rightarrow \begin{cases} se\ |\boldsymbol{\alpha}| > \mathbf{1} \ \rightarrow \ si\ ha\ una\ \boldsymbol{compressione}\ della\ scala\ dei\ tempi \\ se\ |\boldsymbol{\alpha}| < \mathbf{1} \ \rightarrow \ si\ ha\ una\ \boldsymbol{dilatazione}\ della\ scala\ dei\ tempi \\ se\ \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0} \ \rightarrow \ si\ ha\ una\ \boldsymbol{inversione}\ della\ scala\ dei\ tempi \end{cases}$$

TS: Lo spettro $X(f)$ si comporterà esattamente all'opposto del segnale nel dominio del tempo:

- Se nell'asse temporale vi è stata una dilatazione ($|\alpha| < 1$) nel dominio frequenziale corrisponderà una compressione dello spettro;
- Viceversa, se nell'asse temporale vi è stata una compressione nel dominio frequenziale ($|\alpha| > 1$) nel dominio frequenzale corrisponderà una dilatazione dello spettro.

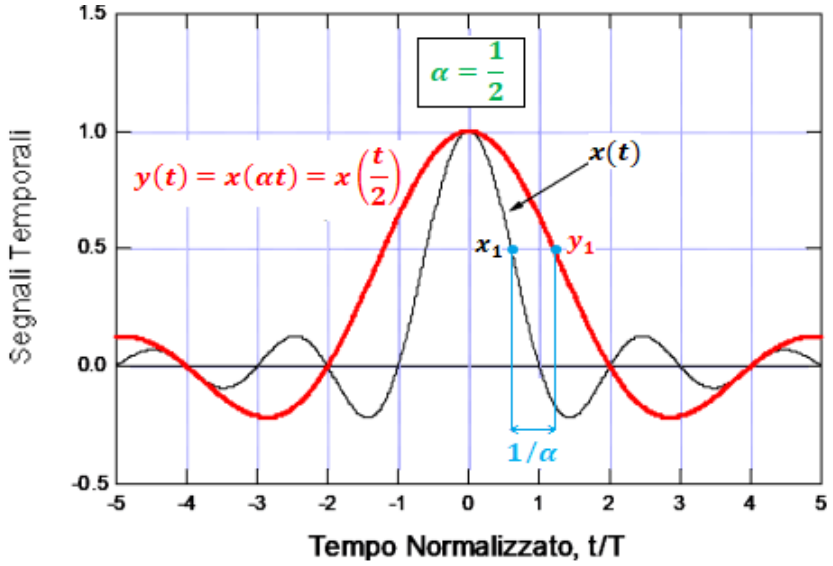
Dimostrazione:

Prima di dimostrare il teorema capiamo esattamente cosa significa "compressione/dilatazione della scala dei tempi".

Prendiamo in considerazione il segnale seno cardinale e supponiamo di moltiplicare per $\alpha = 1/2$ la variabile temporale, ottenendo così il segnale $y(t)$:

$$x(t) = sinc(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = sinc(\alpha t) = sinc\left(\frac{1}{2}t\right)$$

Graficamente, quello che accade è che se il segnale di partenza è quello in nero (che come possiamo osservare ha il classico andamento di un seno cardinale), allora il segnale ottenuto moltiplicando la variabile "t" $y(t)$ consiste praticamente nello stesso seno cardinale **dilatato**, ovvero nel seno carinale che avrà delle curve più "larghe".



Ciò avviene perché il nuovo segnale $y(t)$ assumerà un valore "y_1" in prossimità del tempo t_1 e quest'ultimo equivale al valore x_1 che il segnale $x(t)$ assume $1/\alpha$ volte prima.

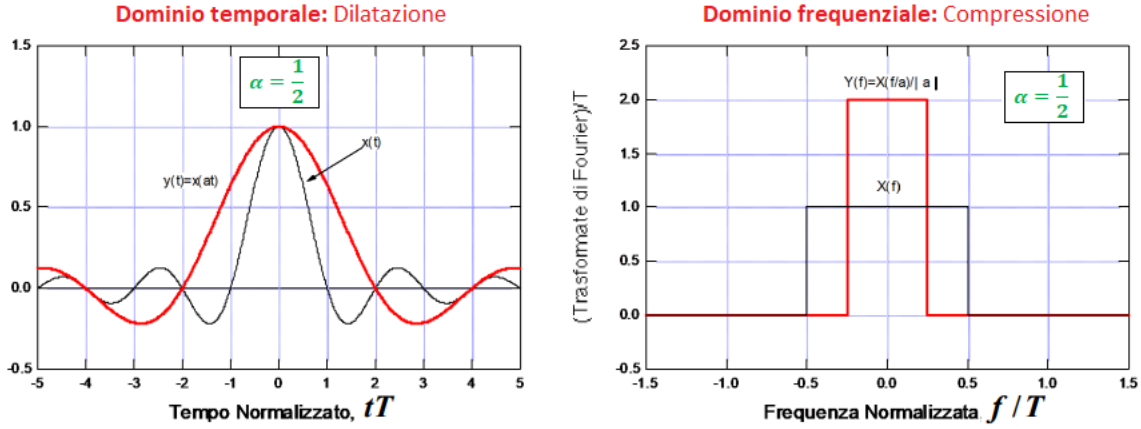
Questo significa che la scala dei tempi si è dilatata, per cui, come possiamo osservare dal grafico, il segnale cui è stata dilatata la sala temporale [$y(t)$] avrà un andamento meno brusco, infatti la discesa di questa sinusoide è meno brusca della sinusoide $x(t)$.

Questo è il caso in cui $|\alpha| < 1$, se avessimo considerato il caso in cui $|\alpha| > 1$ avremmo ottenuto una compressione del segnale, ovvero un segnale più "stretto" che varia più bruscamente.

> Possiamo vedere il segnale come una "fisarmonica": quando si moltiplica la variabile temporale per un coefficiente che in valore assoluto è minore di 1 questo segnale si allarga, mentre se viene moltiplicato per un coefficiente che in valore assoluto è maggiore di uno quest'ultimo si restringe.

Seguendo la tesi, senza ancora dimostrarla, sappiamo che lo spettro si comporta esattamente all'opposto del segnale temporale: se quest'ultimo si dilata il suo spettro si restringe e viceversa. Dato che nell'esempio appena affrontato abbiamo trattato un seno cardinale, sappiamo che nel suo spettro vi sarà un $rect(-f) = rect(f)$ *[T. Dualità]* , questo spettro $Y(f)$ sarà più "stretto" rispetto allo spettro del segnale "originale" (in cui non è stata applicata la dilatazione temporale) $X(f)$:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad |\alpha| < 1}$$



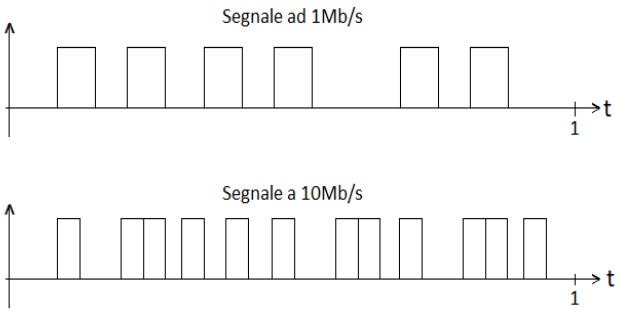
Come possiamo vedere:

- → Ad una **dilatazione nel dominio dei tempi** corrisponde una **compressione nel dominio delle frequenze**
- → Ad una **compressione nel dominio dei tempi** corrisponde una **dilatazione nel dominio delle frequenze**

Il segnale dilatato nel tempo è più lento e per tal motivo ha uno spettro che viene compresso perché si necessita una banda minore per trasmetterlo.

<u>Esempio</u>: Se si prende in analisi il trasferimento dei bit, quando si vuole trasferire alla velocità di 1Mb/s si vuole trasmettere 1 milione di bit (supponiamo che essi siano trasmessi mediante onde quadre, quindi 1 milione di onde quadre) in un secondo. Se si vuole aumentare questa velocità si deve necessariamente comprimere la scala dei tempi: per arrivare a 10Mb/s dovremo comprimere il nostro segnale affinché, allo stesso tempo di 1 secondo, vengano trasferiti 10 milioni di campioni anzicché 1 milione. Chiaramente, per trasferire un segnale a 10Mb/s avremo bisogno di una banda maggiore. Questo significa che **per trasferire un segnale più veloce si necessita di più banda**, come possiamo osservare, il dominio del tempo è sempre in contrapposizione al dominio della frequenza: se si ha una compressione dei tempi si ha una dilatazione in banda (in frequenza) e viceversa.

[Nel grafico è rappresentata la quantità di Bit che viaggiano alla velcità di 1Mb/s e quelli alla velocità di 10Mb/s, chiaramente non è possibile fare un grafico fedele con 10 milioni di campioni, questo è un grafico non in scala che serve a rendere l'idea di quanto accade aumentando la velocità di trasmissione sel segnale].



Dimostriamo il teorema, tuttavia è bene specificare che di questo teorema non è importante ricordarne la dimostrazione, quanto da ricordare è il seguente:

La compressione di un segnale nel dominio del tempo corrisponde alla dilatazione del suo spettro in frequenza, viceversa, alla dilatazione del segnale nel dominio del tempo corrisponde la compressione della sua banda nel dominio della frequenza.

Questo si traduce come segue: un segnale più veloce (più compresso) occupa una banda maggiore affinché possa essere trasmesso (avrà una banda più dilatata), viceversa, un segnale più lento (diltato nel tempo) necessita di una banda minore affinché possa essere trasmesso (compresso in frequenza) (chiaramente, maggiore è la banda in Hz e maggiore sarà il costo).

Consideriamo il segnale $x(\alpha t)$ con $\alpha > 0$ e ricaviamo da esso la trasformata:

$$X(f) = F[x(\alpha t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Poniamo la sostituzione: $z = \alpha t \rightarrow x(\alpha t) = x(z)$, ottenendo così:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \rightarrow \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)\, e^{-j2\pi f (z/\alpha)}\, dz$$

- si noti che all'esponente vi è "t", avendo sostituito $z = \alpha t$ avremo per formula inversa: $t = z/\alpha$
- al posto di "dt" abbiamo $d(z/\alpha)$, ma siccome "α" è costante, avremo semplicemente dz

Risolvendo l'integrale otteniamo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)\, e^{-j2\pi f (z/\alpha)}\, dz \; = \frac{1}{\alpha}\, X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Consideriamo adesso il caso in cui $\alpha < 0$:

$$X(f) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)\, e^{-j2\pi f (z/\alpha)}\, dz \; = -\frac{1}{\alpha}\, X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

In generale otteniamo il risultato:

$$x(\alpha t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|\alpha|}\, X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Questo conferma quanto detto finora:

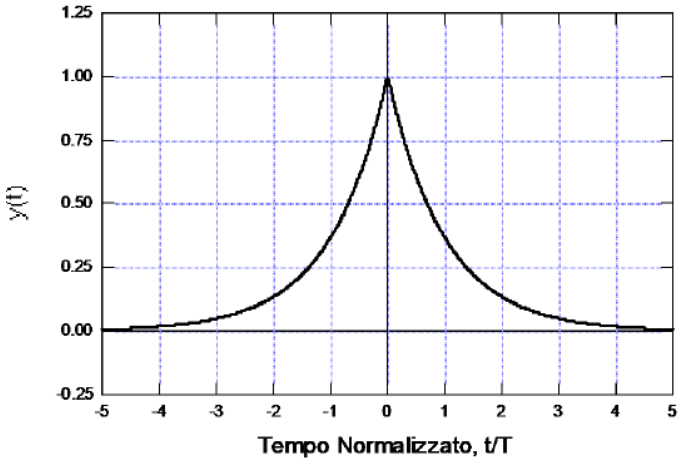
- Una **dilatazione nell'asse dei tempi** comporta una **compressione nell'asse delle frequenze**
- Una **compressione nell'asse dei tempi** comporta una **dilatazione nell'asse delle frequenze**

Si ricordi che dilatazione e compressione sono correlati al concetto di velocità del segnale:

- Un **segnale veloce** è un segnale che varia in tempi più stretti, questo significa che **più un segnale è compresso nell'asse temporale e più sarà veloce e, di controparte, maggiore sarà la banda che occuperà dato che vi sarà una dilatazione di quest'ultima**
- Viceversa, un **segnale lento** è un segnale che varia in tempi più lunghi, questo significa che **più un segnale è dilatato nell'asse temporale e più sarà lento e minore sarà la banda che occuperà dato che vi sarà una compressione di quest'ultima**

□

Esempio: anche se abbiamo trattato questo teorema solo dal punto di vista teorico per capire la relazione che c'è tra tempo e frequenza e come il comportamento del segnale in questi due domini si ripercuote sulla sua velocità, possiamo comunque sfruttare tale teorema per lo studio di un segnale, nello specifico di un segnale **esponenziale bilatero** perché possiamo vedere quest'ultimo come la somma di un segnale eponenziale unilatero a cui viene sommato un segnale esponenziale unilatero con la variabile temporale cambiata di segno (quindi con $\alpha = -1$):



$$x(t) = e^{-|t|/T}\, u(t) \qquad \rightarrow \qquad x(t) = e^{|t|/T}\, u(-t)$$

Avremo quindi che il segnale esponenziale bilatero sarà:

$$y(t) = x(t) + x(-t)$$

Utilizzando il teorema del cambiamento di scala supponendo che $\alpha = -1$ possiamo scrivere:

$$Y(f) = X(f) + X(-f) = X(f) + \frac{1}{|\alpha|}\, X\left(\frac{f}{\alpha}\right) = X(f) + \; X(-f)$$

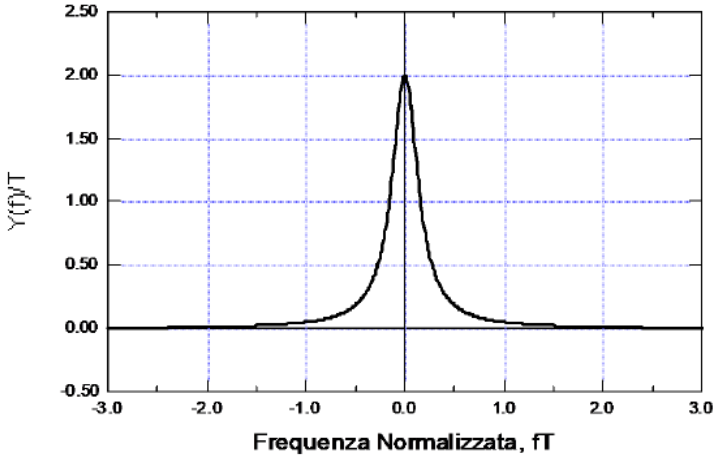
Dai calcoli già effettuati prima sappiamo che la trasformata di un segnale esponenziale unilatero è:

$$X(f) = F[e^{t/T}] = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

Per cui possiamo scrivere:

$$Y(f) = X(f) + X(-f)$$

$$Y(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT} + \frac{T}{1 - j2\pi fT} = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$



Riportiamo di seguito la trasformazione di un esponenziale bilatero schematizzandola:

Dominio del tempo	***Dominio della frequenza***
$\boldsymbol{x(t) = e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) + e^{-\frac{t}{T}}\, u(t)} \quad \rightarrow$	$\boldsymbol{X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}}$

5) Teorema della modulazione

Un importante teorema sulla trasformata di Fourier è quello sulla modulazione, esso sta alla base dei segnali che vengono trasmessi mediante onde radio o altri canali eterei.

HP: Sia dato un segnale $x(t)$ avente come spettro la corrispettiva trasformata $X(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f)$$

Si supponga di moltiplicare questo segnale per un segnale cosinusoidale che verrà detto **segnale portante**, definito ad una frequenza "f_0" decisa in sede di progettazione: $\boldsymbol{\cos(2\pi f_0 t)}$

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

TS: Si può dimostrare che lo spettro $X(f)$ del segnale moltiplicato per la cosinusoide: $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ è molto simile allo spettro originale del segnale $x(t)$: nello specifico si tratta della semi-somma della trasformata traslata a destra e a sinistra della quantità f_0 :

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \xrightarrow{F} \quad Y(f) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Dimostrazione:

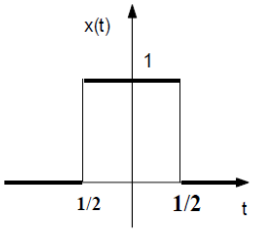
Prima di dimostrare il teorema capiamo cosa significa modulare il segnale e come varia un segnale che viene moltiplicato per una portante cosinusoidale:

Supponiamo di prendere in considerazione un segnale rect:

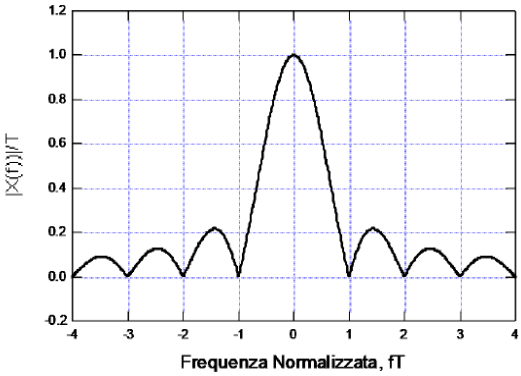
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

Questo segnale sarà centrato in 0, con ampiezza unitaria e definito tra $\pm T/2 = \pm 1/2$ e avrà uno spettro (bilatero) delle ampiezze avente la forma di un seno cardinale (si ricordi che, siccome si tratta di moduli, le parti negative del segnale vengono ribaltate).

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$X(f) = T\,sinc(fT)$$



Vediamo adesso cosa accade quando **il segnale viene moltiplicato per il segnale portante cosinusoidale**, otteniamo quindi il segnale seguente:

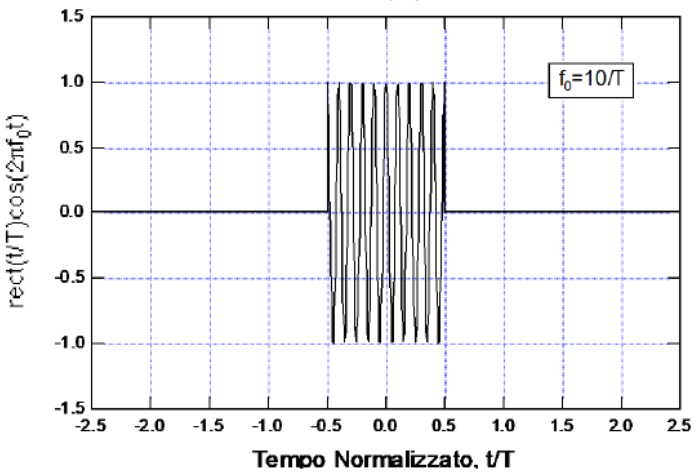
$$y(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Supponiamo che il segnale portante si trovi ad una frequenza $f_0 = 10/T$.

Per capire la forma che assume il segnale nel dominio frequenziale ci basterà andare a calcolare il prodotto tra segnali:

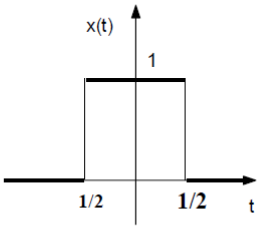
- Nel caso in cui $t < -\frac{T}{2}\left(quindi\ t < -\frac{1}{2}\right)$ oppure quando $t > \frac{T}{2}\left(quindi\ t > \frac{1}{2}\right)$ il segnale rect è nullo, quindi il risultato è un segnale pari a 0
- Quando $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $\left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right)$ il segnale è unitario e, moltiplicato per il coseno, il risultato finale sarà un segnale cosinusoidale a frequenza f_0

$$y(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$



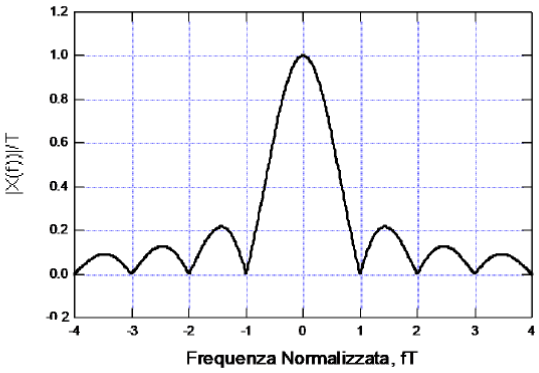
Lo spettro del nuovo segnale consiste nello spettro del segnale originale che viene modificato come segue: esso viene centrato in $f_0 = 10/t$ e in $-f_0 = -10/T$ (essendo speculare) e avrà un'ampiezza pari a $1/2$, a differenza dello spettro del segnale originale che aveva un'ampiezza unitaria.

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

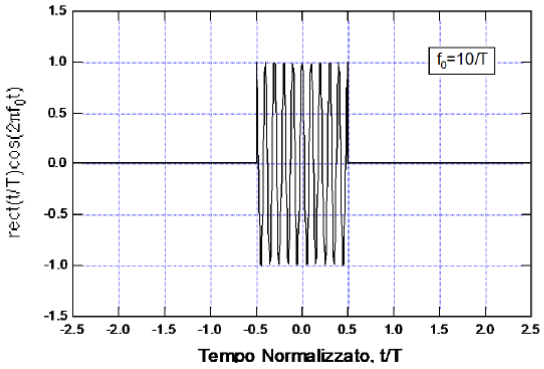


F[ ]

$$X(f) = T\ sinc(fT)$$

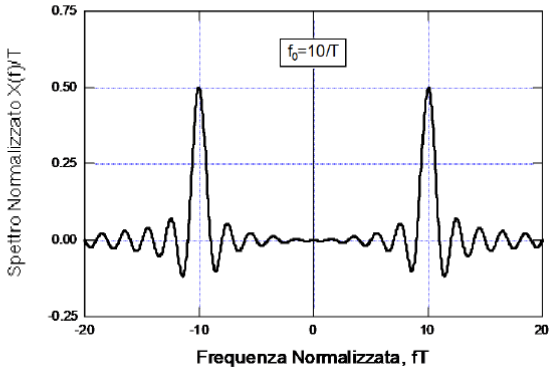


$$y(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$



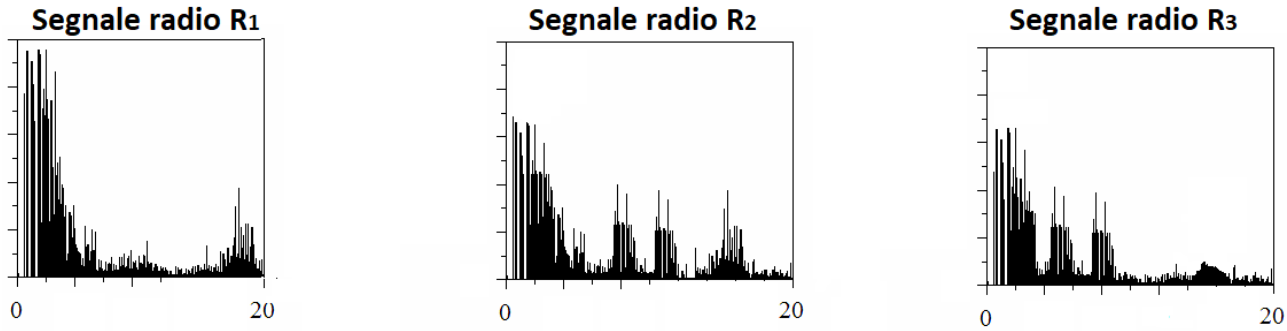
F[ ]

$$Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$



Grazie a questo teorema abbiamo ottenuto un importante risultato: **moltiplicando il segnale per una determinata portante cosinusoidale a frequenza f_0 possiamo "spostare" lo spettro del segnale centrandolo alla frequenza f_0.**

Questo teorema è fondamentale: supponiamo di voler considerare tutte le stazioni radio e che la banda per il segnale acustico viaggia a frequenze che variano da $20Hz$ a $20kHz$; ogni segnale avrà un andamento differente ma si ritroveranno tutti nello stesso intervallo.



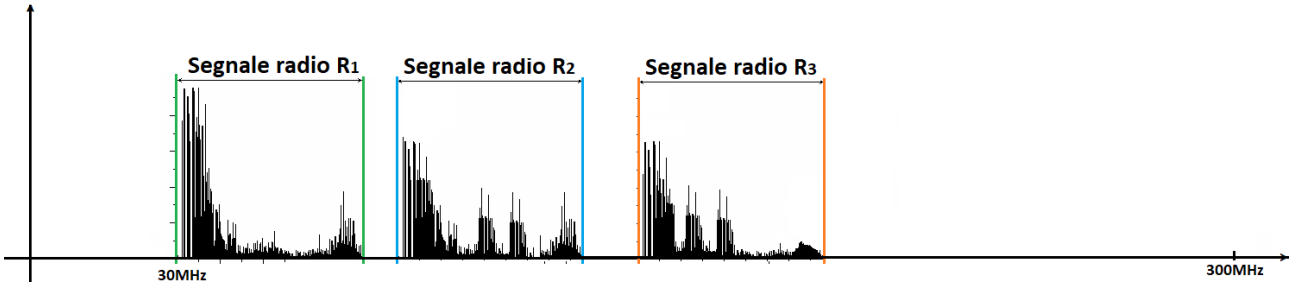
Se si vogliono trasmettere tutti e tre i segnali insieme e ciò si facesse nella stessa banda [20Hz – 20kHz] accadrebbe che tali segnali si sovrapporrebbero ed il risultato sarebbe un insieme di segnali che si sovrappongono.

Grazie al teorema della modulazione si fissa una banda di frequenza per le radio locali, contraddistinguendoli dai restanti segnali radio provenienti da altre sorgenti (come le trasmissioni dei segnali delle autorità o i segnali telefonici, ad esempio).
Inoltre, la banda destinata alle trasmissioni radio può ulteriormente essere suddivisa in modo che si possano trasmettere segnali da radio differenti sulla stessa banda.

Ad esempio, supponendo (idealmente) di voler destinare la banda del canale etereo [30MHz – 300MHz] per i canali radiofonici, possiamo utilizzare tre portanti differenti per i tre segnali radio in modo da centrare gli spettri in tre frequenze differenti e riuscire a trasmettere i segnali senza sovrapposizioni; ad esempio possiamo suddividere come segue:

- La radio R_1 trasmette un segnale modulato con una portante a frequenza $30MHz + 10MHz$
- La radio R_2 trasmette un segnale modulato con una portante a frequenza $30MHz + 20MHz$
- La radio R_3 trasmette un segnale modulato con una portante a frequenza $30MHz + 30MHz$

In questo modo i segnali risultano essere suddivisi e non si sovrappongono nel canale etereo destinato alle trasmissioni radio (quello tra 30MHz e 3000MHz):



La banda destinata ai segnali radio viene suddivisa in più "sottobande": in più canali in cui ogni stazione radio può trasmettere e, per farlo, deve pagare il canale in questione. I blocchi di canali sono gestiti dallo stato, che li suddivide e li distribuisce.

Quando si passa da una stazione all'altra ciò che accade è che, muovendo la manopola, viene spostato un filtro che seleziona la banda del segnale trasmesso dalla radio in questione e "censura" le altre, rendendone così possibile l'ascolto senza interferenze.

Alcuni segnali necessitano di trovarsi a determinate frequenze, ad esempio, i segnali acustici si devono trovare tra 20Hz e 20KHz, questa è la banda di frequenze udibili all'orecchio umano; questo significa che tutte le componenti armoniche si trovano in questo intervallo, se viene data meno di questa banda accade che alcune armoniche vengono tagliate. Il risultato è che, se ad esempio, viene data una banda che arriva al massimo a 18KHz, alcune armoniche che identificano gli acuti della melodia vengono tagliate, questo si traduce in un audio con qualità poco accurata: gli acuti non si sentirebbero al meglio.
D'altra parte, potrebbe anche essere data una banda che arriva a 40KHz ma sarebbe "sprecata" perché l'udito non arriverebbe a percepire le armoniche che si trovano al di sopra di 20KHz.
La banda del segnale telefonico arriva fino a 4KHz, questo perché la voce umana si concentra perlopiù attorno a 4KHz (la potenza della voce umana è maggiore in queste frequenze e minore altrove), non si necessita di una banda larga quanto quella di un segnale radio perché, supponendo di disporre di una banda che arrivi dino a 20KHz, le armoniche che si trovano da 4KHz in poi non andrebbero utilizzati, quindi verrebbero sprecati.
Chiaramente queste osservazioni sono fatte dal punto di vista della fedeltà: un segnale vocale non deve essere fedele al 100% perché se si perde qualche informazione che risiede su qualche armonica (quindi se del segnale non si sentono, ad esempio, le armoniche alte), l'informazione non risulta contraffatta; differentemente, se si necessita di una fedeltà del 100% allora è bene lasciare una banda molto ampia, che racchiude delle frequenze a cui teoricamente il segnale non dovrebbe arrivare.

Dimostriamo il teorema della modulazione:
Calcoliamo la trasformata del segnale modulato, ovvero del segnale ottenuto come prodotto del segnale modulante $x(t)$ e del segnale portante cosinusoidale $\cos(2\pi f_0 t)$:

$$Y(f) = F[x(t)\cos(2\pi f_0 t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\cos(2\pi f_0 t)]\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Ricorrendo alle formule di Eulero, possiamo scrivere il coseno come segue:

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

E quindi sostituendo al posto del segnale portante nella trasformata otteniamo:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\cos(2\pi f_0 t)] e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)\right] e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Suddividiamo i due esponenziali ottenuti dalla formula di Eulero, ottenendo così la somma di due integrali:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(e^{j2\pi f_0 t}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(e^{-j2\pi f_0 t}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Eseguiamo la moltiplicazione tra gli esponenti, mettendo in evidenza l'esponente $-j2\pi t$, scoprendo che otterremo due integrali in cui avremo nel primo un esponenziale in cui all'esponente figura la differenza $(f - f_0)$ e nel secondo in cui all'esponente si trova $(f + f_0)$:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t}\, dt$$

Ma si noti che le due quantità ottenute sono due trasformate di Fourier per due segnali che sono traslati in frequenza della quantità f_0, prima verso destra e poi verso sinistra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt = X(f - f_0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t}\, dt = X(f + f_0)$$

Per cui otterremo:

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \quad \rightarrow \quad F[x(t)\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

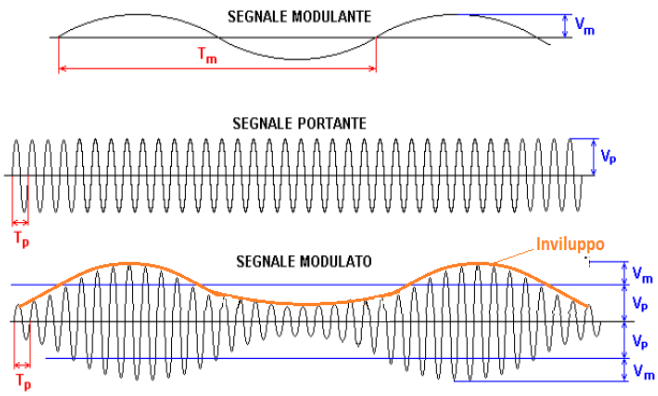
□

<u>Esempio</u>: Questo significa che se, ad esempio, modulassimo un segnale con una portante del tipo $\cos(2\pi 1000t)]$ il risultato nello spettro sarebbe un segnale che viene traslato della frequenza $f_0 = 1000$:

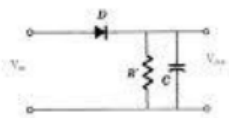
$$Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} = \frac{X(f - 1000) + X(f + 1000)}{2}$$

Questa modulazione prende il nome di **modulazione d'ampiezza** ed è stata la prima tipologia di modulazione utilizzata dato che il demodulatore, l'apparato per ottenere il segnale modulante che contiene le informazioni a partire dal segnale modulato, è molto semplice.

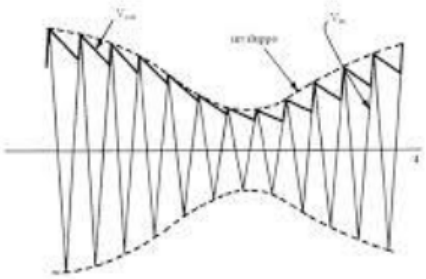
Quando si moltiplica il segnale modulante con la portante si ottiene un segnale che ha un andamento, chiamato **inviluppo**, che consiste praticamente nel segnale modulante ma viaggia ad una frequenza che viene stabilita dalla portante, la frequenza che abbiamo chiamato "f_0".



Per trarre dal segnale modulato il segnale modulante possiamo ricorrere all'utilizzo di alcuni circuiti come i rilevatori di picco, dei circuiti R-C che consentono di rilevare il picco del segnale attraverso una continua carica/scarica di un consendatore, che "insegue" il segnale modulato che lo alimenta.

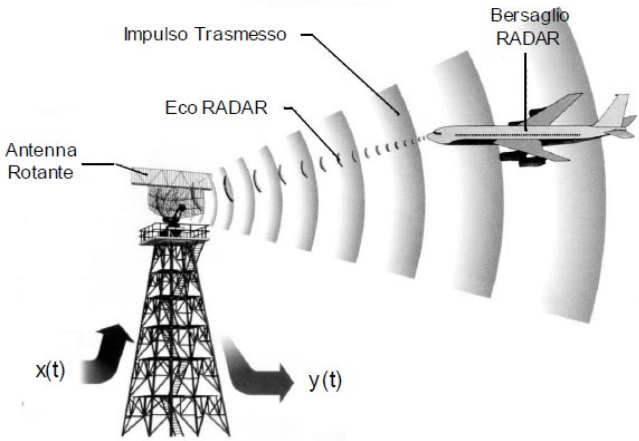


Questo demodulatore è molto semplice, dato che consiste in un semplice circuito R-C, ciò spiega la larga diffusione della modulazione d'ampiezza. Ad oggi la modulazione d'ampiezza è meno utilizzata perché non è esente dai disturbi sul canale, ad essa sono preferite le modulazioni di fase e, in generale, le modulazioni digitali, adatte ai sistemi digitali ma che comunque basano il loro funzionamento sulle modulazioni analogiche (come quella d'ampiezza o fase).



<u>Esempio: il radar</u>

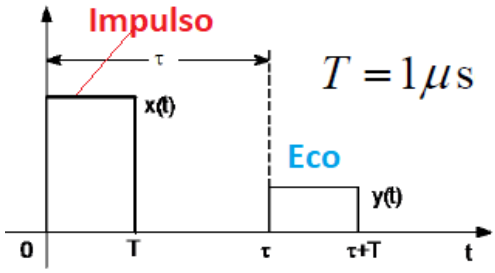
Un classico esempio di applicazione della modulazione è il radar; esso basa il suo funzionamento sul principio di riflessione delle onde da parte dei corpi metallici: gli aerei sono in grado di riflette le onde (eco), il radar allora emette un impulso molto stretto (con un tempo di circa $1\mu s$) e si mette in ascolto per ricevere l'onda riflessa dal bersaglio radar. Quando quest'ultima arriva, oltre a stimare la presenza di un aereo, è possibile anche stimare la sua distanza, mediante il tempo impiegato dall'eco radar per tornare indietro (τ):



$$d = \frac{c\tau}{2}$$

Con "c" velocità della luce e "τ" tempo trascorso tra l'impulso emanato dal radar e l'eco ricevuto.

Lo spettro delle ampiezze del segnale che viene trasmesso ci da un'informazione importante: la maggior parte della potenza si trova nelle armoniche (nei coseni) tra -1 e 1, dato che l'ampiezza in tale intervallo è maggiore. Dato che $t = 1\mu s$ avremo una frequenza:

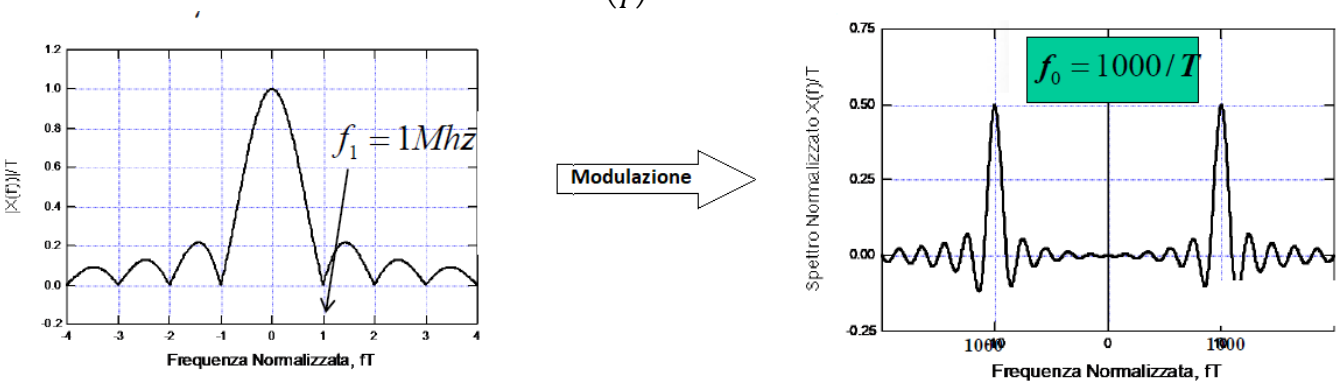


$$f = \frac{1}{t} = \frac{1}{1\mu s} = 1MHz$$

Affinché però avvenga la rifrazione delle onde, l'onda deve essere nell'ordine dei GHz, ovvero 1000 volte f, per questo motivo si necessita di una modulazione che, attraverso una portante nell'ordine dei GigaHertz adatti il segnale affinché possa avvenire il fenomeno della rifrazione sul corpo metallico.

Il segnale trasmesso sarà dunque:

$$y(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right)$$



6) Teorema di derivazione

Il teorema di derivazione è un teorema che serve perlopiù per i calcoli con la trasformata di Fourier, insieme al teorema di integrazione.

HP: Sia dato un segnale nel dominio del tempo $x(t)$ avente come spettro la trasformata $X(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f)$$

Si supponga di derivare questo segnale, ottenendo così:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

TS: Si può dimostrare che lo spettro $Y(f)$ del segnale derivato corrisponde alla moltiplicazione della trasformata del segnale non derivato ed il valore $(j2\pi f)$:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \xrightarrow{F} \quad Y(f) = j2\pi f * X(f)$$

Dimostrazione:

Tenendo presente che è possibile ricavare $x(t)$ come antitrasforata dello spettro $X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Possiamo definire la derivata del segnale temporale $x(t)$ come derivata della corrispondente antitrasformata:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df\right]$$

Portiamo dentro l'operazione d'integrazione, ottenendo così:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[X(f)\, e^{j2\pi f t}\right] df$$

Si noti che $X(f)$ non dipende da "t" quindi possiamo protarla fuori dall'operazione di derivazione:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[X(f)\, e^{j2\pi f t}\right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * \frac{d}{dt}\left[\, e^{j2\pi f t}\right] df$$

Ricordando che la derivata di un esponenziale è data dal medesimo esponenziale moltiplicato per la derivata dell'esponente:

$$\frac{d}{dt}\left[\, e^{j2\pi f t}\right] = (j2\pi f)\, e^{j2\pi f t}$$

Possiamo scrivere:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * \frac{d}{dt}\left[\, e^{j2\pi f t}\right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * \left[(j2\pi f)\, e^{j2\pi f t}\right] df$$

Notiamo che la quantità ottenuta è **l'antitrasformata del segnale $\boldsymbol{X(f) * (j2\pi f)}$,** per cui possiamo scrivere che la trasformata del segnale derivato è proprio quest'ultima:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \xrightarrow{F[\,]} \quad Y(f) = X(f) * (j2\pi f)$$

□

Il fatto che si ottenga come trasformata il prodotto tra il termine costante $(\boldsymbol{j2\pi f})$ e la trasformata del segnale non derivato $\boldsymbol{X(f)}$ vuol dire che ogni armonica del segnale a frequenza f_0, f_1, f_2 … viene moltiplicata per il termine $j2\pi f_0, j2\pi f_1, j2\pi f_2$, …Questo significa che **maggiore è la frequenza dell'armonica e maggiore sarà il coefficiente $(\boldsymbol{j2\pi f})$** quindi **<u>le componenti ad alta frequenza vengono esaltate</u>.** Possiamo quindi affermare che **l'operazione di derivata comporta un'esaltazione delle componenti alle alte frequenze.**

[Questo teorema è praticamente analogo al teorema omonimo per la trasformata di Laplace, supponendo che $s = j2\pi f$]

7) Teorema d'integrazione

HP: Sia dato un segnale nel dominio del tempo $x(t)$ avente come spettro la trasformata $X(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f)$$

Si supponga di integrare questo segnale, ottenendo così:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, d\alpha$$

TS: Si può dimostrare che lo spettro $Y(f)$ del segnale integrato corrisponde al rapporto tra la trasformata del segnale non derivato ed il valore $(j2\pi f)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, d\alpha \quad \xrightarrow{F} \quad Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Dimostrazione:

Chiaramente, se $y(t)$ è ottenuto integrando $x(t)$ allora vale anche il reciproco: possiamo ottenere $x(t)$ derivando $y(t)$, possiamo dunque considerare quest'ultimo e, applicando il teorema di derivazione, ottenerne la trasformata:

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \xrightarrow{F[\,]} \quad X(f) = Y(f) * (j2\pi f)$$

Allora **sotto l'opportuna condizione in cui $\boldsymbol{f \neq 0}$** possiamo automaticamente trovare la trasformata del segnale $Y(f)$ operando direttamente sul dominio della frequenza, in funzione di $X(f)$:

$$X(f) = Y(f) * (j2\pi f) \quad \rightarrow \quad Y(f) = \frac{X(f)}{(j2\pi f)}$$

Allora, poggiandoci sul teorema di derivazione, abbiamo ottenuto la trasformata di un segnale derivato.

Si noti che al denominatore abbiamo il coefficiente $(j2\pi f)$, per questo motivo abbiamo forzato la condizione che $\boldsymbol{f \neq 0}$, nel caso in cui $f = 0$ ci ritroveremmo davanti ad un denominatore nullo.
In questo caso ci ritroveremmo davanti al caso:

$$f = 0 \quad \rightarrow \quad X(f) = X(0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(0)t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) * 1\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = y(+\infty) = 0$$

□

In questo caso, dato che **all'aumentare della frequenza aumenta anche il coefficiente $(\boldsymbol{j2\pi f})$,** siccome questo coefficiente divide il segnale non integrato $X(f)$, **maggiore è la frequenza e più attenuata sarà l'armonica corrispondente**, di controparte: **minore è la frequenza e meno l'armonica sarà attenuata**.
Quindi possiamo affermare che **l'operazione di integrazione comporta un'esaltazione delle componenti a bassa frequenze** (e quindi un'attenuazione delle componenti ad alta frequenza)**.**

[Questo teorema è praticamente analogo al teorema omonimo per la trasformata di Laplace, supponendo che $s = j2\pi f$]

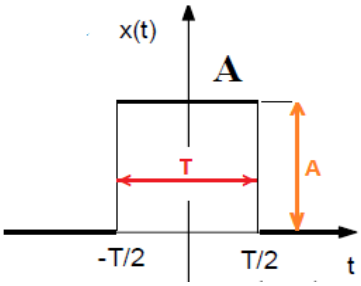
<u>Esempio</u>: il signal processing fonda il suo funzionamento sulle operazioni di derivazione ed integrazione del segnale nel dominio del tempo:

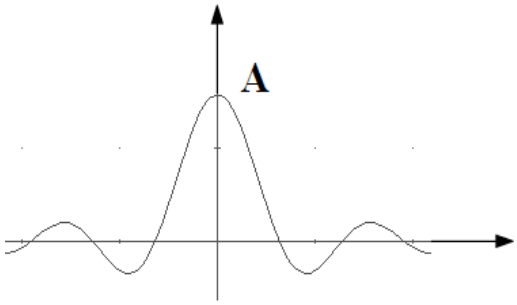
- Quando si suona una chitarra elettrica e se ne vuole esaltare il suono acuto di viene praticamente settato e adoperato un filtro variabile in modo che esso effettui un'operazione di derivazione: vengono in questo modo esaltate le alte frequenze, quindi gli acuti.
- Se invece si vogliono esaltare i bassi basterà settare il filtro facendo un'integrazione del segnale.

L'impulso triangolare

Abbiamo fino ad ora visto dei segnali notevoli come il rect, un "rettangolo" definito tra $\pm T/2$, avente una base pari a "T" ed una'ampiezza pari ad "A".
Come abbiamo visto, trasformando questo segnale si ottiene un seno cardinale nel dominio della frequenza, come già visto:

$$\boldsymbol{x(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)} \qquad \boldsymbol{X(f) = F[x(t)] = A\,[T\, sinc(fT)]}$$

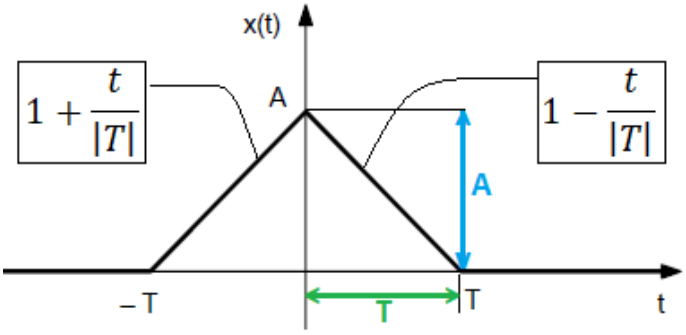




Un altro importante segnale che spesso utilizzaremo nella trattazione è il **segnale triangolare** $\Delta(\boldsymbol{t/T})$, anche per questo segnale, come nel caso del rect, "T" è la largezza della **semibase** e non si riferisce ad un tempo specifico (per questo motivo non si può semplificare con la variabile "t").

Si noti bene che si tratta della <u>semibase</u>, a differenza del rect in cui "T" identificava la lunghezza dell'intera base. Il segnale originale, ha ampiezza unitaria (quindi non essendo premoltiplicato per alcuna ampiezza "A"), considerando un triangolo di ampiezza "A" esso assume la forma seguente:

$$\boxed{x(t) = \Delta(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & per\ |t| < T \\ 0 & altrove \end{cases}}$$



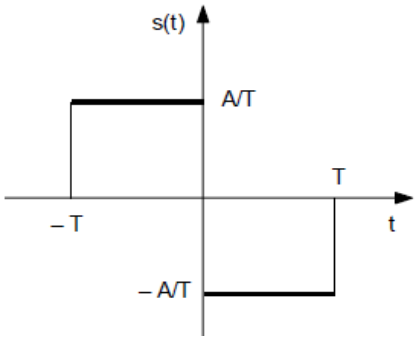
Praticamente si tratta di due rampe con coefficienti opposti:

- Una rampa che cresce da $(-T, 0)$ e arriva a $(0, A)$
- Una rampra che decresce da $(0, A)$ e arriva a $(T, 0)$

Come possiamo osservare dal grafico stesso.

Così come per il segnale rect abbiamo ottenuto la trasformata e quindi lo spettro, anche per il segnale triangolare andremo a valutarne la corrispondente trasformata nel dominio della frequenza.

Ragioniamo pertanto come segue:
Se dovessimo derivare il nostro segnale triangolare, quindi se dovessimo fare la derivata della rampa sul semiasse negativo e la derivata sul semiasse positivo, andremo a ritrovare due gradini poiché la derivata di una rampa è, appunto, un gradino.
Infatti possiamo ricavare la derivata del segnale rettangolare come differenza di due rect centrati rispettivamente in $T/2$ e $-T/2$ di ampiezza A/T (si noti che, effettivamente, rect e gradino sono graficamente equivalenti):



$$s(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\Delta(t)}{dt} = \frac{A}{T}\, rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \frac{A}{T}\, rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Questo passaggio al rect mediante derivazione è stato utile per passare al dominio della frequenza: conosciamo lo spettro del segnale rect pertanto vediamo di partire dal segnale appena ottenuto e vediamo di ottenerne la trasformata.

Il segnale:

$$s(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\Delta(t)}{dt} = \frac{A}{T}\, rect\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{A}{T}\, rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

È somma (algebrica) di due segnali rettangolari ritardati di $T/2$, per cui sapendo che la trasformata di un rect è un seno cardinale e poggiandoci sul teorema del ritardo:

$$T.Ritardo: \quad x(t-\alpha) \xrightarrow{F[\,]} X(f)e^{-j2\pi\alpha}$$

Possiamo scrivere:

$$S(f) = \frac{A}{T}\left[T\, sinc(fT)e^{-j2\pi f\left(-\frac{T}{2}\right)}\right] - \frac{A}{T}\left[T\, sinc(fT)e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right]$$

$$S(f) = \frac{A}{T}\left[T\, sinc(fT)e^{j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right] - \frac{A}{T}\left[T\, sinc(fT)e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right]$$

Dato che:

- Permane il termine costante a moltiplicare: $\pm A/T$
- La trasformata del rect è un seno cardinale
- Il ritardo di $\pm T/2$ implica una moltiplicazione dei due termini per $e^{-j2\pi f(T/2)}$ ed $e^{-j2\pi f(-T/2)}$

Possiamo semplificare i termini "T": a moltiplicare i due seni cardinali con i corrispettivi "T" al denominatore del termine A/T e, secondariamente, possiamo anche semolificare il 2 all'esponenziale:

$$S(f) = A\left[sinc(fT)e^{j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)} - sinc(fT)e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right] \rightarrow S(f) = A\left[sinc(fT)e^{j\pi f(T)} - sinc(fT)e^{-j\pi f(T)}\right]$$

Mettiamo in comune il seno cardinale così da vedere la differenza tra i due seni cardinali come segue:

$$S(f) = A\left[sinc(fT)e^{j\pi fT} - sinc(fT)e^{-j\pi fT}\right] = A\, sinc(fT)\left[e^{j\pi f(T)} * e^{-j\pi f(T)}\right]$$

Applicando le formule di Eulero possiamo scomporre il seno come segue:

$$\left[\sin(x) = \frac{e^{jx} * e^{-jx}}{2j}\right]$$

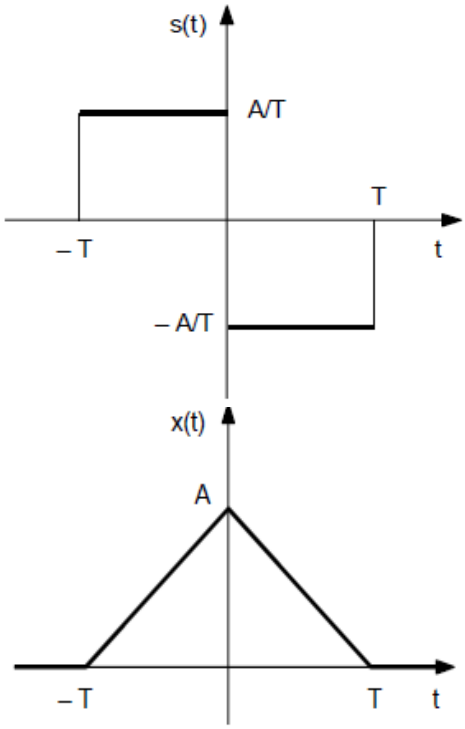
Possiamo ottenere questa forma moltiplicando e dividendo per $2j$, ottenendo così:

$$S(f) = A\, sinc(fT)\left[e^{j2\pi fT} * e^{-j2\pi fT}\right] = \frac{2j}{2j}\, A\, sinc(fT)\left[e^{j2\pi fT} * e^{-j2\pi fT}\right]$$

$$S(f) = 2j\, A\, sinc(fT)\left[\frac{e^{j\pi fT} * e^{-j\pi fT}}{2j}\right] = 2j\, A\, sinc(fT)\sin(\pi fT)$$

Quindi a questo punto abbiamo ottenuto che la trasformata del segnale $s(t)$ è la seguente:

$$S(f) = F[s(t)] = 2j\, A\, sinc(fT)\sin(\pi fT)$$



Ricapitolando, abbiamo costruito il segnale $s(t)$ a partire dalla derivazione del segnale triangolare $x(t)$, il che significa che vale anche il viceversa: **il segnale triangolare $x(t)$ si può ottenere dall'integrazione del segnale $s(t)$.**

Questo ci porta ad un importante risultato: attraverso il <u>teorema dell'integrazione</u> possiamo ottenere la trasformata del segnale triangolare:

$$T.Integrazione: \quad X(f) = \frac{S(F)}{j2\pi f}$$

Otteniamo allora quanto segue:

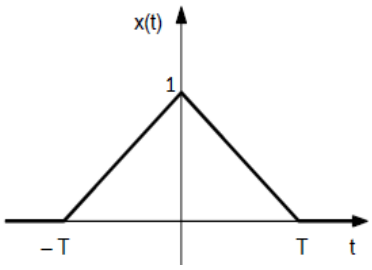
$$X(f) = \frac{2j\, Asinc(fT)\sin(\pi fT)}{j2\pi f} = \frac{Asinc(fT)\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per "T" per ottenere la forma di un seno cardinale:

$$X(f) = \frac{Asinc(fT)\sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{T}{T} * \frac{Asinc(fT)\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT\,[sinc(fT)]\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]$$

$$X(f) = AT\,[sinc(fT)]\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right] = AT\,[sinc(fT)][sinc(fT)] = ATsinc^2(fT)$$

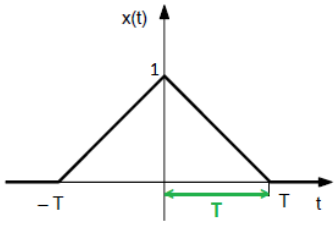
Quanto ottenuto la trasformata di un segnale triangolare di ampiezza "A".
In generale, la trasformata di un segnale triangolare (di ampiezza unitaria) è data dal prodotto della sua semibase "T" per un seno cardinale al quadrato:

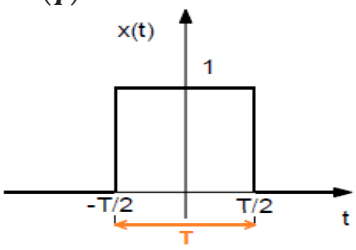


Dominio del tempo	***Dominio della frequenza***
$\boldsymbol{x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right)}$ $\rightarrow$	$\boldsymbol{X(f) = T\,sinc^2(fT)}$

Da questa relazione possiamo mettere a confronto il rect con il trinagolo, osservando che, effettivamente, essi hanno uno spettro molto simile; le uniche due differenze che cambiano tra i due risiedono sul fatto che per il rect viene considerata l'intera base mentre per il triangolo solo la semibase e che per il rect lo spettro è un seno cardinale, mentre per il triangolo si tratta di un seno cardinale al quadrato.

$$\boldsymbol{x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = T\,sinc^2(fT)} \qquad \boldsymbol{x(t) = \pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = T\,sinc(fT)}$$





Dal teorema della dualità possiamo anche ricavare la trasformata di Fourier di un seno cardinale al quadrato:

$$T.Dualità: \quad x(t) \rightarrow X(f) \qquad X(t) \rightarrow x(-f)$$

Dato che la trasformata di un triangolo è un seno cardinale al quadrato moltiplicato per il semiperiodo, per dualità, la trasformata del seno cardinale premolitplicato per il semiperiodo sarà un triangolo calcolato in $-f$ ma, siccome il triangolo è una funzione pari, questa è identica sia che venga considerata in $-f$ che in f:

$$T\,sinc^2(tT) \xrightarrow{F[\,]} \Delta\left(-\frac{f}{T}\right) = \Delta\left(\frac{f}{T}\right) \qquad \rightarrow \qquad T\,sinc^2(tT) \xrightarrow{F[\,]} \Delta\left(\frac{f}{T}\right)$$

Allora, volendo ricavare la trasforma del seno cardinale dovremo semplicemente semplificare il semiperiodo a moltiplicare, dividendo tutto per quest'ultimo:

$$\frac{1}{T} * [T\,sinc^2(tT)] \xrightarrow{F[\,]} \frac{1}{T}\left[\Delta\left(\frac{f}{T}\right)\right] \rightarrow sinc^2(tT) \xrightarrow{F[\,]} \frac{1}{T}\,\Delta\left(\frac{f}{T}\right)$$

Per le nostre trattazioni sarà fondamentale conoscere questi quattro segnali e deduerre velocemente le relative trasformazioni e le relazioni tra essi.

$\boldsymbol{x(t) = \pi\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F[\,]} X(f) = T\,sinc(fT)}$	$\boldsymbol{x(t) = sinc(tB) \xrightarrow{F[\,]} X(f) = \frac{1}{B}\,\pi\left(\frac{f}{B}\right)}$
$\boldsymbol{x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = T\,sinc^2(fT)}$	$\boldsymbol{x(t) = sinc^2(tT) \xrightarrow{F[\,]} \frac{1}{T}\,\Delta\left(\frac{f}{T}\right)}$

Dopo aver trattato nel dettaglio il segnale triangolare come caso di applicazione di alcuni teoremi visti fino ad ora, proseguiamo la trattazione con altri due teoremi caratteristici della trasformata di Fourier.

7) Teorema del prodotto

HP: Siano dati due segnali nel dominio del tempo: $x(t)$ avente come spettro la trasformata $X(f)$ ed $y(t)$ avente come spettro $Y(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f) \qquad y(t) \xrightarrow{F[\,]} Y(f)$$

E sia $z(t)$ un terzo segnale nel dominio del tempo dato dal prodotto tra $x(t)$ e $y(t)$:

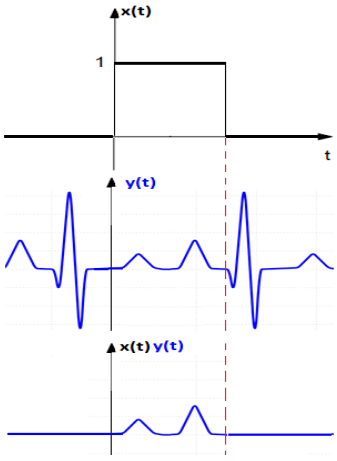
$$z(t) = x(t) * y(t)$$

TS: Si può dimostrare che lo spettro $Z(f)$ del segnale prodotto è dato dalla **convoluzione delle trasformate dei singoli segnali moltiplicati $X(f)$ e $Y(f)$**

$$z(t) = x(t) * y(t) \qquad \rightarrow \qquad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Dimostrazione:

Prima di dimostrare il teorema è necessario fare chiarezza sul prodotto di due segnali. Il prodotto di due segnali è un prodotto punto-a-punto tra due grafici: prendiamo, ad esempio, in considerazione un qualsiasi segnale moltiplicato per un segnale rect unitario. Il rect è nullo quasi ovunque meno che nell'intervallo di larghezza "T" in cui vale 1; se moltiplicassimo un qualsiasi segnale per questo rect il risultato sarebbe praticamente un segnale nullo quasi ovunque meno che nell'intervallo in cui è definito il rect, in tale intervallo il segnale mantiene la sua forma originale. Questo accade perché facendo il prodotto punto-a-punto dei grafici, dato che il rect è nullo al di fuori del suo intervallo di definizione, il risultato del prodotto tra punti si annulla. Quando invece viene raggiunto il periodo in cui il rect vale 1 il segnale viene moltiplicato per 1 e mantiene la sua forma originale. Il risultato dell'operazione sarà quindi il segnale originale "troncato" nell'intervallo in cui è definito il rect unitario.



Se abbiamo un segnale dato dal prodotto di altri due segnali e volessimo ottenere la sua trasformata dalla sua definizione otterremo quanto segue:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)y(t)]\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

A questo punto possiamo ragionare come segue: sostituiamo al segnale $x(t)$ la sua definizione come antitrasformata:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)y(t)]\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu t}\, d\nu\right] y(t)\; e^{-j2\pi f t}\; dt$$

*Per non andare in contrasto con la "f" all'esponenziale, andremo ad integrare rispetto ad una variabile d'appoggio: "ν" ma il significato dell'integrale rimane immutato.

A questo punto invertiamo gli integrali per riordinarli, in modo che tutto ciò che dipende dal tempo si troverà sotto il segno dell'integrale in dt mentre tutto ciò che dipende dalla variabile d'appoggio ν si ritroverò sotto l'integrale in $d\nu$:

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) e^{j2\pi\nu t}\, e^{-j2\pi f t} dt\right] d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) e^{j2\pi\nu t - j2\pi f t}\, dt\right] d\nu$$

In questo modo ci accorgiamo che sotto al segno d'integrale più interno vi è la trasformata di $y(t)$ traslata in frequenza:

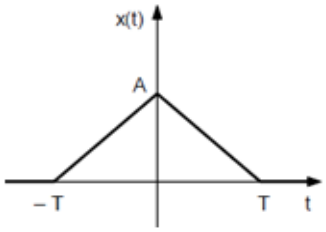
$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi(f-\nu)t}\, dt\right] d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, [Y(f-\nu)]\, d\nu$$

Queto integrale appena ottenuto è detto **integrale di convoluzione**:

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, [Y(f-\nu)]\, d\nu = X(f) \otimes Y(f)$$

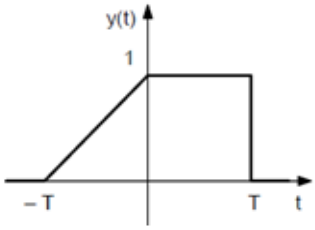
□

È di fondamentale importanza capire, oltre che ai passaggi matematici, cosa è effettivamente un **integrale di convoluzione** e cosa rappresenta.
La convoluzione è un'operazione tra due funzioni, siano essi nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza.
Supponiamo di avere due segnali nel dominio del tempo (praticamente una qualsiasi funzione): $x(t)$ e $y(t)$ rappresentati.



A questo punto ci chiediamo cosa significa effettuare la convoluzione tra questi due segnali, ovvero cosa significa ottenere il segnale:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)y(t-\alpha)d\alpha$$

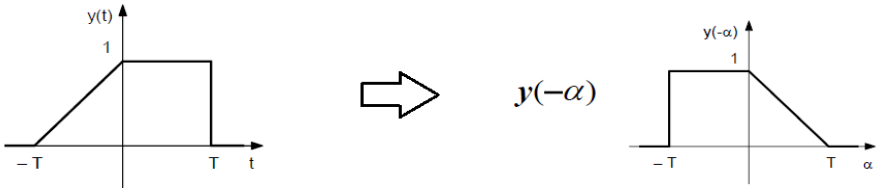


Supponiamo di voler calcolare la convoluzione in un punto t_0, ovvero di voler trovare il punto $z(t_0)$ e verifichiamo cosa accade applicando la definizione.

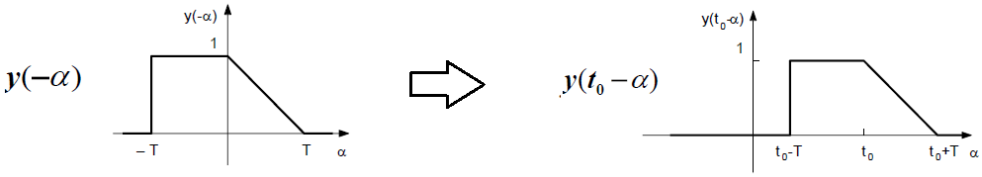
$$z(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)y(t_0-\alpha)d\alpha$$

Affrontiamo l'integrale per passi:

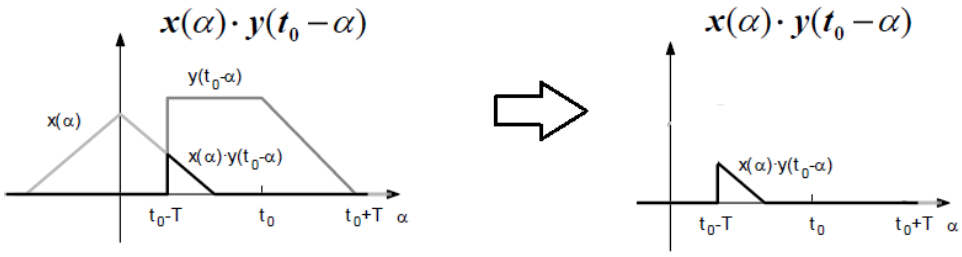
1. Per prima cosa consideriamo graficamente $y(-\alpha)$: si tratta praticamente di ribaltare il grafico, passando da $y(t)$ a $y(-t)$



2. Dato che ci interessa $y(t_0-\alpha)$ dovremo traslare della quantità t_0 il grafico ribaltato appena ottenuto:

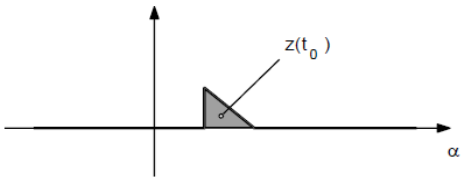


3. A questo punto non ci resta che calcolare il prodotto tra il segnale appena ottenuto ed $x(t_0)$, per ottenere così il segnale sotto il segna d'integrale: $x(t_0)y(t_0-\alpha)$



4. L'integrale è per definizione l'area sottesa da una curva, quindi passare all'integrale ci porterà a considerare l'area sottesa dalla funzione ottenuta

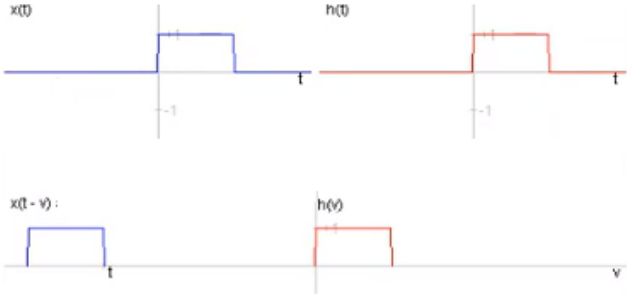
$$z(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\cdot y(t_0-\alpha)d\alpha$$



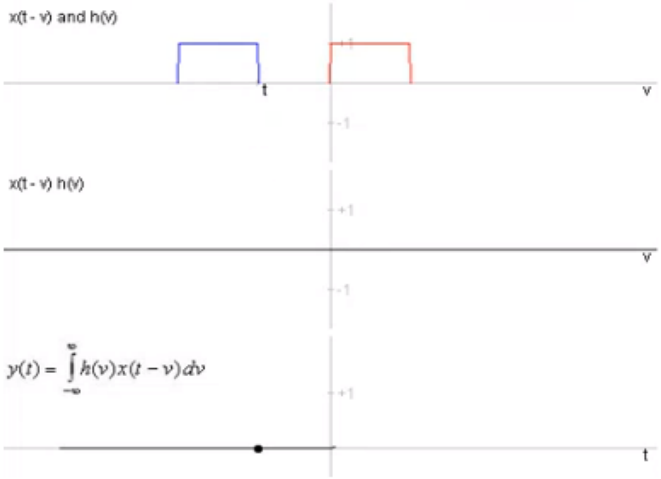
Quindi l'integrale di convoluzione restituisce l'area che viene sottesa da due funzioni.

Chiaramente, l'integrale è una "finestra" in movimento: il segnale viene integrato istante per istante, quindi la convoluzione viene fatta punto-a-punto per ogni istante. Per meglio capire questo concetto riportiamo degli esempi in cui viene fatta "scorrere" la finestra temporale formata dall'integrale.

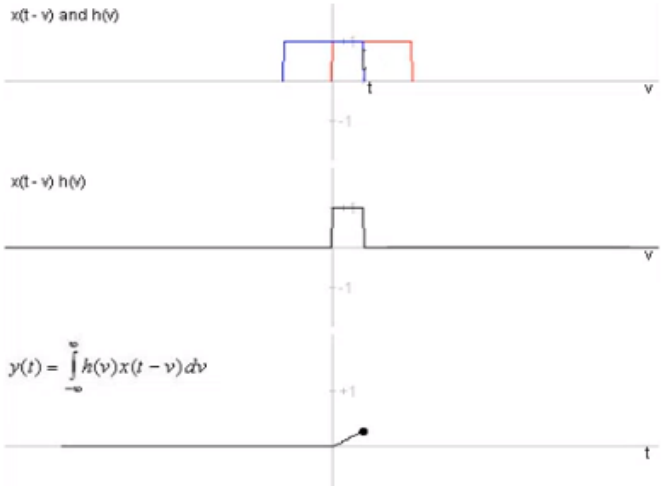
Consideriamo due rect identici: x(t) e h(t); per eseguire la convoluzione per prima cosa ribalteremo x(t), dopo di che trasleremo x(t), facendolo scorrere lungo l'asse temporale



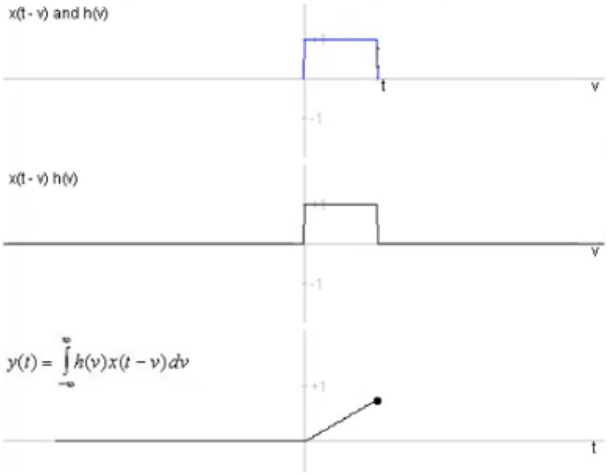
Fintanto che i due rect non si incontrano il loro prodotto sarà nullo quindi anche l'integrale sarà nullo.



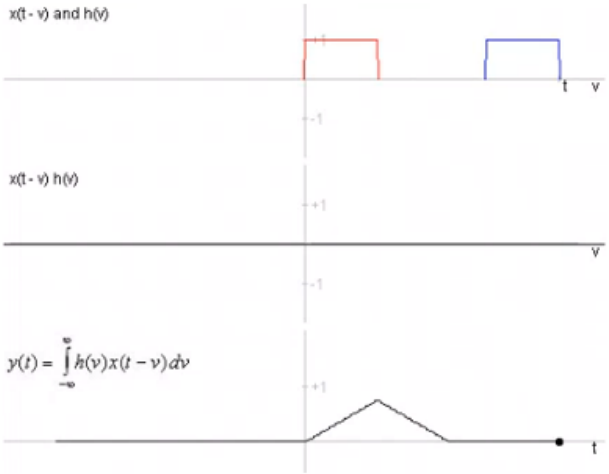
Man mano che scorre x(t), sovrapponendosi con h(t), il prodotto assume la forma di un rect unitario e l'integrale accresce il suo valore, assumendo l'andamento di una rampa



Il valore massimo dell'integrale viene raggiunto quando vi è totale sovrapposizione tra i due segnali. In questo caso l'integrale varrà 1: y(t)=1



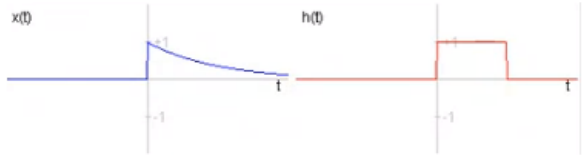
Man mano che il rect x(t) avanza l'integrale decresce il suo valore poiché x(t) si "allontanta" da h(t) fino a che il loro prodotto non sarà nuovamente nullo.



Questo è ciò che accade quando viene calcolato l'integrale di convoluzione: si lascia "scorrere" il segnale ribaltato in modo che esso si vada a sovrapporre con il secondo segnale e si calcola man mano che esso scorre il valore dell'area che entrambe le funzioni sottendono.

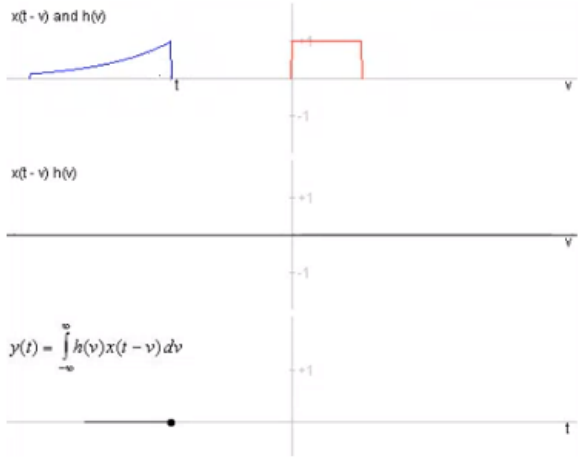
NB! Quello che abbiamo visto, come vedremo, è il funzionamento di un filtro ideale: si tratta di un rect che forma una "finestra" che permette di "isolare" una parte del segnale dal resto

Facciamo un altro esempio, considerando stavolta due segnali differenti:



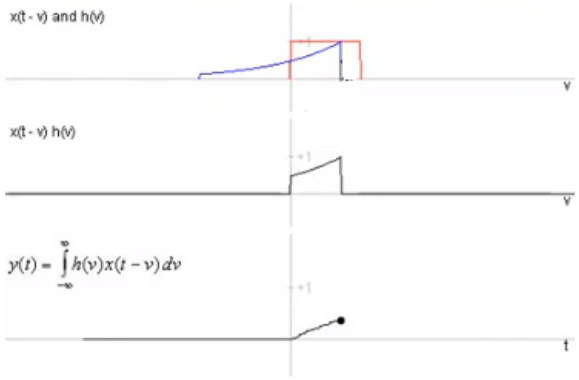
Viene ribaltato x(t) e viene traslato lungo l'asse temporale

(1)



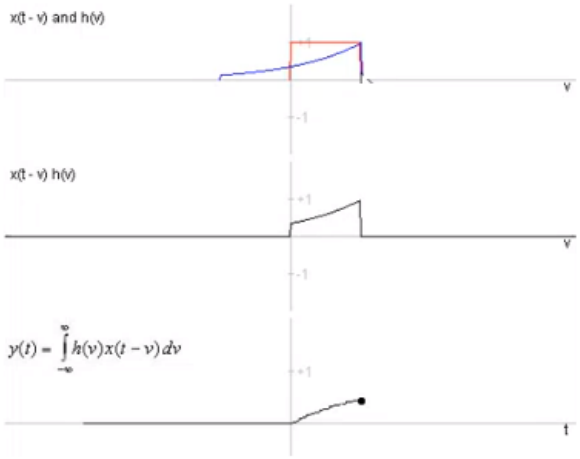
Appena i segnali si sovrappongono il risultato del prodotto è praticamente x(t) dato che il rect è unitario

(2)



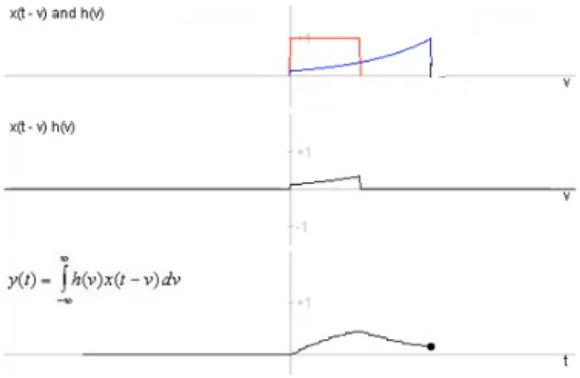
Il massimo valore raggiungo dal prodotto si ha quando i segnali sono totalmente sovrapposti

(3)



Man mano che x(t) scorre il prodotto tende a zero e con esso anche l'integrale di convoluzione

(4)



Esempio di calcolo di un integrale di convoluzione

Consideriamo due segnali seno cardinale nel dominio del tempo:

$$x(t) = y(t) = sinc(2Bt)$$

Consideriamo il segnale $z(t)$ dato dal prodotto dei segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$z(t) = x(t)y(t) = sinc^2(2Bt)$$

Come abbiamo visto, dal teorema del prodotto possiamo passare al dominio trasformato della frequenza e considerare la trasformata $Z(f)$ data dalla convoluzione tra le trasformate $X(f)$ e $Y(f)$:

$$T.del\ prodotto:\ \ z(t) = x(t) * y(t) \quad \rightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Passiamo allora alle risepttive trasformate di $x(t)$ e $y(t)$, sato che quest'ultimi sono identici, anche le loro trasformate lo saranno:

$$X(f) = Y(f) = \frac{1}{2B}\, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

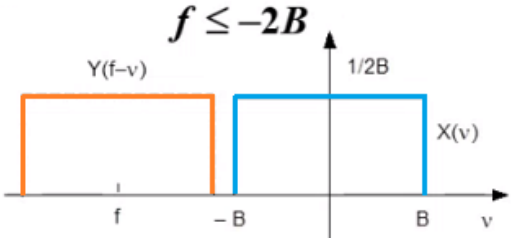
A questo punto possiamo ottenere la trasformata $Z(f)$ attraverso l'integrale di convoluzione:

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,[Y(f-\nu)]\,d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2B}\, rect\left(\frac{\nu}{2B}\right)\right]\left[\frac{1}{2B}\, rect\left(\frac{f-\nu}{2B}\right)\right] d\nu$$

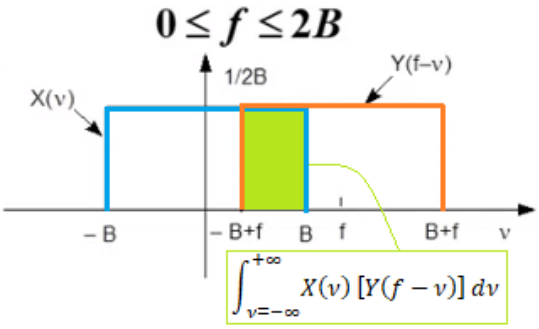
Come abbiamo appurato, l'integrale di convoluzione analizza lo "scorrimento" di uno dei due segnali ribaltato verso il segnale rimanente, analizzandone l'area sottesa quando quest'ultimi si sovrappongono, ovvero quando il loro prodotto è non nullo.

Ribaltando quindi $Y(f)$ e traslandolo in frequenza [ottenendo quindi $Y(f-\nu)$], quest'ultimo verrà fatto scorrere in direzione di $X(f)$:

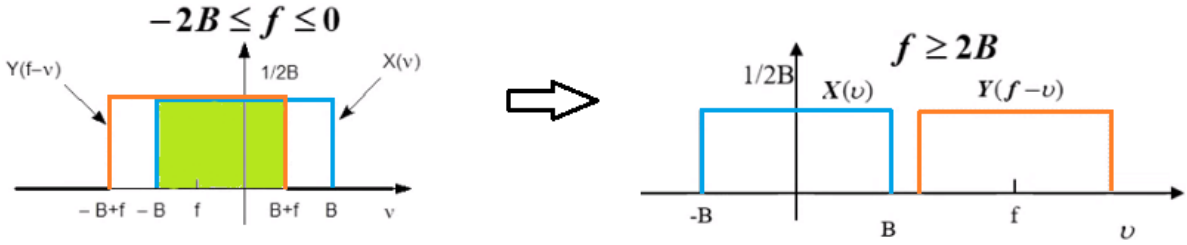
- Fintanto che i due segnali non si sovrappongono, il prodotto è nullo perché i due rect sono nulli al di fuori dell'intervallo in cui sono definiti; pertanto anche l'area che sottendono è nulla



- Man mano che si fa scorrere $Y(f-\nu)$, appena vi è la sovrapposizione dei due segnali, il prodotto sarà non nullo e l'integrale inizia ad assumere determinati valori



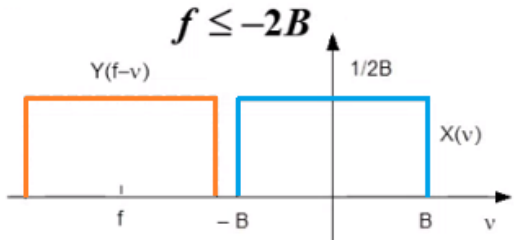
- Lo "scorrimento" continua fino a che $Y(f-\nu)$ non supererà $X(f)$ e l'integrale diminuirà



Matematicamente, quello che otteniamo è il seguente:

- Quando $f \leq -2B$ non vi è ancora sovrapposizione tra i due segnali, pertanto il prodotto è nullo, quindi anche l'integrale di convoluzione

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f) = 0$$

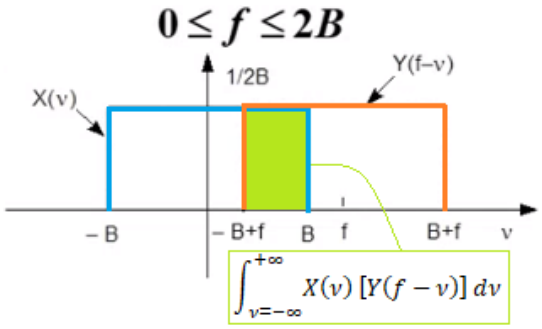


- Quando $-2B \leq f \leq 0$ si ha la sovrapposizione e si ha il seguente risultato:

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2B}\, rect\left(\frac{\nu}{2B}\right)\right] \left[\frac{1}{2B}\, rect\left(\frac{f-\nu}{2B}\right)\right] d\nu$$

$$Z(f) = \frac{1}{4B^2} \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{\nu}{2B}\right) rect\left(\frac{f-\nu}{2B}\right) d\nu \xrightarrow{base\ x\ altezza} Z(f) = \frac{1}{4B^2}[2B+f]$$

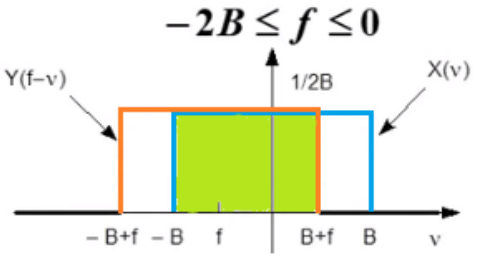
$$Z(f) = \frac{1}{2B}\left[1+\frac{f}{2B}\right]$$



- Quando $0 \leq f \leq 2B$ permane la sovrapposizione e si ha:

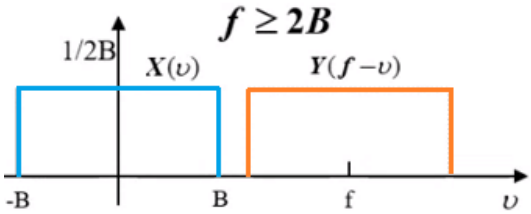
$$Z(f) = \frac{1}{4B^2} \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{\nu}{2B}\right) rect\left(\frac{f-\nu}{2B}\right) d\nu \xrightarrow{base\ x\ altezza} Z(f) = \frac{1}{4B^2}[2B-f]$$

$$Z(f) = \frac{1}{2B}\left[1-\frac{f}{2B}\right]$$

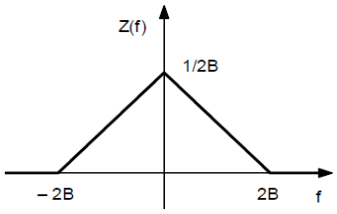


- Quando $f \geq 2B$ non vi è più sovrapposizione tra i due segnali, pertanto il prodotto è nullo, quindi anche l'integrale di convoluzione

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f) = 0$$



La convoluzione torna come risultato un segnale triangolare: l'area sottesa dal segnale ribaltato $Y(f-\nu)$ e del segnale $X(f)$ cresce da 0 fino ad arrivare al valore massimo $1/2B$ quando vi è totale sovrapposizione per poi decrescere da tale valore a 0 poiché non appena il segnale $Y(f-\nu)$, scorrendo, oltrepassa il segnale $X(f)$, i segnali tendono a non sovrapporsi più ed il loro prodotto tenderà ad annullarsi. L'andamento appena descritto forma praticamente un triangolo.



Arriviamo quindi ad ottenere una delle trasformate importanti, quella di un seno cardinale al quadrato;

- Questa può essere vista sia con il **teorema del prodotto**, vedendo il seno cardinale al quadrato come prodotto di due seni cardinali identici:

$$x(t) = sinc^2(2Bt) = sinc(2Bt) * sinc(2Bt) \xrightarrow{F[\,]} X(f) = \frac{1}{2B} rect\left(1-\frac{f}{2B}\right) \otimes \frac{1}{2B} rect\left(1-\frac{f}{2B}\right)$$

  Come abbiamo constatato, la convoluzione tra due rect torna un triangolo, coerentemente con quanto ci aspettavamo di ottenere.

- In alternativa, arriviamo allo stesso risultato poggiandoci sul **teorema della dualità**: il seno cardinale al quadrato è la trasformata di un triangolo; pertanto ragionando per dualità possiamo affermare che:

$$se\ X(t) = sinc^2(2Bt) \quad allora \quad x(f) = \Delta\left(\frac{-f}{T}\right) \xrightarrow{Essendo\ pari} x(f) = \Delta\left(\frac{f}{T}\right)$$

7) Teorema della convoluzione

HP: Siano dati due segnali nel dominio del tempo: $x(t)$ avente come spettro la trasformata $X(f)$ ed $y(t)$ avente come spettro $Y(f)$

$$x(t) \xrightarrow{F[\,]} X(f) \qquad y(t) \xrightarrow{F[\,]} Y(f)$$

E sia $z(t)$ un terzo segnale nel dominio del tempo dato dalla convoluzione tra $x(t)$ e $y(t)$:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t-\alpha)\, d\alpha$$

TS: Si può dimostrare che lo spettro $Z(f)$ del segnale prodotto è dato dal **prodotto delle trasformate dei singoli segnali moltiplicati $X(f)$ e $Y(f)$**

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \qquad \rightarrow \qquad Z(f) = X(f) * Y(f)$$

Dimostrazione:

Ricaviamo $Z(f)$ e verifichiamo che questa corrisponda al prodotto tra le trasformate $X(f)$ e $Y(f)$:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t-\alpha)\, d\alpha\right] e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Scambiamo l'ordine degli integrali in modo da avere ciò che dipende da "t" sotto l'integrale più interno e ciò che dipende da "α" sotto quello esterno; dopo di che sommiamo e sottraiamo $\pm\alpha$ all'esponenziale:

$$Z(f) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f t}\, dt\, d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f (t-\alpha+\alpha)}\, dt\, d\alpha$$

Otteniamo in questo modo le trasformate di $x(\alpha)$ e $y(t-\alpha)$ moltiplicate tra loro:

$$Z(f) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f (t-\alpha)} e^{-j2\pi f (\alpha)}\, dt\, d\alpha$$

$$Z(f) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f (\alpha)} \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f (t-\alpha)}\, dt\, d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f (\alpha)}\, Y(f) d\alpha = X(f) Y(f)$$

□

Questi due teoremi appena trattati ci dicono che **al prodotto nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione nel dominio della frequenza** e, viceversa, **alla convoluzione nel dominio del tempo corrisponde il prodotto nel dominio della frequenza.**

Questi due teoremi, come anticipato negli esempi, saranno fondamentali quando tratteremo i filtri.

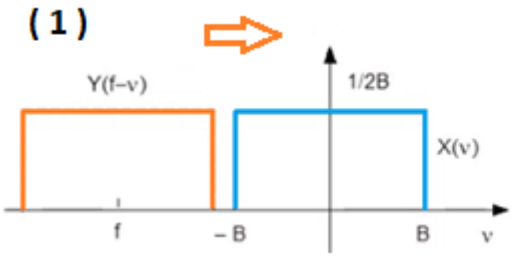
Proprietà della convoluzione

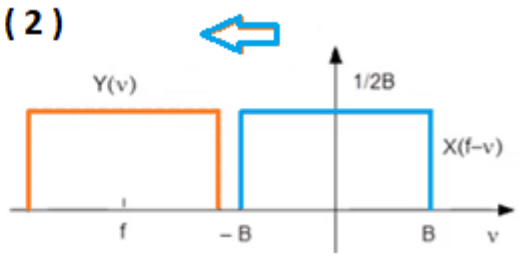
Avendo trattato la convoluzione come operatore, è bene richiamare alcune proprietà di questo particolare integrale. Per la convoluzione valgono le seguenti proprietà:

1. **Proprietà associativa**
   Se si vuole calcolare la convoluzione tra tre termini, è indifferente l'ordine con cui vengono associati i primi termini su cui calcolare la convoluzione
   $$[x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) = x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)]$$

2. **Proprietà distributiva rispetto alla somma**
   La convoluzione tra un segnale ed un segnale somma può essere vista come somma di convoluzione:
   $$[x(t) + y(t)] \otimes z(t) = [x(t) \otimes z(t)] + [y(t) \otimes z(t)]$$

3. **Proprietà commutativa**
   Vale la proprietà commutativa: gli integrali di convoluzione sono identici, esattamente come vale per il prodotto (infatti viene chiamato anche prodotto di convoluzione).
   $$X(f) \otimes Y(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,[Y(f-\nu)]\,d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} [X(f-\nu)]\,Y(\nu)\,d\nu = Y(f) \otimes X(f)$$
   Se lo volessimo intendere con un aspetto grafico basti pensare che la convoluzione $X(f) \otimes Y(f)$ si può considerare sia ribaltando e traslando $Y(f)$ lasciando invariato $X(f)$ (1), sia ribaltando e traslando $X(f)$ lasciando invariato $Y(f)$ (2)



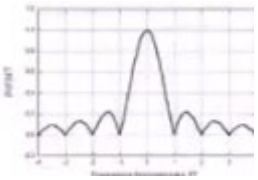


Test Socrative: Trasformata di Fourier 1

1. **Sia x(t) un segnale aperiodico, il suo spettro è uno spettro**
   - **A.** A righe
   - **B.** Continuo

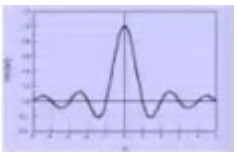
Risposta esatta: B

2. **La funzione in figura rappresenta**
   - **A.** La funzione seno cardinale
   - **B.** Lo spettro delle ampiezze di un segnale rect
   - **C.** X(f), ovvero la trasformata di Fourier di un segnale rect



Risposta esatta: B → si tratta dell'andamento di un seno cardinale avente la parte negativa ribaltata, forma che assume lo spettro delle ampiezze di un seno cardinale che, essendo sempre positivo, prevede il ribaltamento delle parti negative

3. **La funzione in figura rappresenta**
   - **A.** La funzione seno cardinale
   - **B.** Lo spettro delle ampiezze di un segnale rect(t/T)



Risposta esatta: B

4. **La seguente formula indica che lo spettro del segnale rect è pari a Tsinc(fT):** $\boldsymbol{rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow Tsinc(fT)}$
   - **A.** Vero
   - **A.** Falso

Risposta esatta: A

5. $\boldsymbol{Tsinc(fT)}$ **si annulla per** $\boldsymbol{f = 4/T}$
   - **B.** Vero
   - **C.** Falso

Risposta esatta: A → Quando la frequenza assume un valore del tipo x/T l'argomento del seno cardinale diventa intero e quindi la funzione seno cardinale si annulla

6. **Lo spettro delle fasi di un segnale rect(t/T) vale alternativamente i valori 0 e** $\boldsymbol{\pi}$
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A → A seconda che la parte reale è positiva o negativa, dato che non vi è parte immaginaria nel seno cardinale sinc(fT) [trasformata di un rect], la fase vale 0 o π

7. **Sia x(t) un segnale reale il modulo dello spettro è una funzione positiva pari, la fase è una funzione dispari, se diversa da zero**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A

8. **Sia x(t) un segnale** $\boldsymbol{x(t) = a(t) + jb(t)}$**: il modulo dello spettro è una funzione positiva pari, la fase una funzione dispari, se diversa da zero**
   - A. Vero
   - B. Falso

Risposta esatta: B → Si tratta di un segnale avente una parte immaginaria, ovvero di un segnale complesso e non di uno puramente reale, questo implica che non è possibile ragionare con uno spettro positivo pari e una fase dispari se non nulla.

9. **Traslare un segnale $x(t)$ equivale a moltiplicare il suo spettro per $e^{2\pi fT}$ dove T è il valore della traslazione**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A → Si tratta praticamente dell'applicazione del *T. del ritardo*

10. **Se $x(t)$ ha uno spettro delle ampiezze $|X(f)|$, allora $x(t-t_0)$ ha spettro $|X(f-f_0)|$**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

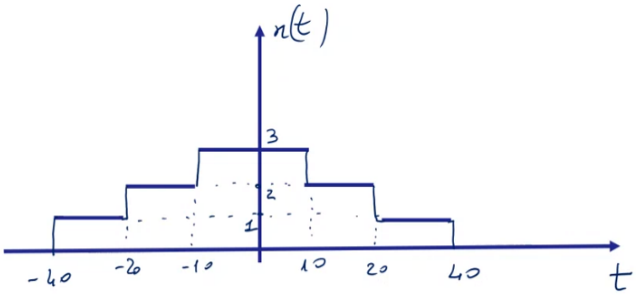
Risposta esatta: B → Per passare al dominio trasformato si dovrebbe applicare il teorema del ritardo: $x(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(f)e^{2\pi fT}$, per cui il suo spettro è $\left|X(f)e^{2\pi fT}\right|$ eseguendo i calcoli scopriremmo che lo spettro delle ampiezze rimane inalterato mentre quello che varia è lo spettro delle fasi, che subisce uno sfasamento correlato all'esponenziale.

4. Esercizi segnali determinati

Esercizio 1

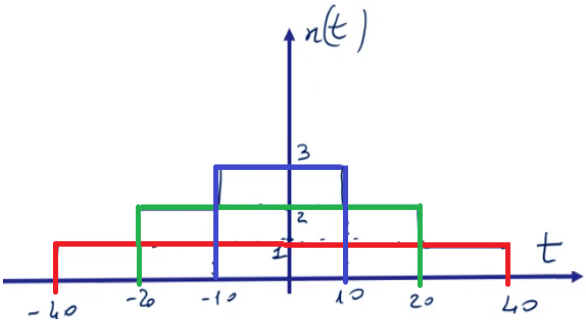
Sia dato il segnale $x(t)$ in figura, definito per $t \in [-\infty, +\infty]$;

1. Si scriva l'espressione di $x(t)$
2. Si calcoli lo spettro delle ampiezze $X(f)$
3. Si determini le frequenze per cui $X(f) = 0$
4. Si calcoli l'energia E_x e la potenza P_x



1. Scrittura dell'espressione del segnale

Quando andremo a scrivere la forma analitica di un segnale, **andremo sempre scrivere questa in funzione dei segnali notevoli come il rect o il triangolo**, infatti abbiamo studiato nello specifico le trasformate di questi due segnali.



Il segnale può essere visto come una somma di rect, come evidenziato in figura. Pertanto possiamo scriverlo come un treno di rect

- Il primo rect va da -40 a 40, quindi ha una base $T = 80$ ed è centrato in zero di ampiezza unitaria:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{80}\right)$$

- Il secondo rect va da -20 a 20, quindi ha una base $T = 40$ e anch'esso è centrato in zero e avente un'ampiezza unitaria:

$$x_2(t) = rect\left(\frac{t}{40}\right)$$

- Il terzo rect va da -10 a 10, ha una base $T = 20$ ed è centrato in zero con ampiezza unitaria:

$$x_3(t) = rect\left(\frac{t}{20}\right)$$

Otteniamo quindi il segnale:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x_1(t) = rect\left(\frac{t}{80}\right) + rect\left(\frac{t}{40}\right) + rect\left(\frac{t}{20}\right)$$

I rect hanno tutti ampiezza unitaria, $x_2(t)$ raggiunge ampiezza pari a 2 perché ad esso viene sommato $x_1(t)$; la stessa cosa avviene per $x_3(t)$: ad esso sono sommati sia $x_1(t)$ che $x_2(t)$, quindi la sua ampiezza arriva a 3 (1+1+1).

2. Spettro delle ampiezze del segnale

Una volta ottenuta la forma analitica del segnale è semplice ricavare lo spettro: trattandosi di una somma di rect sappiamo che la relativa trasformata di Fourier sarà data dalla somma di più segnali seno cardinale.

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\, sinc(fT)$$

Otteniamo quindi quanto segue:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{80}\right) + rect\left(\frac{t}{40}\right) + rect\left(\frac{t}{20}\right) \rightarrow X(f) = 80sinc(80f) + 40sinc(40f) + 20sinc(20f)$$

3. Determinare le frequenze per cui si annulla lo spettro

Lo spettro è caratterizzato dalla somma di tre funzioni seno cardinale; quest'ultimo è un segnale che si annulla quando il suo argomento è intero, non ci resta che definire per quali frequenze si annullano tutti e tre i segnali in questione.

$$X(f) = 80sinc(80f) + 40sinc(40f) + 20sinc(20f)$$

- $sinc(80f)$ si annulla per frequenze che fanno assumere al suo argomento un valore intero:
$$f = \frac{1}{80}, \qquad f = \frac{2}{80}, \qquad \dots, \qquad f = \frac{n}{80}$$
- $sinc(40f)$ si annulla per frequenze aventi 40 al denominatore così che l'argomento sia intero:
$$f = \frac{1}{40}, \qquad f = \frac{2}{40}, \qquad \dots, \qquad f = \frac{n}{40}$$
- $sinc(20f)$ si annulla per frequenze che hanno 20 al denominatore:
$$f = \frac{1}{20}, \qquad f = \frac{2}{20}, \qquad \dots, \qquad f = \frac{n}{20}$$

Allora possiamo affermare che lo spettro si annulla per ogni frequenza che sia pari a $n/20$ perché per tutti e tre i seni cardinali otterremmo un argomento intero:

$$X(f) = 80sinc\left[80\left(\frac{n}{20}\right)\right] + 40sinc\left[40\left(\frac{n}{20}\right)\right] + 20sinc\left[20\left(\frac{n}{20}\right)\right]$$

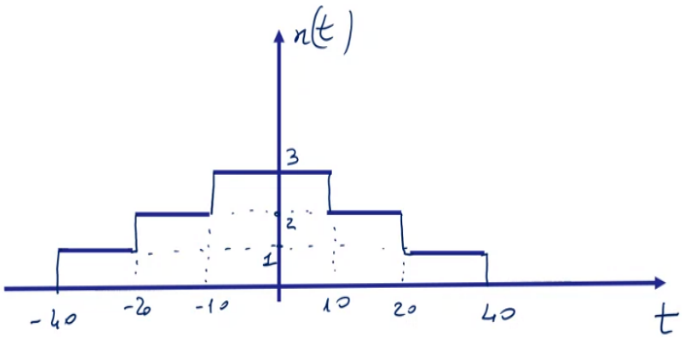
$$X(f) = 80sinc(4n) + 40sinc(2n) + 20sinc(n) \ = 0$$

Questo accade solo perché gli argomenti dei seni cardinali sono multipli tra loro ma non sempre accade che quest'ultimi siano multipli.

4. Calcolare energia e potenza

Quando si devono calcolare energia e potenza si deve sempre capire se si è davanti ad un segnale di energia o di potenza.

Al momento sappiamo solo calcolare l'energia del segnale nel dominio del tempo (più avanti vedremo come calcolarla anche nel dominio della frequenza); essa si ricava come integrale esteso a tutto il dominio del segnale al quadrato.



$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt = \int_{-40}^{+40} [x(t)]^2\, dt$$

Osservando il segnale possiamo dedurre che:

$$E_x = \int_{-40}^{+40} [x(t)]^2\, dt = \int_{-40}^{-20} 1^2\, dt + \int_{-20}^{-10} 2^2\, dt + \int_{-10}^{0} 3^2\, dt + \int_{0}^{10} 3^2\, dt + \int_{10}^{20} 2^2\, dt + \int_{20}^{40} 1^2\, dt$$

$$E_x = \int_{-40}^{-20} dt + 4\int_{-20}^{-10} dt + 9\int_{-10}^{0} dt + 9\int_{0}^{10} dt + 4\int_{10}^{20} dt + \int_{20}^{40} dt$$

$$E_x = [x]_{-40}^{-20} + 4\,[x]_{-20}^{-10} + 9\,[x]_{-10}^{0} + 9\,[x]_{-10}^{0} + 4[x]_{10}^{20} + [x]_{20}^{40} = \ 2(20) + 2[4(10)] + 2[9(10)]$$

$$E_x = 40 + 80 + 180 = 300$$

La potenza invece si trova passando al seguente limite:

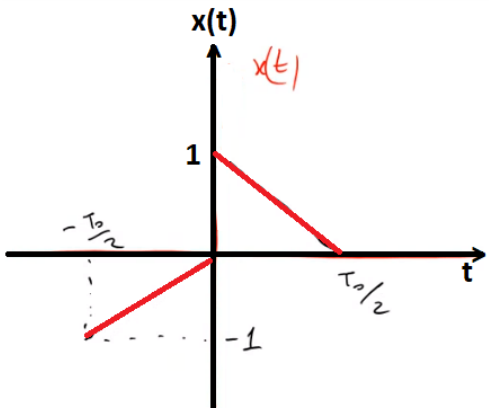
$$P_x \triangleq \lim_{t\to\infty} \frac{E_x}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt$$

Ma la potenza è finita e vale 300, se si passa al limite otteniamo una potenza nulla:

$$P_x = \lim_{t\to\infty} \frac{300}{t} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Il segnale è quindi un segnale di energia perché ha potenza nulla ed energia finita.

Esercizio 2



Sia dato il segnale $x(t)$ in figura

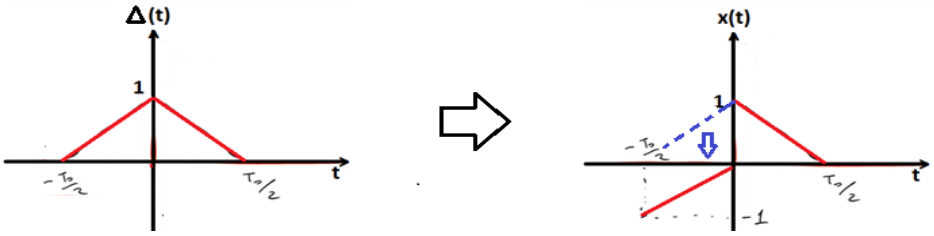
1. Si scriva l'espressione di $x(t)$
2. Si calcoli lo spettro del segnale $X(f)$
3. Si calcolino energia e potenza del segnale

1. Scrittura dell'espressione del segnale

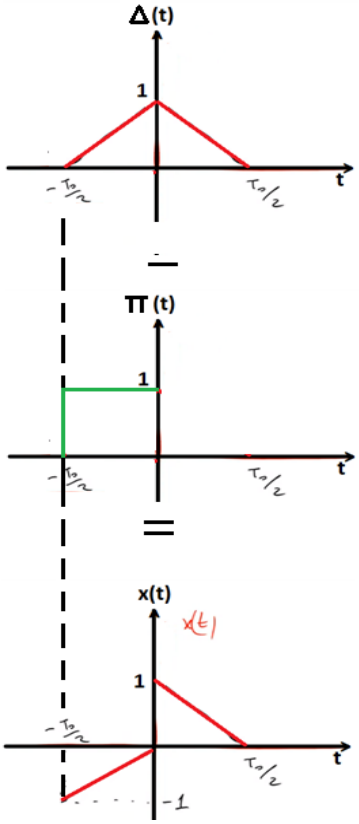
Come già visto, dovremo ricavare la forma analitica del segnale, scrivendo quest'ultimo come combinazione lineare di segnali noti (triangoli o rect).

Per come conosciamo il segnale triangolare, possiamo osservare che, a confronto, il segnale su cui dobbiamo operare ha una metà che è "scesa":

Segnale triangolare **Segnale sul quale lavorare**



per far traslare verso il basso un segnale dobbiamo sommare una costante nell'intervallo in cui si vuole effettuare tale traslazione; supponiamo di voler sottrarre un segnale rect al triangolo: se effettuiamo una sottrazione punto-a-punto del triangolo con un rect definito nell'intervallo $[-T_0/2, 0]$ e osserviamo cosa accade agli estremi (in $t = T_0/2$ e $T_0 = 0$) possiamo notare che otteniamo il segnale sul quale operare poiché:



- Quando $t = T_0/2$ il triangolo vale 0 ed il rect vale uno e pertanto:
$$\Delta(t) - \pi(t) = 0 - 1 = -1$$
- Quando $t = 0$ il triangolo vale 1 ed il rect pure, quindi:
$$\Delta(t) - \pi(t) = 0 - 0 = 0$$

Unendo questi due punti ricavati otteniamo il grafico della funzione $x(t)$ [Avendo sottratto un rect definito solo nel semipiano sinistro, abbiamo traslato verso il basso solo tale parte del triangolo e non tutto il segnale].

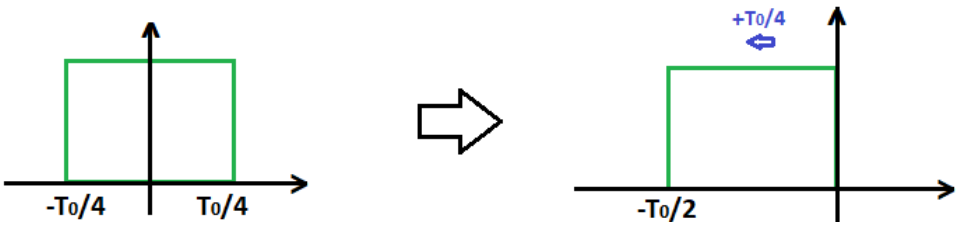
Quindi il segnale in questione è dato dalla differenza di un triangolo di semibase $T_0/2$ ed un rettangolo di base $T_0/2$ traslato e centrato in $T_0/4$:

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) - \pi\left(\frac{t + T_0/4}{T_0/2}\right)$$

*Si noti che il rect di base $T_0/2$:

$$rect\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$$

È un rect che viene centrato in 0 e che quindi si estende da $-T_0/4$ a $T_0/4$ (avendo quindi una base di lunghezza complessiva pari a $T_0/2$; per ottenere il rect che ci interessa al fine di ricavare il segnale $x(t)$ dovremo traslare tale rect di $T_0/4$



2. Spettro del segnale

Una volta ottenuta la forma analitica del segnale è semplice ricavare lo spettro: esso è dato dalla differenza di un triangolo ed un rettangolo; questo significa che la trasformata del segnale è data dalla differenza della trasformata di triangolo: il seno cardinale quadro e la trasformata di un rettangolo: il seno cardinale; si noti che però il segnale rettangolare ha subito una traslazione nel tempo, ovvero un ritardo, questo nel dominio della frequenza implica una moltiplicazione per un esponenziale che avrà all'esponente l'entità del ritardo ($T_0/4$):

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\, sinc^2(fT) \qquad\qquad x(t) = \pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\, sinc(fT)$$

Otteniamo quindi il seguente spettro:

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) - \pi\left(\frac{t+\frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = \frac{T_0}{2}\, sinc^2\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) - \frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) e^{j2\pi f T_0/4}$$

… E se avessimo voluto calcolare lo spettro delle ampiezze e delle fasi?

In questo esempio non è richiesto di calcolare lo spettro delle ampiezze o quello delle fasi fasi ma, qualora fosse richiesto, dovremmo prima ricavare l'espressione del segnale in funzione della sua parte reale e della sua parte immaginaria, dato che il segnale non è espresso nella forma $x(t) = |A|e^{j\theta}$.
Lo spettro $X(f)$ è formato dalla somma di un segnale $sinc^2$ puramente reale ed un segnale $sinc$ che, a seguito della traslazione, viene moltiplicato per un esponenziale e che quindi avrà una parte reale ed una immaginaria:

$$X(f) = \frac{T_0}{2}\, sinc^2\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) - \frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) e^{j2\pi f T_0/4}$$

per ricavare la parte reale e quella immaginaria del segnale traslato nel tempo dovremo scomporre l'esponenziale secondo le formule di Eulero:

$$\frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) e^{j2\pi f T_0/4} = \frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right)\left[\frac{\cos\,(2\pi f T_0/4) + j\sin\,(2\pi f T_0/4)}{2}\right]$$

In questo modo possiamo raggruppare tutti i termini reali e tutti quelli immaginari, ottenendo così la parte reale e quella immaginaria del segnale:

$$Re\{X(f)\} = \frac{T_0}{2}\, sinc^2\left(f\,\frac{T_0}{2}\right) - \left[\frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right)\frac{\cos(2\pi f T_0/4)}{2}\right]$$

$$Im\{X(f)\} = -\left[\frac{T_0}{2} sinc\left(f\,\frac{T_0}{2}\right)\frac{\sin(2\pi f T_0/4)}{2}\right]$$

Avendo ottenuto la parte reale e la parte immaginaria possiamo ricavare il modulo con la formula che lo definisce:

$$|A| = \sqrt{[Re\{X(f)\}]^2 + [Im\{X(f)\}]^2}$$

E quindi anche la fase, attenzionando la differenza quando quest'ultima viene calcolata per numeri reali positivi o per numeri reali negativi:

$$\angle X(f) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) & per\ Re\{X(f)\} > 0 \\ arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) + \pi & per\ Re\{X(f)\} < 0 \end{cases}$$

4. Calcolare energia e potenza

Per calcolare l'energia e la potenza del segnale dobbiamo ottenere la forma analitica di quest'ultimo. **NB!** Non si intende la forma analitica in funzione di soli triangoli e rettangoli che abbiamo ricavato nel punto (1).

- Ricaviamo la retta che si trova nel primo quadrante, mediante la formula della retta passante per due punti; i punti in questione saranno $P_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$ e $P_1 = (x_1, y_1) = (T_0/2\,,0)$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \rightarrow \quad \frac{x - 0}{T_0/2 - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1} \quad \rightarrow \quad -y + 1 = \frac{x}{T_0/2} \quad \rightarrow \quad y = 1 - \frac{x}{T_0/2}$$

Dato che in questo caso abbiamo $y = x(t)$ e $x = t$ l'equazione della retta in questione diventa:

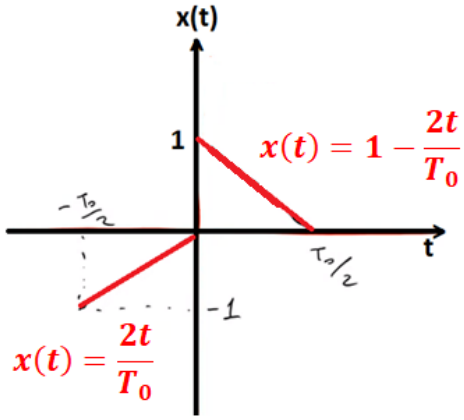
$$x(t) = 1 - \frac{t}{T_0/2} = 1 - \frac{2t}{T_0}$$

- Ricaviamo la seconda retta che si trova nel terzo quadrante, mediante la formula della retta passante per due punti; i punti in questione saranno $P_0 = (x_0, y_0) = (-T_0/2, -1)$ e l'origine $O = (0\,,0)$

$$\frac{x - x_0}{0 - x_0} = \frac{y - y_0}{0 - y_0} \rightarrow \frac{x - (-T_0/2)}{0 - (-T_0/2)} = \frac{y - (-1)}{0 - (-1)} \quad \rightarrow \quad y + 1 = \frac{x + T_0/2}{T_0/2} \quad \rightarrow \quad y = -1 + \frac{x}{T_0/2} + 1$$

Dato che in questo caso abbiamo $y = x(t)$ e $x = t$ l'equazione della retta in questione diventa:

$$y = \frac{x}{T_0/2} \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{t}{T_0/2} = \frac{2t}{T_0}$$



Avendo ricavato le due rette che formano il segnale in questione:

$$x(t) = \left(\frac{2t}{T_0}\right) + \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right)$$

possiamo ricavare l'energia dalla sua definizione:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \left[\left(\frac{2t}{T_0}\right)\right]^2 dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \left[\left(1 - \frac{2t}{T_0}\right)\right]^2 dt$$

Risolviamo i quadrati:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \frac{4t^2}{T_0^2}\, dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \left[\left(1 + \frac{4t^2}{T_0^2} - \frac{4t}{T_0}\right)\right]^2 dt$$

$$E_x = \frac{4}{T_0^2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t^2 dt + \left[\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} 1\, dt + \frac{4}{T_0^2} \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} t^2 dt - \frac{4}{T_0} \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} t\, dt\right]$$

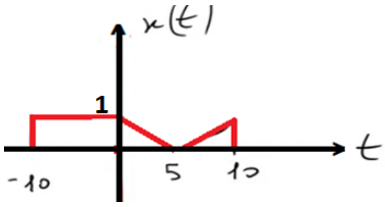
$$E_x = \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{0} + [t]_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{4}{T_0} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$E_x = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{T_0^2}\left(\frac{T_0}{2}\right)^3\right] + \frac{T_0}{2} + \frac{4}{3}\left[\frac{1}{T_0^2}\left(\frac{T_0}{2}\right)^3\right] - 2\left[\frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2\right] = \frac{4}{3}\left(\frac{T_0}{8}\right) + \frac{T_0}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{T_0}{8}\right) - \frac{T_0}{2}$$

$$E_x = \frac{T_0}{6} + \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{6} - \frac{T_0}{2} = \frac{2T_0}{6} = \frac{T_0}{3}$$

Avendo un'energia finita possiamo confermare che il segnale è di energia e quindi la potenza è nulla.

Esercizio 3



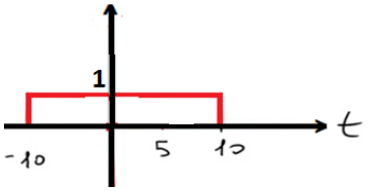
Sia dato il segnale $x(t)$ in figura

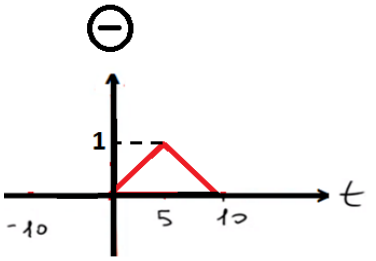
1. Si scriva l'espressione di $x(t)$
2. Si calcoli lo spettro del segnale $X(f)$

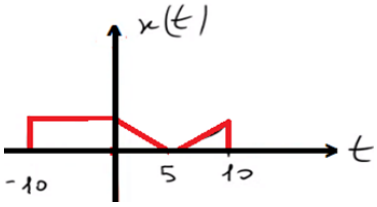
1. Scrittura dell'espressione del segnale

Come fatto negli altri due casi, andiamo a scrivere il segnale in funzione di soli rect e triangoli.

Il segnale in questione può essere visto come un grande rect esteso da -10 a 10 a cui viene sottratto un triangolo avente semibase pari a 5 e centrato in 5.







- Quando $-10 < t < 0$ al rect non viene sottratta alcuna quantità perché il triangolo è nullo, quindi il risultato sarà un rect di ampiezza unitaria.
- Quando $t = 0$ il triangolo vale ancora zero ed il rect ancora 1, il risultato sarà il punto $x(t) = 1$ nell'origine.
- Quando $0 < t < 5$ il triangolo inizia a crescere e, una volta raggiunto il valore $t = 5$ raggiunge il vertice, ovvero l'apice del segnale, che essendo unitario è pari a 1. Questo significa che per $t = 5$ il segnale $x(t)$ vale 0 perché rect e triangolo si annullano: $x(5) = 0$
- Quanto $t > 5$ il triangolo tende a scendere, per cui il segnale $x(t)$ tenderà a risalire, una volta esaurita la discesa, per $t = 10$ il segnale $x(t)$ torna ad essere unitario poiché al rect viene sottratta una quantità nulla.

Possiamo allora scrivere il segnale $x(t)$ come il segnale differenza del rect di base 20 centrato in 0 e del triangolo traslato di 5 e di semibase pari a 5:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{20}\right) - \Delta\left(\frac{t-5}{5}\right)$$

2. Calcolo dello spettro del segnale

Ricaviamo adesso lo spettro del segnale: la trasformata $X(f)$. Il segnale è composto da un rect ed un triangolo traslato nel tempo, conosciamo le trasformate di questi due segnali notevoli:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = T\, sinc(fT) \qquad x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = T\, sinc^2(fT)$$

Questo significa che la trasformata $X(f)$ sarà composta dalla differenza di due trasformate notevoli: rispettivamente un seno cardinale ed un seno cardinale al quadrato che viene moltiplicato per esponenziale dato che il triangolo è traslato nel tempo:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{20}\right) - \Delta\left(\frac{t-5}{5}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = 20\, sinc(20f) - 5\, sinc^2(5f)e^{-j2\pi(5)f}$$

$$X(f) = 20\, sinc(20f) - 5\, sinc^2(5f)e^{-j10\pi f}$$

Se volessimo potremmo anche ricavare modulo e fase dello spettro così da ottenere rispettivamente lo spettro delle ampiezze e lo spettro delle fasi.

In questo caso, quando si tratta di un segnale avente la forma $x(t) = |A|e^{j\theta}$ possiamo facilmente dedurre che il modulo sia $|A|$ e che la fase si trovi all'esponente: θ; tuttavia non è questo il caso: come possiamo vedere il segnale è dato da una differenza per cui non ha la forma che cercavamo, dobbiamo allora ricavare la parte reale e quella immaginaria e successivamente dovremo ottenere modulo e fase applicando la definizione. Innanzitutto scomponiamo l'esponenziale con le formule di Eulero:

$$X(f) = 20\, sinc(20f) - 5\, sinc^2(5f)e^{-j10\pi f}$$

$$X(f) = 20\, sinc(20f) - 5\, sinc^2(5f)\left[\frac{\cos(10\pi f) - j sin(10\pi f)}{2}\right]$$

A questo punto allora il segnale lo possiamo scrivere in funzione della sua parte reale e la parte immaginaria:

$$X(f) = 20sinc(20f) - 5sinc^2(5f)\left[\frac{\cos(10\pi f) - jsin(10\pi f)}{2}\right]$$

$$X(f) = \left[20sinc(20f) - \frac{5sinc^2(5f)\cos(10\pi f)}{2}\right] + j\left[\frac{5sinc^2(5f)\sin(10\pi f)}{2}\right]$$

$$\begin{cases} Re\{X(f)\} = 20sinc(20f) - \dfrac{5sinc^2(5f)\cos(10\pi f)}{2} \\ Im\{X(f)\} = \dfrac{5sinc^2(5f)\sin(10\pi f)}{2} \end{cases}$$

- Per ottenere lo spettro delle ampiezze basterà passare al modulo:

$$|x(t)| = \sqrt{Re\{x(t)\}^2 + Im\{x(t)\}^2}$$

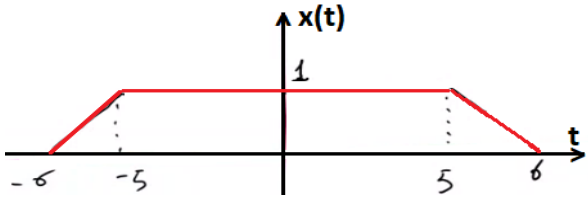
- Mentre per lo spettro delle fasi dovremo calcolare la fase seguendo la definizione:

$$\angle X(f) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) & per\ Re\{X(f)\} > 0 \\ arctg\left(\dfrac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) + \pi & per\ Re\{X(f)\} < 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Sia dato il segnale $x(t)$ in figura

1. Calcolare lo spettro $X(f)$
2. Calcolare l'energia E_x e la potenza P_x
3. Calcolare la potenza del segnale in $t \in [-6, 6]$

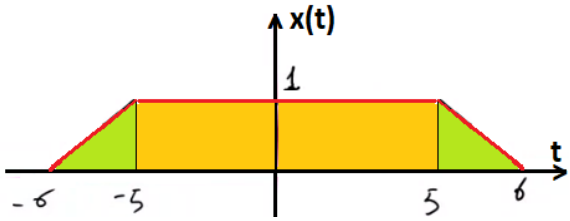


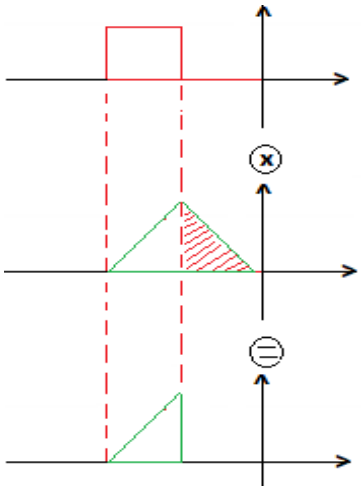
Prima di proseguire con l'esercizio dobbiamo specificare che la potenza P_x richiesta nel punto (2) è una potenza media, differentemente, la potenza nell'intervallo $[-6, 6]$ richiesta nel punto (3) è una potenza che si riferisce al solo intervallo in questione.

1. Calcolo dello spettro del segnale

Per ricavare lo spettro del segnale dobbiamo prima ottenere la forma analitica del segnale rapportando quest'ultimo a soli triangoli e rect.

Una prima soluzione che possiamo adottare è la seguente: pensiamo il segnale come la somma di un rect di base $T = 10$ e centrato in 0 (quindi il rect che va da $-5\ a\ 5$) e di due "semitriangoli": uno definito tra -6 e -5 e l'altro definito tra $5\ e\ 6$;





Il problema di questa soluzione nasce proprio quando dovremo ricavare i "semitriangoli": per ottenere la metà di un triangolo dovremmo moltiplicare quest'ultimo per un rect unitario in modo da "filtrare" la parte del triangolo da mantenere ed eliminare il resto.

Seppur questa operazione resta comunque teoricamente semplice da applicare, è altresì vero che se dovessimo eseguire questa moltiplicazione nel dominio dei tempi dovremo necessariamente ricorrere ad una convoluzione nel dominio della frequenza per il *teorema del prodotto* quindi la soluzione adottata non è probabilmente quella più semplice.

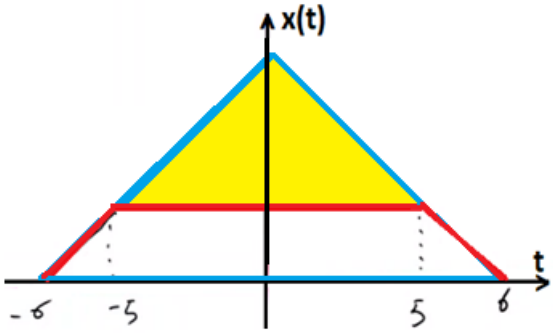
$T.Prodotto$:

$$z(t) = x(t)\, y(t) \quad \rightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

In generale, possiamo affermare che **non conviene mai considerare un qualsiasi segnale come prodotto di segnali elementari a meno che non sia strettamente necessario**; questo perché ad un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio della frequenza. Ecco perché preferiamo sempre vedere i segnsli come **somma o differenza di segnali elementari**.

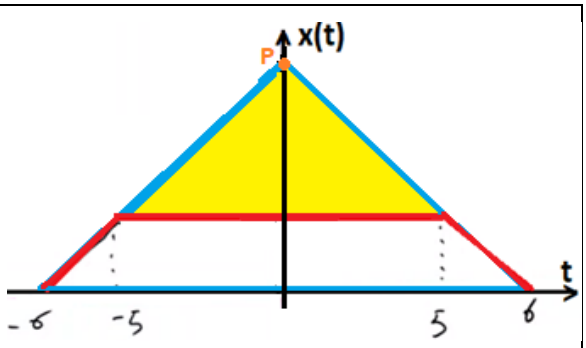
Una soluzione più semplice basata solo su somme/differenze è quella di vedere il segnale dato come differenza di un triangolo di semibase pari a 6 e centrato in 0 (quindi che va da $-6\ a\ 6$) a cui se ne sottrae uno più piccolo, di semibase pari a 5 e anch'esso centrato in 0 (che va da $-5\ a\ 5$).

Si deve però fare attenzione alle ampiezze: il triangolo più grande non può essere di ampiezza unitaria, deve essere un triangolo equilatero quindi se la base è 6 volte quella unitaria, anche l'ampiezza sarà 6 volte quella del triangolo unitario: il triangolo avrà ampiezza 6; dato che anche il triangolo più piccolo sarà equilatero e avrà semibase pari a 5, esso avrà ampiezza A=5



$$\boldsymbol{x(t) = 6\,\Delta\left(\frac{t}{6}\right) - 5\,\Delta\left(\frac{t}{5}\right)}$$

In alternativa avremmo potuto trovare l'altezza dei triangoli ricavando una delle due rette (rampe) che formano il triangolo e imponendo il passaggio per $t = 0$, ricavando così il punto in cui viene toccato l'asse verticale



$P_0 = (6,0) \quad P_1 = (5,1)$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \rightarrow \frac{x - 6}{5 - 6} = \frac{y}{1 - 0} \rightarrow \frac{x - 6}{-1} = \frac{y}{1}$$

$Retta: y = 6 - x$

Imponiamo il passaggio per $x = 0$ per trovare il vertice "P" nell'asse verticale:

$$x = 0 \rightarrow y = 6 - x = 6 \rightarrow P = 6$$

La stessa cosa l'avremmo ottenuta considerando il triangolo più piccolo; trovando un'ampiezza pari a 5

A questo punto non ci resta che calcolare lo spettro disponendo della forma analitica del segnale; sapendo che la trasformata di Fourier del triangolo è un seno cardinale al quadrato:

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\, sinc^2(fT)$$

Possiamo ottenere la trasformata del segnale:

$$x(t) = 6\,\Delta\left(\frac{t}{6}\right) - 5\,\Delta\left(\frac{t}{5}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = 6\,[6\, sinc^2(6f)] - 5[5\, sinc^2(5f)]$$

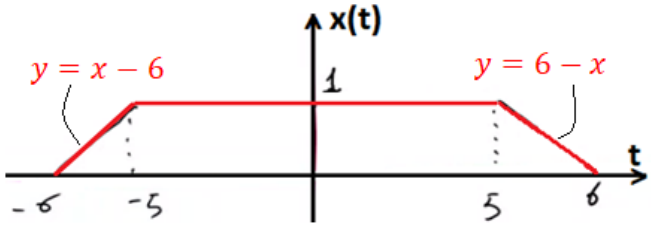
$$X(f) = 36 sinc^2(6f) - 25\, sinc^2(5f)$$

2. Calcolo dell'energia del segnale e della potenza media

L'energia del segnale la possiamo ottenere ricavando le due rette negli intervalli $[-6, -5]$ e $[5, 6]$ e calcolando l'integrale esteso per tutto il segnale:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt$$

Retta in [5,6]:



$P_0 = (6,0) \quad P_1 = (5,1)$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \rightarrow \frac{x - 6}{5 - 6} = \frac{y}{1 - 0} \rightarrow \frac{x - 6}{-1} = \frac{y}{1}$$

$Retta: y = 6 - x$

Retta in $[-6, -5]$:

$P_0 = (-6,0) \quad P_1 = (-5,1)$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \rightarrow \frac{x - 6}{-5 - (-6)} = \frac{y}{1 - 0} \rightarrow \frac{x - 6}{1} = \frac{y}{1}$$

$Retta: y = x - 6$

Possiamo allora calcolare l'energia con l'integrale della somma per parti:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2\, dt = \int_{-6}^{-5} [6 - x]^2\, dt + \int_{-5}^{+5} [1]^2\, dt + \int_{-6}^{-5} [x - 6]^2\, dt$$

Risolvendo l'integrale scopriremo che esso è non nullo e quindi il segnale avrà una potenza media nulla.

3. Calcolo della potenza del segnale in $t \epsilon [-6, 6]$

La potenza nell'intervallo specifico potrebbe assumere un valore non nullo, questo perché la potenza media viene calcolata in un periodo infinito ma, in realtà, un segnale all'infinito non esiste e quindi tutti i segnali hanno energia e potenza finita. Tale energia si trova come rapporto dell'energia calcolata nell'intervallo $[-6, 6]$ e l'ampiezza dell'intervallo stesso: 12.

L'energia in questione sarà proprio quella calcolata nel punto (2) perché l'intervallo sul quale la analizziamo è quello in cui è praticamente definito l'intero segnale:

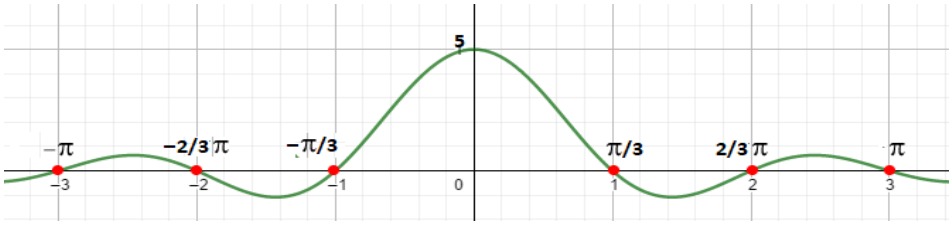
$$P_x = \frac{E_x}{12}$$

La potenza media è la potenza che si otterrebbe analizzando il segnale in un periodo infinito.

Normalmente distinguiamo i segnali di energia che hanno energia finita e potenza nulla dai segnali di potenza che hanno potenza finita ed energia infinita;
un esempio di segnale di potenza è il segnale periodico: il segnale periodico si estende idealmente all'infinito, il che implica che esso trasporta un'energia infinita, dato che questa dipende dal quadrato del segnale ed esso di estende ad infinito.

Ma nella realtà non esiste questa suddivisione: i segnali reali (come quello elettrico che arriva a casa) non si protraggono all'infinito, hanno sempre una durata (ad esempio, il segnale della corrente che arriva a casa si protrae fintanto che vi sono oggetti connessi alla rete; dalla disconnessione di quest'ultimi il segnale cessa il suo periodo di estensione).

Esercizio 4



Sia dato il segnale $x(t) = 5sinc(3t)$, calcolare e disegnare il suo spettro.
Prima di procedere è bene esplicitare le caratteristiche del segnale in questione: esso vale 5 quando $t = 0$ perché per tale valore di t il seno cardinale vale 1 e, dato che esso è amplificato di 5, il prodotto in tale punto tornerà 5.
Il seno cardinale di annulla quando il suo argomento è intero, questo significa che per ogni multiplo di $t = 1/3$ il segnale si annullerà.
Per ottenere lo spettro di questo segnale dovremo praticamente applicare il *teorema della dualità:* **sapendo che il seno cardinale è la trasformata di un rect allora possiamo affermare che trasformando il seno cardinale troveremo una trasformata a forma di rect.**

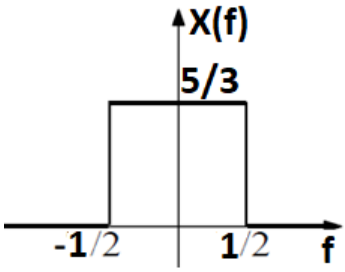
$$T.Dualità: \quad x(t) \rightarrow X(f) \quad allora \quad X(t) \rightarrow x(-f)$$

Dato che:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = Tsinc(fT)$$

Avremo che:

$$x(t) = T\ sinc(tT) \ \rightarrow \ X(f) = rect\left(-\frac{f}{T}\right) = rect\left(\frac{f}{T}\right) \ \rightarrow \ x(t) = sinc(tT)$$
$$= \frac{1}{T} rect\left(\frac{f}{T}\right)$$



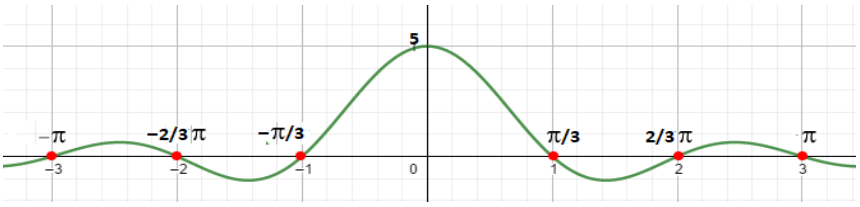
Nel nostro caso $T = 3$ per cui otterremo la seguente trasformata:

$$x(t) = 5\ sinc(3t) \ \rightarrow \ X(f) = 5\left[\frac{1}{3} rect\left(\frac{f}{3}\right)\right]$$

Il segnale è quello raffigurato: un rect di base 3 e centrato in 0 (quindi che va da $-1{,}5\ a\ 1{,}5]$ di ampiezza $\frac{5}{3}$

Esercizio 5

Sia dato il segnale $x(t) = 5sinc(3t)$, si moduli il segnale con una portante a frequenza $100Hz$.
Si calcoli lo spettro $Y(f)$ del segnale modulato $y(t)$.



Quello che si deve fare è praticamente modulare il segnale mediante applicazione del teorema della modulazione (in questo modo allocheremo una banda precisa per il segnale modulato $y(t)$); successivamente si dovrà lavorare sul segnale modulato $y(t)$ al fine di ottenerne lo spettro.

Applicazione del teorema della modulazione:

$$T.modulazione: \quad y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \;\rightarrow\; Y(f) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Nel nostro caso la portante è $f_0 = 100Hz$ per cui possiamo ottenere il segnale modulato come:

$$Y(f) = \frac{X(f-100)+X(f+100)}{2}$$

La trasformata del segnale $y(t)$ dipende dalla trasformata di $x(t)$: $X(f)$, ne consegue dunque che dovremo ottenere quest'ultima; per farlo passiamo dal teorema di dualità: se $x(t)$ è un seno cardinale allora la sua trasformata sarà un segnale rettangolare avente argomento negativo

$$T.dualità: \quad se\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow Tsinc(fT) \quad allora \quad Tsinc(tT) \rightarrow rect(-fT) = rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

Per cui lo spettro di un seno cardinale lo si ottiene come:

$$Tsinc(fT) \rightarrow rect\left(\frac{f}{T}\right) \quad quindi: sinc(f(T) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

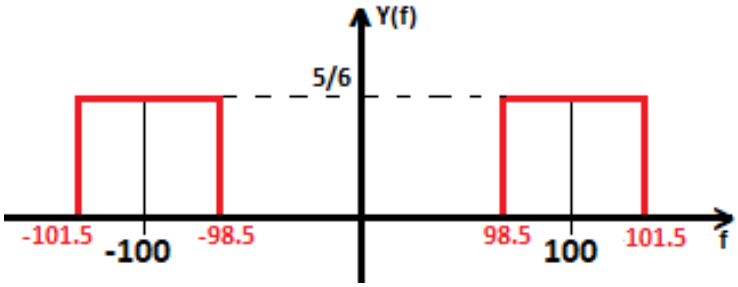
Avremo dunque:

$$x(t) = 5sinc(3t) \;\rightarrow\; X(f) = \frac{5}{3}\, rect\left(\frac{f}{3}\right)$$

Avendo ottenuto il segnale modulante $x(t)$ applichiamo il teorema della modulazione:

$$Y(f) = \frac{1}{2}[X(f-100)+X(f+100)] \;\rightarrow\; Y(f) = \frac{5}{6}\, rect\left(\frac{f}{3}-100\right) + \frac{5}{6}\, rect\left(\frac{f}{3}+100\right)$$

Lo spettro in questione è formato da due rect di ampiezza 5/6, centrati in $\pm\, 100\ Hz$ e aventi una base pari a 3 (quindi i due rect si estendono da $+100 \pm 1.5$ e -100 ± 1.5)



Esercizio 6

Sia dato il segnale $x(t) = 240\ sinc(240t) - 60\ sinc(120t)$, calcolare e disegnare lo spettro $X(f)$

Possiamo ricavare lo spettro attraverso il teorema della dualità, sapendo che:

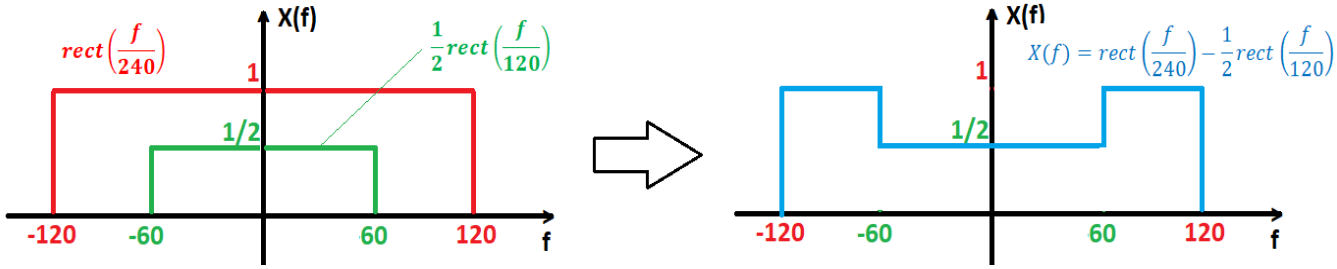
$$x(t) = sinc(tT) \quad \rightarrow \quad X(f) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

Otteniamo quindi:

$$x(t) = 240\ sinc(240t) - 60\ sinc(120t) \quad \rightarrow \quad X(f) = \frac{240}{240}\ rect\left(\frac{f}{240}\right) - \frac{60}{120} rect\left(\frac{f}{120}\right)$$

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{240}\right) - \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{120}\right)$$

Vediamo adesso di disegnare lo spettro: si noti che quest'ultimo è formato dalla differenza di due rect centrati in zero, per cui per ottenere lo spettro sarà necessario eseguire la differenza punto-a-punto tra i rect che compongono il segnale.



$rect\left(\frac{f}{240}\right)$ ha un'ampiezza unitaria ed ha una base di ampiezza 240, essendo centrato in 0 questo implica che tale rect di estende da -120 a 120.

$\frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{240}\right)$ ha un'ampiezza pari ad 1/2 ed ha una base di ampiezza 120, essendo centrato in 0 questo implica che tale rect di estende da -60 a 60.

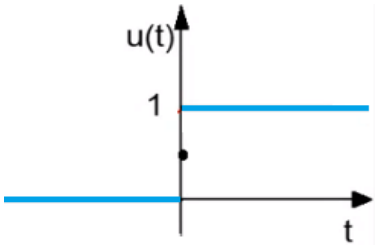
Se si esegue la differenza tra i due segnali si ottiene il segnale rappresentato, che vale per $f < -60$ ed $f > 60$ e vale 1/2 quando $-60 \leq f \leq 60$ dato che viene eseguita la differenza tra i due rect.

5. Le trasformate di Fourier generalizzate

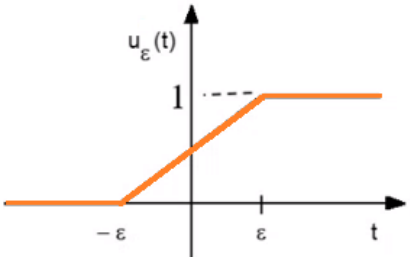
Confronto tra serie di Fourier e trasformata di Fourier

Abbiamo fino ad ora osservato due strumenti per l'analisi nel dominio della frequenza di segnali determinati: la **serie di Fourier** per i segnali **periodici** e la **trasformata di Fourier** per i segnali **aperiodici.**
L'ideale sarebbe avere un unico strumento valido per tutti i tipi di segnali, per tale motivo ci chiediamo:
è possibile ricavare la trasformata di Fourier di un segnale periodico?
Al fine di rispondere a questa domanda dobbiamo introdurre lo studio delle **funzioni generalizzate**. In seguito studieremo la **formula di Poisson** che ci permette di studiare la trasformata di un segnale periodico troncando quest'ultimo e ricavandone il segnale aperiodico corrispondente.

Funzione delta di Dirac $\boldsymbol{\delta(t)}$



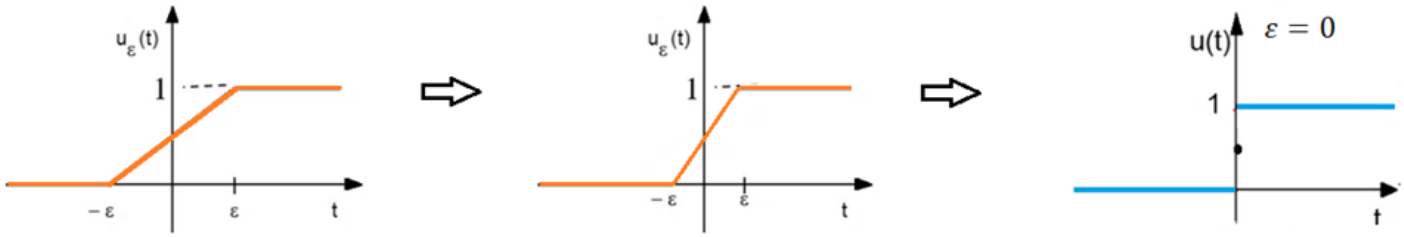
La prima funzione generalizzata è il **delta di Dirac,** si tratta di un segnale ideale che otterremo passando per il **gradino unitario**, un segnale che vale 0 fintanto che il suo argomento è negativo e vale 1 non appena l'argomento assume un valore pari o maggiore di zero. Il gradino unitario è anch'esso un segnale ideale, l'idealità di quest'ultimo sta nel fatto che non è possibile realizzare alcun segnale che istantaneamente passi da 0 a 1.



Un segnale che si avvicina al comportamento del gradino unitario è quello che chiameremo **segnale $u_\varepsilon(t)$**: si tratta di un segnale che passa da 0 a 1 impiegando un certo tempo di salita, l'intervallo temporale $[-\varepsilon, \varepsilon]$, facendo tendere tale intervallo temporale a 0 si ottiene una salita sempre più repentina, quindi sempre più vicina alla salita istantanea impiegata dal gradino unitario $u(t)$.
Chiamando allora con $u(t)$ il gradino unitario e con $u_\varepsilon(t)$ il segnale (realizzabile) utilizzato per approssimarlo, possiamo scrivere:

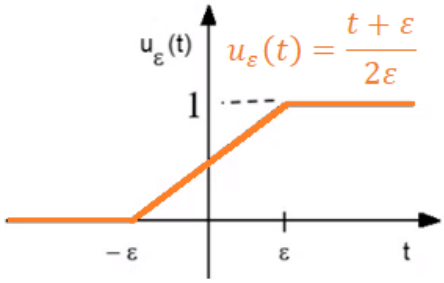
$$u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t)$$

Che afferma quanto dedotto: **facendo tendere a zero il tempo di salita impiegato da $u_\varepsilon(t)$ si ottiene un segnale sempre più simile al gradino unitario $u(t)$, che impiega un tempo istantaneo per passare da 0 a 1.**



Il vantaggio di ottenere il gradino unitario $u(t)$ in funzione del segnale $u_\varepsilon(t)$ è quello di scrivere un segnale puramente ideale in funzione di un segnale fisicamente realizzabile come $u_\varepsilon(t)$.

Possiamo ricavare l'equazione della retta che caratterizza la salita del segnale $u_\varepsilon(t)$ prendendo i punti per cui essa passa: $P_1 = (-\varepsilon, 0)$ e $P_1 = (\varepsilon, 1)$



$$\frac{x-(-\varepsilon)}{\varepsilon-(-\varepsilon)} = \frac{y-0}{1-0} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

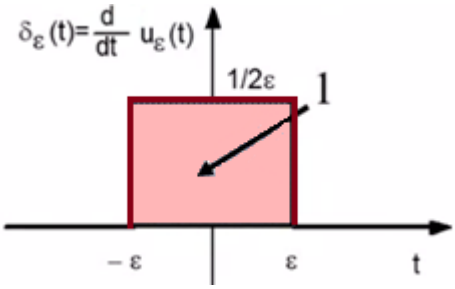
Si noti che in questo caso avremo $y = u_\varepsilon(t)$ e $x = t$, quindi otteniamo:

$$\boldsymbol{u_\varepsilon(t) = \frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon}}$$

Supponiamo di voler ottenere la **derivata del gradino unitario**: essendo questa una funzione ideale e generalizzata, potremo solo derivare la funzione $\boldsymbol{u_\varepsilon(t)}$ che lo approssima, per cui andremo a considerare la derivata della funzione $u_\varepsilon(t)$:

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon}\right] = \frac{1}{2\varepsilon} \qquad per\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Il risultato che otteniamo è quello rappresentato: si tratta di una funzione che assume un valore costante nell'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e zero altrove



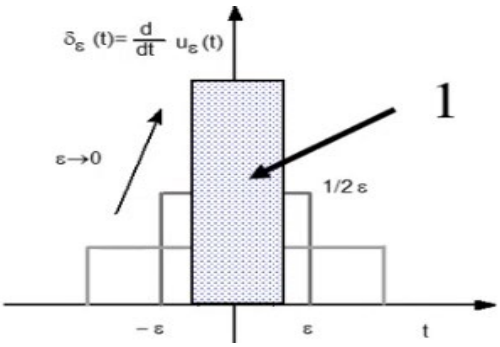
Un segnale così definito può essere visto come un rect avente ampiezza pari a $\frac{1}{2\varepsilon}$ centrato in 0 e avente una base di ampiezza 2ε (quindi che va da $-\varepsilon$ a ε):

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{2\varepsilon}\, rect\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$$

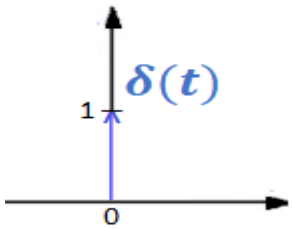
Osserviamo che l'area del rect appena ottenuto è unitaria: questo significa che l'integrale di δ_ε è pari ad 1:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t)\, dt = b * h = 2\varepsilon * \frac{1}{2\varepsilon} = 1$$

Abbiamo definito il gradino unitario in funzione del segnale $u_\varepsilon(t)$ cui tempo di salita ε tende a zero, quindi per ottenere la **derivata del gradino unitario $\boldsymbol{u(t)}$** ragioniamo come segue: abbiamo ottenuto **la derivata della funzione $\boldsymbol{u_\varepsilon(t)}$ ($\boldsymbol{\delta_\varepsilon(t)}$)**, per cui studiandone il comportamento quando ε tende a zero otteniamo praticamente la derivata del gradino unitario $u(t)$.
Ci chiediamo dunque quanto segue:
Cosa accade alla derivata del segnale $u_\varepsilon(t)$ quando ε tende a zero?
Quando diminuisce ε diminuisce la base del rect trovato e aumenta la sua altezza, essendo questa pari a $1/2\varepsilon$;l'area rimane costante e pari ad 1.



Quello che risulta quando $\boldsymbol{\varepsilon \rightarrow 0}$ è praticamente un impulso sull'asse verticale che, infatti, prende il nome di impulso di Dirac (o Delta di Dirac) e viene indicato come $\boldsymbol{\delta(t)}$. La caratteristica di questo impulso è una funzione avente area unitaria.



NB! Non è l'impulso a valere 1, è l'area che esso sottende ad essere unitaria; questa caratteristica è legata al fatto che l'area sottesa dalla derivata del gradino unitario è sempre costante e unitaria.

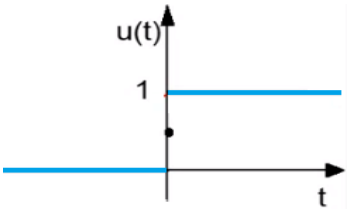
$$u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{t} \delta_\varepsilon(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha$$

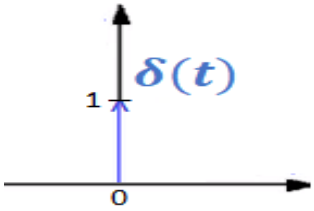
Concludiamo affermando che **l'impulso di Dirac è la derivata del gradino unitario** o, dualmente, **l'integrale dell'impulso di Dirac è un gradino unitario.**

Proprietà dell'impulso di Dirac

Siamo quindi riusciti a scrivere il gradino unitario in funzione dell'impulso di Dirac, scoprendo che quest'ultimo è la sua derivata (e che quindi, dualmente, integrando l'impulso di Dirac è possibile ricavare il gradino unitario):

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\ d\alpha}$$



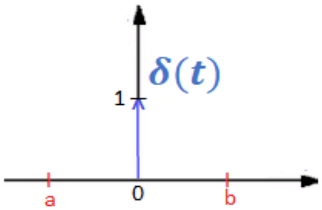


Integrale indefinito dell'impulso di Dirac

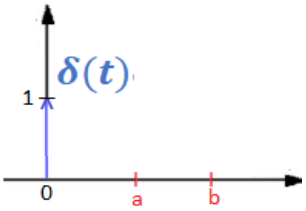
Possiamo facilmente dimostrare che **l'integrale all'infinito dell'impulso di Dirac $\delta(t)$ è sempre unitario**; questo lo si può dedurre sia riflettendo che il delta di Dirac è stato ottenuto derivando il segnale $u_\varepsilon(t)$, che sottende sempre un'area unitaria.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ dt = 1}$$

Fintanto che l'impulso di Dirac è contenuto tra gli estremi di integrazione l'integrale dell'impulso di Dirac vale 1, se gli estremi non comprendono tale impulso il risultato dell'integrale è nullo.



$$\int_a^b \delta(t)\ dt = 1$$



$$\int_a^b \delta(t)\ dt = 0$$

Parità dell'impulso di Dirac

È dimostrabile che l'impulso di Dirac è una **funzione pari**

$$\boxed{\delta(t) = \delta(-t)}$$

Non dimostreremo la parità dell'impulso di Dirac ma è bene tener presente che quest'ultimo si comporta come tutte le funzioni pari.

Delta di Dirac con argomento scalato

È dimostrabile che se si calcola un delta di Dirac in funzione del termine t scalato α volte: $\delta(\alpha t)$ equivale al delta di Dirac calcolato in "t" e scalato del valore $1/|\alpha|$:

$$\boxed{\delta(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\delta(t)}$$

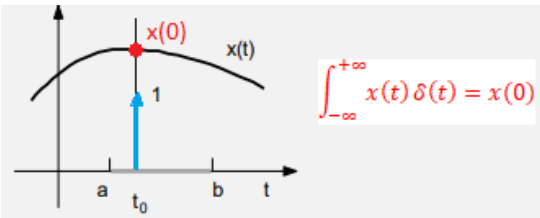
Proprietà campionatrice dell'impulso unitario di Dirac

Una delle proprietà fondamentali è la **proprietà di campionamento dell'impulso di Dirac**, questa proprietà è praticamente l'operazione matematica che opera il campionatore quando deve campionare un segnale analogico al fine di ottenerne l'equivalente digitale (quando vengono "prelevati" i campioni dal segnale analogico continuo per ottenerne successivamente i valori quantizzati e quindi opportunamente codificati in bit digitali).

Si supponga di considerare una funzione qualsiasi $x(t)$ e di voler eseguire la moltiplicazione di tale segnale con l'impulso di Dirac: $y(t) = x(t)\delta(t)$

Allora è dimostrabile che integrando il prodotto di questi due segnali si ottiene il valore della funzione $x(t)$ calcolato nel punto ove è centrato il delta di Dirac, se quest'ultimo fosse centrato in 0 allora il risultato sarebbe un $x(0)$.

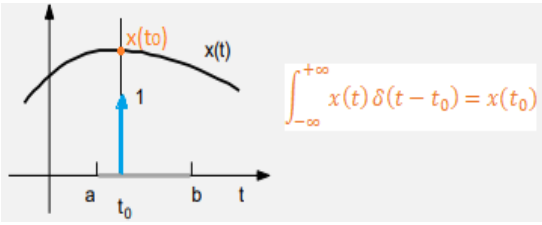
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t) = x(0)$$



Chiaramente ciò vale ammesso che gli estremi di integrazione includano il delta di Dirac (altrimenti il risultato sarebbe nulla perché integrando il delta di Dirac fuori dal proprio intervallo di definizione si otterrebbe un valore nullo).

Non siamo vincolati ad utilizzare il delta di Dirac fissato nell'origine: come ogni funzione quest'ultimo può essere traslato e quindi può essere centrato, ad esempio, in un punto "t_0", in tal caso l'integrale del prodotto tra il segnale $x(t)$ e il delta di Dirac $\delta(t - t_0)$ tornerà il valore che assume il segnale campionato $x(t)$ nel punto t_0 in cui è centrato il delta di Dirac:

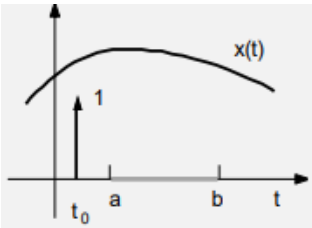
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)$$



Ammesso chiaramente che il punto t_0, ove è centrato il delta di Dirac, si trovi all'interno dell'intervallo d'integrazione.

Come già detto, qualora si integrasse in un intervallo in cui non è presente l'impulso di Dirac il risultato dell'integrale del prodotto sarà nullo, poiché il delta di Dirac sarebbe pari a zero.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0) = 0 \qquad per\ t_0 \notin [a, b]$$



Generalizzando possiamo allora scrivere la proprietà campionatrice dell'impulso di Dirac come segue:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0) = \begin{cases} x(t_0) & a \le t \le b \\ 0 & per\ t_0 \notin [a, b \end{cases}}$$

Praticamente, quando andiamo a calcolare l'integrale del prodotto tra il delta di Dirac ed il segnale $x(t)$ otteniamo il valore di $x(t)$ nel punto in cui si trova il delta di Dirac, ovvero il **campione del segnale $x(t)$ che si trova nel punto in cui è centrato il delta di Dirac.**

Dalla proprietà campionatrice possiamo subito dedurre un'altra caratteristica del delta di Dirac: quest'ultimo risulta essere **l'elemento neutro della convoluzione** (analogamente all'uno per la moltiplicazione), questo risultato lo si può dimostrare:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)$$

Se questo vale per un punto t_0 allora vale anche in un qualsiasi punto t:

$$x(t) = \int_a^b x(\alpha)\,\delta(t - \alpha)\,d\alpha \quad \rightarrow \quad x(t) = \int_a^b x(\alpha)\,\delta(t - \alpha)\,d\alpha = x(t) \otimes \delta(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{x(t) \otimes \delta(t) = x(t)}$$

Trasformata dell'impulso di Dirac

Proviamo adesso di trovare la trasformata di una funzione "insolita": la trasformata dell'impulso di Dirac. Applichiamo la definizione di trasformata di Fourier:

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad \rightarrow \quad \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Ma per la proprietà campionatrice dell'impulso di Dirac possiamo dedurre facilmente che calcolare la trasformata di quest'ultimo equivale a calcolare l'esponenziale nel punto $t = 0$ (poiché si sta considerando il delta di Dirac centrato nell'origine: $\delta(t)$)

$$P.\ Campionatrice: \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - t_0) = \begin{cases} x(t_0) & a \leq t \leq b \\ 0 & per\ t_0 \notin [\mathrm{a,b} \end{cases}$$

Supponiamo quindi che $x(t)$ sia l'esponenziale $\left[x(t) = \ e^{-j2\pi ft}\right]$ e ragioniamo con questa proprietà per ottenere la trasformata di Fourier del delta di Dirac:

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \xrightarrow{P.\ campionatrice} \Delta(f) = \ e^{-j2\pi ft}|_{t=0} = \ e^{0} = 1$$

Quanto abbiamo ottenuto è che **lo spettro nel dominio della frequenza del delta di Dirac definito nel tempo è una funzione costante,** questo significa che lo spettro dell'impulso è caratterizzato da **infinite armoniche tutte uguali, con frequenze che vanno da $-\infty$ a $+\infty$.**
Chiaramente, si tratta di un segnale che non esiste: non esiste l'impulso di Dirac in quanto fisicamente non realizzabile vista la rapidità con il quale passa da 0 a 1 né il suo spettro.

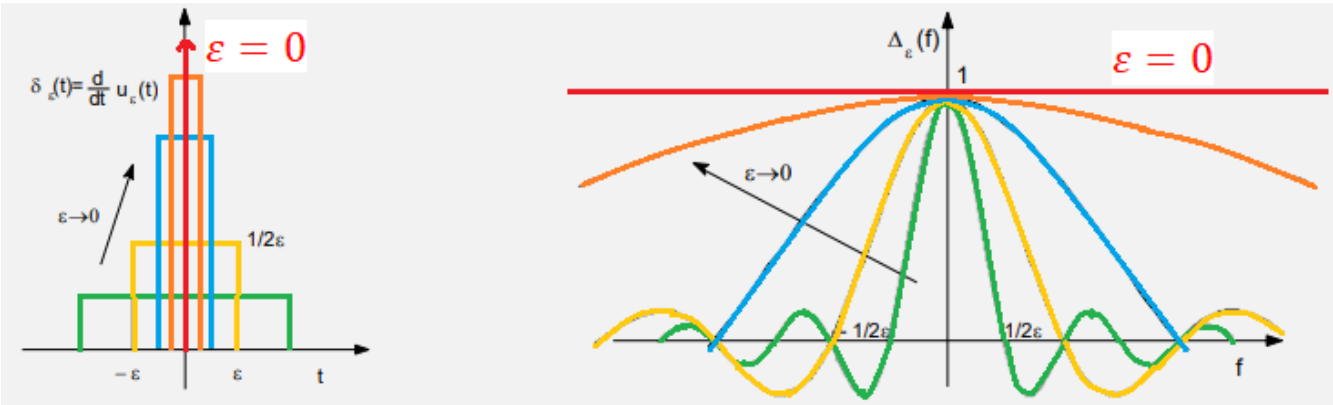
Possiamo dimostrare quanto ottenuto matematicamente in maniera grafica: partiamo dal rect che identificava l'integrale della funzione fisicamente realizzabile che approssimava il gradino unitario:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon}\right] = \frac{1}{2\varepsilon}\, rect\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$$

Passando al dominio frequenziale trasformando tale rect, in corrispondenza di quest'ultimo troveremo un seno cardinale. Se adesso immaginiamo di passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ vedremo come nel dominio del tempo i rect avranno una base più stretta (2ε) ed un'altezza maggiore ($1/2\varepsilon$) e nel dominio della frequenza i seni cardinali si allargano poiché:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\, rect\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) \rightarrow \quad \Delta_\varepsilon(f) = \frac{1}{2\varepsilon}[2\varepsilon\, sinc(2\varepsilon f)] = sinc(2\varepsilon f) \xrightarrow{per\ \varepsilon=0} sinc(0) = 1$$

La frequenza diminuisce insieme ad ε quindi i vari seni cardinali si "allargano" fino a che $\varepsilon = 1$ e quindi il seno cardinale assume valore costante unitario: $sinc(2\varepsilon f) = sinc(0) = 1$



Quanto ottenuto è un importante risultato: **ogni volta che si ha un impulso di Dirac nel dominio temporale si ottiene uno spettro costante unitario nel dominio frequenziale.**

Per il teorema della dualità possiamo anche affermare che **ad una funzione costante e unitaria nel tempo corrisponde uno spettro composto da un impulso centrato in 0** (d'altronde trattandosi di un segnale costante la sua frequenza sarà pari a 0 dato che non oscilla):

$$T.dualità: \quad x(t) = 1 \;\rightarrow\; X(f) = \delta(-f) = \delta(f)$$

*Si noti che il teorema della dualità afferma che ad $X(t)$ corrisponde nel dominio frequenziale $x(-f)$, ma siccome tra le proprietà che abbiamo elencato sul delta di Dirac vi era anche la parità, possiamo affermare che $\delta(-f) = \delta(f)$ e quindi avremo che $x(t) = 1 \;\rightarrow\; X(f) = \delta(f)$.

L'impulso di Dirac e il teorema della traslazione nel tempo

Vediamo adesso un particolare caso in cui applichiamo il teorema della traslazione: si tratta dell'applicazione di tale teorema quando il segnale traslato è un impulso di Dirac; è frequente trovarsi ad operare con impulsi di Dirac traslati poiché spesso, ad esempio nel campionamento, si è interessati ad impulsi che non sono centrati nell'origine (si pensi al caso in cui si vuole ottenere un campione $x(t_0)$, il valore che assume una funzione $x(t)$ quando si trova all'istante t_0).

Il teorema del ritardo (o della traslazione nel tempo) afferma che ad un segnale traslato corrisponde nel dominio della frequenza la relativa trasformata moltiplicata per l'esponenziale avente come esponente l'entità del ritardo.

$$T.ritardo: \;\; x(t - t_0) \;\rightarrow\; X(f)e^{j2\pi f t_0}$$

In questo caso, siccome la trasformata di un impulso assume valore unitario, possiamo facilmente verificare che **la trasformata di un impulso traslato equivale ad un esponenziale avente all'esponente l'istante "t_0" in cui è centrato l'impulso stesso:**

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \rightarrow \quad X(f) = 1 * e^{-j2\pi f t_0} = e^{-j2\pi f t_0} \quad \left[x(t) = \delta(t + t_0) \;\rightarrow\; X(f) = e^{j2\pi f t_0}\right]$$

Per dualità possiamo facilmente dedurre quale sia la **trasformata di una funzione esponenziale**: si tratta di un **impulso di Dirac traslato della quantità "f_0", ovvero l'entità del ritardo all'esponente:**

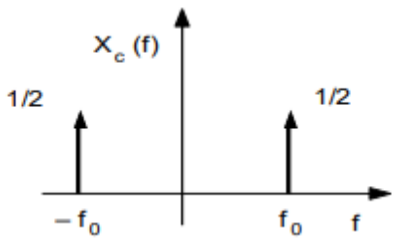
$$x(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \;\rightarrow\; X(f) = \delta(f + f_0) \qquad \left[x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \;\rightarrow\; X(f) = \delta(f - f_0)\right]$$

NB! Nel caso duale si invertono i segni: $T.Dualità$: $X(t) \rightarrow x(-f)$, per questo motivo quando abbiamo trattato il caso duale abbiamo invertito i segni di f_0.

Confronto nell'analisi in frequenza del coseno tra trasformata di Fourier e sviluppo in serie di Fourier

Da questa scoperta, applicando la formula di scomposizione di Eulero otteniamo quanto segue:

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}}{2}$$



Passiamo alla trasformata di Fourier:

$$x_c = \frac{e^{2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}}{2} \;\rightarrow\; X_c = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Lo spettro corrisponde praticamente a due impulsi che si trovano a frequenza f_0 e $-f_0$. Questo risultato lo abbiamo precedentemente ottenuto, quando abbiamo trattato per la prima volta lo sviluppo in serie di Fourier e l'analisi armonica nel dominio della frequenza. Tuttavia, precedentemente rappresentavamo lo spettro a barre, adesso abbiamo capito che si tratta di due impulsi centrati nelle frequenze $\pm f_0$. Questo risultato mette a confronto lo sviluppo in serie di Fourier con la trasformata di Fourier: abbiamo infatti potuto verificare che abbiamo ottenuto lo stesso risultato in entrambi i casi.

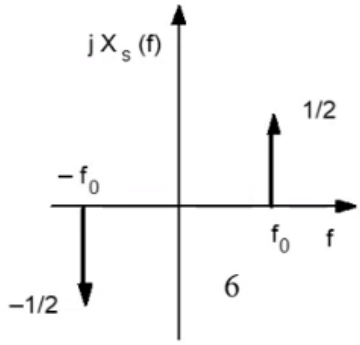
Questo ci permette di capire che è sempre possibile calcolare lo spettro di un segnale periodico, che prima abbiamo ricavato mediante sviluppo in serie di Fourier, attraverso l'operazione di trasformata di Fourier; come vedremo a breve, infatti, la trasformata di Fourier è uno strumento utilizzabile sia per segnali aperiodici che per segnali periodici

Possiamo anche applicare lo stesso ragionamento con il seno, partendo sempre dalla scomposizione di Eulero:

$$x_s(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi f_0 t} - e^{-2\pi f_0 t}}{2j}$$

Passiamo alla trasformata di Fourier:

$$x_c = \frac{e^{2\pi f_0 t} - e^{-2\pi f_0 t}}{2j} \quad \rightarrow \quad X_c = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$$



Trasformata continua di un segnale periodico qualunque

Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico qualsiasi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{f_0 = 1/T_0} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j\frac{2\pi k t}{T_0}}$$

Supponiamo di voler ottenere la trasformata di Fourier di questo segnale; il risultato che otteniamo è correlato al teorema del ritardo applicato al caso particolare di un segnale costante: il segnale è espresso come sommatoria di k termini formati dal prodotto tra un coefficiente X_k e l'esponenziale, se trasformiamo questo segnale il risultato sarebbe la sommatoria di termini formati da X_k (che non dipendendo da "t" non viene trasformato e rimane a moltiplicare) e un delta di Dirac traslato di $-k/T_0$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j\frac{2\pi k t}{T_0}} \quad \rightarrow \quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

La trasformata che otteniamo è praticamente una sommatoria di impulsi che vengono decentrati in funzione di "k" (indice della sommatoria che identifica l'ordine delle armoniche):

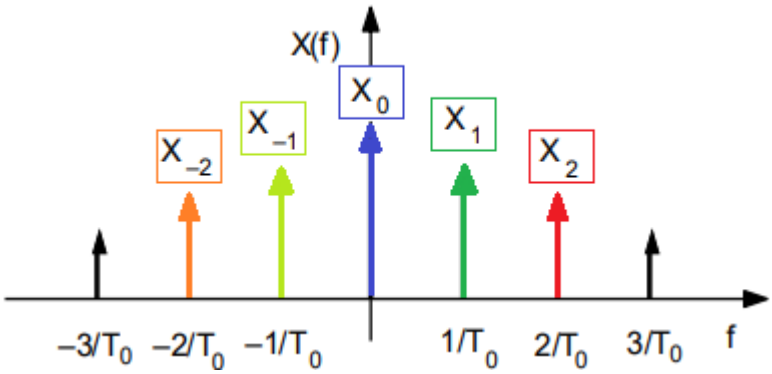
$k = -2 \quad \rightarrow \quad X_{-2}\, \delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right)$

$k = -1 \quad \rightarrow \quad X_{-1}\, \delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right)$

$k = 0 \quad \rightarrow \quad X_0\, \delta(f)$

$k = 1 \quad \rightarrow \quad X_1\, \delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)$

$k = 2 \quad \rightarrow \quad X_2\, \delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right)$



$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = X_{-2}\, \delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right) + X_{-1}\, \delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right) + X_0\, \delta(f) + X_1\, \delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right) + \cdots$$

Stiamo praticamente ritrovando lo **spettro a righe del segnale periodico** che abbiamo ottenuto dallo studio dello sviluppo di Fourier per segnali periodici, tuttavia al posto delle righe vi sono gli impulsi di Dirac.

Esempio: calcolo della trasformata di un coseno quadro

Supponiamo di voler calcolare la trasformata di un segnale coseno quadro:

$$x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

Dalla trigonometria ricordiamo che è possibile scrivere il coseno quadro come $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$:

$$x(t) = \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right)$$

NB! Si tenga presente che la frequenza del coseno rimane comunque $f_0 = 2/T_0$ anche dopo la trasformazione trigonometrica perché da essa teniamo in considerazione nell'argomento del coseno $2f_0 = 4/T_0$, per cui quando andremo a trattare la frequenza f_0 nella trasformazione di Fourier dobbiamo tener presente che essa vale $f_0 = 2/T_0$*

A questo punto possiamo utilizzare la scomposizione di Eulero per il coseno, il motivo di tale scelta è quello di scrivere il coseno come somma di esponenziali, che sono più semplici da trasformare.

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\frac{4\pi t}{T_0}} + e^{j\frac{4\pi t}{T_0}}}{2}\right]$$

A questo punto possiamo ragionare come segue: il termine 1/2 può essere visto come un termine unitario moltiplicato per 1/2, in altre parole, sapendo che la trasformata del delta di Dirac vale 1, dal teorema di dualità possiamo facilmente dedurre che la trasformata di questo segnale corrisponde ad un delta di Dirac:

$$T.Dualità: \quad X(t) = 1 \quad \rightarrow \quad x(-f) = \delta(-f) \xrightarrow{Parità} x(-f) = \delta(f)$$

Per quanto riguarda il coseno espresso in forma esponenziale, possiamo vedere tali termini come termini unitari che vengono moltiplicati per l'esponenziale stesso:

$$\frac{e^{-j\frac{4\pi t}{T_0}} + e^{j\frac{4\pi t}{T_0}}}{2} = \frac{\left(1 * e^{-j\frac{4\pi t}{T_0}}\right) + \left(1 * e^{j\frac{4\pi t}{T_0}}\right)}{2}$$

In questo modo possiamo facilmente dedurre che si tratta di due delta di Dirac che vengono traslati in frequenza, in virtù del teorema di traslazione in frequenza:

$$T.traslazione: \quad y(t) = x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \quad \rightarrow \quad Y(f) = X(f - f_0)$$

Otteniamo dunque:

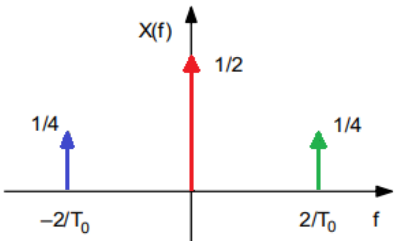
$$x(t) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 * e^{-j\frac{4\pi t}{T_0}}\right) + \left(1 * e^{j\frac{4\pi t}{T_0}}\right)}{2}\right] \quad \rightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right)}{2}\right]$$

*Come già detto, dovremo considerare $f_0 = 2/T_0$ e non $2f_0 = 4/T_0$ ottenuto a seguito dell'operazione trigonometrica effettuata.

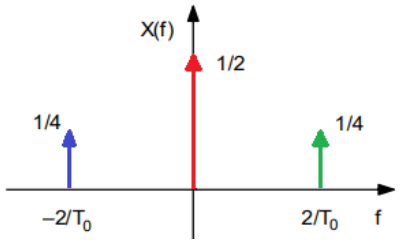
Il segnale risultante è quindi dato dalla sommatoria di tre impulsi:

$$X(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{4}\left[\delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right)\right]$$

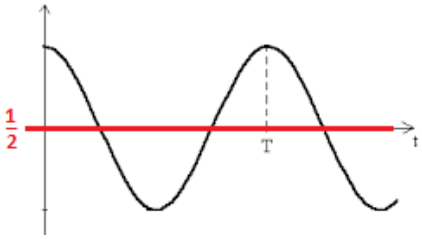
$$X(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right)$$



Possiamo fare un'osservazione circa il valor medio: in questo caso il valor medio del segnale è pari ad 1/2, se non vi fosse stato l'impulso di Dirac centrato in 0 il valor medio sarebbe stato nullo.



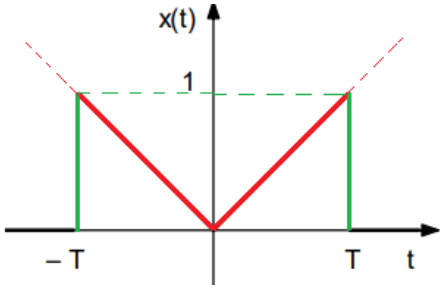
Questo lo possiamo dedurre anche dal punto di vista temporale: dopo la trasformazione trigonometrica otteniamo dal coseno quadro una cosinusoide che evolve attorno ad un valore costante: esso è proprio 1/2, il valor medio.



Normalmente, **la componente continua, se esiste, rappresenta il valor medio attorno al quale il segnale oscilla. Se non vi è componente continua allora il valor medio è nullo.**

Esempio: calcolo della trasformata mediante la derivata di un segnale
Supponiamo di avere il segnale:

$$x(t) = \frac{|t|}{T} rect\left(\frac{t}{2T}\right)$$



E di volerne ottenere la trasformata passando però dalla sua derivata.

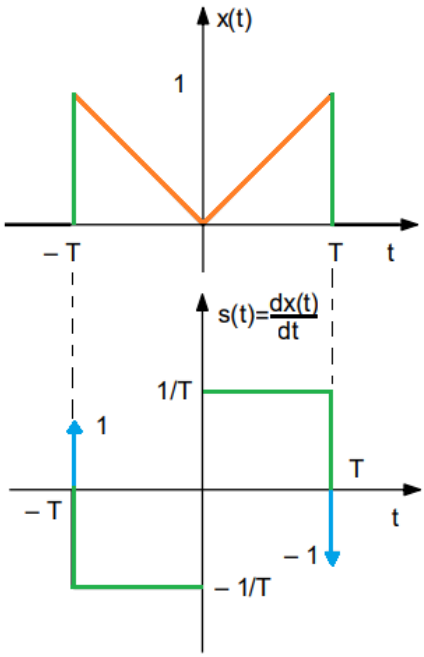
Il segnale $x(t)$ graficato è il risultato della moltiplicazione del grafico di $|t|/T$ e del $rect\left(\frac{t}{2T}\right)$ centrato in zero, di ampiezza unitaria, che si estende da -T a T.

Supponiamo adesso di voler graficare la derivata del segnale $x(t)$ che chiameremo $s(t) = dx(t)/dt$.
A tale scopo riportiamo le derivate dal punto di vista grafico delle principali funzioni; per fissare le idee si riflette sempre che l'operazione di derivazione decrementa il grado dell'equazione (se si deriva x^2 il risultato sarà $2x$, l'incognita è scalata di un grado) e si tenga presente che:

- $y = 1$ è un gradino unitario
- $y = x$ è una rampa
- $y = x^2$ è una parabola

Possiamo allora dire che:

- La derivata di un **gradino** è un **impulso di Dirac**
- La derivata di una **retta** è un **gradino**
- La derivata di una **parabola** è una **retta**



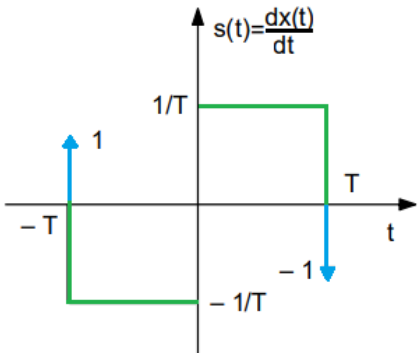
Suddividiamo dunque il segnale in questione in funzione dei segnali elementari appena elencati e vediamo di dedurre quanto valga la derivata deducendone l'andamento grafico:

- Inizialmente troviamo un gradino crescente: il suo valore va da 0 a 1, la sua derivata, come detto, è un impulso di Dirac
- A seguire possiamo osservare che vi è una retta decrescente che decresce da 1 a 0, il che significa che, dato l'andamento decrescente, la derivata sarà un gradino di segno negativo
- Successivamente vi è una retta crescente da 1 a 0, la derivata sarà un gradino di segno positivo
- Infine troviamo un gradino decrescente che va da 0 a 1, la sua derivata sarà un impulso di Dirac negativo

Possiamo ottenere la forma analitica di questo segnale, basta leggere il grafico:

- L' impulso di Dirac è centrato in $-T$ ed ha un'ampiezza unitaria, questo significa che analiticamente è un delta di Dirac traslato di T: $\delta\big(t-(-T)\big)=\delta(t+T)$
- A seguire vi è un gradino di segno negativo, questo può essere visto come un rect: si tratta di un rect di ampiezza -1/T e di base pari a T (dato che si estende da 0 a T) centrato in -T/2:

$$-\frac{1}{T}rect\left(\frac{t-\left(-\frac{T}{2}\right)}{T}\right)=-\frac{1}{T}rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)$$



- A seguire vi sarà il secondo gradino di segno positivo anche questo può essere visto come un rect: si tratta di un rect di ampiezza 1/T e di base pari a T (dato che si estende da 0 a T) centrato in T/2:

$$\frac{1}{T}rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

- Infine un impulso di Dirac negativo centrato in T ad ampiezza unitaria: $-\delta(t-T)$

Quindi il segnale risultante sarà:

$$s(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t+T)+\left[-\frac{1}{T}rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)\right]+\frac{1}{T}rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)+[-\delta(t-T)]$$

$$s(t)=\delta(t+T)-\delta(t-T)-\frac{1}{T}rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)+\frac{1}{T}rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

A questo punto, avendo ottenuto la derivata del segnale: $s(t)$, vogliamo ottenerne la trasformata $S(f)$; per farlo otteniamo la trasformata di tutti i termini che compongo il segnale derivato:

$$F[\delta(t+T)]=1*e^{j2\pi fT}$$

$$F[-\delta(t-T)]=-1*e^{-j2\pi fT}$$

$$F\left[-\frac{1}{T}rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)\right]=-\frac{1}{T}\,F\left[rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)\right]=-\frac{1}{T}\left[T\,sinc(fT)e^{j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right]=-\,sinc(fT)e^{j\pi fT}$$

$$F\left[\frac{1}{T}rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right]=\frac{1}{T}\,F\left[rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right]=\frac{1}{T}\left[T\,sinc(fT)e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}\right]=\,sinc(fT)e^{-j\pi fT}$$

A questo punto, sommando i singoli contributi, otteniamo il segnale trasformato:

$$S(f)=e^{j2\pi fT}+[-e^{-j2\pi fT}]+\left[-\,sinc(fT)e^{j\pi fT}\right]+\,sinc(fT)e^{-j\pi fT}$$

Mettiamo a comune i due seno cardinale dato che sono identici, In modo da ottenere:

$$S(f)=e^{j2\pi fT}-e^{-j2\pi fT}-sinc(fT)\left[e^{-j\pi fT}-e^{j\pi fT}\right]$$

Possiamo moltiplicare e dividere per $2j$ i due esponenziali per ottenere la forma di Eulero di un seno:

$$S(f)=\frac{2j}{2j}*\left[\left(e^{j2\pi fT}-e^{-j2\pi fT}\right)-sinc(fT)\left[e^{-j\pi fT}-e^{j\pi fT}\right]\right]$$

$$S(f)=2j\left[\frac{e^{j2\pi fT}-e^{-j2\pi fT}}{2j}\right]-2jsinc(fT)\left[\frac{e^{-j\pi fT}-e^{j\pi fT}}{2j}\right]=2j\sin(2\pi fT)-2jsinc(fT)[\sin(\pi fT)]$$

A questo punto non ci resta che ricavare lo spettro di $X(f)$: si tenga presente infatti che siamo passati alla derivata del segnale $x(t)$ $[s(t)]$ con lo scopo di ottenere la trasformata di $x(t)$; per risalire a quest'ultimo dovremo integrare la sua derivata:

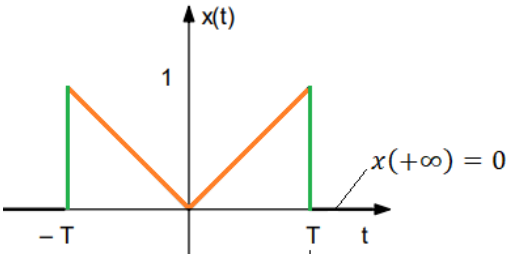
$$x(t) = \int s(t)\ dt$$

Analogamente allora integrando la trasformata $S(f)$ ricaveremo la trasformata $X(f)$. Operando nel dominio trasformato ricordiamo che l'operazione di integrazione corrisponde ad una banale divisione per il termine $j2\pi f$:

$$T.Integrale: \quad y(t) = \int x(t)\ dt \quad \rightarrow \quad Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

NB! Per applicare questo teorema è necessario che quando $f = 0$ allora $X(f)$ (che nel nostro caso è $S(f)$) sia pari a 0 perché altrimenti avremmo un numero diviso zero!

Nel nostro caso quando $f = 0$ avremo che $S(f) = S(f) = 0$; questo lo possiamo constatare dal grafico (di cui però non disponiamo), analogamente, possiamo anche verificarlo nel dominio temporale, accertandoci che $x(+\infty) = 0$, anche quest'ultima viene considerata anche nel grafico.
Verificando l'ipotesi nel dominio temporale possiamo affermare che è applicabile il teorema dell'integrale della trasformata di Fourier.



Quindi nel dominio trasformato possiamo facilmente ricavare l'integrale della funzione:

$$X(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f} = \frac{2j\sin(2\pi fT) - 2jsinc(fT)[\sin(\pi fT)]}{j2\pi f} = \frac{2j\sin(2\pi fT)}{j2\pi f} - \left[\frac{sinc(fT)}{\pi f} * \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}\right]$$

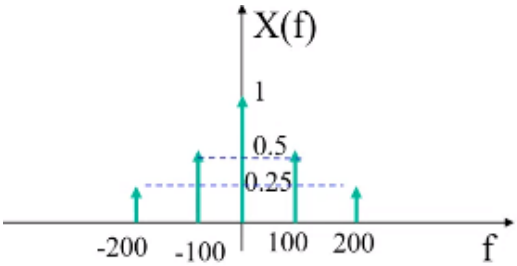
Se andassimo a moltiplicare e dividere il segnale per T otterremo:

$$X(f) = \frac{T}{T}\left[\frac{2j\sin(2\pi fT)}{j2\pi fT} - \left[\frac{sinc(fT)}{\pi fT} * \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]\right] = 2Tsinc(2fT) - Tsinc^2(fT)$$

Esercizio: energia di un segnale dato lo spettro, antitrasformata e valor medio del segnale

Sia dato il segnale $x(t)$ di cui è noto lo spettro $X(f)$ rappresentato.

1) Specificare se il segnale è di energia o di potenza
2) Determinare l'espressione del segnale nel dominio del tempo
3) Calcolare il valor medio del segnale



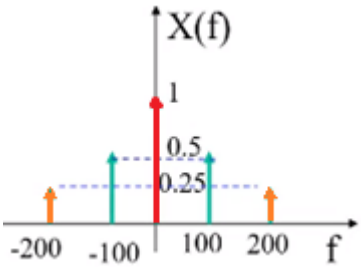
1. Specificare se il segnale è di energia o di potenza

Per prima cosa dovremo specificare se il segnale è di energia o di potenza, per farlo ragioniamo come segue: il suo spettro è caratterizzato da una serie di impulsi, questo significa che il segnale ha uno **spettro a righe**, i segnali che hanno uno spettro simile sono periodici, quindi possiamo affermare che $\boldsymbol{x(t)}$ **è un segnale periodico.** I segnali periodici hanno sempre energia infinita (essendo quest'ultima pari all'integrale del quadrato del segnale, dato che il segnale si protrae all'infinito, anche l'energia sarà all'infinito), questo significa che il segnale in questione è un **segnale di potenza**, come tutti i segnali periodici, perché ha **energia infinita e potenza finita.**

2. Determinare l'espressione del segnale nel dominio del tempo

Per ottenere il segnale equivalente nel dominio del tempo dovremo praticamente analizzare ogni impulso e determinare l'equivalente antitrasformata temporale: lo spettro è dato dalla somma di una serie di impulsi, ci aspettiamo quindi che il segnale temporale sia dato dalla somma di più segnali.

Dato che lo spettro (delle ampiezze) è pari, avremo la simmetria rispetto all'asse verticale, per cui andremo a considerare le coppie di impulsi simmetrici e andremo a ricavarne il corrispondente valore nel dominio temporale.



→ L'impulso di Dirac nell'origine corrisponde ad un segnale costante e unitario:

$$\boldsymbol{F^{-1}[\delta(t)] = 1}$$

→ Il segnale che ha come spettro due impulsi simmetrici è il coseno:

$$F[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Per cui otteniamo:

$$F^{-1}\left[0.5\,[\delta(f - 100) + \delta(f + 100)]\right] = F^{-1}\left[\frac{\delta(f - 100) + \delta(f + 100)}{2}\right] = \cos\,(2\pi(100)t)$$

→ Possiamo ugualmente ottenere l'antitrasformata della coppia di impulsi centrati in ± 200:

$$F^{-1}\left[0.25\,[\delta(f - 100) + \delta(f + 100)]\right] = F^{-1}\left[\frac{\delta(f - 100) + \delta(f + 100)}{4}\right]$$

$$F^{-1}\left[\frac{\delta(f - 100) + \delta(f + 100)}{4}\right] = \frac{1}{2}\,F^{-1}\left[\frac{\delta(f - 100) + \delta(f + 100)}{2}\right] = \frac{1}{2}\cos\,(2\pi(200)t)$$

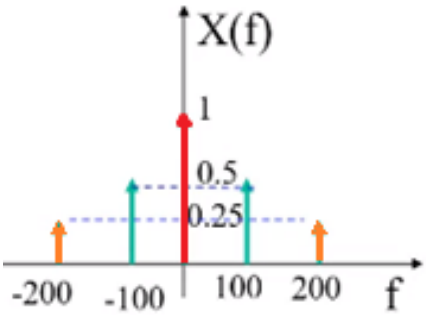
Otteniamo quindi che l'espressione nel dominio del tempo del segnale è la seguente:

$$x(t) = \mathbf{1} + \cos(2\pi(100)t) + \frac{1}{2}\cos\,(2\pi(200)t) = \mathbf{1} + \cos(200\pi t) + \frac{1}{2}\cos\,(400\pi t)$$

2. Determinare il valor medio del segnale

Per determinare analiticamente il valor medio del segnale dovremmo applicare la formula:

$$< x(t) > = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\ dt$$



Per cui avremmo dovuto ricavare prima il periodo, considerando la frequenza fondamentale nel grafico:

$$\frac{1}{T_0} = f_0 = 100$$

E poi avremmo dovuto calcolare l'integrale.

NB! Per un segnale periodico si calcola il valore medio nel periodo perché il segnale si ripete uguale a sé stesso, quindi per il calcolo del valor medio non passiamo al limite ma calcoliamo tutto nel periodo.

Tuttavia il valor medio lo possiamo ottenere dallo spettro: trattandosi di due coseni e di un termine costante, nello spettro avremo due coppie di impulsi speculari e un impulso nell'origine in corrispondenza del termine costante; avendo un termine costante possiamo affermare che sarà quest'ultimo il valore attorno al quale oscilla il segnale.

Trasformata continua di un segnale periodico qualunque

Per risolvere **tutti gli esercizi in cui è richiesto lo spettro di un segnale** periodico è sempre richiesta la formula di somma di Poisson, per cui questo argomento è fondamentale per la risoluzione di tali esercizi

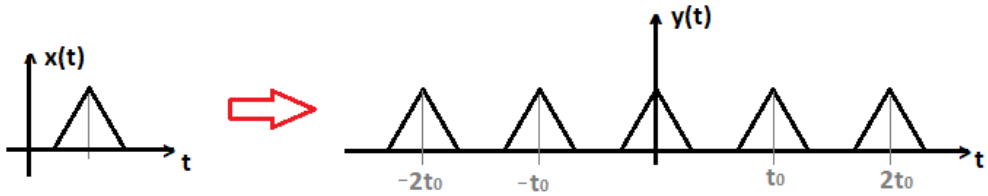
Sia dato un segnale <u>aperiodico</u> $x(t)$ ed un segnale <u>periodico</u> $y(t)$ ottenuto per periodicizzazione di $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

<u>Esempio</u>: supponiamo che il segnale $x(t)$ sia un triangolo; in questo caso allora $y(t)$ si potrà ottenere periodicizzando tale triangolo, ovvero sommando una serie di triangoli, via via che "n" (indice) cresce $y(t)$ assumerà la forma di un treno di triangoli.

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{t - nt_0}{2}\right)$$



Man mano che "n" aumenta, ci si sposta lungo la serie di triangoli, accentrandosi nei vari triangoli.

Diremo che il segnale $y(t)$ è periodico ed è ottenuto per **periodicizzazione del segnale aperiodico $x(t)$** e, dualmente, che il segnale $x(t)$ è la **troncatura del segnale periodico $y(t)$.**

Questo ci fa capire che un segnale periodico può essere visto come la ripetizione di un segnale troncato, qualunque segnale periodico può essere scritto come sommatoria delle varie "copie" del segnale troncato che lo compongono. Il vantaggio di vedere il segnale in funzione della sommatoria dei segnali troncati che lo formano è che di un segnale troncato, essendo quest'ultimo aperiodico, sappiamo calcolare la trasformata di Fourier, per cui è lecito chiedersi:

Esiste una relazione tra il coefficiente Y_k dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ e la trasformata del segnale troncato $x(t)$: $X(f)$?

Se così fosse potremmo dedurre il coefficiente Y_k dallo spettro del segnale troncato, così da ottenere tale coefficiente in maniera più agevole.

Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico serve per analizzare lo spettro di quest'ultimo (che ricordiamo essere a righe, quindi non continuo):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)}$$

*Si tenga presente che lo sviluppo in serie di Fourier può essere espresso in diverse forme, in questo caso si tratta della sua forma complessa.

Come possiamo osservare, tale sviluppo è caratterizzato da un parametro Y_k che, per definizione, si ricava come:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \, e^{-j(2\pi k f_0 \, t)} \, dt$$

Avendo espresso $y(t)$ come periodicizzazione del segnale troncato $x(t)$ possiamo scrivere:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \, e^{-j(2\pi k f_0 \, t)} \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \, e^{-j(2\pi k f_0 \, t)} \, dt$$

Portiamo al di fuori la sommatoria, dato che integrale e sommatoria sono due operatori lineari:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \, e^{-j(2\pi k f_0 \, t)} \, dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t - nT_0) e^{-j(2\pi k f_0 \, t)} \, dt \right]$$

A questo punto facciamo un'assunzione: $\alpha = t - nT_0$ per praticità;
otteniamo dunque le seguenti sostituzioni:

- Il segnale non sarà più $x(t - nT_0)$ ma $x(\alpha)$ a seguito dell'assunzione
- La variabile temporale t (all'esponente dell'esponenziale) diventa: $t = \alpha + nT_0$ (formula inversa)
- Gli estremi di integrazione passano da $\pm\frac{T_0}{2}$ a $\pm\frac{T_0}{2} - nT_0$ $\left(poiché\ T_0 = \frac{t+\alpha}{n}\right)$
- La variabile di integrazione diventa $d\alpha = d(t - nT_0) = dt$ (sostituiremo quindi $dt \rightarrow d\alpha$)

Otteniamo quindi:

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t - nT_0)e^{-j(2\pi k f_0\, t)}\, dt\right] \xrightarrow{\alpha = t - nT_0} Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\,(\alpha + nT_0))}\, d\alpha\right]$$

Dato che all'esponente dell'esponenziale vi è una somma, possiamo suddividere tale esponenziale come prodotto di due esponenziali, come segue:

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\,(\alpha + nT_0))}d\alpha\right] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\alpha)}e^{-j(2\pi k f_0 nT_0)}d\alpha\right]$$

A questo punto possiamo focalizzare l'attenzione sul secondo esponenziale: $e^{-j(2\pi k f_0 nT_0)}$ questo è formato da f_0 e T_0 che, essendo l'uno il reciproco dell'altro, una volta moltiplicati si semplificano, quindi l'esponenziale diventa:

$$e^{-j(2\pi k f_0 nT_0)} = e^{-j(2\pi kn)}$$

Dalle scomposizioni di Eulero possiamo osservare quanto segue:

$$e^{-j(2\pi kn)} = \cos(2kn\pi) - j\sin(2kn\pi)$$

Ma si noti che il coseno vale sempre 1 per i multipli pari di π, mentre il seno si annulla in corrispondenza di quest'ultimi; otteniamo quindi:

$$e^{-j(2\pi kn)} = \cos(2kn\pi) - j\sin(2kn\pi) = 1 - 0 = 1$$

Per cui questo termine è unitario e possiamo sostituirlo nell'espressione:

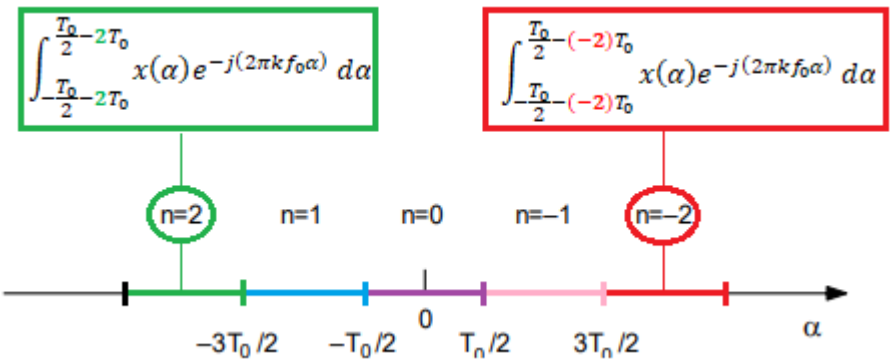
$$Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\alpha)}e^{-j(2\pi k f_0 nT_0)}d\alpha\right] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\alpha)} * 1\, d\alpha\right]$$

Per cui otteniamo il coefficiente Y_k con la seguente espressione:

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0\alpha)}\, d\alpha\right]$$

Da questo risultato possiamo osservare che **l'indice n della sommatoria non agisce sull'argomento dell'integrale** (dato che, appunto, "n" non figura), **bensì solo sugli estremi d'integrazione** $\left(\pm\frac{T_0}{2} - nT_o\right)$.

Questo significa che per ottenere Y_k stiamo andando a sommare più quantità date da diversi integrali: man mano che varia "n" andremo a calcolare l'integrale in un intervallo interno al range delimitato da "n" e, come risultato finale, troveremo la somma di tutti i vari integrali calcolati sugli n diversi intervalli; **Y_k è dato dalla somma di tanti integrali che si susseguono in più intervalli.** Ma se sommiamo tutti gli integrali nei vari intervalli stiamo praticamente considerando **l'integrale tra $-\infty$ e** $+\infty$ (poiché la sommatoria va da $n = -\infty$ a $n = +\infty$)



Fatta dunque questa osservazione, possiamo sostituire alla sommatoria di tutti gli integrali calcolati nei vari intervalli considerando **l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$** ottenendo così quanto segue:

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0 \alpha)}\, d\alpha\right] = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0 \alpha)}\, d\alpha$$

Ma si noti che l'integrale del segnale troncato $x(t)$ moltiplicato per l'esponenziale $e^{-j(2\pi k f_0 \alpha)}$ restituisce la **trasformata del segnale troncato $X(f)$ calcolata nel punto kf_0:**

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)e^{-j2\pi(kf_0)\alpha} d\alpha = X(kf_0)$$

Quindi a questo punto abbiamo trovato la **relazione tra il coefficiente di Fourier del segnale periodico: Y_k e la trasformata di Fourier del segnale troncato: X_k** espressa come:

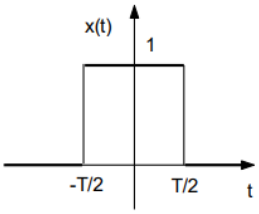
$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)e^{-j(2\pi k f_0 \alpha)}\, d\alpha = \frac{1}{T_0}X(kf_0) \;\rightarrow\; \boxed{Y_k = \frac{1}{T_0}X(kf_0) = \frac{1}{T_0}X\left(\frac{k}{T_0}\right)}$$

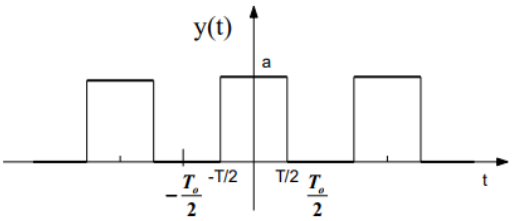
*abbiamo espresso Y_k anche in funzione di T_0, ricordando che $f_0 = 1/T_0$

Questo significa che il coefficiente di Fourier dello sviluppo in serie del segnale periodico (Y_k) è dato dal rapporto tra il periodo del segnale T_0 e lo spettro del segnale troncato ($X(f)$) nel punto kf_0.

<u>Esempio</u>: si supponga di considerare un treno di rect, ottenuto dalla periodicizzazione di un singolo rect (il segnale troncato $x(t)$);

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \qquad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$





Come sappiamo, lo spettro di un segnale rettangolare è dato da un seno cardinale, per cui conosciamo già l'andamento dello spettro $X(f)$ considerando che $x(t)$ è un rect centrato in zero di base T:

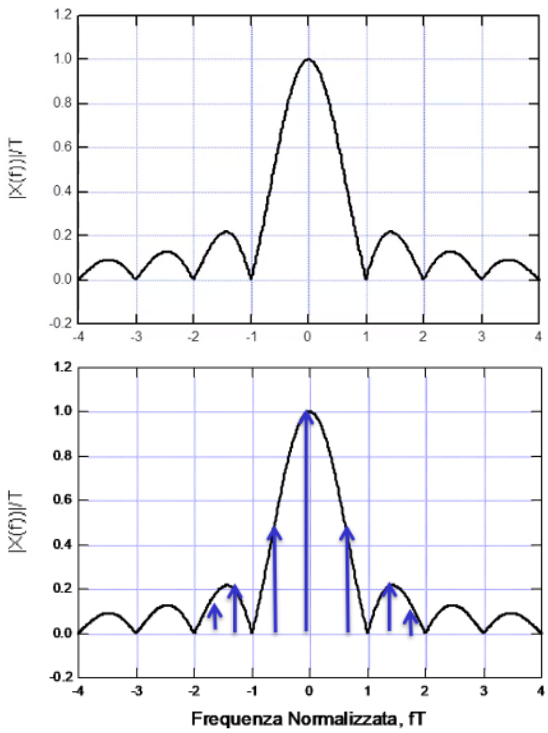
$$X(f) = T\, sinc(fT)$$

Se volessimo ottenere l'equivalente nel dominio della frequenza del segnale periodico $y(t)$ avremo bisogno di tutti i vari elementi Y_k che, come abbiamo appena visto, sono relazionati allo spettro del segnale troncato $X(f)$:

$$Y_k = \frac{1}{T_0}X(kf_0) = \frac{1}{T_0}X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

Graficamente, Y_k lo si ottiene praticamente considerando lo spettro del segnale troncato $X(f)$ e considerando di quest'ultimo il suo valore quando $f = kf_o$, quindi quando viene raggiunta una precisa frequenza multipla della portante f_0.

Questo esempio ci fa capire che il coefficiente Y_k si ottiene considerando lo spettro del segnale troncato in un preciso punto dipendente da "k", come se si "campionasse" lo spettro $X(f)$.



Il vantaggio di utilizzare la formula:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0) = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

È quello di poter calcolare i vari coefficienti Y_k dello sviluppo in serie di Fourier conoscendo praticamente solo la **portante f_o** (che è nota sin da subito poiché consiste nella frequenza del segnale periodico) e **lo spettro del segnale troncato.**

Una volta che si conoscono questi due elementi è possibile ottenere qualsiasi coefficiente Y_k perché sarà necessario solo calcolare il valore dello spettro $X(f)$ nel punto kf_0 (dove sia k che f_0 sono noti dato che il primo è il "numero" in progressione del coefficiente che si vuole ottenere ed f_0 è, come detto, la portante).

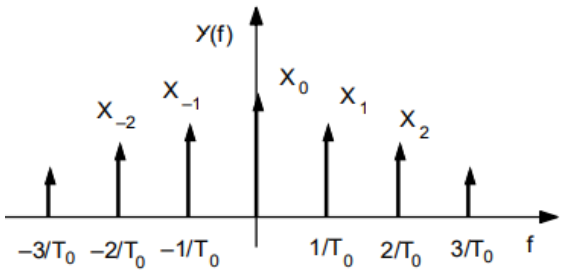
Quindi, in ordine, per calcolare il coefficiente Y_k dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico basta:

1. Isolare il segnale troncato dal segnale periodico (ottenuto dalla periodicizzazione di quest'ultimo)
2. Calcolare lo spettro del segnale troncato (dato che esso sarà aperiodico)
3. Valutare i valori che lo spettro assume quando $f = f_0, 2f_0, \dots, kf_0$

In questo modo, per ogni Y_k ottenuto di ricava un impulso, il risultato finale formerà lo spettro del segnale periodico: una serie di impulsi centrati nelle varie frequenze multiple intere della portante f_0

Ogni impulso avrà un'ampiezza pari al risultato che si ottiene dal "campionamento" dello spettro del segnale troncato diviso il periodo:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$



In conclusione, diamo il risultato finale della trattazione, che prende il nome di **prima formula di somma di Poisson.**

Ritorniamo allo sviluppo in serie di Fourier del generico segnale periodico ottenuto per periodicizzazione di un segnale troncato $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)}$$

Abbiamo ottenuto la relazione analitica tra il coefficiente dello sviluppo in serie: Y_k e la trasformata del segnale troncato: $X(f)$, pertanto sostituiremo il coefficiente come segue:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] e^{j(2\pi k f_0 \, t)} \xrightarrow{f_0 = 1/T_0} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] e^{\frac{j(2\pi k t)}{T_0}}$$

A questo punto possiamo ricavare la trasformata di Fourier del segnale periodico $y(t)$: Y_k non dipende dalla frequenza e pertanto viene considerata costante, dovremo praticamente trasformare solamente l'esponenziale che, vedendolo come prodotto di un segnale costante unitario e l'esponenziale stesso, trasformandolo otteniamo un delta di Dirac traslato in frequenza:

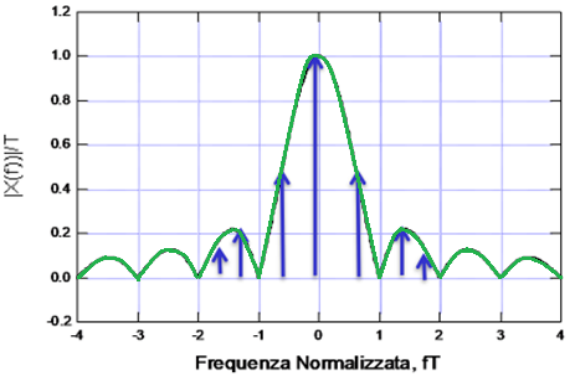
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \, e^{j(2\pi k f_0 \, t)} \quad \rightarrow \quad Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \, \delta(f - kf_0)$$

Volendo sostituire Y_k si ottiene la trasformata del segnale periodico $Y(f)$ in funzione della trasformata del segnale troncato $X(f)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] e^{\frac{j(2\pi k t)}{T_0}} \quad \rightarrow \quad Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] \delta(f - kf_0)$$

Possiamo notare che quanto ottenuto corrisponde matematicamente al grafico dedotto precedentemente: $Y(f)$ è ottenuto dal campionamento del segnale troncato $X(f)$ nel punto kf_0 (opportunamente scalato per $1/T_0$) mediante impulso di Dirac opportunamente centrato in kf_0:

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] \delta(f - kf_0)$$



Teorema del calcolo dei coefficienti di Fourier di un segnale periodico

Riassumendo definiamo formalmente il teorema per il calcolo dei coefficienti di Fourier di un segnale periodico.

Definizione: si definisce "**troncatura**" di un segnale periodico nel periodo la porzione del segnale periodico limitata ad un singolo periodo.

Hp: Si supponga di considerare un segnale periodico ottenuto per periodicizzazione di una troncatura $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \qquad dove\ x(t) = y_T(t) = \begin{cases} y(t) & se\ |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Ts: La trasformata del segnale periodico $y(t)$ è data dalla sommatoria di tanti impulsi centrati in nf_0 di ampiezza C_n;
dove C_n è dato dal rapporto tra il periodo T_0 e il valore dello spettro del segnale troncato calcolato nel punto nf_0

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} X(nf_0) = \frac{1}{T_0} Y_T(nf_0)$$

□

Quando dovremo calcolare la trasformata di un segnale periodico possiamo subito partire dalla prima formula somma di Poisson:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0)$$

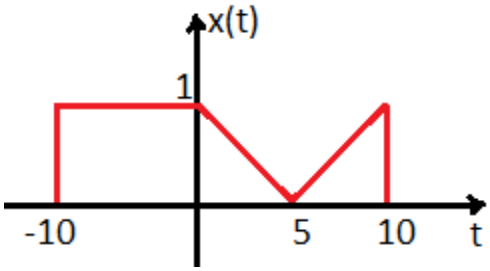
E poi dovremo praticamente calcolare solo il termine C_n ovvero lo spettro della troncatura calcolata nel punto $f = kf_0$ e scalata di $1/T_0$:

$$C_n = \frac{1}{T_0} Y_T(nf_0)$$

Esercizio: applicazione della formula di Poisson per la trasformata di un segnale periodico

Si supponga di avere il segnale $y(t)$ ottenuto dalla periodicizzazione del segnale $x(t)$ rappresentato:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-20k)$$



Si richiede di ricavare:

1. Il valor medio del segnale troncato $x(t)$
2. Lo spettro del segnale periodico $Y(f)$
3. Il valor medio del segnale periodico $y(t)$
4. Energia e potenza del segnale periodico P_y

Il periodo del segnale in questione è $T_0 = 20$, lo possiamo dedurre sapendo che la formula di un segnale periodico ottenuto dalla periodicizzazione di un segnale troncato è $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-T_0)$

1. Calcolo del valor medio

Per calcolare il valor medio dovremo considerare l'integrale tra $-\infty$ a $+\infty$ del segnale stesso, dato che il segnale è aperiodico ed è definito in un intervallo limitato tra -10 e 10, il segnale ha un valor medio nullo.

Possiamo anche osservare che la potenza media del segnale è nulla: il segnale ha un'energia finita nell'intervallo tra -10 e 10, analizzando il segnale in un tempo infinito possiamo osservare che la sua potenza è nulla:

$$Px = \frac{E_x}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-10}^{10} x(t)^2 dt = \frac{E_x}{\infty} = 0$$

2. Calcolo dello spettro del segnale $y(t)$

Per calcolare lo spettro del segnale periodico scriviamo innanzitutto la **prima formula di somma di Poisson:**

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad \rightarrow \quad Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta\left(f - \frac{n}{20}\right)$$

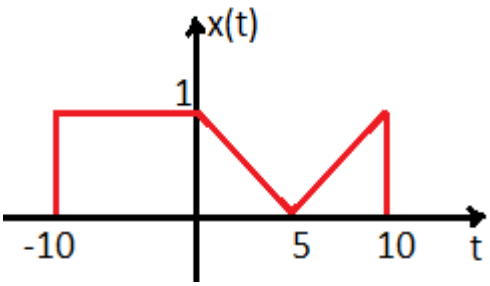
Come potevamo facilmente immaginare, il segnale avrà uno spettro a righe: si tratta di una serie di impulsi centrati nelle frequenze multiple della portante $f_0 = 20$ ($f = n/20$) che avranno una certa ampiezza C_n

A questo punto dovremo ricavare le ampiezze C_n e per farlo applicheremo la formula di definizione, che relazione tale coefficiente con la trasformata del segnale troncato:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0) = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad \rightarrow \quad C_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{20}\right)$$

Per ottenere tale ampiezza dovremo ricavare la trasformata del segnale $x(t)$, essendo quest'ultimo solo rappresentato è necessario ricavare una forma analitica a partire dal suo grafico.

Questo grafico può essere visto come un rect di base 20 centrato in 0 e di ampiezza unitaria (che si protrae quindi da -10 a 10) a cui viene sottratto un triangolo che viene centrato in 5 e di base 10 (quindi di semibase $T = 5$):



$$x(t) = \pi\left(\frac{t}{20}\right) - \Delta\left(\frac{t-5}{5}\right)$$

A questo punto, avendo la forma analitica del segnale possiamo facilmente ricavare lo spettro $X(f)$, applicando la trasformazione di Fourier per i segnali notevoli rect e triangolo:

$$x(t) = \pi\left(\frac{t}{20}\right) - \Delta\left(\frac{t-5}{5}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = 20\, sinc(20f) - 5 sinc^2(5f) e^{-j2\pi(5f)}$$

*si noti che si è applicato il teorema della traslazione per la trasformata del triangolo essendo quest'ultimo centrato in 5

A questo punto possiamo ottenere il coefficiente C_n applicandone la definizione:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{20}\right)$$

Partiamo dallo spettro $X(f)$ appena ricavato e valutiamolo quando $f = n/20$:

$$X(f) = 20\ sinc(20f) - 5sinc^2(5f)e^{-j2\pi(5f)}$$

$$X\left(\frac{n}{20}\right) = 20\ sinc\left(20\left(\frac{n}{20}\right)\right) - 5sinc^2\left(5\left(\frac{n}{20}\right)\right)e^{-j2\pi\left(5\left(\frac{n}{20}\right)\right)} = 20\ sinc(n) - 5sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{n}{4}\right)}$$

I coefficienti C_n sono praticamente dei numeri, pertanto dovremo calcolarne qualcuno (tipicamente uno o due) e ricavarne il valore numerico.

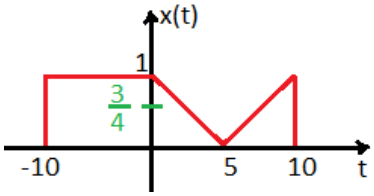
NB! Tipicamente si calcola per n=0 perché questo è il "campione" che si trova lungo l'asse verticale e contrassegna il valor medio del segnale, a seguire è possibile ricavare il campione per n=1.

$$C_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{20}\right) = \frac{1}{T_0}\left[20\ sinc(n) - 5sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{n}{4}\right)}\right] = \frac{1}{20}\left[20\ sinc(n) - 5sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{n}{4}\right)}\right]$$

$$C_0 = < y(t) > = \frac{1}{20}\left[20\ sinc(0) - 5sinc^2(0)e^{-j2\pi(0)}\right] = \frac{1}{20}[20(1) - 5(1*1)] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Sapendo che C_0 è il valor medio possiamo notare sul grafico di $x(t)$ se questo risultato è credibile, effettivamente questo valore è credibile.

NB! Si tratta del valore medio calcolato tra – 10 e 10 di $x(t)$, non del valor medio calcolato tra $-\infty$ e $+\infty$ ricavato nel punto (1)



A questo punto ricaviamo anche C_1:

$$C_1 = \frac{1}{20}\left[20\ sinc(1) - 5sinc^2\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{1}{4}\right)}\right] = \frac{1}{20}\left[20(0) - 5\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\frac{1}{4}\pi}\right)^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right]$$

$$C_1 = \frac{1}{20}\left[-5\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\frac{1}{4}\pi}\right)^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right] = \frac{1}{20}\left[-5\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}\pi}\right)^2[0 - j(1)]\right]$$

$$C_1 = \frac{1}{20}\left[-5\left(\frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{4}\pi}\right)^2[0 - j(1)]\right] = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} * \frac{2}{\pi}\right)^2(-j) = -\frac{1}{4}\left(2 * \frac{4}{\pi^2}\right)(-j) = j\frac{2}{\pi^2}$$

Supponiamo di voler ricavare anche C_2:

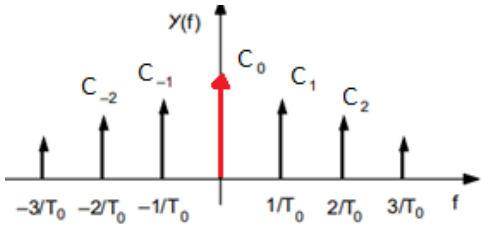
$$C_2 = \frac{1}{20}\left[20\ sinc(2) - 5sinc^2\left(\frac{2}{4}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{2}{4}\right)}\right] = \frac{1}{20}\left[20(0) - 5\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2[\cos(\pi) - j\sin(\pi)]\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{20}\left[-5\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2[\cos(\pi) - j\sin(\pi)]\right] = \frac{1}{20}\left[-5\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2[-1 - j(0)]\right] = \frac{-5}{20}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2[-1)]\right]$$

$$C_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(-1) = \frac{1}{\pi^2}$$

3. Calcolo del valor medio del segnale $y(t)$

Il valor medio del segnale $y(t)$, essendo quest'ultimo periodico, consiste nell'ampiezza dell'impulso che si trova in $f = 0$ (componente continua); abbiamo già calcolato questo valore, si tratta di C_0, calcolato nel punto (2):

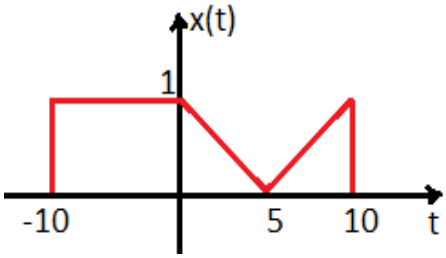


$$C_0 = < y(t) > = \frac{3}{4}$$

4. Calcolo dell'energia e della potenza nell'intervallo di $y(t)$

Il segnale $y(t)$ è un segnale periodico e, pertanto, ha un'energia media (calcolata da $-\infty$ a $+\infty$) infinita ed una potenza finita.

Calcoliamo la potenza del segnale nel periodo $[-10, 10]$ come l'energia in tale periodo rapportata al periodo:



$$P_y = \frac{E_y}{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_{-10}^{10} |x^2(t)|\, dt$$

Il segnale in questione deve essere trovato in forma analitica, non come triangoli e rettangoli ma come sommatoria del gradino e delle due rette:

- Quando $10 < t < 0$ il segnale è un gradino unitario:

$$x(t) = 1$$

- Quando $0 < t < 5$ il segnale è una retta decrescente, che possiamo ricavare imponendo il passaggio per i punti $P_1(0,1)$ e $P_2(5,0)$:

$$x(t):\ \frac{x-0}{5-0} = \frac{y-1}{0-1} \ \rightarrow\ \frac{x}{5} = -(y-1) \ \rightarrow\ y = -\frac{x}{5} + 1 \ \rightarrow\ x(t) = -\frac{t}{5} + 1$$

- Quando $5 < t < 10$ il segnale è una retta crescente, che possiamo ricavare imponendo il passaggio per i punti $P_1(5,0)$ e $P_2(10,1)$:

$$x(t):\ \frac{x-5}{10-5} = \frac{y-0}{1-0} \ \rightarrow\ \frac{x-5}{5} = y \ \rightarrow\ y = \frac{x}{5} - 1 \ \rightarrow\ x(t) = \frac{t}{5} - 1$$

Avendo ottenuto l'espressione analitica del segnale all'interno dell'intervallo in cui è definita possiamo calcolare l'integrale dell'energia nel periodo:

$$E_x = \int_{-10}^{10} |x^2(t)|\, dt = \int_{-10}^{0} 1\ dt + \int_0^5 \left|\left(-\frac{t}{5}+1\right)^2\right| dt + \int_5^{10} \left|\left(\frac{t}{5}-1\right)^2\right| dt$$

$$E_x = \int_{-10}^{0} 1\ dt + \int_0^5 \left|\left(\frac{t^2}{25}+1-\frac{2t}{5}\right)\right| dt + \int_5^{10} \left|\left(\frac{t^2}{25}+1-\frac{2t}{5}\right)\right| dt$$

$$E_x = \int_{-10}^{0} 1\ dt + \int_0^5 \left|\left(\frac{t^2}{25}+1-\frac{2t}{5}\right)\right| dt + \int_5^{10} \left|\left(\frac{t^2}{25}+1-\frac{2t}{5}\right)\right| dt$$

$$E_x = [t]_{-10}^{0} + \left[\int_0^5 \left|\frac{t^2}{25}\right| dt + \int_0^5 |1|\, dt - \int_0^5 \left|\frac{2t}{5}\right| dt\right] + \left[\int_5^{10} \left|\frac{t^2}{25}\right| dt + \int_5^{10} |1|\, dt - \int_5^{10} \left|\frac{2t}{5}\right| dt\right]$$

$$E_x = [t]_{-10}^{0} + \left[\frac{1}{25}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^5 + [t]_0^5 - \frac{2}{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^5\right] + \left[\frac{1}{25}\left[\frac{t^3}{3}\right]_5^{10} + [t]_5^{10} - \frac{2}{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_5^{10}\right]$$

$$E_x = (0+10) + \left[\frac{1}{25}(5^3-0) + (5-0) - \frac{2}{5}(5^2-0)\right] + \left[\frac{1}{25}(10^3-5^3) + (10-5) - \frac{2}{5}(10^2-5^2)\right]$$

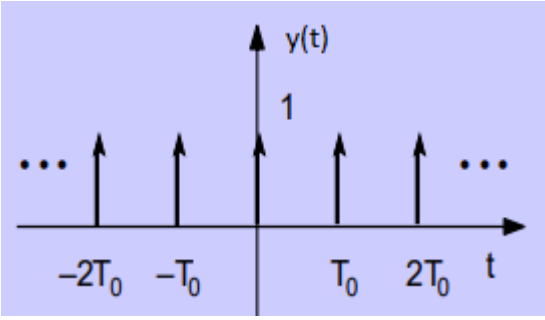
$$E_x = (10) + \left[\frac{125}{25} + 5 - \frac{50}{5}\right] + \left[\frac{875}{25} + 5 - \frac{50}{5}\right] = 10 + 5 + 5 - 10 + 35 + 5 - 10 = 40$$

A questo punto passiamo al calcolo della potenza:

$$P_y = \frac{E_y}{T_0} = \frac{40}{20} = 2$$

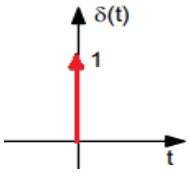
Esempio: Lo spettro di un treno di impulsi

Si supponga di disporre di un segnale periodico e che questo consista praticamente in una serie di impulsi si Dirac centrati a frequenza multipla della portante f_0.



Se vediamo il segnale periodico $y(t)$ ottenuto dalla periodicizzazione di un segnale troncato $x(t)$, otteniamo che quest'ultimo è praticamente un delta di Dirac:

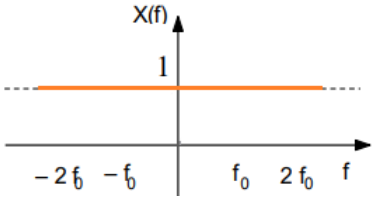
$$x(t) = \delta(t)$$



Come abbiamo già visto, lo spettro di un impulso di Dirac centrato nell'origine è un segnale costante e unitario:

$$x(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad X(f) = 1$$

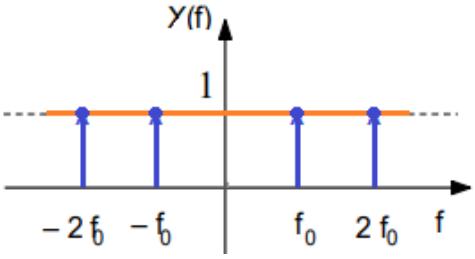
[Ricorda: un impulso ha una trasformata che è pari all'ampiezza di quest'ultimo]



A questo punto, seguendo la formula di somma di Poisson, sappiamo che la trasformata del segnale $y(t)$, ottenuto per periodicizzazione dell'impulso di Dirac, si può ottenere considerando la trasformata del segnale troncato nei punti nf_0, ovvero in prossimità dei multipli (interi) della frequenza portante:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0) \qquad con \quad C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0)$$

Quindi, sapendo che lo spettro del segnale $X(f)$ è unitario in quanto trasformata dell'impulso di Dirac, possiamo osservare che la trasformata del segnale $y(t)$ corrisponderà ad uno spettro a righe in cui ogni impulso avrà ampiezza unitaria e sarà centrato in nf_0 $(f_0\,, 2f_0\,, 3f_0\,, \dots)$



Quindi otteniamo che qualunque sia il valore di "n" il coefficiente C_n sarà sempre pari alla frequenza portante:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0) = \frac{1}{T_0}(1) = \frac{1}{T_0} = f_0$$

Il segnale periodico allora avrà uno spettro dato da:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0}\, \delta(f - nf_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Quello che abbiamo ottenuto è praticamente un altro treno di impulsi ma con un'ampiezza che non è più unitaria ma è pari a $1/T_0$.

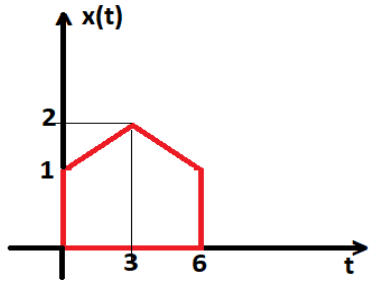
In conclusione, possiamo osservare che **lo spettro di un delta di Dirac è pari ad un segnale costante uguale all'ampiezza dell'impulso stesso**.

Se si periodicizza un impulso di Dirac si ottiene un treno di impulsi e, come abbiamo appena studiato, l**o spettro di un treno di impulsi (nel dominio del tempo) è un altro treno di impulsi (nel dominio della frequenza) cui ampiezza è scalata dal reciproco del periodo: $\boldsymbol{A/T_0}$** (quindi scalato della frequenza portante: $1/T_0 = f_0$) **con "A" ampiezza del treno di impulsi nel tempo;**

nel nostro caso gli impulsi erano unitari per cui avevamo $A = 1$ e $A/T_0 = 1/T_0$ ma se l'ampiezza del treno di impulsi fosse stata pari a 2 avremmo ottenuto $A/T_0 = 2/T_0$)

Esercizio: calcolo della trasformata di un segnale aperiodico e di un segnale periodico

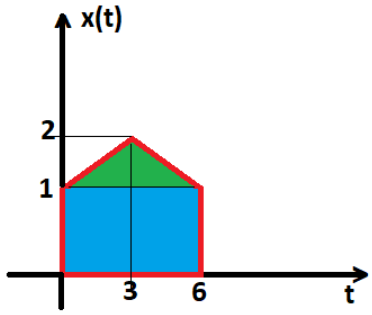
Si supponga di disporre del segnale graficato $x(t)$ e di volerne conoscere lo spettro $X(f)$.



Per ottenere la trasformata di questo segnale è necessario riportare quest'ultimo in funzione dei segnali elementari che conosciamo.

In questo caso possiamo osservare che, assumendo una forma a "casa", il segnale può essere scomposto in un triangolo superiore ed un rettangolo inferiore.
Nello specifico possiamo osservare che:

- Il rettangolo in questione avrebbe un'ampiezza unitaria e sarebbe centrato in $t = 3$, con una base di ampiezza pari a 6 (quindi il rect si estende da 0 a 6)
- Il triangolo invece ha una base pari a 6, quindi semibase pari a 3, è centrato in 3 ed ha ampiezza unitaria, viene pertanto sovrapposto esattamente al di sopra del segnale rect, formando il "tetto" della "casa".



Otteniamo quindi il seguente segnale:

$$x(t) = \pi\left(\frac{t-3}{6}\right) + \Delta\left(\frac{t-3}{3}\right)$$

Vediamo quindi di ottenere le trasformate dei segnali che compongono $x(t)$:

$$x_1(t) = \pi\left(\frac{t-3}{6}\right) \quad \rightarrow \quad X_1(f) = 6\, sinc(6f)e^{-j2\pi f(3)}$$

$$x_2(t) = \Delta\left(\frac{t-3}{3}\right) \quad \rightarrow \quad X_2(f) = 3\, sinc^2(3f)e^{-j2\pi f(3)}$$

"Unendo" tali contributi otteniamo la trasformata del segnale $x(t)$:

$$x(t) = \pi\left(\frac{t-3}{6}\right) + \Delta\left(\frac{t-3}{3}\right) \rightarrow \quad X(f) = 6\, sinc(6f)e^{-j2\pi f(3)} + 3\, sinc^2(3f)e^{-j2\pi f(3)}$$

Supponiamo adesso di voler periodicizzare il segnale, ottenendo così il segnale periodico $y(t)$, con un periodo pari a 24:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - 24\, n)$$

Di esso vogliamo conoscere: la trasformata $Y(f)$, il valore medio $< y(t) >$, l'energia E_y e la potenza P_y

1. Trasformata del segnale

La trasformata di un segnale periodico si ottiene mediante formula di Poisson:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0)$$

Ricaviamo i termini C_n:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0) = \frac{1}{24}\left[6\, sinc\left(\frac{6n}{T_0}\right) e^{-j2\pi(nf_0)(3)} + 3\, sinc^2\left(\frac{3n}{T_0}\right) e^{-j2\pi(nf_0)(3)}\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{24}\left[6\, sinc(0)e^{-j2\pi(0)(3)} + 3\, sinc^2(0)e^{-j2\pi(0)(3)}\right] = \frac{1}{24}[6+3] = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$C_1 = \frac{1}{24}\left[6\, sinc\left(\frac{6}{24}\right) e^{-j2\pi\left(\frac{6}{24}\right)(3)} + 3\, sinc^2\left(\frac{3}{24}\right) e^{-j2\pi\left(\frac{3}{24}\right)(3)}\right]$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} e^{-j2\pi\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{1}{8}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\frac{\pi}{8}}\right]^2 e^{-j2\pi\left(\frac{3}{8}\right)}$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \mathrm{j}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\pi}{8}}\right]^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$C_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi}[0 - \mathrm{j}] + \left[\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\pi}\right]^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -j\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + \left[\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\pi^2}\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$C_1 = -j\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + \left[\frac{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}{\pi^2} - j\frac{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}{\pi^2}\right] = [\dots]$$

2. Valore medio del segnale

Il valor medio del segnale corrisponde all'ampiezza dell'impulso dello spettro di quest'ultimo centrato in 0, per cui con C_0, ricavato nel punto precedente:

$$< y(t) > = C_0 = \frac{1}{24}\left[6\, sinc(0) e^{-j2\pi(0)(3)} + 3\, sinc^2(0) e^{-j2\pi(0)(3)}\right] = \frac{1}{24}[6+3] = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

3. Energia e potenza del segnale

Essendo un segnale costante, $y(t)$ è un segnale di potenza e quindi avrà energia media infinita

Vogliamo ottenere la potenza nel periodo e, per farlo, dovremo necessariamente passare per l'energia nel periodo; quindi calcoleremo entrambi:

Prima di proseguire dovremo ottenere la forma analitica del segnale $x(t)$ (non espressa in triangoli e rettangoli ma espressa in funzione di "t"); per farlo dobbiamo trovare le equazioni delle due rette che formano tale segnale;

- La prima retta la si trova imponendo il passaggio per i punti $P_1(0,1)$ e $P_2(3,2)$:
$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{2-1} \rightarrow y - 1 = \frac{x}{3} \rightarrow y = 1 + \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{t}{3} + 1$$
- La seconda retta di trova imponendo il passaggio per i punti $P_1(3,2)$ e $P_2(6,1)$:
$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-2}{1-2} \rightarrow -y + 2 = \frac{x}{3} - 1 \rightarrow y = 3 - \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad x(t) = -\frac{t}{3} + 3$$

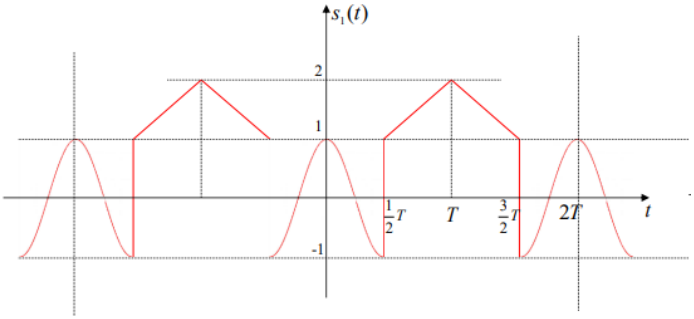
Ragionando per simmetria, possiamo considerare due volte la prima retta, applichiamo quindi la formula:

$$P_y = \frac{E_y}{T_0} = \frac{1}{24}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)^2|\, dt \quad \rightarrow \quad P_y = \frac{1}{24}\left[2\int_0^3 \left|\left(\frac{t}{3}+1\right)^2\right| dt\right] = \frac{1}{12}\int_0^3 \left|\frac{t^2}{9} + 1 + \frac{2}{3}t\right| dt$$

$$P_y = \frac{1}{12}\int_0^3 \left|\frac{t^2}{9} + 1 + \frac{2}{3}t\right| dt = \frac{1}{12}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 + [t]_0^3 + \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^3\right\} = \frac{1}{12}\left\{\frac{1}{27}(27) + (3) + \frac{1}{3}(9)\right\} = \frac{7}{12}$$

Esercizio: calcolo della trasformata di un segnale aperiodico e di un segnale periodico

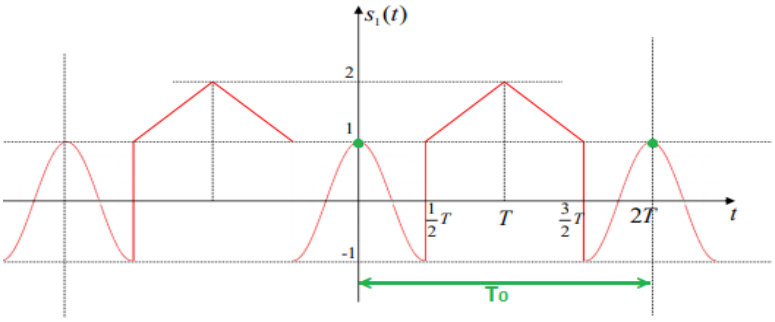
Dato il seguente segnale periodico in figura, ottenere l'espressione analitica di quest'ultimo e lo spettro di quest'ultimo.



Per ottenere lo spettro di questo degnale dobbiamo necessariamente ottenere il suo periodo e lo spettro del suo segnale troncato, affinché possiamo applicare la formula di Poisson e ricavare così i coefficienti C_n

Il periodo lo possiamo ricavare osservando ogni quanto il segnale si ripete uguale a sé stesso. <u>Per ricavare il periodo fissiamo un punto, valutiamo quanto vale il segnale in tale punto e cerchiamo quando questo valore viene nuovamente assunto dal segnale</u>. In questo caso possiamo fissare il valore che il segnale assume nell'asse verticale e possiamo osservare esso assume nuovamente tale valore per:

$$T_0 = 2T.$$

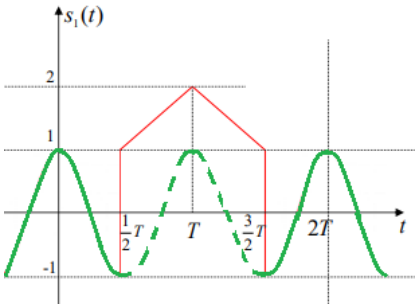


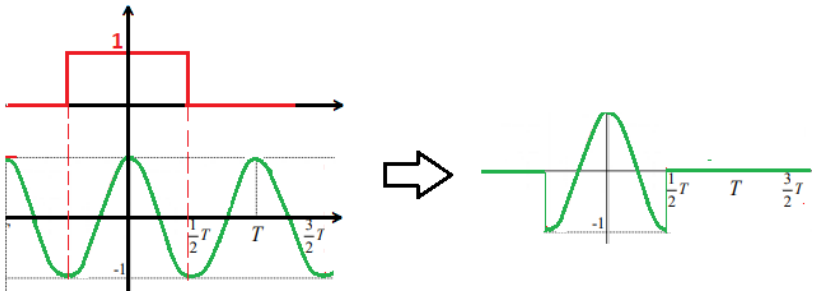
Questo significa che tutti gli impulsi si troveranno centrati per i multipli della frequenza fondamentale:

$$f_0 = 1/T_0 = 1/2T.$$

A questo punto dobbiamo considerare la troncatura del segnale periodico, quest'ultima conviene considerarla partendo da $t = -1/2T$ poiché risulta più semplice intuire la forma della curva iniziale del segnale. Chiaramente, così facendo, il segnale che andremo a considerare sarà la troncatura tra $-1/2T$ e $3/2T$ dato che dovremo considerare un solo periodo ($2T$).

- La prima parte del segnale è un coseno, lo possiamo capire dal fatto che nell'asse vale 1: $\cos(0) = 1$ di ampiezza unitaria e di periodo T
  Di questo coseno compare solo una prima semionda, per cui dovremo praticamente annullare tutto il resto; per ottenere questo segnale dovremmo praticamente "troncare" a sua volta il coseno e ciò è possibile se andassimo a moltiplicare il coseno per un rect: moltiplicando il coseno per un rect definito esclusivamente in prossimità della porzione di segnale che ci interessa andremo ad eliminare tutto il resto poiché il coseno varrà 0 altrove





Otteniamo quindi la "porzione" di coseno a patto che quest'ultimo venga moltiplicato per un rect opportunamente centrato di ampiezza unitaria e di base opportuna; in questo caso:

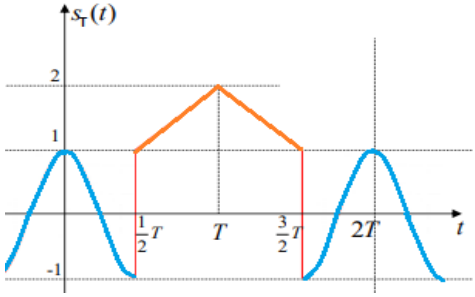
$$s_1(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)\pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

- La seconda parte del segnale invece è la "casa" che abbiamo incontrato nel precedente esercizio, andremo a sommare alla cosinusoide, quando quest'ultima vale 1, un "blocco" formato da un rect di base T, ampiezza unitaria e centrato in T in sovrapposizione ad un triangolo, di semibase $T/2$ e centrato in T e di ampiezza pari a 1.

$$s_2(t) = \pi\left(\frac{t-T}{T}\right) + \Delta\left(\frac{t-T}{T/2}\right)$$

Otteniamo pertanto:

$$s(t) = \left[\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] + \left[\pi\left(\frac{t-T}{T}\right) + \Delta\left(\frac{t-T}{T/2}\right)\right]$$



A questo punto, avendo ottenuto il periodo ($T_0 = T/2$) ed avendo ottenuto la forma analitica del segnale espressa in funzione di triangoli e rettangoli, non ci resta che ricavare lo spettro del segnale troncato al fine di applicare la formula di Poisson:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,\delta(f - nf_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,\delta\left(f - \frac{n}{T/2}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\,S_T(nf_0) = \frac{1}{T/2}\,S_T\left(\frac{n}{T/2}\right)$$

Andiamo quindi a trovare lo spettro del segnale troncato così da ottenere i vari coefficienti C_n; per farlo ragioniamo per parti, notando sin da subito che è presente un prodotto nell'espressione di $s_T(t)$, al quale dovrà corrispondere una convoluzione in frequenza nello spettro $S_T(f)$:

- La prima porzione del segnale è data dal prodotto tra un coseno ed un rect, pertanto ci aspettiamo di ritrovare la convoluzione delle trasformate di quest'ultimi.
  Ricordiamo che la trasformata di un coseno è la seguente:

  $$x(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = \frac{\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)}{2}$$

  Mentre la trasformata del rect è data dal seno cardinale:

  $$x(t) = \pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\,sinc(fT)$$

  Per cui la trasformata della prima parte del segnale è data dalla seguente convoluzione:

  $$s_1(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)\pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad S_1(f) = \frac{\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)}{2} \otimes T\,sinc(fT)$$

  NB! Tuttavia, è possibile non passare dalla convoluzione: si tenga presente che il segnale temporale è moltiplicato per una cosinusoide; rifacendoci al ***Teorema della modulazione*** possiamo facilmente arrivare al risultato, senza dove effettuare alcuna convoluzione:

  $$T.Modulazione: \;\; y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \;\rightarrow\; Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

  Con questo teorema otteniamo lo stesso risultato che avremmo ottenuto con la convoluzione:

  $$s_1(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)\pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad S_1(f) = \frac{T\,sinc\left[T\left(f - \frac{1}{T}\right)\right] + T\,sinc\left[T\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]}{2}$$

  Normalmente la trasformata di un rect è del tipo $Tsinc(fT)$ ma con il teorema della modulazione si tratta di due seni cardinali che vengono traslati della quantità $\pm\,1/T$

- La seconda porzione del segnale è data dalla somma del triangolo e del rettangolo che formano la "casa"; la trasformata di questo segnale è più semplice da ottenere:

  $$s_2(t) = \pi\left(\frac{t-T}{T}\right) + \Delta\left(\frac{t-T}{T/2}\right) \quad \rightarrow \quad S_2(f) = T\,sinc(fT)e^{-j2\pi fT} + \frac{T}{2}sinc^2\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi fT}$$

A questo punto allora otteniamo lo spettro del segnale troncato come segue:

$$S_T(f) = \frac{T\,sinc\left[T\left(f - \frac{1}{T}\right)\right] + T\,sinc\left[T\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]}{2} + T\,sinc(fT)e^{-j2\pi fT} + \frac{T}{2}sinc^2\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi fT}$$

Ricaviamo il generico coefficiente C_n della formula di Poisson:

$$C_n = \frac{1}{2T} S_T\left(\frac{n}{2T}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{2T}\left[\frac{T\ sinc\left[T\left(\frac{n}{2T}-\frac{1}{T}\right)\right] + T\ sinc\left[T\left(\frac{n}{2T}+\frac{1}{T}\right)\right]}{2} + T\ sinc\left(\frac{n}{2T}T\right)e^{-j2\pi\left(\frac{n}{2T}\right)T} + \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{n}{2T}\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi\left(\frac{n}{2T}\right)T}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{4T}\left[Tsinc\left[T\left(\frac{n}{2T}-\frac{1}{T}\right)\right] + Tsinc\left[T\left(\frac{n}{2T}+\frac{1}{T}\right)\right]\right] + \frac{1}{2T}\left[Tsinc\left(\frac{n}{2T}T\right)e^{-j\pi n} + \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{n}{2T}\frac{T}{2}\right)e^{-j\pi n}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{4}\left[sinc\left(\frac{n}{2}-1\right) + sinc\left(\frac{n}{2}+1\right)\right] + \frac{1}{2}sinc\left(\frac{n}{2}\right)e^{-j\pi n} + \frac{1}{4}sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)e^{-j\pi n}$$

Avendo ottenuto la formula generale del coefficiente C_n possiamo ottenere i vari coefficienti al variare di n:

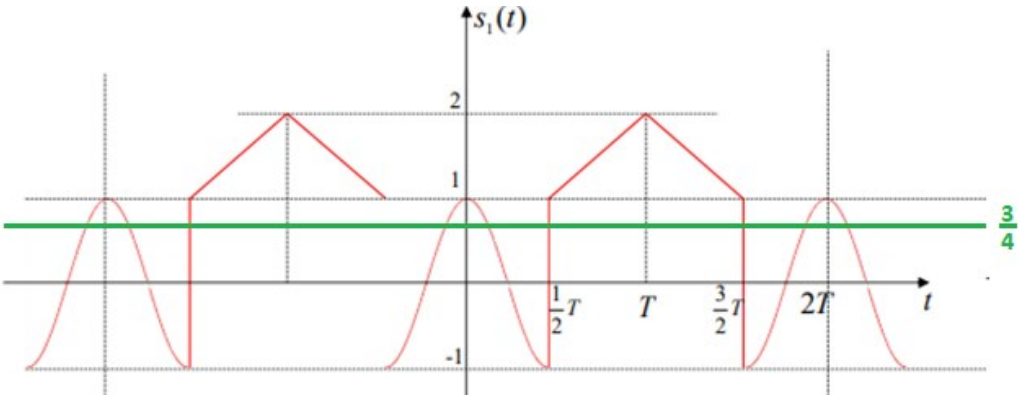
1. Il primo coefficiente che andiamo a trovare è la componente costante, per $n = 0$, che costituisce anche il valor medio del segnale periodico:

$$C_0 = \frac{1}{4}[sinc\ (0-1)] + sinc\ (0+1) + \frac{1}{2}sinc(0)e^{-j\pi(0)} + \frac{1}{4}sinc^2(0)e^{-j\pi(0)}$$

$$C_0 = \frac{1}{4}[sinc\ (-1) + sinc\ (1)] + \frac{1}{2}sinc(0)e^{-j\pi(0)} + \frac{1}{4}sinc^2(0)e^{-j\pi(0)}$$

$$C_0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(1*1) + \left[\frac{1}{4}\left(sinc(0)*sinc(0)\right)\right] = 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Il valore 3/4 è accettabile come valor medio:



2. Il secondo coefficiente che andiamo a trovare è la componente costante, per $n = 1$:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[sinc\left(\frac{1}{2}-1\right) + sinc\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] + \frac{1}{2}sinc\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\pi(1)} + \frac{1}{4}sinc^2\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\pi(1)}$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[sinc\left(-\frac{1}{2}\right) + sinc\left(\frac{3}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}\pi}\right]e^{-j\pi} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{4}\pi}\right]^2 e^{-j\pi}$$

Scomponiamo l'esponenziale con la formula di Eulero ed eseguiamo i calcoli:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\pi}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\frac{3}{2}\pi}\right] + \frac{1}{\pi}*[\cos(\pi) - j\sin(\pi)] + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}\pi}\right)^2\right]*[\cos(\pi) - j\sin(\pi)]$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{-\frac{1}{2}\pi}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\frac{3}{2}\pi}\right] + \frac{2[-1]}{\pi} + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{2/4}{16\pi^2}\right)\right][-1] = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{6\pi} - \frac{2}{\pi} - 8\pi^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 2\right) - 8\pi^2$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 2\right) - 8\pi^2 = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{5}{3}\right) - 8\pi^2$$

Per completezza calcoliamo anche l'energia e la potenza del segnale periodico $s(t)$: quest'ultimo è un segnale periodico quindi nella sua interezza ha un'energia infinita, quindi si tratta di un segnale di energia.

La potenza nel periodo si può ricavare come il rapporto tra l'energia nel periodo E_{2T} e il periodo stesso:

$$P_{2T} = \frac{E_{2T}}{2T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\, dt$$

Per ottenere il segnale analizziamo il grafico e consideriamolo per parti:

Possiamo osservare un coseno troncato tra $-T/2$ e $T/2$:

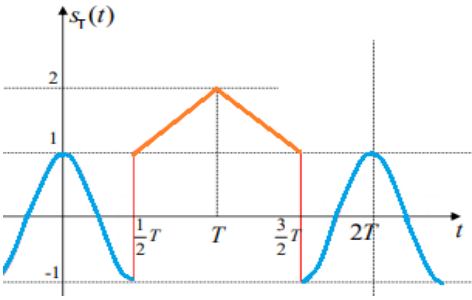
$$\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{T}\right)T\right)$$

A seguire vi è una retta che cresce da $t = T/2$ a $t = T$ che possiamo ricavare mediante passaggio per due punti, tali punti sono $P_1\left(\frac{1}{2T}; 1\right)$ e $P_2(T; 2)$:

$$r(t):\ \frac{x-T}{\frac{1}{2T}-T} = \frac{y-1}{2-1} \ \rightarrow\ r(t):\ \frac{x-T}{\frac{1-2T^2}{2T}} = y-1 \ \rightarrow\ r(t):\ \frac{2T(x-T)}{1-2T^2} + 1 = y$$

A seguire c'è una retta duale che decresce, non la calcoleremo perché terremo in considerazione l'area sottesa dalla retta due volte:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{T}\right)T\right)\right]^2 + 2r(t)^2\, dt$$



Test Socrative: Analisi temporale dei segnali

1. **Un segnale numerico è caratterizzato da:**
   - **A.** Tempo continuo e ampiezza discreta
   - **B.** Tempo discreto e ampiezza continua
   - **C.** Tempo e ampiezza continua
   - **D.** Tempo e ampiezza discreta

Risposta esatta: D

2. **Un segnale analogico è caratterizzato da:**
   - **A.** Tempo continuo e ampiezza discreta
   - **B.** Tempo discreto e ampiezza continua
   - **C.** Tempo e ampiezza continua
   - **D.** Tempo e ampiezza discreta

Risposta esatta: C

3. **Un segnale di una batteria reale (fisicamente realizzabile) ha**
   - **A.** Potenza diversa da zero ed energia finita
   - **B.** Potenza diversa da zero ed energia infinita
   - **C.** Potenza nulla ed energia finita
   - **D.** Non ha energia ne potenza

Risposta esatta: A → Tutti i segnali reali hanno una'energia finita ed una potenza non nulla

4. **Un segnale di energia è un segnale con**
   - **A.** Potenza diversa da zero ed energia infinita
   - **B.** Potenza uguale a zero ed energia infinita
   - **C.** Potenza uguale a zero ed energia finita

Risposta esatta: C

5. **Lo spettro delle ampiezza di un segnale $x(t)$ rappresenta le ampiezza e le frequenze dei segnali cosinusoidali la cui somma rappresenta il segnale $x(t)$**
   - **A.** Potenza diversa da zero ed energia infinita
   - **B.** Potenza infinita ed energia finita
   - **C.** Potenza uguale a zero ed energia infinita

Risposta esatta: A

6. **Un segnale periodico è un segnale di potenza**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A → L'energia di un segnale si trova come integrale tra $+\infty$ e $-\infty$ del quadrato del segnale stesso; il segnale periodico si estende all'infitnito, pertanto la sua energia sarà infinita e, di conseguenza, avrà una potenza (calcolata come rapporto tra l'energia nel periodo ed il periodo stesso) diversa da zero.

7. **Un segnale periodico ha energia finita in un periodo**
   - **A.** Vero
   - **B.** Falso

Risposta esatta: A → L'energia infinita del segnale periodico si riferisce all'intero segnale; se si considera una troncatura entro un periodo di quest'ultimo il valore dell'energia sarà finito. Infatti utilizziamo questo valore per il calcolo della potenza, se prendessimo tutta l'energia del segnale periodico ritroveremo un valore infinito anche per la potenza (e ciò è assurdo).

8. Una cisoide è un segnale di potenza

- **A.** Vero
- **B.** Falso

Risposta esatta: B

9. La formula: $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$ rappresenta:

- **A.** La potenza del segnale $x(t)$
- **B.** Il valor medio temporale del segnale $x(t)$
- **C.** Il valore efficace del segnale $x(t)$

Risposta esatta: B $\rightarrow$ Questa formula potrebbe ricordare quella della potenza, tuttavia, si noti che la potenza dipende dall'energia calcolata nel periodo e quest'ultima è dipende a sua volta dal quadrato del segnale; in questa formula non figura alcun quadrato di $x(t)$.

10. La formula: $\lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt < \infty$ rappresenta:

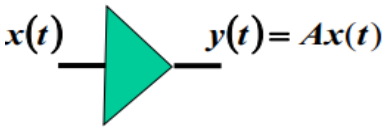
- **A.** La potenza del segnale $x(t)$
- **B.** L'energia del segnale $x(t)$
- **C.** Il valor medio del segnale $x(t)$

Risposta esatta: B

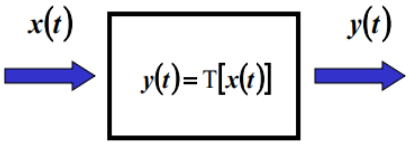
6. I sistemi lineari stazionari

Introduzione ai sistemi monodimensionali

Abbiamo fino ad ora studiato i segnali senza però mai preoccuparci a cosa servissero quest'ultimi. Normalmente i segnali vengono posti in ingresso a dei sistemi che li processano, trasformandoli, e fornendo un'uscita corrispondente.



Esempio: Un amplificatore ideale è un sistema che, dato un segnale analogico in ingresso, restituisce in uscita un segnale analogico avente lo stesso andamento dell'ingresso ma con ampiezza differente (essendo un amplificatore l'ampiezza aumenterà ma il discorso è analogo anche per gli attenuatori che, al contrario degli amplificatori, fanno diminuire l'ampiezza del segnale).
La schematizzazione dell'amplificazione prevede un ingresso $x(t)$ ad un "triangolo" che rappresenta l'amplificatore; l'uscita sarà $y(t) = Ax(t)$ in cui "A" è il fattore di amplificazione.



In questo corso non ci preoccuperemo di come siano formati i sistemi, li vedremo come delle black box cui non è necessario conoscere cosa vi sia all'interno; ciò che ci interessa di tale sistema è il rapporto ingresso/uscita: ragioneremo analizzando l'ingresso ad esso fornito e l'uscita che quest'ultimo produce.

Quindi in generale, il sistema applica una certa trasformazione "T" e vedremo l'uscita come $y(t) = T[x(t)]$, essa dipende chiaramente dal segnale in ingresso $x(t)$ e dalla trasformazione ad esso applicata per ottenere l'uscita.

In via generale diremo che il segnale $y(t)$ dipende da $x(t)$ per tutti i valori che esso assume da $-\infty$ a $+\infty$, tuttavia, è bene riflettere che al più il segnale potrà assumere:

- Valori che dipendono dalla storia (memoria) del segnale d'ingresso $x(t)$ (quindi per quei valori di "t" che antecedono l'istante di osservazione: se "T" è l'istante in cui viene effettuata l'analisi dell'uscita, osserveremo che quest'ultima sarà correlata ai valori che vanno da $-\infty$ a (T-1));
- Valori che dipendono in tempo reale da $x(t)$, per cui analizzando un istante $t = T$ troveremo che al valore di $x(T)$ dipenderà un certo valore di $y(T)$, senza considerare la memoria del sistema (ovvero il valore della funzione $x(t)$ ad istanti precedenti a "T").

Dire che $y(t)$ assuma valori all'infinito equivale a dire che esso assume dei valori nel futuro, il che è improbabile per i sistemi che analizzeremo dato che, dipendendo dall'ingresso, $y(t)$ può al più dipende da $x(t)$ nel medesimo istante di osservazione, senza dipendere dalla sua memoria (è il caso dei sistemi senza memoria, come vedremo).

Proprietà dei sistemi monodimensionali

I sistemi monodimensionali hanno delle caratteristiche principali che li contraddistinguono:

1. Stazionarietà

Un sistema è stazionario se traslando il suo ingresso di t_0 anche l'uscita subisce la medesima traslazione. Quindi se all'ingresso $x(t)$ corrisponde l'uscita $y(t)$, se il sistema monodimensionale è stazionario, avremo anche che all'ingresso $x(t-t_0)$ corrisponderà l'uscita $y(t-t_0)$.

$$\boldsymbol{y(t) = T[x(t)] \quad \rightarrow \quad y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]}$$

<u>Esempio</u>: se ad un amplificatore viene messo in ingresso il segnale corrispondente ad un brano in un determinato istante e, successivamente, si ripresenta il medesimo segnale a distanza di un tempo t_0 il segnale che si ottiene in uscita è sempre lo stesso: il brano amplificato, in che fa dell'amplificare un sistema stazionario.
Non è detto che funzioni sempre così: se l'amplificatore ha un guadagno "A" che sia dipendente dal tempo $[A(t)]$, a distanza di un determinato tempo, ad esempio due anni, l'amplificatore potrebbe comportarsi diversamente e potrebbe amplificare meno (ciò accade ad esempio per la degradazione dei componenti all'interno dell'amplificatore), quindi a distanza di due anni, a fronte dello stesso ingresso, si hanno due uscite differenti. In questo caso il sistema non è stazionario e la causa della sua non stazionarietà è la dipendenza dal tempo da parte del guadagno.

2. Causalità

Un sistema causale è caratterizzato da un'uscita che non può dipendere da istanti superiori a quello d'osservazione "t", ma solo dalla sua storia e/o al più dall'istante di osservazione;
quindi l'uscita può dipendere dalla storia del sistema o, al massimo, dal valore che assume l'ingresso all'istante "t" [quindi per valori dell'ingresso che vanno da $x(-\infty)$ a $x(t)$].

$$\boldsymbol{y(t) = T[x(\alpha)] = T[x(\alpha)\, u(t-\alpha)] \;\; con\; \alpha \leq t}$$

I sistemi fisicamente realizzabili sono tutti causali, che dipendono al più dalla loro storia (ovvero dal loro comportamento agli istanti precedenti) e dall'istante di osservazione.

3. Memoria

I sistemi possono essere con memoria o senza memoria:

- **i sistemi privi di memoria sono quei sistemi cui risposta è istantanea**: se si presenta un ingresso $x(t)$ l'uscita dipenderà da quest'ultimo valore in tale istante;
- **se invece il sistema ha memoria l'uscita non dipenderà solo da $x(t)$ ma anche dalla storia del sistema**, ovvero dai valori che quest'ultimo ha assunto agli istanti precedenti.

I sistemi privi di memoria dipendono direttamente da $x(t)$ e quindi subiscono una trasformazione che non dipende dagli istanti precedenti, si pensi ad esempio all'uscita di un amplificatore:

$$\boldsymbol{y(t) = A\, x(t)}$$

Nei sistemi con memoria invece l'uscita dipende dagli istanti precedenti, per cui è logico pensare che questa sia data dall'operatore d'integrazione che permette di studiare il comportamento del segnale dall'istante $t-T$ (storia del sistema) fino all'istante attuale t:

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\alpha)\; d\alpha}$$

4. Stabilità (BIBO: Bounded Input Bounded Output)

Un Sistema viene detto BIBO stabile se, ponendo in ingresso a quest'ultimo un segnale limitato (bounded) si ottiene un'uscita limitata.

Questo significa se, posto in ingresso al sistema un segnale che in valore assoluto è minore o uguale ad un valore "M", se vi è BIBO stabilità allora l'uscita di tale sistema non potrà divergere e sarà limitata: sarà minore, in valore assoluto, di un valore "K".

$$\boxed{|\boldsymbol{x(t)}| \leq \boldsymbol{M} \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{y(t)}| \leq \boldsymbol{K}}$$

I sistemi controllati sono sempre BIBO stabili, ad esempio, la centralina dell'auto è un sistema BIBO stabile: fintanto che si preme l'acceleratore la macchina accelera, non appena si toglie il piede dall'acceleratore la macchina decelera. Se la centralina fosse stato un sistema instabile, pur togliendo il piede dal pedale, la macchina avrebbe continuato ad accelerare.

5. Invertibilità

Normalmente viene inserito un ingresso $x(t)$ al sistema al fine di ottenere un'uscita $y(t)$; tuttavia, alcune volte potrebbe essere necessario ricavare l'ingresso $x(t)$ nota l'uscita $y(t)$.
Quando un sistema è invertibile è possibile ottenere l'ingresso $\boldsymbol{x(t)}$ dall'uscita $\boldsymbol{y(t)}$ mediante una trasformazione inversa $\boldsymbol{T^{-1}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{x(\alpha)}] \rightarrow \quad \boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{T^{-1}}[\boldsymbol{y(t)}]}$$

Si tenga presente che questo è possibile solo se il sistema è invertibile, se così non fosse allora tale relazione non ha alcun senso.

6. Linearità

Fornendo in ingresso ad un sistema lineare viene un segnale che è combinazione lineare di più ingressi si ottiene un'uscita che sarà combinazione lineare della trasformazione dei singoli segnali in ingresso:

$$\boxed{\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{x_1(t)} + \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{x_2(t)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{x(t)}] = \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{T}[\, \boldsymbol{x_1(t)}] + \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{T}[\boldsymbol{x_2(t)}]}$$

<u>Esempio</u>:
L'amplificatore ideale fornisce un'uscita del tipo: $\boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x(t)}$
In cui "A" è il fattore di amplificazione. Pertanto possiamo affermare che è un sistema:

- **Causale** perché l'uscita dipende istante per istante dal solo ingresso e non dalla storia del sistema
- **Privo di memoria** perché considera quindi la risposta in funzione degli ingressi precedenti
- **Stazionario** poiché, dato che l'amplificazione non dipende dal tempo, quando viene amplificato un segnale $x(t)$ si ottiene un corrispettivo segnale amplificato $y(t) = Ax(t)$, se si amplifica il medesimo segnale a distanza di anni si ottiene sempre lo stesso valore $y(t) = A\, x(t)$
- **Lineare:** se $x(t)$ è combinazione di più segnali, l'amplificatore li amplifica tutti

L'amplificatore con guadagno lentamente variabile nel tempo ha un'uscita del tipo: $\boldsymbol{y(t)} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\beta t})\, \boldsymbol{x(t)}$
In cui "A" è il fattore di amplificazione, che varia nel tempo (ad esempio con il degradarsi dei componenti esso può diminuire) Quest'ultimo è un sistema:

- **Causale** perché l'uscita dipende istante per istante dal solo ingresso e non dalla storia del sistema
- **Privo di memoria** perché considera quindi la risposta in funzione degli ingressi precedenti
- **Non Stazionario** poiché, dato che l'amplificazione dipende dal tempo, quando viene amplificato un segnale $x(t)$ si ottiene un corrispettivo segnale amplificato $y(t) = Ax(t)$ e questo valore varia se si amplifica a distanza di anni poiché la costante di amplificazione varia nel tempo: $(A + \boldsymbol{\beta t})$
- **Lineare:** se $x(t)$ è combinazione di più segnali, l'amplificatore li amplifica tutti

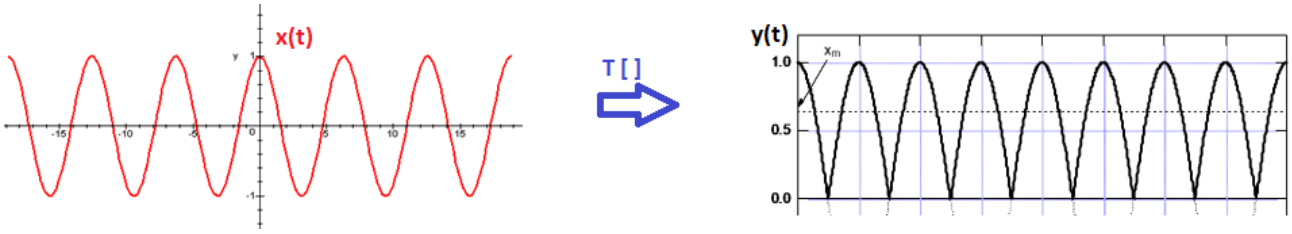
Esempio: Il raddrizzatore a doppia semionda

Il raddrizzatore a doppia semionda è un componente che viene utilizzato nei convertitori analogico-digitali per rendere il segnale oscillante costante nel tempo.

Questo dispositivo riceve in ingresso un segnale e fornisce in uscita il segnale in valore assoluto:

$$y(t) = T[x(t)] = |x(t)|$$

Quindi se in ingresso avremo una semionda, come un segnale cosinusoidale, in uscita otterremo un segnale a doppia semionda, equivalente alla cosinusoide in ingresso ma con la parte negativa ribaltata per effetto del valore assoluto.



Possiamo verificare se questo sistema è lineare:

Supponiamo di porre in ingresso al raddrizzatore un segnale dato dalla somma di due segnali:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Se il sistema è lineare allora l'uscita sarà combinazione lineare dei singoli segnali x_1 e x_2 che compongono l'ingresso $x(t)$. In realtà non è così perché possiamo osservare che il valore assoluto della somma non è pari alla somma dei valori assoluti:

$$|x_1(t) + x_2(t)| \neq |x_1(t)| + |x_2(t)|$$

Basti pensare ai valori $x_1(t) = 2$ e $x_2(t) = -3$:

$$|x_1(t) + x_2(t)| = |2 - 3| = 1 \qquad |x_1(t)| + |x_2(t)| = |2| + |-3| = 5$$

Per cui avremo che:

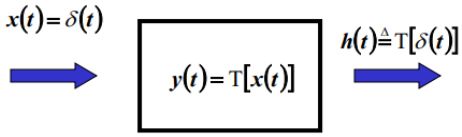
$$y(t) = |x(t)| = |x_1(t) + x_2(t)| \neq |x_1(t)| + |x_2(t)| \quad \rightarrow \; Sistema\ non\ lineare$$

I sistemi lineari stazionari (SLS)

Al momento abbiamo parlato in generale dei sistemi elencandone le caratteristiche e suddividendoli in base a queste; l'attenzione del corso però non è volta a qualsiasi tipologia di sistemi ma ai **sistemi lineari stazionari (SLS)** nel tempo, che hanno la caratteristica di essere facilmente progettabili e studiabili.

Questi sistemi hanno un pregio particolare:

Se si conosce la risposta all'impulso del segnale $h(t)$ (ovvero l'uscita del segnale in funzione di un ingresso pari ad un impulso di Dirac $\delta(t)$), allora si riesce a conoscere la risposta del sistema a qualunque segnale differente dal delta di Dirac.



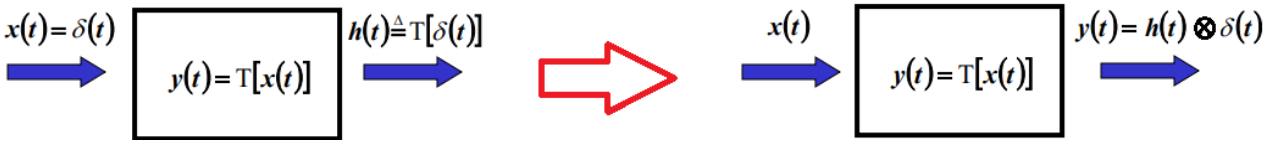
In altre parole diremo che:

La risposta impulsiva permette di determinare la risposta del sistema ad un dato segnale di ingresso di andamento arbitrario.

Questo ci viene affermato dalla **relazione costitutiva del sistema lineare stazionario (SLS):**

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha}}$$

La risposta del sistema a qualsiasi segnale può essere sempre ricavata come **convoluzione tra il segnale in ingresso $x(t)$ e la risposta impulsiva $h(t)$.**



Questo significa che conoscere la risposta all'impulso del sistema significa conoscere praticamente il comportamento del sistema, che si può ottenere mediante integrale di convoluzione tra l'ingresso e la risposta $x(t)$ all'impulso $h(t)$.

Lo studio della risposta all'impulso è utile per capire se il segnale ha certe caratteristiche o meno, a tal proposito affrontiamo dunque due teoremi che riportano informazioni utili circa il sistema analizzando la sua risposta impulsiva.

Teorema sulla causalità della risposta impulsiva

Un sistema lineare stazionario (SLS) è **causale,** ovvero il suo segnale di uscita dipende dai valori assunti dal segnale in ingresso negli istanti $\alpha \leq t$ (con "t" istante di osservazione), se e solo se **la sua risposta impulsiva è un segnale causale, ovvero se:**

$$\boldsymbol{h(t) = h(t)u(t)}$$

Quindi se $h(t)$ è una funzione che incomincia per $t = 0$ in poi; come vedremo, i sistemi ideali sono dei sistemi che non prevedono causalità perché la loro risposta impulsiva non parte da $t = 0$, di questa categoria ne fanno parte, ad esempio, i filtri ideali.

Teorema sulla BIBO stabilità

La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare stazionario (SLS) sia **BIBO stabile** è che la sua **risposta impulsiva sia assolutamente integrabile**:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) < +\infty}$$

*I sistemi lineari stazionari sono quelli affrontati in automatica, nel modulo di Teoria dei sistemi, con la differenza che in questo ambito li studiamo con l'analisi di Fourier, un'analisi a regime stazionario, mentre nel modulo di Teoria dei Sistemi questi vengono analizzati con l'analisi di Laplace, che ne affronta anche lo studio in transitorio.

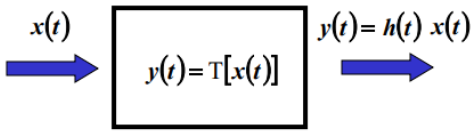
La risposta in frequenza

I sistemi affrontati fino ad ora sono stati analizzati nel dominio del tempo, tuttavia abbiamo anche analizzato i segnali nel dominio della frequenza, osservando lo spettro e le componenti frequenziali (le armoniche) che compongono il segnale e di cui non si hanno informazioni nel dominio temporale.
Ci chiediamo allora quanto segue: *i sistemi possono essere affrontati anche nel dominio della frequenza?*

I sistemi possono essere affrontati nel dominio della frequenza e da questa analisi è anche possibile dedurre se un segnale è più o meno adatto ad essere processato da un certo sistema (come un canale di comunicazione, ad esempio). Vediamo come rappresentare il sistema nel dominio della frequenza con l'approccio black box affrontato finora nel dominio temporale.
Supponiamo di avere un sistema e di porre in ingresso a quest'ultimo un segnale periodico e immaginario particolare, l'esponenziale:

$$x(t) = e^{j2\pi f t}$$

Come abbiamo già detto, l'uscita di un qualsiasi sistema lineare stazionario si può ricavare in funzione della sua risposta impulsiva e del segnale d'ingresso, mediante convoluzione:



$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,[x(t-\alpha)]\,d\alpha$$

Possiamo sostituire il valore di $x(t-\alpha)$: dato che $x(t)$ è un esponenziale, $x(t-\alpha)$ sarà il medesimo esponenziale traslato di α:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,[x(t-\alpha)]\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\left[e^{j2\pi f(t-\alpha)}\right]\,d\alpha$$

A questo punto scindiamo l'esponenziale, vedendolo come prodotto di due esponenziali, di cui uno non dipende dalla variabile d'integrazione α e, pertanto, può essere trattato come costante e può essere posto fuori dal segno d'integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\left[e^{j2\pi f(t-\alpha)}\right]\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\left[e^{j2\pi f t} * e^{j2\pi f \alpha}\right]\,d\alpha = e^{j2\pi f t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,e^{j2\pi f \alpha}\,d\alpha$$

Sotto il segno d'integrale abbiamo praticamente ottenuto una trasformata di Fourier: si tratta della **trasformata della risposta impulsiva:**

$$\boldsymbol{H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,e^{j2\pi f \alpha}\,d\alpha}$$

Ma possiamo anche notare che il segnale al di fuori del segno d'integrazione è proprio l'ingresso fornito al sistema: $x(t) = e^{j2\pi f t}$; a questo punto possiamo scrivere:

$$y(t) = e^{j2\pi f t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,e^{j2\pi f \alpha}\,d\alpha = x(t)\,H(f)$$

Da questo ragionamento deduciamo un importante concetto, quello della **risposta in frequenza del segnale impulso di Dirac $\boldsymbol{H(f)}$**, si tratta del rapporto uscita/ingresso quando in ingresso al sistema viene posto il segnale $x(t) = e^{j2\pi f t}$:

$$\boxed{\boldsymbol{H(f)} = \left[\frac{\boldsymbol{y(t)}}{\boldsymbol{x(t)}}\right]_{\boldsymbol{x(t)} = e^{j2\pi f t}}}$$

Chiaramente la risposta in frequenza $H(f)$, come tutte le trasformate di Fourier, è una funzione complessa e, in quanto tale, avrà un **modulo** ed una **fase;** nello specifico quest'ultimi prendono il nome di:

- **Risposta in ampiezza $\boldsymbol{A(f)} = |\boldsymbol{H(f)}|$**
- **Risposta in fase $\boldsymbol{\theta(f)} = \angle H(f)$**

E come ogni numero complesso è possibile esprimere la risposta in frequenza come: $\boldsymbol{H(f) = A(f)\,e^{j\theta(f)}}$

Si noti che tutti i sistemi che sono fisicamente realizzabili hanno una $\boldsymbol{H(f)}$ **reale** questo significa che la trasformata della risposta all'impulso, come ogni trasformata di Fourier di un segnale reale, gode di **simmetria Hermitiana**

$$\boxed{H(f) = \begin{cases} A(f) = A(-f) \\ \theta(f) = -\theta(-f) \end{cases}}$$

È bene specificare che il valore della trasformata della risposta in frequenza $H(f)$ varia in funzione, chiaramente, in funzione della frequenza "f":

- Se volessimo conoscere $H(f)$ a 100Hz $[H(100)]$ dovremo porre in ingresso un esponenziale avente $f = 100 \;\rightarrow\; x(t) = e^{j2\pi(100)t}$
- Se volessimo conoscere $H(f)$ a 200Hz $[H(200)]$ dovremo porre in ingresso un esponenziale avente $f = 200 \;\rightarrow\; x(t) = e^{j2\pi(200)t}$
- Se volessimo conoscere $H(f)$ a 300Hz $[H(300)]$ dovremo porre in ingresso un esponenziale avente $f = 300 \;\rightarrow\; x(t) = e^{j2\pi(300)t}$
- Se volessimo conoscere $H(f)$ a 400Hz $[H(400)]$ dovremo porre in ingresso un esponenziale avente $f = 400 \;\rightarrow\; x(t) = e^{j2\pi(400)t}$

Dunque al variare della frequenza avremo un differente valore della trasformata $H(f)$ e, quindi, differenti moduli e fase.

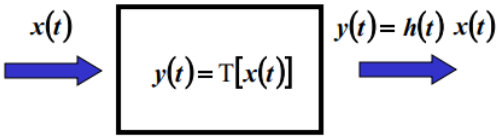
<u>Esempio</u>: supponiamo di porre in ingresso al sistema un segnale cosinusoidale ad una frequenza f_0 e con ampiezza pari ad a:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Utilizzando le formule di Eulero possiamo scrivere questo coseno in funzione di soli esponenziali; inoltre, siccome abbiamo una fase che è somma di $2\pi f_0 t$ e della fase iniziale φ_0 possiamo scomporre gli esponenziali nel prodotto di altri due esponenziali: uno avente come esponente $2\pi f_0 t$ e l'altro con esponente φ_0:

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = a\frac{e^{j(2\pi f_0 t+\varphi_0)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi_0)}}{2} = \frac{a}{2}\left[e^{j(\varphi_0)}e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + \frac{a}{2}\left[e^{-j(\varphi_0)}e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]$$

Se volessimo ricavare la risposta del sistema a questo segnale dovremmo ricavare la risposta impulsiva $h(t)$ e di conseguenza calcolare l'uscita mediante la convoluzione: $y(t) = x(t) \otimes h(t)$; si noti però che in seguito alla scomposizione di Eulero nel segnale in ingresso figura il termine $e^{j(2\pi f_0 t)}$;
come abbiamo già visto, quando in ingresso al sistema viene fornito tale esponenziale la risposta del sistema si può stimare come **moltiplicazione tra la risposta in frequenza del sistema ed il segnale in ingresso**:



$$\boldsymbol{y(t) = x(t)\,H(f)}$$

Dato che l'esponenziale $e^{\pm j\varphi_0}$ è costante insieme all'ampiezza $a/2$ possiamo scrivere la risposta del sistema (nel dominio temporale) come somma tra due prodotti: il primo è il prodotto tra la $H(f)$ calcolata in f_0 e la prima parte del segnale scomposto secondo Eulero calcolata in f_0, il secondo prodotto si ricava moltiplicando $H(f)$ centrata in $-f_0$ e la seconda parte del segnale scomposto secondo Eulero calcolata in $-f_0$:

$$y(t) = H(f_0)\,x(t) = H(f_0)\left[\frac{a}{2}e^{j(\varphi_0)}e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + H(-f_0)\left[\frac{a}{2}e^{-j(\varphi_0)}e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]$$

Possiamo scrivere la risposta in frequenza in funzione del suo modulo e della sua fase, ottenendo così:

$$\boldsymbol{H(f) = A(f)\,e^{j\theta(f)}} \;\rightarrow\; y(t) = \left[A(f_0)e^{j\theta(f_0)}\right]\left[\frac{a}{2}e^{j(\varphi_0)}e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + \left[A(-f_0)e^{j\theta(-f_0)}\right]\left[\frac{a}{2}e^{-j(\varphi_0)}e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]$$

Abbiamo detto che la trasformata $H(f)$ di un sistema fisicamente realizzabile è reale; la **trasformata di Fourier di un segnale reale** gode della proprietà di **simmetria Hermitiana** che ci permette di affermare che il modulo è una funzione pari mentre la fase è una funzione dispari:

$$H(f) = \begin{cases} A(f) = A(-f) \\ \theta(f) = -\theta(-f) \end{cases} \quad \rightarrow \quad Simmetria\ Hermitiana\ per\ segnali\ reali$$

Quindi possiamo mettere a comune $A(f_0)$ dato che $A(f_0) = A(-f_0)$ insieme al valore costante $a/2$:

$$y(t) = [A(f_0)e^{j\theta(f_0)}]\left[\frac{a}{2}e^{j(\varphi_0)}e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + [A(-f_0)e^{j\theta(-f_0)}]\left[\frac{a}{2}e^{-j(\varphi_0)}e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]$$

$$y(t) = A(f_0)\frac{a}{2}\left\{e^{j\theta(f_0)}\left[e^{j(\varphi_0)}e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + e^{j\theta(-f_0)}\left[e^{-j(\varphi_0)}e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]\right\}$$

Raggruppiamo il prodotto dei due esponenziali $e^{j\theta(f_0)}$ e $e^{j(\varphi_0)}$come unico esponenziale e facciamo così anche per il prodotto dei due esponenziali $e^{j\theta(-f_0)}$ e $e^{-j(\varphi_0)}$

$$y(t) = A(f_0)\frac{a}{2}\left\{\left[(e^{j\theta(f_0)}e^{j(\varphi_0)})\ e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + \left[(e^{j\theta(-f_0)}e^{-j(\varphi_0)})e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]\right\}$$

Siccome per la simmetria Hermitiana **la fase è una funzione dispari:** $\boldsymbol{\theta(f) = -\theta(-f)}$ possiamo effettuare quest'ultima sostituzione ottenendo quanto segue:

$$y(t) = A(f_0)\frac{a}{2}\left\{\left[(e^{j\theta(f_0)}e^{j(\varphi_0)})\ e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + \left[(e^{-j\theta(f_0)}e^{-j(\varphi_0)})e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]\right\}$$

$$y(t) = A(f_0)\frac{a}{2}\left\{\left[(e^{j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0]}\ e^{j(2\pi f_0 t)}\right] + \left[(e^{-j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0]}\ e^{-j(2\pi f_0 t)}\right]\right\}$$

Risolviamo nuovamente il prodotto tra esponenziali, ritrovando un unico esponenziale cui esponente è somma di tre termini (che corrispondono esattamente ai tre esponenti dei tre esponenziali che abbiamo sommato):

$$y(t) = A(f_0)\frac{a}{2}\left\{\left[(e^{j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0\ +\ (2\pi f_0 t)]}\right] + \left[(e^{-j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0\ +\ (2\pi f_0 t)]}\right]\right\}$$

A questo punto applichiamo la formula di Eulero:

$$y(t) = A(f_0)\ a\left\{\frac{\left[(e^{j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0\ +\ (2\pi f_0 t)]}\right] + \left[(e^{-j[\theta(f_0)\ +\ \varphi_0\ +\ (2\pi f_0 t)]}\right]}{2}\right\}$$

$$y(t) = A(f_0)\ a\cos[\theta(f_0) + \varphi_0 + (2\pi f_0 t)] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y(t) = A(f_0)\ a\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \theta(f_0))}$$

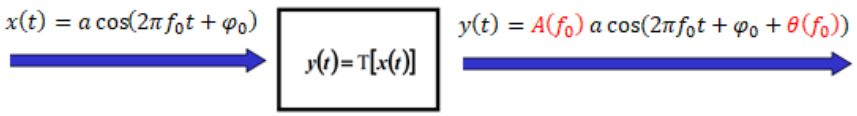
A questo risultato appena ottenuto possiamo riscontrare quale sia la differenza tra il segnale in ingresso e quello in uscita, ovvero quale sia stata la modifica che il sistema ha apportato al segnale d'ingresso generando quello d'uscita:

$$Ingresso:\ x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \qquad\qquad Uscita:\ y(t) = A(f_0)\ a\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \theta(f_0))$$

→ Possiamo osservare che l'ampiezza è stata modificata: si passa da "a" ad "$a\ A(f_0)$", è stata amplificata in funzione dell'ampiezza della $H(f)$ nel punto f_0

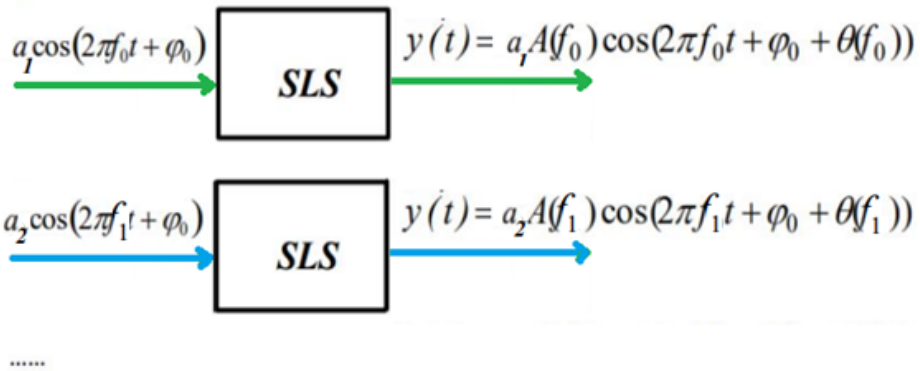
→ Anche la fase è stata modificata: vi è stato uno sfasamento in funzione della fase della $H(f)$ nel punto f_0 che ha portato la fase da "$2\pi f_0 t + \varphi_0$" a "$2\pi f_0 t + \varphi_0 + \theta(f_0)$"

Quindi se in ingresso è stato posto un segnale periodico formato da tante armoniche (tanti coseni), possiamo osservare che per lo specifico coseno ad ampiezza "a" e a frequenza "f_0" il sistema ha apportato una modifica sia in fase che in ampiezza, mantenendo inalterata la frequenza.
Diremo che l'ampiezza dell'uscita è variata della risposta in ampiezza di $H(f)$: $A(f) = |H(f)|$ e la fase è variata della risposta in fase di $H(f)$: $\theta(f) = \angle H(f)$

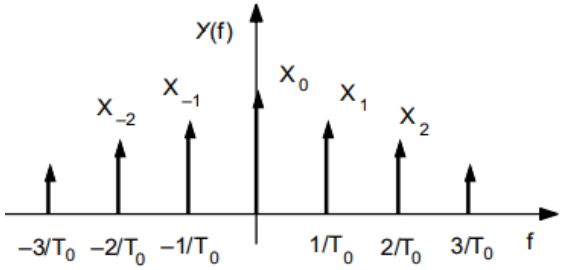


A questo punto possiamo intuire che andando ad inserire un segnale formato da più coseni, il sistema, essendo lineare, darà in uscita un segnale che sarà combinazione di tutte le uscite ottenute per i singoli coseni formanti il segnale d'ingresso; nello specifico processerà ogni singolo segnale a frequenza "f_x" amplificandolo dell'ampiezza della $H(f)$ per quella data frequenza: $A(f_x) = |H(f_x)|$ e sfasandone la fase di una quantità pari alla fase della$H(f)$: $\theta(f_x) = \angle H(f_x)$

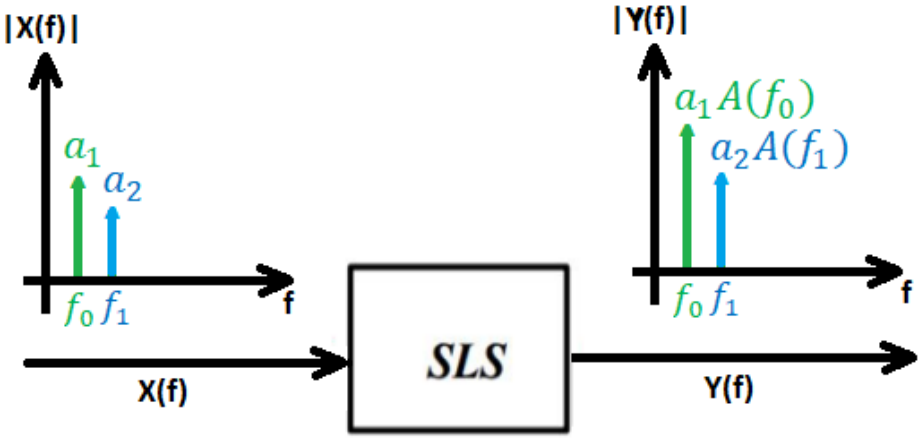
$$x(t) = \underline{a_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + \underline{a_2 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_2)} + ..$$



L'analisi di Fourier afferma che ogni segnale periodico può essere visto come somma di coseni che vengono chiamati "armoniche"; le armoniche, come abbiamo visto, vengono rappresentati nello spettro del segnale periodico come barre centrate nella frequenza al quale sono definite, tali frequenze sono sempre multiple della frequenza portante f_0.
Questo significa che, ponendo in ingresso al sistema un segnale periodico, in frequenza osserveremo uno spettro a barre per il segnale d'ingresso ed un altro spettro a barre per il segnale in uscita, dato che entrambi sono formati da cosinusoidi (quindi da armoniche).



Nello spettro delle ampiezze del segnale in uscita osserveremo che ogni armonica rimane centrata alla propria frequenza ma avrà un'ampiezza modificata e tale modifica sarà legata all'ampiezza della trasformata della risposta all'impulso: $A(f_x) = |H(f_x)|$.
Analogamente, nello spettro delle fasi potremo osservare che la fase del segnale d'uscita coinciderà con la fase del segnale in ingresso cui è stato applicato uno sfasamento correlato alla trasformata della risposta all'impulso: $\theta(f_x) = \angle H(f_x)$



Questo lo avremmo potuto osservare precedentemente, partendo dalla formula di convoluzione per ricavare $y(t)$, trasformando e applicando il teorema del prodotto:

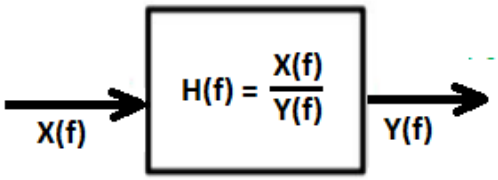
$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{T.\ Del\ Prodotto} Y(f) = X(f)H(f) \rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Abbiamo quindi ottenuto un importante risultato: la funzione $H(f)$ la si può ricavare come rapporto uscita/ingresso degli spettri:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

E, passando all'analisi in frequenza, il calcolo della risposta del sistema è più semplice: si tratta del prodotto tra la trasformata della risposta all'impulso $H(f)$ e della trasformata del segnale in ingresso $X(f)$:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{T.\ Del\ Prodotto} Y(f) = X(f)H(f)$$



Questo risultato è sicuramente più comodo della convoluzione nel dominio temporale.

Facciamo un breve confronto tra l'espressione di $H(f)$ ottenuta precedentemente e quella appena ottenuta:

- Precedentemente abbiamo ricavato $H(f)$ in funzione dei due segnali nel dominio del tempo, con una importante limitazione: il segnale in ingresso $x(t)$ era stato definito come un particolare esponenziale, questo significa che per ottenere $H(f)$ dovevamo imporre sempre un esponenziale in ingresso a frequenza $\bar{f}$:

$$H(\bar{f}) = \left[\frac{\boldsymbol{y(t)}}{\boldsymbol{x(t)}}\right]_{\boldsymbol{x(t)} = e^{j2\pi \bar{f} t}}$$

- Adesso abbiamo ricavato $H(f)$ con una espressione generica, che vale sempre, a prescindere del valore che assumono gli spettri dei segnali nel dominio della frequenza, senza alcuna restrizione:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

<u>Esempio</u>:
Supponiamo di avere un sistema cui funzione di trasferimento:

$$H(f) = \pi\left(\frac{f}{200}\right)$$

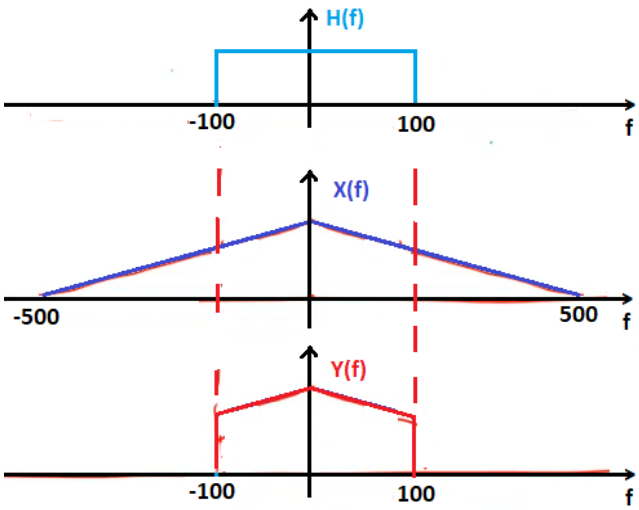
E che ad esso viene posto in ingresso il segnale $X(f)$:

$$X(f) = \Delta\left(\frac{f}{500}\right)$$

Se vogliamo calcolare l'uscita del sistema ci basterà calcolare il prodotto di questi due segnali; graficamente quello che si ottiene è una parte del triangolo, per esattezza quella parte che si trova in corrispondenza della funzione di trasferimento quando essa vale 1; ovvero quando:

$$H(f) = \pi\left(\frac{f}{200}\right) = 1$$

Questo sistema è un particolare sistema che andremo a studiare prossimamente: si tratta di un **filtro**, che elimina tutto ciò che si trova al di fuori del suo intervallo di definizione (in cui, avendo ampiezza unitaria, torna esattamente il segnale troncato)



Studiare l'uscita $Y(f)$ consiste nello studio della trasformazione che il sistema apporta al segnale in ingresso $X(f)$ attraverso la funzione di trasferimento $H(f)$ che lo caratterizza.
Conoscendo l'andamento dello spettro dell'uscita è poi possibile anche ricavarne l'equivalente nel tempo mediante operazione di antitrasformazione:

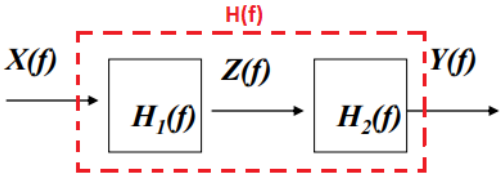
$$y(t) = F^{-1}[Y(f)]$$

Spesso quando si ha il segnale in ingresso definito nel dominio del tempo $x(t)$ si preferisce prima passare nel dominio della frequenza trasformandolo: $X(f) = F[x(t)]$, calcolare l'uscita nel dominio frequenziale mediante la funzione di trasferimento: $Y(f) = X(f)H(f)$ e poi antitrasformare per tornare nel dominio del tempo: $y(t) = F^{-1}[Y(f)]$, in questo modo non si deve passare per la convoluzione nel dominio temporale.

Sistemi lineari stazionari in cascata

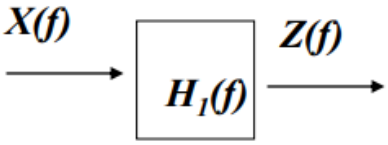
I sistemi lineari stazionari possono essere collegati l'uno a l'altro formando una cascata.
In generale, infatti, il segnale percorre più sistemi e più trasformazioni, basti pensare alla trasmissione di un segnale vocale: il segnale viene trasformato da un trasduttore come, ad esempio, il microfono (I Sistema), dopo di che viene amplificato da un amplificatore (II Sistema) poiché la sua ampiezza è troppo poca per essere elaborato, dato che ormai quasi tutti i dispositivi lavorano in digitale occorrerà che questo segnale venga opportunamente convertito da un convertitore analogico-digitale (III Sistema), se esso deve essere trasmesso magari viene anche modulato da un opportuno modulatore (IV Sistema) per poi essere finalmente immesso nel canale (V Sistema); per cui è frequente che un segnale possa subire differenti trasformazioni e possa passare per differenti sistemi.

È quindi utile anche saper ricavare la risposta in frequenza di una cascata di sistemi conoscendo nei singoli quest'ultimi (quindi conoscendone almeno la funzione di trasferimento $H_x(f)$).



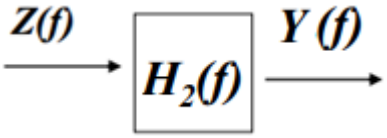
Supponiamo di avere due sistemi in cascata caratterizzati rispettivamente dalle funzioni $H_1(f)$ ed $H_2(f)$, ci chiediamo come sia possibile considerare questi due sistemi come un **unico sistema equivalente $H(f)$**.

Cominciamo con il dire che la funzione di trasferimento del primo blocco è data dal rapporto tra lo spettro in uscita $Z(f)$ e quello in ingresso $X(f)$, per definizione:



$$H_1(f) = \frac{Z(f)}{X(f)}$$

Focalizzando l'attenzione sul secondo sistema otteniamo una funzione di trasferimento pari al rapporto tra lo spettro in uscita $Y(f)$ e quello in ingresso $Z(f)$:



$$H_2(f) = \frac{Y(f)}{Z(f)}$$

Da questa equazione possiamo ricavare $Z(f)$, lo spettro del segnale che si trova in comune: uscita dal primo sistema e in ingresso al secondo; sostituendo poi la quantità trovata otteniamo il rapporto tra l'ingresso del primo sistema $X(f)$ e l'uscita del secondo sistema $Y(f)$, quindi la funzione di trasferimento "totale" della cascata:

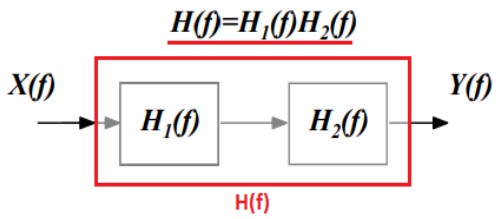
$$Z(f) = \frac{Y(f)}{H_2(f)} \quad \rightarrow \quad H_1(f) = \frac{Z(f)}{X(f)} = \frac{Y(f)/H_2(f)}{X(f)} \quad \rightarrow \quad H_1(f) = \frac{Y(f)}{X(f)H_2(f)}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f)H_2(f) \quad ma \quad \frac{Y(f)}{X(f)} \triangleq H(f) \quad \rightarrow \quad H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

Abbiamo ricavato il rapporto tra l'ingresso del primo sistema e l'uscita del secondo sistema in funzione del prodotto delle funzioni di trasferimento di quest'ultimi; ma dato che per definizione il rapporto tra l'ingresso e l'uscita della cascata coincide con la funzione di trasferimento dell'intero blocco cascata, significa che quest'ultima si trova dal rapporto delle singole funzioni di trasferimento:

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f)H_2(f) \quad \rightarrow \quad \frac{Y(f)}{X(f)} \triangleq H(f) \quad \rightarrow \quad H(f) = H_1(f)H_2(f) \quad \rightarrow \quad h(t) = x(t) \otimes y(t)$$

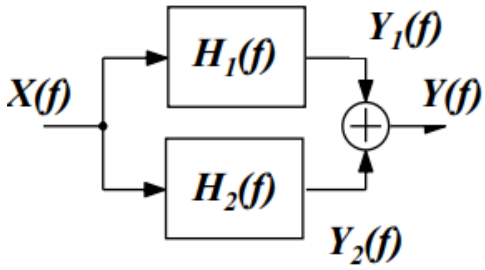
Una cascata di due (o più) sistemi lineari stazionari, aventi rispettivamente funzione di trasferimento $H_1(f)$ e $H_2(f)$, può essere vista come un unico sistema cui funzione di trasferimento $H(F)$ è data dal prodotto delle singole funzioni $H_1(f)$ e $H_1(f)$:



$$\boxed{H(f) = H_1(f)H_2(f)}$$

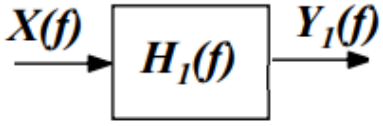
Sistemi lineari stazionari in parallelo

Così come il collegamento in cascata, due o più sistemi lineari stazionari possono essere collegati l'uno a l'altro in parallelo, con un ingresso che entra in parallelo formando ai due sistemi e un'uscita data dalla somma delle uscite dei singoli blocchi (sommate mediante un blocco sommatore: ⊕).



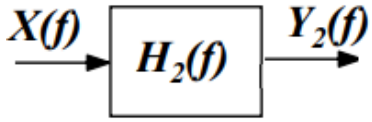
Come prima, vogliamo capire se è possibile racchiudere in un unico sistema (con un'unica funzione di trasferimento) il collegamento in parallelo di questi due (o più) blocchi.

La funzione di trasferimento del primo blocco è data dal rapporto tra lo spettro in uscita $Y_1(f)$ e quello in ingresso $X(f)$:



$$H_1(f) = \frac{Y_1(f)}{X(f)}$$

La funzione di trasferimento del secondo sistema è pari al rapporto tra lo spettro in uscita $Y_2(f)$ e quello in ingresso $X(f)$:



$$H_2(f) = \frac{Y_2(f)}{X(f)}$$

Per ricavare la funzione di trasferimento totale del parallelo $H(f)$ ragioniamo sull'uscita $Y(f)$: quest'ultima è data dalla somma delle uscite dei due blocchi $Y_1(f)$ e $Y_2(f)$:

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f)$$

Possiamo scrivere le due uscite dei singoli sistemi in funzione dell'unico ingresso $X(f)$ e le singole funzioni di trasferimento $H_1(f)$ e $H_2(f)$, dalle formule inverse:

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f) = [X(f)H_1(f)] + [X(f)H_2(f)] = X(f)[H_1(f) + H_2(f)]$$

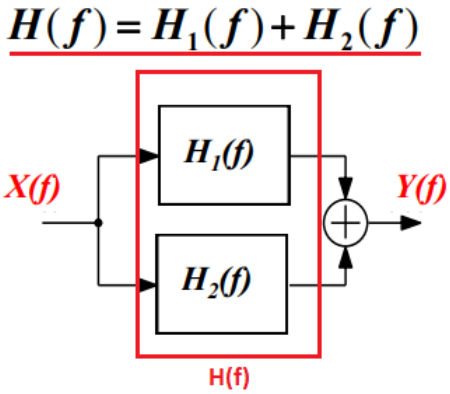
Possiamo notare che abbiamo scritto in relazione tra loro $X(f)$ e $Y(f)$, ovvero l'ingresso e l'uscita dell'intero sistema formato dal parallelo, per cui possiamo ottenere la funzione di trasferimento di quest'ultimo:

$$Y(f) = X(f)[H_1(f) + H_2(f)] \quad \rightarrow \quad \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) + H_2(f)$$

$$ma\ H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \rightarrow \quad H(f) = H_1(f) + H_2(f) \quad \rightarrow \quad h(t) = x(t) + y(t)$$

Il collegamento in parallelo di due (o più) sistemi lineari stazionari, aventi rispettivamente funzione di trasferimento $H_1(f)$ e $H_2(f)$, può essere visto come un unico sistema cui funzione di trasferimento $H(F)$ è data dalla somma delle singole funzioni $H_1(f)$ e $H_1(f)$:

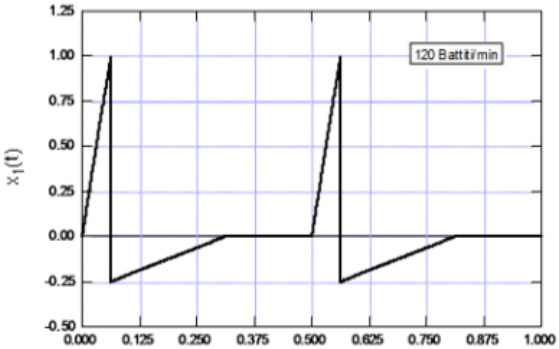
$$\boxed{H(f) = H_1(f) + H_2(f)}$$



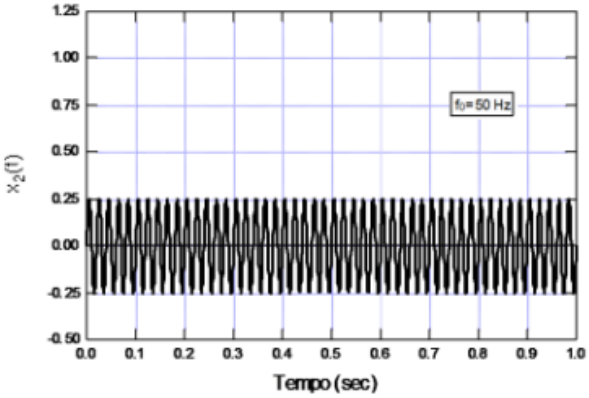
I filtri: esempio pratico

Un esempio pratico di sistema è il **filtro**: un filtro è un sistema e in quanto tale ha una funzione di trasferimento $H(f)$ e si occupa, normalmente, di eliminare una parte del segnale e di farne sussistere solo una determinata porzione.

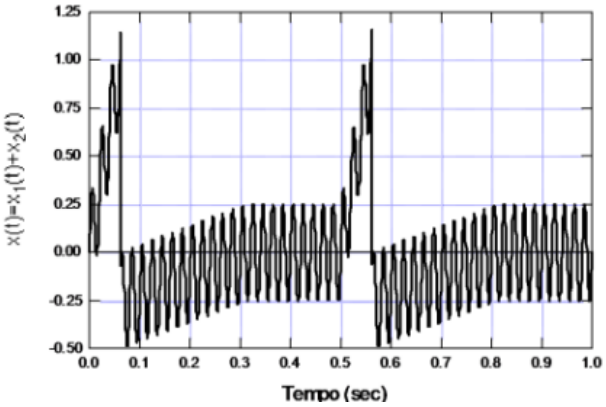
Supponiamo di considerare un segnale come quello dell'elettrocardiogramma, formato da una serie di "spark" (picchi di qualche millivolt) che corrispondono agli impulsi del cuore e che danno informazioni circa il battito di quest'ultimo. Il segnale "originale" che misura il battito cardiaco avrebbe un andamento simile a quello rappresentato.



Lo strumento (o l'insieme di strumenti) che misurano il battito cardiaco però hanno una serie di tensioni di funzionamento che disturbano il segnale misurato, per cui in realtà l'uscita del cardiografo, anche se non è collegato ad un cuore, avrà un'uscita simile a quella rappresentata.



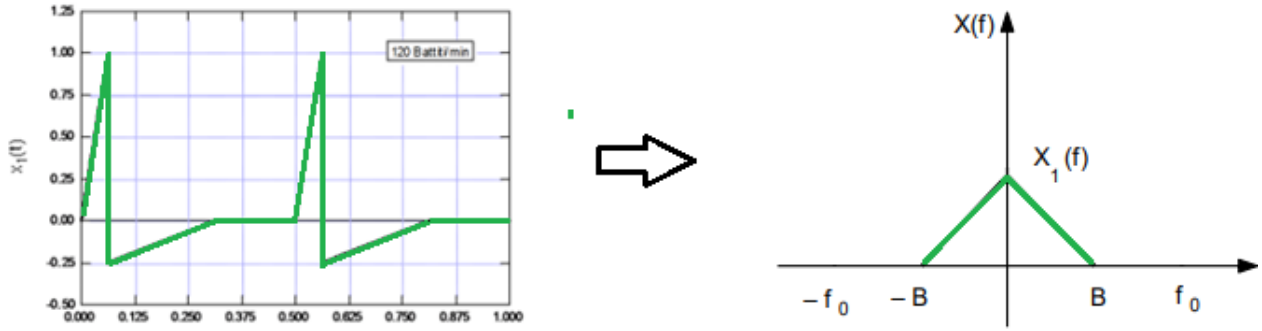
Queste tensioni di disturbo portano ad un segnale che non ha ampiezza elevata ma, siccome anche l'impulso cardiaco è nell'ordine di qualche millivolt, tali disturbi potrebbero comprometterne la misura.
Il segnale in uscita pertanto è un segnale sporco che avrà un andamento simile:



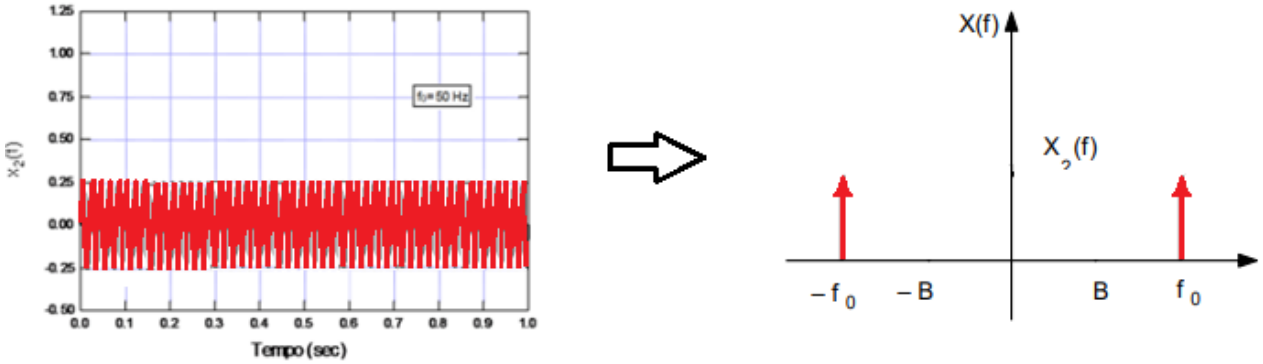
Questo segnale è molto sporco ed è chiaro che per un'accurata analisi servirebbe un segnale che sia quanto più pulito possibile (quindi quanto più simile al primo segnale rappresentato).

Sarà dunque necessario “pulire” questo segnale per ottenerne uno quanto più leggibile possibile, tuttavia nel dominio temporale non è possibile applicare alcuna operazione che possa rendere tale segnale più pulito. Tuttavia possiamo affidarci all’analisi nel dominio della frequenza per attuare un procedimento di “pulizia” del segnale.

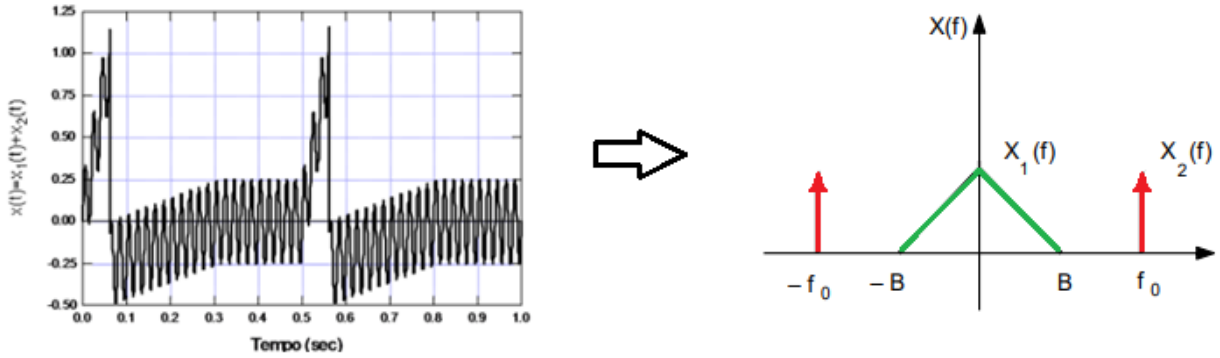
Supponiamo che nel dominio della frequenza lo spettro del segnale utile, quello del battito cardiaco, sia un triangolo (a titolo d’esempio, non è detto che sia realmente così);



Supponendo che il segnale disturbo sia un coseno possiamo facilmente dedurre che il suo spettro sia formato da due impulsi centrati in $\pm f_0$ (con f_0 frequenza del coseno).



Quando questi due si sommano il risultato è uno spettro che avrà un triangolo di semibase B centrato in 0 correlati al segnale utile e due impulsi legati al coseno centrati a frequenza $\pm f_0$



L’ideale sarebbe eliminare dallo spettro i due impulsi (quindi il coseno, che è il segnale disturbo), per farlo servirebbe un sistema che processi tale segnale in ingresso e ne elimini le componenti a frequenza f_0

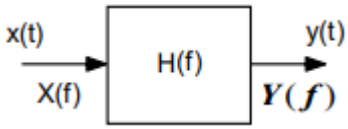
A tale scopo ci torna utile processare il segnale con un sistema che abbia una funzione di trasferimento pari ad un rect di base pari a 2B centrato in 0 (definito quindi tra $-B$ e B):

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

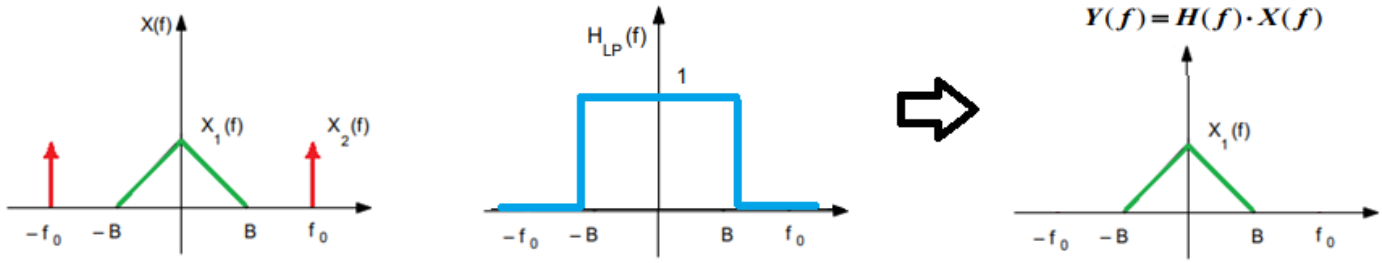
In questo modo quando andremo a calcolare l’uscita andremo a moltiplicare per questo rect e andremo praticamente a **filtrare** il segnale $X(f)$ mantenendo solo quello che si trova tra $-B$ e B (ove il rect è definito) ed eliminando tutto ciò che sta al di fuori (quindi eliminando le componenti di disturbo in f_0).

Ricapitolando quindi quanto detto, l'uscita dopo il sistema sarà data dal prodotto:

$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

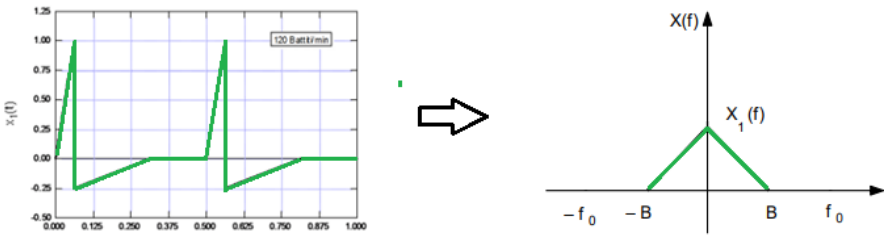


Come possiamo osservare dal grafico stesso, quando andiamo a moltiplicare uno spettro per un rect ad ampiezza unitaria il risultato è la porzione di segnale che si trova definita nell'intervallo in cui il rect vale 1, tutto il resto viene "reiettato" poiché viene moltiplicato per 0 (dato che il rect vale 0 altrove).



Questo esempio ci fa ben capire l'importanza di lavorare in frequenza: analizzando il segnale nel tempo non avremmo potuto intervenire e non avremmo potuto "pulire" il segnale dal disturbo cosinusoidale.

Analizzando in frequenza però siamo riusciti ad eliminare la componente cosinusoidale, mantenendo solamente il segnale utile a seguito di un filtraggio; il segnale che rimante è $X_1(f)$, che opportunamente antitrasformato restituisce $x_1(t)$, il segnale utile nel dominio del tempo.



Il filtro utilizzato prende il nome di **filtro passa basso**, si tratta di un filtro che ha come funzione di trasferimento un rect e che fa passare tutte le frequenze che si trovano al di sotto del rect (quindi il segnale all'interno della banda in cui il rect vale 1) e reietta tutto ci che ne sta al di fuori (ove il rect vale 0).

Come vedremo, normalmente i filtri vengono utilizzati sia in ricezione che in trasmissione:

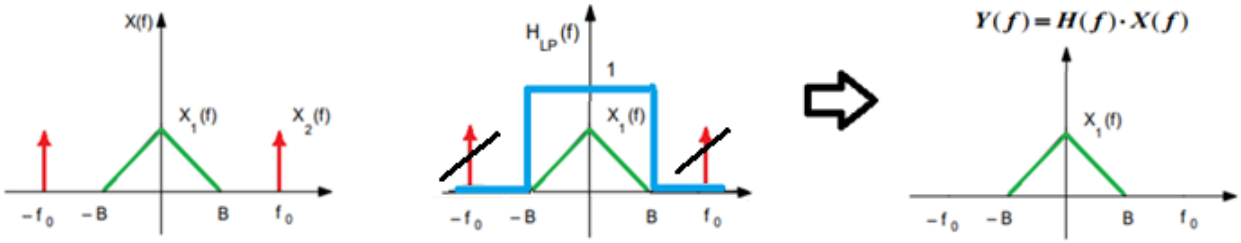
- In trasmissione vengono utilizzati dei filtri che limitano lo spettro del segnale in modo da poter trasmettere in una banda limitata e non dover pagare un canale più ampio.
- In ricezione invece vengono utilizzati dei filtri addetti alla "pulizia" del segnale, che eliminano le armoniche a frequenze che si trovano al di fuori della banda del segnale utile.

I filtri ideali

Andiamo adesso a contraddistinguere i filtri in categorie, suddividendoli a seconda della loro funzione in: **Filtri passa basso, Filtri passa alto, Filtri passa banda** e **Filtri elimina banda.**

I filtri passa basso

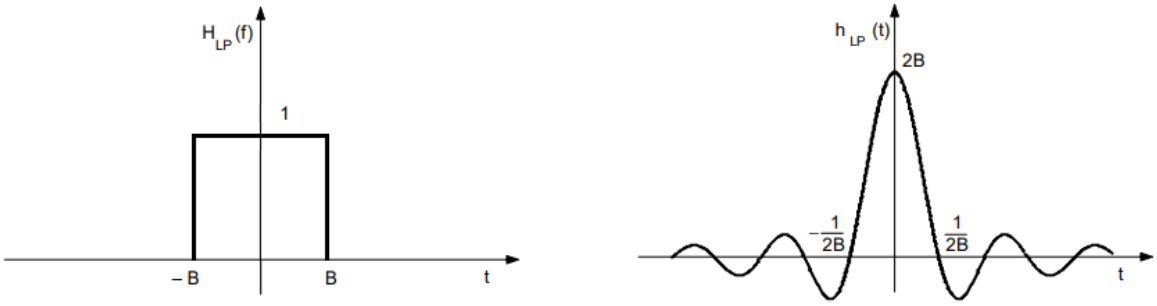
Il filtro passa basso è quello visto nell'esempio, fa passare tutte le armoniche che si trovano all'interno della sua banda ed elimina tutto ciò che si trova al di fuori; in altre parole fa passare tutto ciò che si trova "al di sotto" di esso quando assume il valore unitario e annulla tutto ciò che ne sta al di fuori, quando esso assume valore nullo.



Questo segnale ha una funzione di trasferimento pari ad un rect (com'è evidente dal grafico), la banda di tale rect viene considerata solo sul semiasse delle frequenze positive (ricordiamo infatti che noi consideriamo lo spettro bilatero dei segnali, considerando anche le frequenze negative ma, in realtà, esistono solo le frequenze positive); questo significa che il filtro in questione non avrà una banda pari a 2B ma pari a B, che va da 0 e B dato che il rect è centrato in 0.
[Quindi c'è differenza tra la base del rect che è pari a 2B e la banda che è pari a B]

Dal grafico è facile ottenere la funzione di trasferimento $H_{LB}(f)$ del filtro passa basso e la sua relativa antitrasformata nel dominio del tempo $h_{LB}(t)$:

$$\boxed{H_{LB}(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \rightarrow \quad h_{LB}(t) = 2B\ sinc(2Bt)}$$



Il filtro passa basso però è un **filtro ideale non fisicamente realizzabile** e possiamo dimostrarlo in due modi:

1. Ha una risposta all'impulso $h_{LB}(t)$ che non è causale:

   $$h_{LB}(t) = 2B\ sinc(2Bt)$$

   Osservando il grafico di $h_{LB}(t)$ possiamo infatti notare che non è definita da 0 a t come ogni segnale causale ma è definita da $-\infty$, il che significa che non è causale; ogni sistema fisicamente realizzabile è causale, quindi non è questo il caso del filtro passa banda*.

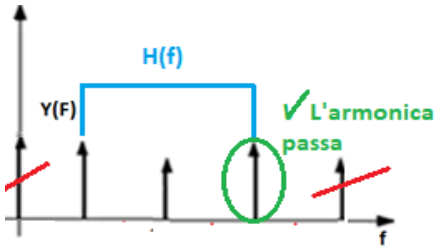
2. Il secondo aspetto per cui possiamo capire che il sistema non è fisicamente realizzabile è che trattandosi di un rect, la variazione di quest'ultimo è istantanea e non esistono nella realtà dei sistemi che variano istantaneamente.

*Nella trasformazione di Fourier non possiamo considerare solamente la parte positiva del rect ma dobbiamo anche considerare la parte negativa perché lavoriamo solo con segnali reali dovremo e questi godono sempre di simmetria Hermitiana. Per questo motivo non possiamo andare a trasformare solamente la parte positiva del rect e quindi avremo un seno cardinale avente anche una parte negativa.

Convenzione: il fronte di salita dei filtri

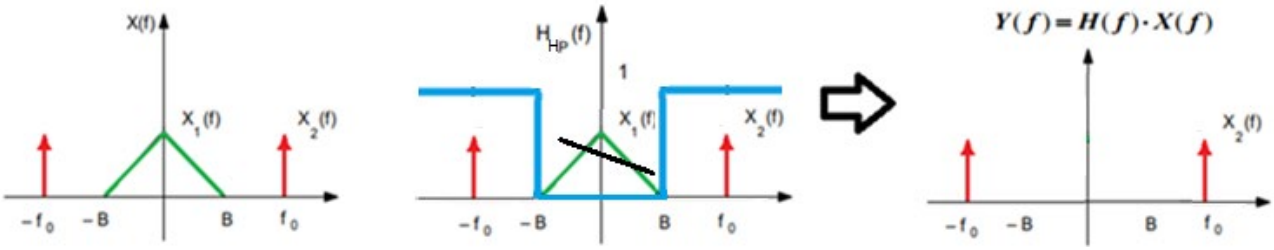
I filtri ideali hanno un fronte di salita istantaneo: passano da 0 a 1 in un istante "t"; questo ci porta ad un quesito: *Come si comporta il filtro quando si trova in tale istante "t"? L'armonica in tale istante viene tagliata o passa?*

La risposta è che **il segnale passa in prossimità dell'istante di salita "t" del filtro ideale**, questa è una convenzione che viene adottata perché, effettivamente, ci si trova nella situazione paradossale in cui la risposta del filtro vale contemporaneamente sia 1 che 0. Per convenzione questa vale 1 (o un qualsiasi valore d'ampiezza diverso da 0).



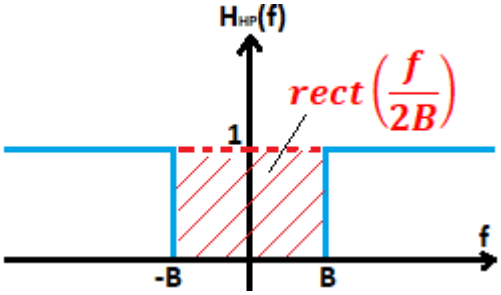
I filtri passa alto

Il filtro passa alto è duale al filtro passa basso: ha una funzione di trasferimento che sia pari a 0 nella banda di definizione tra $-B$ e B mentre varrà 1 altrove. Questo significa che verrà oscurato il segnale che si trova all'interno della banda $[-B; B]$ e viene mantenuto ciò che si trova al di fuori di essa.



La funzione di trasferimento di questo filtro è duale a quella di un filtro passa basso e può essere vista come la sottrazione tra un segnale costante di ampiezza 1 a cui viene sottratto il rect di base 2B e centrato in 0:

$$H_{HP}(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$



Sapendo che la trasformata di 1 è un impulso di Dirac e che quella di un rect è un seno cardinale, otteniamo la risposta impulsiva:

$$h(t) = \delta(t) - 2B\ sinc(2Bt)$$

$$\boxed{H_{HP}(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \rightarrow \quad h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\ sinc(2Bt)}$$

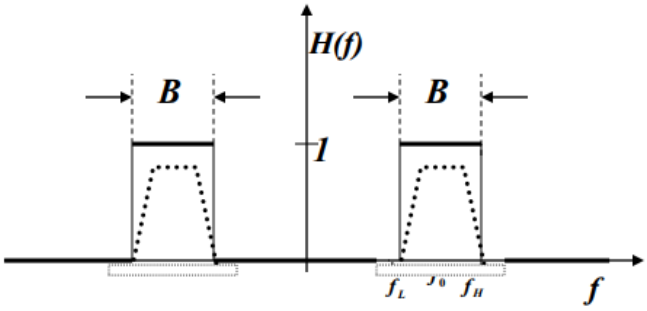
Anche questo segnale non è fisicamente realizzabile:

1. Ha una risposta all'impulso $h_{HP}(t)$ che non è causale: il seno cardinale non è definito da 0 a t come ogni segnale causale ma è definito da $-\infty$, il che significa che non è causale; ogni sistema fisicamente realizzabile è causale, quindi non è questo il caso del filtro passa banda*.
2. Inoltre, la presenza delle due salite istantanee per $f = \pm B$ fa capire che il sistema non è fisicamente realizzabile perché non esistono in realtà segnali in grado di variare istantaneamente.

I filtri passa banda

Piuttosto che ad un filtraggio mediante filtri passa basso o passa alto, potremmo essere interessati ad un filtraggio "mirato" a determinate frequenze, in una determinata banda.

Ad esempio nella scelta della stazione radio c'è bisogno del sintonizzatore altro non è che un filtro che si sposta concentrandosi su un certo range di frequenze, ovvero una certa banda. In questo modo, concentrandosi solo sulla banda di una determinata stazione radio, il sintetizzatore oscura tutte le altre frequenze appartenenti alle altre stazioni radio.



Il filtro passa banda lascia passare quella porzione di segnale che si trova entro la banda delimitata dalle frequenze f_H ed f_L e annulla tutto ciò che sta all'esterno:

$$B = f_H - f_L$$

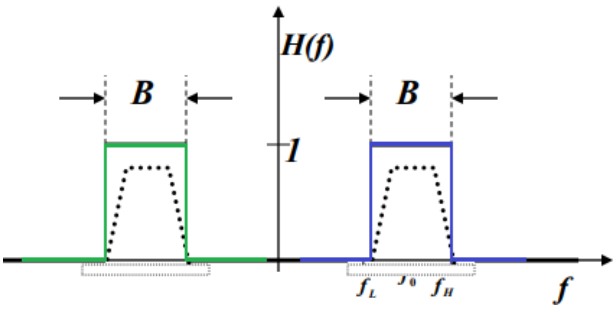
È quindi caratterizzato da quella che si chiama banda passante B, delimitata da una frequenza alta f_H ed una bassa f_L; da essa dipende il fattore di qualità del filtro che dipende dalla sua frequenza centrale f_0 e la sua banda B:

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

Questo parametro indica la qualità del filtro, migliore sarà e più il filtro sarà costoso.

La funzione di trasferimento di un filtro passa banda è caratterizzata praticamente dalla somma di due rect (uno per la parte negativa ed una per la parte positiva); nello specifico, si tratta della somma di due rect che sono centrati in $\pm f_o$ e di base B

$$H_{BP}(f) = rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right)$$



Chiaramente, possiamo anche ottenere la risposta impulsiva del filtro $h_{HP}(t)$; quest'ultima però la andremo a calcolare diversamente rispetto a quanto fatto fino ad ora, ricorrendo al teorema della modulazione:

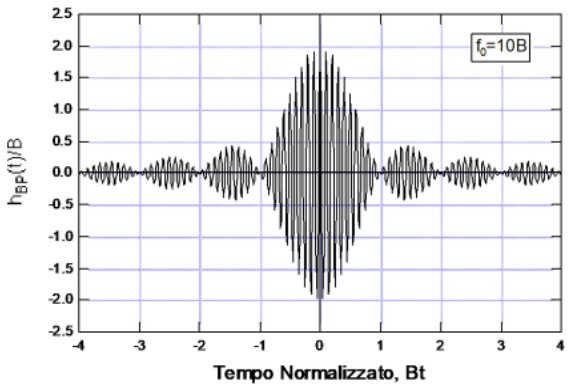
$$T.Modulazione: \;\; y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \;\rightarrow\; Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

Osservando la forma che assume la funzione di trasferimento, possiamo facilmente associarla allo spettro del segnale modulato: si tratta della somma di due segnali identici (due rect) centrati in due frequenze speculari ($\pm f_0$), l'unica cosa che manca rispetto al teorema è un 2 che però possiamo ottenere facilmente moltiplicando e dividendo per due $H_{HP}(f)$:

$$H_{BP}(f) = 2\left[\frac{1}{2} rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right)\right] \xrightarrow{T.\ Modulazione} h_{BP}(t) = 2\,Bsinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

Il segnale nel dominio del tempo è praticamente un coseno modulato da un seno cardinale come rappresentato in figura.

$$\boxed{\begin{aligned} &H_{BP}(f) = rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right) \\ &h_{BP}(t) = 2\,Bsinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}}$$

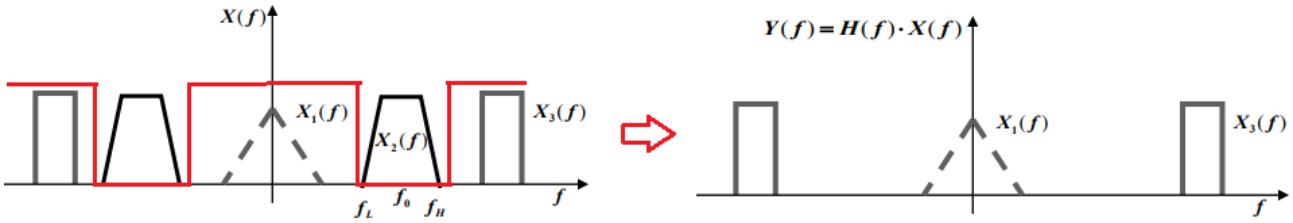


Anche questo è un filtro non fisicamente realizzabile:

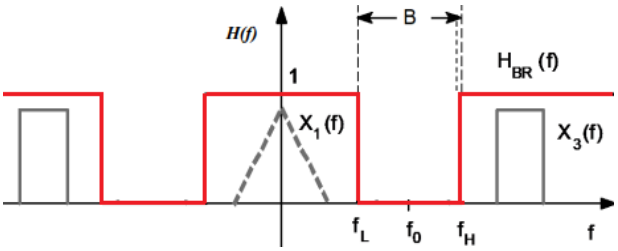
1. Ha una risposta all'impulso $h_{BP}(t)$ che non è causale
2. Vi sono due rect e quindi delle salite istantanee

I filtri elimina banda

Il filtro elimina banda è il filtro duale al passa banda: quest'ultimo piuttosto che lasciar passare solo la porzione del segnale che si trova all'interno di una certa banda passante fa passare tutto il resto meno ciò che si trova entro quest'ultima.



Essendo duale al filtro passa banda, possiamo scrivere la sua funzione di trasferimento in funzione di quest'ultima: si tratta del segnale costante 1 cui vengono sottratti i due rect che formano la banda passante del filtro passa banda:



$$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f) = 1 - \left[rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right)\right]$$

Avendo già ricavato la trasformata del filtro passa banda e sapendo che la trasformata di 1 è l'impulso di Dirac scriviamo:

$$h_{BR}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - [2\,Bsinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)]$$

Ricapitolando quindi:

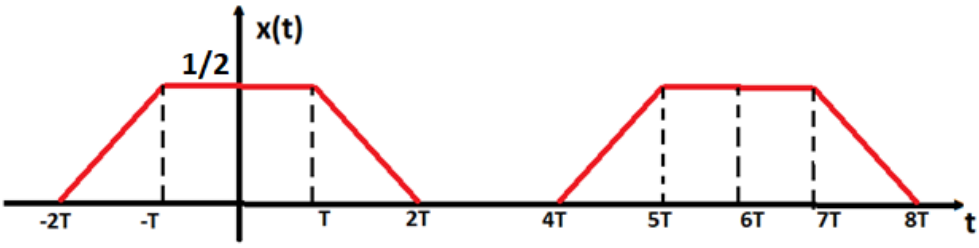
$$\boxed{\begin{aligned} &H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f) = 1 - \left[rect\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{B}\right)\right] \\ &h_{BR}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - [2\,Bsinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)] \end{aligned}}$$

Anche questo filtro è fisicamente non realizzabile:

1. Ha una risposta all'impulso $h_{BP}(t)$ che non è causale
2. Vi sono due rect e quindi delle salite istantanee

Esercizio: filtraggio di un segnale periodico

Sia dato il segnale periodico $x(t)$ di periodo T_0 riportato in figura.



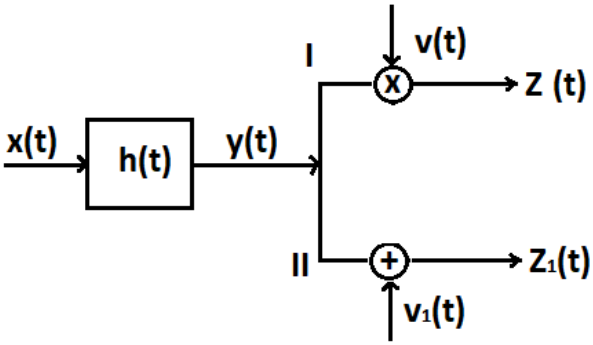
Tale segnale viene inviato in ingresso ad un filtro con risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{3t}{T_0}\right)$$

Accorgimento: è sempre bene scrivere un seno cardinale nella "forma base" per come l'abbiamo conosciuto, ovvero come sinc(ft), in questo modo, scrivendo solamente "t" al numeratore possiamo facilmente accorgerci che la frequenza di questo segnale è $f = T_0/3$:

$$h(t) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{3t}{T_0}\right) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{t}{T_0/3}\right) \rightarrow f = T_0/3$$

Detto $y(t)$ il segnale ottenuto in uscita, esso viene mandato in ingresso ai due rami I e II in figura.



Sul ramo I il segnale viene convoluto con:

$$v(t) = \frac{T_0}{2} sinc\left(\frac{2t}{T_0}\right) = \frac{T_0}{2} sinc\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$$

generando $z(t)$;

Sul II ramo il segnale viene sommato al segnale:

$$v_1(t) = 4\delta(t)$$

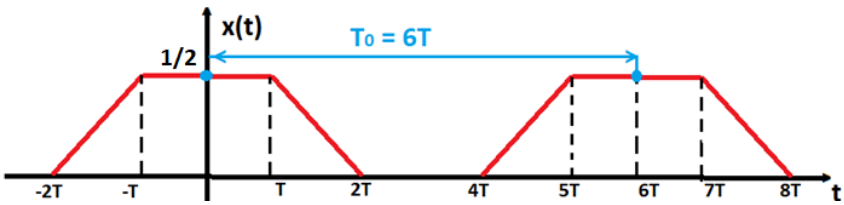
generando il segnale $z_1(t)$

Determinare:

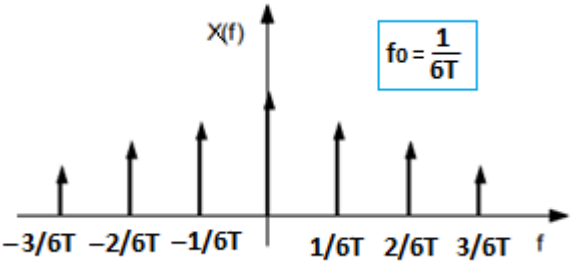
1. Lo spettro di ampiezza del segnale $x(t)$
2. L'energia, la potenza ed il valor medio di $x(t)$
3. L'espressione analitica di $y(t)$, il suo spettro delle ampiezze e la sua potenza
4. L'espressione analitica di $z(t)$ ed il suo spettro delle ampiezze
5. L'espressione analitica di $z_1(t)$ ed il suo spettro delle ampiezze.

Per prima cosa troviamo il periodo: fissiamo il punto nell'origine e verifichiamo che questo si ripete dopo un tempo pari a $6T$, questo significa che il periodo del segnale è:

$$T_0 = 6T$$



Conoscendo il periodo possiamo già affermare quale sia la portante del segnale, sapendo che si tratta di un segnale periodico, possiamo stimare ove si situano tutti gli impulsi che formano il suo spettro: per i multipli interi della frequenza portante f_0



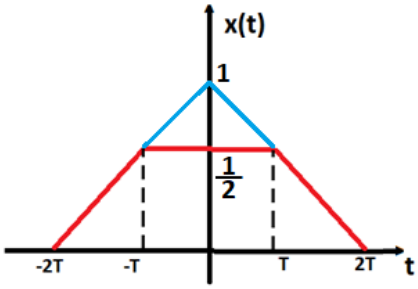
1. **Determinare lo spettro di ampiezza del segnale $x(t)$**

Trattandosi di un segnale periodico dovremo applicare la formula di Poisson per ricavare il relativo spettro, quindi dovremo ricavare i vari coefficienti C_n della formula di Poisson, correlati ai valori dello spettro della troncatura del segnale: $X_T(f)$ calcolato al variare di "n", indice della formula di Poisson:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta\left(f - \frac{n}{6T}\right) \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\, X(nf_0) = \frac{1}{T_0}\, X\left(\frac{n}{6T}\right)$$

Avendo ricavato il periodo: $T_0 = 6T$, non ci resta che ricavare analiticamente il segnale troncato (in funzione di soli rettangoli, triangoli o comunque di segnali cui è nota la trasformata).

Il segnale troncato è quello segnato, avente la forma di un trapezio isoscele, questo lo possiamo ricavare analiticamente in funzione di soli triangoli e rettangoli se lo vedessimo come un triangolo cui viene rimossa la parte superiore, ovvero un triangolo più piccolo:



$$x_T(t) = \Delta\left(\frac{t}{2T}\right) - \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{t}{T}\right)$$

A questo punto possiamo ottenere lo spettro del segnale troncato, ricordando che la trasformata di un triangolo è un seno cardinale al quadrato:

$$x_T(t) = \Delta\left(\frac{t}{2T}\right) - \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X_T(f) = 2T\, sinc^2(2fT) - \frac{1}{2}\, T\, sinc^2(fT)$$

Ricaviamo quindi la forma analitica di C_n e proseguiamo con il calcolo di (almeno) i primi due coefficienti della formula di Poisson: C_0 e C_1

Si ricordi, tra l'altro, che il valore medio di un segnale periodico coincide con il coefficiente C_0:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\, X\left(\frac{n}{6T}\right) \rightarrow C_n = \frac{1}{6T}\left[2Tsinc^2\left(\frac{2n}{6T}T\right) - \frac{1}{2}Tsinc^2\left(\frac{n}{6T}T\right)\right] = \frac{1}{6T}\left[2Tsinc^2\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{2}Tsinc^2\left(\frac{n}{6}\right)\right]$$

$$C_n = \frac{1}{6}\left[2sinc^2\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{2}sinc^2\left(\frac{n}{6}\right)\right]$$

Calcoliamo C_0:

$$C_0 = \frac{1}{6}\left[2sinc^2(0) - \frac{1}{2}sinc^2(0)\right] = \frac{1}{6}\left[2(sinc(0)sinc(0)) - \frac{1}{2}(sinc(0)sinc(0))\right] = \frac{1}{6}\left[2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

Quest'ultimo consiste nel valor medio del segnale: $C_0 = < x(t) >$

Calcoliamo C_1 (senza però aver la certezza che questo risultato sia corretto):

$$C_1 = \frac{1}{6}\left[2sinc^2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}sinc^2\left(\frac{n}{6}\right)\right] = \frac{1}{6}\left[2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}}\right]^2\right] = \frac{1}{6}\left[2\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}\right]^2\right]$$

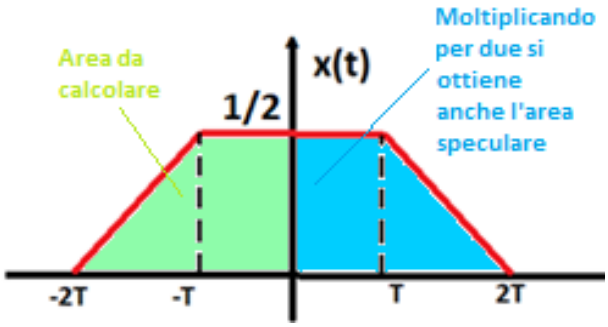
$$C_1 = \frac{1}{6}\left[2\left[\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{6}{2\pi}\right]^2\right] = \frac{1}{6}\left[\left[\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{6}{4\pi}\right]^2\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{27}{\pi^2} - \left[\frac{3}{4\pi}\right]^2\right] = [\ldots] = \frac{3}{2\pi^2}$$

2. Determinare l'energia, la potenza ed il valor medio del segnale $x(t)$

Trattandosi di un segnale periodico, possiamo immediatamente affermare che la sua energia è infinita, in quanto ogni segnale periodico è un segnale di potenza.

Per calcolare la potenza del segnale in questione dobbiamo rapportare il periodo $T_0 = 6T$ con l'energia calcolata nel periodo stesso: E_{6T}; per farlo, dato che dobbiamo calcolare l'integrale del quadrato del segnale in tale periodo, è necessario ottenere la forma analitica del segnale
(NB! Non si tratta della forma espressa come composizione di triangoli/rettangoli/etc… ma della forma di $x(t)$ in funzione di t):

Il segnale è formato sostanzialmente da una retta crescente, un gradino costante e, infine una retta che decresce simmetrica alla prima.
Siccome dobbiamo considerare l'integrale della funzione, ovvero l'area sottesa dal suo grafico, possiamo considerare l'area sottesa dalla prima retta e dal gradino costante fino a $t = 0$, dopo di che ci basterà moltiplicare per due dato che il resto della funzione è speculare a quella appena analizzata.



$$E_T = 2\left[\int_{-T}^{-2T} |r(t)|^2\, dt + \int_{-T}^{0} \left|\frac{1}{2}\right|^2 dt\right]$$

Otteniamo la retta $r(t)$ imponendo il passaggio per due punti: $P(-2T, 0)$ e $P\left(-T, \frac{1}{2}\right)$

$$r(t): \quad \frac{x-(-2T)}{-T-(-2T)} = \frac{y-0}{1/2-0} \quad \rightarrow \quad \frac{x+2T}{T} = 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{x+2T}{2T} \quad \rightarrow \quad r(t) = 1 + \frac{t}{2T}$$

Quindi proseguiamo con il calcolo dell'energia nel periodo e quindi la potenza:

$$E_T = 2\left[\int_{-T}^{-2T} |r(t)|^2\, dt + \int_{-T}^{0} \left|\frac{1}{2}\right|^2 dt\right] = 2\left[\int_{-T}^{-2T} \left|1 + \frac{t}{2T}\right|^2 dt + \int_{-T}^{0} \left|\frac{1}{2}\right|^2 dt\right]$$

$$E_T = 2\left[\int_{-2T}^{-T} 1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{T^2}\, dt + + \frac{1}{4}\int_{-T}^{0} dt\right] = 2\left[\int_{-2T}^{-T} dt + \frac{1}{T}\int_{-2T}^{-T} t\, dt + \frac{1}{T^2}\int_{-2T}^{-T} t^2\, dt + \frac{1}{4}\int_{-T}^{0} dt\right]$$

$$E_T = 2\left[[t]_{-2T}^{-T} + \frac{1}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2T}^{-T} \frac{1}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2T}^{-T} + \frac{1}{4}[t]_{-T}^{0}\right]$$

$$E_T = 2\left\{[-T-(-2T)] + \frac{1}{T}\frac{[-T-(-2T)]^2}{2} + \frac{1}{T^2}\frac{[-T-(-2T)]^3}{3} + \frac{1}{4}[0-(-T)]\right\}$$

$$E_T = 2\left\{[T] + \frac{1}{T}\frac{[T]^2}{2} + \frac{1}{T^2}\frac{[T]^3}{3} + \frac{1}{4}[T]\right\} = 2\left(T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \frac{T}{4}\right) = \frac{25}{6}T$$

$$P_T = \frac{E_T}{6T}$$

[La potenza dovrebbe in realtà risultare 1/9]

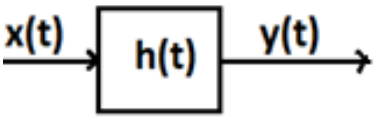
Il valor medio del segnale lo abbiamo calcolato nel punto (1), si tratta del coefficiente C_0:

$$< x(t) > = C_0 = \frac{1}{6}\left[2(sinc(0)sinc(0)) - \frac{1}{2}(sinc(0)sinc(0))\right] = \frac{1}{6}\left[2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

3. Determinare l'espressione analitica, lo spettro delle ampiezze e la potenza del segnale $y(t)$

$y(t)$ si ottiene a seguito di un filtraggio; possiamo operare nel tempo o nella frequenza, ricordando però che il filtraggio in frequenza viene affrontato mediante prodotto tra trasformate di Fourier mentre nel tempo è necessario utilizzare l'integrale di convoluzione, preferiamo lavorare nel dominio trasformato e antitrasformare solo dopo aver ottenuto $Y(f)$. Avremo quindi che:

$$y(t) = F^{-1}[Y(f)]$$
$$Y(f) = X(f)H(f)$$



Ricaviamo le trasformate di Fourier dell'ingresso $x(t)$ e della risposta all'impulso (ovvero la funzione di trasferimento $H(f)$):

- $X(f)$ è nota dal punto (1) e possiamo riportarla:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta\left(f - \frac{n}{6T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{6}\left[2sinc^2\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{2}sinc^2\left(\frac{n}{6}\right)\right]\right] \delta\left(f - \frac{n}{6T}\right)$$

- $H(f)$ la calcoliamo conoscendo la risposta all'impulso del sistema:

$$H(f) = F[h(t)] = F\left[\frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{t}{\frac{T_0}{3}}\right)\right]$$

Dal teorema della dualità possiamo associare la trasformata di un seno cardinale ad un rect:

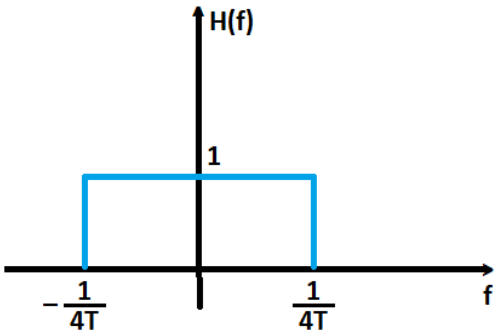
$$T.Dualità:\ \ X(t) \to x(-f) \qquad Tsinc(t\,T) = rect\left(\frac{-f}{T}\right) = rect\left(\frac{f}{T}\right) \to sinc(tT) \to \frac{1}{T} rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

Nel nostro caso avremo $T = 3/T_0$ poiché $f = 1/T = T_0/3$ per cui otterremo:

$$h(t) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{3t}{T_0}\right) \ \to\ H(f) = \frac{3}{T_0}\left[\frac{1}{3/T_0} rect\left(\frac{f}{3/T_0}\right)\right] = \frac{3}{T_0}\left[\frac{T_0}{3} rect\left(\frac{f}{3/T_0}\right)\right] = rect\left(\frac{f}{3/T_0}\right)$$

A questo punto vediamo di capire come opera il filtro in questione, per farlo disegniamo la risposta in frequenza del filtro $H(f)$ appena trovata

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{3/T_0}\right)$$



Avendo già ottenuto il valore di T_0 possiamo sostituirlo nell'espressione del rect:

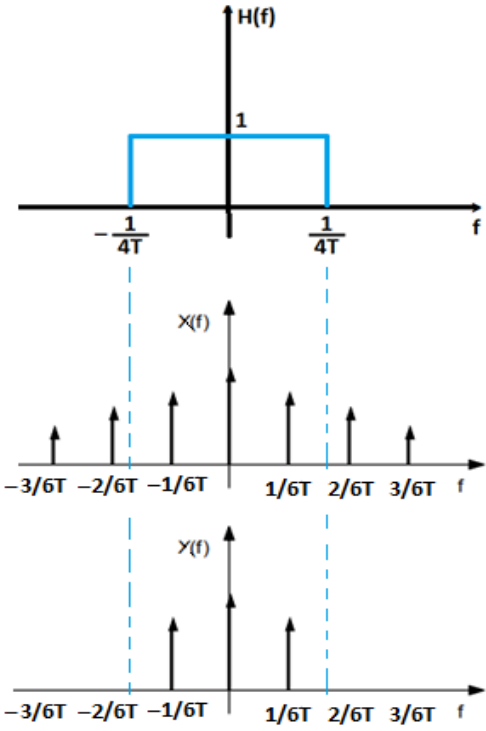
$$T_0 = 6T \quad \to \quad H(f) = rect\left(\frac{f}{3/T_0}\right) = rect\left(\frac{f}{3/6T}\right) = rect\left(\frac{f}{1/2T}\right)$$

Si tratta di un rect nel dominio della frequenza di ampiezza unitaria, centrato in 0 e di base $1/2T$, questo significa che l'intervallo in cui esso vale 1 è centrato in zero e vale:

$$\left[\frac{1}{2} * \frac{1}{2T}; \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2T}\right)\right] = \left[\frac{1}{4T}; -\frac{1}{4T}\right]$$

Dal grafico della funzione di trasferimento possiamo capire che si tratta di un filtro passa basso

Sappiamo che l'uscita del filtro $Y(f)$ in frequenza è data dal rapporto tra l'ingresso e la funzione di trasferimento; dato che dobbiamo eseguire un prodotto tra lo spettro del segnale periodico $X(f)$ e la risposta in frequenza di un filtro passa basso $H(f)$, il risultato che ci aspettiamo sarà la porzione dello spettro che si trova nell'intervallo $\left[\frac{1}{4T};\ -\frac{1}{4T}\right]$ poiché altrove il rect vale 0.



Anche se non conosciamo con esattezza tutte le ampiezze C_n dello spettro del segnale periodico, disegniamo gli impulsi che compongono quest'ultimo al fine di capire cosa accade nel filtraggio.

Dal filtraggio passano solo gli impulsi C_0 e $\pm C_1$, entrambi invariati poiché il filtro ha ampiezza unitaria e pertanto non vengono alterati; tutti gli altri impulsi a frequenza più alta vengono eliminati dal filtro passa basso.

Dal grafico allora possiamo intuire che il segnale $Y(f)$ ha uno spettro a righe (quindi $y(t)$ sarà periodico) formato da un impulso nell'origine che coincide con C_0, l'impulso a frequenza 0 di $X(f)$:

$$Y_0 = < y(t) > = C_0 = \frac{1}{4}$$

Gli altri due impulsi formano lo spettro di un coseno a frequenza $1/6T$:

$$Y(f) = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{C_1\,\delta(f - T/6) + C_1\,\delta(f + T/6)}{2} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{4} + 2C_1 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{6T}\right)t\right]$$

Accorgimento: l'ampiezza del coseno a partire dal suo spettro

NB! L'ampiezza del coseno è pari a $2C_1$ perché **l'ampiezza del coseno è pari al doppio dell'ampiezza dei corrispettivi impulsi del suo spettro:** nella trasformata del coseno la sua ampiezza è unitaria e ad essa corrisponde una trasformata cui ampiezza è ½, questo significa che l'ampiezza del coseno vale due volte quella degli impulsi che formano il suo spettro:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad Y(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

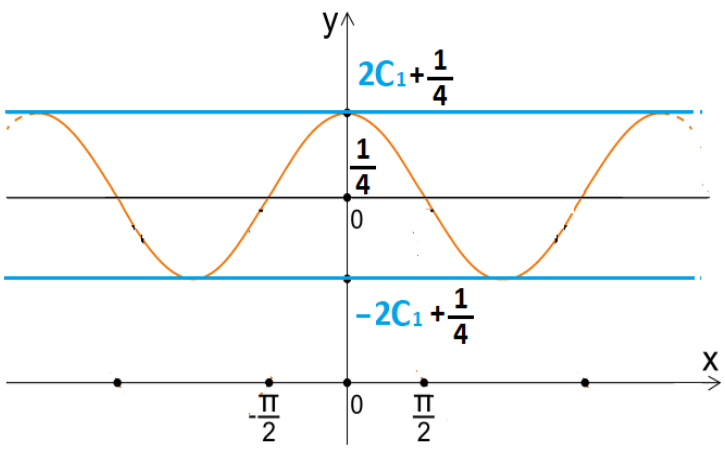
Poiché nel nostro caso abbiamo come ampiezza $C_1/2$, deve accadere che nel tempo l'ampiezza del segnale sia pari a $2C_1$:

$$Y(f) = \frac{C_1}{2}\ \frac{\delta(f - T/6) + \delta(f + T/6)}{2} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2C_1 \cos(2\pi f_0 t)$$

Si noti che il segnale è reale, per cui accade che $C_1 = C_{-1}$, normalmente essi sono uguali in modulo ma dato che il segnale è reale avremo che l'uguaglianza è rispettata anche senza il valore assoluto.

Per completezza, disegniamo il segnale $y(t)$: si tratta di un coseno rialzato di 1/4 (quindi avente come valor medio 1/4, come si evince già dallo spettro)

$$y(t) = \frac{1}{4} + 2C_1 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{6T}\right)t\right]$$



Essendo un segnale periodico, questo avrà un'energia infinita (si tratta, infatti, di un segnale di potenza).
La potenza nel periodo del coseno la possiamo calcolarla velocemente dalla formula:

$$P_{cos} = \frac{a^2}{2} \quad Con\ a = ampiezza\ del\ coseno$$

(Questo risultato si otterrebbe comunque se si eseguisse il rapporto tra il periodo e l'energia del coseno calcolata nel periodo)
La potenza di un segnale costante, invece, è pari al quadrato della sua ampiezza; a fronte di ciò ricaviamo la potenza del segnale come:

$$P_y = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{(2C_1)^2}{2} = \frac{1}{16} + \frac{4C_1^2}{2} = \frac{1}{16} + (2C_1^2) = \frac{1}{16} + \left[2\left(\frac{3}{2\pi^2}\right)\right] = \frac{1}{16} + \frac{3}{\pi^2}$$

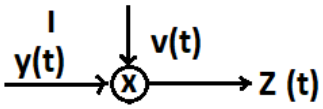
Da questa operazione possiamo generalizzare che la potenza del segnale periodico è pari alla somma del quadrato delle singole ampiezze e questo è pari a:

$$P_y = \sum_n |C_n|^2 = C_0^2 + |C_1|^2 + |C_{-1}|^2 = C_0^2 + 2|C_1|$$

Questo perché, come vedremo, siccome lo spettro di un segnale reale è simmetrico rispetto all'asse verticale, andremo a sommare sempre, in valore assoluto, una componente in nf_0 ed una simmetrica in $-nf_0$ ottenendo così, a meno del valore in $f = 0$, il doppio della potenza del quadrato dell'armonica.
Questo significa che ogni armonica trasporta una potenza pari all'ampiezza del suo impulso al quadrato e che la potenza totale del segnale sarà la somma di tali quadrati.

4. Determinare l'espressione analitica e lo spettro delle ampiezze del segnale $z(t)$

Il segnale $z(t)$ si ottiene dal ramo della convoluzione tra $y(t)$ e $v(t)$; andremo a calcolare questo segnale in frequenza perché è complesso andare a calcolare l'integrale di convoluzione:



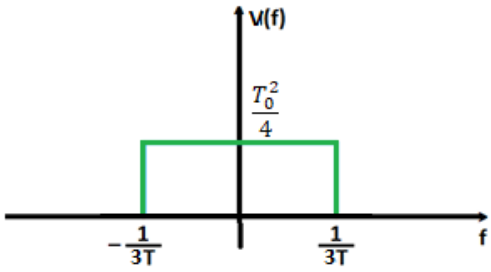
$$z(t) = y(t) \otimes v(t) \quad \rightarrow \quad Z(f) = Y(f)V(f)$$

Disponiamo già della trasformata di $y(t)$, calcolata nel punto (3):

$$Y(f) = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{C_1\,\delta(f - T/6) + C_1\,\delta(f + T/6)}{2} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{4} + 2C_1 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{6T}\right)t\right]$$

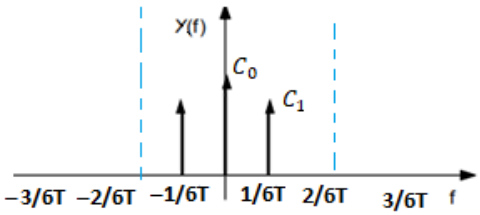
Non ci resta allora che calcolare $V(f)$ conoscendo l'andamento nel tempo del corrispettivo $v(t)$:

$$v(t) = \frac{T_0}{2} sinc\left(\frac{2t}{T_0}\right) \quad \rightarrow \quad V(f) = \frac{T_0}{2}\left[\frac{1}{\frac{2}{T_0}} rect\left(\frac{f}{\frac{2}{T_0}}\right)\right] = \frac{T_0^2}{4} rect\left(\frac{f}{2/T_0}\right)$$



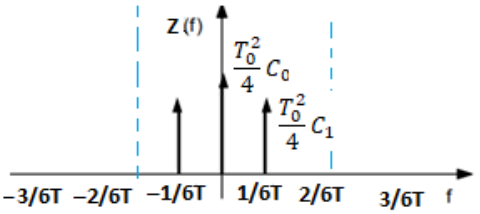
A questo punto facciamo il prodotto agendo graficamente (stiamo praticamente eseguendo un filtraggio):

$$V(f) = \frac{T_0^2}{4} rect\left(\frac{f}{2/T_0}\right) = \frac{T_0^2}{4} rect\left(\frac{f}{2/6T}\right) = \frac{T_0^2}{4} rect\left(\frac{f}{1/3T}\right)$$

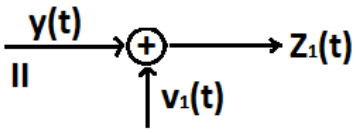


Dal filtraggio risulta praticamente che $Z(f)$ fa passare interamente il segnale $Y(f)$ comportandosi come un filtro passa basso ma, siccome la sua ampiezza non è unitaria, bensì pari a $\frac{T_0^2}{4}$ esso amplifica (o attenua, se tale rapporto è minore di 1) tutte le ampiezze del segnale $Y(f_0)$ di tale quantità, diremo allora che:

$$Z(f) = \left(\frac{T_0}{2}\right)^2 Y(f)$$



5. Determinare l'espressione analitica e lo spettro delle ampiezze del segnale $z_1(t)$



Il segnale $z_1(t)$ si ottiene dal ramo di somma tra $y(t)$ e $v_1(t)$;

il segnale $v_1(t)$ vale:

$$v_1(t) = 4\delta(t)$$

Nel tempo questo segnale è pari a:

$$z_1(t) = y(t) + v_1(t) = \frac{1}{4} + 2C_1 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{6T}\right)t\right] + 4\delta(t)$$

Disponendo anche della trasformata di $Y(f)$ possiamo anche scrivere il corrispettivo segnale nel dominio della frequenza: $Z_1(f)$, ci basti ricordare che la trasformata di un impulso di Dirac è un segnale costante, pertanto la trasformata $V_1(f)$ vale:

$$v_1(t) = 4\delta(t) \quad \rightarrow \quad V_1(f) = 4$$

Quindi ricaviamo la trasformata di $z_1(t)$:

$$z_1(t) = \frac{1}{4} + 2C_1 \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{6T}\right)t\right] + 4\delta(t) \quad \rightarrow \quad Z_1(f) = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{C_1\,\delta(f - T/6) + C_1\,\delta(f + T/6)}{2} + 4$$

I filtri reali

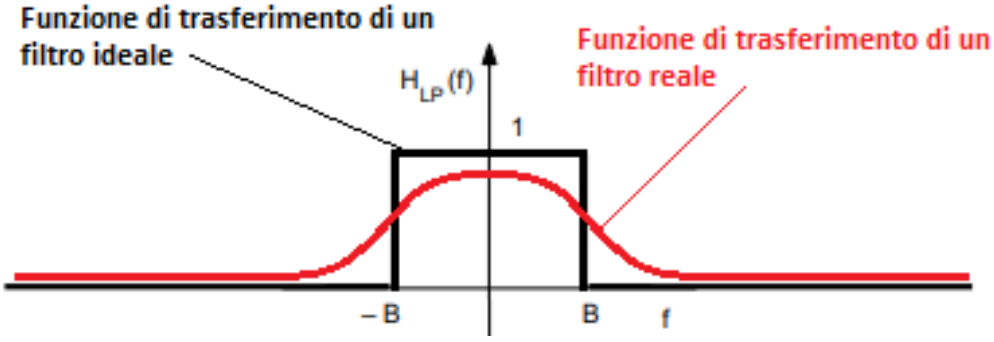
Fino ad ora abbiamo trattato dei filtri che sono puramente ideali e non fisicamente realizzabili per due principali motivi:

1. **La non causalità della risposta all'impulso $h(t)$ del sistema**: essendo quest'ultima correlata a delle funzioni seno cardinale che si trovano nel tempo che prevedono una parte del segnale anche per $t < 0$
2. **Il fronte istantaneo della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema**: è difficile la realizzazione di una funzione di trasferimento che abbia un fronte di salita istantaneo come il rect, infatti un segnale rect non è fisicamente realizzabile, esistono dei segnali che lo approssimano ed una sua approssimazione molto accurata è piuttosto costosa.

I filtri reali quindi si discostano da quest'ultimi e rispecchiano quello che viene chiamato **principio di Paley-Weiner:**

> ***"Un filtro causale può avere una risposta in frequenza che si annulla solo per un insieme di frequenze di misura nulla, cioè soltanto per un numero finito (o infinito numerabile) di frequenze"***

In altre parole, la reale risposta in frequenza di un filtro approssima un rect "smussandone" gli angoli, in modo che la salita dei lati del rect non sia istantanea (mediante, ad esempio, un segnale a coseno rialzato); inoltre tale filtro non si annullerà in prossimità delle frequenze da oscurare ma manterrà un valore costante molto piccolo, senza mai toccare l'asse (quindi senza mai annullarsi davvero)

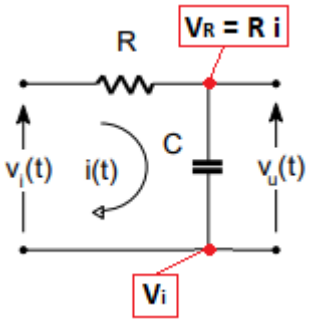


Come si può notare nel grafico, nel caso di filtro ideale la risposta si mantiene nulla praticamente ovunque tranne nella "base" del filtro, in cui assume valore unitario (la banda va da 0 a B perché considera solo le frequenze positive, per questo motivo abbiamo parlato di "base" del rect e non di banda), mentre il filtro reale, oltre a non assumere una forma perfettamente rettangolare, si mantiene al di sopra del valore nullo, pur assumendo un valore molto piccolo.

Il filtro passa basso reale

Un filtro passa basso è piuttosto semplice da realizzare: si tratta di un banale circuito RC cui in ingresso è posto il segnale di tensione $x(t) = v_i(t)$ ed in uscita vi è la tensione $y(t) = v_o(t)$.

Studiamo l'equazione del circuito:



La tensione d'uscita dipende da quello che si misura ai suoi capi, ai morsetti d'uscita troviamo la caduta di tensione nel resistore da un capo e la tensione d'ingresso dall'altro, per cui la differenza di potenziale in uscita sarà:

$$v_o(t) = v_i - v_R = v_i - (r * i)$$

Si noti che, essendo in parallelo, la tensione d'uscita e quella ai capi del condensatore sono uguali, otteniamo quindi:

$$v_o(t) = v_c(t) \triangleq \frac{q(t)}{C}$$

Derivando la tensione del capacitore riusciamo a ottenere la corrente:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \quad \rightarrow \quad i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Sostituiamo la quantità ottenuta al posto della corrente nella formula della corrente d'uscita, in questo modo avremo un'equazione che dipende solo dalle tensioni, nello specifico, ricordando che la tensione ai capi del condensatore coincide con quella d'uscita, con questa sostituzione otteniamo una relazione tra ingresso (v_i) e uscita (v_o):

$$v_o(t) = v_i - (R * i) \quad \rightarrow \quad v_o(t) = v_i - R\left[C\frac{dv_c(t)}{dt}\right] = v_i - RC\frac{dv_c(t)}{dt} \xrightarrow{v_o = v_c} v_o(t) = v_i - RC\frac{dv_o(t)}{dt}$$

→ *Perché scrivere la relazione ingresso/uscita del circuito RC?*

L'idea è quella di trovare la funzione di trasferimento, che si ricava come rapporto tra la trasformata in ingresso e quella in uscita:

$$H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{V_O(f)}{V_I(f)}$$

A questo punto allora, appunto perché vogliamo ricavare la funzione di trasferimento di questo circuito, ricaviamo la corrispettiva trasformata di Fourier dell'uscita; ricordando che la derivazione si trasforma, nel dominio della frequenza, in una moltiplicazione per $j2\pi f$, otteniamo tale trasformata:

$$v_o(t) = v_i - RC\frac{dv_o(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad V_O(f) = V_I(f) - RC[j2\pi f V_O(f)]$$

Ove V_I è la corrispondente trasformata del segnale d'ingresso V_I; raccogliendo a fattor comune possiamo esplicitare quest'ultima trasformata, ottenendo così:

$$V_O(f) = V_I(f) - RC[j2\pi f V_O(f)] \quad \rightarrow \quad V_I = [1 + (j2\pi f)RC]V_O$$

A questo punto possiamo facilmente ricavare la funzione di trasferimento a partire dalla sua definizione:

$$H(f) = \frac{V_O(f)}{V_I(f)} = \frac{V_O}{[1 + (j2\pi f)RC]V_O} = \frac{1}{[1 + (j2\pi f)RC]}$$

Questa è la funzione di trasferimento del filtro reale, ovvero del circuito RC appena analizzato.

Studiamo il modulo e la fase della funzione di trasferimento $H(f)$:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{Re\{H(f)\}^2 + Im\{H(f)\}^2}} \quad \rightarrow \quad |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [(j2\pi f)RC]^2}}$$

Per studiare la fase conviene moltiplica e dividere per $(1 - (j2\pi f)RC)$ e poi distinguere parte reale e parte immaginaria:

$$H(f) = \frac{1(1 - (j2\pi f)RC)}{[1 + (j2\pi f)RC](1 - (j2\pi f)RC)} = \frac{(1 - (j2\pi f)RC)}{1 + (2\pi f RC)^2}$$

$$Re\{H(f)\} = \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2} \qquad Im\{H(f)\} = \frac{-(2\pi f RC)}{1 + (2\pi f RC)^2}$$

La fase allora la otteniamo dalla sua definizione:

$$\angle H(f) = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = arctg\left[\frac{\left(\frac{-(2\pi f RC)}{1 + (2\pi f RC)^2}\right)}{\left(\frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}\right)}\right] = -arctg(2\pi f RC)$$

Per comodità definiamo la **frequenza di taglio f_T** come segue:

$$\boxed{f_T = \frac{1}{2\pi RC}}$$

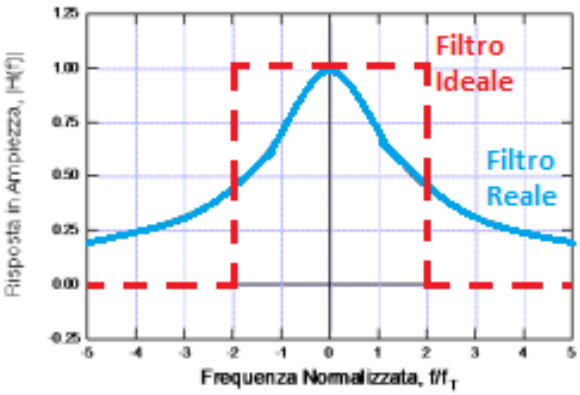
A questo punto allora possiamo riscrivere le definizioni sostituendo la frequenza di taglio:

$$H(f) = \frac{1}{[1 + (j2\pi f)RC]} = \frac{1}{1 + j(f/f_T)}$$

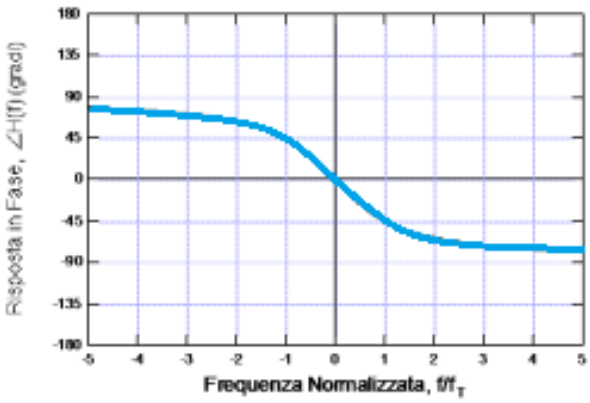
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [(j2\pi f)RC]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}} \qquad \angle X(f) = -arctg(2\pi f RC) = -arctg\left(\frac{f}{f_T}\right)$$

Avendo ottenuto modulo e fase grafichiamo i relativi spettri di ampiezza e fase della funzione di trasferimento e verifichiamo le differenze che sussistono tra il filtro passa basso reale e quello immaginario:

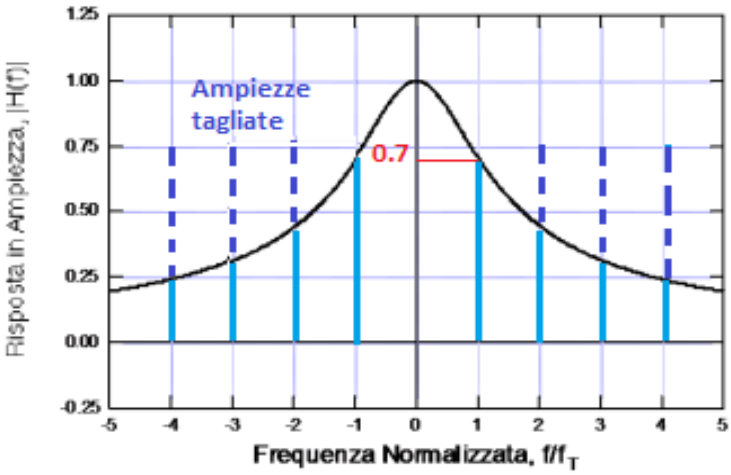
$$\boxed{|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}}}$$



$$\boxed{\angle H(f) = -\text{arctg}\,\frac{f}{f_T}}$$



Come possiamo notare, questo filtro è “peggiore” di quello ideale, dato che quest’ultimo è il caso migliore in cui potremmo ritrovarci; esso infatti filtra in modo peggiore del caso ideale: filtra meglio le frequenze che si trovano intorno a 0 e peggio quelle che si trovano più lontane da esso, tagliandole.



La frequenza di taglio da un’importante nozione: nella rappresentazione di questa risposta in frequenza del filtro passa basso reale l’asse verticale è la frequenza normalizzata data dal rapporto f/f_T questo significa che il grafico ha ampiezza massima quando $f/f_T = 0$ ovvero quando $f = 0$;

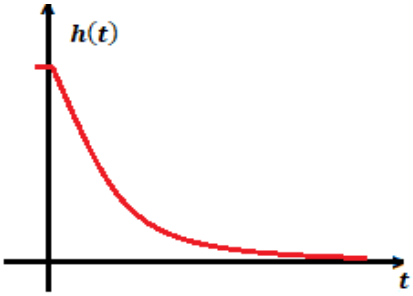
nel caso in cui $f/f_T = 1$ il filtro raggiunge un’ampiezza pari a 0.7:

$$\frac{f}{f_T} = 2\pi f RC \quad \rightarrow \quad \frac{f}{f_T} = 1 \rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$$

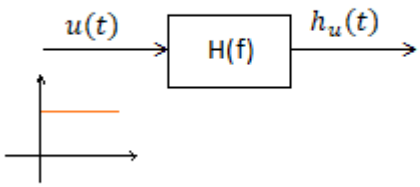
Questo valore è un valore molto importante poiché quando il modulo scende al di sotto del valore $|H(f)| = 0.7$ le armoniche subiscono un taglio che ne modifica esageratamente il valore, si preferisce infatti filtrare sempre a frequenze per cui $|H(f)| \leq 0.7$.

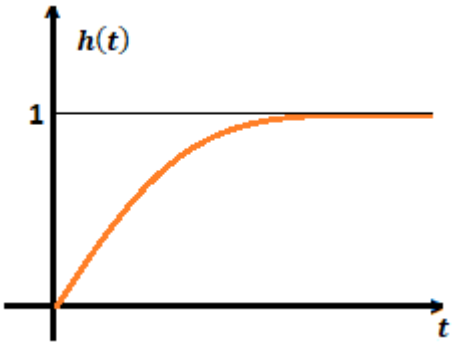
La frequenza di taglio f_T è quella frequenza al di là del quale il filtraggio taglia le armoniche del segnale e ne compromette i valori; per cui il filtro passa basso reale lavora bene a frequenze che si trovano al di sotto della frequenza di taglio (ove la sua funzione di trasferimento assume valore 0.7), al di là di questa frequenza il filtraggio risulta scadente.

Se ricavassimo l’antitrasformata della funzione di trasferimento, ovvero la risposta impulsiva del filtro passa basso reale, ritroveremmo una funzione che ha un andamento simile a quello rappresentato.
Possiamo notare che prima dell’istante $t = 0$ la risposta è nulla, questo significa che possiamo osservare un certo andamento della risposta all’impulso del sistema solo dall’istante di osservazione ($t = 0$) in poi, in altre parole: questo significa che il sistema è **causale**, quindi fisicamente realizzabile.



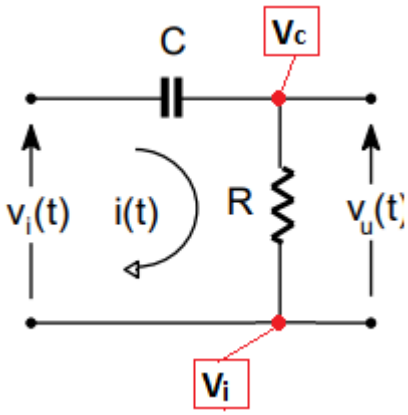
Si noti che se al posto dell’impulso mettessimo in ingresso un gradino $u(t)$, studiando la risposta al gradino $h_u(t)$ troveremmo praticamente il suo grafico coincide con il grafico della carica di un condensatore





Il filtro passa alto reale

Abbiamo introdotto il filtro passa alto ideale come "duale" del filtro passa basso ideale; effettivamente anche per i filtri reali questo concetto è rispettato: possiamo vedere una certa forma di "dualità" tra il circuito di un filtro passa basso reale e quello di un filtro passa alto reale;



se nel primo caso abbiamo visto un circuito RC, per la realizzazione di un filtro passa alto reale adoperiamo un **circuito CR**, ovvero **lo stesso circuito RC ove però la tensione in uscita non viene misurata ai capi del condensatore bensì ai capi della resistenza**.

A questo punto analizziamo il comportamento di cui circuito CR e vediamo di esplicitarne le equazioni.

La tensione d'uscita la di può misurare come differenza delle tensioni ai suoi capi, in questo caso avremo la differenza tra la tensione d'ingresso e quella ai capi del condensatore:

$$v_o(t) = v_i - v_C = v_i - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\alpha)d\alpha$$

Deriviamo la tensione in uscita:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t)$$

Si noti che la corrente $i(t)$ si può ricavare con la formula inversa della legge di Ohm, rapportando la tensione ai capi del resistore con la resistenza di quest'ultimo:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$

E siccome la tensione ai capi del resistore equivale alla tensione in uscita in un circuito CR, avremo:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{v_o(t)}{R}$$

A questo punto sfruttiamo questa relazione per riscrivere l'equazione della tensione d'uscita in funzione delle sole tensioni di ingresso e uscita, in modo da ricavare la funzione di trasferimento di questo nuovo filtro:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{C}\frac{v_o(t)}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{CR}v_o(t)$$

A questo punto passiamo al dominio di Fourier, ricordando che la derivazione corrisponde alla moltiplicazione per $j2\pi f$:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{CR}v_o(t) \quad \rightarrow \quad (j2\pi f)V_0(f) = (j2\pi f)V_I(f) - \frac{1}{CR}V_0(f)$$

Raggruppiamo portando da una parte V_0 e V_I dall'altra e mettendo a fattor comune:

$$(j2\pi f)V_0(f) + \frac{1}{CR}V_0(f) = (j2\pi f)V_I(f) \quad \rightarrow \quad \frac{j2\pi fCR + 1}{CR}V_0(f) = (j2\pi f)V_I(f)$$

$$V_O(f) = \frac{CR}{j2\pi fCR + 1}(j2\pi f)V_I(f) \rightarrow \quad V_O(f) = \frac{j2\pi fCR}{j2\pi fCR + 1}V_I(f)$$

In questo modo otteniamo il valore della risposta in frequenza del sistema applicandone la definizione:

$$H(f) = \frac{V_O(f)}{V_I(f)} = \frac{j2\pi fCR}{j2\pi fCR + 1}$$

Ricordando che la **frequenza di taglio** è pari a $f_T = 1/2\pi RC$ possiamo scrivere la $H(f)$ come:

$$H(f) = \frac{j2\pi fCR}{j2\pi fCR + 1} = \frac{(jf/f_T)}{1 + (jf/f_T)} = 1 - \frac{1}{1 + (jf/f_T)}$$

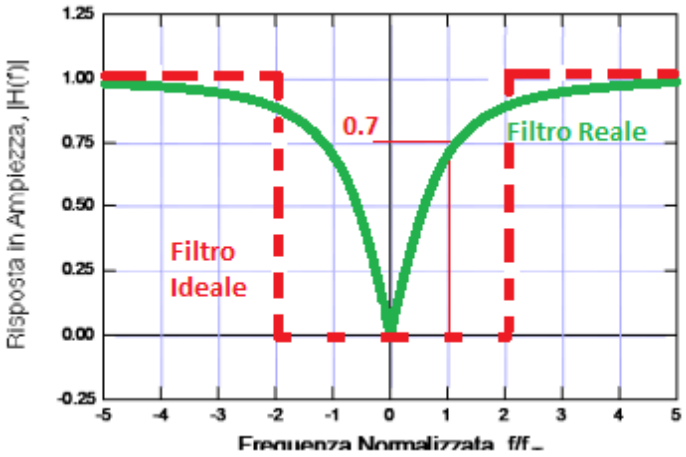
Dalla formula possiamo osservare che viene esplicitata la dualità di cui abbiamo parlato:

$$Filtro\ passa\ basso:\ H_{LP}(f) = \frac{1}{1 + jf/f_T} \qquad Filtro\ passa\ alto:\ H_{HP}(f) = 1 - \frac{1}{1 + jf/f_T}$$

Ricaviamo modulo e fase:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{Re\{H(f)\}^2 + Im\{H(f)\}^2}} = \frac{|f/f_T|}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}}$$

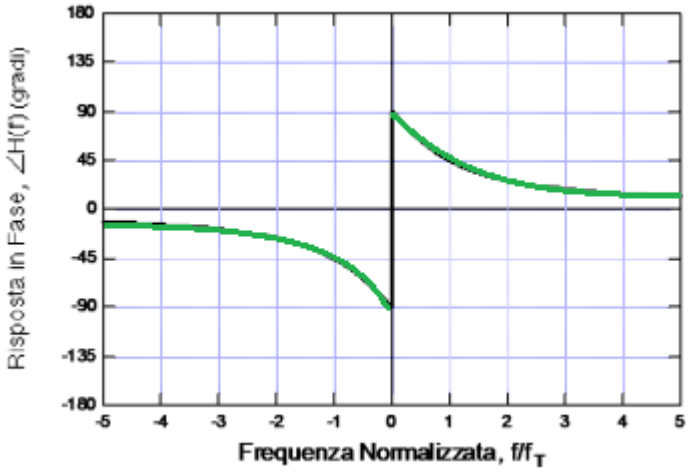
Questo modulo vale 0 solo nel punto $f = 0$, ed effettivamente è quello che intendiamo ottenere: dallo spettro delle ampiezze, infatti, possiamo osservare che intorno alla frequenza 0 il filtro non fa passare nulla, comincia a far passare il segnale (attenuandolo di poco) dalla frequenza di taglio f_T in poi (dove il modulo del segnale è maggiore o uguale a 0.7)



La fase del filtro è pari a:

$$\angle H(f) = arctg\left(\frac{f}{f_T}\right)$$

Ed il suo grafico è quello rappresentato.



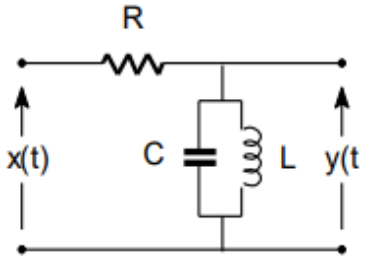
Ancora una volta possiamo osservare la dualità tra i due filtri:

$$Filtro\ passa\ basso:\ \angle H_{LP}(f) = -arctg\left(\frac{f}{f_T}\right)$$

$$Filtro\ passa\ alto:\ \angle X_{HP}(f) = arctg\left(\frac{f}{f_T}\right)$$

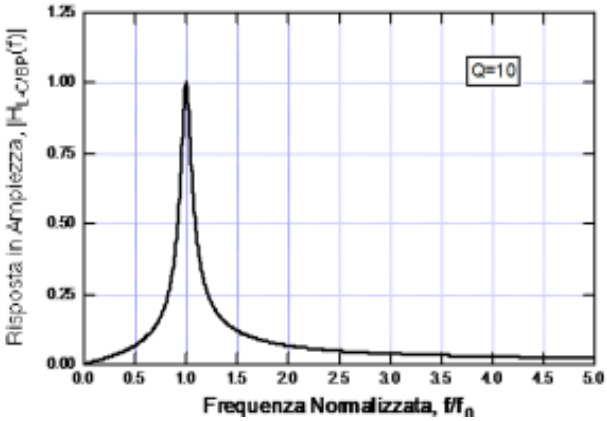
Il filtro passa banda reale ed il filtro elimina banda reale

Per la realizzazione dei filtri passa banda ed elimina banda reali si adoperano dei circuiti più complessi di secondo ordine (circuiti risonanti): si tratta di circuiti RLC ed LCR, in cui non vi è solo il condensatore come componente dinamico ma anche l'induttore.



Il filtro passa banda viene adoperato misurando l'uscita ai capi del blocco L-C (Induttore-Capacitore); la funzione di trasferimento di un filtro di questo genere è più complessa rispetto a quelle viste dei filtri passa basso e passa alto reali:

$$H(f) = \frac{jQ^{-1}f/f_0}{1-(f/f_0)^2 + jQ^{-1}(f/f_0)}$$



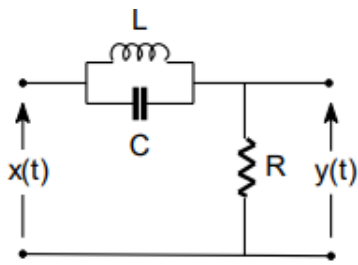
Il modulo del filtro ci dà il suo spettro in ampiezza, che vediamo raffigurato: il filtro fa passare solo le frequenze ove vi è il picco; possiamo notare che quest'ultimo si trova attorno alla frequenza di taglio f_T

Ricorda: siccome la frequenza è normalizzata: f/f_T quando $f/f_T = 1$ vuol dire che la frequenza assume il valore della frequenza di taglio $f = f_T$

*Abbiamo scritto nella formula f_0, quest'ultima è la frequenza di taglio che abbiamo fino ad ora chiamato f_T

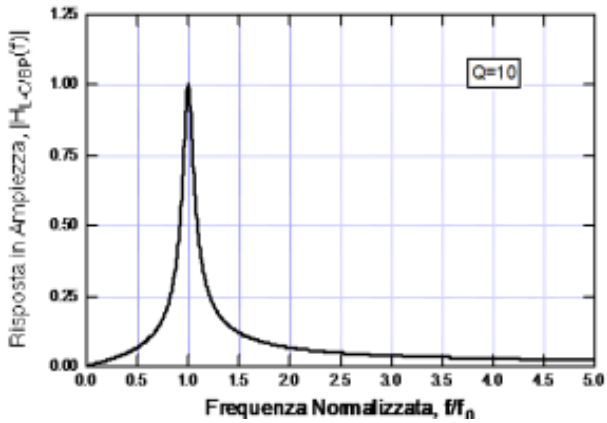
Con "Q" intendiamo un fattore di qualità che indica la bontà del filtro in questione: specifica quanto vale l'ampiezza della funzione di trasferimento del filtro rispetto alla frequenza centrale, più è ampia (o maggiore è la frequenza centrale) più il filtro è costoso.

$$2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \frac{1}{Q} = 2\pi f_0 L/R$$



Il filtro elimina banda è duale a quello passa banda, per questo motivo, come accadeva per i filtri passa basso e passa alto, il circuito che lo realizza ha le stesse componenti ma la lettura dell'uscita non avviene ai capi del blocco LC ma ai capi del resistore.
La funzione di trasferimento di un filtro elimina banda reale così realizzato è la seguente:

$$H(f) = \frac{1-(f/f_0)^2}{1-(f/f_0)^2 + jQ^{-1}(f/f_0)}$$



Il modulo del filtro ci dà il suo spettro in ampiezza, che vediamo raffigurato: il filtro fa tutte le frequenze tranne il punto ove vi è il picco; possiamo notare che quest'ultimo si trova attorno alla frequenza di taglio f_T

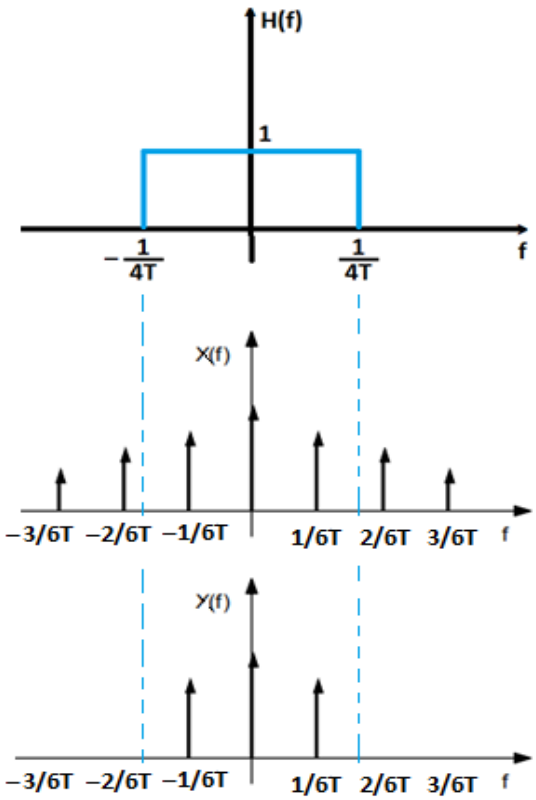
Ricorda: siccome la frequenza è normalizzata: f/f_T quando $f/f_T = 1$ vuol dire che la frequenza assume il valore della frequenza di taglio $f = f_T$

*Abbiamo scritto nella formula f_0, quest'ultima è la frequenza di taglio che abbiamo fino ad ora chiamato f_T

Si noti che questi filtri hanno delle risposte il cui effetto non si può apprezzare al meglio l'effetto: si noti infatti che passando alla misurazione in decibel non vedremo più dei pichi attorno al quale verte il funzionamento del filtro ma avremo un allargamento della scala che ci permette di analizzare meglio tali risposte in frequenza.

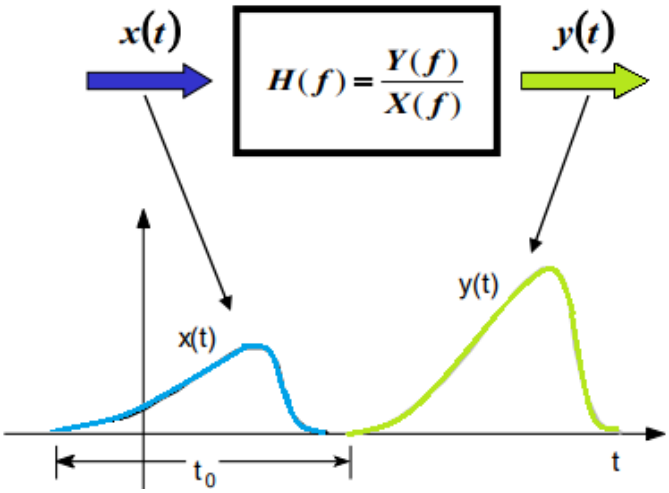
Distorsione introdotta dai filtri reali

Abbiamo visto che quando un segnale passa all'interno di un filtro ideale cui funzione di trasferimento è rappresentabile da un rect, l'uscita ad esso corrispondente è un segnale simile a quello in ingresso di cui però alcune frequenze vengono tagliate.



Vogliamo adesso capire cosa accade quando si utilizza un filtro reale e a che tipo di **distorsioni** va incontro il segnale filtrato.

Supponiamo di disporre di un segnale $x(t)$, che consiste in un segnale musicale e che il sistema in questione è il filtro. Possiamo affermare che il segnale $y(t)$ in uscita dall'amplificatore è un ottimo segnale se quest'ultimo è fedele al segnale in ingresso ed è amplificato in ampiezza (quindi il volume del brano si sentirà più elevato) e, al più, ritardato leggermente a causa dei tempi impiegati dall'amplificatore ad amplificare il segnale in ingresso.



È chiaro che il segnale deve passare, oltre che dall'amplificatore, anche da altri sistemi, quale ad esempio lo stesso canale (il filo in rame), è importante che tutti i sistemi che elaborano il segnale non introducano distorsioni che alterino le informazioni trasportate dal segnale.

Diremo quindi che **un sistema lineare stazionario (SLS) non introduce distorsioni sul segnale in uscita se quest'ultimo è pari a K volte il segnale in ingresso eventualmente traslato di un tempo t_0 (con K costante moltiplicativa di amplificazione o attenuazione)**.

$$\begin{cases} y(t) = Kx(t - t_0) \\ K\ costante \end{cases}$$

A questo punto possiamo lavorare sulle condizioni applicate sulla funzione di trasferimento affinché sia possibile costruire un filtro che non introduca distorsioni.

Passando alla trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ non distorto ricaviamo:

$$y(t) = K\,x(t - t_0) \quad \rightarrow \quad Y(f) = K\,X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

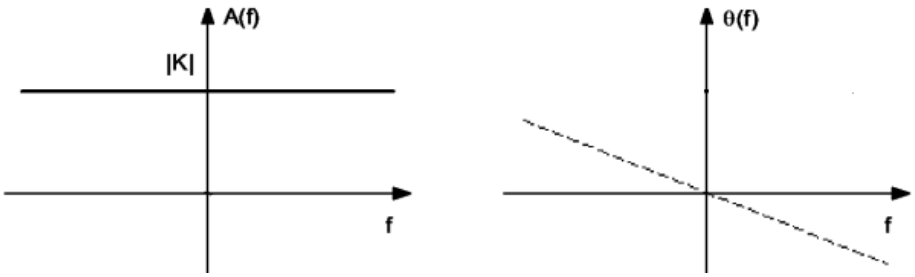
Ricordando che la definizione di funzione di trasferimento è legata al rapporto tra ingresso e uscita nel dominio della frequenza e applicando il teorema del ritardo, possiamo facilmente ottenere il valore che $H(f)$ deve assumere affinché il segnale non introduca distorsione:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \rightarrow H(f) = \frac{KX(f)e^{-j2\pi f t_0}}{X(f)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{H(f) = Ke^{-j2\pi f t_0}}}$$

Di cui modulo e fase sono:

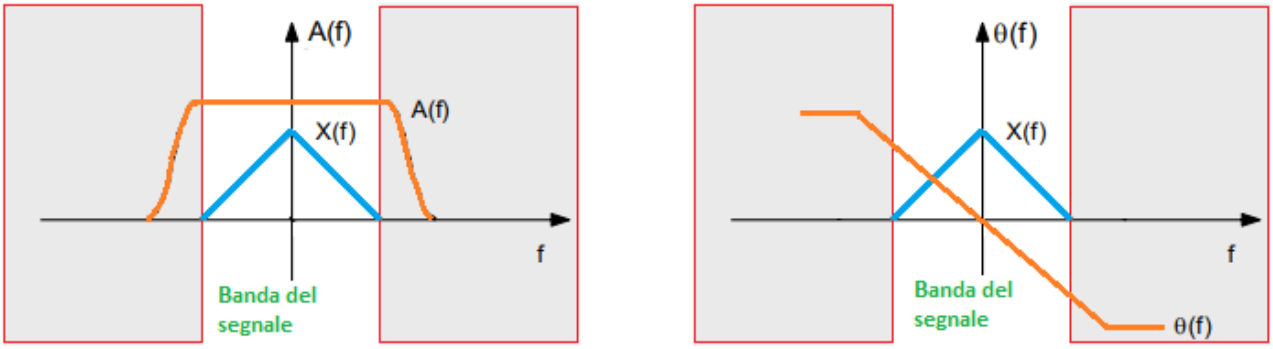
$$\boldsymbol{H(f) = Ke^{-j2\pi f t_0}}: \qquad A(f) = |H(f)| = |K| \qquad \theta(f) = \angle X(f) = -2\pi f t_0$$

Quindi **è necessario che la funzione di trasferimento abbia un modulo costante (come il rect, ad esempio), ed una fase che sia lineare con la frequenza.**



Chiaramente, non vogliamo che queste caratteristiche valgano da $-\infty$ a $+\infty$ ma che esse valgano, almeno, per le frequenze che il segnale deve mantenere inalterate, ovvero in prossimità delle bande in cui il filtro dovrà far passare il segnale senza alcuna modifica.

<u>Esempio</u>: supponiamo di avere un filtro cui risposta in frequenza sia quella rappresentata, molto simile ad un rect ma priva delle salite istantanee di quest'ultimo.

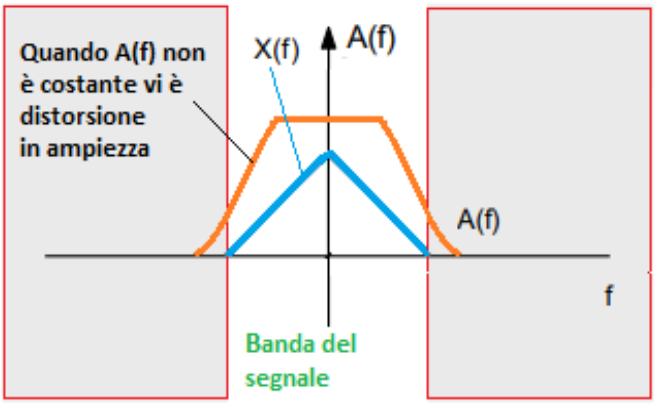


Nella banda del segnale il filtro ha una risposta costante: la sua ampiezza è costante e pari a "K", non è sempre lineare ma lo è all'interno della banda al quale deve lavorare, infatti nei fronti di salita e di discesa del filtro l'ampiezza non sarà più costante ma varierà al variare di f.

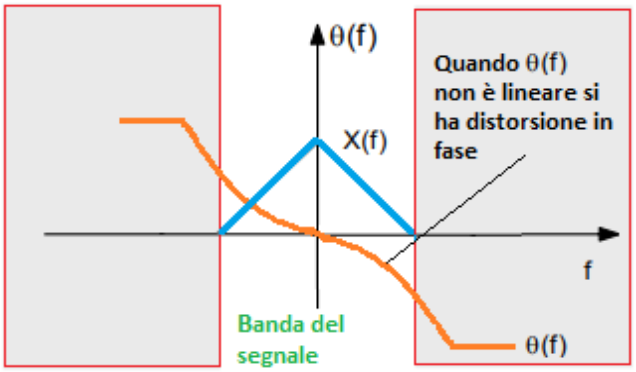
Oltre che all'andamento del modulo, possiamo facilmente osservare che la fase del segnale decresce con un andamento lineare rispetto alla frequenza.

Queste caratteristiche portano ad avere un segnale in uscita che sia privo di distorsioni, ovvero che sia una replica indistorta del segnale in ingresso $x(t)$

Se invece la funzione di trasferimento ha un andamento in ampiezza che varia anche all'interno della banda di interesse ci ritroveremmo davanti ad un segnale (in uscita) che avrà riscontrato delle **distorsioni lineari in ampiezza:** alcuni punti della trasformata $X(f)$ vengono correttamente moltiplicati per il fattore costante "K", altri vengono moltiplicati per un valore via via decrescente; il risultato sarà un segnale che nel suo spettro non avrà delle armoniche ad ampiezza costante, bensì alcune armoniche di ugual ampiezza e altre di ampiezza differente (e via via decrescente), da ciò ne consegue che la ricostruzione del segnale temporale d'uscita non sarà fedele al segnale in ingresso.



Se accade che la fase non è lineare all'interno della banda al quale avviene il filtraggio si ha una **distorsione lineare di fase**;
in generale, la distorsione lineare di fase dipende dal segnale che si sta considerando: se si tratta di un segnale analogico vocale come quello telefonico le distorsioni di fase sono poco significative, danno più fastidio quelle in ampiezza; se invece il segnale è digitale, l'influenza della distorsione di fase potrebbe portare ad alcuni problemi e quindi vanno tenute in considerazione.

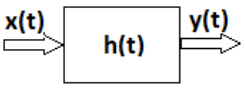


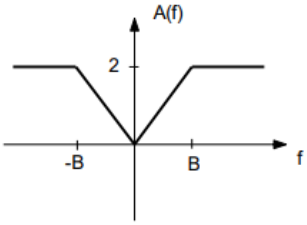
La distorsione la si avverte quando si sente un segnale che è totalmente differente da quello che dovrebbe sentirsi, ciò accade principalmente perché quando viene ricomposto il segnale in uscita questo è formato da delle armoniche che hanno ampiezze differenti, quindi nella ricostruzione si otterrebbe una sommatoria di coseni di ampiezza differente (distorsione in ampiezza) oppure quando si vanno a sommare dei coseni che sono tutti sfasati (distorsione in fase).

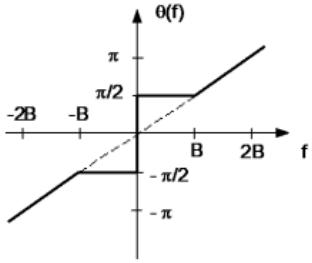
Da questo esempio si capisce quanto sia importante lavorare in frequenza: in questo dominio è possibile capire come filtrare il segnale in modo da eliminare delle frequenze al quale agiscono dei segnali di disturbo e, come appena visto, è anche possibile riscontrare eventuali distorsioni e lavorare su di esse al fine di eliminarle ed avere un segnale in uscita quanto più fedele possibile.

Si può dimostrare che matematicamente ad un segnale finito nel tempo corrisponde un segnale a banda infinita, per cui è lecito chiedersi come fare a capire come evitare la distorsione in una banda simile.
Sebbene la banda del segnale è teoricamente infinita, in realtà le frequenze in cui il segnale assume dei valori significativi sono limitate, tutte le altre non apportano dei contributi degni di nota, per questo motivo si può immaginare che la banda del segnale sia limitata, tagliando fuori tutte quelle frequenze per cui vi sono armoniche che non danno alcun particolare contributo.
Quindi è importante che la distorsione non avvenga nella parte di banda del segnale nel quale agiscono le armoniche più significative.

Esempio: Si abbia un filtro avente funzione di trasferimento cui modulo è fase sono quelli rappresentati:

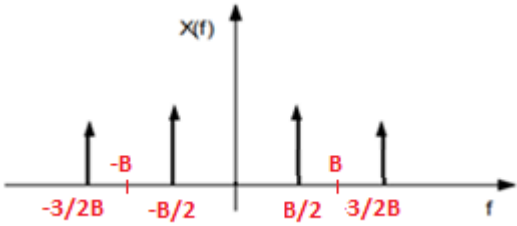






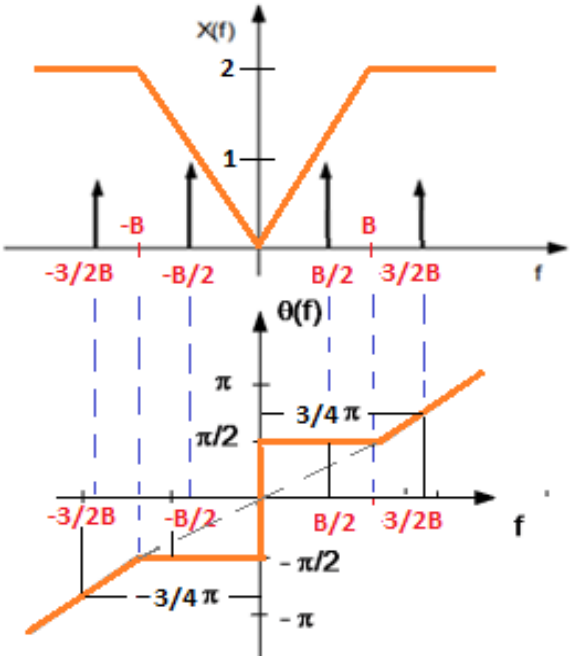
Supponiamo che in ingresso vi sia la somma di un coseno ed un seno:

$$x(t) = \cos(\pi Bt) + \sin(3\pi Bt)$$



Siccome l'argomento del coseno e del seno è sempre di tipo $(2\pi f_0 t)$ avremo che le frequenze al quale si trovano questi due segnali sono $f_1 = B/2$ ed $f_2 = 3B/2$

Conoscendo che le frequenze dei due segnali e sapendo che questi sono formati da una singola armonica (che nello spettro bilatero ha un'armonica speculare nel semiasse negativo) possiamo disegnare lo spettro di tale segnale, con le armoniche centrate in $\pm f_1$ e $\pm f_2$



A questo punto, analizzando lo spettro delle ampiezze del filtro $|H(f)|$ possiamo osservare che entro la banda del segnale il filtro non ha un'ampiezza costante, le armoniche del segnale cosinusoidale a frequenza $\pm f_1 = \pm B/2$ vengono amplificate con un'ampiezza minore rispetto alle armoniche del segnale sinusoidale a frequenza $\pm f_2 = \pm 3B/2$

Anche nello spettro delle fasi possiamo notare una distorsione: lo spettro infatti non è lineare alla frequenza, ma decresce linearmente fino a B (quindi non è viene distorta la fase del seno) assume però poi il valore costante $\pi/2$ fino a $f = 0$ e poi, seguendo la simmetria rispetto all'origine (ricorda che la fase di un segnale reale è dispari, quindi sempre speculare rispetto l'origine), troveremo un salto a $-\pi/2$ da qui proseguirà in modo speculare; questo significa che il seno non viene distorto perché rientra nell'intervallo in cui la fase decresce linearmente, mentre il coseno avrà una fase distorta. Affinché la fase non subisse distorsione, lo spettro delle fasi del filtro avrebbe dovuto assumere la forma rappresentata con il tratteggio.

Osserviamo quale sia il segnale (distorto) in uscita; quest'ultimo è dato dalla trasformazione del filtro in cui è presente la **moltiplicazione per l'amplificazione data dall'ampiezza: $A(f)$** e lo **sfasamento dato dalla fase $\theta(f)$** quando la frequenza è pari a $f_1 = B/2$ nel caso del coseno ed $f_2 = 3B/2$ nel caso del seno:

$$y(t) = A\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\pi Bt + \theta\left(\frac{B}{2}\right)\right) + A\left(\frac{3B}{2}\right)\sin\left(3\pi Bt + \theta\left(\frac{3B}{2}\right)\right)$$

A questo punto non ci resta che valutare nel grafico quanto vale l'ampiezza e la fase nei punti considerati e sostituire nella formula appena scritta:

$$A\left(\frac{B}{2}\right) = 1\,;\;\; A\left(\frac{3B}{2}\right) = 2 \qquad \theta\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,;\;\; \theta\left(\frac{3B}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$y(t) = A\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\pi Bt + \theta\left(\frac{B}{2}\right)\right) + A\left(\frac{3B}{2}\right)\sin\left(3\pi Bt + \theta\left(\frac{3B}{2}\right)\right) = 1\cos\left(\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(3\pi Bt + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Scriviamo il seno ed il coseno ottenuti come $x(t-t_0)$ per verificare se effettivamente vi sono delle distorsioni; per farlo dovremo praticamente dividere per i termini che vanno a moltiplicare "t" nell'argomento del coseno e del seno;
chiaramente per fare ciò è necessario dividere il termine che somma "t" per la quantità messa in evidenza al fine di non alterarne il significato matematico:

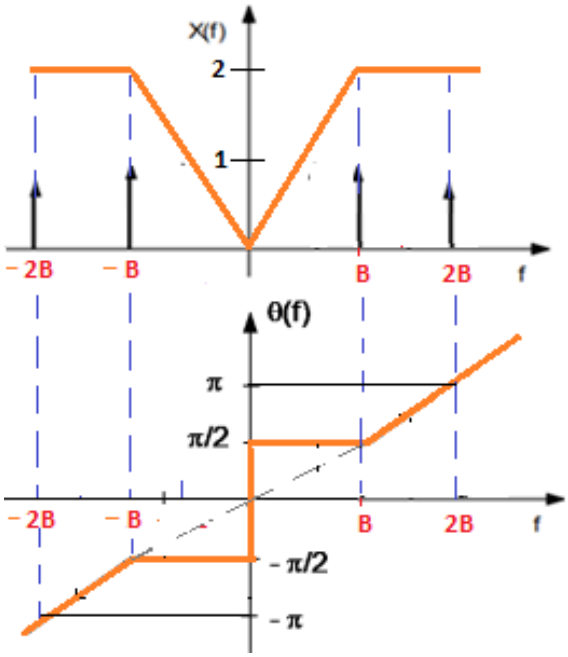
$$y(t) = 1\cos\left(\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(3\pi Bt + \frac{3\pi}{4}\right) = 1\cos\left[\pi B\left(t + \frac{\pi}{2\pi B}\right)\right] + 2\sin\left[3\pi B\left(t + \frac{3\pi}{43\pi B}\right)\right]$$

$$y(t) = \cos\left[\pi B\left(t + \frac{1}{2B}\right)\right] + 2\sin\left[3\pi B\left(t + \frac{1}{4B}\right)\right]$$

Possiamo osservare che il termine "t_0" non è costante: il coseno viene ritardato di $T_0 = 1/2B$ mentre il seno viene ritardato di $T_0 = 1/4B$

Supponiamo adesso di cambiare il segnale in ingresso, ponendo:

$$x(t) = 4\cos(2\pi Bt) + \sin(4\pi Bt)$$



Ricordando ancora una volta che l'argomento del coseno e del seno è sempre di tipo $(2\pi f_0 t)$, possiamo notare che stavolta vi è un cambio di frequenza: $f_1 = B$ ed $f_2 = 2B$

In questo caso non vi sono né la distorsione in ampiezza né quella in fase: la risposta in frequenza ha un modulo costante da $f = B$ in poi, pertanto sia le armoniche in B che quelle in $2B$ vengono amplificate della stessa quantità ($A(f) = 2$) e anche la fase risulta avere un andamento lineare da B in poi, pertanto non distorce la fase delle due armoniche in questione.

Possiamo verificarlo anche eseguendo i calcoli:

$$y(t) = A(B)\,4\cos\big(\pi Bt + \theta(B)\big) + A(2B)\sin\big(3\pi Bt + \theta(2B)\big)$$

$$y(t) = 8\cos\left(2\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(4\pi Bt + \pi)$$

Scriviamo il seno ed il coseno ottenuti come $x(t-t_0)$:

$$y(t) = 8\cos\left(2\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(4\pi Bt + \pi) = 8\cos\left[2\pi B\left(t + \frac{\pi}{4\pi B}\right)\right] + 2\sin[4\pi B\left(t + \frac{\pi}{4\pi B}\right)]$$

$$y(t) = 8\cos\left[2\pi B\left(t + \frac{1}{4B}\right)\right] + 2\sin\left[4\pi B\left(t + \frac{1}{4B}\right)\right]$$

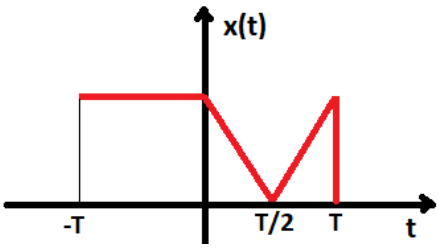
Come possiamo osservare, l'ampiezza è costante e pari a due [infatti $2 * [4\cos(\dots)] = 8\cos(\dots)$ e $2 * [\sin(\dots)] = 2\sin(\dots)$] e il ritardo t_0 è costante ed uguale per entrambi i segnali: $t_0 = 1/4B$

Curiosità: I sintetizzatori

I sintetizzatori sono dei filtri a frequenza variabile: ogni volta che si muovono le levette si aumenta o diminuisce la frequenza entro un range ben preciso, per cui a seconda dove si trova la frequenza, proviamo a mantenere costante l'ampiezza della sua funzione di trasferimento

Esercizio

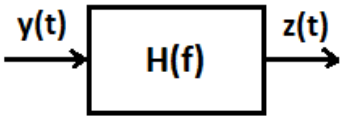
Sia dato il segnale $x(t)$ rappresentato in figura e sia $y(t)$ il segnale ottenuto dalla periodicizzazione di $x(t)$ con periodo $T_0 = 2T$.
Calcolare l'energia del segnale $x(t)$: E_x, il valor medio di quest'ultimo: $< x(t) >$, il segnale periodico $y(t)$, la trasformata di quest'ultimo: $Y(f)$ e la sua potenza: P_y.



Sia dato il sistema avente funzione di trasferimento $H(f)$:

$$H(f) = 5\,\pi\left(\frac{f}{3/2T}\right)$$

Calcolare il segnale $Z(f)$ in uscita da quest'ultimo supponendo di fornire in ingresso il segnale $y(t)$ precedentemente ottenuto, in aggiunta, si calcolino anche l'energia e la potenza E_z e P_z



Sia inoltre $H_1(f)$ la funzione di trasferimento di un filtro passa banda ideale:

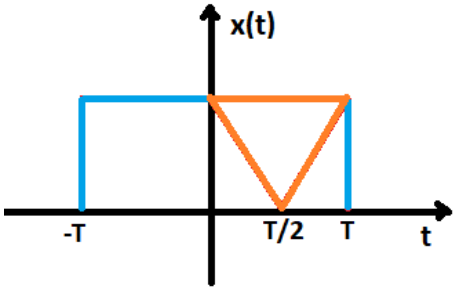
$$H_{1(f)} = \pi\left(\frac{f - 10/T}{4/T}\right) + \pi\left(\frac{f + 10/T}{4/T}\right)$$

Si moduli $z(t)$ con una portante cosinusoidale opportuna affinché il segnale modulato passi inalterato attraverso $H_1(f)$.

1. Calcolare il segnale x(t), la sua energia e il suo valor medio

Otteniamo il segnale in funzione di rettangoli e triangoli;
possiamo osservare che il segnale in questione è un rect di base 2T, centrato in 0 (e che quindi si estende da -T a T) a cui viene rimosso un segnale triangolare (equilatero) di semibase T/2 (quindi base T), centrato in T/2:

$$x(t) = \pi\left(\frac{t}{2T}\right) - \Delta\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right)$$



$$x(T) = \pi\left(\frac{t}{2T}\right) - \Delta\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right)$$

Il segnale $x(t)$ è un segnale aperiodico, questo significa che non potrà essere un segnale di potenza, il che implica dunque che esso sia un segnale di energia e pertanto avrà potenza media nulla e valor medio nullo; calcoliamo l'energia di questo segnale:

$$Ex\,(t) = \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

Per calcolare questa energia dovremo ottenere la forma analitica del segnale: si tratta di un segnale formato da un gradino costante e pari a 1 da -T a 0, dopo di che vi sono due rette: una che decresce da 0 a T/2 e una, speculare, che cresce da T/2 a T.
Siccome siamo interessati all'integrale del quadrato del segnale, quindi all'area sottesa da quest'ultimo, data la simmetria delle due rette, quando andremo a calcolare l'energia sottesa da questa porzione di segnale calcoleremo due volte lo stesso integrale, ad esempio quello della retta tra 0 e T/2, poiché le rette sottendono la stessa area.

Otteniamo la retta "r_1" definita da 0 a -T/2 e passante per i punti $P_1(0,1)$ e $P_2\left(\frac{T}{2}, 0\right)$:

$$r_1: \quad \frac{x - 0}{T/2 - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1} \quad \rightarrow \quad -y + 1 = \frac{x}{T/2} \rightarrow \quad y = -\frac{x}{T/2} + 1 = -\frac{2x}{T} + 1 \quad \rightarrow r_1: -\frac{2t}{T} + 1$$

Quindi l'energia sarà data da:

$$Ex\,(t) = \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt = \int_{-T}^{0} 1\,dt + 2\int_{0}^{T} \left|-\frac{2t}{T} + 1\right|^2 dt$$

$$Ex\,(t) = \int_{-T}^{0} dt + 2\int_{0}^{T/2} \frac{4t^2}{T^2} - \frac{4t}{T} + 1\,dt = [t]_{-T}^{0} + 2\left[\frac{4}{T^2}\int_{0}^{T/2} t^2 dt - \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} t + \int_{0}^{T/2} dt\right]$$

$$E_x(t) = [t]_{-T}^{0} + 2\left[\frac{4}{T^2}\int_{0}^{T/2} t^2 dt - \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} t + \int_{0}^{T/2} dt\right] = (0+T) + 2\left[\frac{4}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{T/2} - \frac{4}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{T/2} + [t]_{0}^{T/2}\right]$$

$$E_x(t) = T + 2\left[\frac{4}{T^2}\left(\frac{T^3/8}{3}\right) - \frac{4}{T}\left(\frac{T^2/4}{2}\right) + (T/2)\right] = T + 2\left[\frac{4}{T^2}\left(\frac{T^3}{8*3}\right) - \frac{4}{T}\left(\frac{T^2}{4*2}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$E_x(t) = T + 2\left[\frac{1}{T^2}\left(\frac{T^3}{2*3}\right) - \frac{1}{T}\left(\frac{T^2}{1*2}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)\right] = T + \left[\frac{T}{3} - T + T\right] = T + \frac{T}{3} = \frac{4}{3}T \quad \rightarrow \quad E_x(t) = \frac{4}{3}T$$

2. Calcolare il segnale y(t), la sua trasformata Y(f) e la sua potenza

Il segnale $y(t)$ è dato dalla periodicizzazione di $x(t)$ con un periodo $T_0 = 2T$; otteniamo quindi un segnale del tipo:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - 2nT)$$

Otteniamo la trasformata di questo segnale attraverso la formula di Poisson:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ \delta(n - nf_o) \qquad con\ C_n = \frac{1}{T_0}\,X(nf_o) = \frac{1}{T_0}X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

Conoscendo il periodo del segnale $y(t)$ e l'andamento temporale di $x(t)$ otteniamo la trasformata del segnale troncato $X(f)$ e, a seguire, i vari C_n:

$$x(t) = \pi\left(\frac{t}{2T}\right) - \Delta\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = 2T\ sinc(2Tf) - \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{T}{2}f\right)e^{-j2\pi\left(\frac{T}{2}\right)f}$$

Otteniamo i coefficienti C_n:

$$C_n = \frac{1}{T_0}X\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{2T}\left[2T\ sinc\left(2T\left(\frac{n}{2T}\right)\right) - \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{T}{2}\left(\frac{n}{2T}\right)\right)e^{-j2\pi\left(\frac{T}{2}\right)\left(\frac{n}{2T}\right)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2T}\left[2T\ sinc(n) - \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)e^{-j\pi\left(\frac{n}{2}\right)}\right]$$

Avendo ricavato la formula generica dei coefficienti C_n ricaviamo C_0 che ricordiamo essere il valor medio del segnale periodico $y(t)$:

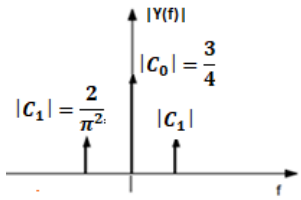
$$C_0 = < y(t) >= \frac{1}{2T}\left[2T\ sinc(0) - \frac{T}{2}sinc^2(0)e^{-j\pi(0)}\right] = \frac{1}{2T}\left(2T - \frac{T}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Calcoliamo anche il coefficiente C_1 per completezza:

$$C_1 = \frac{1}{2T}\left[2T\ sinc(1) - \frac{T}{2}sinc^2\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\pi\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$C_1 = -\frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}}\right]^2 e^{-j\pi\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}}\right]^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - jsin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{\frac{4\sqrt{2}}{2}}{\pi}\right]^2[0 - j]$$

$$C_1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{16*2}{4\pi^2}\right)(-j) = -\left(\frac{16*2}{16\,\pi^2}\right)(-j) = j\frac{2}{\pi^2}$$

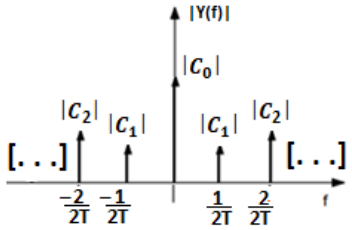


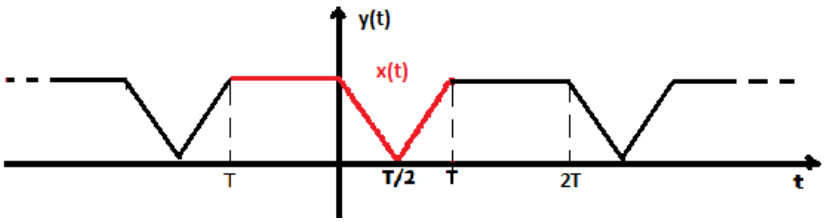
Il segnale $y(t)$ è un segnale periodico e, in quanto tale, è un segnale di potenza avente energia infinita e potenza finita.

La potenza nel periodo si può calcolare come rapporto tra l'energia calcolata nel periodo e il periodo stesso; si noti che il segnale è stato ottenuto dalla periodicizzazione di $x(t)$, questo significa che l'energia nel periodo corrisponde all'energia del segnale $x(t)$: $E_T = E_x(t)$; a questo punto possiamo scrivere:

$$P_y = \frac{E_x(t)}{T_0} = \frac{\frac{4}{3}T}{2T} = \frac{4}{3*2} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad P_y = \frac{2}{3}$$

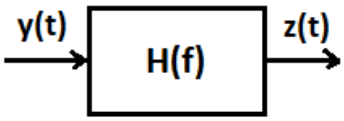
Per completezza rappresentiamo sia il segnale $y(t)$ che il rispettivo spettro delle ampiezze $|Y(f)|$





3. Calcolare il segnale z(t) in uscita dal filtro insieme alla sua energia e alla sua potenza

Il segnale $z(t)$ si ottiene a seguito di un filtraggio, facendo passare il segnale $y(t)$ ottenuto per periodicizzazione di $x(t)$ attraverso un filtro (passa basso) avente funzione di trasferimento:



$$H(f) = 5\,\pi\left(\frac{f}{3/2T}\right)$$

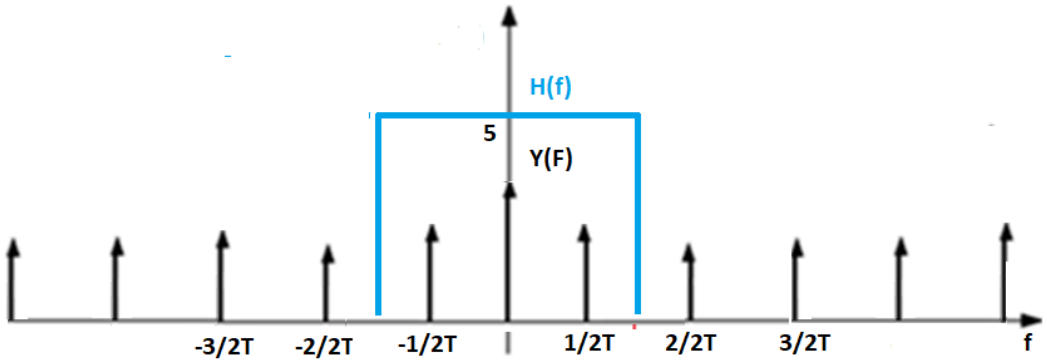
Passiamo al dominio della frequenza, ove è più facile trattare il filtraggio dato che vi sono semplici moltiplicazioni:

$$Z(f) = H(f)Y(f)$$

Grafichiamo sia la funzione di trasferimento che la trasformata $Y(f)$ per verificare cosa accade con il prodotto e, quindi, quale forma assuma il segnale $Z(f)$.

$H(f)$ è praticamente un rect avente ampiezza pari a 5 e centrato in 0; la sua base è pari a $3/2T$, quindi tale rect si estenderà da $-3/4T$ a $3/4T$;

Y(f) è uno spettro discreto formato da una serie di impulsi centrati in n/T_0



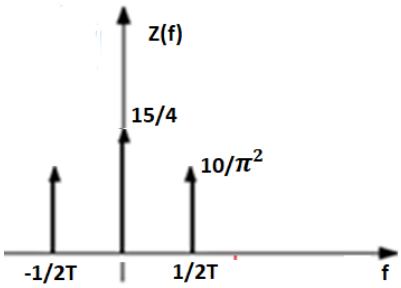
È evidente dal grafico che il filtraggio avviene amplificando di 5 volte l'ampiezza del segnale originale ed eliminando le componenti che si trovano da $n = 2$ in poi; questo significa che il segnale $Z(f)$ sarà ancora un segnale periodico (il suo spettro è ancora a righe), avente lo stesso andamento di $Y(f)$ ma mantenendone solo la prima componente (insieme a quella continua) e amplificandone l'ampiezza di 5:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ \delta(n - nf_o) \quad \rightarrow \quad Z(f) = 5\sum_{n=-1}^{1} C_n\ \delta(n - nf_o)$$

Quindi il filtro fa passare solo la componente continua e la componente principale in $f_0 = 1/T_0 = 1/2T$

Essendo ancora un segnale periodico quest'ultimo ha energia infinita, mentre la sua potenza nel periodo la possiamo ricavare dal prodotto del quadrato delle ampiezze dello spettro:

$$P_z = |C_o|^2 + 2|C_1|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 + 2\left(\frac{j2}{\pi^2}\right)^2 = \frac{9}{16} + 2\left(-\frac{4}{\pi^4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{8}{\pi^4}$$



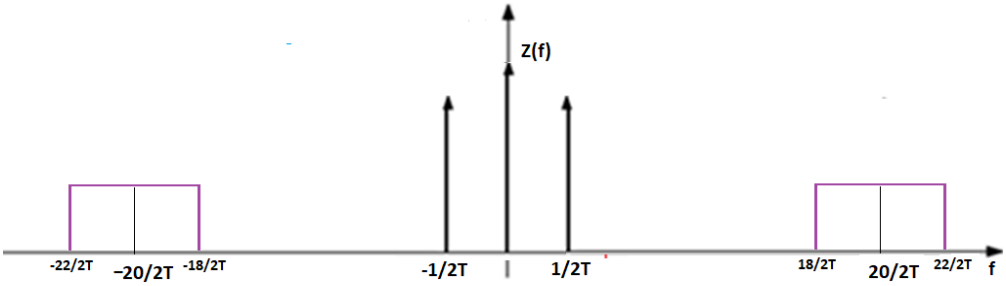
Il segnale $Z(f)$ quindi ha lo spettro delle ampiezze rappresentato, che possiamo ricavare da $Y(f)$,, tracciandone solo le prime componenti e moltiplicandole (amplificandole) per 5

4. Dato il filtro cui funzione di trasferimento sia $H_1(f)$, modulare il segnale $z(t)$ affinché passi inalterato in uscita da tale filtro.

Il filtro in questione è un filtro passa banda ideale avente la seguente funzione di trasferimento:

$$H_{1(f)} = \pi\left(\frac{f - 10/T}{4/T}\right) + \pi\left(\frac{f + 10/T}{4/T}\right)$$

Si tratta praticamente di una risposta in frequenza formata da due rect speculari centrati in $f = 10/T$ e di base pari a $4/T$. Disegnando tale risposta ci accorgiamo che, effettivamente, lo spettro $Z(f)$ è molto distante da tali rect, il che significa che, essendo la risposta nulla ove non è definito il rect, se non centrassimo il segnale in modo da farlo cadere "all'interno" dei rect del filtro, in uscita non osserveremo alcun segnale (osserveremo 0).



*Il filtro è centrato in $10/T$ ma siccome la frequenza portante è $1/2T$, nell'asse andremo a cercare il valore in funzione di quest'ultima, l'equivalente è $20/2T$ che, semplificando restituisce infatti $10/T$.

Dovremo quindi traslare il segnale centrandolo nel rect (non è necessario che essi si trovino esattamente al centro del rect, basterà che essi si trovino all'interno per non essere oscurate).

Per fare questa operazione dovremo sostanzialmente **modulare il segnale con una portante che centri il segnale attorno alla frequenza portante $f_0 = 10/T$** (ovvero al centro del rect).

$$z_1(t) = z(t)\cos\left(2\pi\frac{10}{T}t\right)$$

Traslare un segnale in frequenza con il teorema della modulazione

Quando viene modulato un segnale $z(t)$ con un segnale cosinusoidale $\cos(2\pi f_0 t)$ il suo spettro viene traslato, venendo centrato attorno alla frequenza portante del coseno "f_0":

$$T.Modulazione: \quad z'(t) = z(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \rightarrow \quad Z'(f) = \frac{Z(f - f_0) + Z(f + f_0)}{2}$$

Quindi quando si deve spostare un segnale in frequenza e lo si deve centrare in un certo punto si può fare affidamento dal teorema della modulazione

Curiosità: Perché si è passati dal segnale analogico a quello digitale?

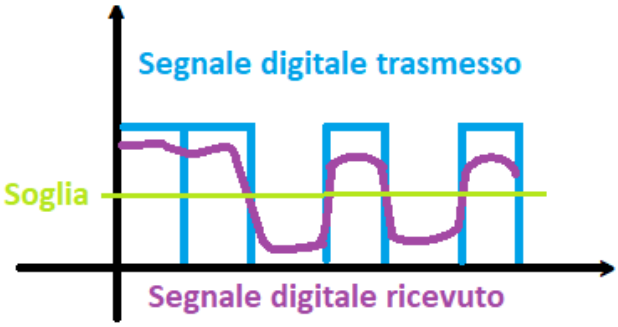
Il segnale analogico è un segnale che spesso non reietta al meglio il rumore: quando viene inviato da una sorgente un segnale analogico e quest'ultimo raggiunge il canale di trasmissione (passando per cavi, ponti radio, un canale etereo, mediato da un satellite, etc…) si aggiungono ad esso dei rumori additivi, che si sommano al segnale utile che trasporta l'informazione.

Ogni sistema che processa il segnale in questione aggiunge un certo rumore e, a seconda del rapporto segnale/rumore, potrebbe accadere che il segnale che viene ricevuto sia talmente distorto che non può essere ricondotto a quello originariamente trasmesso.

Normalmente, quando ciò accade è difficile riuscire a risalire al segnale analogico di partenza perché non si riesce ad ottenere delle informazioni utili circa la ricostruzione del segnale originale.

La situazione è ben diversa per un segnale digitale: questo è formato da una serie di 1 e/o 0, possiamo vederlo come un treno di gradini ed ogni gradino è alto se il segnale trasporta il bit 1 e basso se trasporta il bit 0.
Una volta immesso nel canale, ovviamente, anche il segnale digitale è soggetto a distorsione, per qui non verranno ricevuti una serie di gradini ma un segnale formato da una serie di "cunette" che non sono esattamente dei gradini.

Tuttavia, il vantaggio di questo segnale è che esso viene processato da un circuito a soglia: quest'ultimo, in funzione di una soglia specifica, riesce a riconoscere se il valore del segnale è alto o è basso e riesce così a rigenerarlo; la rigenerazione del segnale è un grande vantaggio sulla trasmissione: se il segnale viene costantemente rigenerato il rischio che questo arrivi a destinazione troppo distorto diminuisce: i rumori generati dai sistemi non vanno a sommarsi tutti al segnale perché il segnale viene rigenerato di volta in volta.



La rigenerazione avviene in funzione della soglia: se il segnale è sopra soglia allora questo è visto come alto, se sotto soglia allora sarà basso.
Mentre un segnale analogico viene amplificato durante la trasmissione insieme a tutti i rumori additivi ad esso sommato (spesso perché deve percorrere molte distanze, quindi deve essere amplificato), il segnale analogico non viene amplificato ma viene totalmente rigenerato: i rumori quindi accumulati fino al sistema vengono annullati perché il segnale viene rigenerato come se fosse stato appena trasmesso.

La banda che serve per trasmettere un segnale analogico è maggiore: se studiassimo lo spettro di un segnale digitale e quello di un segnale analogico possiamo osservare che la banda occupata dallo spettro del segnale digitale è maggiore rispetto a quella occupata dal segnale analogico.

Densità spettrale di energia

Fino ad ora abbiamo trattato lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi, che ci danno informazioni corrispettivamente dell'ampiezza (i moduli) delle armoniche (coseni) che compongono il segnale e delle fasi di quest'ultimi.

È logico pensare che l'energia e/o la potenza di un segnale è data dalla somma dell'energia e/o della potenza dalle singole armoniche che lo compongono; ogni coseno, centrato ad una certa frequenza nf_0, trasporta un certo contributo che fa parte dell'energia/potenza media totale.

Allora è lecito supporre che, come è possibile rappresentare la variazione delle ampiezze delle armoniche in funzione delle frequenze e come è possibile rappresentare la variazione delle fasi di quest'ultime in funzione della frequenza, mediante gli opportuni spettri, allora potrà essere possibile anche rappresentare l'energia e/o la potenza trasportata da ogni armonica in funzione della propria frequenza portante.
Nello specifico, parleremo di **densità spettrale di energia** per i segnali di energia e di **densità spettrale di potenza** per i segnali di potenza, che ci danno informazioni circa la distribuzione dell'energia e della potenza in funzione alle armoniche.

In questo modo possiamo analizzare, ad esempio, la bontà di un filtraggio: se scopriamo che il filtraggio taglia delle frequenze in cui vi sono armoniche che trasportano una gran parte di energia (ad esempio il 50% dell'intera energia del segnale) allora il filtro non sta lavorando bene perché gran parte dell'energia del segnale in input viene persa; viceversa, se vengono eliminate le armoniche che trasportano un livello basso di energia, il filtro sta lavorando correttamente perché, chiaramente, vorremmo che il segnale non perda la sua energia una volta uscito dal filtro.

La densità spettrale di energia $\boldsymbol{E_x(f)}$ può essere calcolata per tutti i segnali di energia, per cui per tutti quei segnali che hanno energia finita.
Essa consiste praticamente nel modulo quadro dello spettro, ovvero al quadrato dello spettro delle ampiezze del segnale in questione:

$$\boxed{\boldsymbol{E_x(f) = |X(f)|^2}}$$

Come vedremo, attraverso il teorema di Parseval riusciremo a calcolare l'energia di un segnale a partire dal suo spettro, calcolando quella che prende il nome di **densità spettrale di energia**; in questo modo non sarà più necessario analizzare il segnale nel tempo per ottenerne l'energia (rimane chiaramente sempre valido il calcolo dell'energia di un segnale nel tempo come abbiamo fatto fino ad ora ma, se non necessitassimo della forma analitica del tempo e avessimo a disposizione solo lo spettro del segnale, il teorema di Parseval ci permette di calcolarne l'energia senza dover necessariamente passare al dominio del tempo).

Teorema di Parseval

HP: Sia $\boldsymbol{x(t)}$ **un segnale di energia,** quindi avente <u>energia finita</u>:

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt \; < \; \infty$$

TS: Definiamo con $E_x(f)$ lo spettro di energia, ottenendo come modulo quadro dello spettro del segnale:

$$E_X(f) = |X(f)|^2$$

Possiamo dimostrare che **l'energia del segnale è ottenibile integrando la sua densità spettrale di energia**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

Dimostrazione

Nel dominio temporale l'energia del segnale viene ottenuto dal modulo quadro di quest'ultimo ed il modulo può essere visto come valore assoluto del prodotto del segnale $x(t)$ per il suo complementare $x^*(t)$, che nel caso di segnali reali coincide con il segnale stesso: $x^*(t) = x(t)$:

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * x^*(t)]\, dt$$

Il segnale complementare $x^*(t)$ può essere scritto in funzione della sua trasformata corrispondente, ottenendo così:

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * x^*(t)]\, dt = \int_{t\,=\,-\infty}^{+\infty} \left\{ x(t) * \left[\int_{f=-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t}\, df \right] \right\} dt$$

Possiamo cambiare i segni d'integrazione:

$$E_x(t) = \int_{f\,=\,-\infty}^{+\infty} X^*(f) \left[\int_{t\,=\,-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \right] df$$

Risolvendo l'integrale nel tempo possiamo ricavare la trasformata del segnale $x(t)$:

$$E_x(t) = \int_{f\,=\,-\infty}^{+\infty} X^*(f) \left[\int_{t\,=\,-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \right] df = \int_{f\,=\,-\infty}^{+\infty} X^*(f)[X(f)]\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) * X(f)\, df$$

Ma, ancora una volta, si noti che il prodotto tra la trasformata $X(f)$ e la sua complementare $X^*(f)$ restituisce il quadrato del modulo $|X(f)|$ (o semplicemente di $X(f)$ nel caso di segnale reale):

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) * X(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

Quindi è dimostrato che **possiamo ottenere lo spettro di energia di un segnale nel dominio della frequenza in maniera analoga a come ciò viene ricavata nel dominio del tempo, ovvero passando per l'integrale del suo modulo quadro (o più semplicemente del segnale al quadrato se si tratta di segnale reale):**

$$\boxed{\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df}}$$

□

La densità spettrale di energia ci da informazioni circa la ripartizione dell'energia nelle varie frequenze, ad esempio possiamo ottenere l'energia ripartite tra le amroniche che si trovano tra f_1 ed f_2 integrando il mosulo quadro del segnale in tale intervallo:

$$E_{[f_1\,;f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2\, df$$

Chiaramente, integrando in tutto il dominio f [quindi da $-\infty$ a $+\infty$ troviamo l'energia totale del segnale.

La densità spettrale di energia può quindi essere rappresentata in un vero e proprio spettro del segnale trasformato. Possiamo qui di seguito elencare alcune sue caratteristiche principali

- Possiamo affermare che essa **è sempre maggiore o uguale a zero**, trattandosi dell'integrazione di moduli quadri:

$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df \quad \rightarrow \quad E_x \geq 0}$$

- **Se $x(t)$ è un segnale reale, allora la densità spettrale di energia è pari**, esattamente come lo spettro delle ampiezze:

$$\boldsymbol{x(t)} \text{ è } \boldsymbol{reale} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E_x(f) = E_x(-f)}$$

- La densità spettrale di energia **dipende solo dallo spettro delle ampiezze e non da quello delle** fasi, del resto modificando la fase di un coseno (un'armonica) non si nota alcun cambiamento circa l'energia che trasporta: $5\cos(2\pi f_0 t)$ trasporta la stessa energia di $5\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)$; la potenza è sempre uguale ad $a/2$, con "a" ampiezza del coseno (in questo caso 5).

$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df}$$

  Questo è dimostrato anche analiticamente dato che la densità spettrale di energia dipende esplicitamente dal modulo al quadrato, ovvero dall'ampiezza al quadrato del segnale $X(f)$

- Si può ricavare **l'energia del segnale integrando la densità spettrale di energia**:

$$\boldsymbol{E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\, df}$$

  Questo significa che è possibile conoscere l'energia di un segnale conoscendone di esso solo lo spettro: basterà ricavare la densità spettrale di energia e calcolarne l'integrale per ottenere l'energia nel tempo.

  → Si calcola la trasformata del segnale $x(t)$, ottenendo lo spettro $X(f)$

  → Avendo ottenuto lo spettro $X(f)$ si ottiene la densità spettrale di energia $E_x(f)$

  → Si calcola l'energia $E_x(t)$ integrando la densità spettrale di energia

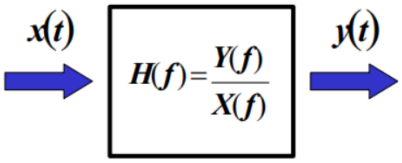
- Si può facilmente dimostrare che **la densità spettrale si energia del segnale in uscita da un sistema si può ottenere come prodotto tra la densità spettrale di energia del segnale in ingresso ed il modulo quadro della funzione di trasferimento del sistema**:

  → L'uscita del segnale la si ottiene come:

$$Y(f) = H(f)\,X(f)$$

  → Passando al modulo quadro di $Y(f)$ otteniamo:

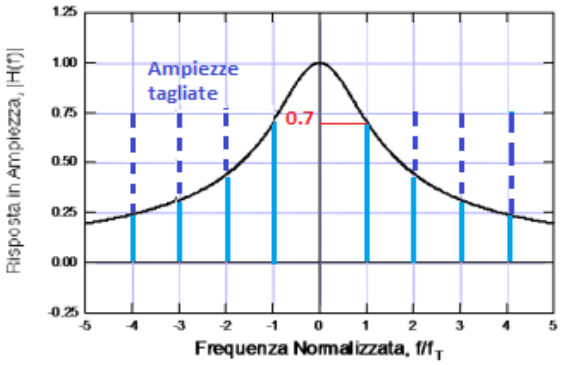
$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2\,|X(f)|^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E_y = |H(f)|^2\,E_x}$$



Quindi il grafico del modulo quadro della funzione di trasferimento da informazioni circa la trasformazione che il filtro adopera sul segnale in ingresso.

Allora ricordando che la frequenza di taglio f_T è la frequenza in cui la funzione di trasferimento vale $H(f_T) = \sqrt{2}/2 = 0.7$, analizzando il modulo quadro di quest'ultima otterremo che in prossimità della frequenza ti taglio avremo che $|H(f_T)|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2$.

Quindi la frequenza di taglio la possiamo vedere anche in termini energetici: è quella frequenza per cui in uscita avremo metà dell'energia in ingresso, è quindi importante lavorare sempre in condizioni in $f \geq f_T$



Banda al 99%

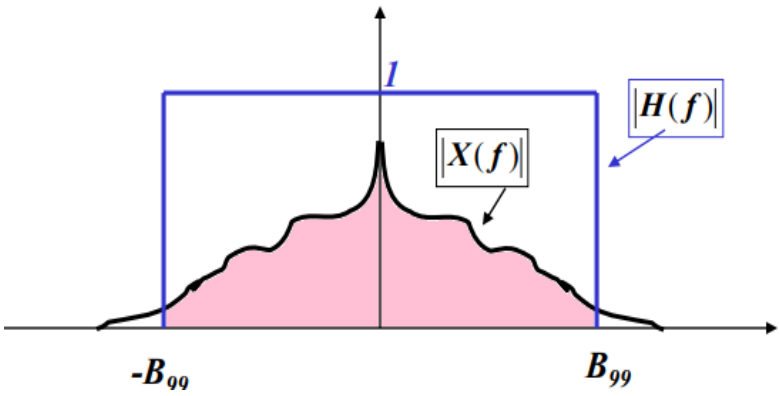
Uno dei problemi legati ai segnali potrebbe essere quello di conoscere la banda di un segnale; fintanto che il segnale è un rect o un triangolo è semplice dedurre quale sia la banda: si tratta praticamente della loro base, ma come capire quale sia la banda per un segnale cui andamento è casuale come quello rappresentato?

In questo caso vengono utilizzate delle convenzioni, come la banda a 3dB, come vedremo; una di queste convenzioni è la **banda al 99%**: si tratta di quella banda (in Hertz) tale che l'integrale della densità spettrale del segnale (= l'energia del segnale) calcolato tra i limiti della banda: $\pm B_{99}$ deve essere pari a $0.99E_x$;

$$\int_{-B_{99}}^{B_{99}} E_x(f)df = 0.99\,E_x$$

Deve quindi accadere che il rapporto tra l'integrale della densità spettrale di energia calcolato tra $-B_{99}$ e $+B_{99}$ e l'integrale della medesima calcolato tra $-\infty$ e $+\infty$ deve essere pari a 0.99:

$$\frac{\int_{-B_{99}}^{B_{99}} E_x(f)df}{\int_{-\infty}^{\infty} E_x(f)df} = 0.99$$



La banda al 99% è quell'intervallo di frequenze in cui è contenuto il 99% dell'energia del segnale.

Densità spettrale di potenza

Supponiamo di disporre di un segnale di potenza, come un segnale periodico (o un segnale aleatorio, come vedremo più avanti) e trattiamo la **densità spettrale di potenza per segnali periodici**, senza estenderla ancora al caso più generale.

Quando pensiamo ad un segnale periodico realizziamo subito che il suo spettro è a discreto e a righe.

La potenza del segnale è data dalla sommatoria dei vari coefficienti C_n della formula di somma di Poisson che costituiscono le ampiezze degli impulsi caratterizzanti lo spettro del segnale periodico.

Se andassimo a sommare tutti i contributi in potenza delle armoniche otteniamo praticamente la sommatoria (dato che il segnale è discreto) delle ampiezze C_n in modulo quadro che moltiplicano i vari impulsi; la quantità appena descritta prende il nome di **densità spettrale di potenza**

$$\boldsymbol{S_Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)}$$

Quest'ultima ci da informazioni circa la distribuzione della potenza tra le varie armoniche che formano il segnale. Se volessimo studiare la potenza ripartita tra le frequenze che si trovano tra $f_1 = 2f_0$ ed $f_2 = 6f_0$ dovremo praticamente calcolare la sommatoria:

$$\boldsymbol{S_{[f_1;f_2]}(f) = \sum_{n=2}^{6} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)}$$

Possiamo ottenere la potenza complessiva del segnale dall'integrale della densità spettrale di potenza:

$$\boldsymbol{P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0) \right] df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}$$

La densità spettrale di potenza può quindi essere rappresentata in un vero e proprio spettro del segnale trasformato. Possiamo qui di seguito elencare alcune sue caratteristiche principali

- Possiamo affermare che essa **è sempre maggiore o uguale a zero**, trattandosi della somma delle ampiezze in un modulo quadro:

$$\boldsymbol{S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad \rightarrow \quad S_X \geq 0}$$

- **Se $x(t)$ è un segnale reale, allora la densità spettrale di potenza è pari**, esattamente come lo spettro delle ampiezze:

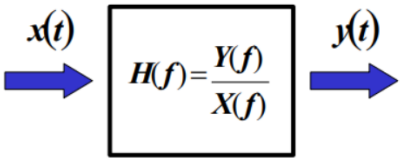
$$\boldsymbol{x(t)} \text{ è } \boldsymbol{reale} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_x(f) = S_x(-f)}$$

- La densità spettrale di energia **dipende solo dallo spettro delle ampiezze e non da quello delle** fasi, infatti dipende dalle ampiezze degli impullsi; del resto modificando la fase di un coseno (un'armonica) non si nota alcun cambiamento circa la potenza che trasporta

- Si può ricavare **la potenza complessiva del segnale integrando la densità spettrale di potenza**:

$$\boldsymbol{P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df}$$

- Si può dimostrare che **la densità spettrale di potenza del segnale in uscita da un sistema si può ottenere come prodotto tra la densità spettrale di potenza del segnale in ingresso ed il modulo quadro della funzione di trasferimento del sistema**:



$$\boldsymbol{P_y = |H(f)|^2\, P_x}$$

Esercizio

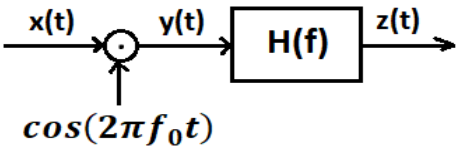
Siano dati il segnali $x(t) = 240\ sinc(240t) - 60sinc(120t)$ e $y(t) = x(t)\cos(160\pi t)$. Infine sia $z(t)$ il segnale ottenuto mettendo $y(t)$ in ingresso a un filtro ideale passa basso la cui funzione di trasferimento è:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{300}\right)$$

1. Calcolare l'energia del segnale $x(t)$;
2. Calcolare il valore medio di $x(t)$;
3. Lo spettro della $y(t)$ (disegnarlo);
4. L'energia del segnale $z(t)$;

Si noti che il segnale $y(t)$ è ottenuto modulando $x(t)$: viene infatti moltiplicato per un segnale del tipo $\cos(2\pi f_0 t)$, nello specifico dal coseno: $(160\pi t)$, in cui $2f_0 = 160$, quindi la cui portante è $f_0 = 80Hz$.

Possiamo graficare il nostro sistema come segue: il segnale in ingresso $x(t)$ viene modulato da un coseno a portante $f_0 = 80Hz$ e successivamente viene posto in ingresso ad un filtro, un sistema avente funzioone di trasferimento $H(f)$; dal filtro otteniamo in uscita $z(t)$



1. Calcolare l'energia del segnale $x(t)$

Il segnale $x(t)$ è dato da una somma di seni cardinali e il seno cardinale è un segnale di energia. Questo significa che trovare la sua energia nel dominio del tempo potrebbe effettivamente risultare scomodo poiché si tratta dell'integrale del modulo quadro del segnale (nel nostro caso si tratta semplicemente del quadrato del segnale, essendo quest'ultimo un segnale reale);

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [240\ sinc(240t) - 60sinc(120t)]^2$$

Il seno cardinale quadro non è semplice da integrare per cui sarebbe ideale trovare un'altra strada per il calcolo di questa energia.

Avendo trattato la densità spettrale di energia, possiamo passare nel dominio della frequenza, al quale corrisponderebbe uno spettro $X(f)$ formato da dei rect, essendo quest'utimi la trasformata del seno cardinale per il teorema della dualità; successivamente poi calcoleremo l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ per ottenere l'energia dalla corrispondente densità spettrale.

Si noti anche che passando in frequenza è più semplice calcolare anche il valor medio [richiesto nel punto (2)] poiché basterà verificare che vi sia un impulso centrato in 0: l'ampiezza di quest'ultimo è pari al valor medio del segnale.

Calcoliamo lo spettro del segnale $x(t)$, rifacendoci al teorema di dualità:

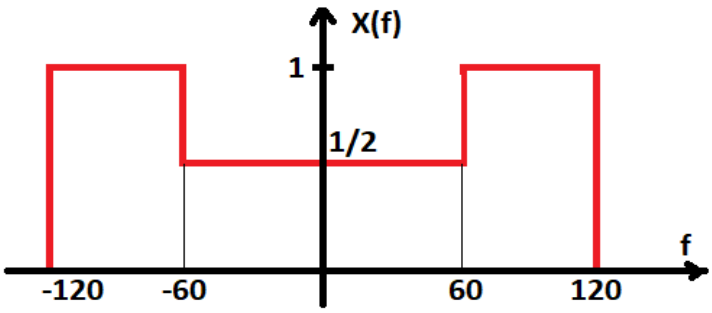
$$T.Dualità:\ X(t) \to x(-f) \xRightarrow{Quindi} sinc(tT) \to \frac{1}{T}\ rect\left(\frac{-f}{T}\right) \xrightarrow{Il\ rect\ è\ pari} sinc(tT) \to \frac{1}{T}\ rect\left(\frac{f}{T}\right)$$

Otteniamo così:

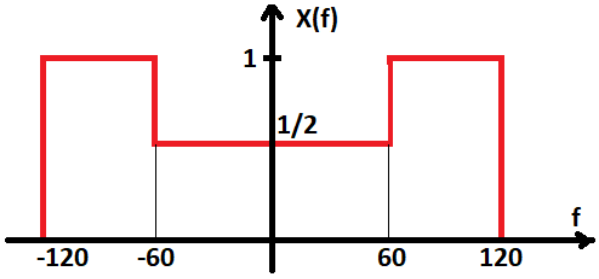
$$x(t) = 240\ sinc(240t) - 60sinc(120t) \to X(f) = 240\left[\frac{1}{240}\pi\left(\frac{f}{240}\right)\right] - 60\left[\frac{1}{120}\pi\left(\frac{f}{120}\right)\right]$$

$$X(f) = \pi\left(\frac{f}{240}\right) - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{f}{120}\right)$$

Grafiamo tale spettro: si tratta di un rect centrato in 0 di base 240 (che si estende quindi da -120 a 120) e ampiezza unitaria al quale viene rimosso un secondo rect avente ampiezza dimezzata e centrato in 0, con base pari a 120 (che quindi si estende da -60 a 60).



Otteniamo allora l'energia come integrale esteso a tutto il segnale della densità spettrale, ovvero del modulo quadro dello spettro del segnale:



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\ df\ = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\ df$$

Siccome il segnale è simmetrico rispetto all'asse verticale e dobbiamo considerare l'area sottesa (l'integrale), possiamo considerare la parte del segnale che va da 0 a 120 e moltiplicarla per due:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\ df = 2\int_{0}^{120} |X(f)|^2\ df = 2\left[\int_{0}^{60} 1\ df + \int_{60}^{120} \frac{1}{4} df\right] = 2[f]_0^{60} + \frac{1}{2}[f]_{60}^{120} = 150$$

Si tratta, praticamente, di calcolare l'area sottesa dal quadrato dello spettro delle ampiezze

Lavorare più facilmente in funzione del dominio
Un "trucco" (ma non una regola) per lavorare meglio è andare a lavorare nel dominio ove vi sono rect o triangoli perché questi segnali sono molto più semplici da affrontare rispetto che al seno cardinale o al seno cardinale quadro.

2. Calcolare il valor medio del segnale $x(t)$

Riconoscere il valor medio a partire dallo spettro di un segnale
Il valor medio del segnale può essere facilmente deducibile dal suo spettro; basterà infatti cercare un impulso centrato in 0 e verificare quanto valga la sua ampiezza, quest'ultima consiste proprio nel valor medio del segnale.

NB! Si faccia attenzione che non si cerca il valore che lo spettro assume quando $f = 0$, bensì il valore che un eventuale impulso assume nell'origine (in $f = 0$); in mancanza di tale impulso il valor medio è nullo.

Il modulo lo possiamo trovare facilmente osservando lo spettro $X(f)$: non vi è alcun impulso in $f = 0$, la funzione assume il valore costante (gradino) a 1/2, questo significa che il suo valor medio è nullo:

$$< x(t) > = 0$$

Possiamo dimostrare infatti che il del valor medio, che viene visto come limite per $t \to \infty$ del rapporto tra il periodo e l'integrale in $\pm\, T/2$, può essere visto come il limite per $t \to \infty$:

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ dt\ \ = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt$$

Siccome la trasformata del segnale $x(t)$ è data da:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t}\ dt$$

Se valutassimo questa trasformata quando $f = 0$ possiamo osservare come questa coincida con la forma del valor medio appena dedotta, poiché quando $f = 0$ l'esponenziale assume valore unitario:

$$[X(f)]_{f=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t}\ dt\right]_{f=0} \rightarrow\ \ X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi(0)t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt$$

Possiamo quindi scrivere:

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt\ \ = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\ X(0)$$

Nel nostro caso tale limite è pari a 0.

2. Calcolare lo spettro del segnale $y(t)$ e disegnarlo

Il segnale $y(t)$ è ottenuto modulando il segnale $x(t)$ con un coseno: $y(t) = x(t)\cos(160\pi t)$

Lo spettro del segnale in questione lo si ricava ricordando ciò che afferma il teorema della modulazione:

$$T.Modulazione: \quad x(t)\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Ricordando che la frequenza portante del coseno, in questo caso, la otteniamo come $2f_0 = 160 \rightarrow f_0 = 80$ possiamo scrivere lo spettro del segnale $y(t)$ come:

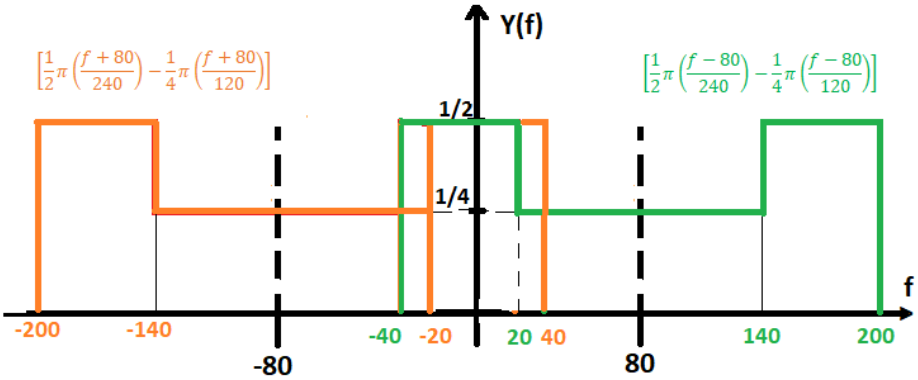
$$y(t) = x(t)\cos(160\pi t) \quad \rightarrow \quad Y(f) = \frac{X(f-80)+X(f+80)}{2}$$

Si tratta allora di dover graficare il seguente segnale:

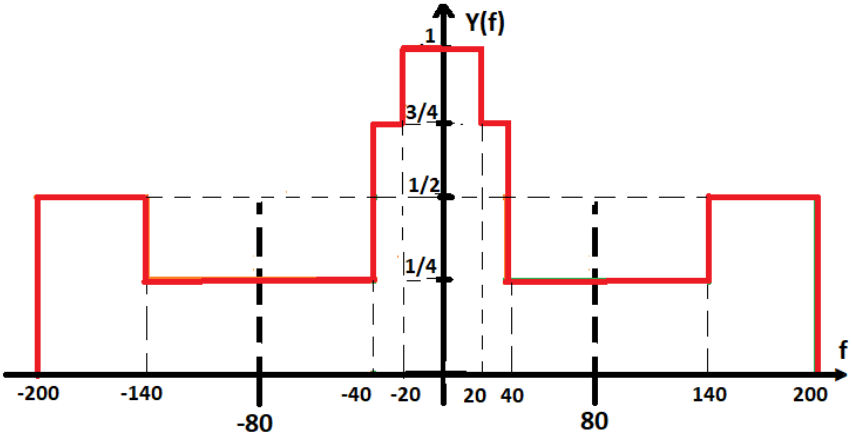
$$Y(f) = \frac{1}{2}\left\{\left[\pi\left(\frac{f-80}{240}\right) - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{f-80}{120}\right)\right] + \left[\pi\left(\frac{f+80}{240}\right) - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{f\mp 80}{120}\right)\right]\right\}$$

Tale segnale è formato da due coppie di rect: la prima coppia di rect che viene traslata in frequenza e viene centrata in 80 e la seconda che invece è centrata in -80; si tratta praticamente dello spettro $X(f)$ che viene centrato nella portante $f_0 = \pm 80$

$$Y(f) = \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{f-80}{240}\right) - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{f-80}{120}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{f+80}{240}\right) - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{f+80}{120}\right)\right]$$



Come possiamo notare vi sono delle parti del segnale che si sovrappongono nell'intervallo [-40;40] che dovremo andare a sommare, dato che il segnale è dato dalla somma della parte in arancione e quella in verde. Nello specifico, avremo:



Tra -40 e -20 $Y(f)$ vale:

$$Y(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Tra -20 e 0 $Y(f)$ vale:

$$Y(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Modulazione e sovrapposizioni

Nella modulazione di un segnale può capitare sia che i segnali centrati in $+f_0$ e $-f_0$ (con "f_0" portante della cosinusoide) siano disgiunti oppure che si sovrappongono: tutto ciò dipende dalla larghezza della banda del segnale. Qualora vi fossero delle sovrapposizioni è necessario eseguire la somma e trarre un unico segnale privo di sovrapposizioni

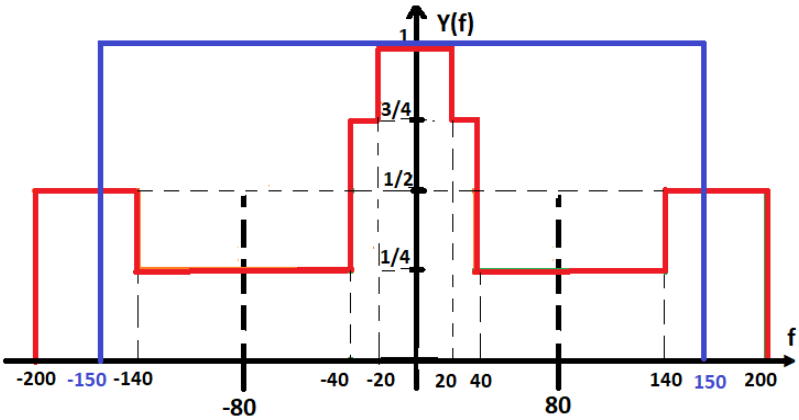
4. Calcolare l'energia del segnale $z(t)$

Il segnale $z(t)$si ottiene come uscita del filtraggio di $y(t)$ con un filtro avente funzione di trasferimento:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{300}\right)$$

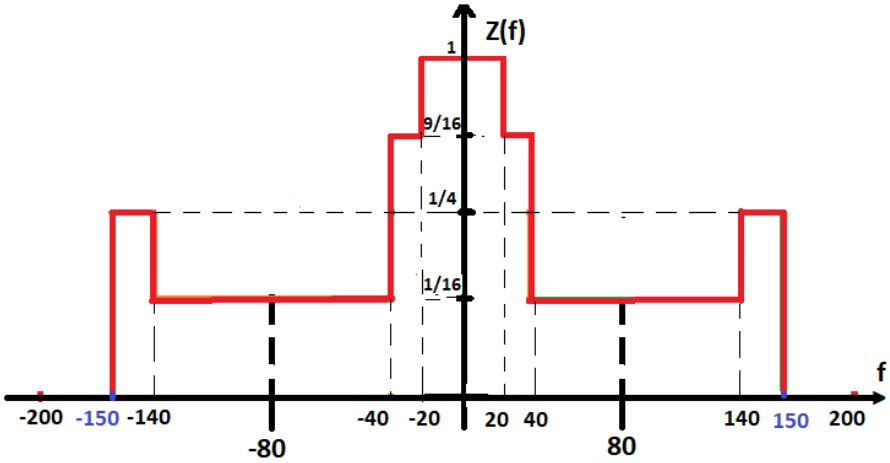
Disponendo già dello spettro $Y(f)$, lavoriamo in frequenza e procediamo alla moltiplicazione (grafica) per ottenere $Z(f)$, lo spettro di $z(t)$:

$$Z(f) = H(f)Y(f)$$



Lo spettro Y(f) è quello che abbiamo ottenuto nel punto (3); la funzione di trasferimento $H(f)$ è un rect di ampiezza unitaria e centrato in 0, avente base pari a 300 (estendendosì quindi da -150 a 150), si tratta praticamente di un filtro passa basso.

L'azione del filtro è quella di tagliare tutte le amroniche che si trovano a frequenze minori di -150 e/o maggiori di 150. Il risultato del filtraggio quindi è lo spettro $X(f)$, identico ad $Y(f)$ ma cui andamento va da -150Hz a 150Hz.



Otteniamo nuovmente l'energia riferendoci allo spettro, attraverso l'integrazione della densità spettrale di energia:

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 |H(f)|^2\, df$$

Si noti che effettivamente lo spettro $Z(f)$ equivale praticamente allo spettro al quadrato $Y(f)$ che si estende solo tra -150 e 150, inoltre, data la simmetria, consideriamo due volte l'integrale tra 0 e 150:

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 |H(f)|^2\, df = \int_{-150}^{150} |Y(f)|^2\, df = 2\int_{0}^{150} |Y(f)|^2\, df$$

$$E_z = 2\int_{0}^{150} |Y(f)|^2\, df = 2\left[\int_{0}^{20} 1^2\, df + \int_{20}^{40} \left(\frac{3}{4}\right)^2 df + \int_{40}^{140} \left(\frac{1}{4}\right)^2 df + \int_{140}^{150} \left(\frac{1}{2}\right)^2 df\right] =$$

$$E_z = 2\left[\int_{0}^{20} df + \frac{9}{16}\int_{20}^{40} df + \frac{1}{16}\int_{40}^{140} df + \frac{1}{4}\int_{140}^{150} df\right] = 2\left[[f]_0^{20} + \frac{9}{16}[f]_{20}^{40} + \frac{1}{16}[f]_{40}^{140} + \frac{1}{4}[f]_{140}^{150}\right]$$

$$E_z = 2\left[20 + \frac{9}{16}(20) + \frac{1}{16}(100) + \frac{1}{4}(10)\right] = 2\left[20 + \frac{45}{4} + \frac{25}{4} + \frac{5}{2}\right] = 2\left[\frac{80 + 45 + 25 + 10}{4}\right] = 80$$

Sapendo che la banda di $Y(f)$ è pari a 105Hz possiamo affermare che la banda di Z è la banda al 76%:

$$\frac{B_z}{B_y} = \frac{80}{105} = 0.76 \;\rightarrow\; B_z = B_{76\%}$$

Le misure logaritmiche: il decibel (dB)

In genere, il valore di un segnale (la sua ampiezza) o ancor più spesso il valore della sua potenza, viene espresso come rapporto rispetto ad un valore di riferimento.
Ad esempio, se si considera la potenza di un segnale erogato da un sistema, spesso la potenza in uscita viene rapportata a quella del segnale in ingresso; così facendo ci si rende conto se il sistema è un amplificatore (quindi ha un rapporto maggiore di uno) o un attenuatore (ha un rapporto inferiori di 1).
Tale rapporto viene definito con il nome di **guadagno** del sistema:

$$G = \frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}$$

Spesso questo rapporto viene espresso in scala logaritmica, nello specifico in **decibel;** il valore in decibel di un guadagno può essere ottenuto moltiplicando per 10 il logaritmo in base 10 del rapporto stesso:

$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right)$$

Guadagno a 3dB

Un valore con cui spesso ci si trova a lavorare sono i 3dB (ad esempio nella banda a 3dB); vediamo di capire meglio a cosa equivale questa quantità:

$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right) = 3dB \quad \rightarrow \quad 3dB = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right)$$

Per la proprietà dei logaritmi, quando l'argomento di un logaritmo è un rapporto si può scrivere quest'ultimo come differena tra i logaritmi dei termini rapportati:

$$3dB = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right) \rightarrow 3dB = 10[\log_{10}(|P_{out}|) - \log_{10}(|P_{in}|)] \rightarrow \frac{3}{10} = [\log_{10}(|P_{out}|) - \log_{10}(|P_{in}|)]$$

A questo punto troviamo la potenza in uscita, per farlo dovremo eseguire l'operazione inversa al logaritmo (= l'elevamento a potenza), essendo quest'ultimo definito in base 10 dovremo passare all'elevamento a potenza di 10 elevato ad ambo i membri dell'equazione:

$$\log_{10}(|P_{out}|) = \log_{10}(|P_{in}|) + \frac{3}{10} \quad \rightarrow \quad 10^{\log_{10}(|P_{out}|)} = 10^{\log_{10}(|P_{in}|)+\frac{3}{10}}$$

La potenza a secondo membro è un prodotto di potenze poiché vi è una somma all'esponente:

$$10^{\log_{10}(|P_{out}|)} = 10^{\log_{10}(|P_{in}|)+\frac{3}{10}} \rightarrow 10^{\log_{10}(|P_{out}|)} = 10^{\log_{10}(|P_{in}|)}\, 10^{\frac{3}{10}} \quad \rightarrow \quad P_{out} = P_{in} * 10^{\frac{3}{10}}$$

Con un guadagno pari a 3 dB si ottiene una potenza in uscita che è circa il doppio della potenza in ingresso al sistema, se il guadagno è pari a -3dB si ottiene una potenza in uscita dimezzata:

$$P_{out} = 10^{\frac{3}{10}} P_{in} \quad \rightarrow \quad P_{out} = 1.995\, P_{in} \approx 2P_{in}$$

Funzione di trasferimento in dB

Possiamo definire anche la funzione di trasferimento $H(f)$ in decibel, definendola come 10 volte il logaritmo in base 10 del rapporto tra il modulo quadro di $H(f)$ ed il modulo quadro di $H(f_0)$ (il valore quadro del valore di $H(f)$ calcolata in f_0, preso come valore di riferimento del rapporto):

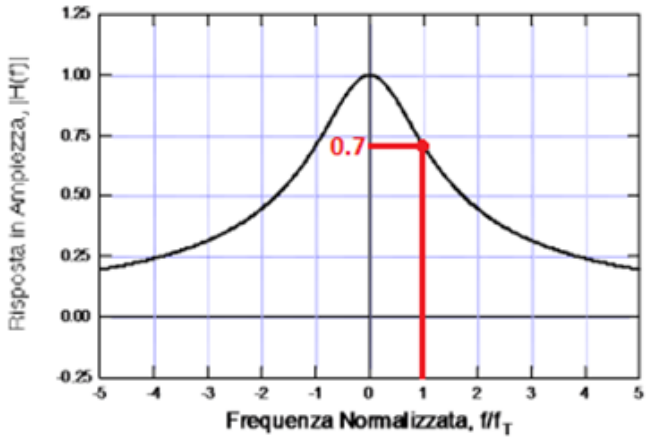
$$|H(f)|_{dB} \triangleq 10\log_{10}\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right)$$

Normalmente, f_0 è una frequenza di riferimento, è tale frequenza per cui lo spettro assume il suo valore massimo. Ad esempio, per un filtro passa basso tipicamente la frequenza di riferimento è $f_0 = 0$, in cui il rect è più alto e quindi assume il valore maggiore.

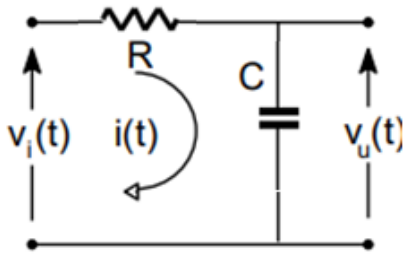
Passando ai decibel la scala di rappresentazione varia e vengono "modificati" i grafici degli spettri.

Filtro passa basso e rappresentazione logaritmica

Nel caso di filtro passa basso nella rappresentazione lineare abbiamo visto che lo spettro delle ampiezze della funzione di trasferimento del circuito RC che lo realizza è più o meno simile a quella di un rect: si trattta di una risposta con una curva più ampia intorno all'origine, che lascia passare inalterate le frequenze intorno all'origine. A tal proposito, con questo filtro si preferisce lavorare quando $f \leq f_T$, nello specifico entro il range in cui $f/f_T = 1$, poiché in tale punto avremo $H(f) = 1/\sqrt{2} = 0.7$, al di la di questa frequenza la funzione di trasferimento decresce rapidamente e il filtraggio avviene con perdita di informazioni perché vengono attenuate le armoniche.



$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_T)^2}}$$



Pur mantenendo le stesse caratteristiche, quando la rappresentazione della funzione di trasferimento avviene in scala logaritmica il suo cambiamento è differente.

Iniziamo con il dire che, normalmente, la rappresentazione logaritmica avviene solo per frequenze positive (quindi non su scala bilatera).

La rappresentazione è differente perché non andremo a graficare l'andamento dello spettro delle ampiezze di $H(f)$, bensì il logaritmo in base dieci del rapporto del modulo quadro di $H(f)$ e del mosulo quadro di $H(f)$ calcolato nel punto f_0:

$$|H(f)|_{dB} \triangleq 10\log_{10}\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right)$$

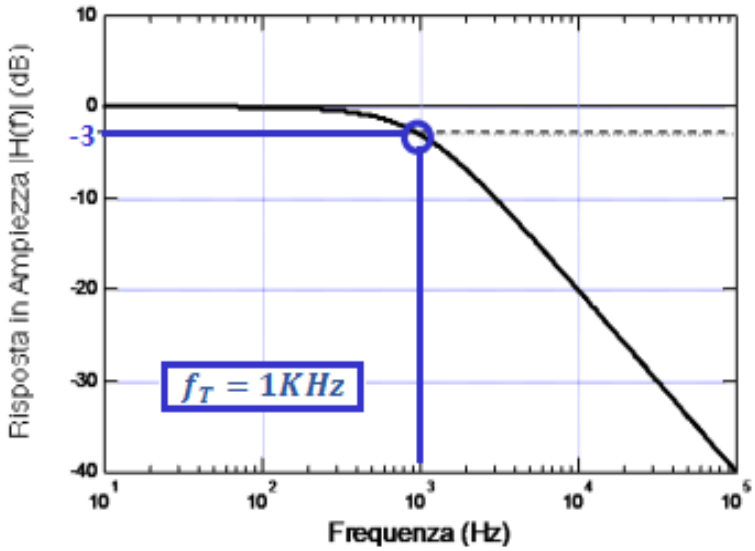
$H(f_0)$ in questo caso è dato dal valore di $H(f)$ alla frequenza $f = 0$ (dove, in scala lineare, assume il massimo valore: $H(0) = 1$)

La curva in scala logaritmica quindi deve necessariamente partire da 0: quando $f = 0$ avremo la funzione di trasferimento calcolata nella frequenza di riferimento: $H(f) = H(f_0)$ e quindi l'argomento del logaritmo è pari ad 1:

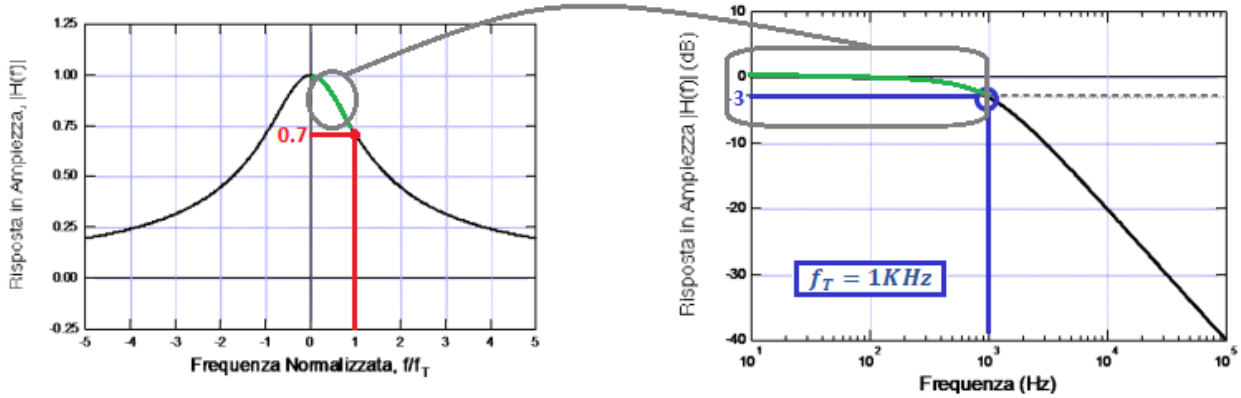
$$|H(f_0)|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|H(f_0)|^2}{|H(f_0)|^2}\right) = 10\log_{10}(1) = 0$$

Il valore resta perlopiù costante fino a quando non si ha una ripida discesa dalla frequenza di taglio in poi; nell'esempio rappresentato la frequenza di taglio è $f_T = 1KHz = 10^3 Hz$;

in prossimità della frequenza di taglio il valore della risposta del filtro è pari a -3dB, quindi in questo caso la frequenza di taglio è la frequenza per cui la potenza viene "tagliata" a metà (viene dimezzata)



La rappresentazione logaritmica consente di rappresentare “abbracciando” più frequenze, che variano in maniera esponenziale, quello che graficamente accade è che viene effettuato uno “zoom” della scala lineare, considerando chiaramente solo le frequenze positive.

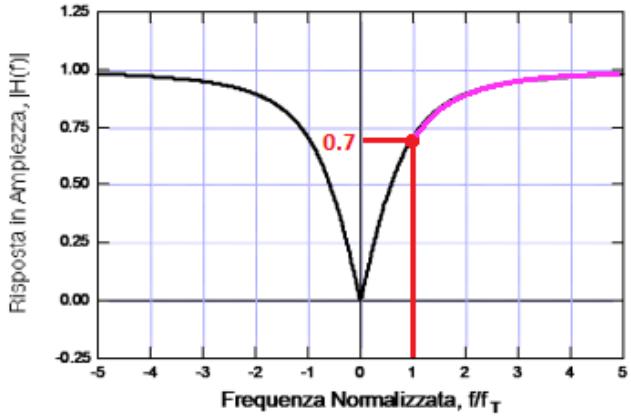


Banda a 3dB

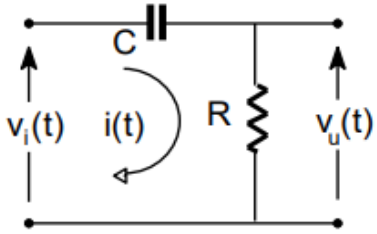
A questo punto è intuitivo capire perché si parla di banda a 3dB: qui lo potenza del segnale viene dimezzata e, al di la di tale banda non conviene lavorare perché si ha perdita di informazione a causa della forte attenuazione del filtro; questa banda è quella che viene misurata da 0 alla frequenza di taglio f_T in cui si ha il valore pari a -3dB dei moduli.

Filtro passa alto e rappresentazione logaritmica

Possiamo anche trattare il caso del filtro passa altro nel passaggio dalla scala lineare e scala logaritmica: la funzione di trasferimento in questione era rappresentata da un segnale perlopiù costante che decresce nell’intorno di $f = 0$, questo filto fra passare perlopiù inalterate solo le frequenze che si trovano al di sopra della frequenza di taglio f_T



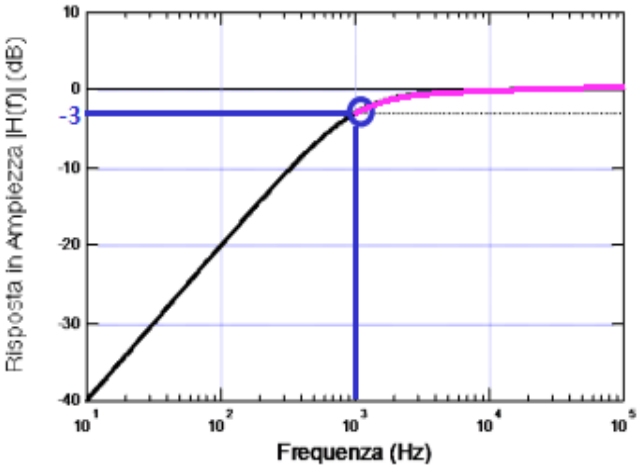
$$|H(f)| = \sqrt{\frac{(f/f_T)^2}{1+(f/f_T)^2}}$$



La scala logaritmica zoomma la scala lineare: l’andamento logaritmico dello spettro delle ampiezze è uno “zoom” dello spettro in scala lineare intorno alla frequenza di taglio f_T;

Questa volta il valore massimo di $H(f)$ si ha per $f \to \infty$: osservando lo spettro lineare possiamo notare che aumentando la frequenza, la risposta tende a stabilizzarsi al valore 1. Questo significa che la frequenza f_0 si ha al tendere di f all’infinito, possiamo in generale scrivere che:

$$|H(f_0)|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|H(f_0)|^2}{|H(f_0)|^2}\right) = 10\log_{10}(1) = 0$$



In generale diremo che:

- Quando un guadagno vale **3dB** significa che la grandezza considerata è pari al **doppio della grandezza di riferimento**

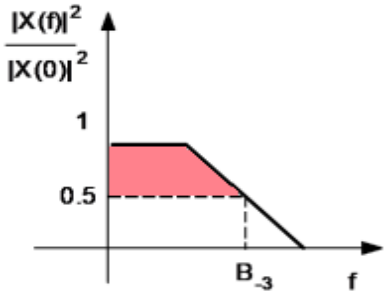
$$\boxed{G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right) = 3dB \quad \rightarrow \quad G = \frac{|P_{out}|}{|P_{in}|} = 2}$$

- Quando un guadagno vale **-3dB** significa che la grandezza considerata è pari alla **metà della grandezza di riferimento:**

$$\boxed{G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|P_{out}|}{|P_{in}|}\right) = -3dB \quad \rightarrow \quad G = \frac{|P_{out}|}{|P_{in}|} = \frac{1}{2}}$$

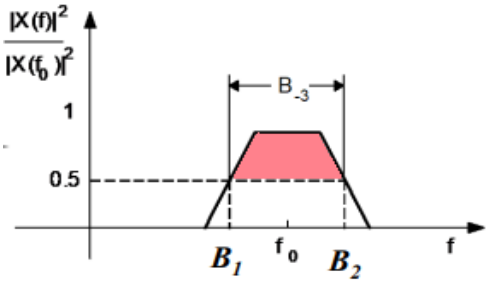
Definizione di banda a 3dB:

Sia dato un sistema o un segnale la cui funzione di trasferimento (o la sua densità spettra di energia/potenza) assume il valore massimo per $f = f_0$.
Definiziamo limite di banda a -3dB (o semplicemente "banda a -3dB") la frequenza B_{-3} tale che:



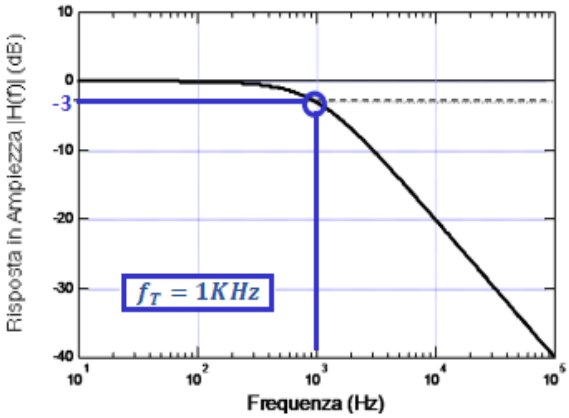
$$\frac{|X(B_{-3})|}{|X(f_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{|X(B_{-3})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi tale frequenza per cui guadagno vale $1/2$, quindi per cui il segnale in uscita risulta essere dimezzato rispetto all'ingresso. D'altronde avremo che $10\log_{10}(1/2) = -3(dB)$.



Questa banda è considerata tra l'asse verticale (quindi tra l'origine) e B_{-3}; è chiaro che quando andiamo a lavorare con un segnale che non parte dall'origine o con lo spettro di un filtro passa banda, la banda a $3dB$ viene calcolata considerando l'intervallo $[B_1, B_2]$, questo intervallo sarà di ampiezza B_{-3}

Quando si sente parlare di banda a 3dB si intende praticamente qualla banda che si sceglie per un sistema reale cui risposta va decrescendo all'aumentare della frequenza: viene scelta quella banda delimitata da una frequenza per il quale valore del segnale è pari a -3dB, entro questo range di frequenze il valore del modulo quadro del segnale è maggiore di 1/2.



Anche se lo abbiamo dimostrato graficamente, possiamo aver la certezza che **il limite di banda a -3dB, ovvero la frequenza B_{-3} è pari alla frequenza di taglio f_T:**

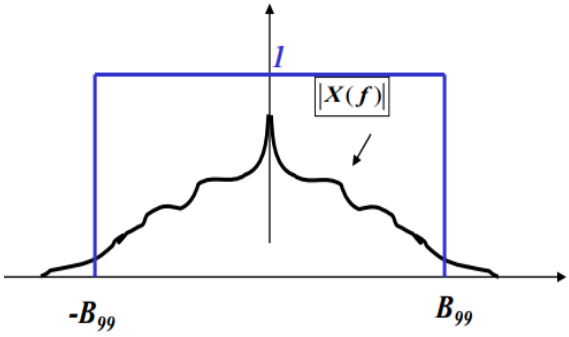
$$|H(B_{-3})|^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 + [2\pi(B_{-3})RC]^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \quad B_{-3} = \frac{1}{2\pi RC} = f_T$$

Un'altra banda che abbiamo già trattato ' la banda al 99%: si tratta della banda che fa passare il 99% dell'energia totale del segnale, quindi quelle frequenze per cui si possa ottenere, complessivamente, il 99% totale di energia trasportata. Vediamo di darne una definizione più precisa.

Definizione di banda al 99%:

Sia dato un segnale $x(t)$ il cui spettro di ampiezza assume il valore massimo per $f = f_0$; allora definiremo banda al 99% la banda che fa passare il 99% del contenuto energetico segnale:

$$\int_{-B_{99}}^{+B_{99}} E_x(f)\, df = 0.99E_x \;\rightarrow\; \frac{\left[\int_{-B_{99}}^{+B_{99}} E_x(f)\, df\right]}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\, df\right]} = 0.99$$



Significa quindi che il rapporto tra l'energia entro la banda al 99%, calcolata come integrale della densità spettrale di energia nell'intervallo $[-B_{99}, B_{99}]$, e l'energia totale del segnale è pari a 0.99.

Funzione di autocorrelazione per segnali ad energia finita

Una funzione che ci servirà perlopiù per i segnali aleatori (che affronteremo prossimamente) è la **funzione di autocorrelazione;**

La funzione di autocorrelazione da informazioni circa la correlazione che vi è tra il segnale $x(t)$ ad un certo istante "t" ed una sua "copia" all'istante $t+\tau$: $x(t-\tau)$; nello specifico da delle informazioni su come evolve il segnale nel tempo; la funzione è definita come:

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau) dt$$

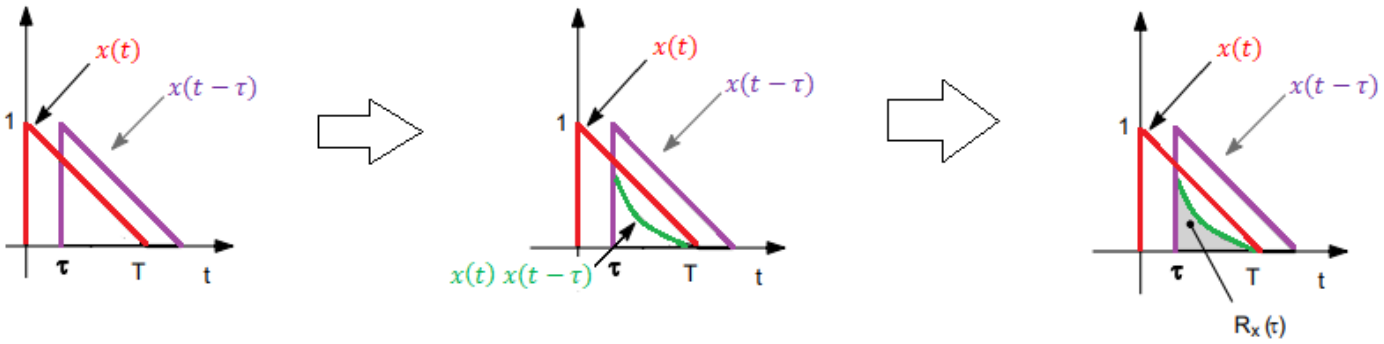
La funzione viene definita dall'integrale del prodotto tra il segnale $x(t)$ e lo stesso segnale traslato di un tempo τ.

Vediamo di capire graficamente il significato dell'autocorrelazione; osserveremo dei risultati che ci ricorderanno quanto affrontato per il calcolo dell'integrale di convoluzione, poiché tale prodotto di funzione, dal punto di vista matematico, è praticamente la stessa cosa, infatti l'integrale di convoluzione è definito come l'integrale del prodotto di due funzioni: una traslata e una no:

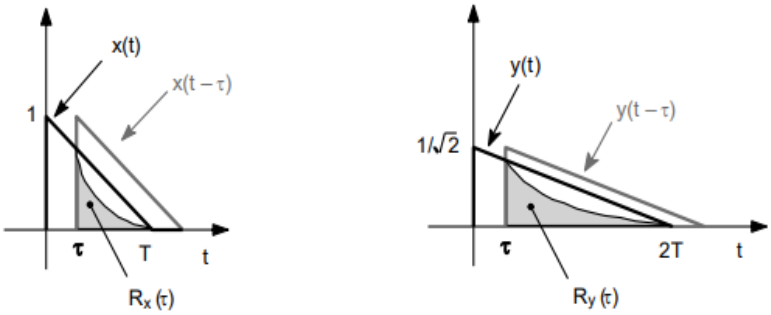
$$X(f) \otimes Y(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, [Y(f-\nu)]\, d\nu$$

Chiaramente questa similitudine vale solo dal punto di vista matematico (a meno di un segno).

1. Consideriamo un segnale: $x(t)$, avente l'andamento a forma triangolare rappresentato; dopo di che consideriamo lo stesso segnale ma traslato di una quantità τ: $x(t-\tau)$.
2. Di questi due segnali ne calcoliamo il prodotto, così come suggerito dall'argomendo dell'integrale di autocorrelazione; è chiaro che il risultato del prodotto sarà un segnale non nullo nell'intervallo in cui entrambi i segnali sono definiti, poiché al di fuori di tale intervallo basterà un segnale non definito (nullo) per annullare l'intero prodotto. In questo caso il il segnale prodotto è la curva sottesa in figura.
3. Dopo di che si calcola l'integrale, nonché l'area sottesa dalla curva del prodotto.

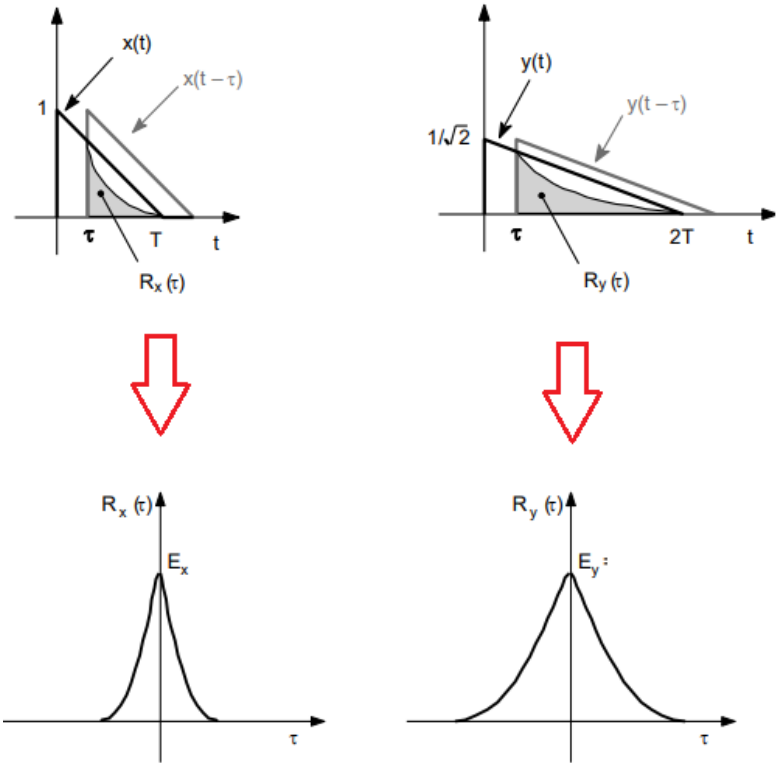


L'autocorrelazione è una funzione che ci da informazioni circa la **velocità con il quale varia il segnale**: considerando la funzione di autocorrelazione del segnale $x(t)$ dall'istante $t=0$ all'istante $t=\tau$ e confrontandola con quella del segnale $y(t)$ possiamo notare che la funzione di autocorrelazione di $x(t)$ sottende un'area minore rispetto a quella di $y(t)$, questo significa che $x(t)$ **varia più rapidamente** di $y(t)$



La rappresentazione di una funzione di autocorrelazione in funzione del tempo è un **segnale decrescente** che ha un massimo in 0 e che scende tanto più rapidamente quanto più è veloce la variazione del sistema (quindi tanto più piccola è l'area sottesa dall'integrale di correlazione).

Quindi **la ripidità con il quale decresce la funzione di autocorrelazione da informazioni circa la velocità di variazione del segnale**.



Per i segnali ad **energia finita** possiamo identificare delle caratteristiche principali della funzione di autocorrelazione

- In $t = 0$ la funzione di autocorrelazione consiste nel calcolo dell'energia:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = E_x$$

  Quindi per calcolare l'energia si può passare dal calcolo nel tempo, dal calcolo della densità spettrale o dal calcolo della funzione di autocorrelazione in $t = 0$

- La funzione di autocorrelazione ha un massimo in 0 e poi decresce fino ad azzerarsi (quando ciò accade significa che la traslazione è così elevata che il segnale traslato e quello non traslato sono troppo distanti quindi non sovrapponendosi il loro prodotto è nullo).

- La funzione di autocorrelazione è una funzione pari, infatti è simmetrica rispetto all'asse verticale:

$$R_x(t) = R_x(-t)$$

Conoscere la velocità di variazione del segnale può essere utile, ad esempio, quando si deve creare un correttore di segnale in ricezione: se viene ricevuto un segnale video cui manca un'informazione, ad esempio un pixel, se il segnale è molto correlato significa che il segnale mancante contenente il pixel è molto vicino a quello ricevuto e si può ragionare su come ricostruire quest'ultimo poiché esso varia molto lentamente; più è veloce questo segnale, quindi meno è correlato il segnale, e più sarà difficile prevedere quale sia il suo valore all'istante precedente, dato che esso varia rapidamente.

Teorema di Wiener-Khintchine

Un teorema molto importante, che utilizzeremo spesso quando tratteremo i segnali aleatori, è il teorema di Wiener-Khintchine, che dimostra la correlazione tra la funzione di autocorrelazione e lo spettro di energia e di come l'una è la **trasformata di Fourier** dell'altro.

Hp: Sia dato un segnale $x(t)$, avente una funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ calcolata tra $t = 0$ ed un Istante $t = \tau$ e avente una densità spettrale di energia $E_x(f)$

Ts: La densità spettrale di energia del segnale E_x è la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione $R_x(t)$

Dimostrazione:

Possiamo osservare che la funzione di autocorrelazione di $x(t)$ calcolata in $t = \tau$ è data da:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, x(\alpha + \tau)\, d\alpha$$

Mettendo un meno in evidenza possiamo osservare che questo segnale integrale corrisponde ad una convoluzione, infatti:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, x(\alpha + \tau)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, x[-(\alpha - \tau)]\, d\alpha = x(\tau) \otimes x(-\tau)$$

Passando al dominio di Fourier scriviamo la convoluzione come il prodotto tra le trasformate corrispondenti:

$$F[R_x(\tau)] = F[x(\tau) \otimes x(-\tau)] = X(f)X(-f)$$

Ma si noti che $X(-f)$ è il complementare di $X(f)$: $X(-f) = X^*(f)$, questo ci porta allora a scrivere quanto segue:

$$F[R_x(\tau)] = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 = E_x(f) \rightarrow \quad F[R_x(\tau)] = E_x(f)$$

Quindi possiamo scrivere la densità spettrale di energia come:

$$\boxed{E_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, d\tau \xrightarrow{R_x \text{ è } pari} E_x = 2\int_{0}^{+\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f \tau)\, d\tau}$$

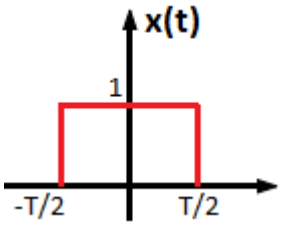
Siccome R_x è pari, quindi simmetrico rispetto all'asse verticale, possiamo scrivere l'integrale come due volte l'integrale tra 0 e $+\infty$ di $R_x(\tau)$ che moltiplica il coseno.

□

<u>Esempio: calcolo della funzione di autocorrelazione</u>

Si calcoli la densità spettrale e la funzione di autocorrelazione del segnale rettangolare:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



Passiamo al dominio della frequenza e otteniamo la corrispondente trasformata di Fourier (lo spettro del nostro segnale temporale):

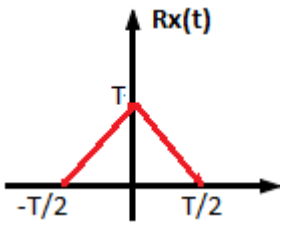
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \quad \rightarrow \quad X(f) = T\, sinc(fT)$$

Ricaviamo allora la densità spettrale come:

$$E_x = |X(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$$

A seguire, antitrasformando la densità spettrale di energia, ottenaimo la funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t) = F^{-1}[E_x(f)] = T\, \Delta\left(\frac{t}{T}\right)$$



Disponendo della densità spettrale di energia, possiamo calcolare l'energia come integrale di quest'ultima ma essendo formato da un seno cardinale, questa non è la scelta più semplice.

La troviamo quindi applicando una delle prorpietà della funzione di autocorrelazione per segnali ad energia finita (siamo sicuri che $x(t)$ sia ad energia finita perché non è periodico):

$$E_x(t) = R_x(0) = T$$

Per ottenere questo valore abbiamo semplicemente osservato quando vale $R_x(t)$ nel corrispondente grafico ma possiamo testare questo risultato passando al calcolo dell'energia nel tempo (poiché il segnale nel tempo: $x(t)$ è un rect ed è più semplice da integrare rispetto al seno cardinale):

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} 1\, dt = \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = T$$

Funzione di autocorrelazione per segnali a potenza finita

Analogamente ai segnali ad energia finita, possiamo calcolare la funzione di autocorrelazione per segnali a potenza finita.

Ci ricordiamo che ogni volta che passiamo da energia a potenza dobbiamo passare all'operazione di limite, analizzando il rapporto tra l'energia nel periodo ed il periodo nel quale viene calcolata la potenza.

Definiamo la funzione di autocorrelazione per i segnali a potenza finita come:

$$R_x(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t-\tau)dt \qquad \left[NB!\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T}\right]$$

Dualmente a quanto studiato per i segnali ad energia finita, per i segnali a **potenza finita** possiamo identificare delle caratteristiche principali della funzione di autocorrelazione

- In $t = 0$ la funzione di autocorrelazione consiste nel calcolo della potenza:

  $$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \frac{E_x}{T} = P_x$$

  Quindi per calcolare l'energia si può passare dal calcolo nel tempo, dal calcolo della densità spettrale o dal calcolo della funzione di autocorrelazione in $t = 0$

- La funzione di autocorrelazione ha un massimo in 0 e poi decresce fino ad azzerarsi (quando ciò accade significa che la traslazione è così elevata che il segnale traslato e quello non traslato sono troppo distanti quindi non sovrapponendosi il loro prodotto è nullo).

- La funzione di autocorrelazione è una funzione pari, infatti è simmetrica rispetto all'asse verticale:

  $$R_x(t) = R_x(-t)$$

Per segnali a potenza finita il teorema di Wiener-Khintchine afferma che **la densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di un segnale a potenza finita:**

$$\boxed{P_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, d\tau \xrightarrow{R_x \text{ è } pari} P_x = 2\int_{0}^{+\infty} R_x(\tau)\cos(2\pi f \tau)\, d\tau}$$

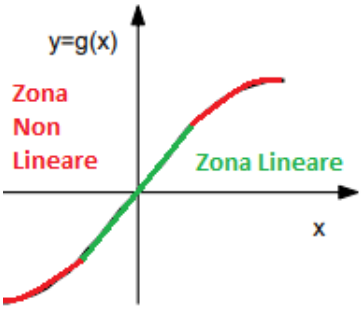
Questo teorema, come vedremo, lo useremo molto per i <u>segnali aleatori</u>: quest'ultimi vengono approssimati dai processi stocastici che vengono trattati come dei segnali di potenza.

Sistemi non lineari stazionari senza memoria

Fino ad ora abbiamo affrontato sia teoricamente che praticamente solo i sistemi lineari e stazionari poiché hanno delle caratteristiche che ci hanno permesso un chiaro studio dei sistemi e delle funzioni di trasferimento; infatti **la caratteristica principale di un sistema lineare stazionario è quello di conoscere la funzione di trasferimento del sistema conoscendo semplicemente la sua risposta all'impulso:**

$$\boldsymbol{H(f) = F[h(t)]}$$

È bene sapere però, anche solo in via teorica, che non tutti i sistemi reali sono lineari: si tratta infatti di sistemi per cui non è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti: la linearità ci garantiva che ponendo in ingresso al sistema un segnale combinazione lineare di più segnali, l'uscita del sistema poteva essere vista come combinazione lineare delle singole uscite calcolate in funzione dei singoli ingressi:



$$Linearità: \;\; x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(x) \quad \rightarrow \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(x)$$

Spesso non è così: molti sistemi reali assumono un comportamento lineare entro un range di frequenze e, al di là di esse, questi assumono dei comportamenti non lineari.

<u>Esempio</u>: l'amplificatore, ad esempio, si comporta in modo lineare entro un certo range di frequenze: quando viene chiesto di assumere un guadagno elevato (quindi quando si alza troppo la manopola dell'amplificazione), l'uscita dell'amplificatore si distorce ed il risultato è un segnale audio che non si sente bene; questo perché l'amplificatore sta lavorando in una zona non lineare.

Possiamo facilmente dedurre quando la risposta di un segnale è o meno lineare: basti pensare alla relazione d'uscita $y(t) = x^2(t)$ questa funzione non è lineare, quindi il sistema avente tale risposta all'impulso non è lineare; questo possiamo capirlo seguendo il ragionamento:
Se $x(t)$ fosse un segnale combinazione lineare di altri segnali, andando ad applicare la legge della risposta all'impulso otterremmo un segnale che non è combinazione lineare della legge applicata ai singoli segnali:

$$Se\; x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = [x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Poiché l'uscita sarebbe data dal quadrato della somma dei segnali, non dal quadrato dei singoli segnali.

Un segnale non lineare è caratterizzato da una risposta che non è combinazione lineare delle singole risposte calcolate per i segnali che compongono l'ingresso.

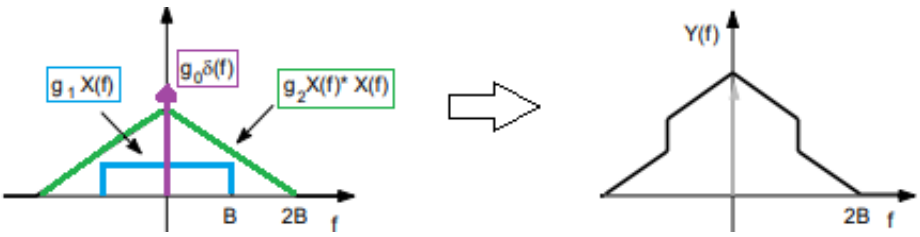
Dal punto di vista della trasformata di Fourier, il calcolo dello spettro di un segnale non lineare risulta essere complesso, poiché sarà necessario calcolare la trasformata dei vari gradi delle incognite che formano il segnale in uscita:

$$y(t) = g[x(t)] = g_0 + g_1 x(t) + g_2 x^2(t) + \cdots = g_0 + g_1 x(t) + g_2[x(t) * x(t)] + \cdots$$

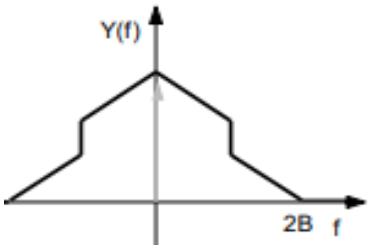
$$Y(f) = F[y(t)] = g_0\, \delta(f) + g_1 X(f) + g_2[X(f) \otimes X(f)] + \cdots$$

Vedendo ogni incognita di grado maggiore o uguale a 2 come prodotto di $x(t)$ per se stesso, possiamo notare come a tale prodotto corrisponda una convoluzione nel dominio della frequenza.

Ogni volta che viene convoluto il sistema la sua banda aumenta: se supponessimo di porre in ingresso al sistema un seno cardinale, nel dominio delle frequenze troveremo un rect. Nello specifico, l'uscita del sistema non lineare sarà formata da un impulso centrato in 0 e di ampiezza g_0, un rect centrato in 0 e di ampiezza g_1 e un triangolo che è risultato della convoluzione di due rect di ampiezza g_2 e centrato in 0.



Come possiamo osservare, l'uscita del sistema non lineare cui è stato inserito un rect non è più simile a quella del sistema lineare in funzione del medesimo ingresso: non si tratta infatti di un rect ma si un segnale frutto della somma di tutte le trasformate delle componenti; inoltre, la banda di questo segnale è praticamente raddoppiata a causa della convoluzione, in generale infatti **lo spettro di un segnale in uscita da un filtro non lineare viene n-uplicato**.



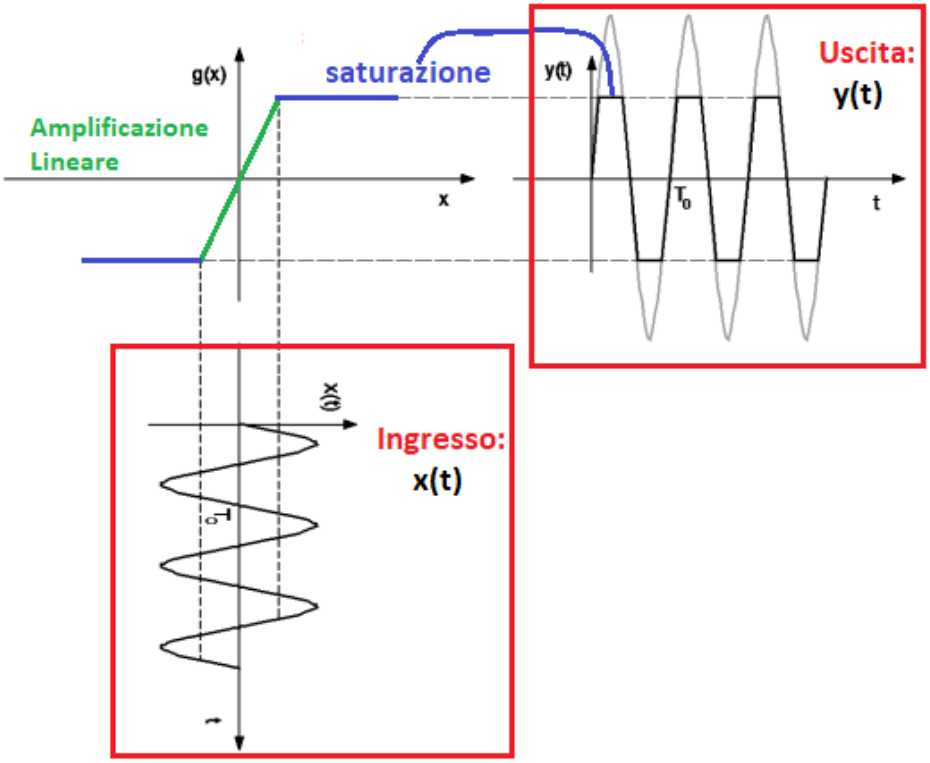
<u>Esempio: amplificatore con saturazione</u>

Un sistema non lineare stazionario privo di memoria è l'amplificatore: quest'ultimo ha una regione di saturazione, al di là del quale è impossibile aumentare l'amplificazione;

la risposta del segnale è caratterizzata da una salita entro il quale l'amplificazione non distorce il segnale, al di la di questa curva crescente possiamo notare che la risposta del filtro satura: raggiunge dei valori costanti.

Se ponessimo in ingresso al sistema un segnale oscillante $x(t)$ possiamo osservare il comportamento del filtro in uscita: in funzione della sua risposta, otteniamo un segnale $y(t)$ in uscita che ha lo stesso andamento di $x(t)$ amplificato di una certa quantità.

Se questo segnale però iniziasse ad oscillare con ampiezze notevolmente al di fuori del range in cui il sistema è lineare, inizieremmo ad osservare che, invece di ottenere un segnale sinusoidale in uscita, avremmo come risultato dell'amplificazione un segnale oscillante ma con una differente forma da quella sinusoidale: questo accade perché il segnale in uscita è limitato dai valori di saturazione dell'amplificatore, il che porta ad avere un valore massimo che non si trova più in una curva sinusoidale ma in una specie di "treno di rect" (anche se in realtà quello che vediamo rappresentato non è un vero e proprio rect ma si tratta del segnale sinusoidale d'ingresso amplificato cui è "tagliata" una parte a causa della saturazione).



Se questo segnale periodico venirre sviluppato in serie di Fourier non otteniamo la corrispondente serie calcolata nel coseno in ingresso ma un segnale che avrà molte più armoniche, dovute alle varie convoluzioni che si applicano al segnale a causa della non linearità.

Elettronicamente non è semplice costruire un sistema lineare: più esso deve essere lineare e più esso sarà costoso. Inoltre, qualsiasi sistema introduce una certa distorsione non lineare, che è bene saper gestire in modo da lavorare sempre nel range di frequenze che in cui il comportamento del sistema è lineare.

Spesso vengono date delle caratteristiche del sistema in questione, specificando quanto pesa la non linearità di quest'ultimo: si tratta di coefficienti di distorsione che tengono presente quanto venga distorto il segnale (quindi le armoniche che lo compongono); parleremo di:

- **Coefficiente di distorsione della k-esima armonica:**

$$D_k \triangleq \sqrt{\frac{(2A_k)^2/2}{(2A_1)^2/2}} = \frac{A_k}{A_1}$$

- **Coefficiente di distorsione armonica totale:**

$$D \triangleq \sqrt{\frac{P_D}{(2A_1)^2/2}} = \frac{d_{eff}}{\sqrt{2A_1}}$$

  In cui $d(t)$ è data da:

$$d(t) = y(t) - A_0 - 2A_1 \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) = 2\sum_{k=2}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

Quando è presente distorsione nel segnale sono presenti i **termini aggiuntivi di grado pari a 2 o superiore** che si ottengono dalla convoluzione.

$$Y(f) = F[y(t)] = g_0\,\delta(f) + g_1 X(f) + g_2[X(f) \otimes X(f)] + g_3[X(f) \otimes X(f) \otimes X(f)] + \cdots$$

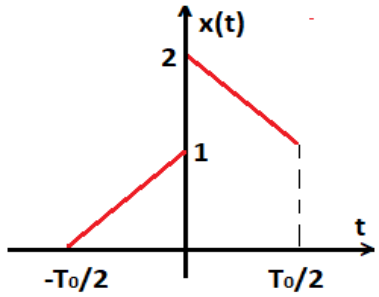
Infatti, quando il segnale non è distorto **mantiene solamente un possibile impulso nell'origine dato dalla componente continua e la trasformata dell'ingresso**.

I costruttori normalmente segnalano dei valori entro il quale il sistema può lavorare senza distorsioni, ad esempio entro un range di voltaggio. In questo range avremo dei coefficienti di distorsione circa pari a 0.

Chiaramente, noi preferiremo lavorare nel range in cui il sistema è lineare così che possiamo studiarne i comportamenti con i metodi affrontati.

Esercizio

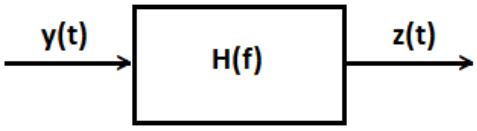
Sia dato il segnale rappresentato $x(t)$, si consideri il segnale $y(t)$ dato dalla periodicizzazione di $x(t)$ con un periodo $T = 2T_0$:



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\big(t - n(2T_0)\big)$$

1. Determinare l'espressione di $x(t)$
2. Determinare lo spettro del segnale periodico $Y(f)$
3. Determinare il valore medio $< y(t) >$
4. Determinare energia e potenza del segnale $y(t)$: E_y e P_y
5. Facendo passare il segnale periodico da un filtro passa banda avente risposta in frequenza $H(f)$ calcolare l'uscita corrispondente $Z(f)$

$$H(f) = 2\,rect\left(\frac{f - \frac{2}{T_0}}{\frac{3}{T_0}}\right) + 2\,rect\left(\frac{f + \frac{2}{T_0}}{\frac{3}{T_0}}\right)$$

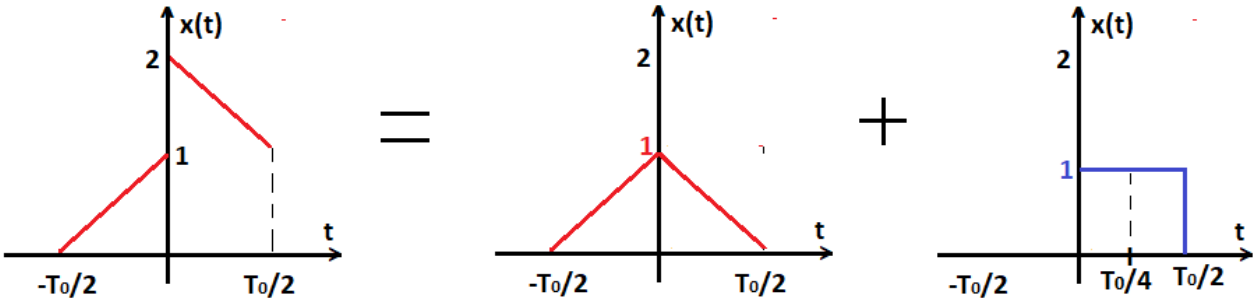


1. Determinare l'espressione di $x(t)$

Vogliamo ottenere $x(t)$ in funzione di soli rect e/o triangoli; possiamo osservare che questo segnale è praticamente un triangolo avente un lato (quello nel semiasse positivo) rialzato. Possiamo notare che quest'ultima parte del segnale è rialzata di 1: il suo valore massimo arriva a 2 anziché 1 e, inoltre, possiamo anche notare che non è definito oltre a $T_0/2$; questo significa che si tratta di un triangolo che è estato rialzato e tale effetto lo possiamo ottenere **sommando un rect di ampiezza unitaria definito tra 0 e $T_0/2$:**

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) + \pi\left(\frac{t - T_0/4}{T_0/4}\right)$$

*Il rect deve essere centrato in $T_0/4$ ed avere una base di $T_0/2$ affinché possa essere definito tra 0 e $T_0/2$



Siccome nel secondo punto è richiesto di ottenere la trasformata del segnale $y(t)$, ottenuto come periodicizzazione di $x(t)$ e dovremo applicare la formula di Poisson, troviamo sin da subito la trasformata del segnale troncato, ovvero di $x(t)$, così che potremo direttamente utilizzarla:

$$x(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) + \pi\left(\frac{t - T_0/4}{T_0/2}\right) \;\rightarrow\; X(f) = \frac{T_0}{2} sinc^2\left(f\frac{T_0}{2}\right) + \frac{T_0}{2} sinc\left(f\frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0}{2}\right)}$$

2. Determinare lo spettro del segnale periodico $Y(f)$

Trattandosi di un segnale periodico, per trovare lo spettro di $y(t)$ dovremo applicare la prima formula di Poisson:

$$Y(f) = C_n \delta\left(f - \frac{n}{2T_0}\right) = \left[\frac{1}{2T_0} X\left(\frac{n}{2T_0}\right)\right] \delta\left(f - \frac{n}{2T_0}\right)$$

Dato che abbiamo già ricavato lo spettro del segnale troncato $X(f)$, ricaviamo i primi due coefficienti dello spettro a righe (ricorda: trattandosi di un segnale periodico, il suo spettro è a righe):

$$C_n = \frac{1}{2T_0} X\left(\frac{n}{2T_0}\right) = \frac{1}{2T_0}\left[\frac{T_0}{2} sinc^2\left(\left(\frac{n}{2T_0}\right)\frac{T_0}{2}\right) + \frac{T_0}{2} sinc\left(\left(\frac{n}{2T_0}\right)\frac{T_0}{2}\right) e^{-j\pi\left(\frac{n}{2T_0}\right)\left(\frac{T_0}{2}\right)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2T_0}\left[\frac{T_0}{2} sinc^2\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{T_0}{4} sinc\left(\frac{n}{8}\right) e^{-j\pi\left(\frac{n}{4}\right)}\right] = \left[\frac{1}{4} sinc^2\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{8} sinc\left(\frac{n}{4}\right) e^{-j\pi\left(\frac{n}{4}\right)}\right]$$

Calcoliamo il primo coefficiente C_0, l'ampiezza dell'impulso centrato nell'origine; quest'ultimo rappresenta anche il valor medio del segnale periodico:

$$C_0 = < y(t) > = \left[\frac{1}{4} sinc^2(0) + \frac{1}{8} sinc(0) e^{-j\pi(0)}\right] = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(1) * (1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

3. Determinare il valore medio di $y(t)$

Il valore medio di un segnale periodico equivale all'ampiezza di un eventuale impulso centrato nell'origine nel suo spettro; questo perché l'impulso nell'origine corrispone alla componente continua del segnale periodico. In questo caso abbiamo allora già il risultato perché corrisponde a C_0:

$$< y(t) > = C_0 = \frac{1}{2}$$

4. Determinare energia e potenza del segnale $y(t)$

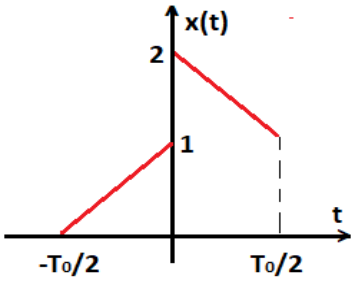
Il segnale $y(t)$ è un segnale periodico e, in quanto tale, è un segnale di potenza. Questo significa che la sua energia è infinita (consistendo quest'ultima con il quadrato del segnale e dato che quest'ultimo si protrae all'infinito, otteniamo un'energia infinita):

$$E_y = \infty$$

La potenza va calcolata nel periodo, rapportando l'energia nel periodo ed il periodo stesso. Trattandosi di un segnale ottenuto dalla periodicizzazione di $x(t)$, nel periodo ritroveremo proprio quest'ultimo segnale. Ci basiamo quindi sul grafico di $x(t)$ per ricavare l'energia nel periodo e quindi la potenza del segnale [potremmo anche dedurre la densità spettrale di potenza e quindi la potenza del segnale mediante lo spettro ma, dato che nello spettro sono presenti seni cardinali, non sarebbe il modo più semplice].

$$P_{2T} = \frac{E_{2T}}{2T_0}$$

Triamo la forma analitica del segnale $x(t)$: si tratta di una retta "r_1" crescente che passa da $P_1\left(-\frac{T_0}{2}, 0\right)$ e $P_2(0,1)$ ed una retta "r_2" decrescente che passa da $P_3(0,2)$ e $P_4\left(\frac{T_0}{2}, 1\right)$



$$r_1: \frac{x - 0}{-T_0/2 - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1} \rightarrow -(y - 1) = -\frac{x}{T_0/2} \rightarrow y = 1 + \frac{x}{T_0/2} \rightarrow x(t) = 1 + \frac{2t}{T_0}$$

$$r_2: \frac{x - 0}{T_0/2 - 0} = \frac{y - 2}{1 - 2} \rightarrow -(y - 2) = \frac{x}{T_0/2} \rightarrow y = 2 - \frac{x}{T_0/2} \rightarrow x(t) = 2 - \frac{2t}{T_0}$$

Otteniamo quindi l'energia:

$$E_{2T} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \left(1 + \frac{2t}{T_0}\right)^2 dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \left(2 - \frac{2t}{T_0}\right)^2 dt$$

$$E_{2T} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \left(1 + \frac{2t}{T_0}\right)^2 dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \left(2 - \frac{2t}{T_0}\right)^2 dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \left(1 + \frac{4t}{T_0} + \frac{4t^2}{T_0^2}\right) dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \left(4 - \frac{4t}{T_0} + \frac{4t^2}{T_0^2}\right) dt$$

$$E_{2T} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} 1dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \frac{4t}{T_0} dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} \frac{4t^2}{T_0^2} dt \quad + \quad \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} 4dt - \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \frac{4t}{T_0} dt \; + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \frac{4t^2}{T_0^2} dt$$

$$E_{2T} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} dt + \frac{4}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t\, dt + \frac{4}{T_0^2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t^2 dt \quad + \quad 4 \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} dt - \frac{4}{T_0} \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} t\, dt \; + \frac{4}{T_0^2} \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} t^2 dt$$

$$E_{2T} = [t]^0_{-\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{T_0} \left[\frac{t^2}{2}\right]^0_{-\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]^0_{-\frac{T_0}{2}} \quad + \quad 4[t]_0^{T_0/2} - \frac{4}{T_0} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T_0/2}$$

$$E_{2T} = \frac{T_0}{2} + \frac{4}{T_0} \left[\frac{0 - (-T_0/2)^2}{2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{0 - (-T_0/2)^3}{3}\right] \quad + \quad 4\left(\frac{T_0}{2}\right) - \frac{4}{T_0} \left[\frac{(T_0/2)^2 - 0}{2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{(T_0/2)^3 - 0}{3}\right]$$

$$E_{2T} = \frac{T_0}{2} + \frac{4}{T_0} \left[\frac{-T_0^2/4}{2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{T_0^3/8}{3}\right] \quad + \quad 4\left(\frac{T_0}{2}\right) - \frac{4}{T_0} \left[\frac{T_0^2/4}{2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{T_0^3/8}{3}\right]$$

$$E_{2T} = \frac{T_0}{2} + \frac{4}{T_0} \left[\frac{-T_0^2}{4 * 2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{T_0^3}{8 * 3}\right] \quad + \quad 4\left(\frac{T_0}{2}\right) - \frac{4}{T_0} \left[\frac{T_0^2}{4 * 2}\right] + \frac{4}{T_0^2} \left[\frac{T_0^3}{8 * 3}\right]$$

$$E_{2T} = \frac{T_0}{2} + \left[\frac{-T_0}{2}\right] + \left[\frac{T_0}{2 * 3}\right] \quad + \quad 2T_0 - \left[\frac{T_0}{2}\right] + \left[\frac{T_0}{2 * 3}\right] = \frac{T_0}{6} + 2T_0 - \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{6} = \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2}\right) T_0 = \frac{11}{6} T_0$$

In realtà dovrebbe risultare:

$$E_{2T} = \frac{8}{6} T_0$$

Calcoliamo quindi la potenza:

$$P_{2T} = \frac{E_{2T}}{2T_0} = \frac{4}{3}$$

Perché non è possibile ricavare la potenza andando a calcolare la somma dei segnali che compongono il segnale sul quale si lavora?

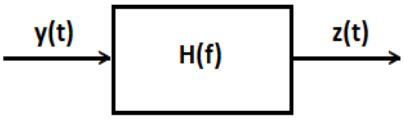
La risposta sta semplicemente in una regola matematica: se è vero che il segnale può essere visto come $x(t) = a(t) + b(t)$, ove $a(t)$ e $b(t)$ sono i segnali che lo compongono (ad esempio un triangolo e un rettangolo), è altrettanto vero che, una volta che si passa al quadrato per il calcolo dell'energia, non si può ottenere $x^2(t)$ andando a sommare il quadrato dei singoli segnali: $a^2(t)\ e\ b^2(t)$, infatti:

$$x^2(t) = [a(t) + b(t)]^2 \neq a^2(t) + b^2(t)$$

Per questo motivo non si può calcolare la potenza come la domma del quadrato delle componenti e bisogna necessariamente passare alla forma analitica del segnale.

5. Determinare l'uscita del filtro cui funzione di trasfrimento sia $H(f)$ ponendo in ingresso $Y(f)$

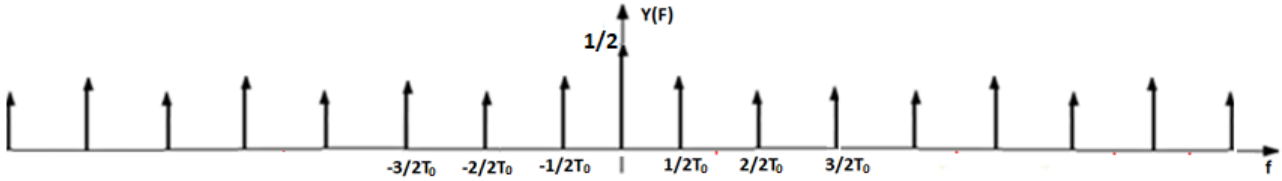
Non ci resta che effettuare il calcolo del filtraggio; lavoreremo in frequenza in quanto è più semplice lavorare con delle moltiplicazioni in frequenza piuttosto che con le corrispondenti convoluzioni nel tempo:



$$Z(f) = H(f)Y(f)$$

A questo punto dovremo rappresentare graficamente gli spettri delle ampiezze del segnale $Y(f)$ e della funzione di trasferimento $H(f)$ ed eseguirne il prodotto per via grafica, in questo modo potremo osservare quale sarà l'uscita dopo il filtraggio.

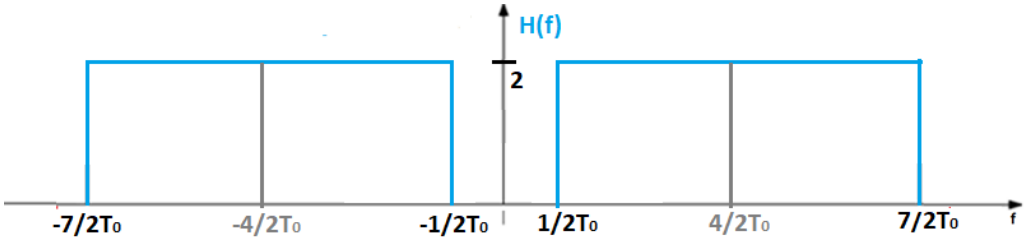
$Y(f)$ è lo spettro di un segnale periodico e, in quanto tale, sarà composto da una serie di impulsi, di cui conosciamo l'ampiezza del primo centrato nell'origine: $C_0 = 1/2$



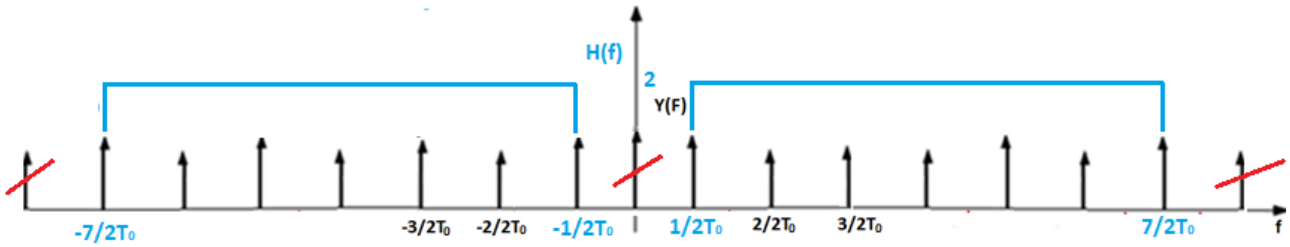
$H(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro passa banda, si tratta di un filtro che ha una funzione di trasferimento a forma di rect centrata nella frequenza $\pm f_0$. Nel nostro caso la funzione di trasferimento è:

$$H(f) = 2\,rect\left(\frac{f - 2/T_0}{3/T_0}\right) + 2\,rect\left(\frac{f + 2/T_0}{3/T_0}\right)$$

Considerando che si tratta di due rect speculari centratti alla frequenza $f_0 = \pm 2/T_0$, nello spettro troveremo due segnali rettangolari di base $3/T_0$, quindi che si estendono uno da $-\frac{2}{T_0} + \left(\frac{3}{2T_0}\right) = -\frac{1}{2T_0}$ a $-\frac{2}{T_0} - \left(\frac{3}{2T_0}\right) = -\frac{7}{2T_0}$ e l'altro che si estende da da $\frac{2}{T_0} + \left(\frac{3}{2T_0}\right) = \frac{7}{2T_0}$ a $\frac{2}{T_0} - \left(\frac{3}{2T_0}\right) = \frac{1}{2T_0}$



A questo punto, osservando il filtraggio, possiamo affermare che il filtro lascia passare tutte le armoniche comprese tra le frequenze $\left|\frac{7}{2T_0}\right|$ e $\left|\frac{1}{2T_0}\right|$; viene pertanto tagliata la componente continua nell'orgine e tutte le armoniche a frequenze maggiori di $7/2T_0$ (o, analogamente minori di $-7/2T_0$ (anche se le frequenze negative in realtà non esistono. Tutte gli impulsi avranno un'ampiezza doppia perché il filtro ha ampiezza pari a due.

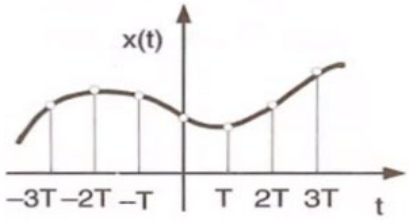


$$Z(f) = 2\left[\sum_{n=1}^{7} C_n\,\delta\left(f - \frac{n}{2T_0}\right) + \sum_{n=-7}^{-1} C_n\,\delta\left(f - \frac{n}{2T_0}\right)\right] \quad con\ C_n = \frac{1}{2T_0}X(nf_0)$$

7. Il campionamento dei segnali periodici

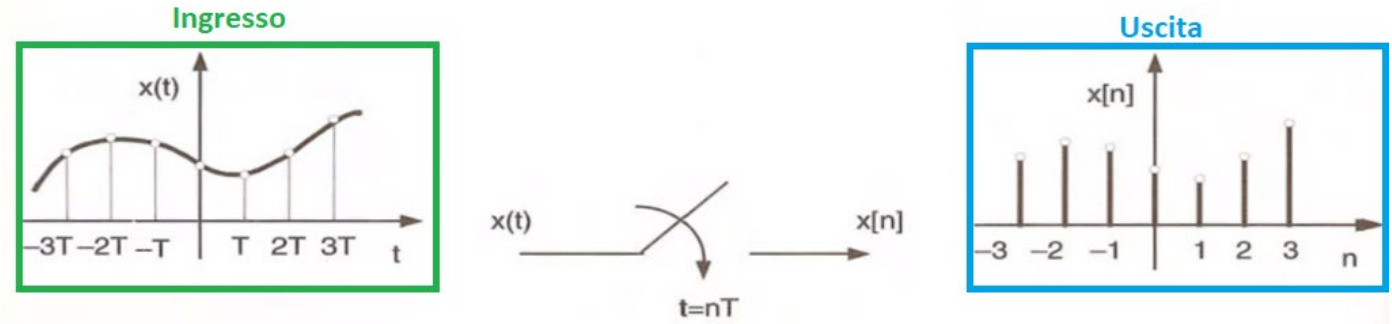
Introduzione al teorema del campionamento

Il teorema del campionamento ci permette di poter campionare un segnale continuo, ovvero di poter rintracciare, con un'opportuna frequenza, un serie di campioni che permettono la ricostruzione del segnale senza perdita di informazioni; affinché ciò accada è necessario che i campioni siano equi spaziati, per garantire ciò servirà una frequenza di campionamento opportuna.



Supponiamo di disporre di un segnale analogico nel dominio del tempo, che sia continuo sia nei valori che può assumere $x(t)$ ma, soprattutto, che sia continuo nel dominio del tempo; in altre parole: che sia **tempo continuo.**

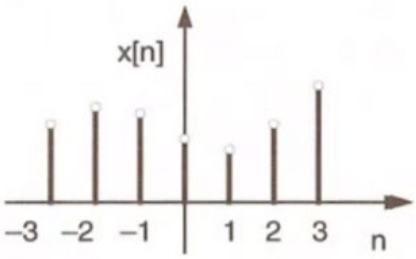
Il campionamento avviene mediante uno strumento elettronico che prende il nome di campionatore, quest'ultimo può essere visto come un interruttore che si accende e si spegne con una cadenza periodica (con una certa frequenza), esattamente ad istanti periodici $t = nT$, con "T" periodo di campionamento. Il circuito connette un ingresso ed un'uscita, questo significa che se mettessimo in ingresso a questo sistema un segnale continuo nel tempo ciò che vedremo in uscita sarà un segnale avente lo stesso andamento ma non sarà più continuo: dato che la connessione ingresso-uscita viene garantita solo in istanti ben precisi il risultato sarà un segnale discreto formato da una serie di valori, i valori assunti dal segnale continuo all'istante $t = nT$; tale segnale è, praticamente, il **segnale campionato $x[n]$**.



Definiamo sin da subito:

- **Tempo di campionamento:** intervallo temporale che trascorre tra un campione e l'altro, coincidente con il tempo impiegato dal campionatore per switchare da on a off e viceversa.
- **Frequenza di campionamento:** è il reciproco del tempo di campionamento, si tratta del numero di campioni in un secondo che si ottengono dal campionamento.

Quindi il campionatore non fa altro che valutare il valore che assume il segnale in ingresso (continuo) nel dato istante di campionamento: ogni volta che si verifica l'istante $t = nT$ il campionatore legge il valore del segnale in ingresso e lo propone in uscita; il risultato è un segnale discreto formato dalle ampiezze assunte dal segnale in ingresso agli istanti di campionamento.



Il segnale campionato è un **segnale discreto**: si tratta di una sequenza di campioni che hanno un'ampiezza che dipende dal valore assunto nel medesimo istante dal segnale continuo in ingresso.

Chiaramente, dato che il segnale in ingresso viene ridotto ad una corrispondenza di campioni che assumono i valori di quest'ultimo ad istanti ben precisi, si potrebbe pensare che vi è una perdita di informazione: perdendo la continuità del segnale si perdono anche tutti i valori che il segnale assume da un istante al successivo: da $x(t)$ a $x(t+1)$È lecito però chiedersi:

→ *Il contenuto informativo che trasporta il segnale campionato è identico a quello del segnale continuo in ingresso o vi è perdita di informazione?*

Il teorema del campionamento spiega a quale frequenza campionare affinché non vi sia perdita di informazione, quindi affinché il segnale in uscita trasporti le stesse informazioni di quello in ingresso.

Teorema del campionamento

Il teorema del campionamento ci permette di capire come campionare un segnale senza perdita di informazione: **l'obiettivo quindi è quello di considerare un segnale in ingresso tempo continuo e trarne uno in uscita tempo discreto, formato da un certo numero di campioni, senza alcuna perdita di informazioni**.

Affinché ciò avvenga è necessario che i campioni del segnale campionato siano sufficientemente "fitti", quindi che vi sia un certo numero di campioni più o meno vicini tra loro; come vedremo a breve, questa distanza tra campioni è dipendente da una frequenza che dovrà essere rispettata affinché non vi sia perdita di informazioni [Più i campioni sono vicini e più il segnale discreto assumerà una forma "continua", quindi più informazioni si traggono dal segnale in uscita. È chiaro che si deve trovare il giusto compromesso: un segnale con troppi campioni è un segnale che pesa maggiormente in banda, inoltre, alcuni campioni potrebbero essere "superflui" perché non aggiungono informazioni notevoli.

Il campionamento sta alla base dei segnali digitali: è il primo step per ottenere un segnale discreto che, una volta che viene opportunamente quantizzato e codificato, diventa praticamente un segnale digitale.

I segnali digitali godono di notevoli vantaggi, uno su tutti è sicuramente la robustezza al rumore, per cui il campionamento ha i propri vantaggi, specialmente se lo si intende come passaggio imprescindibile e fondamentale per la creazione di segnali digitali.

Se un segnale $x(t)$ è strettamente limitato in banda, vale a dire se il suo spettro rientra tutto all'interno della sua banda B (entro la frequenza massima che può assumere) allora è possibile ottenere un campionamento privo di perdita di informazioni.
Affinché non si perdano informazioni è necessario lavorare sulla distanza dei campioni, ovvero sul **periodo di campionamento "T"** che stabilisce la distanza temporale tra quando viene "estratto" un campione dal segnale continuo in ingresso e quando viene "estratto" il successivo.
Nello specifico, andremo a dimostrare attraverso il teorema del campionamento, che se il periodo di campionamento è minore o, al più, uguale al reciproco del doppio della sua banda allora non si ha perdita di informazioni:

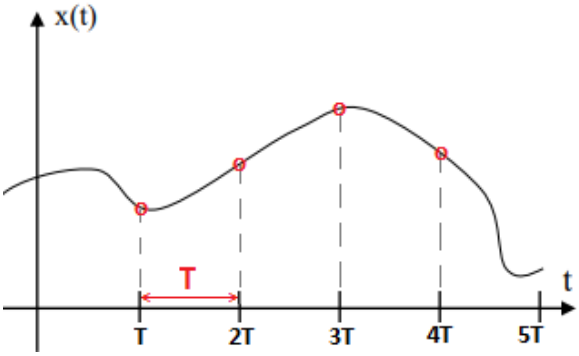
$$\boxed{\boldsymbol{T \leq \frac{1}{2B}}}$$

Ovviamente questo discorso è analogo se viene visto in frequenza: il campionamento deve avvenire ad una frequenza di campionamento che sia maggiore o uguale al doppio della banda del segnale:

$$\boxed{\boldsymbol{f > 2B}}$$

Tutti i segnali che vengono trasmessi sono limitati in banda: questi prima di essere passati al canale passano per un filtro (chi sia il più retto possibile – quanto più simile ad un rect –) affinché essi vengano tagliati solo nel range di frequenze in cui è concentrato la maggior parte del segnale; per cui questo teorema vale per tutti i segnali reali.

Affinché tale segnale possa essere correttamente campionato, quindi affinché non vi sia alcuna perdita di informazione, deve accadere che la distanza temporale "T" tra un campione e l'altro deve essere minore o uguale ad $1/2B$, ove "B" è la banda del segnale.

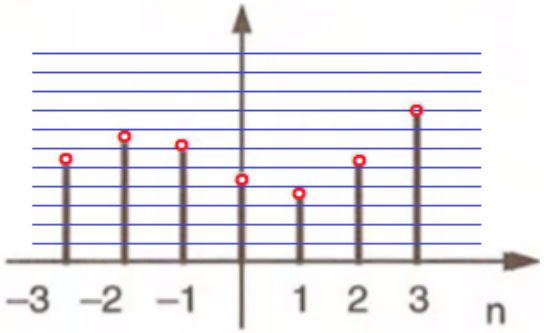


Esempio: il segnale vocale trasmesso al telefono è un segnale che è definito entro una banda di 4KHz; questo significa che, per non perdere alcuna informazione del segnale, occorre campionare con una frequenza maggiore o uguale a 8KHz, ovvero con un tempo che sia:

$$T_c \leq \frac{1}{8KHz} \rightarrow T_c \leq \frac{1}{8000}$$

Il tempo di campionamento massimo deve essere pari a $1/2B$ ma ciò non toglie che potrebbe anche essere minore; si consideri però che più è piccolo il tempo di campionamento e più sono i campioni ottenuti, quindi aumenta il numero byte da adoperare per la codifica, quindi incrementa l'ampiezza di banda e la velocità trasmissiva. Siccome normalmente il miglioramento da $T = 1/2B$ in giù è misero, non vale la pena diminuire ulteriormente questo tempo, è già sufficiente che esso sia pari a $1/2B$.

Si noti che il tempo di campionamento non inficia sulla qualità del segnale trasmesso.
La qualità del segnale digitale più che essere correlata al campionamento è collegata all'operazione di quantizzazione, successiva ad esso. La quantizzazione è un'operazione che "distrugge" il segnale analogico replicando da ogni valore di quest'ultimo il valor medio del range entro il quale cade quest'ultimo: praticamente, si stabilisce un numero di range con il quale viene suddiviso l'asse verticale, ogni range è codificato con una parola in binario. Chiaramente, più è stretto il range e minore sarà l'errore di quantizzazione dato dall'approssimazione, quindi più è accurato il valore del segnale digitale. Tuttavia, è bene tener presente che "stringendo" il range sarà necessario inserire più intervalli, quindi saranno necessarie parole binarie più lunghe (in bit), quindi aumenta la banda occupata dal segnale digitale.



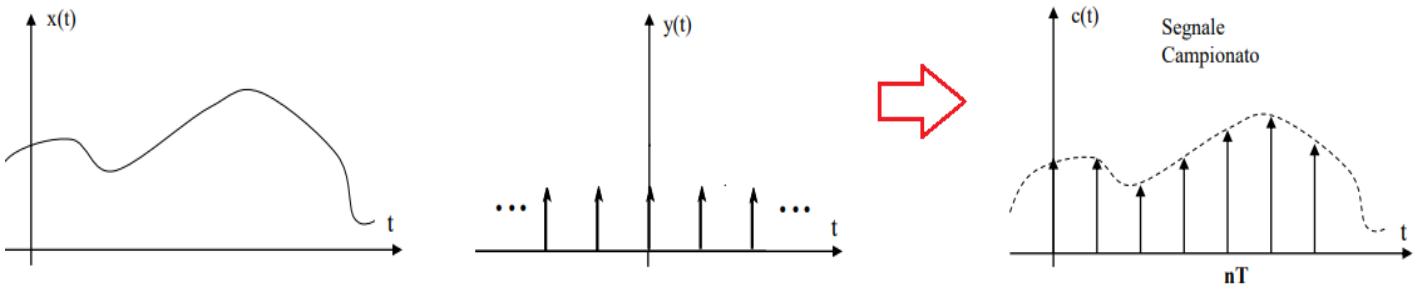
Se si riesce a campionare il segnale si apporta un grande vantaggio: dato che il contenuto informativo rimane invariato (ammesso che sia stato effettuato un corretto campionamento), è possibile **trasmettere il segnale campionato "$c(t)$" anziché l'intero segnale continuo $x(t)$:**

$$\boldsymbol{c(t) = x(nT) \qquad con\ \ n \in (-\infty, +\infty)}$$

Vediamo dunque che forma assume il segnale campionato $c(t)$; quest'ultimo viene ottenuto considerando i singoli valori del segnale analogico ai tempi $t = nT$. Questo significa che possiamo vedere il segnale campionato come **risultato del prodotto tra il segnale analogico in ingresso $x(t)$ ed un treno di impulsi che sono centrati agli istanti $t = nT$** (chiaramente, quest'ultimo è un segnale periodico di periodo T).
Il segnale campionato sarà allora pari ad una serie di impulsi aventi come ampiezza il valore del segnale $x(t)$ all'istante nT .

Chiamiamo con $x(t)$ il segnale da campionare e con $y(t)$ il treno di impulsi, il segnale campionato $c(t)$ è dato dal prodotto di questi due:

$$c(t) = x(t) * y(t) = x(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right]$$



Se vogliamo ottenere lo spettro del segnale campionato, ci basterà ricordare che al prodotto nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione nel dominio della frequenza:

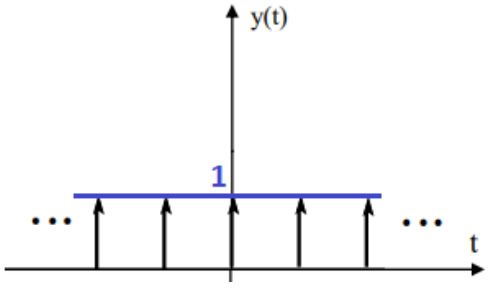
$$c(t) = x(t) * y(t) \quad \rightarrow \quad X(f) \otimes Y(f)$$

Al fine di ottenere lo spettro del segnale campionato vediamo di ottenere la trasformata $Y(f)$, dato che $X(f)$ dipende dal segnale da campionare e pertanto non è stimabile a monte.

$y(t)$ è un segnale periodico, pertanto la sua trasformata si può calcolare con la formula di Poisson; abbiamo già verificato quanto vale la trasformata del treno di impulsi ma possiamo ottenerla nuovamente:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n * \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} Y_T\left(\frac{k}{T_0}\right)\right] * \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

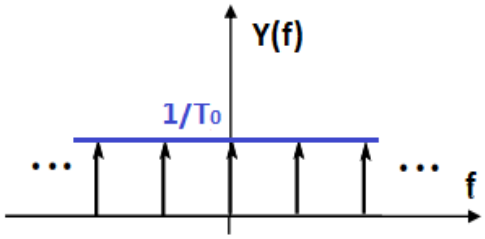
Otteniamo la trasformata del segnale troncato $Y_T(f)$, quindi del singolo impulso centrato in $t = 0$: si tratta praticamente di un segnale costante e pari all'ampiezza dell'impulso, poiché la trasformata di un impulso è sempre unitaria.
In questo caso $y(t)$ è un treno di impulsi ad ampiezza unitaria, quindi la trasformata della sua troncatura consiste nella trasformata di un delta di Dirac ad ampiezza unitaria:



$$Y_T(f) = F[Y_T(t)] = F[\delta(t)] = 1$$

Sostituendo nella formula di Poisson troviamo il seguente risultato:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} Y_T\left(\frac{n}{T_0}\right)\right] \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0}\right] \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$



Portiamo fuori $1/T_0$ perché non dipende dalla sommatoria (è costante per tutti i termini) e possiamo così osservare che **la trasformata del treno di impulsi $Y(f)$ è un treno di impulsi scalato per la portante $f_0 = 1/T_0$:**

$$Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Avendo ottenuto lo spettro del segnale campionatore $Y(f)$, andiamo a ricavare lo spettro del nostro segnale campionato $C(f)$, calcolando l'integrale di convoluzione (utilizzeremo la variabile d'appoggio "ν"):

$$C(f) = X(f) \otimes Y(f) \triangleq \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,[Y(f-\nu)]\,d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left[\left(f - \frac{n}{T_0}\right) - \nu\right]\right] d\nu$$

Portiamo fuori dal segno d'integrale $1/T_0$ in quanto costante e il simbolo di sommatoria:

$$C(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,\delta\left[\left(f - \frac{n}{T_0}\right) - \nu\right] d\nu$$

Ma studiare l'integrale di un segnale che moltiplica un impulso di Dirac centrato in un certo punto (in questo caso in $f - k/T_0$), torna il valore del segnale centrato nel punto per la **proprietà campionatrice dell'impulso:**

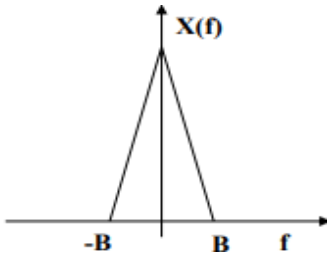
$$\boldsymbol{P.\,Campionatrice\ del\ delta\ di\ Dirac:} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0)}$$

Otteniamo quindi che $C(f)$ è dato dalla somma di tutti i valori tornati dall'integrale del prodotto tra l'ingresso e il delta di Dirac:

$$C(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu)\,\delta\left[\left(f - \frac{n}{T_0}\right) - \nu\right] d\nu \;\rightarrow\; C(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Quanto ottenuto ci porta ad affermare che **lo spettro del segnale campionato è la replica dello spettro originale moltiplicato per $1/T_0$ e traslato via via di n/T_0**

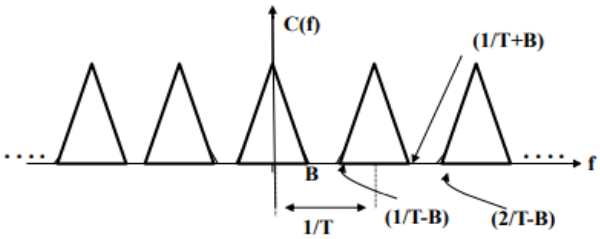
Esempio: supponiamo che il segnale da campionare ha uno spettro corrispondente ad un triangolo, quest'ultimo è limitato in banda come possiamo osservare:



$$X(f) = \Delta\left(\frac{f}{B/2}\right)$$

Applicando la formula appena trovata per ottenere il corrispondente spettro del segnale campionato, possiamo osservare come effettivamente quest'ultimo corrisponda con lo spettro del segnale in ingresso replicato a multipli interi di T_0:

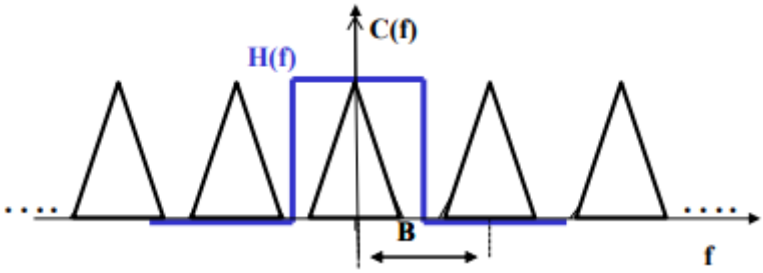
$$C(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \rightarrow C(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{f - n/T_0}{B/2}\right)$$



Tutte le repliche sono centrare in:

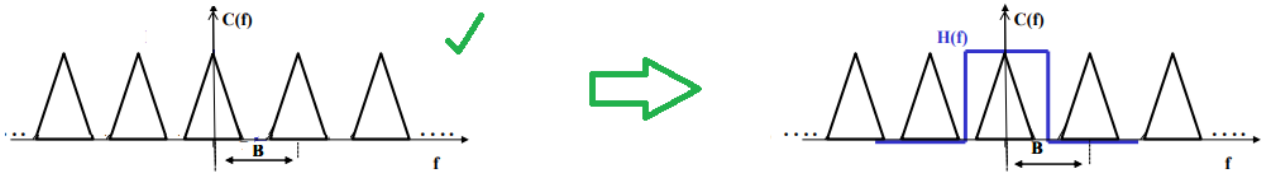
$$\frac{1}{T_0}, \frac{2}{T_0}, \dots, \frac{n}{T_0}$$

Dallo spettro del segnale campionato $C(f)$ potremmo ottenere il segnale originale, a meno della moltiplicazione per il termine $1/T_0$ (la frequenza portante f_0): basta filtrare lo spettro periodico del segnale campionato in modo da rintracciare solo la replica che si trova in $f = 0$, mediante ad esempio un filtro passa basso:

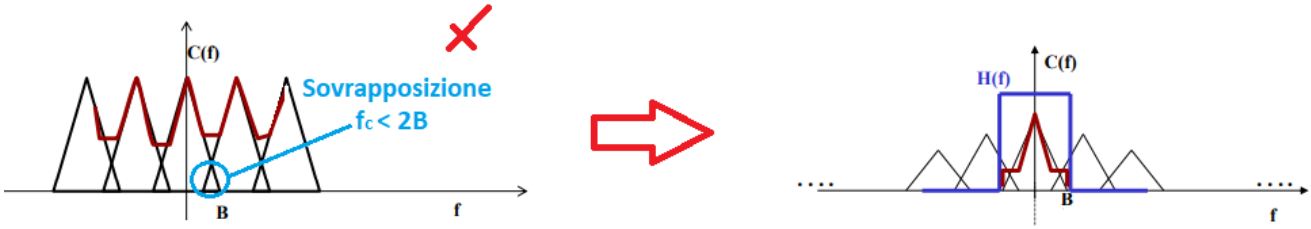


Ma si attenzioni quanto segue:

Per ottenere il segnale iniziale dal filtraggio è necessario che la frequenza del campionamento sia maggiore del doppio della banda, così facendo possiamo ottenere il segnale che è stato campionato inalterato:



Se avessimo eseguito un **campionamento ad una frequenza minore del doppio della banda ($2B$)**, avremmo ottenuto una **sovrapposizione dei campioni** del segnale campionato

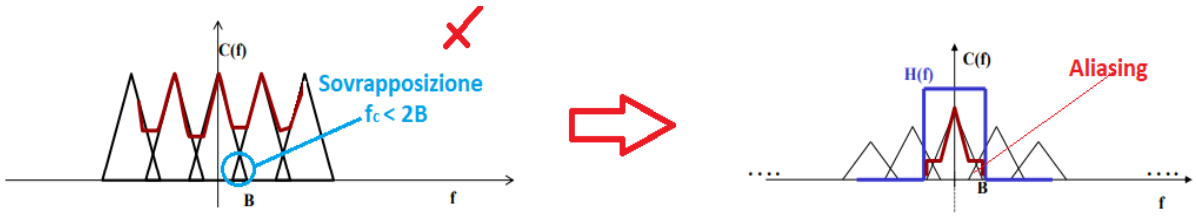


Quindi è possibile ottenere il segnale di partenza mediante filtraggio del segnale campionato a patto che $1/T_0 > B$ altrimenti si otterrebbe uno spettro del segnale campionato con i campioni sovrapposti e questo ci porterebbe ad ottenere, dopo il filtraggio, un segnale differente da quello posto in ingresso.

Quindi affinché non vi sia perdita di informazione a seguito del campionamento deve accadere che:

$$\boldsymbol{B \leq \left(\frac{1}{T_0} - B\right) \rightarrow 2B \leq \frac{1}{T_0} (= f_0) \rightarrow T_0 \leq \frac{1}{2B}}$$

La **sovrapposizione dei campioni** del segnale campionato è un fenomeno che prende il nome di **aliasing**: quando ciò accade gli spettri dei campioni replicati si sovrappongono e filtrando il segnale in modo da ottenere il campione centrato in f_0 non si ottiene più il segnale originale ma un segnale differente a causa della sovrapposizione. Diremo che **l'aliasing è il ripiegamento delle code nello spettro.**

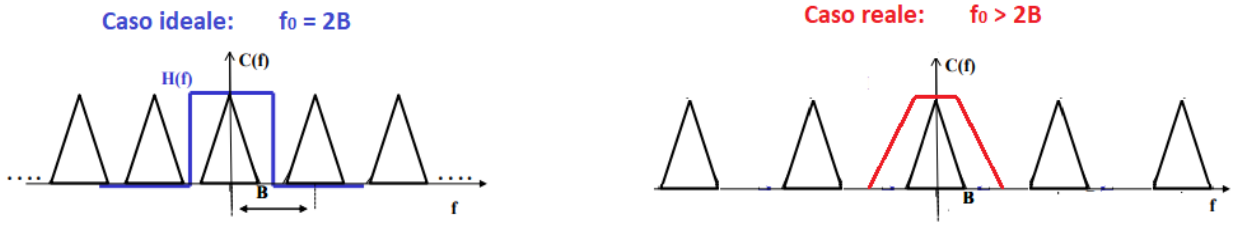


In altre parole: affinché si possa evitare l'aliasing è necessario campionare ad una frequenza maggiore o uguale al doppio della banda del segnale stesso:

$$\boldsymbol{f_0 \geq 2B \quad \rightarrow \quad T_0 \leq \frac{1}{2B}}$$

Normalmente l'operazione di filtraggio avviene prima della trasmissione del segnale perché il segnale campionato ha una banda infinita, occuperebbe troppa banda per essere trasmesso, quindi si preferisce trasmettere la troncatura.

Si noti che però il caso in cui $f_0 = 2B$ (o dualmente in cui $T_0 = 1/2B$) è il **caso limite** valido solo in un **caso ideale**: non è consigliato lavorare in tale condizione ma in una condizione in cui $f_0 > 2B$, questo perché la condizione limite andrebbe bene se si utilizzasse un filtro ideale cui spettro delle ampiezze assume una forma rettangolare; nella realtà non si può realizzare un rettangolo poiché non esistono sistemi cui funzione di trasferimento possa variare istantaneamente, quindi serve un certo tempo di salita affinché il filtro possa cogliere il solo campione dello spettro del segnale campionato centrato in 0, è necessario che per tutto il tempo impiegato dal filtro a raggiungere l'ampiezza unitaria non vi siano le code degli altri campioni, quindi è bene mettersi in una condizione in cui $f_0 > 2B$ (o dualmente $T_0 < 1/2B$).



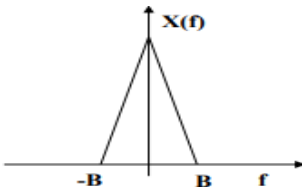
NB! Con aliasing si intende solo il problema della sovrapposizione delle repliche dello spettro, qualora nella banda del filtro siano presenti le code di altre repliche che non andrebbero considerate si avrebbe comunque un problema ma non si tratterebbe di aliasing.

Diamo una presentazione più consona del teorema del campionamento, che racchiude quanto detto:

Hp: Sia dato un segnale <u>strettamente limitato in banda</u> $x(t)$, quindi che il suo spettro sia nullo al di fuori della banda "B" in cui esso è definito, dove "B" è la banda del segnale, ovvero la massima frequenza cui è definito il segnale**:**

$$\boldsymbol{X(f) = 0 \quad \forall\, |f| > B}$$

Così definito, tale segnale è solo concentrato entro la sua banda.



Ts: Il segnale $x(t)$ è **completamente noto,** ovvero è possibile ricostruirlo (evitando l'aliasing), quando il suo **periodo di campionamento è minore o uguale al reciproco del doppio della banda**:

$$\boldsymbol{T \leq \frac{1}{2B}}$$

Dualmente, la stessa considerazione può essere fatta con la **frequenza di campionamento:** quest'ultima dovrà essere **maggiore o uguale al doppio della banda del segnale:** $\boldsymbol{f \geq 2B}$

Prima e seconda formula di Poisson

La formula che ci restituisce lo spettro del segnale campionato prende il nome di **seconda formula di Poisson.**

La prima formula di Poisson afferma che preso un segnale finito nel tempo $x(t)$ ed effettuandone la periodicizzazione nel tempo, lo spettro del segnale periodico $y(t)$ ottenuto è pari allo spettro del segnale troncato calcolato in n/T_0: $X(n/T_0)$ che viene campionato alla frequenza nf_0 mediante impulso:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \quad \rightarrow \quad Y(f) = C_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \left[\frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)\right] \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Quindi la prima formula di Poisson afferma che ad una periodicizzazione nel tempo corrisponde un campionamento in frequenza.

La seconda formula di Poisson è duale alla prima: afferma che se un segnale è campionato nel tempo, il suo spettro è dato dalla periodicizzazione dello spettro del segnale troncato:

$$c(t) = x(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right] \quad \rightarrow \quad C(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Nel tempo è presente un campionamento di un segnale $x(t)$ e nella frequenza è presente la periodicizzazione dello spettro: la trasformata del segnale campionato consiste nella periodicizzazione dello spettro del segnale troncato $X(f)$.

Quindi possiamo ancora trovare la dualità tra tempo e frequenza, se in uno dei due domini è previsto un campionamento allora nell'altro vi sarà una periodicizzazione e viceversa.

Quindi, ritornando alla questione della qualità del segnale digitale, il fatto di prendere un tempo di campionamento più o meno piccolo in realtà non inficia sulla qualità del segnale: **durante il campionamento è necessario evitare l'aliasing**, la qualità dipende poi dalla quantizzazione e dal numero di bit utilizzati, quindi non dipende dal campionamento.
Quindi campionare con un tempo di campionamento fin troppo piccolo risulterebbe essere uno spreco in banda piuttosto che un vantaggio per la qualità del segnale.

8. I processi aleatori

Introduzione

Quando abbiamo introdotto la teoria dei segnali abbiamo detto che esistono i segnali determinati e quelli aleatori. I primi li abbiamo trattati ampiamente e ci abbiamo lavorato fino ad ora; adesso è ora di introdurre quelli che vengono chiamati **segnali aleatori.**

Un segnale determinato è un segnale che può essere rappresentato da una funzione deterministica nel tempo, quindi un segnale di cui è possibile conoscere l'andamento a priori e quindi di cui è possibile determinarne il valore istante per istante.

Un segnale aleatorio, invece, è un segnale cui non è possibile determinarne preventivamente l'andamento, la sua rappresentazione può essere ottenuta solo dopo che è stata misurata. Per questi segnali è possibile studiare delle caratteristiche comuni e stimarne l'andamento.

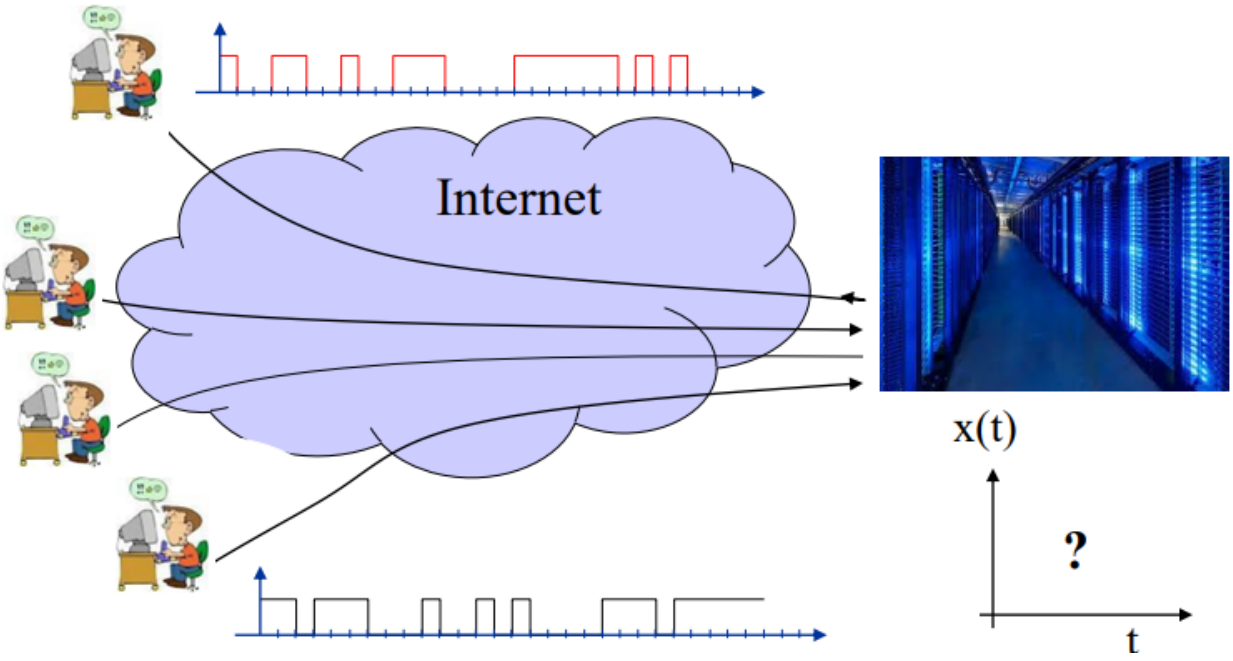
I segnali aleatori non possono essere studiati attraverso le funzioni di analisi I ma attraverso lo studio delle probabilità poiché si tratta di segnali che non sono noti a priori

<u>Esempio: segnale su internet</u>

I segnali internet che giungono ai database non sono stimabili a monte, dipende dal traffico internet e dalle richieste che vengono effettuate dai vari client.

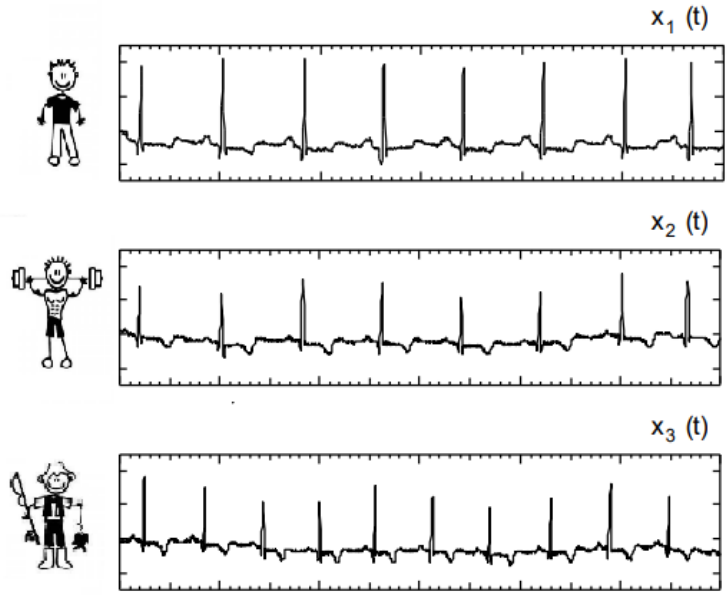
Tuttavia, si necessita di stimare quale sia l'andamento di questi segnali perché altrimenti non sarebbe possibile costruire degli apparati opportuni a gestire e mediare questo traffico dati.

Ci chiediamo quindi: *quale sarà il segnale dati che transiterà nella rete internet?*



Esempio: l'elettrocardiogramma

L'elettrocardiografo è lo strumento che dà la rappresentazione dell'elettrocardiogramma, quest'ultimo segnale è un segnale che non può essere stimato a monte, ovvero che **non può essere determinato a priori:** l'andamento di questa particolare funzione la si può sapere solo una volta che viene misurata; il dottore, infatti, per conoscere l'elettrocardiogramma di un paziente deve prima misurarlo e solo una volta stampato può studiarne le caratteristiche.



Quindi non è possibile stimare istante per istante il valore dell'elettrocardiogramma perché esso assume un andamento soggettivo.

Tuttavia, sebbene un segnale come l'elettrocardiogramma non è prevedibile a priori, è altrettanto vero che due o più segnali elettrocardiogramma condividono delle caratteristiche comuni: ad esempio avranno una certa scala di misura (i millivolt), apparentemente si ripetono con lo stesso andamento per cui avranno un certo periodo di ripetizione (ad esempio 0.5s), …

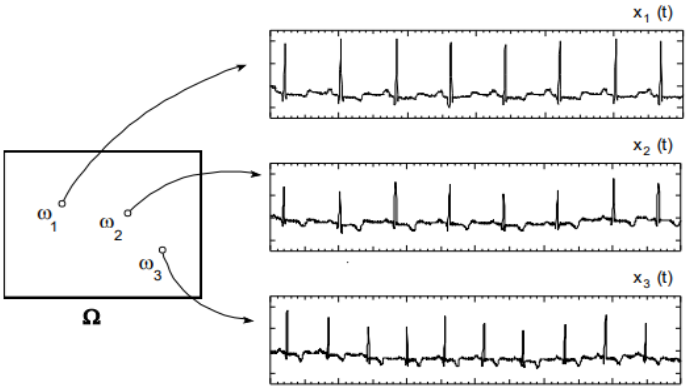
Supponiamo di voler stimare il segnale dell'elettrocardiogramma, pur non conoscendo il paziente sul quale verrà misurato. Eseguiamo il seguente esperimento per capire come fare a stimarne l'andamento:

Raggruppiamo un insieme di campioni sul quale verrà effettuato un'analisi dell'elettrocardiogramma, per cui avremo uno **spazio campione** di n elettrocardiogrammi dei singoli pazienti:

$$\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n \}$$

A questo punto si supponga che ci sia una certa probabilità P_A che in un dato giorni arrivi un certo paziente "A"; a questo punto possiamo dire che vi sarà una certa probabilità che il prossimo segnale che passa dal cardiografo sarà proprio l'elettrocardiogramma di "A"
[Quindi vi sarà una certa probabilità ad affermare che il prossimo risultato dell'esperimento sarà il risultato dello spazio campione "ω_A"].

A questo punto, racchiudendo tutti gli elettrocardiogrammi dei pazienti che si recano in ospedale, possiamo dire che la probabilità che in uscita dal cardiografo vi sia un certo segnale coincide con la probabilità con cui si presenterà un determinato paziente:
Se il martedì pomeriggio c'è la probabilità che si presenti il paziente "A" del 10%, quella che si presenti "B" del 3% e quella che si presenti "C" del 40%, le probabilità di trovare in uscita gli elettrocardiogrammi di ognuno di queste persone valgono rispettivamente $\omega_A = 10\%$, $\omega_B = 3\%$, $\omega_C = 40\%$.



Praticamente quello che stiamo facendo è condurre un esperimento probabilistico cui però risultati dello spazio campione non sono numeri ma funzioni (in questo caso la funzione è l'andamento dell'elettrocardiogramma di ogni paziente).

Ogni singolo elettrocardiogramma è un segnale deterministico, se però si vede il problema nella sua interezza, il generico segnale elettrocardiogramma, appartenente al generico paziente, è un segnale aleatorio.

Trattando i segnali aleatori tratteremo spesso i termini “segnale aleatorio” e “processo aleatorio”, diamo quindi due definizioni che distinguono questi due argomenti:

- **Segnale aleatorio:** un segnale aleatorio è un segnale di cui **non si conosce a priori la forma d’onda**, per rappresentarlo è necessario un modello adeguato che si basi sulla teoria delle probabilità: il **processo aleatorio (o casuale).**
- **Processo aleatorio:** un processo aleatorio è una collezione di un numero finito o infinito di funzioni del tempo, che prendono il nome di **funzioni campione o funzioni membro** e appartengono allo spazio campione;
  trovandosi nello spazio campione, ogni funzione campione rappresenta uno dei possibili risultati assumibili dall’esperimento aleatorio.

Rifacendoci allora all’esperimento precedente possiamo affermare che ogni singolo elettrocardiogramma (sia di “A”, che di “B” o “C”) rappresenta il singolo segnale determinato contenuto nello spazio campione. Il segnale uscente dall’elettrocardiografo è un segnale aleatorio che viene studiato mediante il processo aleatorio, che studia con che probabilità tale segnale aleatorio possa corrispondere ad uno dei segnali determinati dello spazio campione.

Processi aleatori

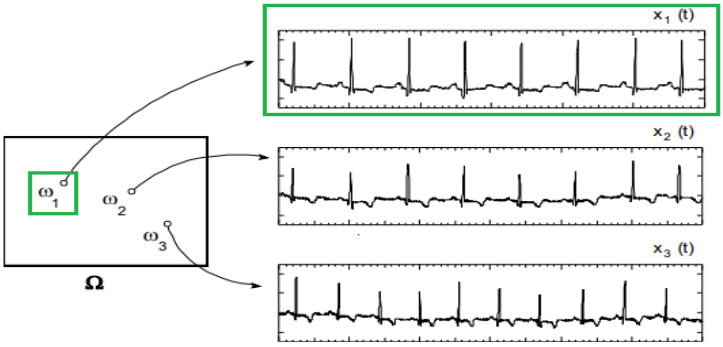
Ammesso che si possano rappresentare tutti i possibili segnali che possono passare da un canale, ragioniamo allora con un esperimento, vedendo il segnale effettivo che passa nel canale come uno dei possibili segnali che si possono presentare.
Per cui lo studio di un segnale aleatorio avviene mediante modello: il processo aleatorio.

Il processo aleatorio è un esperimento cui spazio campione è formato da segnali determinati nel tempo, esso rappresenta il possibile risultato, ovvero il segnale che transita nel canale.

Si tratta quindi di un insieme di funzioni determinate che variano nel tempo, che prendono il nome di **segnali campione** o **segnali membro,** il processo può assumere l'andamento di uno di questi segnali; per questo motivo esso è funzione del segnale campione e del tempo:

$$X(\omega_i, t)$$

Coni "ω_i" si intendono le funzioni campione assumibili e tali funzioni sono definite nel tempo.



Possiamo osservare che:

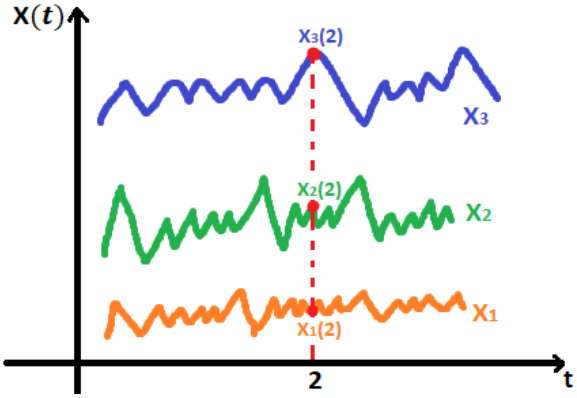
- Fissando il **segnale campione $\boldsymbol{\omega_i = \omega_1}$** lo studio ricadrebbe solo sul **segnale determinato** $\omega_1(t)$, per cui si tratta di un solito studio di carattere deterministico.
  Questo significa che se si fissa una certa funzione membro $\omega_i(t)$, ciò che si ottiene è un risultato ben preciso: si ottiene l'andamento del segnale determinato nel tempo.
- Fissando un **istante $\boldsymbol{t = t_1}$** possiamo osservare che ogni segnale campione può assumere un certo valore: $\omega_1(t_1), \omega_2(t_1), \omega_3(t_1)$ … quindi il processo aleatorio consiste in una variabile che può assumere differenti valori: una **variabile aleatoria**.

<u>Esempio</u>: Se si sta analizzando un segnale aleatorio di tensione e si fissa un istante di osservazione come $t = 2s$, il processo aleatorio calcolato in tale istante:

$$X(t) = X(2)$$

sarà una **variabile aleatoria** che potrà assumere tutti i valori di tensione che assumono tutti i segnali dello spazio campione quando t = 2s;
in questo caso si tratta quindi di una variabile aleatoria che potrà assumere i valori:

$$X(\omega, 2) = X(2) = \{X_1(2), X_2(2), X_3(2)\}$$



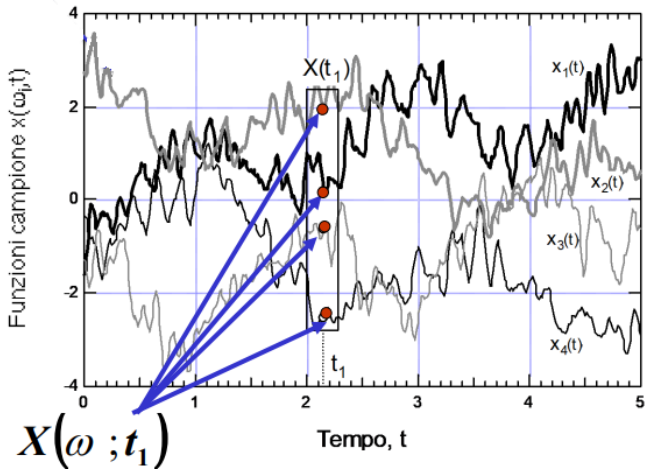
Essendo quest'ultimo un segnale nel tempo, spesso capita il segnale campione risultante venga chiamato direttamente come un segnale nel tempo $x(t)$, omettendo la "ω".

Quindi fissato un istante "t" il processo aleatorio si comporta come una variabile aleatoria, quei valori assumibili corrispondono al valore che ogni segnale campione assume all'istante fissato

Questo ci indica quindi che **il nostro segnale aleatorio è funzione di più segnali nel tempo** (nel nostro esempio, generico segnale uscente dal cardiografo è funzione di tutti i segnali $x_1(t), \dots, x_n(t)$)

<u>Esempio</u>: ritornando all'esempio dell'elettrocardiogramma, possiamo affermare adesso che per studiare un generico segnale dell'elettrocardiografo possiamo usare il modello del processo aleatorio; questo come abbiamo detto dipende sia dalla funzione campione $\omega_i(t)$ (un possibile elettrocardiogramma di un dato paziente) sia dal tempo. Piuttosto che fissare $\omega_i(t)$ potremmo dunque fissare il tempo ad un istante preciso t_i; in questo caso allora non si saprebbe a quale segnale campione si stia facendo riferimento ma si fissa un certo istante.

Se, ad esempio, fissiamo un certo istante t_1 possiamo osservare che il processo aleatorio, a differenza delle funzioni determinate, può assumere differenti valori. Questi valori, chiaramente, dipendono dalla funzione campione che si vuole osservare: se si hanno gli elettrocardiogrammi di A, B, C e D e si fissa l'osservazione all'istante t_1 il valore che può assumere l'elettrocardiogramma varia a seconda del paziente analizzato: $X(\omega_A; t_1)$ nel caso del paziente A, $X(\omega_B; t_1)$ nel caso del paziente B, etc…



Questo significa che istante per istante, fissando un certo tempo "t_i" il processo aleatorio è una **variabile aleatoria:** nel nostro caso si tratta di una variabile aleatoria che può assumere i valori $x_A(t)$, $x_B(t)$, …

$$X(\omega\,; t) \;\rightarrow\; X(\omega; t_1) = X(t_1)$$

Il processo deve rappresentare tutti i caratteri delle funzioni campione e caratterizzerà il generico segnale aleatorio secondo alcune caratteristiche; in funzione di quest'ultime sarà poi possibile costruire le varie apparecchiature che lavoreranno con tali segnali aleatori.

Quindi, ricapitolando:

- Se si analizza **un processo aleatorio in un preciso segnale campione ω_i si analizza, praticamente, un segnale determinato ($x_1(t)$) al variare del tempo** dato che, praticamente, si sta focalizzando l'attenzione solo sul singolo segnale determinato dello spazio campione.

- Se si analizza **un processo aleatorio in un preciso istante t_i si analizza, praticamente, una variabile aleatoria**, che potrà assumere dei valori dello spazio campione che consistono nelle funzioni campione calcolate all'istante t_i

Questo ci porta un grande vantaggio: significa che, fissando un istante di osservazione "$\bar{t}$", possiamo calcolare il processo aleatorio con gli strumenti delle variabili aleatorie; tratteremo quindi i processi come variabili aleatorie, fissando un istante di osservazione $\bar{t}$ ed utilizzando così la caratterizzazione di quest'ultime attraverso la funzione densità di probabilità (PDF) $f_X(x; t_1)$ e la funzione distribuzione cumulativa (CDF) $F_X(x; t_1)$.

Chiaramente queste funzioni sono riferite solo al singolo istante di osservazione "$\bar{t}$", poiché solo dopo aver fissato quest'ultimo il processo assume praticamente il comportamento di una variabile aleatoria

$$F_{X_i} \neq F_{X_{i+1}}$$

Classificazione dei processi aleatori

Trattandosi di modellazione di segnali aleatori, è possibile classificare i processi aleatori a seconda dei valori che vengono assunti e/o della loro dipendenza dal tempo; possiamo suddividere:

1. **Processi aleatori discreti:** assumono dei valori nell'asse verticale in maniera discreta
2. **Processi aleatori continui:** possono assumere l'intero range di valori dell'asse verticale
3. **Processi aleatori tempo discreto:** sono non continui nel tempo, che assumono i propri valori ad istanti numerati
4. **Processi aleatori tempo continuo:** possono assumere i valori in qualsiasi istante temporale

<u>Esempio:</u> Il **segnale binario** è un processo aleatorio **tempo discreto** e **a valori discreti** poiché il segnale è espresso in funzione di istanti temporali numerati (i periodi) e assume dei valori che possono essere 1 o 0.

I processi aleatori parametrici

Una classe particolarmente semplice di processi aleatori sono i **processi aleatori parametrici:** si tratta di quei processi per il quale **l'aleatorietà è legata ad una variabile aleatoria da cui essi dipendono**.

Come suggerisce il nome stesso, questi processi dipendono da un parametro Ω: una variabile aleatoria, correlata ad un certo esperimento che produce determinati risultati:

$$\Omega = \{\omega_i\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Allora definiamo un processo parametrico quel processo che dipende da questa variabile aleatoria.

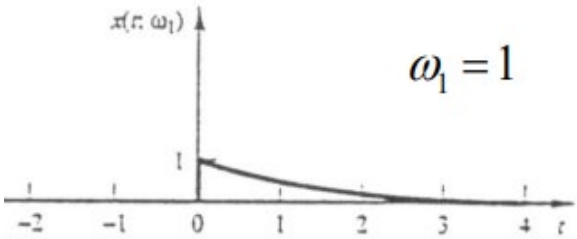
Chiaramente, il numero di funzioni membro nello spazio campione dipende strettamente dal numero di valori assumibili dal parametro Ω

Il processo aleatorio esponenziale

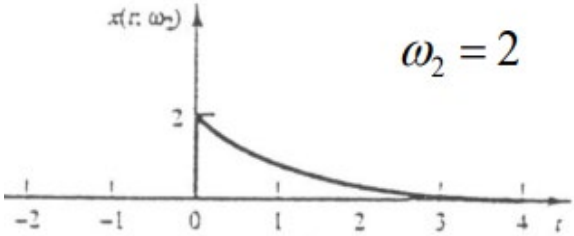
Supponiamo di definire con Ω la variabile aleatoria correlata al lancio di un dado:

$$\Omega = \{\omega_i\} = \{1, 2, \dots, 6\}$$

E di definire un processo aleatorio che dipende da quest'ultima e da una funzione esponenziale; chiameremo appunto quest'ultimo **processo esponenziale** e possiamo affermare che esso è un processo parametrico perché dipende da Ω, che è una variabile aleatoria.



$$\boxed{X(t) = \Omega\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} u(t)}$$

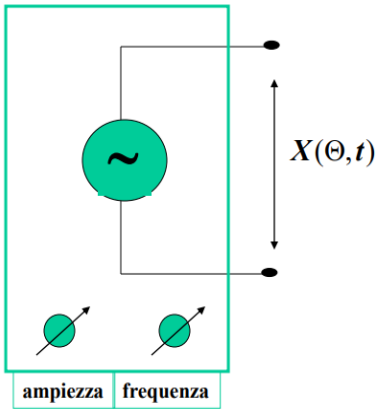


Si tratta praticamente di un processo che assume un andamento esponenziale ma che partirà da
$\omega_1 = 1, 2, \dots, 6$ a seconda dal valore assunto da Ω

Le funzioni campione in totale sono quindi 6 funzioni esponenziali decrescenti cui valore iniziale per $t = 0$ dipende dal parametro Ω.

Il generatore di segnale cosinusoidale

Un altro esempio di processo aleatorio parametrico più realistico è quello che analizza il comportamento di un generatore di segnale (o di funzione): si tratta di un dispositivo che genera un segnale avente una certa forma d'onda stabilita a monte.

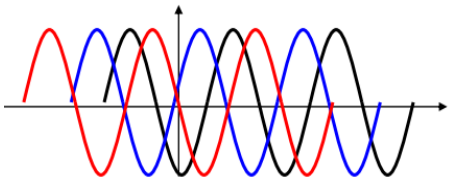


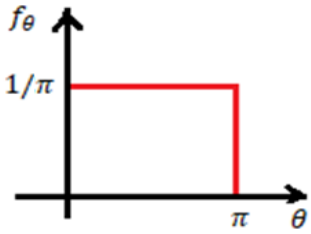
Nello specifico, questo strumento permette di fissare l'ampiezza "a" e la frequenza "f_0" del segnale ma la fase iniziale è una variabile aleatoria che dipende da diversi fattori.

Quindi l'uscita di questo apparato può essere vista come un processo aleatorio in cui la fase dipende dalla variabile aleatoria θ:

$$X(\theta, t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

È un processo cui aleatorietà dipende dalla variabile aleatoria θ, ogni funzione membro è quindi un coseno cui fase dipende da un parametro θ diffferente;





θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, \pi]$ (la sua PDF f_θ è costante).

Caratterizzazione statistica di I ordine un processo aleatorio

Un processo aleatorio quindi dipende da due parametri: il tempo, dato che i segnali aleatori li analizziamo nel tempo (o, al più, in frequenza) ed il segnale campione di tipo deterministico.

Abbiamo detto che fissando uno dei segnali campioni l'analisi del processo aleatorio ricade praticamente nell'analisi temporale del segnale in questione, poiché il segnale non varia e a variare sarà solo il tempo:

$$X(\omega_A; t) = x_A(t)$$

Mentre fissando un generico istante t_i andremo a considerare tutti i possibili valori che il segnale può assumere in tale istante: valori numerici che il processo può assumere istante per istante, questo significa che il processo si comporta esattamente come una variabile aleatoria che può assumere più valori:

$$X(\omega; t_1) = X(t_1)$$

Tralasciando il caso in cui viene fissato un campione (poiché si ricadrebbe nuovamente nello studio di un segnale determinato) focalizziamo l'attenzione sull'**analisi del processo aleatorio quando viene fissato un certo istante**, ovvero quando **il processo aleatorio consiste in una variabile aleatoria**, in questo modo analizzeremo le **statistiche di I ordine** del processo.

Funzione distribuzione di probabilità di primo ordine di un processo aleatorio

Sia fissato un certo istante $t = t_1$ e sia osservato un processo aleatorio che, come abbiamo già detto, coinciderà con una variabile aleatoria che assume tutti i valori dello spazio campione in funzione di t_1:

$$X(\omega; t_1) = X(t_1)$$

Una delle statistiche di primo ordine che caratterizzerà questo processo aleatorio sarà sicuramente una delle statistiche principali di una variabile aleatoria: **la funzione di distribuzione (CDF) $\boldsymbol{F_X}$;**

Applicando la definizione della funzione di distribuzione di probabilità ad un processo aleatorio otteniamo la definizione della **funzione distribuzione di probabilità di primo ordine del processo**: essa consiste alla probabilità che nell'istante fissato t_1 il processo aleatorio assuma un valore minore di una soglia fissata "x":

$$\boxed{\boldsymbol{F_X(x; t_1) \triangleq Pr\{X(t_1) \leq x\}}}$$

Chiaramente, abbiamo potuto ottenere questa CDF del processo a patto di aver fissato un istante $t = t_1$ poiché altrimenti il processo non si comporterebbe come una variabile aleatoria; questo ci porta allora ad affermare che **la CDF di I ordine del processo varia al variare del tempo**, se cambiassimo l'istante di osservazione fissato allora varierebbe anche il valore della CDF in tale istante:

$$\boldsymbol{F_X(x; t_1) \neq F_X(x; t_2)}$$

Funzione densità di probabilità di primo ordine di un processo aleatorio

Sia fissato un certo istante $t = t_1$ e sia osservato un processo aleatorio che, come abbiamo già detto, coinciderà con una variabile aleatoria che assume tutti i valori dello spazio campione in funzione di t_1:

$$X(\omega; t_1) = X(t_1)$$

La seconda statistica tipica delle variabili aleatorie che andremo ad applicare al processo aleatorio è la **funzione densità di probabilità (PDF),** si tratta anche in questo caso della derivata della CDF:

$$\boxed{\boldsymbol{f_X(x; t_1) \triangleq \frac{\partial F_x(x; t_1)}{\partial x}}}$$

Come vedremo in seguito, in realtà la PDF non varia al variare del tempo, nonostante comunque trattare il segnale ad istanti differenti equivale a trattare due variabili aleatorie differenti.

Ad istanti differenti corrispondono variabili aleatorie differenti; se vogliamo correlare i valori del processo a istanti differenti dovremmo considerare una coppia di variabili aleatorie: una per l'istante t_1 e l'altra per l'istante t_2. In tal caso si parlerà allora di una **caratterizzazione statistica del secondo ordine**.

Caratterizzazione statistica di II ordine un processo aleatorio

La caratterizzazione statistica del primo ordine analizza il processo aleatorio istante per istante, facendo coincidere tale studio con quello di una variabile aleatoria.
Tuttavia, esiste una caratterizzazione più precisa: si tratta della **caratterizzazione del secondo ordine nel processo aleatorio;**

Normalmente, di un segnale si vuole sapere qual è il suo valore ad un istante fissato ed il valore che esso assume all'istante iniziale, così facendo, se si considerano congiuntamente i due valori e si possono estrapolare delle informazioni utili sull'evoluzione del segnale.
Per un processo aleatorio questo si traduce in una **valutazione congiunta di due variabili aleatorie**: una estratta dal processo all'istante iniziale e l'altra estratta all'istante di osservazione.
Si necessita quindi di una caratterizzazione di secondo ordine, in cui si osserva il comportamento del processo in due diversi istanti temporali differenti in maniera congiunta:

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2; t_1, t_2) = Pr\{X(t_1) \leq x_1;\ X(t_2) \leq x_2\}}$$

Questa altro non è che la caratterizzazione di un evento congiunto.

<u>Esempio</u>: Spesso non basta fissare un certo istante per studiare il processo ma si deve effettuare tale studio nel tempo: se, ad esempio, si compra un titolo in borsa non si è interessati solo al valore di quest'ultimo all'istante t_1 o all'istante t_2; si è interessati piuttosto al valore che esso potrebbe assumere nel futuro (ad esempio tra 10 giorni) rispetto al prezzo che esso assume al momento dell'acquisto.
Ma dato che, fissato un istante, il processo aleatorio diventa variabile aleatoria, ciò che si intende fare è il **confronto tra due variabili**, confrontando il valore del titolo al momento dell'acquisto: $X(\omega, t_0)$ e quello che il medesimo assume tra, ad esempio, 10 giorni: $X(\omega, t_{10})$.
Quindi si è interessati a come variano congiuntamente $X(\omega, t_0)\ e\ X(\omega, t_{10})$, ovvero la coppia di variabili aleatorie calcolate negli istanti t_0 e t_{10}.

Quando si analizza la variazione congiunta di due variabili aleatorie formanti una coppia non si può ottenere la CDF dalle singole proprietà marginali, c'è bisogno di conoscere la distribuzione di secondo ordine, ovvero come si distribuiscono le varie coppie di valori.
Ad esempio, si è interessati alla probabilità che il prezzo del titolo acquistato sia minore di x_1 al momento dell'acquisto e, congiuntamente, che sia minore di x_2 al momento della rivendita:

$$\Pr\{X(t_0) \leq x_1\ , X(t_{10}) \leq x_2\ \}$$

Questa appena descritta è la **distribuzione di probabilità di II ordine del processo,** il calcolo di quest'ultima consiste nel calcolo di due (o più) probabilità congiunte (probabilità congiunta di due variabili aleatorie)**:**

$$\boxed{\boldsymbol{F_X(x_1, x_2\ ; t_1, t_2) \triangleq Pr\{X(t_1) \leq x_1\ , X(t_2) \leq x_2\}}}$$

Caratterizzazione completa di un processo aleatorio

Estendendo il caso a tutto il segnale, per avere la caratterizzazione completa del segnale (e non in solo due istanti), è necessario valutare congiuntamente tutte le variabili aleatorie, ovvero tutti i valori che il processo assume nei vari istanti.

In generale allora per ottenere la **caratterizzazione completa** del processo aleatorio si dovrebbe teoricamente conoscere la caratterizzazione statistica a tutti gli ordini; in pratica ciò è comunque impossibile.

$$\boldsymbol{F_X(x_1, x_2, \dots x_n\,; t_1, t_2, \dots, t_n) \triangleq Pr\{X(t_1) \leq x_1\,, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}}$$

Questa è una caratterizzazione di grado n ed è impossibile da ottenere, per questo si studiano gli indici semplificati.

Per conoscere la caratterizzazione completa del processo aleatorio sarebbe necessario conoscere l'intera caratterizzazione di ordine n di quest'ultimo, sarebbe quindi necessario calcolare la probabilità congiunta su tutti i valori assunti da $X(t)$.
Chiaramente ciò non è possibile: servono dei parametri statistici semplificati, analogamente alle variabili aleatori, per cui esistono gli indici statistici.

La sostanziale differenza tra i processi aleatori e le variabili aleatorie, infatti, è la dipendenza dal tempo; come vedremo, molti parametri statistici semplificati sono i corrispondenti agli indici delle variabili aleatorie solo che, a differenza di quest'ultimi, si parla di parametri che in realtà sono funzioni nel tempo.

Indici statistici del I ordine di un processo aleatorio

Per una caratterizzazione completa e agevole si preferisce utilizzare gli indici statistici del processo aleatorio. Questi sono simili agli indici caratteristici delle variabili aleatorie ma sono delle funzioni anziché dei parametri.

Funzione valor medio per un processo aleatorio

Se si riuscisse ad ottenere tutti i valori medi assunti dal processo istante per istante, unendo tali punti, si otterrebbe l'andamento di una funzione media. Parliamo allora di una **funzione valor medio statistico,** che corrisponde al valore medio di una variabile aleatoria, solo che questa è una funzione poiché studia il valore medio al variare del tempo.

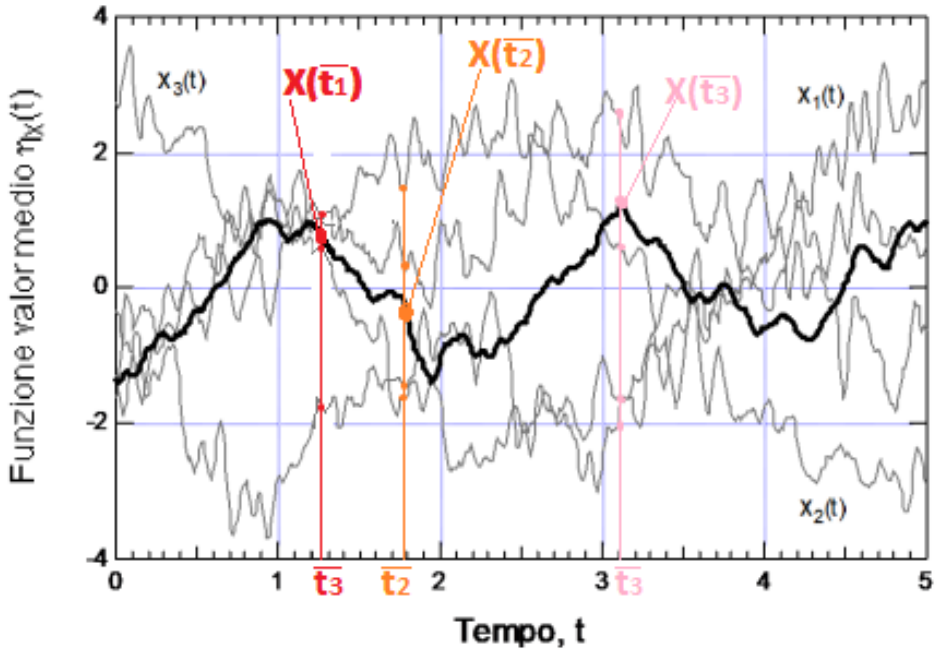
Questo, analogamente al caso del valore medio della singola variabile aleatoria, si calcola come l'integrale del prodotto tra il generico valore "x"e la PDF f_X:

Processi Aleatori Continui:	$\boldsymbol{\eta_X(t) \triangleq E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x;t)dx}$
Processi Aleatori Discreti:	$\boldsymbol{\eta_X(\bar{t}) = E\{X(\bar{t})\} = \sum_i x_i * \Pr\,(X(t) = x_i)}$

Ricapitolando, la **funzione valore medio** è una funzione che corrisponde al valor medio delle variabili aleatorie; è una funzione del tempo e può essere vista, praticamente, come la sommatoria dei valori medi che si ottengono considerando il processo aleatorio in un singolo istante $\bar{t}$;

Per una variabile aleatoria abbiamo definito il concetto di valor medio;
Il processo aleatorio in un preciso istante equivale ad una variabile aleatoria, possiamo quindi vedere quest'ultimo come un grande insieme di variabili aleatorie, una per ogni istante $t = \bar{t}_i$ del processo.

Ne consegue quindi che **ad ogni istante $\bar{t}_i$ il processo assume il comportamento di una variabile aleatoria e quindi ha un certo valor medio; l'unione di tutti i valori medi calcolati nei singoli istanti da una funzione che prende il nome di funzione valor medio del processo aleatorio.**



È bene specificare che **la funzione valore medio potrebbe non coincidere con un segnale membro dello spazio campione ma dà comunque informazioni circa la variazione media del processo.**

Esempio: calcolo della funzione valor medio per un processo aleatorio parametrico con il teorema del valor medio

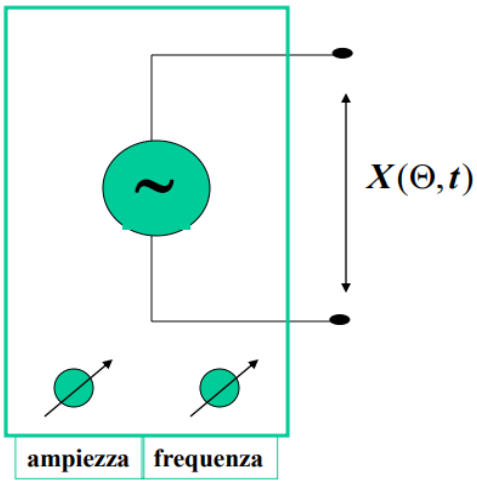
Ritornando all'esempio precedente, quello riguardante il generatore di segnale cosinusoidale, come abbiamo detto, l'uscita di quest'ultima è aleatoria nella misura in cui il segnale dipende da una fase iniziale θ_i variabile, che da l'aleatorietà del segnale d'uscita.

Si tratta praticamente di un processo aleatorio parametrico; per quest'ultimi il calcolo del valore medio è più immediato se si ragiona come segue: il processo parametrico è un processo che dipende da una specifica variabile aleatoria, allora quest'ultimo può essere visto come una trasformazione della variabile aleatoria stessa, come un sistema che, posto in ingresso la variabile aleatoria, ne restituisce un'altra in uscita: il processo stesso.

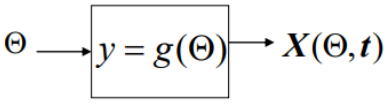
Quindi si tratta di un sistema che ha in ingresso la variabile aleatoria ed in uscita una funzione della variabile aleatoria, ottenuta mediante trasformazione $y = g(t)$.

Questo sistema restituisce un segnale differente a seconda della fase, possiamo pertanto vedere l'azione di questo sistema come una trasformazione di una variabile aleatoria: la fase iniziale subisce una variazione: in ingresso avremo, appunto la fase iniziale θ_i , in uscita avremo il corrispondente segnale cosinusoidale:

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)$$



Il vantaggio di vedere il funzionamento di questo sistema come una **trasformazione di variabile aleatoria** ci torna utile per il calcolo della funzione valor medio: è possibile applicare il **teorema del valor medio** per calcolare la corrispondente funzione.



Ripasso: il teorema del valor medio

Il teorema del valor medio ci dice che il valor medio di una variabile aleatoria ottenuta mediante una trasformazione $g(\cdot)$ è pari all'integrale del prodotto tra funzione di trasformazione $g(x)$ e la funzione densità di probabilità della funzione aleatoria $f_X(x)$:

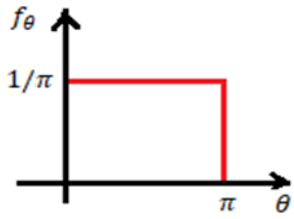
$$\eta_\eta = E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\, dx$$

In questo modo è possibile calcolare il valor medio senza considerare l'uscita ma considerando solamente la trasformazione e la PDF dell'ingresso.

Applichiamo il teorema:

$$\eta_X = E\{X(t)\} = E_\theta\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta) f_\theta(\theta)\, d\theta$$

$$E_\theta\{X(t)\} = E_\theta\{a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)] f_\theta(\theta)\, d\theta$$



La trasformazione corrisponde praticamente al segnale d'uscita: $g(x) \to X(t)$ mentre la PDF della variabile θ sappiamo essere uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$ e assumerà quindi il valore costante pari a $1/\pi$.

Andremo quindi ad integrare nell'intervallo in cui è definita la variabile aleatoria θ: $[0, \pi]$ e sostituiamo il valore di f_θ in tale intervallo:

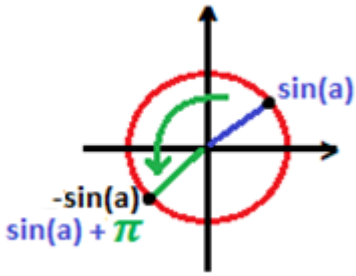
$$E_\theta\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)] f_\theta(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} [a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)] \left(\frac{1}{\pi}\right) d\theta$$

$$E_\theta\{X(t)\} = \frac{a}{\pi}\int_0^\pi [\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)]d\theta = \frac{a}{\pi}[\sin(2\pi f_0 t + \theta_i)]_0^\pi$$

$$E_\theta\{X(t)\} = \frac{a}{\pi}[\sin(2\pi f_0 t + \theta_i)]_0^\pi = \frac{a}{\pi}[\sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t + 0)]$$

Dalla circonferenza trigonometrica possiamo osservare che:

$$\sin(2\pi f_0 t + \pi) = -\sin(2\pi f_0 t + 0)$$



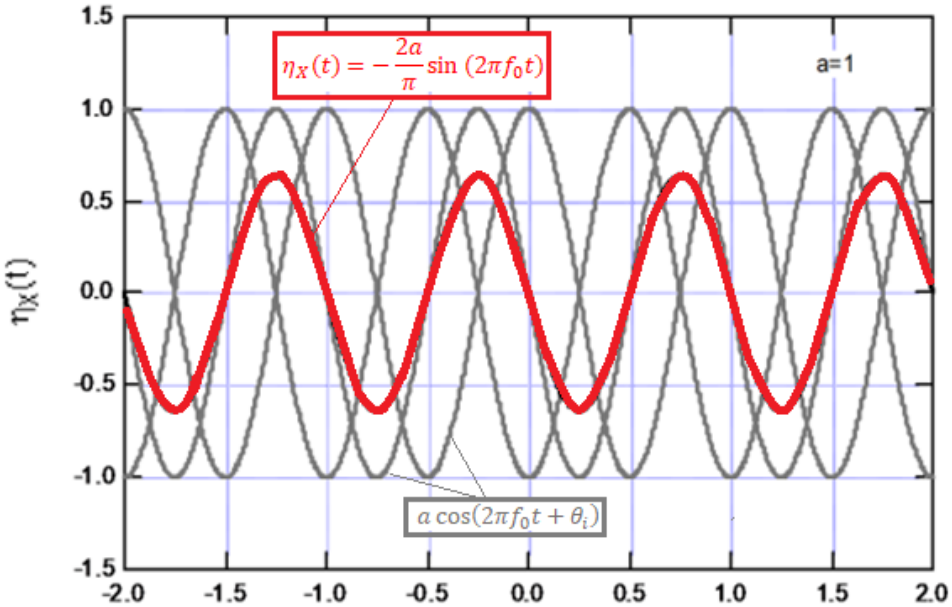
Allora sostituendo allora quest'ultimo valore alla formula del valor medio otteniamo:

$$E_\theta\{X(t)\} = \frac{a}{\pi}[\sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t)]$$

$$E_\theta\{X(t)\} = \frac{a}{\pi}[-\sin(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi f_0 t)] = -\frac{2a}{\pi}\sin(2\pi f_0 t)$$

Questo significa che la funzione valor medio è la seguente:

$$\eta_X(t) = -\frac{2a}{\pi}\sin(2\pi f_0 t)$$



Si noti che tutte le funzioni membro appartenenti allo spazio campione sono funzioni del tipo:

$$a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)$$

Quindi il fatto che la funzione valor medio ottenuta sia un seno conferma quanto detto prima: **non è sempre detto che il valor medio di un processo aleatorio consista in una funzione membro dello spazio campione.**

Infatti possiamo dire che **la funzione valor medio è il luogo dei punti ove si trovano i singoli valor medi istante per istante, ovvero la funzione che congiunge tutti i valor medi calcolati ogni istante.**

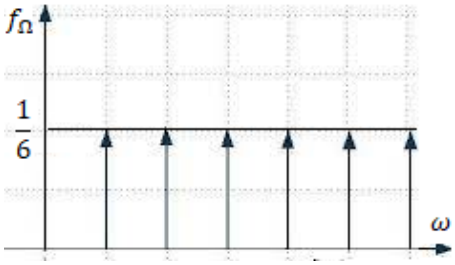
Esempio: calcolo della funzione valor medio per un processo aleatorio parametrico

Studiamo il valore medio di un processo parametrico esponenziale che dipende dalla variabile aleatoria "Ω", che è una variabile discreta e uniformemente distribuita: si tratta dei risultati di un dado non truccato.

$$X(t) = \Omega\, e^{-t}\, u(t) \quad con \quad \Omega = \{\omega_i\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

In questo caso la trasformazione della variabile aleatoria Ω è:

$$g(\Omega) = \mathrm{y}(\mathrm{t}\Omega) = \Omega\, e^{-t}\, u(t) = X(t)$$



Grafichiamo la PDF di Ω (f_Ω): si tratta di impulsi ad ampiezza uguale e costante pari ad 1/6. Analiticamente la possiamo scrivere come somma degli impulsi:

$$f_\Omega = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)$$

A questo punto applichiamo il teorema:

$$\eta_\eta = E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\, d\omega \quad \rightarrow \quad \eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\Omega(\omega, t) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega$$

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Omega\, e^{-t}\, u(t)] \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega$$

Sostituiamo $\Omega \rightarrow \omega$, questo perché con "$\omega$" si intendono tutti i valori possibili che la variabile aleatoria può assumere, in questo caso si tratta dei valori $\{\omega_i\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Omega\, e^{-t}\, u(t)] \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega \quad \rightarrow \quad \eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega\, e^{-t}\, u(t)] \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega$$

Portiamo fuori dal segno d'integrale ciò che non dipende da ω: si tratta dell'ampiezza costante 1/6 che, non dipendendo né dall'indice della sommatoria (poiché costante) né dagli estremi di integrazione, può essere portato fuori insieme all'esponenziale unilatero poiché non dipende da ω.

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega\, e^{-t}\, u(t)] \left[\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{6}\, \delta(\omega - n)\right] d\omega = \frac{1}{6} e^{-t} u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left[\sum_{n=1}^{6} \delta(\omega - n)\right] d\omega$$

Scambiamo l'integrale e la sommatoria:

$$\eta_X = \frac{1}{6} e^{-t} u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left[\sum_{n=1}^{6} \delta(\omega - n)\right] d\omega \quad \rightarrow \quad \eta_X = \frac{1}{6} e^{-t}\, u(t) \left[\sum_{n=1}^{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \delta(\omega - n) d\omega\right]$$

Il valore di un segnale moltiplicato per un delta di Dirac restituisce l'ampiezza del segnale stesso nel punto in cui è stato centrato il delta punto [*Proprietà campionatrice del delta di Dirac*]. Trattandosi di una funzione formata da impulsi ad ampiezza pari ad 1/6 man mano che si integra si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \delta(\omega - n) d\omega \rightarrow \int_{1}^{6} \omega\, \delta(\omega - n) d\omega = n$$

ω può assumere i valori discreti $\{\omega_i\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ rappresentanti le facce di un dado, quindi l'integrale sarà pari ad "n" con "n" uno dei valori assumibili da 1 a 6. A questo punto scriviamo allora:

$$\eta_X = \frac{1}{6} e^{-t}\, u(t) \left[\sum_{n=1}^{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \delta(\omega - n) d\omega\right] = \frac{1}{6} e^{-t} u(t) \left[\sum_{n=1}^{6} n\right] \rightarrow \eta_X = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{6} e^{-t}\, u(t) = 3.5\, e^{-t} u(t)$$

Si noti che nemmeno questo valore medio è una funzione membro poiché 3,5 non è assunto da Ω (trattandosi di una variabile che può assumere solo i valori interi di un dado), Tuttavia si tratta del valore che in media il processo assume.

Funzione potenza media statistica istantanea

Definiamo un altro indice statistico del primo ordine di un processo aleatorio.
Ragioniamo ancora in funzione delle variabili aleatorie dato che si sta considerando il processo aleatorio in un singolo istante di osservazione.
Quando trattiamo una variabile aleatoria, oltre al valor medio, abbiamo come indice caratteristico fondamentale il momento di secondo ordine che prende il nome di valor **quadratico medio**:

$$m_X(t) \triangleq E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_x(x;t)dx$$

Fissando un istante $t = \bar{t}$ il processo aleatorio si comporta come una variabile aleatoria, quindi è possibile calcolare il corrispondente valore quadrico medio del processo aleatorio in tale istante t fissato:

$\boldsymbol{Processi\ Aleatori\ Continui}$:	$\boldsymbol{m_X^2(t) \triangleq E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_x(x;t)dx}$
$\boldsymbol{Processi\ Aleatori\ Discreti}$:	$\boldsymbol{m_X^2(t) \triangleq E\{X^2(t)\} = \sum_i x_i^2 * \mathrm{Pr}\,(X(t) = x_i)}$

Il valore quadrico medio di un processo aleatorio calcolato ad un preciso istante viene anche detto **funzione potenza media statistica istantanea** perché si tratta di un segnale al quadrato, che rappresenta la potenza di quest'ultimo.
[Se il segnale è una tensione, la potenza si può ottenere come il quadrato di quest'ultima a meno di un valore resistivo].

Si parla di Potenza media statistica perché la si sta mediando rispetto alla PDF, infatti è il prodotto del quadrato del segnale e la PDF f_X. È istantanea perché si riferisce alla potenza del processo calcolata istante per istante (se non lo si valutasse ad ogni istante non si potrebbe assumere che esso si comporti come una variabile aleatoria).

Quindi **il valore quadrico medio del processo calcolato in un istante fissato restituisce la potenza media del segnale istante per istante.**

La funzione varianza

Il terzo indice caratteristico di primo ordine di una variabile aleatoria è la varianza σ^2.
Anche per un processo aleatorio è possibile definire la varianza, che viene calcolata in un singolo istante fissato, in funzione del valore medio e del valor quadrico medio.

Per le variabili aleatorie continue essa viene definita come:

$$\sigma_X^2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 \, f_x(x;t)dx$$

Ma possiamo, appunto, ricavarla in funzione di valore medio e valore quadrico medio (ovvero di Potenza media statistica istantanea), eseguendo il quadrato dalla definizione:

$$\sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 \, f_x(x;t)dx \triangleq E\{[X(t) - \eta_X]^2\} = E\{X(t)^2 - 2\eta_X X(t) + \eta_X^2\}$$

L'operatore media è lineare (consiste in un integrale), pertanto possiamo scrivere:

$$\sigma_X^2(t) = E\{X(t)^2 - 2\eta_X X(t) + \eta_X^2\} = E\{X(t)^2\} - E\{2\eta_X X(t)\} + E\{\eta_X^2\}$$

Siccome η_X è già un valore medio, può essere trattato come costante (e di fatto lo è: si tratta di un numero!) quindi:

$$\sigma_X^2(t) = E\{X(t)^2\} - 2\eta_X E\{X(t)\} + \eta_X^2 \;=\; m_X^2 - 2\eta_X^2 + \eta_X^2 \quad \rightarrow \sigma_X^2 = m_X^2 - \eta_X^2$$

Trattandosi di processi aleatori e avendo definito il "valor quadrico medio" del processo aleatorio come "potenza media statistica istantanea", scriviamo:

$$\boxed{\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2}$$

In generale, vale che:

Processi Aleatori Continui:	$\boldsymbol{\sigma^2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 \, f_x(x;t)dx = E\{P_X(t) - \eta_X^2\}}$
Processi Aleatori Discreti:	$\boldsymbol{m_X^2(t) \triangleq \sum_i (x - \eta_X)^2 * \Pr\,(X(t) = x_i) = E\{P_X(t) - \eta_X^2\}}$

La varianza da informazioni circa la distanza tra il valore del segnale aleatorio ed il valore medio nell'istante $t = \bar{t}$ di osservazione.

Quindi con questi indici riusciamo a caratterizzare i processi aleatori nel tempo.

Ricapitolando, per analizzare un processo aleatorio analizziamo tutti i segnali che compongono lo spazio campione (tutti i possibili risultati, ovvero i possibili andamenti che il segnale aleatorio può assumere).

Essendo chiaramente difficile considerare tutti i segnali, analizziamo istante per istante questi ultimi, in questo modo, nel singolo istante, troveremo un certo valore numerico (il valore di $X(t)$ quando $t = \bar{t}$) e lo studio si riversa su quello di una variabile aleatoria $[X(\bar{t})]$, pertanto ad ogni istante possiamo calcolare i parametri fondamentali del segnale aleatorio all'istante $\bar{t}$: gli indici caratteristici: ***media statistica, potenza media statistica istantanea*** *(analoga al valor quadrico medio ma per i processi aleatori)*, ***varianza***.

Si tratta quindi dell'analisi di un segnale casuale nel tempo, mediante gli indici statistici che lo caratterizzano.

Indici statistici di II ordine di un processo aleatorio

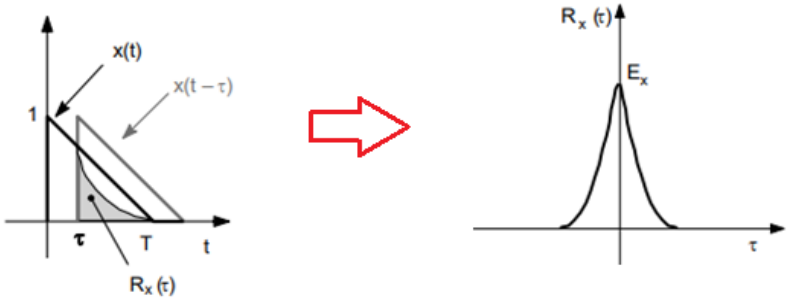
Sino ad ora abbiamo trattato gli indici di primo ordine dei processi stazionari, ovvero quegli indici che si ottengono istante per istante, vedendo per il processo come una singola variabile aleatoria.

Supponiamo adesso di fissare due istanti di osservazione: t_1 e t_2, traendo così due variabili aleatorie dal processo: $X(t_1)$ e $X(t_2)$ e andiamo a ricavare gli indici statistici del secondo ordine per il processo $X(t)$.

Autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$

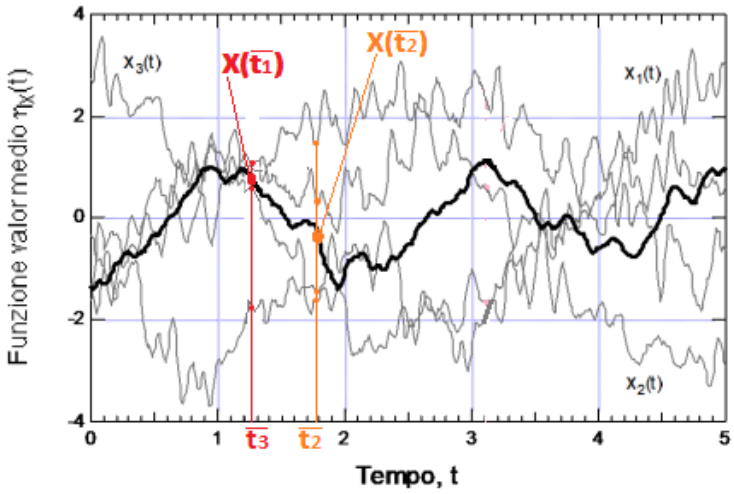
Studiando i segnali determinati abbiamo affrontato la funzione di autocorrelazione che, fissando due istanti di osservazione, analizza la correlazione del segnale ad un istante "t" ed il medesimo traslato nel tempo ad un istante "$t+\tau$":

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\ d\tau$$



Nel nostro caso, attraverso il processo, studiamo il segnale aleatorio, che sappiamo poter assumere l'andamento di diversi segnali campione.
Vogliamo sapere come, fissando due istanti t_1 e t_2, il segnale sia correlato a sé stesso in questi due istanti di osservazione.

Ma si noti che se è vero che all'istante "$\bar{t}$" fissato il processo si comporta come una variabile aleatoria $X(\bar{t})$, allora fissando i due istanti t_1e t_2 i valori del processo valutati in questi due istanti: $X(t_1)$ e $X(t_2)$ sono due variabili aleatorie, quindi stiamo cercando di studiare la **correlazione tra due variabili aleatorie**, che per definizione è la **covarianza**.



La funzione di autocorrelazione per processi continui è data, per definizione, dal prodotto dei valori medi in funzione degli istanti di osservazione in cui si trova il processo:

$$\boxed{\boldsymbol{R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\}}}$$

Questo è un integrale doppio avente per argomento il prodotto tra i valori assumibili dalla funzione delle variabili aleatorie: x_1 e x_2 e la funzione densità di probabilità congiunta agli istanti t_1 e t_2: $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{X_1=-\infty}^{+\infty} \int_{X_2=-\infty}^{+\infty} x_1\, x_2\ f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$$

Quando si parla di processi discreti l'autocorrelazione è data dalla doppia sommatoria nei valori assumibili dalle variabili aleatorie: x_i e x_j; dal prodotto tra tali valori e la probabilità congiunta $Pr\{X(t_1) = x_i, X(t_2) = x_j\}$ si ottiene l'autocorrelazione:

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} = \sum_i \sum_j x_i\, x_j\, Pr\{X(t_1) = x_i, X(t_2) = x_j\}$$

Stiamo praticamente unendo il concetto di autocorrelazione per un segnale determinato e quello di covarianza tra due variabili aleatorie, ottenendo l'autocorrelazione per processi aleatori $R_X(t_1, t_2)$

Autocovarianza $\boldsymbol{C_X(t_1, t_2)}$

Analogamente alle variabili aleatorie, possiamo definire la autocovarianza del processo: si tratta del valor medio del prodotto tra lo scostamento della prima variabile aleatoria dal suo valor medio $[X(t_1) - \eta_1]$ ed il medesimo scostamento ottenuto per la seconda variabile aleatoria $[X(t_2) - \eta_2]$:

$$\boxed{\boldsymbol{C_X(t_1, t_2) \triangleq E\{[X(t_1) - \eta_1][X(t_2) - \eta_2]\}}}$$

Si tratta praticamente dell'integrale doppio del prodotto tra gli scostamenti dei valori del processo assunti negli istanti t_1 e t_2: $X(t_1)$ e $X(t_2)$ rispetto ai rispettivi valori medi e la funzione densità di probabilità congiunta: $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{X_1=-\infty}^{+\infty} \int_{X_2=-\infty}^{+\infty} [x_1 - \eta_1][\, x_2 - \eta_2]\ \ f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$$

Si può dimostrare che la funzione di autocovarianza si può ricavare dalla differenza tra l'autocorrelazione ed il prodotto tra le funzioni valor medio calcolate negli istanti di osservazione:

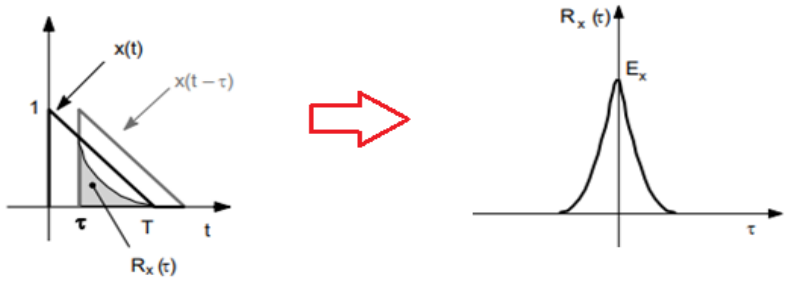
$$\boxed{\boldsymbol{C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)}}$$

L'autocovarianza studiata per le coppie di variabili aleatorie dà informazioni circa il comportamento congiunto delle due variabili aleatorie rispetto al valor medio: se $C_X(X(t_1), X(t_2)) > 0$ allora entrambe le variabili aleatorie stanno crescendo rispetto al valor medio: questo significa che dall'istante t_1 all'istante t_2 il processo sta crescendo.

Differenza tra funzione di autocorrelazione per segnali determinati e per segnali aleatori

Per un **segnale determinato** la funzione di autocorrelazione è pari **all'integrale del prodotto tra il valore del segnale all'istante di osservazione ed il valore che esso assume quando questo è traslato nel tempo**:

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\ d\tau$$



Per i **segnali aleatori** è necessario studiare questa funzione **in termini statistici** poiché non sappiamo esattamente quale sia il suo andamento; per questo motivo si passa al valore medio, ricollegandoci **all'autocorrezione di due variabili aleatorie**.

Infatti la **funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio si ottiene dal valor medio delle due variabili aleatorie estratte dal processo in due istanti di osservazione t_1 e t_2:** tale prodotto viene calcolato tra i valori x_1 e x_2 che le variabili possono assumere durante la loro evoluzione ed è soppesato dalla PDF congiunta di quest'ultime $[f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)]$:

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{X_1=-\infty}^{+\infty} \int_{X_2=-\infty}^{+\infty} x_1\, x_2\ f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$$

Mentre l'autocorrelazione per segnali determinati si ottiene integrando nel tempo, quella per segnali aleatori si ottiene integrando in termini probabilistici: integrando le variabili aleatorie estrapolate dal processo aleatorio.

Concettualmente l'integrazione nel tempo significa mediare nel tempo, spostandosi da istante a istante; quando integriamo per trovare il valore di una funzione di autocorrelazione del processo statistico non integriamo nel tempo, infatti i valori $X(t_1) = x_1$ e $X(t_2) = x_2$ si ottengono fissando gli istanti t_1 e t_2 e l'integrazione viene riferita in termini statistici solo alle variabili aleatorie e estrapolate dal processo.

Infatti, quando abbiamo ricavato la correlazione di due variabili aleatorie non abbiamo integrato rispetto al tempo ma rispetto ai valori che queste potevano assumere (mediante integrale doppio).

NB! Si tenga presente che abbiamo definito la funzione di autocorrelazione come **valore medio del prodotto tra le variabili $X(t_1)$ e $X(t_2)$, questo non equivale al prodotto dei valori medi**!

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} \neq E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}$$

<u>Esempio</u>: Supponendo che valori medi in t_1 dei tre segnali campioni rappresentati siano: $X_1(t_1) = 1,\ X_2(t_1) = 0.5,\ X_3(t_1) = 0.1$ e che i valori medi in t_2 siano: $X_1(t_2) = 6 \quad X_2(t_2) = 3 \quad X_3(t_2) = 2$

Possiamo ottenere l'autocorrelazione delle tre funzioni membro agli istanti t_1 e t_2 con la media calcolata rispetto al prodotto:

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} \rightarrow R_{X1}(t_1, t_2) = E\{(1*6), (0.5*3), (0.1*2)\} = E\{6{,}1.5{,}02\} \approx 2.57$$

Si tratta di una media di prodotti e non del prodotto tra i valori medi, infatti cadremmo in errore se facessimo il prodotto tra valori medi:

$$E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} \rightarrow E\{1{,}0.5{,}0.1\} * E\{6{,}3{,}2\} \approx 0.53 * 3.67 \approx 1.95 \neq 2.57 = R_X(t_1, t_2)$$

Si esegue la media del prodotto: l'autocorrelazione del processo dice mediamente quanto vale il prodotto tra i vari segnali campioni agli istanti fissati. Effettuiamo una media poiché, effettivamente, quando fissiamo un istante osserviamo diversi valori, quindi lavoriamo in termini statistici, in termini di variabili aleatorie.

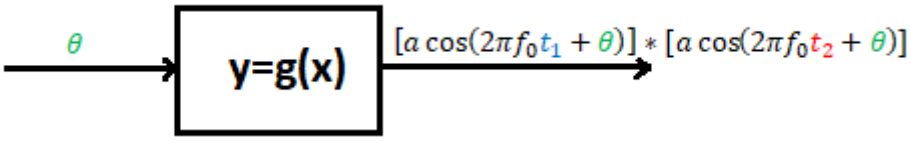
Esempio: Consideriamo il processo aleatorio parametrico del generatore di segnale cosinusoidale visto finora, riferendoci ai valori che si assume agli istanti t_1 e t_2 da noi fissati:

$$X(t_1) = a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta) \qquad X(t_2) = a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)$$

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione, ovvero la media del prodotto tra $X(t_1)$ e $X(t_2)$:

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)] * [a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\}$$

Si noti che ancora una volta possiamo vedere questo valore medio come una trasformazione: fissata la variabile aleatoria correlata alla fase iniziale: θ si ottiene un'uscita corrispondente:



Possiamo allora calcolare questo valore medio con il teorema del valor medio:

$$\eta_\eta = E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\, d\omega$$

Sapendo che la trasformazione $g(x)$ in questo caso coincide proprio con il segnale in uscita, scriviamo:

$$E_\theta\{[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)] f_\theta(x)\, d\theta$$

Ricordando che la variabile aleatoria θ è un angolo che varia in maniera uniforme da 0 a 2π, sostituiamo gli estremi di integrazione, ottenendo così:

$$E_\theta\{[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\} = \int_0^{\pi} [a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)] f_\theta(x)\, d\theta$$

Inoltre, appunto perché si tratta di una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e π, possiamo già dedurre che nell'intervallo di integrazione questa assume un valore costante e pari a $1/\pi$, che pertanto sostituiremo:

$$E_\theta\{[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\} = \int_0^{\pi} [a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)] \frac{1}{\pi}\, d\theta$$

Portiamo fuori dal segno d'integrazione i termini costanti:

$$\int_0^{\pi} [a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)] \frac{1}{\pi}\, d\theta = \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\, d\theta$$

Dalle formule trigonometriche possiamo scrivere il prodotto di due coseni cui argomento è differente come semisomma di due coseni aventi come argomento la somma e la differenza degli argomenti:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Possiamo allora effettuare questa sostituzione per semplificare i calcoli:

$$E_\theta\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos[(2\pi f_0 t_1 + \theta) + (2\pi f_0 t_2 + \theta)] + \cos[(2\pi f_0 t_1 + \theta) - (2\pi f_0 t_2 + \theta)]}{2}\, d\theta$$

$$E_\theta\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta] + \cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]\, d\theta$$

Spezziamo l'integrale in due:

$$E_\theta\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]\, d\theta\right\}$$

Il coseno in cui non figura la fase iniziale è costante rispetto all'integrazione, quindi si porta fuori:

$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)] \int_0^{\pi} d\theta\right\}$$

Risolviamo prima il secondo integrale poiché immediato:

$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]\, [\theta]_0^{\pi}\right\}$$

$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \frac{a^2}{2\pi}\cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]\, \pi$$

$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \frac{a^2}{2}\cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]$$

Svolgendo l'integrale del coseno otteniamo un seno; quest'ultimo poi verrà calcolato sia in 0 che in π, ma il suo valore è nullo in entrambi i casi, quindi il primo integrale sparisce in quanto nullo:

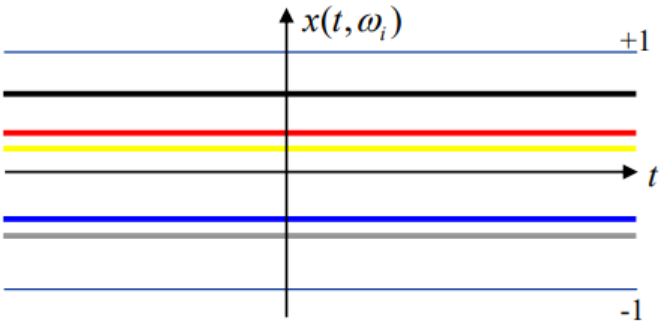
$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos[2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\, d\theta + \frac{a^2}{2}\cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)] = \frac{a^2}{2}\cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]$$

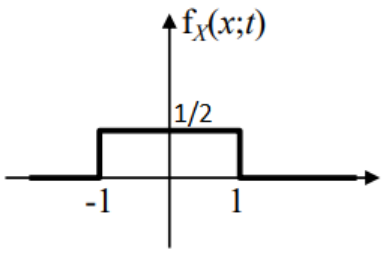
Da questo risultato possiamo osservare un'importante caratteristica che ritroveremo nella particolare categoria dei **processi aleatori stazionari in senso lato**: la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ non dipende dai singoli valori assunti dal processo in t_1 e t_2 ma dalla loro differenza $(t_1 - t_2)$:

$$E\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{X(t_1 - t_2)\} = \frac{a^2}{2}\cos[2\pi f_0(\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{t_2})]$$

Noi lavoreremo sempre con processi cui autocorrelazione dipende dalla differenza tra gli istanti di osservazione: $\boldsymbol{R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)}$, come vedremo questi ultimi sono detti processi aleatori stazionari in senso lato. Quindi con dei processi cui autocorrelazione dipende specificatamente dalla distanza temporale tra gli istanti di osservazione.

Esempio: si considera il processo aleatorio $X(t) = \Omega$; con Ω variabile aleatoria uniforme in [-1,1].
Si tratta praticamente di un processo aleatorio costante, si può immaginare come il segnale costante erogato da una batteria ideale cui però valore (in volt) è una costante che si trova tra -1 e 1 è varia in maniera aleatoria, con PDF uniforme.





Questo processo è particolare perché fissando un qualsiasi istante di osservazione si ottiene sempre lo stesso valore della PDF $f_X(\omega, t)$ in quanto quest'ultima coincide con la PDF di Ω ed è costante dato che Ω è uniforme.

Il valore medio di questo segnale è nullo: questo significa che mediamente il segnale è nullo, ed è errato direi che il segnale sia nullo, poiché in realtà esso assume certi valori, è la sua media ad essere nulla!

$$E\{X(t)\} = \int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, x\, dx \;= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-1}{2}\right) = 0$$

Quindi in questo particolare esempio il valore medio non dipende dal tempo perché la PDF è costante (quindi indipendente dal tempo).

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione: siccome gli istanti $t_1, t_2, \ldots t_n$ le variabili $X(t_i)$ estratte dal processo assumono sempre gli stessi valori, dato l'andamento costante di quest'ultimo, possiamo concludere che: $X(t_1) = X(t_2) = \ldots = X(t_n)$. Quindi:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X^2(t)\}$$

La funzione di autocorrelazione coincide praticamente con il valor quadrico medio:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X^2(t)\} = \int_{-1}^{1} x^2\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)}{3}\right) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Relazione tra indici statistici del I Ordine ed indici statistici del II Ordine

In generale, **ci aspettiamo che valutando gli indici del II Ordine in un solo istante** (o se si vuole in due stanze identici) **si ritrovano praticamente indici di I Ordine perché gli indici di I Ordine si studiano fissando un singolo istante mentre gli indici del II Ordine si studiano fissando due istanti.**
Quindi se $t_1 = t_2 = t$ teoricamente si sta studiando il processo in solo istante fissato, quindi nel I Ordine.

Possiamo infatti osservare che se $t_1 = t_2 = t$ gli indici del II Ordine diventano indici del I Ordine:

- $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_1) = E\{X(t_1)X(t_1)\} = E\{X^2(t_1)\} \triangleq P_x(t)$
  La funzione di autocorrelazione calcolata nel medesimo istante corrisponde alla potenza media statistica istantanea (valor quadrico medio di un processo)
- $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_1) = E\{X^2(t_1) - m^2(t)\} \triangleq \sigma_x^2(t)$
  La funzione di autocovarianza calcolata in un singolo istante corrisponde alla varianza.

I processi aleatori stazionari

Siamo interessati ad una particolare categoria di processi aleatori: i processi **aleatori stazionari**.
In genere con "stazionario" si indica qualcosa che non varia nel tempo, come i sistemi lineari stazionari che sono tempo-invarianti.

Dei processi stazionari daremo due particolari definizioni di stazionarietà: la **stazionarietà in senso stretto** e la **stazionarietà in senso lato.**

Stazionarietà in senso stretto

Vediamo di dare la definizione di **stazionarietà in senso stretto**: si considerino gli indici statistici di un processo di qualsiasi ordine; quest'ultimi dipendono in generale dalla scelta degli "n" istanti di tempo in cui vengono calcolati: $t_1, t_2, \dots t_n$.

Supponiamo allora di traslare tutti gli istanti di tempo di una quantità fissa costante Δt, in modo da valutare gli indici statistici traslati.

Chiaramente, la valutazione degli indici avviene ad istanti differenti: la PDF congiunta di ordine n passa da essere: $f_X(x_1, x_2 \dots x_n; t_1, t_2 \dots t_n)$ Ad essere: $f_X(x_1, x_2 \dots x_n; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t \dots t_n + \Delta t)$

Diremo che il processo aleatorio è stazionario in senso stretto se accade che $\boldsymbol{X(t)}$ ed $\boldsymbol{X(t + \Delta t)}$ hanno gli stessi indici caratteristici ma sono processi aleatori differenti.
Quindi se, nonostante $\boldsymbol{X(t) \neq X(t + \Delta t)}$, accade che i due processi abbiano la stessa caratterizzazione statistica:

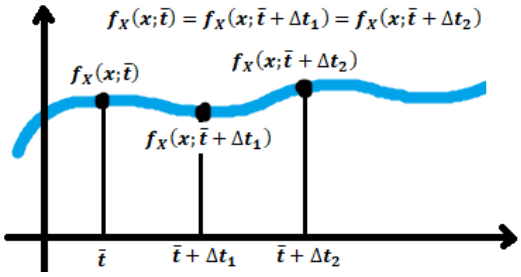
$$\boldsymbol{f_X(x_1, x_2 \dots x_n; t_1, t_2 \dots t_n) = f_X(x_1, x_2 \dots x_n; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t \dots t_n + \Delta t)}$$

Questo significa che le caratteristiche calcolate agli istanti $t_1,\ t_2 \dots\ t_n$ non sono cambiate una volta studiate in $t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t \dots\ t_n + \Delta t$.

Si faccia attenzione che **questo non significa che i processi siano uguali:** avendo eseguito una traslazione Δt è molto probabile che i processi $X(t)$ ed $X(t + \Delta t)$ siano diversi, tuttavia, **dal punto di vista statistico essi sono indistinguibili.**

Una volta che viene fissato un ordine $M\ (con\ M = 1,2,3, \dots)$, se viene rispettata la condizione di stazionarietà in senso stretto, allora il processo aleatorio si dice stazionario di ordine M.

Stazionarietà in senso stretto: la stazionarietà di ordine I



Affinché un processo aleatorio si possa dire **stazionario di primo ordine** si deve verificare la condizione in cui, **fissato un istante di osservazione $\bar{t}$, la PDF del processo aleatorio in quest'istante è uguale a quella calcolata nell'istante traslato** $\bar{t} + \Delta t$, con Δt una traslazione nell'asse temporale:

$$f_X(x;\bar{t}) = f_X(x;\bar{t}+\Delta t)$$

Ma siccome, per definizione di stazionarietà, questa condizione deve valere per qualunque traslazione Δt, qualsiasi sia quest'ultima troveremo una PDF $f_X(x)$ sempre uguale, il che significa che essa non dipenderà dal tempo: **la PDF dovrà essere costante per ogni istante.**

$$f_X(x;\bar{t}) = f_X(x;\bar{t}+\Delta t_1) = f_X(x;\bar{t}+\Delta t_2) = \cdots = f_X(x;\bar{t}+\Delta t_n) \quad \forall \Delta t_i$$

Questo significa che **tutte le variabili aleatorie estratte dal processo X(t) sono indistinguibili dal punto di vista statistico e, dato che la PDF è sempre costante, si dice che esse sono equidistribuite, ovvero che hanno gli indici caratteristici costanti** (dato che essi dipendono dalla PDF quest'ultima è costante):

$$\boxed{\textit{Stazionarietà senso stretto ordine I}: \begin{cases} \eta_X(t) = E\{X(t)\} = \eta_X \\ P_X(t) = E\{X^2(t)\} = P_X \\ \sigma^2(t) = P_X - (\eta_X)^2 = \sigma^2 \end{cases}}$$

Stazionarietà in senso stretto: stazionarietà di ordine II

Fissando due istanti di osservazione si possono ricavare due variabili aleatorie estratte dal processo: $X(t_1)$ e $X(t_2)$.

Attraverso gli indici caratteristici del secondo ordine come l'autocorrelazione e la covarianza è possibile considerare congiuntamente queste due variabili aleatorie.

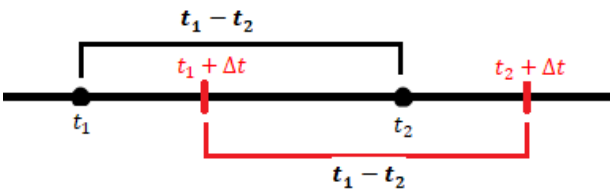
Allora diremo che **il processo è stazionario in senso stretto con una stazionarietà di secondo ordine se, fissati gli istanti di osservazione t_1 e t_2, viene rispettata la condizione di stazionarietà**:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x,x_2;t_1+\Delta t, t_2+\Delta t)$$

Con Δt una traslazione costante e fissata.

La distanza tra t_1 e t_2 rimane costante perché entrambi gli istanti subiscono la traslazione costante pari a Δt e ciò deve valere per ogni Δt, per definizione di stazionarietà:

$$(t_1 - t_2) = [(t_1 + \Delta t) - (t_2 + \Delta t)]$$



Questo significa allora che la PDF, nel caso di processo aleatorio stazionario in senso stretto di secondo ordine, non dipende dai singoli istanti t_1 e t_2 ma solo dalla loro differenza:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1-t_2)$$

Allora gli indici stazionari di secondo ordine non dipenderanno più dei singoli istanti ma dalla loro distanza:

$$\boxed{\textit{Stazionarietà in senso stretto ortine II}: \begin{cases} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) \\ C_X(t_1,t_2) = C_X(t_1-t_2) \end{cases}}$$

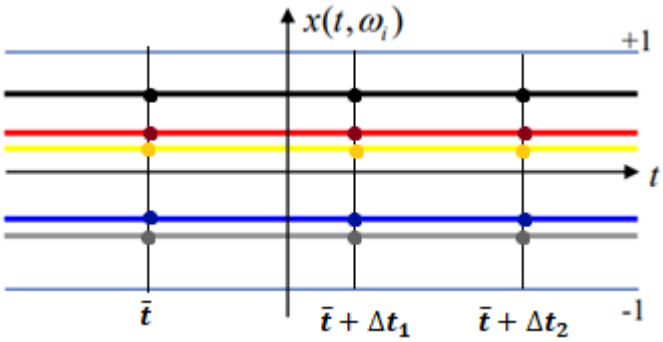
Ricapitolando quindi:

- La **stazionarietà in senso stretto di primo ordine** ci dice che gli **indici statistici di primo ordine**, vale a dire valor medio, potenza media statistica istantanea e varianza, **sono costanti**.
- La **stazionarietà in senso stretto di secondo ordine** ci dice che gli **indici statistici di secondo ordine**, vale a dire auto correlazione e covarianza, **dipendono dalla distanza tra gli istanti di osservazione** e non dai singoli istanti.

La stazionarietà in senso stretto di **ordine n** implica che l'autocorrelazione dipenderà solo dalla distanza degli n punti di osservazione; noi comunque ci fermeremo alla stazionarietà in senso stretto di II Ordine.

Esempio: si consideri ancora una volta il processo aleatorio costante: $X(t) = A$

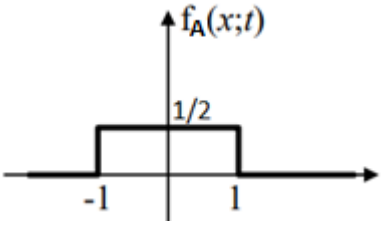
Questo processo è stazionario di primo ordine perché, comunque si fissi un istante di tempo t, la funzione densità di probabilità (PDF) della variabile aleatoria è sempre la stessa: fissando un istante t possiamo osservare che il valore può variare sempre tra gli stessi valori, per cui si tratta di PDF identiche istante per istante.



$$\boldsymbol{f_X(x;\bar{t}) = f_A \quad poiché\ X(t) = A\ (costante)}$$

Comunque fissati n punti si ottiene la stessa PDF, quindi la stessa variabile aleatoria:

$$X(t_1) = X(t_2) = \cdots = X(t_n) = A$$



Questo processo è **stazionario di ordine n**: esso è invariante rispetto ad una traslazione nel tempo dell'asse dei tempi di Δt, perciò $X(t+\Delta t)$ ha le stesse caratteristiche di qualunque ordine di $X(t)$, poiché la PDF è costante.

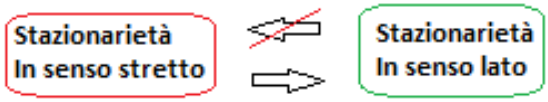
La stazionarietà in senso lato

La stazionarietà in senso stretto è difficile da calcolare, è molto onerosa: deve essere analizzato il processo istante per istante e deve essere verificato che per ogni variabile aleatoria estratta dal processo ad un certo istante si ottiene sempre lo stesso valore della PDF o, in generale, degli indici caratteristici se si vuole provare la Stazionarietà in senso stretto di I ordine; mentre se si volesse studiare la stazionarietà in senso stretto del secondo ordine occorrerebbe valutare la funzione di autocorrelazione o covarianza del processo in due differenti istanti e verificare che queste dipendano solo dalla distanza tra gli istanti di osservazione.

Esiste una definizione più debole, si tratta della definizione di **stazionarietà in senso lato**:
"Un processo aleatorio è detto stazionario in senso lato se i suoi indici statistici di primo ordine sono costanti e gli indici statistici di secondo ordine dipendono solo dalla distanza tra gli istanti in cui vengono estratte le variabili aleatorie; nello specifico esso viene definito tale se **la sua funzione valor medio assume un valore costante e se la sua funzione di autocorrelazione dipende solo dalla distanza degli istanti di osservazione: $(t_1 - t_2)$"**:

$$\boldsymbol{Stazionarietà\ in\ senso\ lato}: \begin{cases} \boldsymbol{\eta_X(t) = E\{X(t)\} = \eta_X} \\ \boldsymbol{R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1 - t_2)} \end{cases}$$

La stazionarietà in senso stretto implica quella in senso lato ma non vale il viceversa.



Questa condizione è più debole della stazionarietà in senso stretto, tuttavia, è sufficiente affinché sia possibile eseguire una serie di semplificazioni per lavorare nel dominio di Fourier con i processi aleatori.

Ogni qualvolta vorremmo analizzare il processo nel dominio di Fourier sarà necessario verificare congiuntamente le due condizioni di stazionarietà in senso lato:

1) **Valore medio costante** $\boldsymbol{\eta_X(t) = \eta_X}$
2) **Funzione di autocorrelazione dipendente dalla distanza tra gli istanti di osservazione:** $\boldsymbol{R_X(t_1 - t_2)}$

Precisiamo che la dipendenza dalla distanza vale anche per il secondo indice statistico, la covarianza:

$$C_X(t_1 - t_2) = E\{[X(t_1) - \eta_X][X(t_2) - \eta_X]\} = R_X(t_1 - t_2) - \eta_X^2 = C_X(t_1 - t_2)$$

Poiché η_X^2 è costante.

Si noti che fissando un istante t ed un secondo istante t^*, che possiamo praticamente vedere come traslazione temporale di t: $t^* = t + \tau$, otteniamo un valore dell'autocorrelazione che dipende solo da τ, la traslazione (che è appunto la distanza tra gli istanti t e t^*):

$$R_X(t, t^*) = R_X(t, t - \tau) = E\{X(t)X(t - \tau)\}$$

Infatti se il processo è stazionario in senso lato: $R_X(t, t - \tau) = R_X(t - (t - \tau)) = R_X(\tau)$

La stessa cosa vale per la covarianza: $C_X(t, t - \tau) = C_X(t - (t - \tau)) = C_X(\tau)$

τ è la distanza tra gli istanti di estrapolazione delle variabili aleatorie dal processo

Perché si tratta di stazionarietà più debole?

Nella stazionarietà in senso stretto analizziamo tutte le PDF per tutte le variabili aleatori estratte ad ogni singolo istante di evoluzione del processo.

Nella stazionarietà in senso lato, piuttosto che un'analisi eseguita istante per istante, viene verificato che il valore medio sia costante e che l'autocorrezione dipenda solo dalla distanza tra gli istanti di osservazione $(t_1 - t_2)$

Come verificare la stazionarietà in senso lato

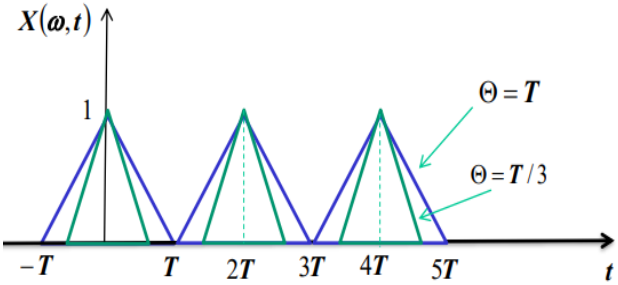
A volte capita che sia richiesta la verifica di stazionarietà in senso lato. Per farlo è necessario ricavare la funzione valore medio $\eta_X(x)$, se questa non è costante si può dire che non viene verificata la condizione di stazionarietà in senso lato.

Se invece il valore medio è costante, vengono fissati due istanti di osservazione t_1 e t_2 viene verificato che l'autocorrelazione dipende dalla distanza $(t_1 - t_2)$, se queste due condizioni vengono verificate allora il processo è stazionario in senso lato.

Normalmente, comunque, non è richiesta tale verifica perché i processi con cui lavoriamo sono già dati come stazionari in senso lato.

<u>Esempio</u>: consideriamo il processo aleatorio parametrico X(t) ottenuto dalla periodizzazione di:

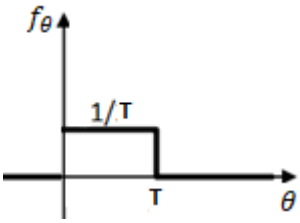
$$P(t) = \left(1 - \frac{|t|}{\theta}\right) rect\left(\frac{t}{2\theta}\right)$$



Si tratta praticamente di un triangolo in cui θ è uniforme e varia tra 0 e t: $\theta \in U[0, T]$:

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(t - 2nT)$$

Questo significa che si tratta di un treno di triangoli cui semi base varia in funzione diθ. Ogni treno di triangoli è una funzione membro del processo. Vogliamo studiare se esso è stazionario in senso lato.



Supponiamo di valutare il segnale estrapolando da esso tutte le variabili aleatorie equidistanti $X(2kT)$, praticamente quando ogni triangolo si trova al suo picco e vale 1. Il valore medio delle funzioni membro in questo istante vale sempre 1:

$$E\{X(2kT)\} = \int_0^T X(2kT)\, f_\theta\, d\theta = \int_0^T (1) \left(\frac{1}{T}\right) d\theta = \frac{1}{T}[\theta]_0^T = 1$$

Adesso valutiamo il processo quando $t = 2kT + T$, quindi quando assume valori multipli dispari di T: in questo caso ogni variabile aleatoria si annulla e avrà valore medio pari a 0.

Possiamo affermare che il processo è stazionario in senso lato?

No: il processo non può essere stazionario in senso lato perché abbiamo verificato che per due istanti differenti di tipo $t = 2kT$ e $t = 2kT + T$ il suo valore medio non assume due valori uguali, questo significa che il valore medio del processo dipende da "t" e quindi non è stazionario in senso lato, dunque nemmeno in senso stretto.

Esempio: Analizziamo nuovamente il caso di processo aleatorio generato dal generatore di segnale cosinusoidale:

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i) \quad con\ \theta \in U[0,\pi]$$

Abbiamo già ricavato il suo valor medio e da questo possiamo immediatamente dedurre che non si tratta di un processo non stazionario in senso lato, dato che il suo valore medio dipende da t:

$$E\{X(t)\} = \int_0^{\pi} x\,[a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)]\,dx = -\frac{2a}{\pi}\sin(2\pi f_0 \boldsymbol{t})$$

Supponiamo che la variabile θ sia definita in $[0, 2\pi]$ anziché in $[0,\pi]$ e ricaviamo nuovamente il valor medio

$$E\{X(t)\} = \int_0^{\pi} x\,[a\cos(2\pi f_0 t + \theta_i)]\,dx = \frac{a}{2\pi}[\sin(2\pi f_0 t + 2\theta) - \sin(2\pi f_0 t)] = 0$$

In questo caso il valore medio è costante: esso si annulla dato che: $\sin(2\pi f_0 t + 2\theta) = \sin(2\pi f_0 t)$, per cui non dipende dal tempo; il processo potrebbe essere stazionario in senso lato; per confermare ciò va verificata la condizione sulla funzione di autocorrelazione:

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_X X(t_1)] * [f_X X(t_2)]\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,[X(t_1)X(t_2)]\,dx$$

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,[X(t_1)X(t_2)]\,dx \rightarrow R_X(t_1,t_2) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}[a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)]\,[a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\ d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)] * [\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]\ d\theta$$

Dalla trigonometria ricordiamo che:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Possiamo allora scrivere:

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2\pi f_0 t_1 + \theta) + \cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)] + \cos[(2\pi f_0 t_1 + \theta) - \cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)]}{2}\ d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\theta) + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))}{2}\ d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\theta) + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\ d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big)\,d\theta\right\}$$

Portiamo fuori dal segno d'integrazione il coseno ove non figura l'angolo θ, vedendolo come costante:

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\theta)\,d\theta + \cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big)\int_0^{2\pi} d\theta\right\}$$

Risolviamo gli integrali:

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{a^2}{4\pi}\left\{[\sin(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\theta)]_0^{2\pi} + \cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big)\,[\theta]_0^{2\pi}\right\}$$

Il seno si annulla e quindi otteniamo:

$$R_X(t_1,t_2) = \cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big) = R_X(t_1 - t_2)$$

Come possiamo osservare, l'autocorrelazione dipende dalla distanza $(t_1 - t_2)$

Avendo trovato un valore medio del processo costante (nullo) è una funzione di autocorrelazione che dipende dalla sola distanza tra gli istanti di osservazione possiamo concludere che il processo è stazionario in senso lato:

$$\begin{cases} \eta_X(t) = \eta_X \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) \end{cases}$$

Affinché questo processo sia stazionario in senso lato però deve accadere che la variabile aleatoria riferita alla fase iniziale sia definita tra $0\ e\ 2\pi$, altrimenti non è possibile ottenere le caratteristiche di un processo aleatorio stazionario in senso lato.

Non saremo in grado di dire se il processo è anche stazionario in senso stretto poiché la stazionarietà in senso lato non implica quella in senso stretto; per ottenere quest'ultima dovremmo calcolare il valore medio e la funzione di autocorrelazione per ogni istante di evoluzione del processo. Questa è un'operazione troppo onerosa, per cui ci accontenteremo della stazionarietà in senso lato.

Proprietà della funzione di autocorrelazione per un processo stazionario in senso lato

Lavoreremo sempre con processi stazionari in senso lato poiché sono più semplici da trattare; andiamo adesso a verificare alcune proprietà della funzione di autocorrelazione di questi processi, in modo da capire perché è meglio studiare processi cui stazionarietà sia in senso lato.

1) La funzione di autocorrelazione è una funzione pari

$$R_x(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} \xrightarrow{Staz.\ S.L} E\{X(t)X(t+\tau)\} = E\{X(t+\tau)X(t)\} = R_X(-\tau) \rightarrow \boxed{R_x(\tau) = R_x(-\tau)}$$

2) Il valore assunto dalla funzione di autocorrelazione nell'origine è pari alla potenza media statistica del processo aleatorio

$$\boxed{R_x(0) = E\{X(t)X(t+0)\} = E\{X^2(t)\} = P_X}$$

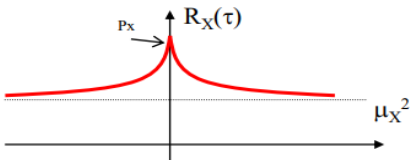
Questa caratteristica ci fa capire che **un processo aleatorio è sempre definito come processo di potenza**: se il processo fosse di energia il suo valore dovrebbe azzerarsi in un'infinità di punti, quindi il processo sarebbe sempre nulla e il suo valore medio pure

3) La funzione di autocorrelazione di processi stazionari in senso lato a un massimo nell'origine

$$\boxed{R_X(0) \geq |R_X(\tau)|}$$

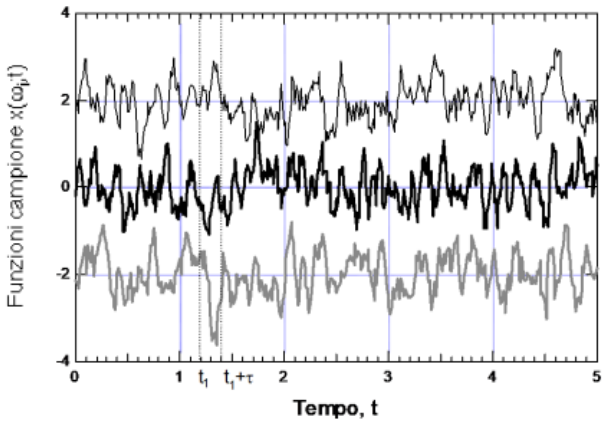
4) **Il limite della funzione di auto correlazione di un processo aleatorio calcolata in "τ" quando $\tau \rightarrow \infty$ è pari al valore medio al quadrato**

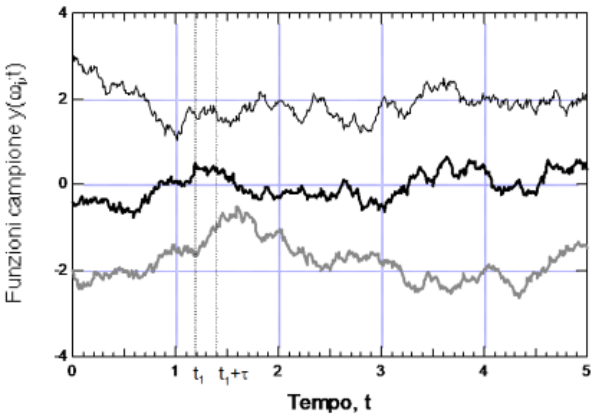
$$\boxed{\lim_{\tau\rightarrow\infty} R_X(\tau) = [\eta_X]^2 = [E\{X(t)\}]^2}$$

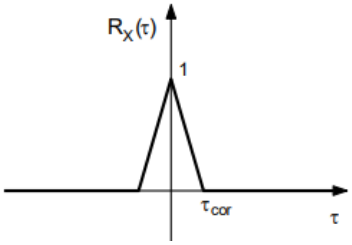


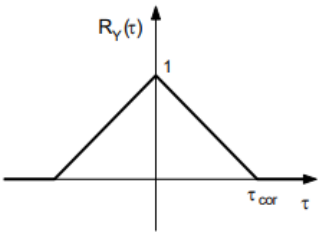
5) Più è stretta la funzione di autocorrelazione è più rapida sarà la variazione del segnale aleatorio

Come visto per i segnali determinati, la funzione di autocorrelazione misura la rapidità di variazione del processo aleatorio; nello specifico più è stretto il grafico della funzione di autocorrelazione e maggiore sarà la rapidità con il quale il segnale varia.









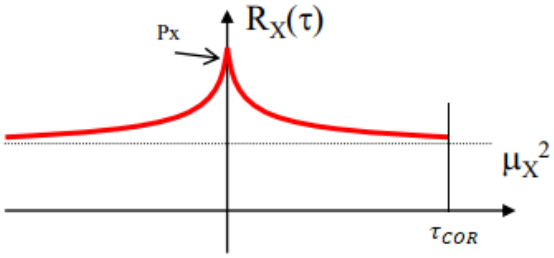
Quello che varia è praticamente il **tempo di correlazione**: al di là di "τ_{COR}" i segnali sono incorrelati e quindi la funzione di autocorrelazione sarà nulla, minore è tale tempo e più è veloce il segnale.

Il tempo di autocorrelazione τ_{COR}

Nello specifico diremo che: **il tempo di correlazione è la minima distanza che deve intercorrere tra due istanti di osservazione affinché le variabili aleatori estratte dal processo siano incorrelate**.

NB! È bene chiarire che si tratta di variabili aleatorie incorrelate e non statisticamente indipendenti: le due variabili non sono riconducibili l'uno all'altra ma non sono indipendenti.

Al di là del tempo di correlazione le variabili aleatori estratte dal processo non sono più correlate quindi l'autocorrelazione è nulla.



Quando T->0 la covarianza tende a 0 perché:

$$C_X(\tau) = R_X - \eta_X^2 \;\; \rightarrow \lim_{\tau \to 0} C_X = \lim_{\tau \to 0}(R_X - \eta_X^2)$$

Si noti che quando $\tau \rightarrow 0$ l'autocorrelazione consiste nel quadrato del valor medio:

$$\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = [\eta_X]^2 = [E\{X(t)\}]^2$$

Per cui otteniamo:

$$\lim_{\tau \to 0} C_X = \lim_{\tau \to 0}(R_X - \eta_X^2) = \eta_X^2 - \eta_X^2 = 0$$

Ricapitolando, i processi aleatori sono stazionari in senso lato se il **loro valore medio è costante** e quindi non dipende dal tempo e **la funzione di autocorrelazione dipende solo dalla distanza tra gli istanti di osservazione**.

Per questi processi otteniamo che **la funzione di autocorrelazione calcolata in zero restituisce la potenza del processo**, che è costante, come il valore medio.

La **funzione di autocorrelazione è decrescente**: parte dal massimo e decresce.

Il **tempo di correlazione** è il **tempo al di là del quale le variabili aleatori e diventano incorrelate.**

Spesso troviamo il valore della covarianza normalizzato per ragioni di rappresentazione, la funzione di covarianza normalizzata si ottiene dividendo la covarianza per la varianza:

$$C_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{R_X - \eta_X^2}{\sigma_X^2}$$

Potenza e spettro di potenza dei processi aleatori

I segnali aleatori sono dei segnali di potenza; per i processi stazionari in senso lato la funzione di autocorrezione restituisce la potenza media istantanea, e questa è costante:

$$R_X(\tau) = R_X(t_1 - t_2) \;\; \rightarrow \;\; R_X(0) = P_X$$

Vogliamo adesso ragionare nel dominio della frequenza per continuare ad analizzare i segnali, seppur aleatori

Analisi di Fourier per segnali aleatori stazionari in senso lato

Si consideri un segnale aleatorio stazionario in senso lato, cui valore medio è costante e funzione di autocorrelazione dipende solo dalle distanze tra i due istanti al quale si "estrapolano" le variabili aleatorie, come da definizione:

$$Condizioni\ stazionarietà\ in\ senso\ lato: \begin{cases} \eta_X(t) = \eta_X \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) \end{cases}$$

In linea di principio il processo aleatorio è il modello matematico di un segnale aleatorio e può essere visto come insieme di tutti i segnali determinati cui forma d'onda può essere assunta dal segnale aleatorio che approssima, tali segnali li abbiamo chiamati "segnali membro"; possiamo dire che **un segnale aleatorio può essere scomposto nella sovrapposizione di più armoniche le cui ampiezze e fasi variano in maniera aleatoria per ciascuna frequenza.**

I processi aleatori non permettono la rappresentazione di segnale di energia: affinché un segnale aleatorio sia di energia dovrebbe accadere che i segnali membro che lo compongono si annullino; siccome stiamo analizzando i processi aleatori stazionari in senso lato e questi hanno un valore medio costante, dovrebbe accadere che tali processi abbiano un valore medio nullo affinché il segnale aleatorio sia di energia. Quest'ultimo è un caso particolare, per tutti i processi stazionari in senso lato aventi valore medio non nullo non è possibile parlare di segnali di energia:

$$\eta_X(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \xrightarrow{Stazionarietà\ Senso\ Lato} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \eta_X \;\; \rightarrow \;\; E = \infty; P = P_X$$

Assumendo che il valor medio sia nullo si assume, in generale, che i segnali aleatori (quindi i processi aleatori) siano segnali di potenza.

Ricapitolando, se è possibile scomporre il processo aleatorio nei vari segnali membro che lo compongono, allora è anche possibile calcolare la trasformata di Fourier di quest'ultimi, essendo segnali determinati.
Per cui è possibile ottenere lo spettro di ampiezza e fase di ogni segnale membro che compone il segnale aleatorio; **potremmo allora pensare allo spettro del segnale aleatorio come una funzione che, fissata una frequenza, ha uno spettro che consiste praticamente in una variabile aleatoria che assume uno dei possibili valori di ampiezza o fase dei segnali membro alla frequenza fissata**.

In realtà non ci si basa su questo principio, bensì si passa alla descrizione dello spettro di potenza (poiché, come abbiamo detto, i processi aleatori sono segnali di potenza).
Lo spettro di Potenza esprime come la potenza del segnale si distribuisce ad ogni frequenza, dal teorema di Wiener-Khintchine abbiamo anche visto che lo spettro di potenza può essere visto come la trasformata della funzione di autocorrelazione:

$$\boxed{T.Wiener - Khintchine: \qquad S_X(f) = F[R_X(\tau)]}$$

Per i segnali aleatori lavoreremo con lo spettro di potenza, d'altronde quest'ultimo dà tutte le informazioni che dovrebbe dare la trasformata di Fourier:

1. **Da informazioni circa le frequenze in cui è definito il segnale, quindi la banda del segnale**
2. **Da informazioni circa le ampiezze, dato che può essere visto come spettro delle ampiezze del segnale al quadrato:** $|\boldsymbol{S_X(f)}| = |\boldsymbol{X(f)}|^2$

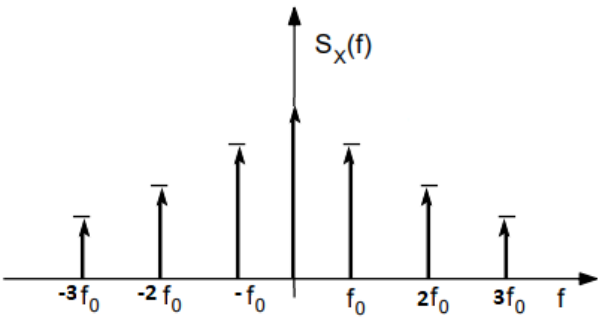
Quindi, in genere, ci si limita alla descrizione dello spettro di potenza del segnale aleatorio $S_X(f)$

Spettro di potenza per segnali periodici

Quando abbiamo trattato lo spettro di potenza abbiamo studiato quest'ultimo in funzione di un segnale periodico, che sapevamo essere da definizione un segnale di potenza.

In questo caso particolare abbiamo osservato che la densità spettrale di Potenza equivale ad un treno di impulsi e che quindi **assume lo stesso andamento dello spettro di un segnale periodico;**
l'ampiezza dello spettro di potenza è data dal coefficiente C_n legato alla formula di Poisson e dal modulo quadro del segnale:

$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, |X(f)|^2$$

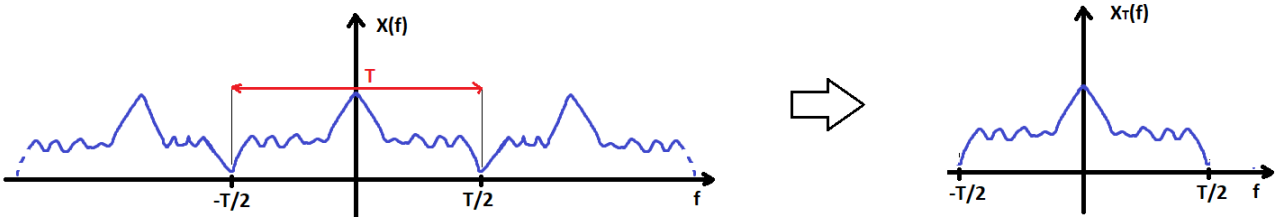


Ma quest'ultimo è un caso particolare dello studio della densità spettrale di potenza. È dunque il caso che affrontiamo tale argomento definendolo in vie generali.

Spettro di potenza

Ricerchiamo una definizione di **densità spettrale di potenza** (o **spettro di potenza**) congruente con quella dei segnali determinanti.

Un segnale è determinato di potenza, se trattato ed osservato in un periodo T è praticamente un segnale di energia, infatti è definito solo nel range di ampiezza T e nulla al di fuori.



Infatti:

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt = K \; (Valore\ Finito)$$

NB! Non si tratta necessariamente di una troncatura di un segnale periodico, il risultato di quest'analisi di energia vale per qualsiasi segnale aperiodico definito in un range temporale finito di grandezza T.

Il segnale, assumendo dei valori solo in un intervallo finito ed essendo nullo altrove, sarà di energia: il quadrato di quest'ultimo non tenderà mai ad infinito e, di conseguenza, l'energia sarà finita ed il segnale sarà di energia.

Di un segnale di energia è possibile calcolare la densità spettrale di energia, a partire dalla sua trasformata:

$$E_X(f) \triangleq |X_T(f)|^2$$

Nell'analisi temporale abbiamo trattato il concetto di potenza del segnale vedendo quest'ultima come il limite per $T \to \infty$ dell'energia calcolata nel periodo del segnale E_T rapportata al periodo stesso T

$$P_X = \lim_{T \to \infty} \frac{E_T}{T}$$

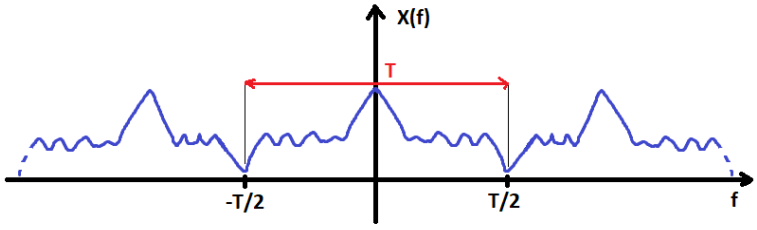
Dualmente, possiamo applicare questo concetto e questa definizione anche nel dominio della frequenza: lo spettro di potenza può essere ricavato a partire dallo spettro di energia, rapportando quest'ultimo al periodo T del segnale e passando al limite per $T \to \infty$:

$$S_X(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{E_X}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

Il caso dei segnali periodici è un caso particolare di quanto appena analizzato:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

Questo concetto vale praticamente per ogni segnale membro poiché questi sono segnali determinati di potenza.



Fissato uno dei segnali membro ω_i l'analisi in potenza del segnale ricade in un'analisi deterministica della potenza di quest'ultimo, si analizza quindi la troncatura del singolo segnale membro, definito solo nell'intervallo di ampiezza T: $[-T/2; T/2]$, che varrà 0 altrove:

$$X_T(t,\omega_i) = \begin{cases} x(t,\omega_i) & per\ |t| < T/2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dalla troncatura di questa funzione membro si può calcolare la densità spettrale di potenza:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega_i, f)|^2}{T}$$

*Passando, chiaramente, prima alla trasformazione: $x_T(\omega_i, t) \xrightarrow{F[\cdot]} X_T(\omega_i, f)$.

A questo punto allora possiamo pensare alla **densità spettrale di potenza totale del processo aleatorio come una media di tutte le densità spettrali dei segnali membro**, determinate e calcolate come appena descritto:

$$S_X(f) = E\{S_X(\omega_1, f)\}$$

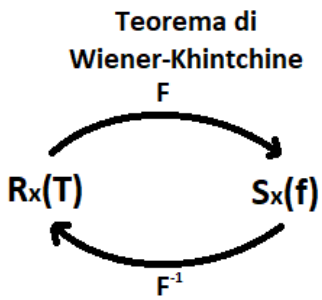
Questa è una definizione teorica che va bene per tutti i processi aleatori, siano essi stazionari o meno. Tuttavia, è bene segnalare che **questa operazione è matematicamente "azzardata"**: si tratta del calcolo della media di un valore limite e tale operazione non è semplice:

$$S_X(f) = E\{S_X(\omega_1, f)\} = E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega_i, f)|^2}{T}\right\} = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{|X_T(\omega_i, f)|^2}{T}\right\}$$

Spettro di potenza dei segnali aleatori stazionari in senso lato

Nei processi aleatori stazionari in senso lato non è necessario dover effettuare questi passaggi matematici. Per quest'ultimi, infatti, vale il **teorema di Wiener-Khintchine**, secondo il quale esiste una relazione di trasformata/antitrasformata di Fourier tra spettro di potenza e funzione di autocorrelazione:

$$\boldsymbol{T.Wiener-Khintchine}: \quad \boldsymbol{S_X(f) = F[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi fT}\, d\tau}$$



Siccome la funzione di autocorrelazione è una funzione pari possiamo anche scrivere:

$$S_X(f) = F[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi fT}\, d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi fT}\, d\tau$$

Chiaramente, antitrasformando lo specchio di potenza è possibile ottenere la funzione di autocorrelazione.

Attraverso il teorema di Wiener-Khintchine possiamo provare che:

1. **Lo spettro di potenza $S_X(f)$ è una funzione pari e reale**
2. **La potenza media del segnale aleatorio in senso lato è costante e, nello specifico, corrisponde all'integrale dello spettro di Potenza, come da definizione.**

Si noti però che, come abbiamo definito precedentemente, che la potenza equivale anche alla funzione di auto correlazione calcolata in 0:

$$P_X = R_X(0)$$

Si noti in effetti che l'integrale scritto corrisponde alla funzione di autocorrelazione quando T = 0 infatti, sapendo che $S_X(f)$ è la trasformata di $R_X(T)$, antitrasformando otteniamo:

$$R_X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(f) e^{j2\pi fT}\, df \xrightarrow{R_X(\tau)=R_X(0)} 2\int_{0}^{+\infty} S_X(f) e^{0}\, df = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(f)\, df = P_X$$

Abbiamo pertanto provato quello che avevamo già detto, deducendo che è possibile ricavare la potenza del segnale aleatorio in uno dei seguenti metodi:

- **Attraverso la funzione di autocorrelazione calcolata in $\tau = 0$:**

$$\boxed{\boldsymbol{P_X = R_X(0)}}$$

- **Attraverso l'integrazione dello spettro di potenza $S_X(f)$:**

$$\boxed{\boldsymbol{P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df}}$$

Lo spettro di potenza assume sempre un valore pari o maggiore di zero, in altre parole: **non può essere mai negativo**

$$S_X(f) \geq 0$$

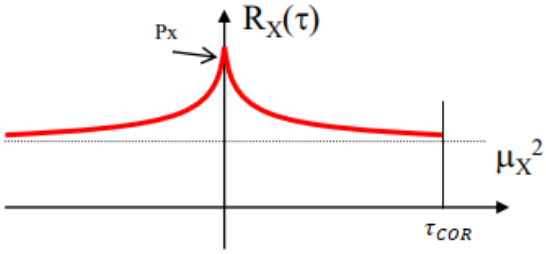
Non c'è alcuna differenza tra lo spettro di potenza di un processo aleatorio stazionario in senso lato e lo spettro delle ampiezze di un segnale determinato circa le informazioni che questi due forniscono:

- Per i processi aleatori stazionari in senso lato lo spettro di potenza è la trasformata della funzione di autocorrelazione, dualmente, lo spettro del segnale determinato è la sua trasformata di Fourier.
- Sia lo spettro di potenza che lo spettro delle ampiezze del segnale sono pari
- Entrambi sono sempre positivi

Praticamente, lo spettro di potenza per i processi aleatori viene sfruttato esattamente come viene sfruttato lo spettro delle ampiezze per i segnali determinati.

Possiamo affermare anche che la funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato non mostra alcuna differenza rispetto a quella di un segnale determinato; essa soddisfa tutte le proprietà dell'autocorrelazione di un segnale è determinato:

- Se essa viene calcolata in $\tau = 0$ restituisce il valore della potenza del segnale
- Si tratta di una funzione che ha massimo in zero
- È sempre decrescente (ha un massimo in 0 e decresce man mano che T aumenta
- Si annulla al di là del tempo di correlazione poiché una volta superato quest'ultimo le variabili risultano incorrelate.



<u>Esempio: calcolo dello spettro di potenza mediante il teorema di Weiner-Khintchine</u>
Analizziamo nuovamente il segnale in uscita dal generatore di segnale cosinusoidale.

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad con\ \theta \in U[0,2\pi]$$

Questo processo aleatorio parametrico è stazionario in senso lato, lo abbiamo dimostrato precedentemente: il processo diventa stazionario in senso lato quando la variabile aleatoria θ da cui dipende varia tra $0\ e\ 2\pi$.

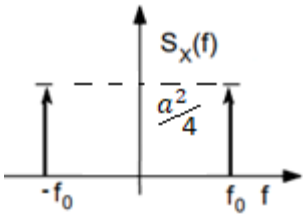
Abbiamo anche ricavato il suo valore medio, che è nullo, e abbiamo anche ricavato la funzione di autocorrelazione, dimostrando che essa dipende dalla differenza degli istanti in cui vengono estratte le variabili aleatorie: $T = (t_1 - t_2)$:

$$\begin{cases} E\{X(t)\} = 0 \\ R_X(t_1 - t_2) = \dfrac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

Trattandosi di un processo stazionario in senso lato, è possibile ricavare lo spettro di potenza attraverso il teorema di Wiener-Khintchine, la condizione necessaria è sufficiente per applicare il teorema è, infatti, che il processo aleatorio sia almeno stazionare in senso lato:

$$S_X(f) = F[R_X(\tau)] = F\left[\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}\right]$$

$$S_X(f) = \frac{a^2}{4}\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)$$

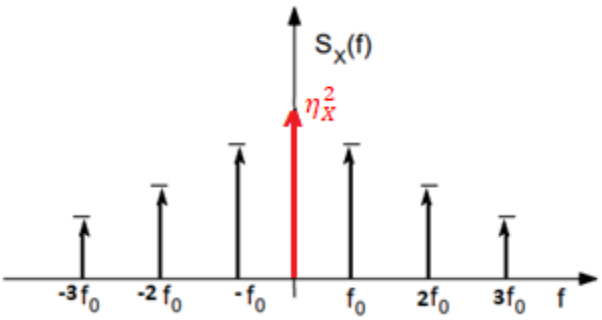


La potenza è legata ad un'unica armonica in f_0: il coseno.
[Si ricordi che noi troviamo due impulsi speculari in $\pm f_0$ perché analizziamo lo spettro bilatero ma in realtà non esistono frequenze negative].

Valor medio del processo aleatorio stazionario in senso lato mediante lo spettro di potenza

Nei segnali determinati il valor medio si può dedurre dallo spettro con un eventuale impulso nell'origine ($f = 0$): in tal caso il valor medio coinciderebbe con l'ampiezza di quest'ultimo.

Questo vale anche per i processi aleatori, tuttavia, siccome per questi analizziamo lo spettro di potenza, che per definizione si ricava come quadrato dello spettro delle ampiezze: $S_X(f) = |X(f)|^2$, **l'ampiezza dell'eventuale impulso nell'origine sarà** il **valor medio al quadrato**, per trovare il valor medio del processo sarà pertanto necessario passare alla radice quadrata di questo valore. Se non vi è impulso il valor medio è nullo.



"Modulazione" di un segnale aleatorio stazionario in senso lato

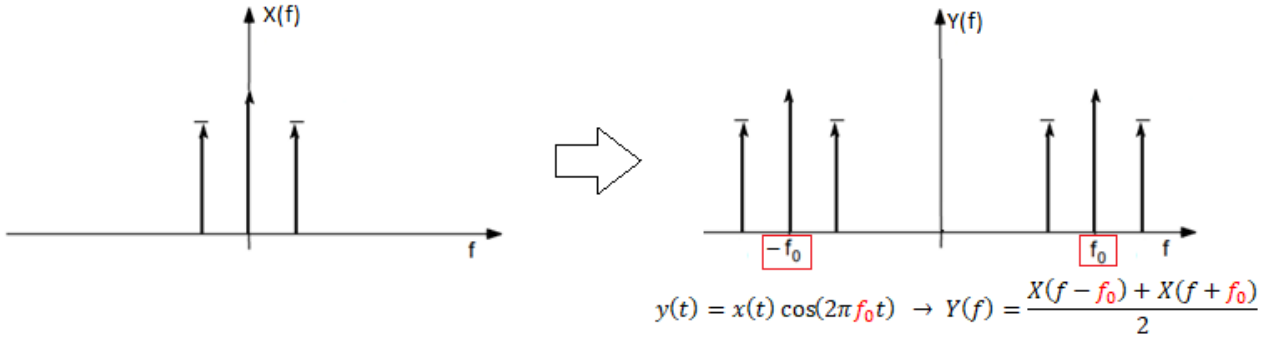
Quando abbiamo considerato un segnale determinato abbiamo visto come quest'ultimo poteva essere modulato moltiplicandolo per un coseno a frequenza portante f_0 attraverso il teorema della modulazione.

$$T.Modulazione\ (Segnali\ determinati):\quad y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)\ \rightarrow\ Y(f) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Dal punto di vista delle frequenze il risultato che osservavamo a seguito del campionamento era uno spostamento dello spettro, che veniva centrato in f_0, in virtù dello spettro del coseno che consiste in due impulsi centrati in $\pm f_0$; nello spettro delle frequenze:

$$F[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

Infatti, avviene la moltiplicazione per tale segnale nel dominio del tempo e come corrispettivo risultato in frequenza si osserva la traslazione dello spettro del segnale modulato.



Chiaramente, **centrando in f_0 lo spettro delle ampiezze anche lo spettro di potenza si ritroverà centrato in tale frequenza** dato che quest'ultimo consiste praticamente nel medesimo spettro ma con ampiezza al quadrato: $S_X(f) = |X(f)|^2$**.**

Consideriamo un segnale aleatorio parametrico che è dato dalla moltiplicazione di un certo segnale: un processo aleatorio stazionario in senso lato $X(t)$ ed un coseno cui portante dipende da una variabile aleatoria:

$$Y(t) = X(t)cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

In questo caso si tratta di una fase iniziale che è una variabile aleatoria uniforme distribuita da 0 e 2π, praticamente l'uscita del generatore di segnale cosinusoidale.
Questo significa che il segnale aleatorio può assumere i valori dei segnali membro che consistono in più cosinusoidi a portante f_0 ma con fase iniziale che varia in maniera aleatoria da 0 a 2π.
Il risultato che si ottiene dal prodotto tra un processo aleatorio stazionario in senso lato ed un coseno a portante fissa ma fase iniziale aleatoria uniformemente distribuita tra 0 a 2π è ancora un processo aleatorio in senso lato.

Vogliamo calcolare la funzione di autocorrelazione e quindi lo spettro di potenza del segnale ottenuto da questa "modulazione":

$$R_X(\tau) \triangleq E\{Y(t)Y(t+\tau)\} = E\{X(t)\cos[2\pi f_0 t+\theta] * X(t+\tau)\cos\,[2\pi f_0(t+\tau)+\theta]\}$$

Il segnale $X(t)$ ed il coseno cos $(2\pi f_0 t + \theta)$ sono due processi statisticamente indipendenti poiché i due possono evolversi a prescindere dall'altro. Possiamo allora vedere il valore medio del prodotto come prodotto dei valori medi perché data la statistica indipendenza.

Andremo allora a calcolare il valor medio del prodotto $X(t) * X(t+\tau)$ ed il valor medio del prodotto tra i coseni: $cos(2\pi f_0 t + \theta)\ e\ cos(2\pi f_0(t+\tau) + \theta)$:

$$R_Y(\tau) = E\{X(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta] * X(t+\tau)\cos\,[2\pi f_0(t+\tau) + \theta]\}$$

$$R_Y(\tau) = E\{X(t)\,X(t+\tau)\} * E\{\cos[2\pi f_0 t + \theta]\ \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta]\}$$

In questo modo ci possiamo facilmente accorgere che il valore medio del prodotto tra $X(t)\ e\ X(t+\tau)$ si tratta della definizione di funzione di autocorrelazione di X(t):

$$E\{X(t)\,X(t+\tau)\} \triangleq R_X(\tau)$$

E possiamo dunque sostituire:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau)\,E\{\cos[2\pi f_0 t + \theta]\ \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta]\}$$

Prima di proseguire possiamo applicare la forma trigonometrica:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos\,(\alpha-\beta)}{2}$$

Applicando questa formula al prodotto di coseni che stiamo analizzando otteniamo:

$$\frac{\cos[(2\pi f_0 t + \theta) + (2\pi f_0(t+\tau) + \theta)] - \cos[(2\pi f_0 t + \theta) - (2\pi f_0(t+\tau) + \theta)]}{2}$$

Ottenendo così:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau)\,E\left\{\frac{\cos[(2\pi f_0 t + \theta) + (2\pi f_0(t+\tau) + \theta)] - \cos[(2\pi f_0 t + \theta) - (2\pi f_0(t+\tau) + \theta)]}{2}\right\}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau)\,E\left\{\frac{\cos[(2\pi f_0(t+t+\tau) + 2\theta)] - \cos[2\pi f_0(t-t-\tau) + (\theta-\theta)]}{2}\right\}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau)\,E\left\{\frac{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)] - \cos[2\pi f_0\tau]}{2}\right\}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{2}E\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)] - \cos[2\pi f_0\tau]\,\}$$

Calcoliamo il primo valor medio:

$$E\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)]\} = \int_0^{2\pi} f_\theta\cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta]\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta]\,d\theta$$

$$E_\theta\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)]\} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta]\,d\theta = \frac{1}{2\pi}[2\,\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)]_0^{2\pi}$$

$$E_\theta\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)]\} = \frac{1}{\pi}\{\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + [4\pi]) - \sin(2\pi f_0(2t+\tau) + [0])\}$$

Poiché $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \sin(\alpha)$ otteniamo:

$$E_\theta\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)]\} = \frac{1}{\pi}\{\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + [4\pi]) - \sin(2\pi f_0(2t+\tau) + [0])\} = 0$$

Quindi:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{2}E\{\cos[(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)] - \cos[2\pi f_0\tau]\,\} = R_X(\tau) * \left[-\frac{1}{2}E\{\cos[2\pi f_0\tau]\,\}\right]$$

Calcoliamo il secondo valor medio:

$$E_\theta\{\cos[2\pi f_0\tau]\} = \int_0^{2\pi} f_\theta \cos[2\pi f_0\tau]\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0\tau]\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0\tau]\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_\theta\{\cos[2\pi f_0\tau]\} = \frac{1}{2\pi}\cos[2\pi f_0\tau]\,(2\pi) = \cos[2\pi f_0\tau]$$

Siccome non vi è θ nel coseno, questo ultime visto come una costante e si ottiene:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau)\cos[2\pi f_0\tau]$$

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario in senso lato "modulato", ovvero dato dalla moltiplicazione tra un processo aleatorio stazionario ed un processo coseno a fase variabile, è pari al **prodotto tra la funzione di autocorrelazione del segnale da modulare moltiplicata per un coseno avente ampiezza pari ad 1/2 e centrato in f_0:**

$$\boldsymbol{Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\ \ con\ \ \theta \in U[0, 2\pi] \quad \rightarrow \quad R_Y(\tau) = R_X(t) * \left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\right]}$$

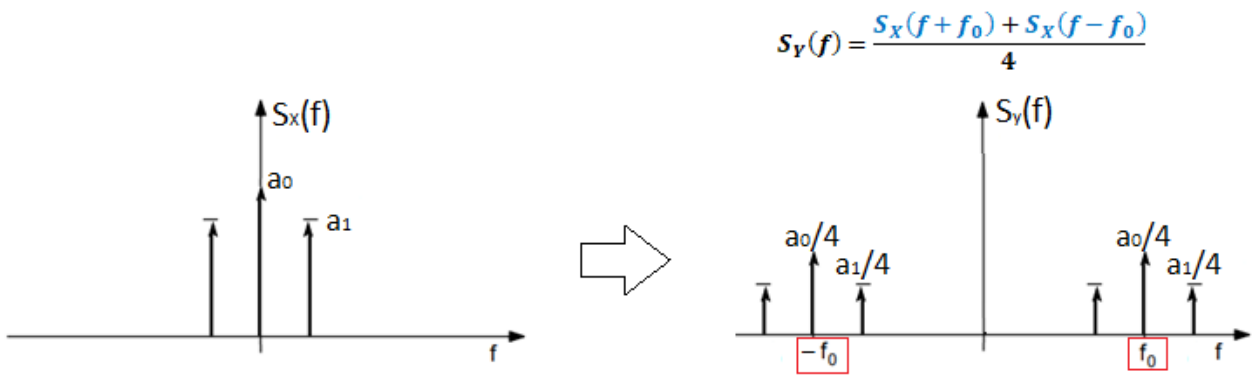
Passando alla trasformata otteniamo, in generale:

$$S_y(f) = F[R_Y(\tau)] = F\left\{R_X(t) * \left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\right]\right\} = \frac{1}{2}F\{R_X(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{4}[S_X(f+f_0) + S_X(f-f_0)]$$

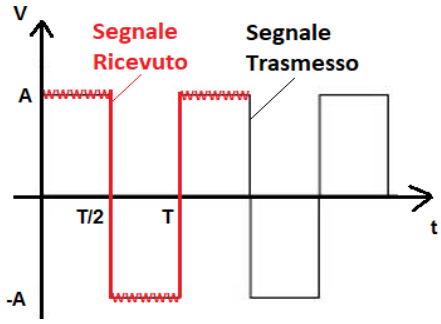
$$\boldsymbol{Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\ \ con\ \ \theta \in U[0, 2\pi] \quad \rightarrow \quad S_Y(f) = \frac{S_X(f+f_0) + S_X(f-f_0)}{4}}$$

Praticamente abbiamo ottenuto lo stesso risultato che abbiamo osservato con i segnali determinati attraverso il teorema della modulazione: **lo spettro delle potenze del segnale modulato $Y(t)$ è dato dallo spettro di potenza del processo di partenza $X(t)$ traslato di $\pm f_0$ e di ampiezza scalata di $1/4$.**

Praticamente, rispetto ai segnali determinati, abbiamo operato sullo spettro di potenza anziché sullo spettro di ampiezza del segnale determinato, dato ci riferiamo a quest'ultimo nella trattazione dei processi aleatori, e lo abbiamo scalato di 1/4 anziché di 1/2 come avveniva per il teorema della modulazione per segnali determinati: del resto, lo spettro di potenza si ottiene elevando al quadrato lo spettro delle ampiezze: $S_Y(f) = |Y(f)|^2$ per cui è logico che il fattore di scala passi da 1/2 a 1/4, infatti: $(1/2)^2 = 1/4$



Filtraggio di un processo aleatorio

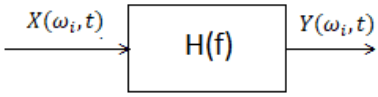


Conoscere lo spettro di un segnale determinato ci è servito per conoscere l'uscita di un sistema, cui funzione di trasferimento fosse nota.

Nella realtà quando viene trasmesso un segnale, anche se esso è determinato come un'onda quadra, in ricezione quest'ultimo assume una forma aleatoria a causa del rumore additivo del canale.
Sarebbe normalmente giusto filtrare tali segnali per annullare gli effetti del rumore.

Più in generale, potrebbe essere utile filtrare un segnale aleatorio attraverso un sistema che abbia comunque una funzione di trasferimento determinata e nota a priori.

Se viene posto in ingresso ad un sistema un **segnale membro del processo aleatorio** ci troveremo praticamente nel caso di filtraggio di un segnale determinato, poiché ogni segnale membro è un segnale determinato.
In questo caso l'uscita del segnale nel tempo è data dalla convoluzione tra il segnale campione e la risposta all'impulso del filtro:



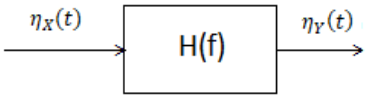
$$Y(\omega_i, t) = h(t) \otimes X(\omega_i, t)$$

Questo vale chiaramente per ogni segnale membro determinato per cui spesso si dice convenzionalmente che:

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$

Si noti però che **si riferisce ad ogni funzione campione $X(\omega_i, t)$e non all'intero processo aleatorio**; questa scrittura è da intendere solo come **notazione.**

Filtraggio degli indici statistici: filtraggio del valor medio
Possiamo analizzare il valore medio in uscita dal sistema: $\eta_Y(t)$.
L'uscita avrà una funzione valore medio che può essere intesa come trasformazione deterministica della funzione valore medio di ingresso $\eta_X(t)$). Quindi possiamo affermare che la funzione valor medio in uscita è data dal filtraggio della funzione valore medio di ingresso, ovvero dalla convoluzione:



$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t)$$

Questo è sempre possibile perché dal punto di vista matematico $\eta_Y(t)$ e $\eta_X(t)$ sono due funzioni deterministiche, a prescindere dall'eventuale stazionarietà del processo aleatorio.

Nel caso di processo aleatorio stazionario in senso lato la funzione valore medio è costante e si ottiene quindi:

$$\eta_X(t) = \eta_X(t) \quad \rightarrow \quad \eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,[\eta_X(t-\alpha)]\,d\alpha$$

Dato che $\eta_X(t)$ è costante si porta fuori:

$$\eta_Y(t) = \eta_X \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\;\,d\alpha$$

Questo integrale può essere visto come la trasformazione di Fourier quando $f = 0$:

$$\left[H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,e^{-j2\pi f\alpha}\,d\alpha\right]_{f=0} \rightarrow \; H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,e^{0}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)d\alpha$$

Quindi nel caso di processo aleatorio stazionario in senso lato il valor medio in uscita si può ottenere dal prodotto tra la funzione di trasferimento in $f \;=\; 0$ e la funzione (costante) valore medio di ingresso:

$$\eta_Y = H(0)\,\eta_X$$

Questo risultato ci dice che il valore medio dell'uscita η_Y, che altro non è che la componente continua del segnale in uscita centrata in $f = 0$, si ottiene dal prodotto tra la componente continua del segnale in ingresso η_X e la funzione di trasferimento in $f = 0$

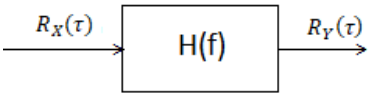
$$\eta_Y = H(0)\,\eta_X$$

Ma questo lo abbiamo già valutato per il segnale è determinato: il valor medio del segnale in uscita si trovava in $f = 0$, ovvero quando veniva filtrato il valore medio del segnale in ingresso:

$$f = 0 \quad \rightarrow \quad Y(0) = H(0)X(0)$$

Quindi la componente continua in uscita $Y(0)$ è uguale al prodotto della componente continua in ingresso $X(0)$ moltiplicata per la risposta in frequenza calcolata alla frequenza nulla: $H(0)$.

Filtraggio degli indici statistici: filtraggio della funzione di autocorrelazione



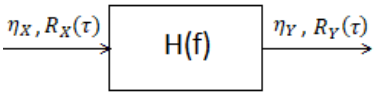
La funzione di autocorrelazione del processo aleatorio (stazionario in senso lato) in uscita $R_Y(\tau)$ è data dalla convoluzione tra la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio (stazionario in senso lato) in ingresso $R_X(\tau)$, la funzione di trasferimento calcolata in τ e la medesima calcolata in $-\tau$:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Eviteremo di dimostrare questa relazione.

Abbiamo ricavato il valore medio dell'uscita dal filtro e la funzione di autocorrelazione di quest'ultima:

$$\begin{cases} \eta_Y = H(0)\eta_X \\ R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \end{cases}$$



Con queste definizioni siamo riusciti ad ottenere la trasformazione nel tempo degli indici statistici principali di un processo aleatorio stazionario in senso lato quando quest'ultimo passa attraverso un sistema cui risposta all'impulso sia h(t) e risposta in frequenza H(f).

Per sapere come trasformare l'intero processo aleatorio dovremmo passare in frequenza.

Filtraggio della densità spettrale di potenza di un processo aleatorio stazionario in senso lato

Passando in frequenza il processo in ingresso viene rappresentato in funzione del suo spettro di potenza $S_X(f)$, che sappiamo essere la trasformata della sua funzione di autocorrelazione, essendo stazionario in senso lato.

A questo punto, vedendo lo spettro del segnale in uscita come la trasformata della funzione di autocorrelazione dell'uscita, possiamo ottenere lo spettro di potenza del segnale filtrato: $S_Y(f)$; tenendo presente che, in frequenza, alla risposta impulsiva h(t) corrisponde la risposta in frequenza H(f) e rifacendoci al teorema della convoluzione, otteniamo:

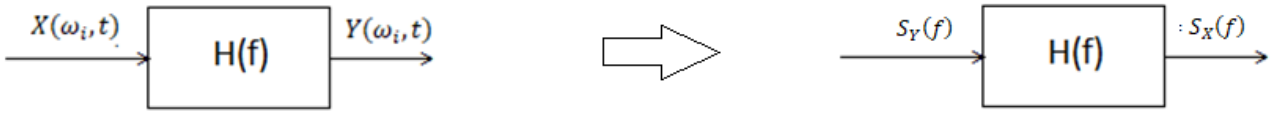
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \quad \rightarrow \quad S_Y(f) = S_X(f)\,H(f)\,H(-f)$$

Siccome la risposta all'impulso $h(t)$ è reale avremo che il coniugato $H^*(f)$ è pari ad $H(f)$, quindi il prodotto tra i due restituisce il modulo quadro e otteniamo:

$$H(-f) = H^*(f) \quad \rightarrow \quad S_Y(\tau) = S_X(\tau)\,H(f)\,H(-f) = S_X(\tau)\,H(f)\,H^*(f) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2}}$$

Confronto tra filtraggio di un segnale aleatorio e filtraggio di un segnale determinato

Possiamo notare effettivamente come il concetto di filtraggio non cambi tra processo aleatorio e segnale determinato, a patto di ricordare che lo spettro che analizziamo per il processo aleatorio è quello di potenza $S_Y(f)$, che si ottiene trasformando la funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$.



Quando si pone in ingresso al filtro, avente funzione di trasferimento H(f), un **segnale determinato** la sua uscita è pari a:

$$\boldsymbol{Y(f) = H(f)X(f)}$$

Quando al medesimo filtro si pone in ingresso un **segnale aleatorio**, si passa all'analisi degli spettri di potenza e l'uscita è data da:

$$\boldsymbol{S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2}$$

Mentre per i segnali determinati abbiamo $x(t) \rightarrow X(f)$ e $y(t) \rightarrow Y(f)$ per i processi aleatori (che siano **stazionari in senso lato**) abbiamo le funzioni di autocorrelazione corrispondenti, che trasformandole, grazie al teorema di Wiener-Khintchine, si trasformano nei corrispettivi spettri di potenza: $R_X(\tau) \rightarrow S_X(f)$ e $R_Y(\tau) \rightarrow S_Y(f)$, che caratterizzano il processo aleatorio nel tempo e in frequenza.

Si noti inoltre che per i segnali determinati si adopera la risposta in frequenza $H(f)$ mentre per i processi aleatori si adopera $|H(f)|^2$ che, effettivamente, corrisponde allo "spettro di potenza" della funzione di trasferimento $H(f)$

ESERCIZIO

SIA $X(t)$ UN PROCESSO ALEATORIO CON FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE:

$$R_{xx}(\tau) = \text{sinc}^2(10\tau)$$

ESSO SOTTENDE UN SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H(f) = 10\,\Pi\left(f/10\right)$$

SIA $Y(t)$ IL SEGNALE IN USCITA.

SIA $Z(t)$ IL SEGNALE CON DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA:

$$S_z(f) = \sum_{k=-1}^{1} S_y(2k)\,\delta(f-2k)$$

CALCOLARE

- LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI $Y(t)$
- LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI $Y(t)$
- LA POTENZA DI $Y(t)$
- LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI $Z(t)$
- LA POTENZA DI $Z(t)$

1) CALCOLO DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI $Y(t)$

LO SPETTRO DI POTENZA $S_Y(f)$ SI OTTIENE DAL FILTRAGGIO:

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$$

NON DISPONENDO DIRETTAMENTE DELLO SPETTRO $S_X(f)$, LO RICAVIAMO DALLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE $R_{xx}(\tau)$: SUPPONENDO, INFATTI, CHE $X(t)$ SIA STAZIONARIO IN SENSO LATO, APPLICHIAMO IL TEOREMA DI WIENER-KHINTCHINE:

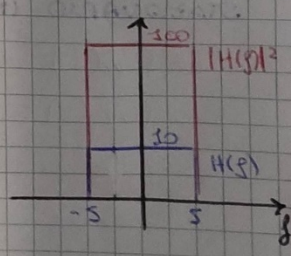
$$\boxed{S_X(f) = F\left[R_{xx}(\tau)\right]}$$

$$S_X(f) = F\left[R_{xx}(\tau)\right] = F\left[\text{sinc}^2(10\tau)\right]$$

T. DUALITÀ: $\text{sinc}^2(t\tau) \rightarrow \frac{1}{\tau}\,\Delta\left(f/\tau\right)$

$$\left[S_X(f) = \frac{1}{10}\,\Delta\left(f/10\right)\right]$$

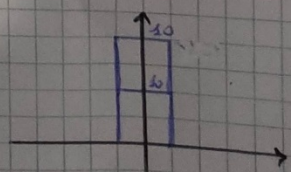
A QUESTO PUNTO RICAVIAMO $|H(f)|^2$: SICCOME LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO HA AMPIEZZA PARI A 10, QUANDO QUESTA VIENE ELEVATA AL QUADRATO SI OTTIENE UN RECT CON AMPIEZZA È $(10)^2 = 100$



NB! IL QUADRATO DI UN RECT È PRATICAMENTE IL MEDESIMO RECT CON AMPIEZZA VIENE ELEVATA AL QUADRATO MA MANTIENE UNA BASE INVARIATA!

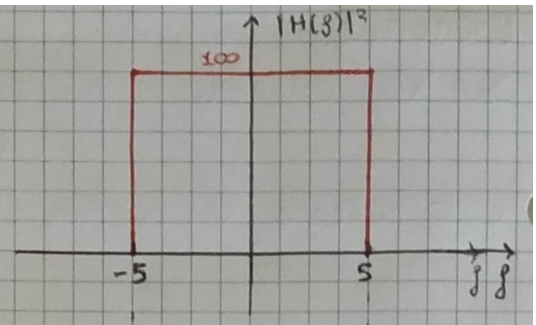
D'ALTRONDE SI TRATTA DEL PRODOTTO DI UN RECT PER SE STESSO: NON VIENE MODIFICATA LA BASE MA SOLO L'AMPIEZZA!

$$\left[10\,\Pi\left(f/10\right)\right]^2 = \left[10\,\Pi\left(f/10\right)\right]\left[10\,\Pi\left(f/10\right)\right] = 100\,\Pi\left(f/10\right)$$



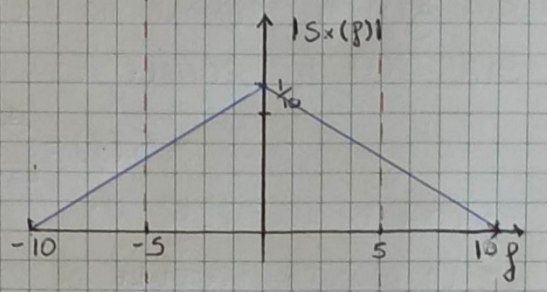
LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $|H(f)|^2$ SARÀ:

$$|H(f)|^2 = 100\,\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$



GRAFICHIAMO IL SEGNALE E LA F.D.T DEL FILTRO E OTTENIAMO GRAFICAMENTE IL PROCESSO IN USCITA DAL FILTRO:

$$S_Y(f) = \frac{1}{10}\Delta\left(\frac{f}{10}\right) \cdot 100\,\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$



→ PRIMA DI $f=-5$ IL PRODOTTO È NULLO

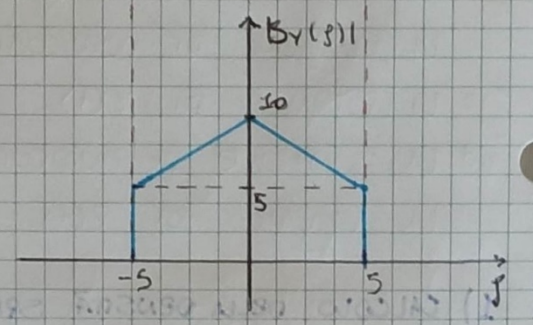
→ QUANDO $f=\pm 5$ AVREMO CHE $S_X(f) = 1/20$ (METÀ DEL TRIANGOLO) QUINDI:

$$S_Y(f) = 100\left(\frac{1}{20}\right) = 5$$

→ QUANDO $f=0$ AVREMO $S_X(f) = 1/10$, QUINDI:

$$S_Y(f) = 100\left(\frac{1}{10}\right) = 10$$

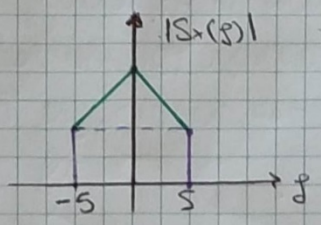
→ DOPO $f=5$ IL PRODOTTO È NULLO.



AVENDO OTTENUTO GRAFICAMENTE IL SEGNALE, NE POSSIAMO OTTENERE LA FORMA ANALITICA:

LA FORMA "A CAZZETTA" OTTENUTA SI PUÒ OTTENERE SOMMANDO UN RECTE ED UN TRIANGOLO, ENTRAMBI CENTRATI NELLA STESSA FREQUENZA, IN QUESTO CASO IN $f=0$:

$$\boxed{S_X(f) = 5\Delta\left(\frac{f}{5}\right) + 5\Pi\left(\frac{f}{10}\right)}$$



2) CALCOLO DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE $R_{YY}(\tau)$

$Y(t)$ HA UNA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE $R_{YY}(\tau)$, CHE POSSIAMO OTTENERE ANTITRASFORMANDO LO SPETTRO DI POTENZA IN VIRTÙ DEL TEOREMA DI WIENER-KINTCHINE, DATO CHE SI TRATTA DI UN PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO IN SENSO LATO:

$$R_{XX}(\tau) = F^{-1}[S_Y(f)]$$

$$R_{YY}(\tau) = F^{-1}\left[5\Delta\left(\frac{f}{5}\right) + 5\Pi\left(\frac{f}{10}\right)\right] = 5\left[5\,\mathrm{sinc}^2(5\tau)\right] + 5\left[10\,\mathrm{sinc}(10\tau)\right]$$

$$\boxed{R_{YY}(\tau) = 25\,\mathrm{sinc}^2(5\tau) + 50\,\mathrm{sinc}(10\tau)}$$

3) CALCOLO DELLA POTENZA DI Y(t)

LA POTENZA P_Y PUÒ ESSERE CALCOLATA IN DUE MODI:

→ INTEGRANDO LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA:

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\, df$$

→ CALCOLANDO LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE IN $\tau = 0$

$$P_Y = R_Y(0)$$

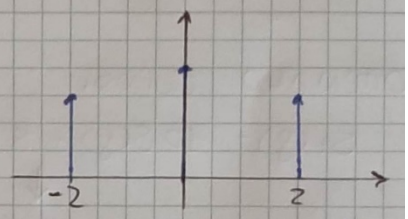
DATA LA SEMPLICITÀ, SCEGLIAMO DI CALCOLARE P_Y ATTRAVERSO LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$P_Y = R_Y(0) = 25 \underbrace{\mathrm{sinc}^2(0)}_{1} + 50 \underbrace{\mathrm{sinc}(0)}_{1} = 75 \rightarrow \boxed{P_Y = 75}$$

4) FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI Z(t)

IL SEGNALE Z(t) È UN PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO IN SENSO LATO CON SPETTRO È A RIGHE:

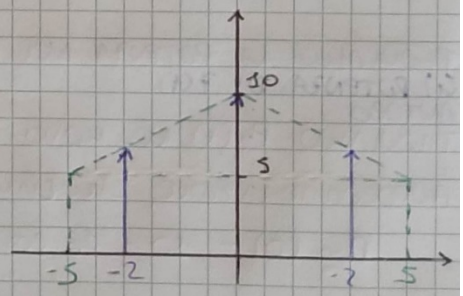
$$S_Z(f) = \sum_{k=-1}^{1} S_Y(2k)\, \delta(f-2k)$$



SI TRATTA DI DUE IMPULSI CENTRATI IN $f = \pm 2$ ED UNO NELL'ORIGINE:

$$S_Z(f) = \sum_{k=-1}^{+1} S_Y(2k)\, \delta(f-2k) = S_Y(-2)\,\delta(f+2) + S_Y(0)\,\delta(f) + S_Y(2)\,\delta(f-2)$$

RIPORTIAMO "L'INVILUPPO" DI $S_Y(f)$ PER CAPIRE QUANTO VALE L'AMPIEZZA DI OGNI IMPULSO



ABBIAMO OSSERVATO CHE:

$$S_Y(0) = 10$$

RICAVIAMO ALLORA $S(-2)$ ED $S(2)$, PER FARLO ADOPERIAMO LA FORMULA DEL PASSAGGIO PER DUE PUNTI DELLA RETTA CHE FORMA IL TRIANGOLO, DATA LA SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE VERTICALE ($S_Y(f)$ È PARI), RICAVIAMO SOLO LA RETTA TRA $f=0$ ED $f=5$; SCEGLIAMO I PUNTI $P_1(0,10)$ $P_2(5,5)$

$$r_1: \frac{x-0}{5-0} = \frac{y-10}{5-10} \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y-10}{-5} \rightarrow x = -(y-10) \rightarrow y = -x+10$$

$$S_Y(f) = -f + 10 \quad \text{PER } 0 \le |f| \le 2$$

IN QUESTO MODO TROVIAMO $S_Y(2)$ ED $S_Y(-2)$:

$$S_Y(2) = S_Y(-2) = -(2) + 10 = 8$$

OTTENIAMO QUINDI:

$$S_Z(f) = 8\,\delta(f+2) + 10\,\delta(f) + 8\,\delta(f-2)$$

AVENDO OTTENUTO LO SPETTRO $S_Z(f)$ OTTENIAMO FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE ANTITRASFORMANDO $S_Z(f)$:

$$S_Z(f) = 8\,\delta(f-2) + 10\,\delta(f) + \delta(f+2)$$

POSSIAMO NOTARE CHE VI SONO DUE IMPULSI SPECULARI IN $f = \pm 2$, QUINDI POSSIAMO DEDURRE CHE:

$$S_Z(f) = 10\,\delta(f) + 8\,\delta(f-2) + 8\,\delta(f+2)$$

$$F^{-1}[10\,\delta(f)] = 10$$

$$F^{-1}[8\,\delta(f-2) + 8\,\delta(f+2)] = 16\cos(2\pi(2)\tau) = 16\cos(4\pi\tau)$$

RICORDA!

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{F} \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

PER CUI:

$$\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \xrightarrow{F^{-1}} 2\cos(2\pi f_0 t)$$

OTTENIAMO QUINDI:

$$S_Z(f) = 10\,\delta(f) + 8\,\delta(f-2) + 8\,\delta(f+2)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{R_{ZZ}(\tau) = 10 + 16\cos(4\pi\tau)}$$

4) POTENZA DI $Z(t)$

TROVIAMO $P_Z(t)$ NEL MODO PIÙ CONVENIENTE: DISPONENDO DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE, CALCOLIAMO QUEST'ULTIMA IN $\tau = 0$

$$R_{YY}(0) = 10 + 16\cos(4\pi(0)) = 10 + 16 = 26$$

OTTENIAMO LO STESSO RISULTATO SE VOLESSIMO TROVARE $P_Z(t)$ INTEGRANDO LO SPETTRO DI POTENZA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} 10\,\delta(f)\,df + \int_{-\infty}^{+\infty} 8\,\delta(f-2)\,df + \int_{-\infty}^{+\infty} 8\,\delta(f+2)\,df = 10 + 8 + 8 = 26$$

$$\boxed{P_Z = 26}$$

Esercizio

Sia $X(t)$ un segnale aleatorio stazionario cui funzione di autocorrelazione è $R_X(\tau) = 2\,\mathrm{sinc}(2000\tau) + \mathrm{sinc}^2(1000\tau)$.

Questo viene moltiplicato per un valore costante positivo "A" e poi sommato allo stesso valore "A":

$$Y(t) = AX(t) + A$$

Si supponga che $Y(t)$ venga inviato in ingresso ad un sistema lineare tempo invariante cui funzione di trasferimento è:

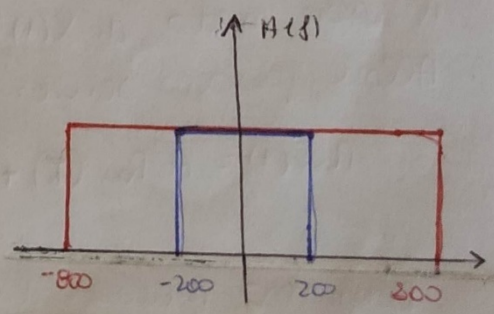
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{1600}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{400}\right)$$

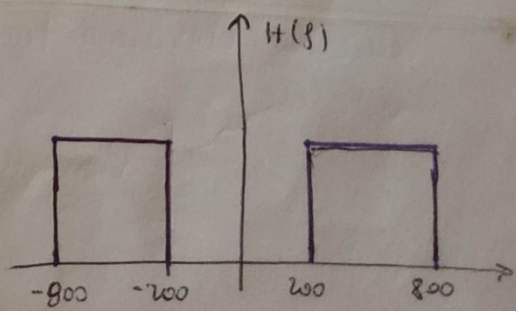
e sia $Z(t)$ il segnale in uscita.

Calcolare:

- il valore di A tale che la potenza del segnale $Y(t)$ sia 50 volte quella di $X(t)$
- il valore medio di $Y(t)$
- la densità spettrale di $Z(t)$
- la potenza di $Z(t)$
- il valor medio di $Z(t)$

Per prima cosa riportiamo graficamente la risposta in frequenza dell'impulso: si tratta di un rect più grande di base 1600 centrato in 0, quindi che si estende da $f=-800$ a $f=800$ cui viene sottratto un rect, anch'esso centrato nell'origine, di base pari a 400, che quindi si estende da -200 a 200. Entrambi i rect sono ad ampiezza unitaria





1. Calcolare "A" tale che $P_Y = 10 P_X$

Dovremo praticamente ricavare P_X per sapere quanto deve valere P_Y:

$$P_X = R_X(0) \rightarrow P_X = 2\,\mathrm{sinc}(0) + \mathrm{sinc}^2(0) = 3$$

dovremo ricavare il valore di A tale che $P_Y = 30$

A questo punto, per trovare il valore di "A" per cui $P_Y = 30$ dovremo necessariamente trovare la forma analitica di P_Y, passando dall'autocorrelazione $R_Y(\tau)$ e calcolando quest'ultima in $\tau = 0$.
Ricaviamo la funzione di autocorrelazione dalla definizione:

$$R_{YY}(\tau) \triangleq E\{Y(t)\,Y(t+\tau)\}$$

$$R_{YY}(\tau) \triangleq E\{[AX(t)+A][AX(t+\tau)+A]\}$$

$$R_{YY}(\tau) = E\{A^2 X(t)X(t+\tau)\} + E\{A^2 X(t)\} + E\{A^2 X(t+\tau)\} + E\{A^2\}$$

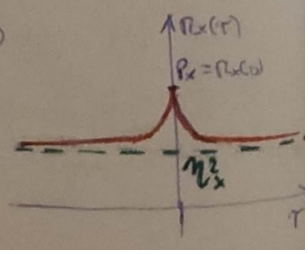
$$R_{YY}(t) = A^2 E\{X(t)X(t+\tau)\} + A^2 E\{X(t)\} + A^2 E\{X(t+\tau)\} + A^2$$

Si noti che l'operatore media $E\{X(t)X(t+\tau)\}$ è ~~un~~ ~~opera~~ praticamente la funzione di autocorrelazione di $X(t)$;
trattandosi di un processo stazionario in senso lato abbiamo che il valore medio di $X(t)$ è costante, quindi: $E\{X(t)\} = E\{X(t+\tau)\} = \eta_X$
Allora possiamo scrivere:

$$R_{YY}(t) = A^2 R_{XX}(\tau) + A^2\eta_X + A^2\eta_X + A^2 = A^2 R_{XX}(\tau) + 2A^2\eta_X + A^2$$

Dobbiamo ricavare il valor medio η_X
Quando abbiamo trattato l'autocorrelazione abbiamo visto che:

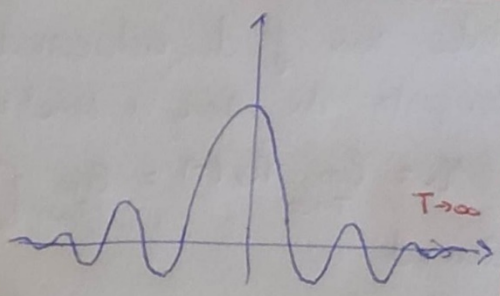
$$\left[\lim_{T\to\infty} R_{XX}(\tau) = \eta_X^2\right]$$



Possiamo allora il calcolo del limite per $T \to \infty$ della funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$:

$$\eta_X^2 = \lim_{T\to\infty} R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \left[2\,\mathrm{sinc}(1000T) + \mathrm{sinc}^2(1000T)\right]$$

Il sinc ed il sinc² sono delle funzioni che ~~tosto~~ vengono smorzate: man mano che si evolvono nel tempo la loro ampiezza tende a diminuire, fino a diventare praticamente nulla, ne consegue dunque che quando il periodo di un seno cardinale o di un seno cardinale al quadrato tende a ~~zero~~ infinito, il segnale si annulla



$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{sinc}(fT) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{sinc}^2(fT) = 0$$

$$\eta_X^2 = \lim_{T\to\infty} \left[2\,\mathrm{sinc}(1000T) + \mathrm{sinc}^2(1000T)\right] = 0$$

Avremo quindi:

$$R_Y(\tau) = A^2 R_X(\tau) + A^2$$

Ottenuta la f. di autocorrelazione, ricaviamo la ~~fun~~ potenza P_Y calcolando la funzione ottenuta in $T=0$:

$$P_Y \triangleq R_Y(0) \to P_Y = A^2 R_X(0) + A^2 = A^2\left[2\,\mathrm{sinc}(0) + \mathrm{sinc}^2(0)\right] + A^2 = A^2 + 3A^2$$

$$P_Y = 4A^2$$

Ne consegue allora che, affinché $P_Y = 30\,P_X$, deve accadere che $P_Y = 30$ ovvero che "A" valga:

$$P_Y = 30 \to 4A^2 = 30 \to \boxed{A = \sqrt{\frac{30}{4}}}$$

Per rispondere ai quesiti a seguire si supponga che $\underline{A=\sqrt{1000}}$ per facilitare i conti.

2. Calcolare il valor medio della $Y(t)$

$$m_Y = E\{Y(t)\} = E\{AX(t)+A\} = AE\{X(t)\} + A = Am_x + A$$

Precedentemente abbiamo accertato che $m_x = 0$ poiché il limite per $T\to\infty$ della sua f. di autocorrelazione è nullo, essendo quest'ultima composta da sinc e sinc²:

$$m_x = \lim_{T\to\infty} R_x(T) = \lim_{T\to\infty}\left[2\,\mathrm{sinc}(1000T) + \mathrm{sinc}^2(1000T)\right] = 0$$

Quindi:

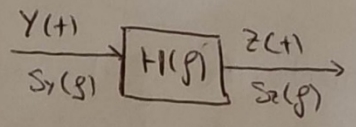
$$m_Y = Am_x + A = A \rightarrow \boxed{m_Y = A} \rightarrow \boxed{m_Y = \sqrt{1000}}$$

3. Calcolare la densità spettrale di potenza di $Z(t)$

Il segnale $Z(t)$ è il segnale uscente dal filtro e per ottenerlo potremmo lavorare nel dominio del tempo con la convoluzione o nel dominio delle frequenze con la moltiplicazione, chiaramente sceglieremo quest'ultima soluzione essendo più pratica

$$S_Z(f) = S_Y(f)H(f)H^*(f) \xrightarrow[\text{SCELTA REALE}]{} S_Z(f) = S_Y(f)|H(f)|^2$$

Ricaviamo lo spettro di potenza $S_Y(f)$ dalla trasformazione della corrispondente funzione di autocorrelazione $R_Y(T)$:



$$S_Y(f) = F[R_Y(\,)] = F[A^2R_x(T) + A^2] = F[1000\,R_x(T) + 1000]$$

$$S_Y(f) = F[1000\,R_x(T) + 1000] = 1000\,F[R_x] + 1000\,F[1] = 1000\,S_x(f) + 1000\,\delta(f)$$

Ricaviamo $S_x(f)$ dalla trasformazione della corrispettiva f. di autocorrelazione:

$$S_x(f) = F[R_x(T)] = F[2\,\mathrm{sinc}(2000T) + \mathrm{sinc}^2(1000T)]$$

T. DUALITÀ:

$$T\,\mathrm{sinc}(tT) \xrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) \Rightarrow \mathrm{sinc}(tT) \rightarrow \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$T\,\mathrm{sinc}^2(tT) \xrightarrow{F} \Delta(-f/T) \Rightarrow \mathrm{sinc}^2(tT) \rightarrow \frac{1}{T}\,\Delta(-f/T)$$

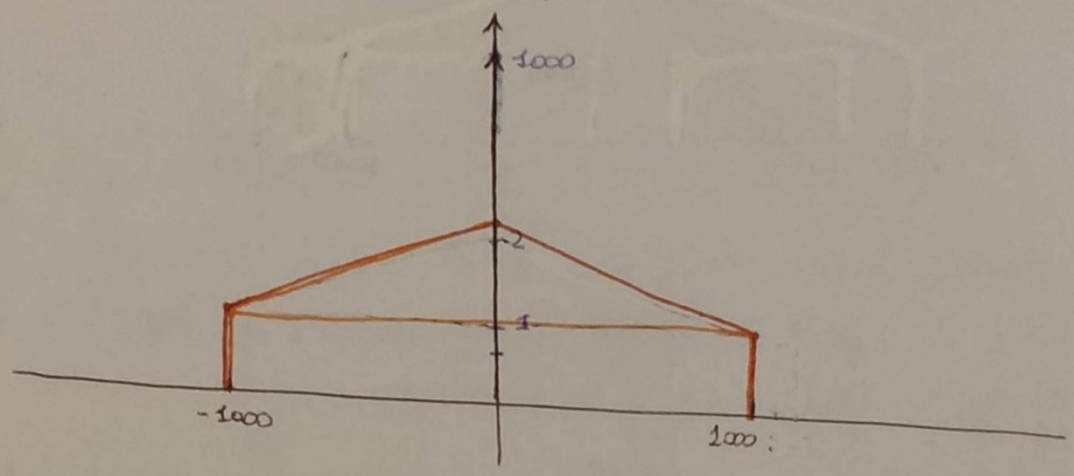
$$S_x(f) = F[2\cdot\mathrm{sinc}(2000T) + \mathrm{sinc}^2(1000T)] = \frac{2}{2000}\,\mathrm{rect}\left(f/2000\right) + \frac{1}{1000}\,\mathrm{rect}\left(f/1000\right)$$

Otteniamo quindi:

$$S_Y(f) = 1000\left[\frac{2}{2000}\,\mathrm{rect}\left(f/2000\right) + \frac{1}{1000}\,\Delta\left(f/1000\right)\right] + 1000\,\delta(f)$$

$$S_Y(f) = \mathrm{rect}\left(f/2000\right) + \Delta\left(f/1000\right) + 1000\,\delta(f)$$

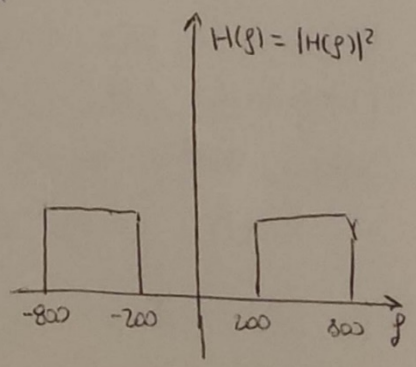
Grafichiamo lo spettro di potenza in questione:



Si tratta di un rect di base 2000 centrato in zero, quindi che si estende da -1000 a 1000 sommato ad un triangolo di semibase 1000 e centrato in 0, quindi che si sovrappone esattamente al rect, estendendosi da -1000 a 1000. L'unione di questi due segnali restituisce il segnale e forma di "base", ad essi viene inoltre sommato un impulso nell'origine di ampiezza 1000

Avevamo già graficato il filtro: si tratta praticamente della sottrazione di due rect, il risultato è un rect più grande che viene "spezzato" in due rect più piccoli.

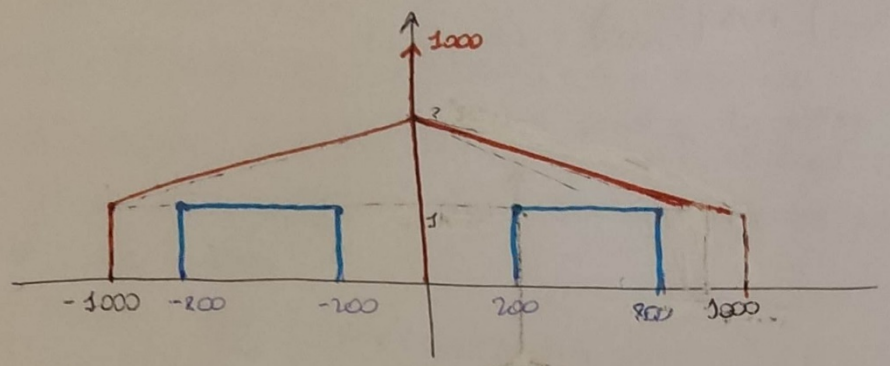
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(f/1600\right) - \mathrm{rect}\left(f/400\right)$$



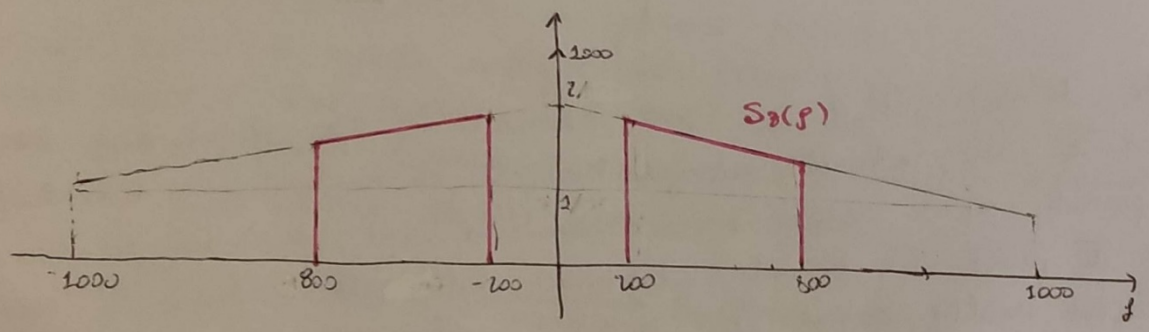
Il quadrato di H(f) è praticamente invariato perché tale operazione applicata alla f.d.T di un filtro non fa altro che elevare al quadrato le ampiezze, ma essendo un filtro ad ampiezza unitaria il risultato non cambia:

$$|H(f)|^2 = H(f) = \mathrm{rect}\left(f/1600\right) - \mathrm{rect}\left(f/400\right)$$

A questo punto non ci resta che calcolare il prodotto del filtraggio: $S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$ per ottenere lo spettro di potenza $S_Y(f)$:



Il filtro annulla tutto ciò che si trova al di fuori dei rect e mantiene solo la parte di segnale che si sovrappone ad essi, vale a dire ciò che si trova tra [-800, -200] e tra [200, 800]:

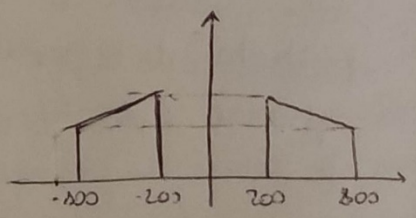


5. Calcolare la potenza di $Z(t)$

Disponendo solo della $S_Z(f)$ calcoliamo la potenza del segnale integrando tale spettro di potenza, calcolando quindi l'integrale sotteso dalla curva di $S_Z(f)$:

$$P_Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\, df$$

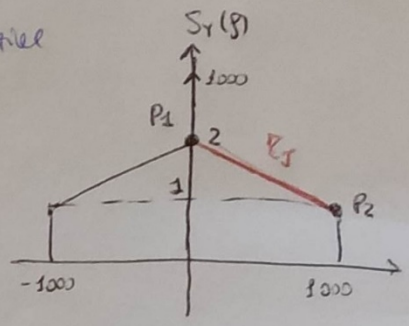
Poiché il segnale è speculare rispetto all'asse verticale (ricorda: lo spettro delle ampiezze è pari) calcoleremo solo l'integrale tra 200 e 800 e lo moltiplicheremo per due:



$$P_Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\, df = \int_{-800}^{-200} S_Z(f)\, df + \int_{200}^{800} S_Z(f)\, df = 2\int_{200}^{800} S_Z(f)\, df$$

Tra 200 e 800 la densità spettrale di potenza $S_Z(f)$ assume l'andamento di una retta decrescente di cui però non abbiamo equazione; siccome in questo intervallo la retta viene "tagliata" in prossimità di $f = \pm 800$

andremo a considerare per un attimo l'intero grafico dello spettro di potenza $S_Y(f)$ non ancora filtrato, giusto per ottenere l'equazione mancante di questa retta.

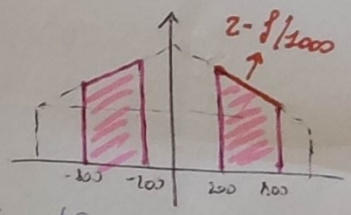


Nel grafico di $S_Y(f)$ ene pone dei punti $P_1(0,2)$ e $P_2(1000,1)$; impongiamo il passaggio per tali punti:

$$r_1: \frac{x-0}{1000-0} = \frac{y-2}{1-2} \rightarrow \frac{x}{1000} = -(y-2) \rightarrow \frac{x}{1000} = -y+2 \rightarrow -y = -2+\frac{x}{1000}$$

$$y = 2-\frac{x}{1000} \rightarrow S_Y(f) = 2-\frac{f}{1000}$$

Ottenuta l'equazione della retta integriamo tra 200 e 800:



$$P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z = 2\int_{200}^{800} 2-f/1000\, df = 4\int_{200}^{800} df - 2\int_{200}^{800} \frac{f}{1000}\, df$$

$$P_z = 4\left[f\right]_{200}^{800} - 2/1000\left[\frac{f^2}{2}\right]_{200}^{800} = 4\left[800-200\right] - \frac{1}{1000}\left[(800)^2-(200)^2\right]$$

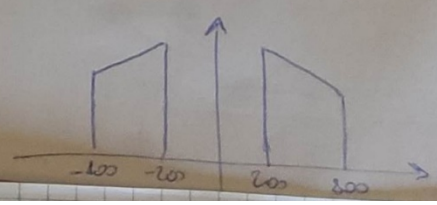
$$P_z = 4(600) - \frac{1}{1000}(640000-40000) = 2400 - \frac{1}{1000}(600000)$$

$$P_z = 2400-600 = 1800 \rightarrow \boxed{P_z = 1800}$$

5. Calcolare il valor medio di $z(t)$

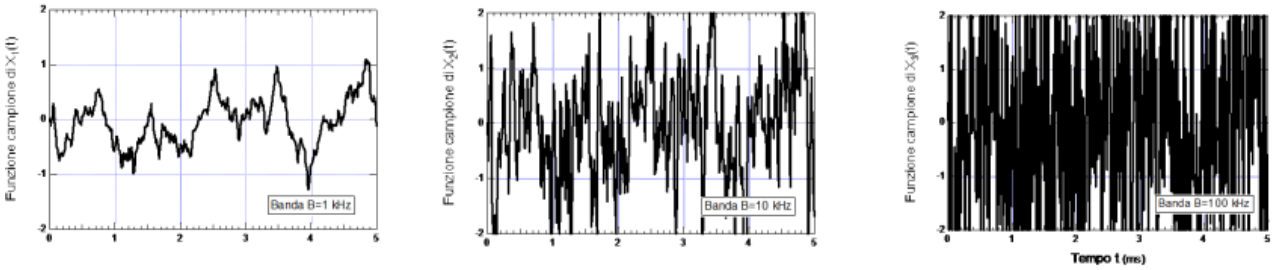
Il valor medio di $z(t)$ si ottiene dal suo spettro di potenza: se vi è un impulso nell'origine, questo equivale ~~alla~~ ~~poti~~ valor medio del segnale

Non vi è alcun impulso in 0 poiché tale impulso lo aveva $S_Y(f)$ ma è stato tagliato dopo il filtraggio.



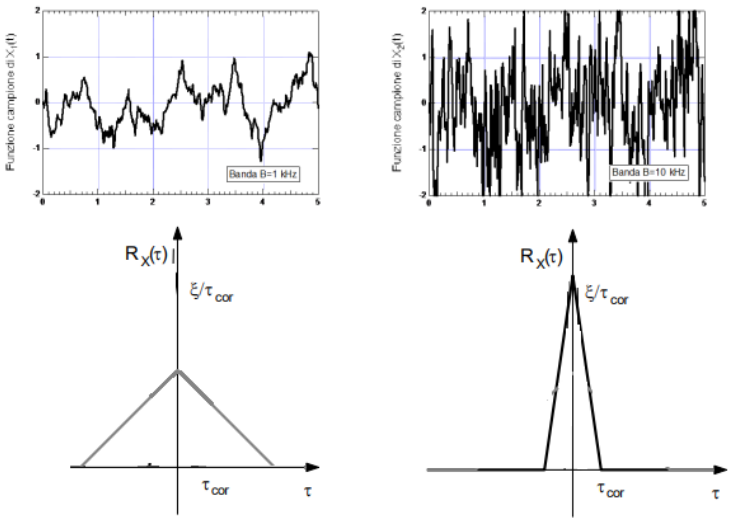
Relazioni tempo/frequenza

Analizziamo diverse funzioni membro di un segnale aleatorio:



Possiamo notare che questi tre segnali variano più o meno rapidamente nel tempo.

La rapidità con cui il segnale varia è indicato dalla funzione di autocorrelazione: più rapido è il sistema e più la sua funzione di autocorrezione sarà "stretta".



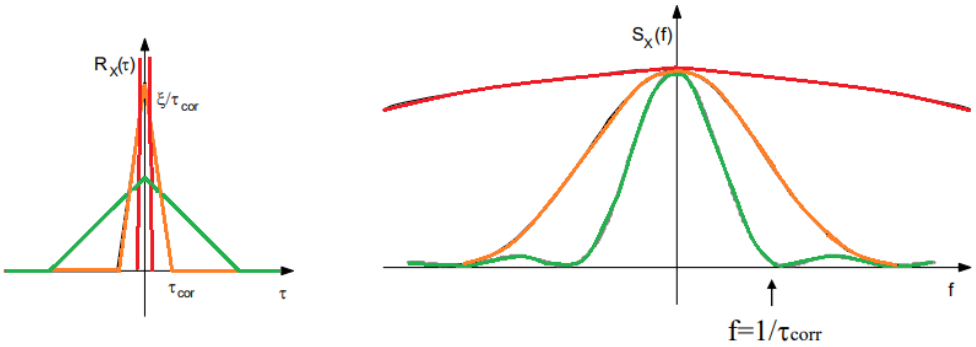
Quello che accade è che esiste un tempo di correlazione τ_{COR} tale che, se viene considerato un segnale al tempo t ed il medesimo stesso al tempo $t + \tau$ con $\tau > \tau_{COR}$, i due risulteranno incorrelati, il che significa che **la funzione di autocorrelazione esiste fintantoché:**

$$|\boldsymbol{t}| \leq \tau_{COR}$$

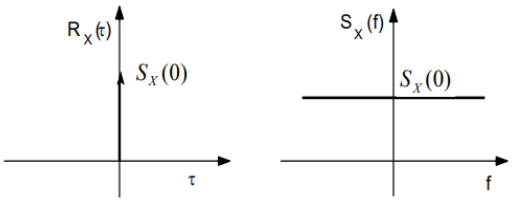
Più la variazione è lenta e maggiore sarà il tempo di correlazione, di conseguenza maggiore sarà la larghezza della funzione di autocorrelazione (nel nostro esempio sarà maggiore la base del triangolo).

In questo caso, se passassimo allo spettro di frequenza del segnale mediante trasformazione di Fourier della funzione di autocorrelazione, troveremo dei seni cardinali quadri poiché la funzione di autocorrelazione è un triangolo.

Via via che il triangolo si "stringe" il seno cardinale corrispondente si allarga sempre di più: questo effetto è dovuto al fatto che diminuendo il tempo in cui è definita la funzione di autocorrelazione aumenta la frequenza ove è definito lo spettro di potenza, dato che tempo e frequenza sono uno il reciproco dell'altra.

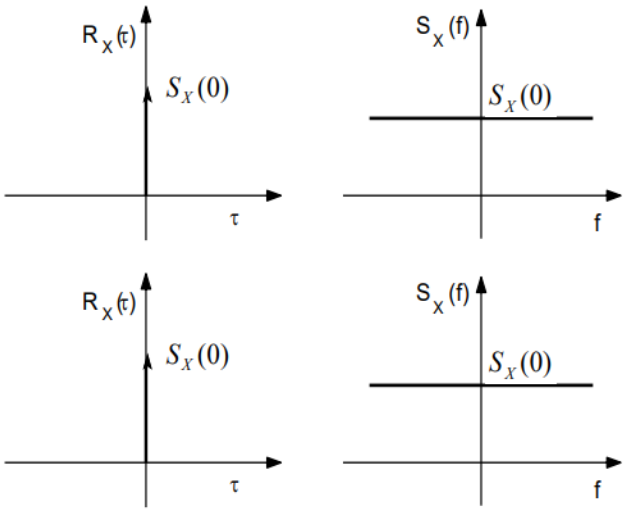


Il caso limite si ha quando la **funzione di autocorrelazione è un impulso**: in tal caso **lo spettro di potenza si allarga a tal punto da diventare costante**.



Il processo rumore bianco

Uno **spettro di potenza costante** e la **funzione di correlazione impulsiva** corrispondente caratterizzano un particolare processo che prende il nome di **processo rumore bianco.**



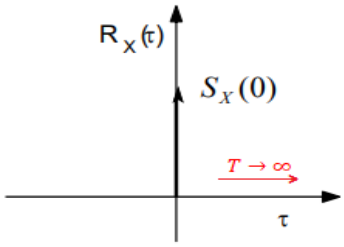
Il termine "rumore bianco", ma in generale per tutti i processi aleatori "bianchi", prendono il nome dal loro spettro: essi hanno uno spettro di potenza costante, che comprende tutte le componenti a tutte le frequenze, esattamente come la luce bianca.

Il fatto che la funzione di autocorrelazione del rumore bianco sia impulsiva vuol dire che il segnale è immediatamente incorrelato: il tempo di correlazione è nullo per questo processo $\tau_{COR} = 0$. Trasformando un segnale impulsivo si ottiene un segnale costante; per cui ne consegue che lo spettro di potenza del rumore, ricavato come trasformata della funzione di autocorrelazione (supponendo che il rumore sia stazionario in senso lato), è costante e pari a $S_X(0)$.

È bene notare che **il processo rumore bianco è un modello**, non è fisicamente realizzabile in quanto la sua potenza è teoricamente infinita.

Il rumore bianco è caratterizzato da un **valor medio nullo:**

$$\boldsymbol{\eta_X = 0}$$



poiché, passando al limite per $\tau \to \infty$ della funzione di autocorrelazione, si ottiene un valore nullo, essendo tale limite pari a η_X^2 concludiamo affermando che il valore medio:

$$\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \eta_X^2 \quad \to \quad \eta_X^2 = 0$$

La funzione di autocorrelazione del rumore bianco è un impulso:

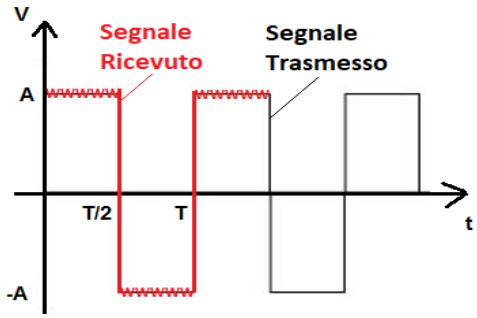
$$R_X(\tau) = S_X(0)\delta(\tau)$$

Questo significa che, presi due istanti anche vicinissimi, i valori assunti dal processo nei due istanti sono in correlati poiché il tempo di correlazione è praticamente nullo.

Come detto, il rumore bianco non esiste realmente perché sarebbe un segnale a potenza infinita, tuttavia esso è usato come modello di un'ampia gamma di segnali per i quali si può assumere che non ci sia correlazione tra i valori assunti in tempi diversi. Nello specifico, trattiamo questo modello perché **il processo rumore bianco è il modello che viene utilizzato per studiare il rumore termico**, che è un segnale realmente esistente, causato dall'agitazione naturale degli elettroni.

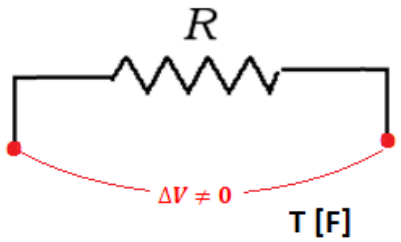
Il rumore termico

Utilizziamo il modello rumore bianco per studiare il rumore termico, dovuto alla naturale agitazione termica degli elettroni.



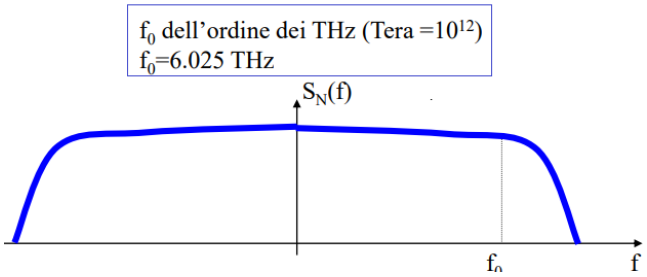
Quando trasmettiamo un segnale onda quadra esso assume inizialmente un andamento pari a quello del rect, tuttavia, quando questo segnale viene ricevuto spesso presenta un andamento "frastagliato", questo effetto è dovuto ad una serie di disturbi che si sommano al segnale in questione, uno tra essi è il rumore termico, dovuto all'agitazione termica degli elettroni della componentistica del sistema.

Consideriamo una resistenza R (sia essa un cavo, l'etere, etc..) ad una certa temperatura T.
In questa situazione, senza far passare alcuna corrente, possiamo misurare una tensione ai capi del resistore non nulla: si tratta di una piccolissima tensione generata dallo spostamento degli elettroni, che si agitano per effetto termico della temperatura T.

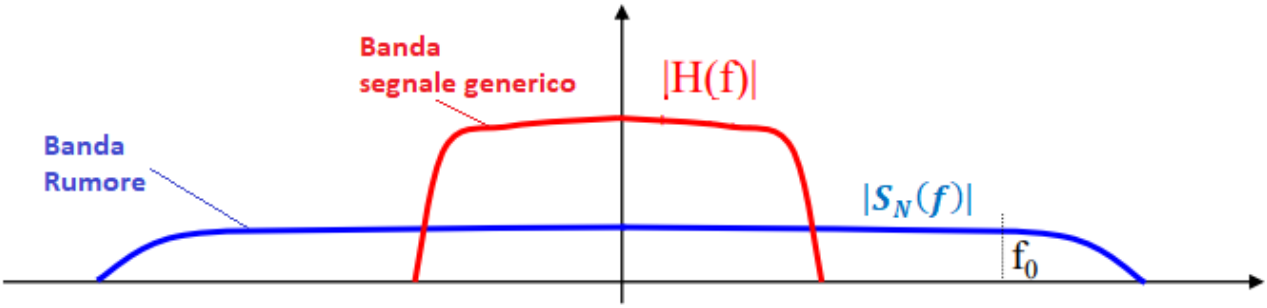


Il processo che rappresenta questa tensione generata per l'agitazione termica delle particelle è un **processo di tipo gaussiano**, vale a dire che le variabili aleatorie estratte in diversi istanti da quest'ultimo sono delle variabili aleatorie gaussiane, in particolare si tratta di **variabile aleatorie gaussiane a valore medio nullo**.
La supposizione che il processo sia gaussiano, e che quindi le variabili aleatorie da esso estratte a diversi istanti siano a gaussiane, è supportata dal **teorema del limite centrale** poiché la tensione generata per effetto termico è la somma di tante variabili aleatorie: *fissato un istante t_i la variabile aleatoria $X(t_i)$ estratta a tale istante è una variabile aleatoria che risulta essere somma di tutte le variabili aleatorie che rappresentano i valori di tensione degli elettroni, di cui non conosciamo la PDF ma sappiamo che la somma è gaussiana.*

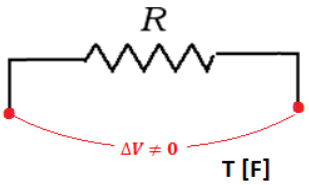
Si è dimostrato che lo **spettro di potenza del rumore termico $S_N(f)$** è quello rappresentato: **mantiene un livello pressoché costante fino ad una certa frequenza f_0 in cui inizia a decadere**, tale frequenza è molto alta: si tratta di una frequenza nell'ordine dei TeraHertz.



Siccome non lavoreremo mai nell'ordine di TeraHertz, poiché i sistemi arrivano al massimo a bande nell'ordine dei GigaHertz, possiamo supporre che tale rumore sia costante poiché effettivamente entro la banda del sistema esso assume valori costanti; per questo motivo possiamo approssimarlo con il modello del rumore bianco.

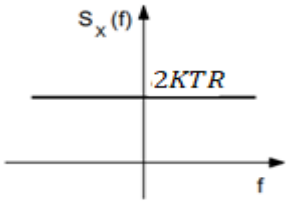


Rumore termico ai capi di una resistenza



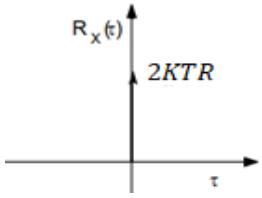
Si supponga di disporre di una resistenza di valore R ad una temperatura T.
Sia denominata con K la costante di Boltzmann: $K = 1.23 * 10^{-3}\ J/°K$

Possiamo misurare i capi della resistenza in questione un rumore termico (rappresentato da un generatore di rumore $n_e(t)$ nel grafico), nello specifico misureremo una tensione che è un processo gaussiano avente le seguenti caratteristiche:



- Una media nulla:
$$E\{N(t)\} = \eta_N(t) = 0$$

- Una densità spettrale di potenza costante e dipendente dal valore resistivo, dalla temperatura al quale si trova il resistore e della costante di Boltzmann:
$$S_N(f) = 2KTR$$



- Una funzione di auto correlazione impulsiva avente ampiezza pari al valore della densità spettrale (infatti si tratta della sua antitrasformata):
$$R_N(\tau) = (2KTR)\delta(t)$$

Di fatto quindi un processo rumore bianco.

Tale rumore termico viene quindi modellato da un processo rumore bianco che ha uno spettro di potenza costante da $-\infty$ a $+\infty$ e vale $S_N(f) = 2KTR$ ed una funzione di autocorrelazione impulsiva di ampiezza $R_N(\tau) = (2KTR)\delta(t)$.

Se volessimo fissare una banda B e calcolare la potenza all'interno di tale range di frequenza otteniamo:

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) = \int_0^B 2KTR = 4BKTR$$

I processi aleatori gaussiani

Il rumore bianco fa parte di una categoria particolare di processi aleatori: **i processi aleatori gaussiani**, che non tratteremo nel dettaglio ma di cui ne daremo la definizione:

Un processo aleatorio è gaussiano se, in generale, le variabili aleatorie che da esso sono estratte sono gaussiane e se la PDF congiunta di queste ultime è anch'essa gaussiana:

$$\boldsymbol{f_N = [N(t_i), \dots, N(t_N)]}$$

Il rumore bianco è gaussiano ed è uno dei pochi processi per cui, essendo incorrelato e indipendente, **la PDF congiunta è data dal prodotto delle PDF di ogni variabile aleatoria**:

$$f_N[N(t_1), \dots, N(t_N)] = \prod_{i=1}^{n} [f_{N(t_i)}(x)] = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}}\right] e^{-x/\sigma^2}$$

Tutte le PDF $f_N(N(t_i))$ sono gaussiane a media nulla.

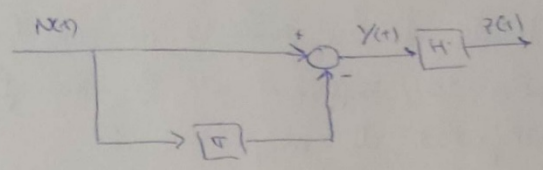
> ***Ricorda: il teorema del limite centrale***
> Dalla teoria delle variabili aleatorie possiamo trarre il **teorema del limite centrale**, secondo il quale la variabile ottenuta dalla somma di due o più variabili aleatorie aventi la stessa distribuzione (stessa PDF e stessa CDF) e gli stessi indici caratteristici è sempre una **variabile aleatoria gaussiana.**

È importante ricordare la definizione di processo aleatorio gaussiano, ovvero che **non si tratta solo delle singole variabili aleatorie gaussiane, bensì anche della loro PDF**.

Esercizio

Sia $N(t)$ un processo aleatorio che rappresenta un rumore bianco gaussiano a media nulla e avente spettro di potenza costante pari a $S_N(f)=10$

Si supponga $N(t)$ attraversi un sistema lineare tempo invariante:



$N(t)$ passa per un ritardatore di $T = 5\,ms$, dopo di che viene sommata ad $N(t)$ la versione traslata $N(t-T)$, ottenendo $Y(t)$.

Il processo $Y(t)$ viene posto in ingresso ad un filtro $H(f)$ avente una banda passante da $-B$ a B con $B = 100\,Hz$.

Calcolare la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$.

Calcolare la funzione di autocorrelazione di $Z(t)$.

Calcolare la potenza di $Z(t)$.

1. Calcolo della funzione di autocorrelazione

$Y(t)$ è dato dalla somma algebrica di $N(t)$ ed $N(t-T)$, dove:

$N(t) \rightarrow$ Rumore bianco

$T = 10^{-3}\,s$

Per definizione, la f. di autocorrelazione R_Y è data dal valor medio del prodotto di $Y(t)$ e $Y(t+\tau)$:

$$R_{YY}(\tau) \triangleq E\{Y(t)\,Y(t+\tau)\}$$

$$R_{YY}(\tau) \triangleq E\{\underbrace{[N(t) - N(t-T)]}_{Y(t)}\,\underbrace{[N(t+\tau) - N(t-T+\tau)]}_{Y(t+\tau)}\}$$

Eseguiamo i prodotti dell'argomento di valor medio:

$$R_{YY}(\tau) = E\{N(t)\,N(t+\tau)\} - E\{N(t)\,N(t-T+\tau)\} - E\{N(t-T)\,N(t+\tau)\} +$$
$$+ E\{N(t-T)\,N(t-T+\tau)\}$$

Analizziamo i termini:

$E\{N(t)\,N(t+\tau)\} \triangleq R_N(\tau)$

$E\{N(t)\,N(t-(T+\tau))\} \triangleq R_N(\tau-T) \rightarrow$ si tratta dell'autocorrelazione calcolata per istanti che non distano "τ", bensì "$\tau-T$"

(13)

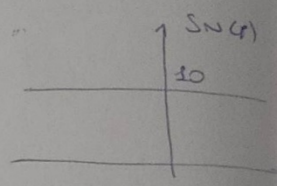
$E\{N(t-\tau)N(t+\tau)\} = R_N(t+\tau)$

$E\{N(t-\tau)N(t-\tau+\tau)\} = R_N(\tau)$

Sostituiamo quindi:

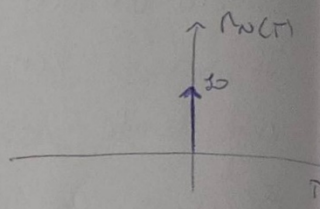
$R_Y(\tau) = R_N(\tau) - R_N(\tau-\tau) - R_N(\tau+\tau) + R_N(\tau)$

Tenendo presente che si tratta di un processo rumore bianco avente densità spettrale $S_N = 10$, sappiamo che la sua f. di autocorrelazione è un impulso di ampiezza 10:



$R_N(\tau) = F^{-1}[S_N] = F^{-1}[10] = 10\delta(\tau)$

Otteniamo quindi:

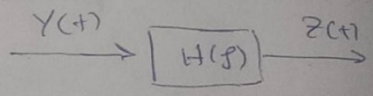


$R_Y(\tau) = 10\delta(\tau) - 10\delta(\tau-\tau) - 10(\tau+\tau) + 10(\tau)$

$R_Y(\tau) = 20\delta(\tau) - 10\delta(\tau-\tau) - 10(\tau+\tau)$

2) Calcolo della funzione di autocorrelazione

$Z(t)$ è ottenuto dal filtraggio di $Y(t)$ con il filtro $H(f)$. A questo punto troviamo la densità spettrale di potenza di Y, così da poterlo filtrare:

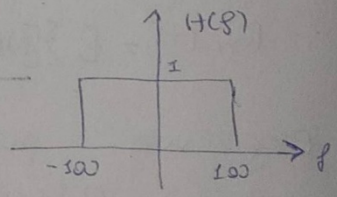


$$S_Z(f) = |H(f)|^2 S_Y(f)$$

Otteniamo $S_Y(f)$:

$$S_Y(f) = 20 + [20\cos(2\pi f_0(\tau+t))] \cdot (-10e^{-j2\pi f\tau} - 10e^{+j2\pi f\tau})$$

Il filtro ha banda da -100 Hz a 100 Hz ovviamente sia ideale ed ampiezza unitaria (quindi da taglio le frequenze ma lascia invariate le ampiezze)

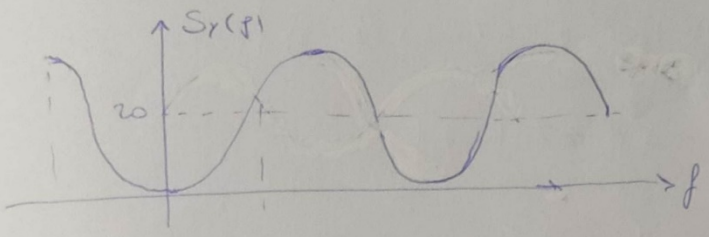


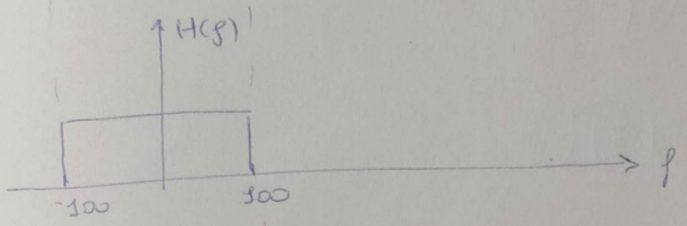
$|H(f)|^2$ è identico poiché l'unica cosa che cambierebbe sarebbe l'ampiezza, che viene elevata al quadrato, ma essendo quest'ultima unitaria essa non varia.

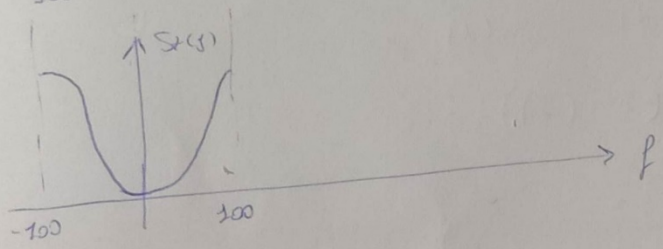
$$|H(f)|^2 = H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Quindi:

$$S_Z(f) = |H(f)|^2 S_Y(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot \left[20 + 20\cos(2\pi f_0 T)\right]$$







3) Calcolo delle potenze

Calcoliamo la potenza, disponendo dello spettro di potenza $S_Z(f)$, come integrale di quest'ultimo:

$$P_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\, df$$

Sapendo che $S_Z(f)$ è definito solo tra -100 e 100 a seguito del filtraggio scriviamo:

DAL FILTRAGGIO SI HA SOLO $S_Y(f)$ IN [-100, 100]

$$P_Z \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} S_Z(f)\, df = \int_{-B}^{+B} S_Z(f)\, df = \int_{-100}^{+100} \left[20 - 20\cos(2\pi f T)\right] df$$

$$P_Z = \int_{-100}^{100} 20 - 20\cos(2\pi f T)\, df = \int_{-100}^{100} 20\, df - 20\int_{-100}^{100} \cos(2\pi f T)\, df$$

$$P_Z = 20\left[100 + 100\right] - 20\left[\frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi T}\right]_{-100}^{100} =$$

$$P_Z = 4000 - \frac{20}{2\pi T}\left[\sin(2\pi (100) T) - \sin(2\pi(-100)T)\right] =$$

(15)

Sostituiamo $T = 10^{-3}$ s:

$$P_Z = 4000 - \frac{20}{2\pi T}\left[\sin(2\pi(100)T) - \sin(2\pi(-100)T)\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{20}{2\pi(10^{-3})}\left[\sin(2\pi(100)10^{-3}) - \sin(2\pi(-100)(10^{-3}))\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{20\cdot 10^{3}}{2\pi}\left[\sin(2\pi 10^{-1}) - \sin(-2\pi 10^{-1})\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{20.000}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{10}\right)\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{10.000}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

Il seno è dispari, quindi $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, per cui:

$$P_Z = 4000 - \frac{10.000}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{10.000}{\pi}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\pi/5$, per ottenere un seno cardinale:

$$P_Z = 4000 - \frac{\pi/5}{\pi/5}\left[\frac{10000}{\pi}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right] = 4000 - \left[\frac{1000\,(\pi/5)}{\pi}\,2\left(\frac{\sin(\pi/5)}{\pi/5}\right)\right]$$

$$P_Z = 4000 - \frac{1000}{5}\left(2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = 4000 - 4000\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Calcoliamo la f. di autocorrelazione di $Z(t)$:

$$R_Z(\tau) \triangleq F^{-1}[S_Z(f)] = F^{-1}\left[(20 - 20\cos(\pi f \tau))\,\Pi(f/2B)\right]$$

$$R_Z(\tau) = F^{-1}[20\,\Pi(f/2B)] - F^{-1}[20\cos(\pi f \tau)\,\Pi(f/2B)]$$

$$R_Z(\tau) = 20\left[2B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\right] - \left[20\left(\frac{2B\,\mathrm{sinc}(\tau - T) + 2B\,\mathrm{sinc}(\tau + T)}{2}\right)\right]$$

$$R_Z(\tau) = 40B\,\mathrm{sinc}(2B\tau) - 20B\left(\mathrm{sinc}(\tau - T) + \mathrm{sinc}(\tau + T)\right)$$

$$R_Z(\tau) = 40\,000\,\mathrm{sinc}(200\tau) - 200\,\mathrm{sinc}(t - T) + 200\,\mathrm{sinc}(\tau + T)$$ (*)

(*) rivedere

Si noti che si è potuto applicare il t. della modulazione anche passando da frequenze a tempo!

Normalmente si è abituati a trasformare un segnale nel tempo con $u(t)\cos(2\pi f_0 t)$ con il t. della modulazione, tuttavia questa operazione è possibile anche con l'antitrasformazione, si tratta di un banale cambio di variabili: $f \to t$

$$y(t) = u(t)\cos(j2\pi f_0 t) \longrightarrow Y(f) = \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

CAMBIO VARIABILE: $t \to f$

CAMBIO VARIABILE: $f \to t$

$$y(f) = u(f)\cos(j2\pi T_0 f) \longrightarrow Y(t) = \frac{X(t-T_0) + X(t+T_0)}{2}$$

In virtù della dualità

Esercizio: filtraggio di un processo aleatorio

Sia $X(t)$ un processo aleatorio stazionario in senso lato, la cui funzione di autocorrelazione è:

$$R_X(\tau) = 500\ sinc(500\tau)$$

Da questo si ottenga un nuovo processo aleatorio $Y(t)$, ottenuto sottraendo a $X(t)$ un valore costante $K > 0$.

Si suppone che $Y(t)$ sia posto in ingresso ad un sistema tempo invariante la cui funzione di trasferimento è:

$$h(t) = 1000sinc(1000t) - 200sinc(200t)$$

Sia $Z(t)$ il processo in uscita dal filtro. Si calcoli:

1. La potenza media si $X(t)$
2. Il valore di K tale che la potenza $Y(t)$ sia pari al doppio di quella di $X(t)$
3. La funzione densità spettrale di potenza del processo $Z(t)$
4. La funzione di autocorrelazione di $Z(t)$
5. La potenza media del segnale $Z(t)$

1. Calcolo della potenza media di X(t)

Calcoliamo la potenza media di X(t) considerando la funzione di autocorrelazione in $\tau = 0$:

$$P_X = R_X(0) = 500\ sinc(0) = 500$$

2. Calcolo del valore K affinché $P_X = P_Y$

Si vuole ricavare praticamente K affinché:

$$P_Y = 2P_X = 2(500) = 1000$$

Y(t) è dato a partire da X(t):

$$Y(t) = X(t) - K$$

Per ottenere l'espressione della potenza dobbiamo ricavare la funzione di autocorrelazione:

$$R_Y(\tau) = E\{y(t)y(t-\tau)\}$$

Ma se dobbiamo ricavare $R_Y(\tau)$ quando $\tau = 0$, dobbiamo praticamente ricavare:

$$R_Y(0) = E\{y(t)y(t-\tau)\}_{\tau=0} = E\{y(t)y(t)\} = E\{y^2(t)\}$$

$$E\{y^2(t)\} = E\{[X(t)-K][X(t)-K]\} = E\{X(t)X(t)\} - E\{KX(t)\} - E\{KX(t)\} + E\{K^2\}$$

$$E\{y^2(t)\} = R_X(0) - 2KE\{X(t)\} + K^2$$

Troviamo il valor medio di $X(t)$:

$$E\{X(t)\} \triangleq \lim_{T\to\infty} R_X(T) = \lim_{T\to\infty}[500\ sinc(500\tau)] = 0$$

Si ricordi che il seno cardinale si attenua sempre di più man mano che esso evolve nel tempo, fino ad annullarsi quando $T \to \infty$. Otteniamo quindi:

$$E\{y^2(t)\} = R_X(0) - 2KE\{X(t)\} + K^2 = R_X(0) + K^2 = 500 + K^2$$

Affinché $P_Y = 2P_X = 1000$ deve accadere che:

$$P_Y = 1000 \quad \to \quad 500 + K^2 = 1000 \quad \to \quad K = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

3. Calcolo della densità spettrale $S_Z(f)$

Per ottenere $S_Z(f)$ è necessario filtrare $Y(t)$; lavoriamo in frequenza per evitare la convoluzione:

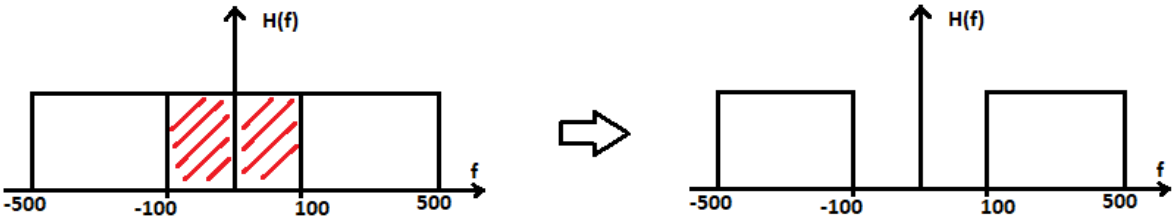
$$S_Z(f) = |H(f)|^2 S_Y(f)$$

Possiamo ottenere la densità spettrale $Y(t)$ trasformando la sua funzione di autocorrelazione:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) + K^2 \quad \rightarrow \quad F[R_X(\tau) + K^2] = F[500\, sinc(500\tau)] \quad \rightarrow \quad S_Y(f) = rect\left(\frac{f}{500}\right) + 500\delta(f)$$

Il filtro ha una risposta in frequenza data da:

$$F[h(t)] = F[1000sinc(1000\tau) - 200sinc(200\tau)] \quad \rightarrow \quad H(f) = rect\left(\frac{f}{1000}\right) - rect\left(\frac{f}{200}\right)$$



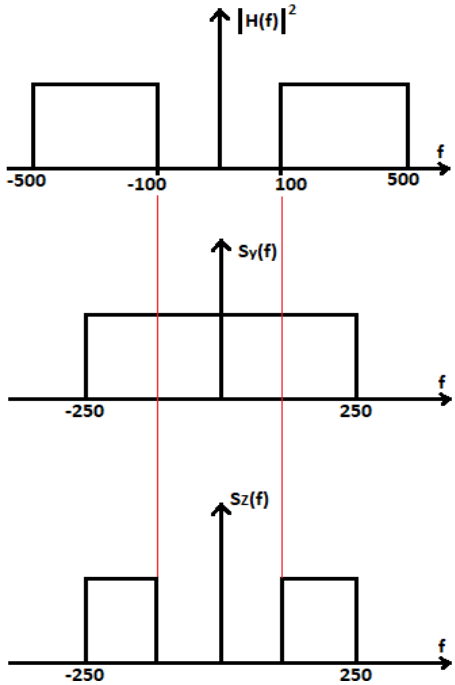
Trovando $|H(f)|^2$ osserviamo che non vi sono differenze con H(f) dato che il filtro ha ampiezza unitaria: $|1|^2 = 1$.

A questo punto procediamo con il filtraggio. Graficamente possiamo notare che viene eliminata la parte di spettro che non ricade entro il filtro, quindi permangono due rect nello spettro bilatero: uno da -250 a -100 e un altro tra 100 e 250, entrambi sono ad ampiezza unitaria. Si tratta quindi di due rect speculari, di ampiezza 150 e centrati in $f_0 = 175$, quindi:

$$S_Z(f) = rect\left(\frac{f - 175}{150}\right) + rect\left(\frac{f + 175}{150}\right)$$

È più pratico vedere due rect come risultato della differenza di un rect di base 500 centrato in 0 ed un rect di base 200 centrato in zero; il risultato è comunque uguale, preferiremo questa forma:

$$\boldsymbol{S_Z(f) = rect\left(\frac{f}{500}\right) + rect\left(\frac{f}{200}\right)}$$



4. Calcolo della funzione di autocorrelazione $R_Z(\tau)$:

La funzione di autocorrelazione la otteniamo come antitrasformata dello spettro di potenza:

$$R_Z(\tau) = F^{-1}[S_Z(f)] = F^{-1}\left[rect\left(\frac{f}{500}\right) + rect\left(\frac{f}{200}\right)\right] = 500sinc(500\tau) - 200sinc(200\tau)$$

5. Calcolo potenza P_Z:

La potenza la ricaviamo calcolando la funzione di autocorrelazione in $\tau = 0$

$$R_Z(0) = 500sinc(0) - 200sinc(0) = 500 - 200 = 300$$

Come controverifica valutiamo la potenza integrando la densità spettrale di potenza:

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{f}{500}\right) + rect\left(\frac{f}{200}\right) df \xrightarrow{Spettro\ Simmetria} P_X = 2\int_{100}^{0} S_X(f) = 2[1 * 150] = 300$$

Esercizio: filtraggio di un processo con rumore

Il processo aleatorio stazionario in senso lato X(t) ha densità di potenza pari a:

$$S_X(f) = \Delta\left(\frac{f}{2}\right)$$

Al processo X(t) viene sommato un rumore bianco N(t) avente densità spettrale di potenza pari a 1.
Sia Y(t) il processo risultante; si assuma che quest'ultimo passa attraverso un filtro avente funzione di trasferimento:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{5}\right)$$

Sia Z (t) il processo filtrato punto calcolare e disegnare:

1. La densità spettrale di potenza di Y(t)
2. La funzione di autocorrelazione di Y (t)
3. La densità spettrale di potenza di Z (t)
4. La funzione di autocorrelazione di Z(t)
5. La potenza di Z(t) prima a partire dal suo spettro, poi passando dalla sua funzione di autocorrelazione verificare la correttezza dei risultati.

1. Ricavare la densità spettrale di Y(t)

Y (t) è dato dalla somma di X (t) ed il rumore bianco N(t):

$$Y(t) = X(t) + N(t)$$

A questo punto troviamo la funzione di autocorrelazione:

$$R_Y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{[X(t) + N(t)] * [X(t+\tau) + N(t+\tau)]\}$$

$$R_Y(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} + E\{X(t)N(t+\tau)\} + E\{X(t+\tau)N(t)\} + E\{N(t)N(t+\tau)\}$$

Il rumore bianco N(t) è un processo indipendente dal segnale utile X(t), quando si calcola il valore medio del prodotto tra due variabili statisticamente indipendenti, questo lo si può ottenere come prodotto dei singoli valori medi.
Quindi, dato che il rumore bianco esiste a prescindere dal segnale utile, esso sarà indipendente da X(t), per cui:

$$E\{X(t)N(t+\tau)\} = E\{X(t)\} * E\{N(t+\tau)\}$$
$$E\{X(t+\tau)N(t)\} = E\{X(t+\tau)\} * E\{N(t)\}$$

Ma si noti che il valore medio del rumore bianco è nullo, inoltre, dato che il segnale utile ha uno spettro $S_X(f)$ triangolare, ne consegue che la sua autocorrezione è un $sinc^2$, che ha un valore medio nullo.
Otteniamo allora:

$$E\{X(t)N(t+\tau)\} = E\{X(t)\} * E\{N(t+\tau)\} = 0$$
$$E\{X(t+\tau)N(t)\} = E\{X(t+\tau)\} * E\{N(t)\} = 0$$

La funzione di autocorrelazione del processo $Y(t)$ vale:

$$R_Y(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} + E\{X(t)N(t+\tau)\} + E\{X(t+\tau)N(t)\} + E\{N(t)N(t+\tau)\}$$

$$R_Y(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} + 0 + 0 + E\{N(t)N(t+\tau)\} = R_X(\tau) + R_N(\tau)$$

Ricaviamo quindi la densità spettrale S_Y:

$$S_Y(f) = F[R_Y(\tau)] = F[R_X(\tau) + R_N(\tau)] = S_X(f) + S_N(f)) = \Delta\left(\frac{f}{2}\right) + 1$$

Questo è il risultato lo avremmo ottenuto direttamente sapendo che lo spettro di potenza $S_Y(f)$ è dato dalla somma dello spettro del segnale utile $S_X(f)$ e dello spettro del rumore $S_N(f)$ poiché il segnale X(t) ed il rumore bianco N(t) sono indipendenti.

2. Funzione di autocorrelazione $R_Y(T)$

Abbiamo ottenuto la forma analitica della funzione di autocorrelazione nel punto precedente:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) + R_N(\tau)$$

Sapendo che la funzione di autocorrelazione del rumore bianco è impulsiva e sapendo che essa in questo caso ha ampiezza unitaria, possiamo scrivere:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) + R_N(\tau) = R_X(\tau) + \delta(\tau)$$

$$R_X(\tau) = F^{-1}[S_X(f)] = F^{-1}\left[\Delta\left(\frac{f}{2}\right)\right] = \frac{1}{1/2} sinc^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = 2sinc^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \delta(\tau)$$

$$R_Y(\tau) = 2sinc^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \delta(\tau)$$

3. Densità spettrale di Z(t)

Z(t) è il segnale in uscita dal filtro cui funzione di trasferimento è:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{5}\right)$$

Passiamo al calcolo in frequenza:

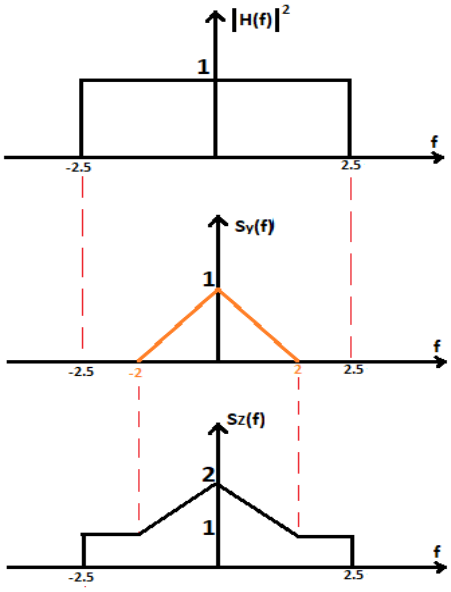
$$S_Z(f) = |H(f)|^2 S_Y(f)$$

H(f) e $|H(f)|^2$ sono identici perché il filtro ha ampiezza unitaria.

Tale rect ha ampiezza unitaria, è centrato in 0 ed avendo base pari a 5 si estende da -2,5 a 2,5.

Possiamo scrivere $S_Z(f)$ come somma di un rect e un triangolo:

$$S_Z(f) = \pi\left(\frac{f}{5}\right) + \Delta\left(\frac{f}{2}\right)$$



4. Funzione di autocorrelazione $R_Z(T)$

Troviamo la funzione di autocorrelazione la otteniamo trasformando lo spettro di potenza:

$$R_Z(\tau) = F^{-1}[S_Z(f)] = F^{-1}\left[\pi\left(\frac{f}{5}\right) + \Delta\left(\frac{f}{2}\right)\right] = 5\, sinc(5\tau) + 2\, sinc^2(2\tau)$$

5. Ricaviamo la potenza nei due modi conosciuti

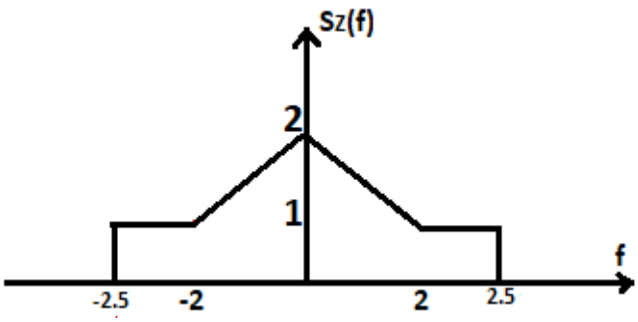
Ricaviamo la potenza in funzione dello spettro di potenza e della funzione di autocorrelazione e verifichiamo che i risultati siano uguali.

$$P_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df \xrightarrow{Spettro\ Simmetria} P_X = 2\int_0^{+\infty} S_X(f) = 2\left[\int_0^2 S_X(f) + \int_2^{2.5} S_X(f)\right] = 2\left[\left(\frac{1*2}{2}\right) + (1*2.5)\right] = 7$$

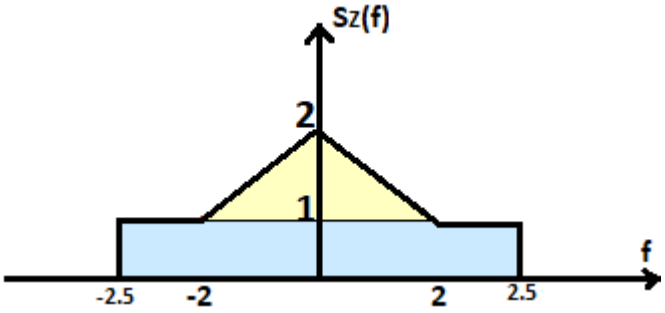
$$P_Z = R_X(0) = 5\, sinc(0) + 2\, sinc^2(0) = 7$$

Si noti che abbiamo calcolato l'area sottesa dal triangolo e dal rettangolo facendo praticamente (base*altezza) e (base*altezza) /2, tuttavia, sarebbe più corretto passare alla forma analitica, vedendo il rect come un gradino costante ed il triangolo come due rette con un vertice in comune, è possibile ottenere quest'ultime con il passaggio per due punti.

Abbiamo ottenuto lo stesso valore.



Importante!
Non si può ottenere la potenza dello spettro $S \quad Z(f)$ sommando la potenza del triangolo e quella del rettangolo. Tuttavia, è possibile calcolare le aree sottese da queste figure conoscendone base e altezza, poiché questo procedimento consiste praticamente nel calcolo dell'integrale ove le figure sono definite e tale integrale è quello utilizzato nella definizione di potenza calcolata a partire dallo spettro.



Ricapitolando, ciò che abbiamo visto di nuovo in questo esercizio è **che quando un segnale è dato dalla somma di un altro segnale ed un processo rumore bianco: $Y(t) = X(t) + N(t)$ la densità spettrale di questo segnale è data dalla somma della densità spettrale del segnale utile $S_X(f)$ della densità spettrale del rumore $S_N(f)$, in virtù del fatto che il segnale utile ed il rumore sono statisticamente indipendenti:**

$$S_Y(f) = S_X(f) + S_N(f) = S_X(f) + S(0)$$

I processi aleatori ergodici

Il processo aleatorio, come abbiamo visto, è un modello utilizzato per modellare un segnale aleatorio, che può essere visto come un insieme di funzioni membro determinate.

Quando si osserva la **singola funzione membro** si considera praticamente un singolo segnale determinato, di esso può essere possibile, ad esempio, calcolare **il valor medio nel tempo**.

È importante fare la distinzione tra i concetti di **valore medio di un segnale deterministico** e di **media statistica o valore medio statistico** (del processo):

- Il **valore medio del segnale determinato** è dato dal limite per $T \to \infty$ del rapporto tra il periodo sì ed il segnale sotto il segno di integrale:

$$< x(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ dt$$

  Questo valore è quindi ottenuto nel tempo, mediante opportuna **integrazione temporale (in dt)**

- La **media statistica** o **valore medio statistico di un processo aleatorio** viene calcolata fissando un istante: fissato $t = \bar{t}$, tutti i valori che può assumere il segnale in tale istante possono essere visti come variabili aleatorie$\omega_i = X_i(\bar{t})$; è possibile calcolare la media statistica tra queste variabili aleatorie:

$$E\{X_i(\bar{t})\} = \eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(f)\, dx$$

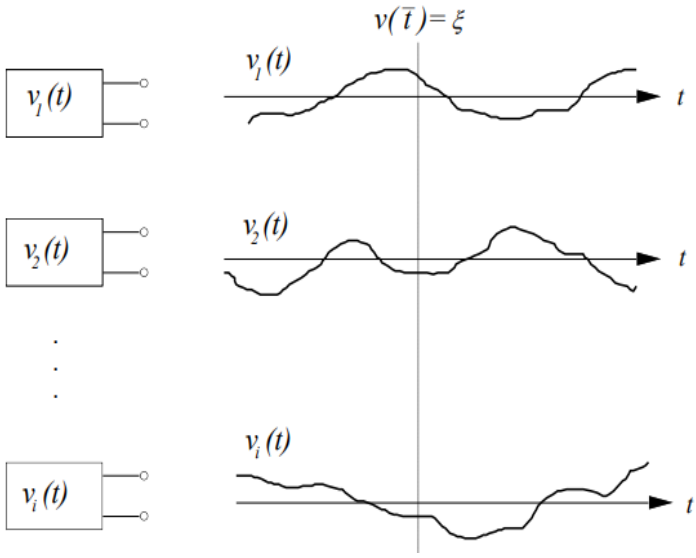
  È anche possibile calcolare la funzione media nel tempo, che corrisponde all'insieme delle medie statistiche istante per istante.
  Differentemente dal caso precedente, questo valore è ottenuto mediante **integrazione dei valori assumibili dalla variabile aleatoria (ovvero dei valori "x" che può assumere il segnale in $\bar{t}$ (dx)**

Supponiamo di analizzare un processo aleatorio cui funzioni membro siano quelle rappresentate:

$$V_1(t), V_2(t), \dots, V_i(t)$$

Ognuna di queste funzioni è determinata e potrebbe essere possibile calcolarne il valore medio nel tempo:

$$< V(\omega_i, t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V(\overline{\omega_i}, t)\ dt$$



Se viene fissato l'istante $\bar{t}$ si ottiene la variabile aleatoria:

$$V(\bar{t}) = \xi$$

Cui valori che può assumere variano casualmente in uno spazio campione in cui i campioni corrispondono ai valori delle funzioni membro calcolate in $t = \bar{t}$:

$$\Omega = \{V_1(\bar{t}), V_2(\bar{t}), \dots, V_i(\bar{t})\}$$

Una volta fissato l'istante $t = \bar{t}$ si può calcolare la media statistica della variabile aleatoria $V(\bar{t}) = \xi$:

$$E\{V(\omega, \bar{t})\} = E\{\xi\} = \eta_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi * f_\xi(x)\, dx$$

Chiaramente, i due valori medi trovati sono differenti e si riferiscono informazioni differenti:

$$< V(\omega_i, t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V(\omega_i, t)\ dt \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi * f_\xi(x)\, dx = E\{V(\omega, \bar{t})\}$$

Come possiamo osservare, le due medie sono differenti, **infatti la media statistica si ottiene con un'integrazione dei valori nello spazio campione (dx)**, mentre **la media del segnale determinato si ottiene integrando nel tempo (dt)**.

Inoltre, si noti che per trovare la media del segnale determinato è necessario fissare un campione: scegliere, ad esempio, $\bar{\omega}$ e calcolare di quest'ultimo la media temporale nel tempo: $< V(\bar{\omega}, t) >$; mentre per trovare la media statistica è necessario fissare il tempo e studiare $E\{v(\omega, \bar{t})\}$ al variare dei campioni nello spazio campione di $v(\omega, \bar{t}) = \xi$.

Normalmente la media statistica è disgiunta dalla media temporale e non è possibile dedurre l'una dall'altra e viceversa.

Esempio: Consideriamo il processo aleatorio che analizza i terremoti; ogni singolo terremoto è una funzione membro, rappresentata da un grafico in scala Richter.

Se essi studiasse un micro-terremoto che agisce in questo momento, possibilmente si ricava che la sua media temporale è $0.001MI$ (magnitudo Richter).

Ma questo dato, estrapolato dal singolo terremoto all'istante "t_i", non può portarci ad affermare che la media statistica di tutti i terremoti avvenuti a Catania è pari a $0.001MI$ (a Catania vi sono stati, infatti, dei terremoti molto più forti nell'arco degli anni!)

Quindi la media statistica è differente da quella temporale:

- la media statistica del processo riguarda **la media di tutti i valori che esso può assumere fissando l'istante T**
- la media temporale si riferisce **al singolo segnale campione determinato** al variare del tempo

In generale, **media statistica** e **media temporale** **sono differenti**; esistono, tuttavia, dei processi in cui media statistica e media temporale **corrispondono**: si tratta dei **processi aleatori ergodici**.
In generale diremo che:

Per il processo ergodico, una grandezza statistica può essere ricavata attraverso una media temporale su qualunque realizzazione del processo, ovvero su qualunque funzione membro.

$$\boldsymbol{Processo\ aleatorio\ ergodico}: \quad \boldsymbol{E\{X(\omega, \bar{t})\} = < X(\bar{\omega}, t) >}$$

Il vantaggio di lavorare con i processi ergodici è quello di lavorare con dei processi per cui, **valutando il valore medio della singola funzione membro** (che è semplice da valutare trattandosi di un segnale determinato) **è possibile ricavare alla media statistica dell'intero processo**.
Questo è molto vantaggioso, considerando che il calcolo della media statistica non è affatto semplice dato che si deve tenere conto di tutte le funzioni membro dello spazio campione.

Esempio: per tutti i terremoti calcolare la media statistica significherebbe considerare tutti i terremoti accaduti fino a oggi sovrapporli e studiarne la media statistica istante per istante, "estrapolando" una variabile aleatoria dal processo.
Con un processo ergodico non è necessario calcolare la media statistica istante per istante: basta considerare un singolo campione, ovvero una singola funzione membro (in questo caso un singolo terremoto), e calcolare il valore medio temporale:

$$\boldsymbol{E\{X(\omega, \bar{t})\} = < X(\bar{\omega}, t) >}$$

Ergodicità del valore medio di un processo aleatorio

Definita la media temporale e la media statistica di un processo aleatorio:

$$\boldsymbol{Media\ temporale}: \ < X(\bar{\omega}\,, t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(\bar{\omega}\,, t)\ dt$$

$$\boldsymbol{Media\ statistica}: \ E\{X(\omega\,, \bar{t})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

Diremo che il processo è **ergodico in valore medio** se:

1. **media temporale e media statistica coincidono con probabilità I, ovvero per qualsiasi funzione membro**
2. **la media statistica non dipende da "*t*",** poiché dovendo coincidere con la media temporale quest'ultima è un valore numerico indipendente dalla variabile temporale.

Questa seconda osservazione ci permette di affermare che **un processo ergodico in valor medio deve avere un valore medio statistico costante, ovvero che deve essere un processo stazionario in senso lato**. Il fatto che il processo deve essere stazionario è una <u>condizione necessaria ma non sufficiente</u> affinché esso sia ergodico: un processo ergodico è sicuramente stazionario ma non è detto che un processo stazionario sia sicuramente ergodico.

Ricapitolando: **un processo ergodico è un processo in cui le caratteristiche temporali coincidono con le caratteristiche statistiche**; in particolare, parliamo di **ergodicità del valore medio se il valore medio temporale di qualunque funzione membro è uguale alla media statistica**, questo significa che, dato che la media temporale è un numero, anche la media statistica dovrà essere un numero costante e ciò ci porta ad affermare che **il processo ergodico è un processo stazionario in senso lato**.

Ergodicità della funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio

Parliamo di **ergodicità della funzione di autocorrelazione** di un processo se **l'autocorrelazione del singolo segnale membro determinato**:

$$R_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(t)\, X_i(t+\tau)\ d\tau$$

È uguale alla funzione di **autocorrelazione statistica** calcolata fissando due istanti t e $(t\ +\ \tau)$:

$$R_X(\tau) = E\{X_i(t)\, X_i(t+\tau)\}$$

> ***Ricorda***: la funzione di autocorrelazione di un segnale determinato è data dell'integrale del prodotto tra il segnale t e del medesimo all'istante traslato $t + T$

La funzione di autocorrelazione nel tempo è diversa dalla funzione di autocorrelazione statistica, diremo che il processo è **ergodico in autocorrelazione** se queste due coincidono:

$$R_{X_i}(t) = R_X(\tau) \quad \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(t)\, X_i(t+\tau)\ d\tau = E\{X_i(t)\, X_i(t+\tau)\}$$

L'ergodicità in autocorrelazione ci porta ad affermare che, dato che l'autocorrelazione è l'antitrasformata dello spettro di potenza del processo, **una volta che coincidono la funzione di autocorrelazione del singolo segnale membro e la funzione autocorrelazione statistica dell'intero processo, si può conoscere la densità spettrale di potenza del processo studiando la sola densità spettrale di potenza del segnale membro:**

$$S_{X_i}(f) = S_X(f)$$

Non esiste una condizione necessaria e sufficiente affinché sia provata l'ergodicità: si dovrebbe verificare quest'ultima considerando più funzioni membro e studiandole singolarmente.

→ Parliamo di **ergodicità del valor medio** se **la media statistica del processo ad un istante fissato e la media temporale di un segnale membro coincidono** (e quindi se queste assumono un valore costante, da cui ne consegue che il processo è necessariamente stazionario in senso lato):

$$< X(\bar{\omega}\,, t) > = E\{X(\omega\,, \bar{t})\} \quad \rightarrow \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(\bar{\omega}\,, t)\ dt \ = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

→ Parliamo di **ergodicità della funzione di autocorrelazione se la funzione di autocorrelazione nel tempo di una singola funzione membro corrisponde alla funzione di autocorrelazione dell'intero processo**:

$$R_{X_i}(t) = R_X(\tau) \quad \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(t)\, X_i(t+\tau)\ d\tau = \ E\{X_i(t)\, X_i(t+\tau)\}$$

In tal caso la densità spettrale di Potenza coinciderà con la densità rispetto al singolo segnale membro.

$$S_{X_i}(f) = S_X(f)$$

Quando un processo è ergodico basta studiare una singola funzione membro che si sta praticamente studiando l'intero processo aleatorio.

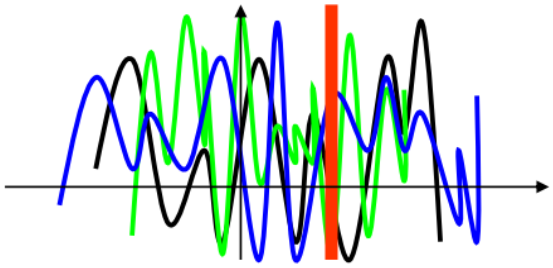
Ergodicità in senso lato

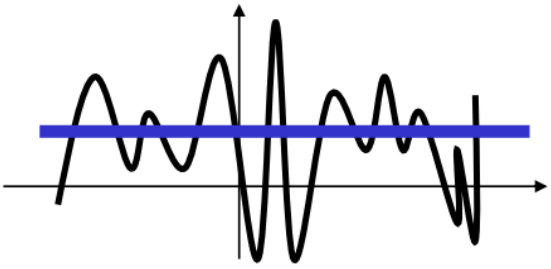
Un processo ergodico in senso lato è un processo per cui **l'ergodicità è verificata per il valor medio o per la funzione di autocorrelazione**.
Questo vuol dire che **un processo è ergodico in senso lato se, scelta a caso una qualsiasi realizzazione (funzione membro), le medie di insieme coincidono con quelle temporali con probabilità I**

Normalmente ci viene detto se un processo ergodico meno perché se lo si vuole sapere sperimentalmente si dovrebbe verificare per un certo numero di funzioni membro l'ergodicità del valore medio e/o della funzione di autocorrelazione.

La conseguenza dell'ergodicità in senso lato è che è possibile misurare certe statistiche, definite come media di insieme, mediante le corrispettive medie temporali calcolate su una sola realizzazione: **è possibile conoscere il valor medio dell'intero processo conoscendo il valor medio di un singolo segnale membro (ergodicità per il valor medio), oppure conoscere la funzione di autocorrelazione statistica dell'intero processo conoscendo la funzione di autocorrelazione di un singolo segnale membro.**

Esempio: Se si calcola il valore medio del processo in t_1, t_2, t_3, t_4 ed il processo è ergodico allora tale valore medio statistico lo si può ricavare più semplicemente calcolando il valore medio temporale di un singolo campione, ad esempio $X_1(t)$.
Chiaramente, deve accadere che il valore medio statistico sia costante e indipendente da t, quindi che il processo sia stazionario in senso lato.





NB! È possibile considerare una qualsiasi realizzazione (segnale membro) $X_i(t)$, non necessariamente $X_1(t)$

In questo modo è più semplice trovare le caratteristiche del processo basta una sola funzione membro per studiare il processo!